

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Modellierung und Simulation einer Virusausbreitung

Robert Haas

Vortrag an der OTH Regensburg

2. Dezember 2024

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- Mathematische Modellierung von Epidemien:
Aufmerksamkeit seit Corona

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- ▶ Mathematische Modellierung von Epidemien: Aufmerksamkeit seit Corona
- ▶ Geschichte dieses Forschungsgebiets älter

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- ▶ Mathematische Modellierung von Epidemien: Aufmerksamkeit seit Corona
- ▶ Geschichte dieses Forschungsgebiets älter
- ▶ Beispiel: Arbeiten von Kermack und McKendrick, [Kermack und McKendrick, 1927]

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- ▶ Mathematische Modellierung von Epidemien: Aufmerksamkeit seit Corona
- ▶ Geschichte dieses Forschungsgebiets älter
- ▶ Beispiel: Arbeiten von Kermack und McKendrick, [Kermack und McKendrick, 1927]
- ▶ Deterministische Modelle und stochastische Modelle

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- ▶ Mathematische Modellierung von Epidemien: Aufmerksamkeit seit Corona
- ▶ Geschichte dieses Forschungsgebiets älter
- ▶ Beispiel: Arbeiten von Kermack und McKendrick, [Kermack und McKendrick, 1927]
- ▶ Deterministische Modelle und stochastische Modelle
- ▶ Beispiele: SIS-Modell, SIR-Modell, SEIR-Modell

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- **Susceptible individuals S:** Nicht infizierte, gesunde Personen, die infiziert werden können: $S = S(t)$

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- ▶ **Susceptible individuals S:** Nicht infizierte, gesunde Personen, die infiziert werden können: $S = S(t)$
- ▶ **Infectious individuals I:** Infizierte Personen, die andere Personen anstecken können: $I = I(t)$

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- ▶ **Susceptible individuals S:** Nicht infizierte, gesunde Personen, die infiziert werden können: $S = S(t)$
- ▶ **Infectious individuals I:** Infizierte Personen, die andere Personen anstecken können: $I = I(t)$
- ▶ **Removed individuals R:** Durch Heilung oder Tod vom Infektionsgeschehen entfernte Personen: $R = R(t)$

(A1) Jede Person kann mit jeder anderen Person in Kontakt treten.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

(A1) Jede Person kann mit jeder anderen Person in Kontakt treten.

(A2) N sehr groß \rightarrow Anwendbarkeit eines deterministischen Modells.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- (A1) Jede Person kann mit jeder anderen Person in Kontakt treten.
- (A2) N sehr groß \rightarrow Anwendbarkeit eines deterministischen Modells.
- (A3) S, I, R reellwertige Funktionen \rightarrow Anwendbarkeit von Differentialrechnung.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- (A1) Jede Person kann mit jeder anderen Person in Kontakt treten.
- (A2) N sehr groß \rightarrow Anwendbarkeit eines deterministischen Modells.
- (A3) S, I, R reellwertige Funktionen \rightarrow Anwendbarkeit von Differentialrechnung.
- (A4) Eine Person kann jede Phase der Kette $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$ durchlaufen.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- (A1) Jede Person kann mit jeder anderen Person in Kontakt treten.
- (A2) N sehr groß \rightarrow Anwendbarkeit eines deterministischen Modells.
- (A3) S, I, R reellwertige Funktionen \rightarrow Anwendbarkeit von Differentialrechnung.
- (A4) Eine Person kann jede Phase der Kette $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$ durchlaufen.
- (A5) Am Ende ($t \rightarrow \infty$) befinden sich alle Personen entweder in der Gruppe \mathbf{S} oder \mathbf{R} .

