

Baccalauréat 2006

Session normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole (P) de foyer $F(0,2)$ et de directrice la droite (D) d'équation : $y = 4$. On désigne par (Δ) la droite parallèle à (D) et passant par le point F .

1. Soit M un point de (P) d'ordonnée inférieure strictement à 2 et H le projeté orthogonal de M sur (Δ) .

a) Montrer que : $MF - MH = 2$. (0,5pt)

b) En déduire que le cercle de centre M et de rayon MH est tangent au cercle de diamètre $[AB]$ où A et B sont les points d'intersection de (P) avec la droite (Δ) . (0,5pt)

2.a) Trouver une équation de (P) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ puis tracer (P) . (0,5pt)

b) Soit (D_m) une droite variable d'équation $y = mx + 2$ où m est un paramètre réel. La droite (D_m) coupe (P) en S et T . Montrer que, le milieu I de $[ST]$, appartient à une conique fixe (P') dont on donnera une équation dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,5pt)

3. Soit l'ellipse (E) d'excentricité $e = \frac{1}{3}$, de foyer $F(0,2)$ et de directrice associée la droite (D) .

a) Justifier que (P) et (E) n'ont aucun point commun. (0,5pt)

b) Trouver une équation de (E) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,5pt)

c) Déterminer les sommets de (E) , son deuxième foyer F' et sa deuxième directrice (D') . (0,5pt)

d) Tracer F' , (D') et (E) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,5pt)

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O . On désigne par I , J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$ et $[BC]$.

1. Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui transforme D en A et J en I . Vérifier que $f = S_{(DB)} \circ t_{\vec{JK}}$ où $t_{\vec{JK}}$ est la translation de vecteur \vec{JK} et $S_{(DB)}$ est la réflexion d'axe (DB) . (0,5pt)

2. Caractériser l'antidéplacement f :

a) En décomposant convenablement la translation $t_{\vec{JK}}$ (0,5pt)

b) En exploitant l'écriture complexe de f dans le repère orthonormé direct $(A; \overline{AI}, \overline{AJ})$ (0,5pt)

3. Montrer que : $f(A) = B$ (0,25pt)

4. On pose : $g = S_{(AI)} \circ f$. Montrer que g est un déplacement que l'on caractérisera. (0,5pt)

5. Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I .

a) Donner le rapport et un angle de S . (0,5pt)

b) Préciser $S[(BC)]$ et $S[(BD)]$, en déduire $S(B)$. (0,25pt)

c) Montrer que : $S(A) = J$. (0,25pt)

d) Soit Ω le centre de S . Montrer que les points Ω , I , B et C sont cocycliques. (0,25pt)

6.a) Donner la nature de $S \circ S$ et préciser ses éléments caractéristiques. (0,5pt)

b) En déduire que Ω est le barycentre des deux points $(B, 1)$ et $(J, 4)$ puis construire Ω . (0,25pt)

7. Soit E le point du plan défini par : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BA}$ et soit S' la similitude directe de centre B qui transforme C en E . Caractériser $S \circ S'$ et montrer que $\Omega E = 2\Omega D$ et que $(\Omega E) \perp (\Omega D)$. (0,75pt)

Problème (11 points)**Partie A**

Soit f la fonction de variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} & x \geq 0 \\ \frac{-\ln(1-x)}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité **2cm**.

1. Etudier la continuité de f en 0 . (0,25pt)
2. Justifier que f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$. Donner la valeur de la dérivée à droite de 0 . (0,25pt)
3. Soit h un réel strictement négatif. On définit sur $] -\infty, 0[$ la fonction u par :

$$u(x) = \left(\frac{\ln(1-h) + h}{h^2} \right) x^2 - \ln(1-x) - x$$

- a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel c appartenant à $]h, 0[$ tel que :

$$\frac{\ln(1-h) + h}{h^2} = \frac{1}{2(c-1)}.$$

- b) Prouver que : $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-h) + h}{h^2} = -\frac{1}{2}$ (0,25pt)
- c) Prouver que f est dérivable à gauche en 0 et donner la valeur de la dérivée à gauche en 0 . (0,25pt)
- d) f est-elle dérivable en 0 ? (0,25pt)
- 4.a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. En déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$. (0,25pt)
- b) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$. (0,25pt)
- c) Pour $x \leq 0$, on pose : $v(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Etablir le tableau de variation de la fonction v puis déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x < 0$. (0,25pt)

- d) Dresser le tableau de variation de f en y précisant les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (0,25pt)
5. Tracer la courbe (C_f) dans le repère précédent $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,25pt)

Partie B

1. Justifier que f possède des primitives sur $[0, +\infty[$. (0,25pt)
2. Soit la fonction G définie sur $I = [\pi/4, \pi/2[$ par : $G(x) = \int_0^{\ln(\tan x)} f(t) dt$.
- a) Calculer $G(\pi/4)$ et $G'(x)$ pour tout x de I . (0,5pt)
- b) Prouver que : $\forall x \in I, \quad G(x) = x - \pi/4$. (0,25pt)
- c) Soit β un réel positif, justifier l'existence d'un unique réel α de I tel que : $\beta = \ln(\tan \alpha)$. (0,25pt)
- d) On suppose que si β tend vers $+\infty$ alors α tend vers $\frac{\pi}{2}$. Calculer en cm^2 , l'aire $A(\beta)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\beta$ puis calculer $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} A(\beta)$. (0,75pt)