Corrigé de l'activité

1. Exercices des égalités et des inégalités

Exercice 16

Calculer la valeur de l'expression $\mathbf{S}=\dfrac{1+2a}{1+\sqrt{1+2a}}+\dfrac{1-2a}{1-\sqrt{1-2a}}$ pour $\mathbf{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Solution :

$$1+2a=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ et } 1-2a=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ donc}$$

$$1+2a=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ et } 1-2a=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$S=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}}+\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}=1$$

Exercice 17

a, b , c et d quatre réels non nuls. Montrer que $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a^2+b^2}{ac+bd}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$

Solution :

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k\Rightarrow k=\frac{a^2}{ac}=\frac{b^2}{bd}=\frac{a^2+b^2}{ac+bd} \quad \text{et } k=\frac{ac}{c^2}=\frac{bc}{d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$$

Exercice 18

Simplifier l'expression $\mathbf{S}=\dfrac{1+a}{1+a+ab}+\dfrac{1+b}{1+b+bc}+\dfrac{1+c}{1+c+ca}$ sachant que $\mathbf{abc}=1$

Solution :

Multiplions la 2^e^ fraction par a et la 3^e^ par ab, on trouve alors

$$S=\frac{1+a}{1+a+ab}+\frac{a+ab}{a+ab+1}+\frac{ab+1}{ab+1+a}=\frac{2(a+ab+1)}{ab+1+a}=2$$

Exercice 19

Soit a, b et c trois réels vérifiant $\mathbf{abc}=1$ et $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

Montrer que l'un au moins de ces réels est égal à 1.

Solution :

on a $abc(a+b+c)=ab+bc+ca\Rightarrow a+b+c=ab+bc+ca$ donc

$$a+b+c-(ab+bc+ca)+abc-1=0\Rightarrow(a-1)(b-1)(c-1)=0$$

Exercice 20

Soient a, b et c trois réels non nuls tels que $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$.

On pose $\mathbf{A}=\dfrac{4bc-a^2}{bc+2a^2}$, $\mathbf{B}=\dfrac{4ca-b^2}{ca+2b^2}$ et $\mathbf{C}=\dfrac{4ab-c^2}{ab+2c^2}$.

Montrer que $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=3$ et que $\mathbf{ABC}=1$

Solution :

Montrer que $(A-1)+(B-1)+(C-1)=0$ en écrivant

$$A-1=\frac{3(bc-a^2)}{bc+2a^2}=\frac{3(bc+a(b+c))}{a^2+bc-a(b+c)}=\frac{-3(ab+bc+ca)}{(a-b)(c-a)}$$ et

$$A=\frac{4bc-a^2}{bc+2a^2}=\frac{4bc-(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}=\frac{(b-c)^2}{(a-b)(c-a)}$$

Par analogie on trouve les autres. Donc

$$A-1=\frac{-3(ab+bc+ca)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$B-1=\frac{-3(ab+bc+ca)(c-a)}{(a-b)(b-c)}$$

$$C-1=\frac{-3(ab+bc+ca)(a-b)}{(a-b)(b-c)}$$

D'où $A-1+B-1+C-1=\dfrac{-3(ab+bc+ca)\left[(b-c)+(c-b)+(b-a)\right]}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$ et

$$ABC=\frac{(b-c)^2}{(a-b)(c-a)}\times\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}\times\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}=1$$

Exercice 21

Soient les réels strictement positifs x, y, z, a, b et c vérifiant $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

Montrer que $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{a+b+c}\sqrt{x+y+z}$.

Solution :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\Rightarrow\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}\Rightarrow\sqrt{\frac{x+y+z}{a+b+c}}=\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

D'autre part on a

$$A=\sqrt{a+b+c}\sqrt{x+y+z}$$

$$A=\sqrt{\frac{x+y+z}{a+b+c}}(a+b+c)$$

$$A=(a+b+c)\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$A=\sqrt{ax}+\sqrt{b}\sqrt{\frac{bx}{a}}+\sqrt{c}\sqrt{\frac{cx}{a}}$$

$$A=\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}$$

Exercice 22

Soient a, b et c trois réels non nuls.

Montrer que si $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ alors deux parmi les nombres a, b et c sont opposés.

Solution :

$$0=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=\frac{(a+b)(ca+cb+c^2+ab)}{abc(a+b+c)}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)}$$

Exercice 23

Soient a, b et c trois réels tels que $\mathbf{a+b+c=0}$.

