HW6 _ mehdi Fayaz 40007913 _ Habib Hoseini 4000446

۲ پرسش دو

در سیستم زیر:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ P_d = (-5, -1 \pm i)$$

آ. ابتدا بررسی کنید که آیا می‌توان به کمک فیدبک حالت قطب‌های سیستم حلقه‌بسته را در محل مورد نظر قرار داد؟

ب. عملیات جابجایی قطب را با روش‌های مستقیم، تبدیل همانندی، فرمول آکرمن و بس‌وگیورا انجام دهید.

الف) باید شرط کنترل پذیری برقرار باشد:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 59 \\ 0 & -3 & -29 \\ 1 & -4 & -49 \end{bmatrix} \rightarrow Rank(C) = 3 \rightarrow \text{Full Rank}$$

که می‌توان از فیدبک حالت استفاده کرد.

ب)

$$a(s) = \det(sI - A) = 0 \rightarrow \boxed{a(s) = s^3 - 14s^2 + 64s - 86}$$ → معادله مشخصه حلقه باز

$$\alpha(s) = (s+5)(s^2+2s+2) = 0 \rightarrow \boxed{\alpha(s) = s^3 + 7s^2 + 12s + 10}$$ → معادله مشخصه حلقه بسته مطلوب

① روش بس-گیورا

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & -14 & 64 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 59 \\ 0 & -3 & -29 \\ 1 & -4 & -49 \end{bmatrix} \rightarrow (C\psi)^{-1} =$$

```
>> inv(c*si)

ans =

   -0.3962   -7.7170    1.3962
   -0.2453   -1.3962    0.2453
   -0.0566   -0.2453    0.0566
```

$$\alpha = [7 \quad 12 \quad 10]$$

$$a = [-14 \quad 64 \quad -86]$$

$$K = (\alpha - a)(C\psi)^{-1} = [21 \quad -52 \quad 96] \times (C\psi)^{-1} = [-1 \quad -113 \quad 22] = K$$

② فرمول آکرمن

$$K = q_n^T \alpha(A) = [0 \quad 0 \quad 1]\, C^{-1} \alpha(A)$$

$$\alpha(A) = A^3 + 7A^2 + 12A + 10I =$$

```
>> alphaS = A^3 + 7*A^2 + 12*A +10*eye(3)

alphaS =

   793   663    74
  -337   235  -116
  -685  -315   -40
```

```
>> inv(c)
ans =

   -0.5849   -3.8679    1.5849
    0.5472    2.0377   -0.5472
   -0.0566   -0.2453    0.0566
```

$C^{-1} =$

$\Rightarrow [0\ 0\ 1]\, C^{-1} \alpha(A) =$

```
>> [0 0 1] * invc * alphaS
ans =

    -1  -113    22
```

$\rightarrow k = [-1 \quad -113 \quad 22]$

۳) روش تبدیل همانندی (استفاده از فرم کانونیکال کنترل کننده)

تحقق کانونی :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \rightarrow \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 86 & -64 & 14 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$C_{cc} = [B_c \quad A_c B_c \quad A_c^2 B_c] =$$

```
>> Ccc = ctrb(Ac,Bc)
Ccc =

     0     0     1
     0     1    14
     1    14   132
```

$\rightarrow$ state feedback : $u = -kx \rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 86-k_1 & -64-k_2 & 14-k_3 \end{bmatrix} x(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + k_1 = \alpha_0 \rightarrow -86 + k_1 = 10 \rightarrow k_1 = 96 \\ a_1 + k_2 = \alpha_1 \rightarrow 64 + k_2 = 12 \rightarrow k_2 = -52 \\ a_2 + k_3 = \alpha_2 \rightarrow -14 + k_3 = 7 \rightarrow k_3 = 21 \end{array} \right\} k_c = [96 \quad -52 \quad 21]$$

