

Exercice 1 : (3 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{n}{2n^2 + n} \text{ et } v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \text{ Pour tout entier naturel } n \geq 1 \text{ on donne } x_n = \frac{1}{u_n} \text{ et } y_n = \ln(v_n).$$

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de x_5 est	6	11	16	(0.5 pt)
2	La limite de la suite (u_n) est	0	$\frac{1}{2}$	1	(0.5 pt)
3	La suite (v_n) est une suite	Croissante	Décroissante	Non monotone	(0.5 pt)
4	La suite (x_n) est une suite	Arithmétique	Géométrique	Convergente	(0.5 pt)
5	Le terme général de la suite (y_n) est	$y_n = \frac{1}{3} \ln n$	$y_n = -n \ln 3$	$y_n = n \ln 3$	(0.5 pt)
6	La somme $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ est égale à	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$	(0.5 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 : (6 points)

1° Pour tout complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (7+7i)z^2 + (-2+30i)z + 32 - 16i$

a) Calculer $P(2i)$ 0.5pt

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout z , on a : 0.5pt

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$ 0.5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3+i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 4+4i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ 1pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC 0.5pt

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. Placer D. 0.5pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 3+i$; on pose : $f(z) = \frac{z-2i}{z-4-4i}$.

a) Vérifier que $f(z_D) = -i$ et interpréter graphiquement. 0.5pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ 0.5pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)-1| = \sqrt{2}$ 0.5pt

4° On pose $z_0 = f(6)$ et pour tout entier naturel n on note $z_n = z_0^n$

a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. 0.5pt

- | | |
|---|--------|
| b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $ z_n \geq 2020$. | 0.25pt |
| c) Vérifier que le point d'affixe z_{2020} appartient à l'axe des abscisses. | 0.25pt |

Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- | | |
|--|---------|
| 1° a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$ | 0.5 pt |
| b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) puis étudier leur position relative. | 0.75 pt |
| 2° a) Montre que $f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$ et que $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}$ | 0.5 pt |
| b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement | 0.75 pt |
| 3° Justifier que $f'(x) = 1 - e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f . | 0.5 pt |
| 4° a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\beta < \alpha$ puis vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$. | 0.5 pt |
| b) Justifier que $f'(\alpha) = \alpha - 1$ | 0.25 pt |
| 5° Construire la courbe (C) et son asymptote (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. | 0.25 pt |

Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x - x \ln x & \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- | | |
|---|--------|
| 1° a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue en 0^+ . | 0.75pt |
| b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter graphiquement. | 0.5pt |
| c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement. | 1 pt |
| 2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f . | 1 pt |
| 3° a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses. | 1pt |
| b) Donner une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse e . | 0.5pt |
| 4° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$. | |
| a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. | 0.5pt |
| b) Montrer que $(g^{-1})'(0) = -1$ où g^{-1} est la réciproque de g . | 0.5pt |
| c) Construire (T) , (Γ) et (Γ') dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , (Γ') étant la courbe représentative de g^{-1} . | 0.5pt |
| d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $2x - x \ln x = m$ | 0.25pt |
| 5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $A = \int_1^e x \ln x dx$. | 0.25pt |
| b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. | 0.25pt |

Fin

CORRECTION DU BAC D 2

Session Normale

DATE : 2/09/2020

Exercice 1 (3 points)

N°Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	A	B	A	B	B
Note	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt

Exercice 2 (6 points)

1. $P(Z) = Z^3 - (7+7i)Z^2 + (-2+30i)Z + 32 - 16i$

a) $P(2i) = (2i)^3 - (7+7i)(2i)^2 + (-2+30i)(2i) + 32 - 16i$
 $= -8i + 28 + 28i - 4i - 60 + 32 - 16i = 60 - 60 + 28i - 28i$
 $P(2i) = 0$ [0,5]

b) $P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + aZ + b)$

1^{ère} Méthode: Tableau HÖRNER

	1	-7-7i	-2+30i	-32-16i
2i	↓	2i	10-14i	-32+16i
	1	-7-5i	8+16i	0
		a	b	

$P(Z) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i)$ [0,5]

2^{ème} Méthode: Identification

$P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + aZ + b)$
 $= Z^3 + (a-2i)Z^2 + (b-2ai)Z - 2bi$
 $= Z^3 - 10Z^2 + 33Z - 34$

Par identification on a :

$\begin{cases} a-2i = -7-7i \Rightarrow a = -7-5i \\ b-2ai = -2+30i \\ -2bi = -32-16i \Rightarrow b = 8+16i \end{cases}$

$P(Z) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i)$

c) $P(Z) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Z-2i=0 \Rightarrow Z=2i \\ \text{ou} \\ Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i = 0 \end{cases}$

$\Delta = [-(7+5i)]^2 - 4(1)(8+16i) = 49 + 70i - 25 - 32 - 64i$
 $\Delta = -8 + 6i$

On pose $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$

$|\Delta| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow |\Delta| = 10$

$x^2 + y^2 = |\Delta| = 10$ (1)

$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\Delta) = -8$ (2)

$2xy = \operatorname{Im}(\Delta) = 6$ (3)

(1) + (2) $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

(1) - (2) $2y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$

De (3) on a $2xy = 6 \Rightarrow xy = 3 > 0$

donc x et y sont de même signe d'où

$Z_1 = 1+3i$ et $Z_2 = -1-3i$

$Z_1 = \frac{7+5i-1-3i}{2} \Rightarrow Z_1 = \frac{6+2i}{2} \Rightarrow Z_1 = 3+i$

