بنام خدا

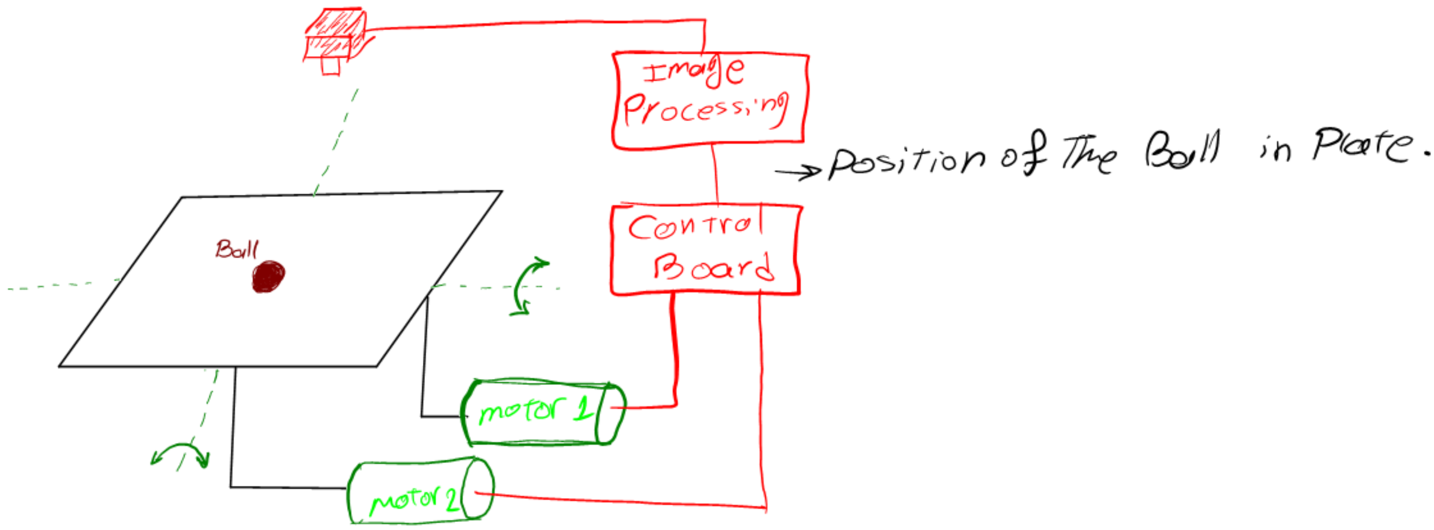
HW2

مهدی فیاض 40007913

سید حبیب احسینی 40004463

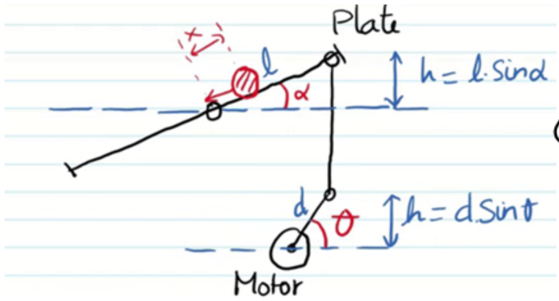
سوال ①

Ball and Plate system.



Modeling system

ابتدا برای یک جهت بررسی می‌کنیم.



شتاب = $\ddot{x}$ و سرعت = $\dot{x}$ و مکان = X و شعاع توپ = r

$$\left(\frac{J_b}{r^2}+m\right)\ddot{x}(t) + mg\sin\alpha(t) - m\,x(t)\dot{\alpha}(t) + \frac{J_b}{r}\ddot{\alpha}(t) = 0$$