$k = k_c T^{-1}$, $T = C \times C_{cc}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 13 & -3 & 0 \\ 71 & -18 & 1 \end{bmatrix}$

```
>> T = c * inv(Ccc)
T =

    -3    -5     1
    13    -3     0
    71   -18     1
```

```
>> k = [96 -52 21] * inv(T)
k =

   -1.0000 -113.0000   22.0000
```

$\rightarrow k = [-1 \quad -113 \quad 22]$

۴) روش مستقیم :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ P_d = (-5, -1 \pm i)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A + Bk) = \alpha(s) \rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} s-8 & -3 & -1 \\ 2 & s-5 & 1 \\ 5 & 0 & s-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \right)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} s-8+k_1 & -3+k_2 & k_3-1 \\ 2 & s-5 & 1 \\ 5+k_1 & k_2 & k_3+s-1 \end{bmatrix} \right) = (s-8+k_1)\big((s-5)(k_3+s-1)-k_2\big)$$
$$-(3+k_2)\big(2(k_3+s-1)-(5+k_1)\big)$$
$$+(k_3-1)\big(2k_2-(s-5)(5+k_1)\big)$$

$\to (s-8+k_1)\left(s^2+s(k_3-6)-5k_3-k_2\right)-(3+k_2)\left(2s+2k_3-k_1-7\right)+(k_3-1)\left(s(-5-k_1)+25\right.$

$\left.+5k_1+2k_2\right) = s^3+7s^2+12s+10$

$$\left\{\begin{aligned} 10 &= (-8+k_1)(-5k_3-k_2)-(3+k_2)(2k_3-k_1-7)+(k_3-1)(25+5k_1+2k_2) \\ 12 &= (-5k_3-k_2)+(-8+k_1)(k_3-6)-(3+k_2)(2)+(k_3-1)(-5-k_1) \\ 7 &= (-8+k_1)(1)+(1)(k_3-6) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} k_1 &= -1 \\ k_2 &= -113 \\ k_3 &= 22 \end{aligned}$$

$\to$ Test : $7 = (-8+(-1)) + (22-6) = -9-6+22 = 22-15 = 7 = 7$ $\boxed{\checkmark}$

---

۳ پرسش سه

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

آ. فرض کنید فیدبک حالتی به صورت $u = -kx$ به سیستم اعمال شود، مقادیر ویژهٔ سیستم جدید را بیابید.

ب. فیدبک حالت سیستم را به‌گونه‌ای طراحی کنید که پاسخ سیستم حلقه‌بسته دارای زمان نشست کمتر از ۴ ثانیه و فراجهش کمتر از ۱۵ درصد باشد. قطب‌های مطلوب حلقه‌بسته را هم تعیین کنید.

ج. اگر قانون کنترل به‌صورت رابطهٔ $u = -kx + r$ باشد، بهرهٔ k را برای این‌که سیستم حلقه‌بسته دارای مشخصات حلقه قسمت قبل باشد، به سه روش بس و گیورا، آکرمن و کانونیکال رویتگر محاسبه کنید.

د. با استفاده از دستور place در MATLAB، بهرهٔ k را به‌دست آورده و پاسخ خود را شبیه‌سازی کنید.

ه. پیش‌جبران‌ساز استاتیکی را به‌گونه‌ای طراحی کنید که خطای حالت دائم به ورودی پله صفر باشد.

و. یک فیدبک حالت با پیش‌جبران‌ساز انتگرالی را به‌گونه‌ای طراحی کنید که بدون خطای حالت دائم یک ورودی پله را دنبال کند و قطب‌های حلقه بسته در $\{-4, -2, -1 \pm i\}$ قرار بگیرند.

ز. با اعمال یک سیگنال اغتشاش ثابت در ورودی کنترلی سیستم، عملکرد کنترل کننده‌های طراحی شده در بخش‌های (ه) و (و) را در ردیابی ورودی پله مقایسه کنید (استفاده از شبیه‌سازی MATLAB الزامی است).