$Z_2 = \frac{7+5i+1+3i}{2} \Rightarrow Z_2 = \frac{8+8i}{2} \Rightarrow Z_2 = 4+4i$

$S = \{2i, 3+i, 4+4i\}$ [0,5]

2a) $Z_A = 3+i \Rightarrow A(3,1)$

$Z_B = 2i \Rightarrow B(0,2)$

$Z_C = 4+4i \Rightarrow C(4,4)$

Voir figure

$\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{3+i-2i}{3+i-4-4i} = \frac{3-i}{-1-3i} = \frac{-3+i}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{-3+9i+1-3i}{1-9} = \frac{-2+6i}{-8} = \frac{1-3i}{4}$

$\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = i$

$\left| \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} \right| = 1$

$\operatorname{Arg} \left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC} \right) = 1 \Rightarrow AB = AC$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A [0,5]

c) ABDC est un parallélogramme ssi

$\overline{CD} = \overline{AB} \Leftrightarrow Z_D - Z_C = Z_B - Z_A$

$\Leftrightarrow Z_D = Z_B - Z_A + Z_C \Rightarrow Z_D = 2i - 3 - i + 4 + 4i$

$\Leftrightarrow Z_D = 1+5i \Rightarrow D(1,5)$ [0,25]

$f(Z) = \frac{Z-2i}{Z-4-4i} \Leftrightarrow f(Z) = \frac{Z-Z_B}{Z-Z_C}$

$Z = 1+4i \Leftrightarrow Z \neq Z_C \Rightarrow M \neq C$

a) $f(Z_D) = \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C} \Rightarrow f(Z_D) = \frac{1+5i-2i}{1+5i-4-4i} = \frac{1+3i}{-3-i} \times \frac{-3+i}{-3+i} = \frac{-3+3i-3-3i}{9-1} = \frac{-6-6i}{8} = \frac{-3-3i}{4}$

$f(Z_D) = \frac{-3-i-3i+3}{10} \Rightarrow f(Z_D) = -i$ [0,5]

$\left| \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C} \right| = 1$

$\operatorname{Arg} \left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C} \right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \left(\frac{DB}{DC} \right) = 1 \Rightarrow CA = CB$

Donc BCD est un triangle rectangle et isocèle en D [0,5]

b) $|f(Z)| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{Z-Z_B}{Z-Z_C} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 1 \Rightarrow MB = MC$

L'ensemble Γ_1 des points M est la médiatrice de [BC]. [0,25]

c) $|f(Z) - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{Z-2i}{Z-4-4i} - 1 \right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left| \frac{Z-2i-Z+4+4i}{Z-4-4i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{4+2i}{Z-4-4i} \right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|4+2i|}{|Z-Z_C|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{20}}{|Z-Z_C|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z-Z_C|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{20}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{|Z-Z_C|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |Z-Z_C| = \sqrt{10} \Leftrightarrow CM = \sqrt{10}$

Donc l'ensemble (Γ_3) des points M est le cercle de centre C

et de rayon $\sqrt{10}$. [0,25]

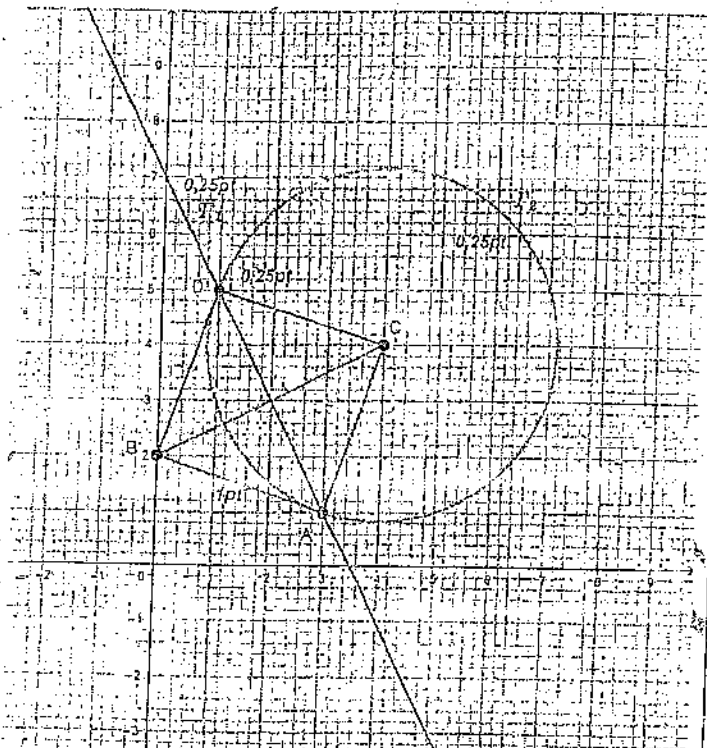
4. a) $z_0 = f(6) = \frac{6-2i}{6-4-4i} = \frac{6-2i}{2-4i} = \frac{3-i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i}$
 $= \frac{3+6i-1-2i}{5} = \frac{5+4i}{5} \Rightarrow z_0 = 1+i$

$\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1+i = z_0$

Donc $z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ [0,5]