$$J_b = \frac{2}{3}mr^2$$

اگر فرض کنیم که α خیلی کوچک است؛

$$\sin\alpha = \alpha \;,\; \dot{\alpha} = 0 \;,\; \ddot{\alpha} = 0$$

$$-\left(\frac{2mr^2}{r^2\times 3}+m\right)\ddot{x}(t) + mg\sin\alpha(t) = 0 \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}m+m\right)\ddot{x}(t) = mg\sin\alpha(t) = \frac{5}{3}\cancel{m}\ddot{x}(t) = \cancel{m}g\sin\alpha(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{3}{5}g\sin\alpha(t) \rightsquigarrow l\sin\alpha = d\sin\theta \to \sin\alpha = \frac{d}{l}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{3}{5}g\times\frac{d}{l}\sin\theta \rightsquigarrow \theta\simeq 0 \to \theta = \sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = 0.6\frac{gd}{l}\theta}$$

برای راستای y نیز همین صحبت است. بطور مشابه به اثر خواهیم رسید به طور کلی معادلات را بیان کنیم؛

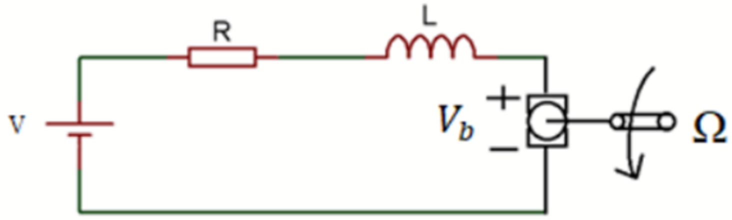
$$\Rightarrow \theta_x , \theta_y , \alpha_x , \alpha_y \rightsquigarrow \theta_x = \frac{d}{l}\alpha_x \;,\; \theta_y = \frac{d}{l}\alpha_y$$

$$\ddot{x} = 0.6\frac{gd}{l}\theta_x$$

$$\ddot{y} = 0.6\frac{gd}{l}\theta_y$$

سپس صفحه بدست آمد حال باید معادلات مربوط به موتورها را بدست آوریم

Servo MOTOR model



از سرو موتور برای کنترل صفحه در راستای x و راستای y استفاده می‌شود.

معادله الکتریکی

$k_t = k_e = k$

KVL $\rightarrow$ $-V + RI_a + L\frac{dI_a}{dt} + V_b = 0 \rightsquigarrow V = RI_a + L\frac{dI_a}{dt} + k\frac{d\theta}{dt}$ ★

معادله مکانیکی

$\sum T = J\ddot{\theta}$ و $kI_a - c\dot{\theta} = J\ddot{\theta}$

C: Frictional torque constant

$\rightsquigarrow J\ddot{\theta} + c\frac{d\theta}{dt} = kI_a$ ★★

از معادلات 1 و 2 فوق بقیه معادلات نیز استخراج می‌شوند. برای هر دو موتور تعمیم می‌دهیم:

برای موتور 1 $\rightsquigarrow \begin{cases} V_x = R_x I_{a_x} + L\frac{dI_{a_x}}{dt} + k\frac{d\theta_x}{dt} \\ J\ddot{\theta}_x + c\dot{\theta}_x = kI_{a_x} \end{cases}$ متناظر با موتوری که در راستای x کنترل می‌کند

برای موتور 2 $\rightsquigarrow \begin{cases} V_y = R_y I_{a_y} + L\frac{dI_{a_y}}{dt} + k\frac{d\theta_y}{dt} \\ J\ddot{\theta}_y + c\dot{\theta}_y = kI_{a_y} \end{cases}$ متناظر با موتوری که در راستای y کنترل می‌کند

$R_x = R_y$

معادلات را همه بازنویسی می‌کنیم.