Montrer que $\left(\mathbf{a^2+b^2+c^2}\right)^2=\mathbf{2}\left(\mathbf{a^4+b^4+c^4}\right)$

Solution :

$$\mathbf{a+b+c=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca) \Rightarrow}$$

$$\left(\mathbf{a^2+b^2+c^2}\right)^2=\mathbf{4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)\right)=4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}$$

$$\left(\mathbf{a^2+b^2+c^2}\right)^2=\mathbf{a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \Rightarrow}$$

$$\mathbf{2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=2(a^4+b^4+c^4)+4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=2(a^4+b^4+c^4)+\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \Rightarrow}$$

$$\left(\mathbf{a^2+b^2+c^2}\right)^2=\mathbf{2\left(a^4+b^4+c^4\right)}$$

Exercice 24

Prouver que si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle, on a :

$$\mathbf{(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

Solution :

D'après AM-GM on a

$$\mathbf{(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}=8abc \Rightarrow \boxed{(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc}}.$$

En plus $\mathbf{a \geq \sqrt{a^2-(b-c)^2}=\sqrt{a-b+c}\sqrt{a+b-c}}$ **de même** $\mathbf{b \geq \sqrt{b+c-a}\sqrt{b-c+a}}$ **et** $\mathbf{c \geq \sqrt{c+a-b}\sqrt{c-a+b}}$**.**

D'où $\boxed{\mathbf{abc \leq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}$ **et donc on a**

$$\mathbf{(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}.$$

Exercice 25

Soient x, y et z des réels distincts deux à deux tels que : $\mathbf{x+y+z=\sqrt{2}}$.

Calculer $\mathbf{A=\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^3}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}}$

Solution :

$\mathbf{A=\dfrac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{(y-x)(z-y)(x-z)}=x+y+z=\sqrt{2}}$ (d'après l'égalité 10)

Exercice 26

Soient a, b et c trois réels strictement positifs vérifiant $\mathbf{a+b+c=1}$. Montrer que $\mathbf{abc \leq \dfrac{1}{27}}$

Solution:

D'après l'exercice précédent on a $\mathbf{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c} \Rightarrow \dfrac{ab+bc+ca}{abc} \geq 9 \Rightarrow ab+bc+ca \geq 9abc}$

En plus

$$\mathbf{a+b+c=1 \Rightarrow (a+b+c)^2=1 \Rightarrow 1=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow \dfrac{1}{3} \geq ab+bc+ca}$$

Donc $\mathbf{\dfrac{1}{3} \geq ab+bc+ca \geq 9abc \Rightarrow abc \leq \dfrac{1}{27}}$

Exercice 27

Soient x et y deux réels positifs tels que $\mathbf{x+y=2}$. Montrer que $\mathbf{x^2y^2(x^2+y^2) \leq 2}$

Solution :

On a $(x+2)^2-4xy=(x-2)^2\geq 0 \Rightarrow 4-4xy\geq 0$ donc $xy\leq 1$

$A=x^2y^2(x^2+y^2)\Rightarrow$

$A=(xy)^2\left[(x+y)^2-2xy\right]\Rightarrow$

$A=(xy)^2\left[4-2xy\right]\Rightarrow$

$A=2xy\left[2xy-(xy)^2\right]\Rightarrow$

$A=2xy\left[1-(1-xy)^2\right]\Rightarrow$

$A\leq 2xy\Rightarrow$

$A\leq 2$

Exercice 28

Soient a, b et c trois entiers strictement positifs vérifiant $ab<c$. Montrer que $a+b\leq c$

Solution :

Etant donné que ab **et** c sont des entiers alors $ab<c\Rightarrow ab+1\leq c$ or

$a+b-(ab+1)=(a-1)(1-b)\leq 0\Rightarrow a+b\leq ab+1\leq c$

Exercice 29

Montrer que pour tous réels positifs a, b et c on a : $(a+b+c)^3\geq \dfrac{27}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$

Solution :

$$(a+b+c)^3=\left[\frac{3}{2}\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right]^3\geq\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]^3$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3\geq\frac{27}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$$

Exercice 30

Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle. Prouver que :

$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$

Solution :

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2}$$

$$(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)=2\left[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\right]-\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)=\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]-\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)=\left[(a-b)^2-c^2\right]\left[(b-c)^2-a^2\right]\left[(c-a)^2-b^2\right]$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)=\left[(a-b+c)(a-b-c)\right]\left[(b-c+a)(b-c-a)\right]\left[(c-a+b)(c-a-b)\right]\leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(a+b+c)^2\leq 4(ab+bc+ca)}$$