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- (A1) Jede Person kann mit jeder anderen Person in Kontakt treten.
- (A2) N sehr groß \rightarrow Anwendbarkeit eines deterministischen Modells.
- (A3) S, I, R reellwertige Funktionen \rightarrow Anwendbarkeit von Differentialrechnung.
- (A4) Eine Person kann jede Phase der Kette $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$ durchlaufen.
- (A5) Am Ende ($t \rightarrow \infty$) befinden sich alle Personen entweder in der Gruppe \mathbf{S} oder \mathbf{R} .
- (A6) Die Lebenszeiten in \mathbf{I} sind exponentialverteilt: $I \sim \text{Exp}(\gamma)$.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

- (A1) Jede Person kann mit jeder anderen Person in Kontakt treten.
- (A2) N sehr groß \rightarrow Anwendbarkeit eines deterministischen Modells.
- (A3) S, I, R reellwertige Funktionen \rightarrow Anwendbarkeit von Differentialrechnung.
- (A4) Eine Person kann jede Phase der Kette $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$ durchlaufen.
- (A5) Am Ende ($t \rightarrow \infty$) befinden sich alle Personen entweder in der Gruppe \mathbf{S} oder \mathbf{R} .
- (A6) Die Lebenszeiten in \mathbf{I} sind exponentialverteilt: $I \sim \text{Exp}(\gamma)$.
- (A7) $S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{const.}$

Gleichung für S

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gleichung für S

- Annahme (A1): Jede Person aus S kann mit jeder Person aus I in Kontakt treten. Relative Häufigkeit des Kontakts: $I(t)/N$, für Ansteckung: $\beta S(t)I(t)/N$.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gleichung für S

- Annahme (A1): Jede Person aus S kann mit jeder Person aus I in Kontakt treten. Relative Häufigkeit des Kontakts: $I(t)/N$, für Ansteckung: $\beta S(t)I(t)/N$.
- $$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N},$$

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gleichung für S

- Annahme (A1): Jede Person aus S kann mit jeder Person aus I in Kontakt treten. Relative Häufigkeit des Kontakts: $I(t)/N$, für Ansteckung: $\beta S(t)I(t)/N$.
- $$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N},$$

Gleichung für I

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gleichung für S

- Annahme (A1): Jede Person aus S kann mit jeder Person aus I in Kontakt treten. Relative Häufigkeit des Kontakts: $I(t)/N$, für Ansteckung: $\beta S(t)I(t)/N$.
- $$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N},$$

Gleichung für I

- Annahme (A6): Zu $t > 0$ bleibt eine Person aus I mit Wahrscheinlichkeit $e^{-\gamma t}$ infiziert.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gleichung für S

- Annahme (A1): Jede Person aus S kann mit jeder Person aus I in Kontakt treten. Relative Häufigkeit des Kontakts: $I(t)/N$, für Ansteckung: $\beta S(t)I(t)/N$.
- $$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N},$$

Gleichung für I

- Annahme (A6): Zu $t > 0$ bleibt eine Person aus I mit Wahrscheinlichkeit $e^{-\gamma t}$ infiziert.
- Für die relative Häufigkeit gilt dann
$$\frac{I(t)}{I_{Ref}} = e^{-\gamma t}.$$

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gleichung für S

- Annahme (A1): Jede Person aus S kann mit jeder Person aus I in Kontakt treten. Relative Häufigkeit des Kontakts: $I(t)/N$, für Ansteckung: $\beta S(t)I(t)/N$.
- $\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N}$,

Gleichung für I

- Annahme (A6): Zu $t > 0$ bleibt eine Person aus I mit Wahrscheinlichkeit $e^{-\gamma t}$ infiziert.
- Für die relative Häufigkeit gilt dann $\frac{I(t)}{I_{Ref}} = e^{-\gamma t}$.
- Dann ist $I(t) = e^{-\gamma t}I_{Ref}$ bzw. $\frac{dI(t)}{dt} = -\gamma I(t)$.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gleichung für S

- Annahme (A1): Jede Person aus S kann mit jeder Person aus I in Kontakt treten. Relative Häufigkeit des Kontakts: $I(t)/N$, für Ansteckung: $\beta S(t)I(t)/N$.
- $\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N}$,

Gleichung für I

- Annahme (A6): Zu $t > 0$ bleibt eine Person aus I mit Wahrscheinlichkeit $e^{-\gamma t}$ infiziert.
- Für die relative Häufigkeit gilt dann $\frac{I(t)}{I_{Ref}} = e^{-\gamma t}$.
- Dann ist $I(t) = e^{-\gamma t}I_{Ref}$ bzw. $\frac{dI(t)}{dt} = -\gamma I(t)$.
- Personen, die S verlassen, addiert man zu $\frac{dI(t)}{dt}$ hinzu.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

System der Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)\frac{I(t)}{N} - \gamma I(t), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t). \quad (3)$$