$$\ddot{x} = 0.6\frac{gd}{l}\theta_x$$

$$\ddot{y} = 0.6\frac{gd}{l}\theta_y$$

$$\dot{I}_x = -\frac{1}{L}(k\dot{\theta}_x + RI_x - V_x)$$

$$\ddot{\theta}_x = \frac{1}{J}(-c\theta_x + kI_x)$$

$$\dot{I}_y = \frac{-1}{L}(k\dot{\theta}_y + RI_y - V_y)$$

$$\ddot{\theta}_y = \frac{1}{J}(-c\theta_y + kI_y)$$

با توجه به معادلات روبه‌رو می‌توان تابع تبدیل‌های دلخواه که در simulink می‌توانند مفید باشند را نیز به دست آورد. به شکل:

$\frac{X(s)}{\theta_x(s)}$ ، $\frac{Y(s)}{\theta_y(s)}$ ، $\frac{\theta_x(s)}{V_x(s)}$ ، $\frac{\theta_y(s)}{V_y(s)}$ و .....

حال باید متغیرهای حالت را تعیین کنیم

$\theta_x = x_1$, $\dot{\theta}_x = \omega_x = x_2$, $\theta_y = x_3$, $\dot{\theta}_y = \omega_y = x_4$, $I_x = x_5$, $I_y = x_6$

$$\dot{x}_6 = -\frac{1}{L}(K x_4 + R x_6 - V_y)$$

$$\dot{x}_5 = -\frac{1}{L}(K x_2 + R x_5 - V_x)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{J}(-C x_3 + K x_6)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}(-C x_1 + K x_5)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C}{J} & 0 & 0 & 0 & \frac{K}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C}{J} & 0 & 0 & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K}{L} & 0 & 0 & -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K}{L} & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

معادلات حالت به دست آمده خطی می‌باشند لذا نیاز به خطی سازی نیست.

★ مشخص کردن محدوده معتبر سیستم به صورت خطی

در ابتدا حل این سوال به روابط بین θ و X (منظور از X همان مکان توپ است) که برای راحتی خطی سازی کردیم و از تقریب $\sin\theta \approx \theta$ استفاده کردیم ناحیه‌ای که به صورت تقریبی می‌توان فرض کرد برقرار است.

در محدوده 10 - 15 درجه پاسخ بسیار دقیق خواهد بود. برای مقادیر 20-30 درجه نیز با اعمال محدودیت های مدل می تواند باز هم رفتار مطلوبی را ارائه دهد.

سوال ۲

رتبه، بعد فضای پوچی و فضای پوچی ماتریس‌های زیر را بدست اورید (بعد فضای پوچی برای ماتریس $A_{m\times n}$ در حالت Ax=۰ برابر با $N_R(A)=n-\text{rank}(A)$ است).

$$A=\begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&0\\-2&-5&5\\0&-2&10\\2&2&10\end{bmatrix}\qquad (۱)$$

$$A=\begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{Form}]{\text{RREF}} E_A=\begin{bmatrix}1&3&3&2\\0&0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\text{Rank}(A)=2$

$N_R(A)=n-\text{rank}(A)=4-2=2$

$=\text{nullity}(A)$

فضای پوچی ماتریس A مجموعه جواب معادله همگن Ax=0 است

$\text{Null}(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}$

2 متغیر آزاد و 2 متغیر اصلی داریم ما

free $\begin{cases}x_2\\x_4\end{cases}$ main $\begin{cases}x_1\\x_3\end{cases}$

$x_3+\frac{1}{3}x_4=0 \rightsquigarrow x_3=-\frac{1}{3}x_4$

$x_1+3x_2+3x_3+x_4=0 \rightsquigarrow x_1=-3x_2-3(-\frac{1}{3}x_4)-x_4 \Rightarrow x_1=-3x_2-x_4$

$\xrightarrow{\text{بازنویسی}}$ $Ax=0 \rightsquigarrow X=\begin{bmatrix}-3x_2-x_4\\x_2\\-\frac{1}{3}x_4\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}-1\\0\\-\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix}x_4$

$$B=\begin{bmatrix}1&2&0\\-2&-5&5\\0&-2&10\\2&2&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&5\\0&-2&10\\0&-2&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&5\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