Exercice 31

Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

Solution

D'après Cauchy on a

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)\right)^2 = n^2$$

Exercice 32

Prouver que pour tous réels strictement positifs x et y: $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{xy}$

Solution :

Appliquons le MH-MG on a

$$\frac{x}{x^4 + y^2} = \frac{1}{\frac{1}{1/x^3} + \frac{1}{x/y^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^3} \times \frac{x}{y^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{xy} \text{ de même}$$

$$\frac{y}{x^2 + y^4} = \frac{1}{\frac{1}{y/x^2} + \frac{1}{1/y^3}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x^2} \times \frac{1}{y^3}} = \frac{1}{2}\frac{1}{xy}$$

La somme des deux nous donne le résultat.

Autre méthode :

D'après AM-GM on a $\begin{cases} x^4 + y^2 \geq 2\sqrt{x^4 y^2} = 2x^2 y \\ x^2 + y^4 \geq 2\sqrt{x^2 y^4} = 2xy^2 \end{cases}$ donc $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{x}{2x^2 y} + \frac{y}{2xy^2} = \frac{1}{xy}$

Exercice 33

Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Solution:

$a \leq b + c$ et $\frac{a}{b+c} = \frac{2a}{b+c+(b+c)} \leq \frac{2a}{b+c+a} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b+c} \leq \frac{2a}{a+b+c}}$, de même on a

$\frac{b}{c+a} \leq \frac{2b}{a+b+c}$ et $\frac{c}{a+b} \leq \frac{2c}{a+b+c}$. La somme des trois inégalités donne le résultat demandé.

Exercice 34

Montrer que pour tous réels $x_1, x_2, ..., x_n$, $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}x_k^2$

Solution

En appliquant Cauchy on trouve $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2\right)$

Or $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4^k}\right)=\frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\leq\frac{1}{3}$

2. Exercices sur les Equations fonctionnelles

Exercice 35 :

Soit f une solution et soit $g(x)=f(e^x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}_+^*$.

$g(x+y)=f(e^{x+y})=f(e^x.e^y)=f\left(e^x\right)+f(e^y)=g(x)+g(y)$ $g(xy)=f$ donc il existe un réel k tel que $g(x)=kx$ donc $f(x)=k\ln x;\ \ \forall x>0$

Exercice 36 :

La fonction nulle et la fonction identité sont solutions

Soit f une solution non nulle, posons $g(x)=f(e^x)$

$g(x+y)=f(e^{x+y})=f(e^xe^y)=f(e^x).f(e^y)=g(x).g(y)$ alors d'après l'exercice 2 on a $g(x)=e^{kx}$ or $g(x)=f(e^x)\Rightarrow f(x)=g(\ln x)=e^{k\ln x}=x^k$. La réciproque est évidente

On trouvera alors que les solutions f sont telles que : $f(x)=0$ ou $f(x)=x^k\ \ k\in\mathbb{R}$

Exercice 37 :

L'application f est injective et $f(0)=0$, $f(1)\geq 1$.

Supposons que $f(1)\geq 2$ alors comme $f(1)+f\left(f(1)\right)+f\left(f\left(f(1)\right)\right)=3$ alors

$f\left(f(1)\right)+f\left(f\left(f(1)\right)\right)\leq 1$. Or $f\left(f(1)\right)+f\left(f\left(f(1)\right)\right)$ est la somme de deux entiers naturels non nuls donc $f\left(f(1)\right)+f\left(f\left(f(1)\right)\right)\geq 2$ ce qui est contradictoire donc $f(1)<2$. D'où $1\leq f(1)<2$ ce qui montre que $f(1)=1$.

Montrons par récurrence que f est l'identité c-à-d $f(n)=n;\forall n\in\mathbb{N}$

Elle est déjà vraie pour 0 et 1. Supposons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre n.

Donc $f(n+1)\geq n+1$ et de l'injectivité on a $f(f(n+1))\geq 1$ et $f\left(f(f(n+1))\right)\geq 1$

Alors

$3(n+1)=f(n+1)+f\left(f(n+1)\right)+f\left(f\left(f(n+1)\right)\right)\geq f(n+1)+2(n+1)\Rightarrow n+1\geq f(n+1)$.

D'où $f(n+1)=n+1$.