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

System der Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)\frac{I(t)}{N} - \gamma I(t), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t). \quad (3)$$

Anfangsbedingungen

$$I(0) = N_I \geq 0, \quad (4)$$

$$S(0) = N - N_I \geq 0, \quad (5)$$

$$R(0) = N_R = 0 \quad (6)$$

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Basisreproduktionszahl

Die Größe $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$ heißt **Basisreproduktionszahl**. Ist $\mathcal{R}_0 < 1$, klingt das Infektionsgeschehen ab. Ist $\mathcal{R}_0 > 1$ siehe [Statista, 2023], nimmt das Infektionsgeschehen zu.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Basisreproduktionszahl

Die Größe $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$ heißt **Basisreproduktionszahl**. Ist $\mathcal{R}_0 < 1$, klingt das Infektionsgeschehen ab. Ist $\mathcal{R}_0 > 1$ siehe [Statista, 2023], nimmt das Infektionsgeschehen zu.

Analytische Charakterisierung

Das System (1) – (3) ist

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Basisreproduktionszahl

Die Größe $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$ heißt **Basisreproduktionszahl**. Ist $\mathcal{R}_0 < 1$, klingt das Infektionsgeschehen ab. Ist $\mathcal{R}_0 > 1$ siehe [Statista, 2023], nimmt das Infektionsgeschehen zu.

Analytische Charakterisierung

Das System (1) – (3) ist

- ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen,

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Basisreproduktionszahl

Die Größe $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$ heißt **Basisreproduktionszahl**. Ist $\mathcal{R}_0 < 1$, klingt das Infektionsgeschehen ab. Ist $\mathcal{R}_0 > 1$ siehe [Statista, 2023], nimmt das Infektionsgeschehen zu.

Analytische Charakterisierung

Das System (1) – (3) ist

- ▶ ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen,
- ▶ ist nichtlinear,

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Basisreproduktionszahl

Die Größe $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$ heißt **Basisreproduktionszahl**. Ist $\mathcal{R}_0 < 1$, klingt das Infektionsgeschehen ab. Ist $\mathcal{R}_0 > 1$ siehe [Statista, 2023], nimmt das Infektionsgeschehen zu.

Analytische Charakterisierung

Das System (1) – (3) ist

- ▶ ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen,
- ▶ ist nichtlinear,
- ▶ ist gekoppelt aufgrund des Terms $-\beta S(t) \frac{I(t)}{N}$,

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Basisreproduktionszahl

Die Größe $\mathcal{R}_0 = \beta/\gamma$ heißt **Basisreproduktionszahl**. Ist $\mathcal{R}_0 < 1$, klingt das Infektionsgeschehen ab. Ist $\mathcal{R}_0 > 1$ siehe [Statista, 2023], nimmt das Infektionsgeschehen zu.

Analytische Charakterisierung

Das System (1) – (3) ist

- ▶ ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen,
- ▶ ist nichtlinear,
- ▶ ist gekoppelt aufgrund des Terms $-\beta S(t) \frac{I(t)}{N}$,
- ▶ lässt eine Entkopplung -wie beispielsweise über Eigenwerttheorie im Falle linearer Systeme- nicht ohne Weiteres zu.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Erste Aussagen

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Erste Aussagen

1. Lemma von Gronwall, [Walter, 1996, §5.],
 $\rightarrow S(t) \geq S(0)e^{-\beta t}.$

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Erste Aussagen

1. Lemma von Gronwall, [Walter, 1996, §5.],
 $\rightarrow S(t) \geq S(0)e^{-\beta t}.$
2. In [Bacaër, 2021, S. 6] wird $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ und $R(t) \geq 0$ für alle $t > 0$ gezeigt.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Erste Aussagen

1. Lemma von Gronwall, [Walter, 1996, §5.],
 $\rightarrow S(t) \geq S(0)e^{-\beta t}$.
2. In [Bacaër, 2021, S. 6] wird $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ und $R(t) \geq 0$ für alle $t > 0$ gezeigt.

Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Erste Aussagen

1. Lemma von Gronwall, [Walter, 1996, §5.],
 $\rightarrow S(t) \geq S(0)e^{-\beta t}$.
2. In [Bacaër, 2021, S. 6] wird $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ und $R(t) \geq 0$ für alle $t > 0$ gezeigt.

Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

1. Satz von Picard-Lindelöf, [Walter, 1996, §6.], \rightarrow
Existenz und Eindeutigkeit einer lokalen Lösung des
Systems (1) – (3) auf $[0, T)$.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das
SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum
Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines
Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein
elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Erste Aussagen

1. Lemma von Gronwall, [Walter, 1996, §5.],
 $\rightarrow S(t) \geq S(0)e^{-\beta t}$.
2. In [Bacaër, 2021, S. 6] wird $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ und $R(t) \geq 0$ für alle $t > 0$ gezeigt.

Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

1. Satz von Picard-Lindelöf, [Walter, 1996, §6.], \rightarrow
Existenz und Eindeutigkeit einer lokalen Lösung des
Systems (1) – (3) auf $[0, T)$.
2. In [Bacaër, 2021, S. 6] wird die Existenz und
Eindeutigkeit einer Lösung für alle $t > 0$ gezeigt.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das
SIR-ModellWeitere Erkenntnisse zum
Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein
elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

(Teilweise) Dimensionslose Form des SIR-Modells

Mit $s = S/N$, $i = I/N$ und $r = R/N$ folgt:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}(t) &= -\beta s(t)i(t) \text{ und } s(0) = 1 - N_I/N, \\ \frac{di}{dt}(t) &= \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \text{ und } i(0) = N_I/N, \\ \frac{dr}{dt}(t) &= \gamma i(t) \text{ und } r(0) = 0.\end{aligned}$$

Bemerkung: Mittels Dimensionsanalyse und dem Buckingham- Π -Theorem können mathematische Modelle unter geeigneten Voraussetzungen -u.a. mindestens zwei Grundeinheiten- systematisch in dimensionslose Form transformiert werden.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

SEIR-Modell als Erweiterung des SIR-Modells

Unterscheidung der infizierten Personen in:

Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N},$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = \beta S(t)\frac{I(t)}{N} - \alpha E(t),$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \alpha E(t) - \gamma I(t),$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t),$$

zzgl. entsprechender Anfangsbedingungen an die Größen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ und $R(t)$.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

SEIR-Modell als Erweiterung des SIR-Modells

Unterscheidung der infizierten Personen in:

- infizierte Personen, die andere (noch) nicht anstecken können (exposed: $E = E(t)$),

Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N},$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = \beta S(t)\frac{I(t)}{N} - \alpha E(t),$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \alpha E(t) - \gamma I(t),$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t),$$

zzgl. entsprechender Anfangsbedingungen an die Größen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ und $R(t)$.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

SEIR-Modell als Erweiterung des SIR-Modells

Unterscheidung der infizierten Personen in:

- ▶ infizierte Personen, die andere (noch) nicht anstecken können (exposed: $E = E(t)$),
- ▶ infizierte Personen, die andere anstecken können (infectious: $I = I(t)$).

Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)\frac{I(t)}{N},$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = \beta S(t)\frac{I(t)}{N} - \alpha E(t),$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \alpha E(t) - \gamma I(t),$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t),$$

zzgl. entsprechender Anfangsbedingungen an die Größen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ und $R(t)$.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gestelltes Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gestelltes Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Erste Überlegungen

Überblick

SIR-Modell

- Modellannahmen
- Herleitung
- Anfangswertproblem für das SIR-Modell
- Weitere Erkenntnisse zum Modell
- Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

- Allgemeines Lösungsverfahren
- Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren
- Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

- Simulation
- Simulationsergebnisse
- Vergleich der Methoden
- Endwerte der Simulation

Gestelltes Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Erste Überlegungen

- Es ist $y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, y(\tau)) d\tau$ für $t \in \mathbb{R}_+$,

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gestelltes Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Erste Überlegungen

- ▶ Es ist $y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, y(\tau)) d\tau$ für $t \in \mathbb{R}_+$,
- ▶ $y(t+h) \approx y(t) + Q_h(f, t, y(t))$, nach Näherung durch Quadraturformel Q_h .