→ 2 عنصر محوری داریم: Rank(B)=۲

$\text{nullity}(B)=N_R(B)=n-\text{Rank}(B)=3-2=1 \rightsquigarrow 1$ free variable

$\to x_1+2x_2=0 \rightsquigarrow x_1=-10x_3$

$-x_2+5x_3=0 \rightsquigarrow x_2=+5x_3$

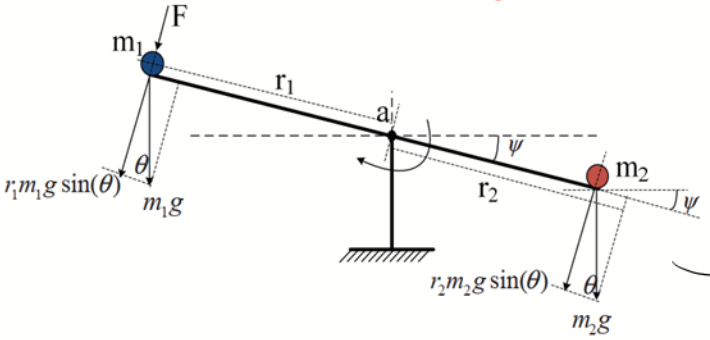
$$x=\begin{bmatrix}10x_3\\5x_3\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\\1\end{bmatrix}x_3 \longrightarrow x_1=\begin{bmatrix}-10\\5\\1\end{bmatrix}$$

سوال ۳

با توجه به شکل باید r_2 باشد ولی فرض شده است که این نیرو به جرم m_2 اعمال شده است

$$r_2m_2g\sin(\theta) - r_1m_1g\sin(\theta) = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2)\ddot{\theta} + Fr_2$$

$\rightarrow -\dot{\psi} = -\omega$



$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta \rightarrow \dot{\psi} = -\dot{\theta}$ و $\ddot{\psi} = -\ddot{\theta}$

اگر ۲ جرم مستقل در اختیار داشتیم به ازای هر جرم ۲ متغیر حالت در نظر گرفته می‌شد. ولی چون ۲ جرم توسط یک میله صلب به یکدیگر متصل شده‌اند و حرکت یکی به صورت مستقیم بر دیگری تاثیر خواهد داشت، واضح است که ۲ متغیر حالت نیاز است. متغیرهای سیستم ما این است: ψ و ω

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \omega \\ \dot{\omega} = \left((r_2m_2g - r_1m_1g)\sin(\frac{\pi}{2} - \psi) - Fr_2\right) \times \dfrac{-1}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2} \end{cases}$$

به واسطه وجود $\sin$ در معادلات فوق سیستم غیرخطی است لذا خطی سازی می‌کنیم.

★ به دست آوردن نقطه تعادل:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u=0) = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{\psi} = 0 \Rightarrow \omega = 0 \\ \dot{\omega} = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - \psi_0) = 0 \Rightarrow \psi_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_{op,P_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \\ x_{op,P_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

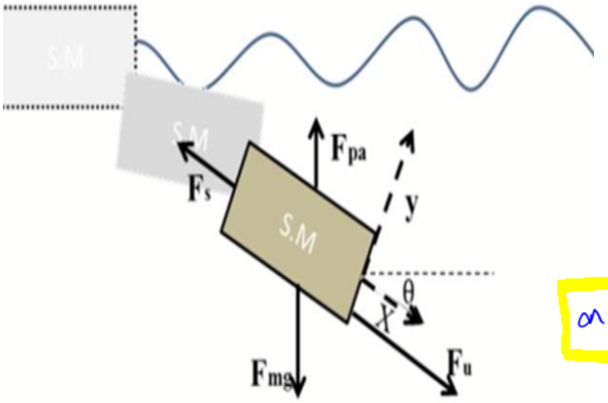
نقطه $x_{op,P_1}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}$ را در نظر گرفته، و حول این نقطه معادلات را به دست می‌آوریم.