ح. با درنظر گرفتن نامعینی دلخواه در پارامترهای سیستم، عملکرد کنترل‌کننده‌های طراحی‌شده در بخش‌های (ه) و (و) را در ردیابی پله مقایسه نمایید. به عنوان مثال، نامعینی در ماتریس حالت را می‌توانید به‌صورت جمع‌شوندهٔ $A \to (A + \Delta A)$ مدل کنید که در آن ΔA نامعینی است (استفاده از شبیه‌سازی MATLAB الزامی است).

آ. فرض کنید فیدبک حالتی به صورت $u = -kx$ به سیستم اعمال شود، مقادیر ویژهٔ سیستم جدید را بیابید.

الف) سیستم به فرم کانونی است: لذا مقادیر ویژه سیستم اصلی عبارتند از ریشه های معادله مشخصه زیر:

$s^3+4s^2+s-6=0 \to s = -3, -2, 1$

سیستم جدید که در آن فیدبک $k=[k_1 \ k_2 \ k_3]$ اعمال شده است معادله مشخصه‌ای به صورت زیر دارد

$s^3+(k_3+4)s^2+(k_2+1)s+(k_1-6)=0$

ب. فیدبک حالت سیستم را به‌گونه‌ای طراحی کنید که پاسخ سیستم حلقه‌بسته دارای زمان نشست کمتر از ۴ ثانیه و فراجهش کمتر از ۱۵ درصد باشد. قطب‌های مطلوب حلقه‌بسته را هم تعیین کنید.

$\to (s+a)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2) \to M_p < 0.15 \to e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 0.15 \to 0.5169 < \xi < 1$

$t_s < 4 \to \frac{4}{\xi\omega_n} < 4 \to \frac{1}{\xi\omega_n} < 1 \to \xi\omega_n > 1$

$\to s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{(2\xi\omega_n)^2-4\omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \to \left\{\begin{aligned} \xi &> 0.5169 \\ \xi\omega_n &> 1 \end{aligned}\right. \to$ باتوجه به این دو شرط:

$\to$ مثلا : $\xi = 0.6$, $\omega_n = 2.5 \to -1.5 \pm 2i = s_{1,2}$, $a \simeq 5\xi \Rightarrow s_3 = -3$

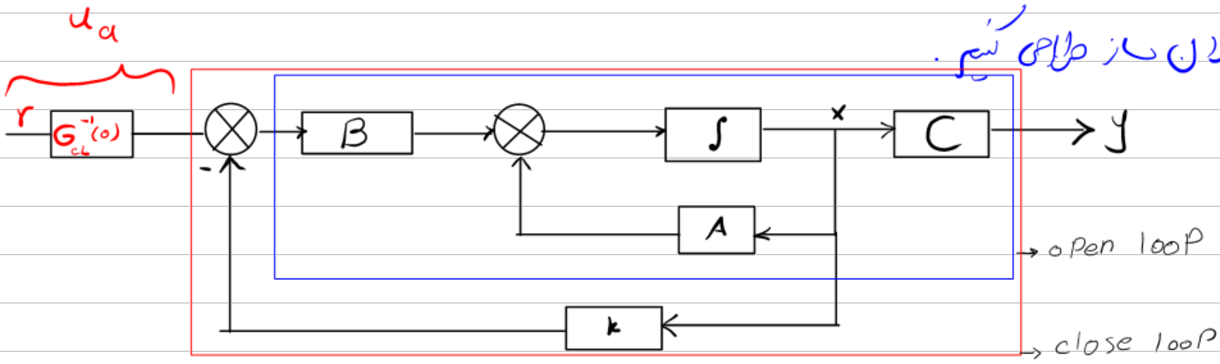
$$\rightarrow \alpha(s) = (s+3)(s^2+3s+6.25) = s^3+6s^2+15.25+18.75$$

$$\left\{\begin{array}{l} k_3+4=6 \rightarrow \boxed{k_3=2} \\ k_2+1=15.25 \rightarrow \boxed{k_2=14.25} \\ k_1-6=18.75 \rightarrow \boxed{k_1=24.75} \end{array}\right.$$

ج. اگر قانون کنترل به‌صورت رابطهٔ $u = -kx + r$ باشد، بهرهٔ k را برای این‌که سیستم حلقه‌بسته دارای مشخصات حلقهٔ قسمت قبل باشد، به سه روش بس و گیورا، آکرمن و کانونیکال رویتگر محاسبه کنید.