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gestelltes Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Erste Überlegungen

- ▶ Es ist $y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, y(\tau)) d\tau$ für $t \in \mathbb{R}_+$,
- ▶ $y(t+h) \approx y(t) + Q_h(f, t, y(t))$, nach Näherung durch Quadraturformel Q_h .
- ▶ Mit $F_h : (t, y) \mapsto (t+h, y + Q_h(f, t, y))$ und $t_k = t_0 + kh$ ist $(t_1, y_1) = F_h(t_0, y_0)$, $(t_2, y_2) = F_h(t_1, y_1)$ usw.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Gestelltes Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Erste Überlegungen

- ▶ Es ist $y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, y(\tau)) d\tau$ für $t \in \mathbb{R}_+$,
- ▶ $y(t+h) \approx y(t) + Q_h(f, t, y(t))$, nach Näherung durch Quadraturformel Q_h .
- ▶ Mit $F_h : (t, y) \mapsto (t+h, y + Q_h(f, t, y))$ und $t_k = t_0 + kh$ ist $(t_1, y_1) = F_h(t_0, y_0)$, $(t_2, y_2) = F_h(t_1, y_1)$ usw.
- ▶ Folge von Punkten $(t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots$, die die exakte Lösung y annähern.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Virusausbreitung

Robert Haas

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Konvergenzordnung

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Konvergenzordnung

- Der Wert $g_k = y(t_k) - y_k$ heißt *globaler Fehler*.

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Konvergenzordnung

- ▶ Der Wert $g_k = y(t_k) - y_k$ heißt *globaler Fehler*.
- ▶ Gilt $|g_k| \leq c_1 e^{c_2 n h} \cdot h^p = \mathcal{O}(h^p)$, so hat das Lösungsverfahren die *Konvergenzordnung* p .

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Konvergenzordnung

- ▶ Der Wert $g_k = y(t_k) - y_k$ heißt *globaler Fehler*.
- ▶ Gilt $|g_k| \leq c_1 e^{c_2 n h} \cdot h^p = \mathcal{O}(h^p)$, so hat das Lösungsverfahren die *Konvergenzordnung* p .

Explizites Euler-Verfahren (Polygonzugverfahren)

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Konvergenzordnung

- ▶ Der Wert $g_k = y(t_k) - y_k$ heißt *globaler Fehler*.
- ▶ Gilt $|g_k| \leq c_1 e^{c_2 n h} \cdot h^p = \mathcal{O}(h^p)$, so hat das Lösungsverfahren die *Konvergenzordnung* p .

Explizites Euler-Verfahren (Polygonzugverfahren)

- ▶ $Q_h(f, t, y) = hf(t, y)$ und $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$ für $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Konvergenzordnung

- ▶ Der Wert $g_k = y(t_k) - y_k$ heißt *globaler Fehler*.
- ▶ Gilt $|g_k| \leq c_1 e^{c_2 n h} \cdot h^p = \mathcal{O}(h^p)$, so hat das Lösungsverfahren die *Konvergenzordnung* p .

Explizites Euler-Verfahren (Polygonzugverfahren)

- ▶ $Q_h(f, t, y) = hf(t, y)$ und $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$ für $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
- ▶ Die so erzeugten Punkte (t_0, y_0) , (t_1, y_1) , (t_2, y_2) sind Eckpunkte eines Polygonzugs aus Verbindungsstrecken von (t_k, y_k) nach (t_{k+1}, y_{k+1}) , $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Konvergenzordnung

- ▶ Der Wert $g_k = y(t_k) - y_k$ heißt *globaler Fehler*.
- ▶ Gilt $|g_k| \leq c_1 e^{c_2 n h} \cdot h^p = \mathcal{O}(h^p)$, so hat das Lösungsverfahren die *Konvergenzordnung* p .

Explizites Euler-Verfahren (Polygonzugverfahren)

- ▶ $Q_h(f, t, y) = hf(t, y)$ und $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$ für $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
- ▶ Die so erzeugten Punkte (t_0, y_0) , (t_1, y_1) , (t_2, y_2) sind Eckpunkte eines Polygonzugs aus Verbindungsstrecken von (t_k, y_k) nach (t_{k+1}, y_{k+1}) , $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
- ▶ Konvergenzordnung $p = 1$.