$$\frac{\pi}{2} - \psi << 1 \rightsquigarrow \sin(\frac{\pi}{2} - \psi) \simeq \frac{\pi}{2} - \psi \longrightarrow$$ در معادله‌ها جایگذاری می‌کنیم

$$\dot{\psi} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{-1}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2}\left((r_2m_2g - r_1m_1g)(\frac{\pi}{2} - \psi) - Fr_2\right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{r_2m_2g - r_1m_1g}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{r_2}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2} & \dfrac{\frac{\pi}{2}(r_2m_2 - r_1m_1)g}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix}$$



سوال 4

$$m_1\ddot{x} + F_s + \sin(\theta)(F_{\text{pa}} - F_{\text{mg}}) = F_u$$

$$F_s = K\dot{x}|\dot{x}| \quad \text{(square law)}$$

$$F_{\text{pa}} = \rho g V = m_2 g, \quad F_{\text{mg}} = m_1 g, \quad F_u = u$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan(\dot{\theta}) = \dot{\theta}(1+\tan^2(\theta)) = x^2 - x$$

ابتدا متغیرها حالت را تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{x_1 = x , \quad x_2 = \dot{x}_1 , \quad x_3 = \theta}$$

$$\to m_1 \dot{x}_2 + K x_1 |x_1| + \sin(x_3)(m_2 g - m_1 g) = u \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan(\dot{\theta}) = \dot{\theta}(1+\tan^2(\theta)) = x^2 - x \Longrightarrow \dot{x}_3(1+\tan^2 x_3) = x_1^2 - x_1 \quad (\mathrm{II})$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = (\mathrm{III})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}\left(-K x_2 |x_2| - \sin x_3 (m_2 g - m_1 g) + u\right) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{1+\tan^2 x_3}(x_1^2 - x_1) = \cos^2 x_3 (x_1^2 - x_1) \end{cases}$$

$$x^* = [x \quad \dot{x} \quad \theta] = [0.5 \quad 0 \quad 2k\pi], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

نقاط تعادل

تقریب زیر را درنظر میگیریم:

$$\theta \simeq 0 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta \ , \ \tan\theta \approx \theta \ , \ \cos\theta \approx 1 \to \cos^2 x_3 \simeq 1$$

معادلات به صورت زیر در می‌آیند:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}\left(-K x_2 |x_2| - x_3(m_2 g - m_1 g) + u\right)$$

$$\dot{x}_3 = x_1^2 - x_1$$

ژاکوبین X را میابیم:

$$[J_x]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial j}$$

$$\to J_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2K x_2}{m_1} & -(m_2 - m_1) g \\ \frac{2x_1 - 1}{1+\tan^2 x_3 = 1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⚠ چون نقطه تعادل x_2 برابر 0 در نظر گرفته شده و فرض کنیم که تغییرات حول این نقطه مثبت خواهند بود لذا قدر مطلق صرف‌نظر شده است چون وقتی مشتق بگیریم صفر می‌شود.

$$x(t) = x_0 + \Delta x \ , \quad \dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \Delta x(t)$$

$$= f(x_0(t), u_0(t)) = 0$$

$$\Delta \dot{x}(t) = \underbrace{J_x}_{A} \Delta x(t) + B\, \underbrace{J_u}_{B} \Delta u(t)$$

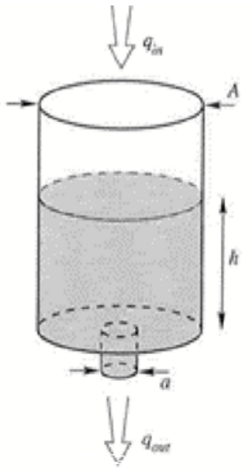
حال با خطی‌سازی نقاط تعادل در J_x

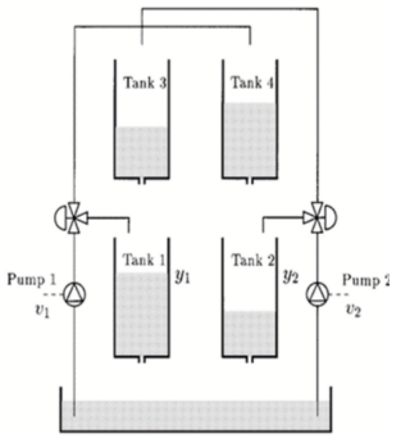
$\rightarrow A = J_x \Big|_{x = x_{op}}$