به عبارتی صورت سوال خواسته است فیدبک حالت به ازای ورودی غیر مرجع بررسی شود. عمل پایدارساز را در قسمت قبل انجام داده‌ام حال باید ردیابی انجام دهیم.

برای این کار باید پیش جبران ساز طراحی کنیم.



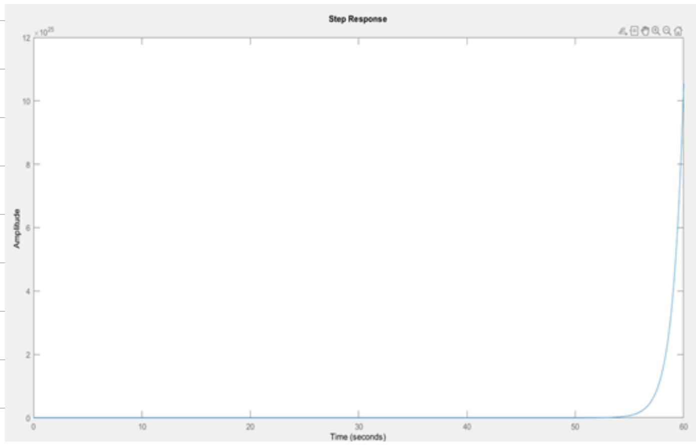
$$G_{cL}^{-1}(0) = \left[-C\,(A-Bk)^{-1}\,B\right]^{-1} \rightarrow$$

```
>> Gcl = inv(-C * inv(A - B*k)*B)

Gcl =

   1.8750
```

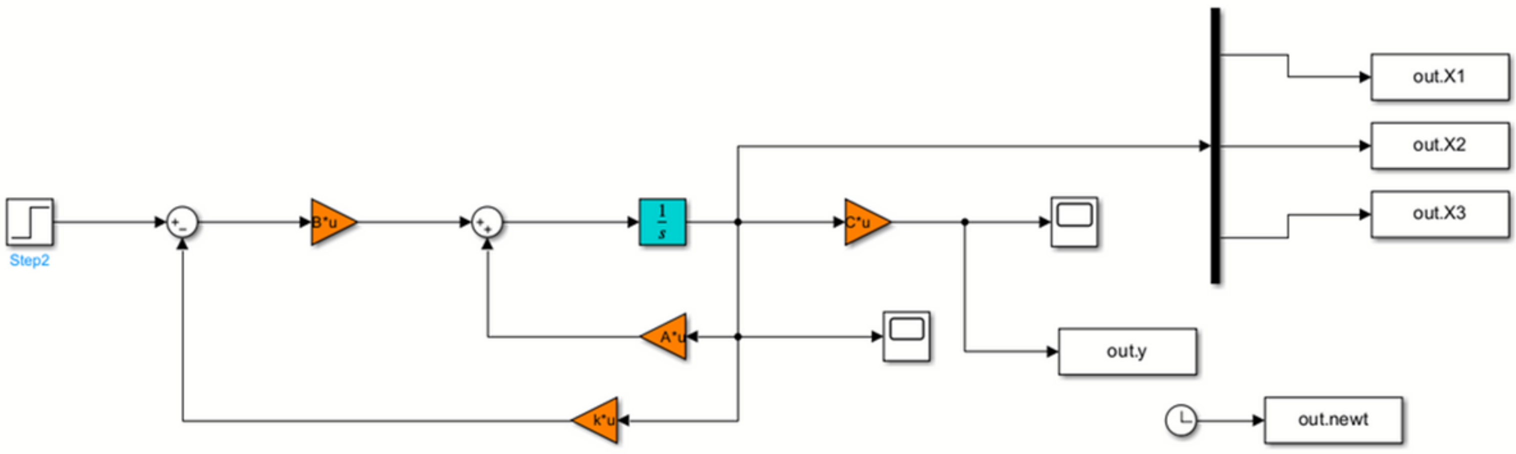
د. با استفاده از دستور place در MATLAB، بهرهٔ k را به‌دست آورده و پاسخ خود را شبیه‌سازی کنید.