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad Z_n = z_0^n \text{ et } M_n(Z_n)$
 $|Z_n| \geq 2020 \Leftrightarrow |z_0|^n \geq 2020 \Leftrightarrow |z_0|^n \geq 2020$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \geq 2020 \Leftrightarrow \ln((\sqrt{2})^n) \geq \ln(2020)$
 $\Leftrightarrow n \ln(\sqrt{2}) \geq \ln(2020) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2020)}{\ln(\sqrt{2})} \Leftrightarrow n \geq 21,96$
 Le plus petit entier naturel est $n_0 = 22$ [0,25]
 $\text{Arg}(Z_{2020}) = \text{Arg}(z_0^{2020}) = 2020 \text{Arg}(z_0) = 2020 \frac{\pi}{4} = 505\pi$
 $\text{Arg}(Z_{2020}) = \pi[2\pi] \Leftrightarrow Z_{2020} \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow M_{2020} \in (Ox)$ [0,25]

Représentation graphique



Exercice 3 (4points)

$f(x) = x - 2 + e^{-x}$

1. a) $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} (x - 2 + e^{-x}) = +\infty$

$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ [0,25]

$\lim_{+\infty} (f(x) - (x - 2)) = \lim_{+\infty} (e^{-x}) = 0$

$= \lim_{+\infty} (x - 2 + e^{-x} - (x - 2)) = \lim_{+\infty} (e^{-x}) = 0$

$\lim_{+\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$ [0,25]

b) Comme $\lim_{+\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$ alors la droite

$\Delta: y = x - 2$ est une A.O à (C) au voisinage de $+\infty$ [0,25]

Position relative de C et Δ

On étudie le signe de $(f(x) - y) = e^{-x} > 0$ Donc C est toujours au dessus de Δ [0,5]

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$		+
Position relative de (C) par rapport à (Δ)	C/ Δ	

2. a) $f(x) = x - 2 + e^{-x} = x - 2 + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$ [0,25]

$f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x} = \frac{xe^x}{e^x} - \frac{2e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x} - 2 + \frac{1}{e^x}$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}$ [0,25]

b) $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \left(\frac{0}{xe^x - 2e^x + 1} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{-\infty} f(x) = +\infty$ [0,25]

$\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x} \right) = -\infty$

$\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ [0,25]

Donc (C) admet une B.P de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$ [0,25]

3. $f'(x) = 1 - e^{-x}$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$

$f'(x) = 1 - 0 \cdot e^{-x} = f'(x) = 1 - e^{-x}$ [0,25]

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

c) le T.V de f [0,25]

	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

$f(0) = 0 - 2 + e^0 = -2 + 1 = -1 \Leftrightarrow f(0) = -1$

4. a) D'après le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ elle est continue et strictement décroissante de $]-\infty, 0]$ vers $[-1, +\infty[$ donc elle est bijective.

Comme $0 \in [-1, +\infty[$ alors $\exists \beta \in]-\infty, 0]$ / $f(\beta) = 0$.

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ f est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$ donc elle est bijective. Comme $0 \in [-1, +\infty[$

alors $\exists \alpha \in [0, +\infty[$ / $f(\alpha) = 0$.

$[1, 8; 1, 9] \subset [0, +\infty[$. Alors f est aussi bijective sur $[1, 8; 1, 9]$.

De plus $f(1, 8) = -0,03 < 0$ et $f(1, 9) = 0,04 > 0$ donc $f(1, 8) \times f(1, 9) < 0$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire (V.I)

$\exists \alpha \in]1, 8; 1, 9[$ / $f(\alpha) = 0$ [0,5]

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 2 - \alpha$

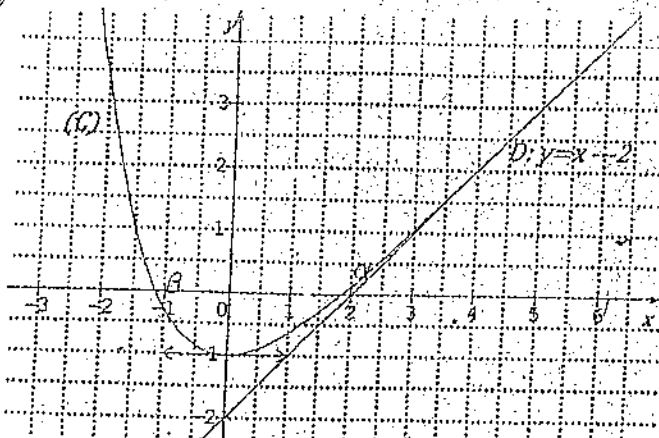
$f(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} = 1 - (2 - \alpha) = -1 + \alpha$

$\Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha - 1$ [0,25]

5. Représentation graphique

D: $y = x - 2$ [0,25]

x	0	2
y	-2	0



Exercice 4 (7 points)

$$\begin{cases} f(x) = x - x \ln x & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$1.a) \lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \left(x - x \ln x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{0^+} f(x) = 0 = f(0) \quad [0,5]$$

Donc f est continue à droite de $x_0 = 0$ [0,25]

$$b) \lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} \left(\frac{x - x \ln x - 0}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{0^+} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{0^+} (1 - \ln x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \quad [0,25]$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de $x_0 = 0$ et sa courbe (Γ) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. [0,25]

$$c) \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} (x - x \ln x)$$

$$= \lim_{+\infty} x \left(1 - \ln x \right) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{+\infty} f(x) = -\infty \quad [0,5]$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{+\infty} \left(1 - \ln x \right) = -\infty$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad [0,25]$$