Allgemeine Form

s-stufiges RK-Verfahren: Einschrittverfahren der Form

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_j, \quad k_j = f(t_n + h c_j, y_n + \sum_{l=1}^s a_{jl} k_l)$$

Die Zahlen b_j , c_j und a_{jl} notiert man häufig im Butcher-Tableau.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Allgemeine Form

s-stufiges RK-Verfahren: Einschrittverfahren der Form

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_j, \quad k_j = f(t_n + h c_j, y_n + \sum_{l=1}^s a_{jl} k_l)$$

Die Zahlen b_j , c_j und a_{jl} notiert man häufig im Butcher-Tableau.

Beispiele für Runge-Kutta-Verfahren

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation



Allgemeine Form

s-stufiges RK-Verfahren: Einschrittverfahren der Form

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_j, \quad k_j = f(t_n + h c_j, y_n + \sum_{l=1}^s a_{jl} k_l)$$

Die Zahlen b_j , c_j und a_{jl} notiert man häufig im Butcher-Tableau.

Beispiele für Runge-Kutta-Verfahren

- Klassisches Runge-Kutta:

$$b_1 = b_4 = 1/6, b_2 = b_3 = 2/3,$$

$$c_1 = 0, c_2 = c_3 = 1/2, c_4 = 1, a_{21} = a_{32} = 1/2, a_{43} = 1,$$

Konvergenzordnung $p = 4$.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Allgemeine Form

s-stufiges RK-Verfahren: Einschrittverfahren der Form

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_j, \quad k_j = f(t_n + h c_j, y_n + \sum_{l=1}^s a_{jl} k_l)$$

Die Zahlen b_j , c_j und a_{jl} notiert man häufig im Butcher-Tableau.

Beispiele für Runge-Kutta-Verfahren

- ▶ Klassisches Runge-Kutta:
 $b_1 = b_4 = 1/6, b_2 = b_3 = 2/3,$
 $c_1 = 0, c_2 = c_3 = 1/2, c_4 = 1, a_{21} = a_{32} = 1/2, a_{43} = 1,$
Konvergenzordnung $p = 4$.
- ▶ Dormand-Prince: Siehe [Stöcker, 1995, S.636],
 $p = (4, 5)$.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation



Numerische Lösungsverfahren für das Systems (1) – (3)

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Numerische Lösungsverfahren für das Systems (1) – (3)

- Explizites Euler-Verfahren,

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Numerische Lösungsverfahren für das Systems (1) – (3)

- ▶ Explizites Euler-Verfahren,
- ▶ Klassisches Runge-Kutta-Verfahren.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Numerische Lösungsverfahren für das Systems (1) – (3)

- ▶ Explizites Euler-Verfahren,
- ▶ Klassisches Runge-Kutta-Verfahren.
- ▶ Dormand-Prince-Verfahren.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Numerische Lösungsverfahren für das Systems (1) – (3)

- ▶ Explizites Euler-Verfahren,
- ▶ Klassisches Runge-Kutta-Verfahren.
- ▶ Dormand-Prince-Verfahren.

Parameterwerte der Simulation

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Numerische Lösungsverfahren für das Systems (1) – (3)

- ▶ Explizites Euler-Verfahren,
- ▶ Klassisches Runge-Kutta-Verfahren.
- ▶ Dormand-Prince-Verfahren.

Parameterwerte der Simulation

- ▶ Populationsgröße N : 83 200 000 (Einwohnerzahl von Deutschland 2019/2020)

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Numerische Lösungsverfahren für das Systems (1) – (3)

- ▶ Explizites Euler-Verfahren,
- ▶ Klassisches Runge-Kutta-Verfahren.
- ▶ Dormand-Prince-Verfahren.

Parameterwerte der Simulation

- ▶ Populationsgröße N : 83 200 000 (Einwohnerzahl von Deutschland 2019/2020)
- ▶ Infizierte Personen am Anfang I_0 : 10 000

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Numerische Lösungsverfahren für das Systems (1) – (3)

- ▶ Explizites Euler-Verfahren,
- ▶ Klassisches Runge-Kutta-Verfahren.
- ▶ Dormand-Prince-Verfahren.

Parameterwerte der Simulation

- ▶ Populationsgröße N : 83 200 000 (Einwohnerzahl von Deutschland 2019/2020)
- ▶ Infizierte Personen am Anfang I_0 : 10 000
- ▶ Erholungsrate γ : $1/3$

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Numerische Lösungsverfahren für das Systems (1) – (3)

- ▶ Explizites Euler-Verfahren,
- ▶ Klassisches Runge-Kutta-Verfahren.
- ▶ Dormand-Prince-Verfahren.