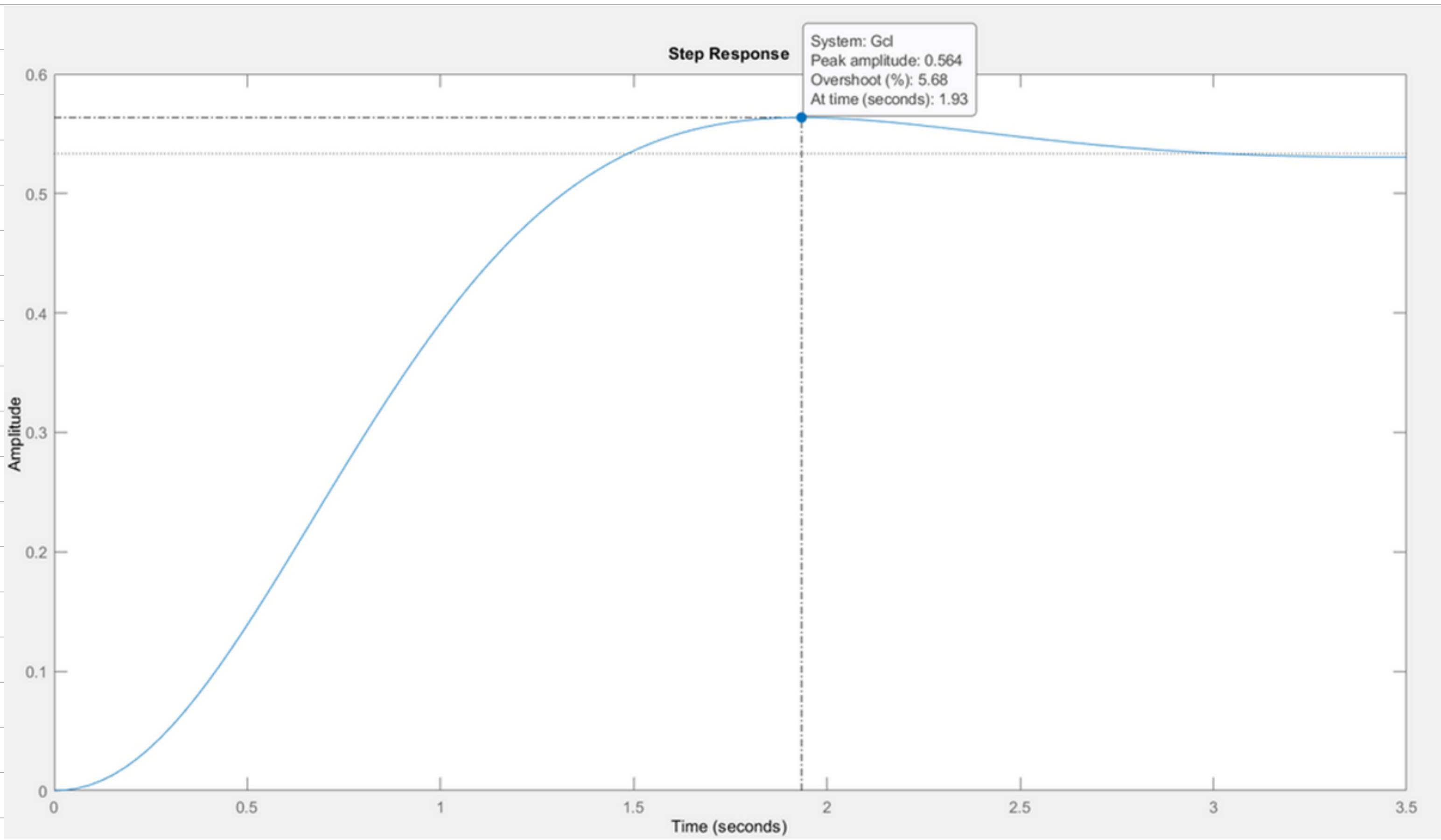
```
>> k = place(A,B,[-3 -1.5+2i -1.5-2i])

k =

   24.7500   14.2500    2.0000

Go =

        s + 10
  ------------------
  s^3 + 4 s^2 + s - 6
```