Donc (Γ) admet une B.P. de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$ [0,25]

$$2. \forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = x - x \ln x$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = 1 - \ln x - x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \ln x - 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\ln x \quad [0,5]$$

$$-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

b) Tableau de variations de f [0,5]

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	-
$f(x)$	0	1	$-\infty$

$$f(1) = 1 - 1 \ln(1) = 1$$

$$3.a) \Gamma \cap (Ox) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Comme $f(0) = 0$ alors $x = 0$ est solution de l'équation

$$f(x) = 0 \text{ d'où } 0(0,0) \in \Gamma \cap (Ox)$$

$$\text{Si } x \neq 0 \text{ alors } f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \text{ donc } A(e, 0) \in \Gamma \cap (Ox)$$

$$\text{D'où } \Gamma \cap (Ox) = \{0, A\} \quad [1]$$

b) Equation de la tangente (T) à (Γ) au point A :

$$T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$x_0 = e \quad f(e) = 0$$

$$f'(e) = -\ln(e) = -1 \Leftrightarrow f'(e) = -1$$

$$T: y = f'(e)(x - e) + f(e) \Leftrightarrow y = -(x - e) + 0$$

$$T: y = -x + e \quad [0,5]$$

$$4. I = [1, +\infty[$$

D'après ce T.V f T.V de g est

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	0	-
$g(x)$	1	$-\infty$

D'après ce T.V g est continue et strictement décroissante de

$I = [1, +\infty[\text{ vers } J =]-\infty, -1]$, donc elle est bijective. [0,5]

b) Calcul de $g^{-1}(0)$

$$\text{On a } g(e) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = e$$

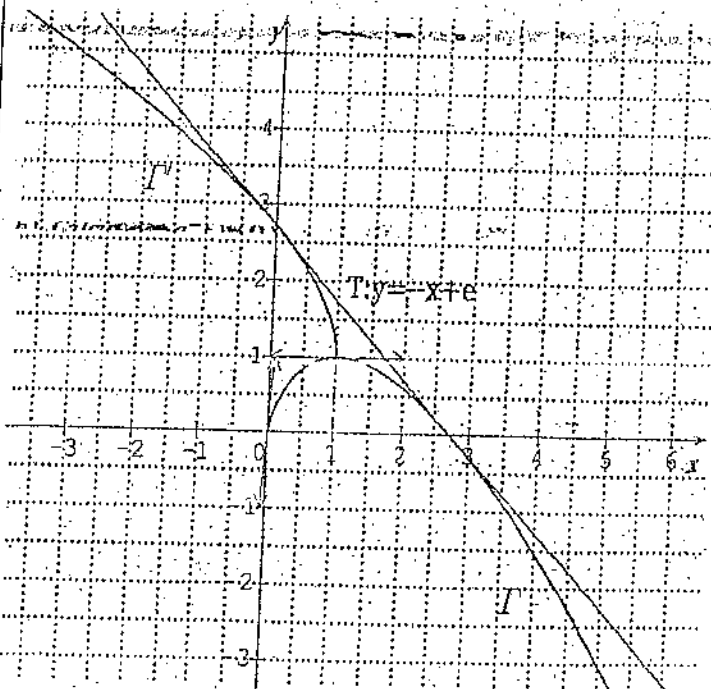
$$\text{On a aussi } g'(e) = -1$$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(e)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\Leftrightarrow (g^{-1})'(0) = -1 \quad [0,5]$$

c) Représentation graphique [0,5]



d) $2x - x \ln x = m \Leftrightarrow x + x - x \ln x = m$
 $\Leftrightarrow x - x \ln x = -x + m \Leftrightarrow f(x) = -x + m$
 Donc le nombre de solution de l'équation paramétrique
 revient au nombre de points d'intersections de la courbe
 (f) avec la droite $T_m: y = -x + m$ qui est parallèle à T

m	Nombre de solutions	
$m < 0$	1	0,25
$0 \leq m < e$	2	
$m = e$	1	
$m > e$	0	

5. a) $A = \int_1^e x \ln x dx$

On pose $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$

$$\int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e$$

$$= \left[\frac{2x^2 \ln x - x^2}{4} \right]_1^e = \frac{2e^2 \ln e - e^2}{4} - \frac{2(1)^2 \ln 1 - 1^2}{4}$$

$$A = \frac{2e^2 - e^2}{4} - \frac{0 - 1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow A = \frac{e^2 + 1}{4} \quad 0,25pt$$

b) $S = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x - x \ln x) dx$
 $S = \int_1^e x dx - \int_1^e x \ln x dx \Leftrightarrow S = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e - A$
 $S = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} 1^2 - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{2e^2 - 2 - e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}$
 $S = \frac{e^2 - 3}{4} = 1,1 \quad 0,25pt$

CETTE PARTIE N'EST PAS DEMANDÉE

JUSTIFICATION DE L'EXERCICE [1]

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \frac{n}{n^2 + n} = \frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$X_n = \frac{1}{U_n} \quad \text{et} \quad Y_n = \ln(V_n)$

1. $X_n = \frac{1}{U_n} \Leftrightarrow X_n = 2n + 1$

Donc $X_5 = 2 \times 5 + 1 = 11 \Leftrightarrow X_5 = 11$ Réponse B

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$
 Réponse A

3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$

Et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} < 1 \Leftrightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} < 1$