Exercice 38 :

Pour x fixé, le membre de droite parcourt $\mathbb{R}$, ce qui assure que f est surjective. De plus en substituant à y deux éventuels antécédents d'un nombre, on montre que f est injective. Ainsi, f est bijective. Soit α l'antécédent de 0. En substituant dans l'équation originale $x=0$ et $y=\alpha$, on obtient que : $f(0)=\alpha+\left(f(0)\right)^2$.

DE plus en substituant dans l'équation originale $x=y=\alpha$, on obtient que $f(0)=\alpha$. Ainsi on en déduit que $f(0)=0$.

En remplaçant x par 0 dans l'équation initiale on obtient que $f(f(x))=x$. Remplaçons ensuite x par $f(x)$ on trouve $f\left(xf(x)+f(y)\right)=y+x^2$, d'où $\left(f(x)\right)^2=x^2\Rightarrow f(x)=\pm x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Montrons que f ne change pas d'expression sur $\mathbb{R}$.
Supposons qu'il existe un réel x non nul tel que $f(x)=x$ et montrons que pour tout réel y, non nul, on a $f(y)=y$. Supposons par l'absurde que $f(y)=-y$, l'égalité s'écrira donc $\pm\left(x^2-y\right)=y+x^2$. Si le signe est « + » on aura la contradiction $y=0$ et si le signe est «-» on aura la contradiction $x=0$. En plus il est claire que les fonction $x\mapsto x$ et $x\mapsto -x$ vérifient l'équation et par conséquent elles sont les seules solutions de cette équation.

Exercice 39:

Il est évident que la fonction nulle est solution. Soit f une solution éventuelle du problème. En posant $a=x-y$, on déduit de la 1ère propriété que pour tous réels a et y on a
$$f(a+2y)+f(a)=2f(a+y)f(y)\ .\ \text{Or } \lim_{y\to+\infty} f(a+2y)=\lim_{u\to+\infty} f(u)=0 \text{ et}$$
$$\lim_{y\to+\infty} 2f(a+y)f(y)=\lim_{u\to+\infty} 2f(u)\times\lim_{y\to+\infty} f(y)=0 \quad \text{d'où } f(a)=0$$
Donc on a montré que $\forall a\in\mathbb{R}$, $f(a)=0$.

Exercice 40 :

Soit f une éventuelle solution.
Pour $x=y=1$, on obtient $\begin{cases} f(1)g(1=4 \\ (1-f(1))(1+g(1))=-3 \end{cases} \Rightarrow f(1)=g(1)=2$

En remplaçant y par 1, on trouve $\begin{cases} \left(f(x)+1-1\right)\left(g(1)+x-1\right)=(x+1)^2 \\ \left(-f(x)+1\right)\left(g(1)+x\right)=(x+1+1)(1-x-1) \end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases} (x+1)f(x)=(x+1)^2 \\ \left(-f(x)+1\right)\left(g(1)+x\right)=(x+1+1)(1-x-1) \end{cases}\Rightarrow f(x)=x+1$$

En remplaçant x par 1, on trouve
$$\begin{cases} (f(1)+y-1)(g(y)+1-1)=(1+y)^2 \\ \left(-f(1)+y\right)\left(g(y)+1\right)=(1+y+1)(y-1-1) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (y+1)g(y)=(y+1)^2 \\ \left(y-2\right)\left(g(y)+1\right)=(y+2)(y-2 \end{cases}\Rightarrow g(y)=y+1$$
La réciproque est évidente, donc les seules solutions de cette équation sont les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=g(x)$.

3. Exercices des olympiades

Exercice 41 (T2 – 2022):

Soient x, y et z trois réels non nuls tels que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

a) Monter que : $\left(xy\right)^3+\left(zy\right)^3+\left(xz\right)^3=3\left(xyz\right)^2$

b) En déduire que : $\frac{x+y}{z}+\frac{z+x}{y}+\frac{y+z}{x}=-3$

Solution

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{xyz}\left(xy+yz+zx\right)=0 \Leftrightarrow xy+yz+zx=0$.

Posons $a = xy;\ b = yz$ et $c = zx$.

Donc on $a+b+c=0 \Leftrightarrow a+b=-c \Leftrightarrow (a+b)^3=-c^3$

Alors on a $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=3abc$. Or $abc=(xy)(yz)(zx)=(xyz)^2$.