Parameterwerte der Simulation

- ▶ Populationsgröße N : 83 200 000 (Einwohnerzahl von Deutschland 2019/2020)
- ▶ Infizierte Personen am Anfang I_0 : 10 000
- ▶ Erholungsrate γ : $1/3$
- ▶ Effektive Kontaktrate β : $0.6 \rightarrow \mathcal{R}_0 = 1.8$.

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

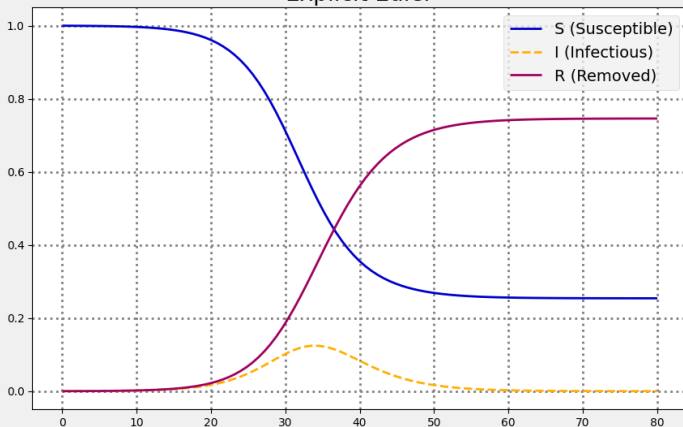
Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler



Vergleich der Methoden

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

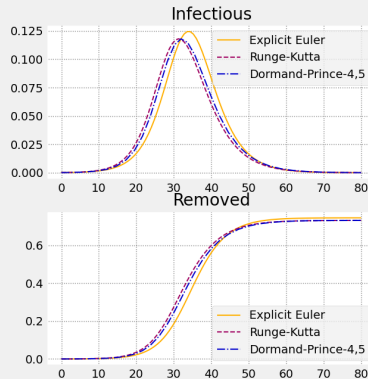
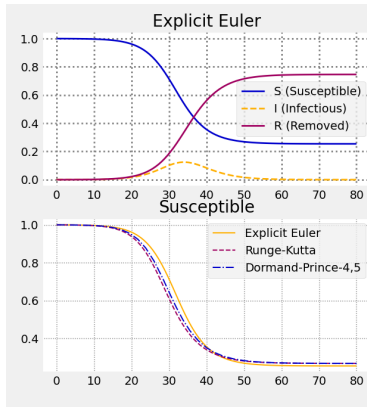
Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation



Explicit Euler

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- Susceptible: 0.2541, 21 137 040

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- ▶ Susceptible: 0.2541, 21 137 040
- ▶ Infectious: 0.0, 4 127

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- ▶ Susceptible: 0.2541, 21 137 040
- ▶ Infectious: 0.0, 4 127
- ▶ Removed: 0.7459, 62 058 833

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- ▶ Susceptible: 0.2541, 21 137 040
- ▶ Infectious: 0.0, 4 127
- ▶ Removed: 0.7459, 62 058 833

Runge-Kutta

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- ▶ Susceptible: 0.2541, 21 137 040
- ▶ Infectious: 0.0, 4 127
- ▶ Removed: 0.7459, 62 058 833

Runge-Kutta

- ▶ Susceptible: 0.2676, 22 262 641

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- ▶ Susceptible: 0.2541, 21 137 040
- ▶ Infectious: 0.0, 4 127
- ▶ Removed: 0.7459, 62 058 833

Runge-Kutta

- ▶ Susceptible: 0.2676, 22 262 641
- ▶ Infectious: 0.0001, 6 429

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- ▶ Susceptible: 0.2541, 21 137 040
- ▶ Infectious: 0.0, 4 127
- ▶ Removed: 0.7459, 62 058 833

Runge-Kutta

- ▶ Susceptible: 0.2676, 22 262 641
- ▶ Infectious: 0.0001, 6 429
- ▶ Removed: 0.7323, 60 930 930

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- ▶ Susceptible: 0.2541, 21 137 040
- ▶ Infectious: 0.0, 4 127
- ▶ Removed: 0.7459, 62 058 833