Donc (V_n) est décroissante Réponse B

4. $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = 2n + 1$
 $X_{n+1} - X_n = 2(n+1) + 1 - (2n + 1)$
 $= 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2$

$X_{n+1} - X_n = 2$ Donc (X_n) est S.A. de raison 2

Réponse A

5. $Y_n = \ln(V_n) = \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = n \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -n \ln 3$

$Y_n = -n \ln 3$

Réponse B

On pose $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Comme (V_n) est S.G. alors

$S_n = V_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$

Réponse B

FIN

Exercice 1 : (3 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{n}{2n^2 + n} \text{ et } v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \text{ Pour tout entier naturel } n \geq 1 \text{ on donne } x_n = \frac{1}{u_n} \text{ et } y_n = \ln(v_n).$$

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de x_5 est	6	11	16	(0.5 pt)
2	La limite de la suite (u_n) est	0	$\frac{1}{2}$	1	(0.5 pt)
3	La suite (v_n) est une suite	Croissante	Décroissante	Non monotone	(0.5 pt)
4	La suite (x_n) est une suite	Arithmétique	Géométrique	Convergente	(0.5 pt)
5	Le terme général de la suite (y_n) est.	$y_n = \frac{1}{3} \ln n$	$y_n = -n \ln 3$	$y_n = n \ln 3$	(0.5 pt)
6	La somme $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ est égale à	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)$	(0.5 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 : (6 points)

1° Pour tout complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (7+7i)z^2 + (-2+30i)z + 32 - 16i$

- a) Calculer $P(2i)$ 0.5pt
- b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout z , on a : $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$ 0.5pt
- c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$ 0.5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = 3+i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 4+4i$.

- a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ 1pt
- b) Déterminer la nature du triangle ABC 0.5pt
- c) Déterminer l'axe z_D du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Placer D . 0.5pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 3+i$; on pose : $f(z) = \frac{z-2i}{z-4-4i}$.

- a) Vérifier que $f(z_D) = -i$ et interpréter graphiquement. 0.5pt
- b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'axe z tels que $|f(z)| = 1$ 0.5pt
- c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'axe z tels que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$ 0.5pt

4° On pose $z_0 = f(6)$ et pour tout entier naturel n on note $z_n = z_0^n$

- a) Écrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. 0.5pt

- b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $|z_n| \geq 2020$. 0.25pt
- c) Vérifier que le point d'affixe z_{2020} appartient à l'axe des abscisses. 0.25pt

Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1° a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$. 0.5 pt
- b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) puis étudier leur position relative. 0.75 pt
- 2° a) Montre que $f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$ et que $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}$. 0.5 pt
- b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement 0.75 pt
- 3° Justifier que $f'(x) = 1 - e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f . 0.5 pt
- 4° a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\beta < \alpha$ puis vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$. 0.5 pt
- b) Justifier que $f'(\alpha) = \alpha - 1$. 0.25 pt
- 5° Construire la courbe (C) et son asymptote (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 0.25 pt

Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x - x \ln x & \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1° a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue en 0^+ . 0.75pt
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter graphiquement. 0.5pt
- c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement. 1 pt
- 2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f . 1 pt
- 3° a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses. 1pt
- b) Donner une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse e . 0.5pt
- 4° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$.
- a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. 0.5pt
- b) Montrer que $(g^{-1})'(0) = -1$ où g^{-1} est la réciproque de g . 0.5pt
- c) Construire (T) , (Γ) et (Γ') dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (Γ') étant la courbe représentative de g^{-1} . 0.5pt
- d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $2x - x \ln x = m$. 0.25pt
- 5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $A = \int_1^e x \ln x dx$. 0.25pt
- b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. 0.25pt

Fin

222

CORRECTION DU BAC D 2

Session Normale

DATE : 2/09/2020

Exercice 1 (3 points)

N°Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	A	B	A	B	B
Note	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt

Exercice 2 (6 points)

1. $P(Z) = Z^3 - (7+7i)Z^2 + (-2+30i)Z + 32 - 16i$

a) $P(2i) = (2i)^3 - (7+7i)(2i)^2 + (-2+30i)(2i) + 32 - 16i$
 $= -8i + 28 + 28i - 4i - 60 + 32 - 16i = 60 - 60 + 28i - 28i$
 $P(2i) = 0$ [0,5]

b) $P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + aZ + b)$

1^{ère} Méthode: Tableau HÖRNER

	1	-7-7i	-2+30i	-32-16i
2i	↓	2i	10-14i	-32+16i
	1	-7-5i	8+16i	0
		a	b	

$P(Z) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i)$ [0,5]

2^{ème} Méthode: Identification

$P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + aZ + b)$
 $= Z^3 + (a-2i)Z^2 + (b-2ai)Z - 2bi$
 $= Z^3 - 10Z^2 + 33Z - 34$

Par identification on a :

$\begin{cases} a-2i = -7-7i \Rightarrow a = -7-5i \\ b-2ai = -2+30i \\ -2bi = -32-16i \Rightarrow b = 8+16i \end{cases}$

$P(Z) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i)$

c) $P(Z) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Z-2i=0 \Rightarrow Z=2i \\ \text{ou} \\ Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i = 0 \end{cases}$

$\Delta = [-(7+5i)]^2 - 4(1)(8+16i) = 49 + 70i - 25 - 32 - 64i$
 $\Delta = -8 + 6i$