D'où $(xy)^3+(zy)^3+(xz)^3=3(xyz)^2$

b) $(xy)^3+(zy)^3+(xz)^3=3(xyz)^2 \Leftrightarrow \dfrac{(xy)^3+(zy)^3+(xz)^3}{(xyz)^2}=3 \Leftrightarrow \dfrac{xy}{z^2}+\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{zx}{y^2}$

$\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{xy}{z}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{xy}{z^2}=-\dfrac{xyz}{z^3}$ et par identification on a $\dfrac{z+x}{y}=-\dfrac{xyz}{y^3}$ et $\dfrac{y+z}{x}=-\dfrac{xyz}{x^3}$.

D'où $\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{y+z}{x}=-\dfrac{xyz}{z^3}-\dfrac{xyz}{y^3}-\dfrac{xyz}{x^3}=-xyz\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}\right)$ or

$\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}=\dfrac{(xy)^3+(zy)^3+(xz)^3}{(xyz)^3}=\dfrac{3(xyz)^2}{(xyz)^3}=\dfrac{3}{xyz}$ d'où

$\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{y+z}{x}=-xyz\times\dfrac{3}{xyz}=-3$

Exercice 42 (T1-2021)

Soit n un entier naturel strictement positif. x et y deux réels positifs tels que $x^n+y^n=1$.

3) Montrer que pour tout réel $t\in\left]0,1\right[$: $\dfrac{1+t^2}{1+t^4}<\dfrac{1}{t}$.

4) Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right)<\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$.

Solution

1) $\forall t\in\left]0,1\right[$ on a $(1+t^4)-t(1+t^2)=(1-t)(1-t^3)>0 \Rightarrow t(1+t^2)<1+t^4 \Rightarrow \dfrac{1+t^2}{1+t^4}<\dfrac{1}{t}$

2) Remarquons que $x^n+y^n=1 \Leftrightarrow x^n=1-y^n$ et $y^n=1-x^n$.

En prenant $t=x^k$ on trouve $\dfrac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}=\dfrac{1+t^2}{1+t^4}<\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{x^k} \Rightarrow \dfrac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}<\dfrac{1}{x^k}$. D'où

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x^k}=\frac{1}{x}\,\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x^n-1}{x^n(x-1)}=\frac{y^n}{x^n(1-x)} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}<\frac{y^n}{x^n(1-x)} \quad (1)}.$$

Par analogie on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y^k}=\frac{y^n-1}{y^n(y-1)}=\frac{x^n}{y^n(1-y)} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}<\frac{x^n}{y^n(1-y)} \quad (2)}$.

Le produit des relations (1) et (2) donne

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right)<\frac{y^n}{x^n(1-x)}\times\frac{x^n}{y^n(1-y)}=\frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

D'où $\boxed{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right)<\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}}$.

Exercice 43 (T2-2021)

1) Soit x, y et z des nombres réels strictement positifs. Montrer que :

c) $x+y\geq 2\sqrt{xy}$.

d) $\dfrac{1}{(2x+y+z)^2}\leq\dfrac{1}{4(x+y)(x+z)}$.

2) Soit a, b et c des nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=a+b+c$.

Montrer que : $\dfrac{1}{(2a+b+c)^2}+\dfrac{1}{(2b+c+a)^2}+\dfrac{1}{(2c+a+b)^2}\leq\dfrac{3}{16}$.

Solution

1) a) $x+y\geq 2\sqrt{xy}$.

Comparaison entre la moyenne arithmétique et celle géométrique.

Autrement : $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy>2xy\Rightarrow(x+y)^2>2xy\Rightarrow x+y>2\sqrt{xy}$

b) On a $\left((x+y)+(x+z)\right)^2\geq 4\left(x+y\right)\left(x+z\right)$

$\Rightarrow\dfrac{1}{(2x+y+z)^2}\leq\dfrac{1}{4(x+y)(x+z)}$

2) Notons $S=\dfrac{1}{(2a+b+c)^2}+\dfrac{1}{(2b+c+a)^2}+\dfrac{1}{(2c+a+b)^2}$ **. D'après la question précédente on a**

$4S\leq\dfrac{1}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{1}{(a+c)(b+c)}+\dfrac{1}{(b+c)(a+b)}=\dfrac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$\Rightarrow\boxed{S\leq\dfrac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\quad(1)}$

D'après la question 1.a) on a : $a^2b+bc^2\geq 2\sqrt{a^2b^2c^2}=2abc$ **de même** $a^2c+b^2c\geq 2abc$ **et** $ab^2+ac^2\geq 2abc$ **. D'où** $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\geq 6abc$

D'autre part

$9(a+b)(b+c)(c+a)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)-6abc\geq 0$.