$$A_{new} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & 0 & -(m_2 - m_1)g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{new} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 \rightarrow C = [1 \ 0 \ 0]$$

سوال (ج)





$q_L = \gamma k u, \quad q_U = (1-\gamma) k u, \quad \gamma \in [0,1] \qquad q_{out} = a\sqrt{2gh}$

✓ ورودی‌های کنترلی V_1 و V_2 هستند. (ولتاژهای ورودی پمپ‌ها)

✓ خروجی میزان ارتفاع است که می‌توان نظیر ولتاژ خروجی دستگاه اندازه‌گیری ارتفاع (y_1 و y_2) در نظر گرفت.

با توجه به قوانین ذکر شده در صورت سوال معادلات زیر را می‌نویسیم:

A_i: سطح مقطع مخزن

a_i: مقطع سوراخ

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} v_1$$

$$\frac{dh_2}{dt} = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} v_2$$

$$\frac{dh_3}{dt} = -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\lambda_2)k_2}{A_3} v_2$$

$$\frac{dh_4}{dt} = -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\lambda_1)}{A_4} v_1$$

(الف)

معادلات حالت به دست آمد.

ب) خطی سازی معادلات ج) معادلات حالت

ابتدا ژاکوبین را پیدا می‌کنیم:

$$J_x = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1}\cdot\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_1}} & 0 & \frac{a_3}{A_1}\cdot\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_3}} & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{A_2}\cdot\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_2}} & 0 & \frac{a_4}{A_2}\cdot\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_4}} \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{A_3}\cdot\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_4}{A_4}\cdot\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_4}} \end{bmatrix}$$

برای درایه 1 داریم؟ → با توجه به این ⟶ $T_i = \frac{A_i}{a_i}\sqrt{\frac{2h_i}{g}},$

$$\alpha = -\frac{a_1}{A_1}\,\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_1}} \rightarrow \frac{1}{\alpha} = -\frac{A_1}{a_1}\,\frac{2\sqrt{h_1}}{\sqrt{2g}} = -\frac{A_1}{a_1}\,\frac{\cancel{\sqrt{2}}\times\sqrt{2h_1}}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{g}}$$

$$\rightsquigarrow -\frac{A_1}{a_1}\times\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = -\frac{1}{T_1}$$

به صورت مشابه سایر درایه‌ها نیز به دست می‌آوریم که به صورت زیر می‌شود:

$$J_x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

که این در رابطه $\dot{x}$ همان A است

حال J_u را می‌یابیم:

$$J_u = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

که این در رابطه $\dot{x}$ همان B است $\dot{x}(t) = J_x\, x(t) + J_u\, u(t)$

خروجی سیستم:

$$y = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Parameter	Value
A_1, A_3 [cm^2]	28
A_2, A_4 [cm^2]	32
a_1, a_3 [cm^2]	0.071
a_2, a_4 [cm^2]	0.057
k_c [V/cm]	0.50
(h_1, h_2) [cm]	(12.4, 12.7)
(h_3, h_4) [cm]	(1.8, 1.4)
(v_1, v_2) [V]	(3.0, 3.0)
(k_1, k_2) [cm^3/V·s]	(3.33, 3.35)
(γ_1, γ_r)	(0, 0)
g [cm/s^2]	981

کافی است مقادیر را جایگذاری کنیم

تصاویر و کد متلب پیوست شده است.