On pose $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$

$|\Delta| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow |\Delta| = 10$

$x^2 + y^2 = |\Delta| = 10$ (1)

$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\Delta) = -8$ (2)

$2xy = \operatorname{Im}(\Delta) = 6$ (3)

(1) + (2) $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

(1) - (2) $2y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$

De (3) on a $2xy = 6 \Rightarrow xy = 3 > 0$

donc x et y sont de même signe d'où

$Z_1 = 1+3i$ et $Z_2 = -1-3i$

$Z_1 = \frac{7+5i-1-3i}{2} \Rightarrow Z_1 = \frac{6+2i}{2} \Rightarrow Z_1 = 3+i$

$Z_2 = \frac{7+5i+1+3i}{2} \Rightarrow Z_2 = \frac{8+8i}{2} \Rightarrow Z_2 = 4+4i$

$S = \{2i, 3+i, 4+4i\}$ [0,5]

2a) $Z_A = 3+i \Rightarrow A(3,1)$

$Z_B = 2i \Rightarrow B(0,2)$

$Z_C = 4+4i \Rightarrow C(4,4)$

Voir figure

$\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{3+i-2i}{3+i-4-4i} = \frac{3-i}{-1-3i} = \frac{-3+i}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{-3+9i+1-3i}{1-9} = \frac{-2+6i}{-8} = \frac{1-3i}{4}$

$\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} = i$

$\left| \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} \right| = 1$

$\operatorname{Arg}\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC}\right) = 1 \Rightarrow AB = AC$
 $\left(\frac{AC}{AB}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A [0,5]

c) ABDC est un parallélogramme ssi

$\overline{CD} = \overline{AB} \Leftrightarrow Z_D - Z_C = Z_B - Z_A$

$\Leftrightarrow Z_D = Z_B - Z_A + Z_C \Rightarrow Z_D = 2i - 3 - i + 4 + 4i$

$\Leftrightarrow Z_D = 1+5i \Rightarrow D(1,5)$ [0,25]

$f(Z) = \frac{Z-2i}{Z-4-4i} \Leftrightarrow f(Z) = \frac{Z-Z_B}{Z-Z_C}$

$Z = 1+4i \Leftrightarrow Z \neq Z_C \Rightarrow M \neq C$

a) $f(Z_D) = \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C} \Rightarrow f(Z_D) = \frac{1+5i-2i}{1+5i-4-4i} = \frac{1+3i}{-3-i} \times \frac{-3+i}{-3+i} = \frac{-3+3i-3i+3}{9-1} = \frac{0}{8} = 0$

$f(Z_D) = \frac{-3-i-3i+3}{10} \Rightarrow f(Z_D) = -i$ [0,5]

$\left| \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C} \right| = 1$

$\operatorname{Arg}\left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow \left(\frac{DB}{DC}\right) = 1 \Rightarrow CA = CB$
 $\left(\frac{DC}{DB}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Donc BCD est un triangle rectangle et isocèle en D [0,5]

b) $|f(Z)| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{Z-Z_B}{Z-Z_C} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 1 \Rightarrow MB = MC$

L'ensemble Γ_1 des points M est la médiatrice de [BC]. [0,25]

c) $|f(Z) - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{Z-2i}{Z-4-4i} - 1 \right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left| \frac{Z-2i-Z+4+4i}{Z-4-4i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{4+2i}{Z-4-4i} \right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|4+2i|}{|Z-Z_C|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{20}}{|Z-Z_C|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z-Z_C|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{20}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{|Z-Z_C|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |Z-Z_C| = \sqrt{10} \Leftrightarrow CM = \sqrt{10}$

Donc l'ensemble (Γ_3) des points M est le cercle de centre C

et de rayon $\sqrt{10}$. [0,25]

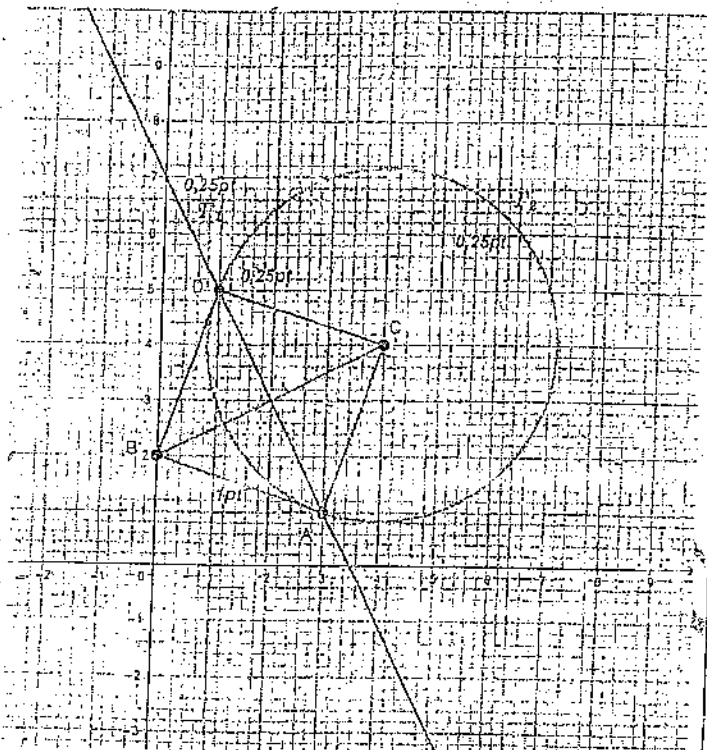
4. a) $z_0 = f(6) = \frac{6-2i}{6-4-4i} = \frac{6-2i}{2-4i} = \frac{3-i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i}$
 $= \frac{3+6i-1-2i}{5} = \frac{2+4i}{5} \Rightarrow z_0 = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