Runge-Kutta

- ▶ Susceptible: 0.2676, 22 262 641
- ▶ Infectious: 0.0001, 6 429
- ▶ Removed: 0.7323, 60 930 930

Dormand-Prince-4,5

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- ▶ Susceptible: 0.2541, 21 137 040
- ▶ Infectious: 0.0, 4 127
- ▶ Removed: 0.7459, 62 058 833

Runge-Kutta

- ▶ Susceptible: 0.2676, 22 262 641
- ▶ Infectious: 0.0001, 6 429
- ▶ Removed: 0.7323, 60 930 930

Dormand-Prince-4,5

- ▶ Susceptible: 0.2676, 22 263 541

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- ▶ Susceptible: 0.2541, 21 137 040
- ▶ Infectious: 0.0, 4 127
- ▶ Removed: 0.7459, 62 058 833

Runge-Kutta

- ▶ Susceptible: 0.2676, 22 262 641
- ▶ Infectious: 0.0001, 6 429
- ▶ Removed: 0.7323, 60 930 930

Dormand-Prince-4,5

- ▶ Susceptible: 0.2676, 22 263 541
- ▶ Infectious: 0.0001, 7 385

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Explicit Euler

- ▶ Susceptible: 0.2541, 21 137 040
- ▶ Infectious: 0.0, 4 127
- ▶ Removed: 0.7459, 62 058 833

Runge-Kutta

- ▶ Susceptible: 0.2676, 22 262 641
- ▶ Infectious: 0.0001, 6 429
- ▶ Removed: 0.7323, 60 930 930

Dormand-Prince-4,5

- ▶ Susceptible: 0.2676, 22 263 541
- ▶ Infectious: 0.0001, 7 385
- ▶ Removed: 0.7323, 60 929 073

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das
SIR-ModellWeitere Erkenntnisse zum
Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische
MethodenAllgemeines
LösungsverfahrenKonvergenzordnung und ein
elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische
Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation



Nicolas Bacaër (2021)

Mathématiques et Épidémies

Cassini Paris

Wolfgang Walter (1996)

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Springer Berlin Heidelberg

W. O. Kermack und A. G. McKendrick (1927)

A contribution to the mathematical theory of epidemics

Proceedings Royal Society London Series A 115, 700–721, 1927

Horst Stöcker (1995)

Taschenbuch mathematischer Formeln und Verfahren

Verlag Harri Deutsch Thun und Frankfurt am Main

Quellen (Fortsetzung)



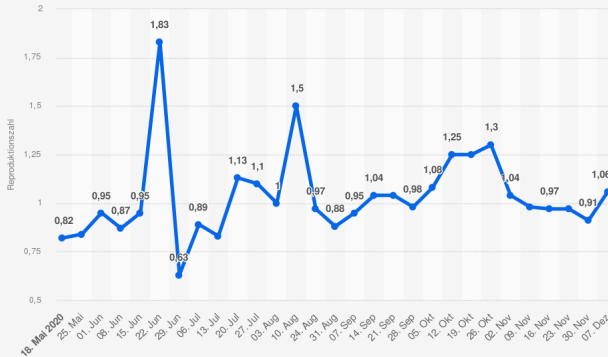
Statista (2023)

Reproduktionszahl des Coronavirus (COVID-19) in Deutschland seit Mai 2020:

URL: <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1117478/umfrage/>

reproduktionszahl-des-coronavirus-covid-19-in-deutschland/

Reproduktionszahl des Coronavirus (COVID-19) in Deutschland seit Mai 2020
(Stand: 17. April 2023)



Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Überblick

SIR-Modell

Modellannahmen

Herleitung

Anfangswertproblem für das SIR-Modell

Weitere Erkenntnisse zum Modell

Varianten des SIR-Modells

Numerische Methoden

Allgemeines

Lösungsverfahren

Konvergenzordnung und ein elementares Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Numerische Lösung

Simulation

Simulationsergebnisse

Vergleich der Methoden

Endwerte der Simulation

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Link zum Vortrag:

<https://github.com/Haasrobertgmynet/Epidemiologie>

Link zum Code der Simulation:

<https://github.com/Haasrobertgmynet/EspidemicsMath>