D'où $9(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow\boxed{\dfrac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq\dfrac{9}{8}\quad(2)}$

Or $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=a+b+c\Leftrightarrow\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=a+b+c\Leftrightarrow\boxed{ab+bc+ca=(a+b+c)abc\quad(3)}$

D'autre part

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)$

$\Rightarrow(ab+bc+ca)^2=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2(a+b+c)abc$

Or

$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=(a^2b^2+b^2c^2)+(c^2a^2+a^2b^2)+(b^2c^2+c^2a^2)$

$\Rightarrow 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 2\sqrt{a^2b^4c^2}+2\sqrt{a^4b^2c^2}+2\sqrt{a^2b^2c^4}$

$\Rightarrow 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 2(a+b+c)abc$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq(a+b+c)abc$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 3(a+b+c)abc \Rightarrow \boxed{\frac{(a+b+c)abc}{(ab+bc+ca)^2} \leq \frac{1}{3} \quad (4)}$$

A l'aide des quatre relations précédentes on trouve :

$$S \leq \frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{2} \times \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \times \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)abc} \times \frac{(a+b+c)abc}{(ab+bc+ca)^2} \leq \frac{1}{2} \times \frac{9}{8} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{16}$$

D'où : $\boxed{\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \leq \frac{3}{16}}$

Exercice 44 (T3-2021)

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = n \cdot f(1)$
2. $\forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) = p \cdot f(1)$
3. $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = r \cdot f(1)$

Solution

1. $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

Donc $f(0) = 0 \times f(1)$ **, la proposition est donc vraie pour** $n = 0$ **.**

Si $f(n) = n \cdot f(1)$ **alors** $f(n+1) = f(1) + f(n) = f(1) + n \cdot f(1) = (n+1)f(1)$

2. $\forall p \in \mathbb{Z}_+$ **on a** $f(p) = p \cdot f(1)$ **d'après la question 1.**

$\forall p \in \mathbb{Z}_-$**,** $\exists! n \in \mathbb{N} : n + p = 0$ **.On a** $f(n) = nf(1)$ **et** $f(n+p) = 0$

$f(n+p) = f(n) + f(p) \Rightarrow f(p) = -f(n) = -nf(1) = pf(1)$ **. Donc** $\forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) = p \cdot f(1)$.

3. $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : \quad r = \frac{p}{q}$ **alors** $p = \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}$ **(q fois) donc**

$$f(p) = f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}\right) \quad (q \text{ fois}) = f\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right) + \cdots + f\left(\frac{p}{q}\right) \quad (q \text{ fois}) \Rightarrow f(p) = qf\left(\frac{p}{q}\right).$$

Ce qui montre que $pf(1) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$**. D'où** $\frac{p}{q}f(1) = f\left(\frac{p}{q}\right)$**. On en déduit donc que**

$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = r \cdot f(1)$

Exercice 45 (T3-2021)

Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $abc = 1$

1. Vérifier que $a^5 + b^5 = (a+b)\left[(a-b)(a^3-b^3) + a^2b^2\right]$

2. Montrer que $\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1$

Solution

1. On a

$$(a+b)\left[(a-b)(a^3-b^3)+a^2b^2\right]=\left(a^2-b^2\right)\left(a^3-b^3\right)+(a+b)a^2b^2$$
$$=a^5-a^2b^3-a^3b^2+b^5+a^3b^2+a^2b^3$$
$$=a^5+b^5$$

2. Comme $a-b$ et a^3-b^3 sont de même signe alors $(a-b)(a^3-b^3)\geq 0$. D'où $a^5+b^5\geq(a+b)a^2b^2$ ce qui entraine que

$$a^5+b^5+ab\geq(a+b)a^2b^2+ab \Rightarrow \frac{1}{a^5+b^5+ab}\leq\frac{1}{(a+b)a^2b^2+ab}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a^5+b^5+ab}\leq\frac{ab}{(a+b)a^2b^2+ab}=\frac{1}{(a+b)ab+1}=\frac{c}{(a+b)abc+c}=\frac{c}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\leq\frac{c}{a+b+c}} \quad (1).$$

On en déduit par analogie que $\boxed{\frac{bc}{a^5+b^5+bc}\leq\frac{a}{a+b+c}}$ **(2) et que**

$$\boxed{\frac{ca}{a^5+b^5+ca}\leq\frac{b}{a+b+c}} \quad (3)$$

La somme des trois inégalités montre que

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

D'où $\boxed{\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1}$