$\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1+i = z_0$

Donc $z_0 = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}}$ [0,5]

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad Z_n = z_0^n \text{ et } M_n(Z_n)$
 $|Z_n| \geq 2020 \Leftrightarrow |z_0|^n \geq 2020 \Leftrightarrow |z_0|^n \geq 2020$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \geq 2020 \Leftrightarrow \ln((\sqrt{2})^n) \geq \ln(2020)$
 $\Leftrightarrow n \ln(\sqrt{2}) \geq \ln(2020) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2020)}{\ln(\sqrt{2})} \Leftrightarrow n \geq 21,96$
 Le plus petit entier naturel est $n_0 = 22$ [0,25]
 $\text{Arg}(Z_{2020}) = \text{Arg}(z_0^{2020}) = 2020 \text{Arg}(z_0) = 2020 \frac{\pi}{4} = 505\pi$
 $\text{Arg}(Z_{2020}) = \pi[2\pi] \Leftrightarrow Z_{2020} \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow M_{2020} \in (Ox)$ [0,25]

Représentation graphique



Exercice 3 (4points)

$f(x) = x - 2 + e^{-x}$

1. a) $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} (x - 2 + e^{-x}) = +\infty$

$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ [0,25]

$\lim_{+\infty} (f(x) - (x - 2)) = \lim_{+\infty} (x - 2 + e^{-x} - (x - 2)) = \lim_{+\infty} (e^{-x}) = 0$

$\lim_{+\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$ [0,25]

b) Comme $\lim_{+\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$ alors la droite

$\Delta: y = x - 2$ est une A.O à (C) au voisinage de $+\infty$ [0,25]

Position relative de C et Δ

On étudie le signe de $(f(x) - y) = e^{-x} > 0$ Donc C est toujours au dessus de Δ [0,5]

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$		+
Position relative de (C) par rapport à (Δ)	C / Δ	

2. a) $f(x) = x - 2 + e^{-x} = x - 2 + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$ [0,25]

$f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x} = \frac{xe^x}{e^x} - \frac{2e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x} - 2 + \frac{1}{e^x}$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}$ [0,25]

b) $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \left(\frac{0}{xe^x - 2e^x + 1} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{-\infty} f(x) = +\infty$ [0,25]

$\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x} \right) = -\infty$

$\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ [0,25]

Donc (C) admet une B.P de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$ [0,25]

3. $f'(x) = x - 2 + e^{-x}$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$

$f'(x) = 1 - 0 + e^{-x} = f'(x) = 1 - e^{-x}$ [0,25]

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

c) le T.V de f [0,25]

	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

$f(0) = 0 - 2 + e^0 = -2 + 1 = -1 \Leftrightarrow f(0) = -1$

4. a) D'après le tableau de variations de f sur l'intervalle

$]-\infty, 0]$ elle est continue et strictement décroissante

de $]-\infty, 0]$ vers $[-1, +\infty[$ donc elle est bijective.

Comme $0 \in [-1, +\infty[$ alors $\exists \beta \in]-\infty, 0]$ / $f(\beta) = 0$.

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ f est continue et strictement

croissante de $[0, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$ donc elle est bijective.

Comme $0 \in [-1, +\infty[$

alors $\exists \alpha \in [0, +\infty[$ / $f(\alpha) = 0$.

$[1, 8; 1, 9] \subset [0, +\infty[$. Alors f est aussi bijective

sur $[1, 8; 1, 9]$.

De plus $f(1, 8) = -0,03 < 0$ et $f(1, 9) = 0,04 > 0$

donc $f(1, 8) \times f(1, 9) < 0$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire (V.I)

$\exists \alpha \in]1, 8; 1, 9[$ / $f(\alpha) = 0$ [0,5]

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 2 - \alpha$

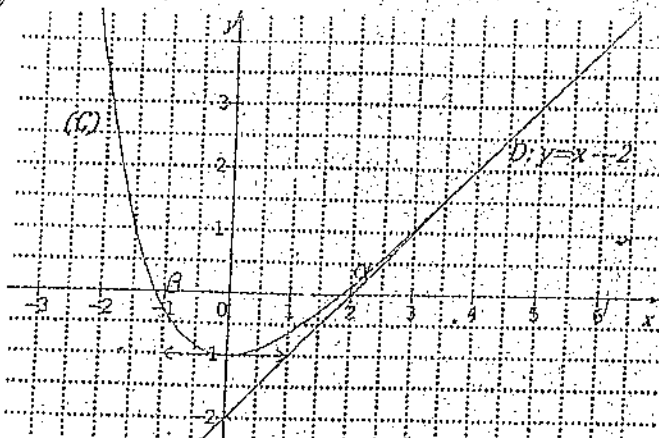
$f(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} = 1 - (2 - \alpha) = -1 + \alpha$

$\Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha - 1$ [0,25]

5. Représentation graphique

D: $y = x - 2$ [0,25]

x	0	2
y	-2	0



Exercice 4 (7 points)

$$\begin{cases} f(x) = x - x \ln x & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$1.a) \lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \left(x - x \ln x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{0^+} f(x) = 0 = f(0) \quad [0,5]$$