حلقه باز کاملاً ناپایدار




```
clc;close;

 A =[ 0 1 0;0 0 1;6 -1 -4]; B= [ 0 0 1]';C = [10 1 0];D = 0;
 k = place(A,B,[-3 -1.5+2i -1.5-2i]);
 sim('Q3_HW6S');
% t = out.tout;
% y = out.y;
% plot(t,Y)
An = A - B*k;
```

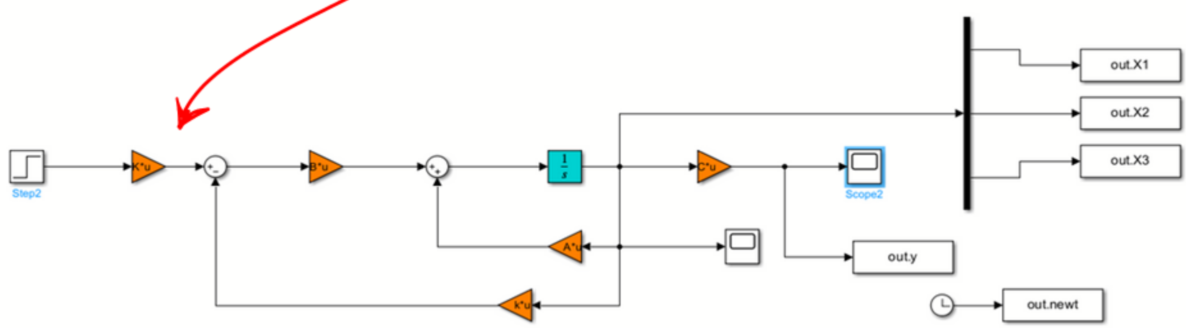


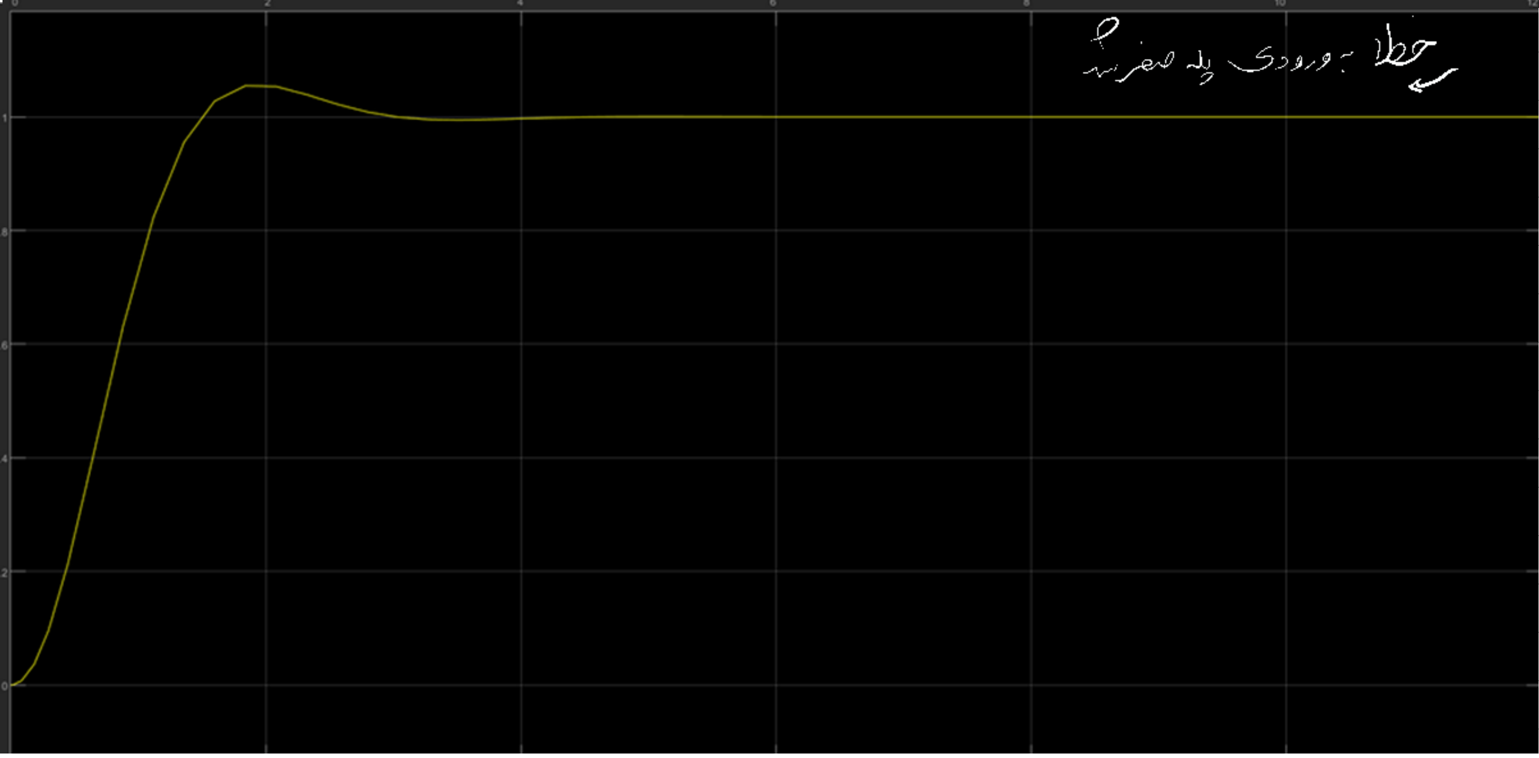


ه. پیش‌جبران‌ساز استاتیکی را به‌گونه‌ای طراحی کنید که خطای حالت دائم به ورودی پله صفر باشد.

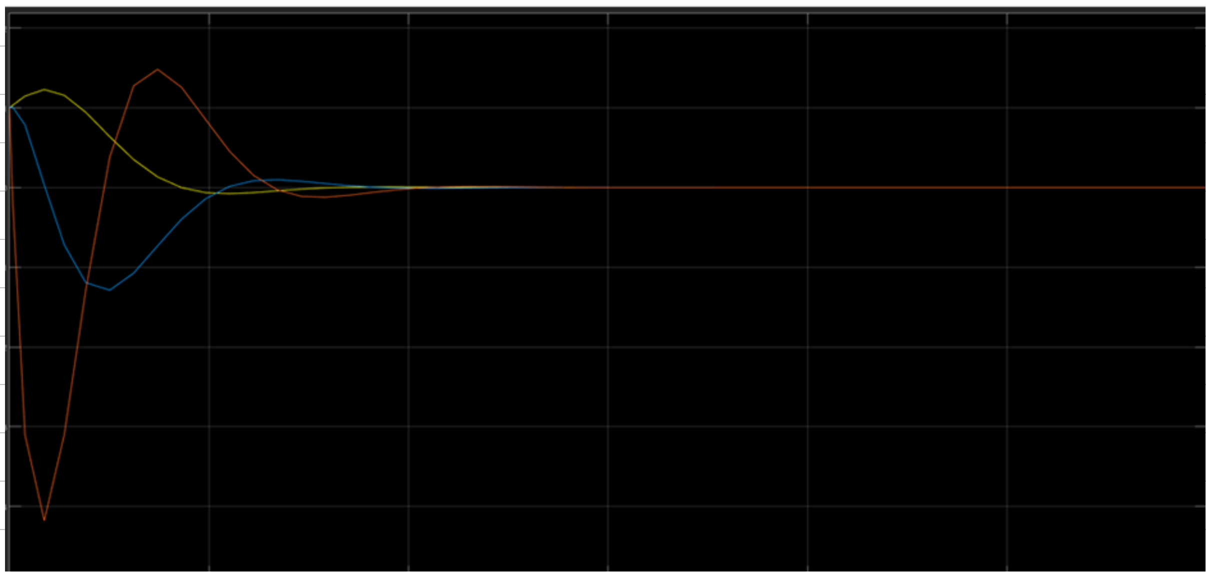
$$G_{cL}^{-1}(0) = \left[-C\,(A-Bk)^{-1}\,B\right]^{-1}$$

```
>> Gcl = inv(-C * inv(A - B*k)*B)

Gcl =

    1.8750
```





برای ورودی صفر و شرط اولیه [2 1 1] متغیرهای حالت بدون پیش جبران ساز به صفر میل می‌کنند.



و. یک فیدبک حالت با پیش‌جبران‌ساز انتگرالی را به‌گونه‌ای طراحی کنید که بدون خطای حالت دائم یک ورودی پله را دنبال کند و قطب‌های حلقه بسته در $\{-4, -2, -1 \pm i\}$ قرار بگیرند.

۴ پرسش چهار

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

کنترل‌کنندهٔ فیدبک حالت را به‌گونه‌ای طراحی کنید که معیار عملکردی زیر کمینه شود:

$$J = \int_0^{\infty} \left[x^T(t) Q x(t) + u^2(t) \right] dt$$

که در آن $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است. قطب‌های سیستم حلقه بسته را نیز بدست آورید.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad و \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

محاسبه ماتریس P :

با استفاده از معادله ریکاتی داریم :

$$A^T P + P A - P B B^T P + Q = 0$$

در اینجا $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $R = 1$

محاسبه فیدبک حالت :

$$k = R^{-1} B^T P$$

قطب های حلقه بسته

$$eig(A_{CL}) = eig(A - Bk)$$

محاسبه:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} & 1 - P_{12} P_{21} = 0 \\ & P_{11} - P_{12} - P_{12} P_{21} = 0 \\ & P_{11} - P_{21} - P_{21} \times P_{22} = 0 \\ & -P_{22}^2 - 2 P_{22} + P_{12} + P_{21} + 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = R^{-1} B^T P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \quad و \quad eig(A_{CL}) = -1 \;و\; -1$$

```
% Matrices definition
A = [0 1; 0 -1];
B = [0; 1];
Q = [1 0; 0 1];
R = 1;

% Solve the Continuous Algebraic Riccati Equation (CARE)
[P,~,~] = care(A, B, Q, R);

% Calculate the optimal feedback gain matrix K
K = inv(R) * B' * P;

% Closed-loop system matrix
A_cl = A - B * K;

% Calculate the eigenvalues of the closed-loop system
eigenvalues = eig(A_cl);

% Display results
disp('Matrix P:');
disp(P);
disp('Feedback gain matrix K:');
disp(K);
disp('Closed-loop system eigenvalues:');
disp(eigenvalues);
```