Donc f est continue à droite de $x_0 = 0$ [0,25]

$$b) \lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} \left(\frac{x - x \ln x - 0}{x - 0} \right)$$

$$= \lim_{0^+} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{0^+} (1 - \ln x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \quad [0,25]$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de $x_0 = 0$ et sa courbe (Γ) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. [0,25]

$$c) \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} (x - x \ln x)$$

$$= \lim_{+\infty} x \left(1 - \ln x \right) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{+\infty} f(x) = -\infty \quad [0,5]$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{+\infty} \left(1 - \ln x \right) = -\infty$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad [0,25]$$

Donc (Γ) admet une B.P. de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$ [0,25]

$$2. \forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = x - x \ln x$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = 1 - \ln x - x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \ln x - 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\ln x \quad [0,5]$$

$$-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

b) Tableau de variations de f [0,5]

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	-
$f(x)$	0	1	$-\infty$

$$f(1) = 1 - 1 \ln(1) = 1$$

$$3.a) \Gamma \cap (Ox) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Comme $f(0) = 0$ alors $x = 0$ est solution de l'équation

$$f(x) = 0 \text{ d'où } 0(0,0) \in \Gamma \cap (Ox)$$

$$\text{Si } x \neq 0 \text{ alors } f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \text{ donc } A(e, 0) \in \Gamma \cap (Ox)$$

$$\text{D'où } \Gamma \cap (Ox) = \{0, A\} \quad [1]$$

b) Equation de la tangente (T) à (Γ) au point A :

$$T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$x_0 = e \quad f(e) = 0$$

$$f'(e) = -\ln(e) = -1 \Leftrightarrow f'(e) = -1$$

$$T: y = f'(e)(x - e) + f(e) \Leftrightarrow y = -(x - e) + 0$$

$$T: y = -x + e \quad [0,5]$$

$$4. I = [1, +\infty[$$

D'après ce T.V f T.V de g est

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	0	-
$g(x)$	1	$-\infty$

D'après ce T.V g est continue et strictement décroissante de

$I = [1, +\infty[\text{ vers } J =]-\infty, +\infty[$, donc elle est bijective. [0,5]

b) Calcul de $g^{-1}(0)$

$$\text{On a } g(e) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = e$$

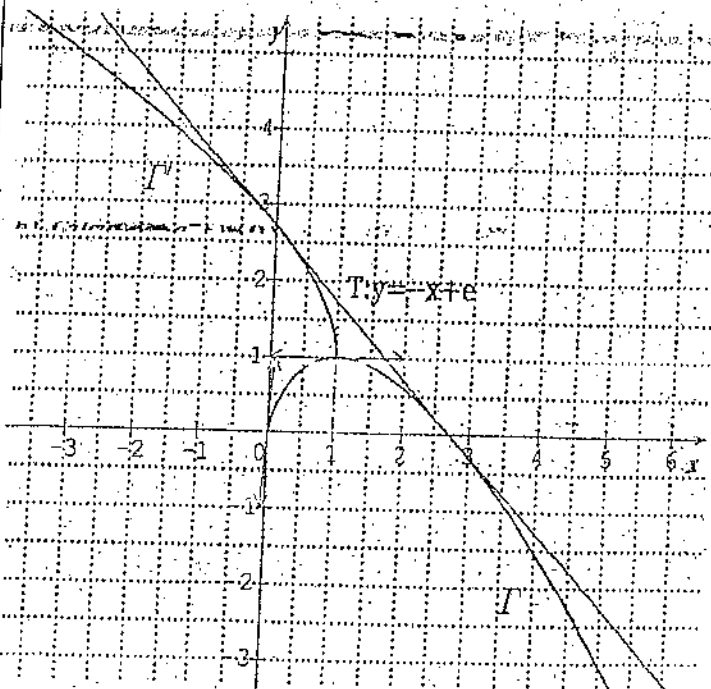
$$\text{On a aussi } g'(e) = -1$$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(e)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\Leftrightarrow (g^{-1})'(0) = -1 \quad [0,5]$$

c) Représentation graphique [0,5]



d) $2x - x \ln x = m \Leftrightarrow x + x - x \ln x = m$
 $\Leftrightarrow x - x \ln x = -x + m \Leftrightarrow f(x) = -x + m$
 Donc le nombre de solution de l'équation paramétrique
 revient au nombre de points d'intersections de la courbe
 (f) avec la droite $T_m: y = -x + m$ qui est parallèle à T

m	Nombre de solutions	
$m < 0$	1	0,25
$0 \leq m < e$	2	
$m = e$	1	
$m > e$	0	

5. a) $A = \int_1^e x \ln x dx$

On pose $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$

$$\int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e$$

$$= \left[\frac{2x^2 \ln x - x^2}{4} \right]_1^e = \frac{2e^2 \ln e - e^2}{4} - \frac{2(1)^2 \ln 1 - 1^2}{4}$$

$$A = \frac{2e^2 - e^2}{4} - \frac{0 - 1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow A = \frac{e^2 + 1}{4} \quad 0,25pt$$

b) $S = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x - x \ln x) dx$
 $S = \int_1^e x dx - \int_1^e x \ln x dx \Leftrightarrow S = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e - A$
 $S = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} 1^2 - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{2e^2 - 2 - e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}$
 $S = \frac{e^2 - 3}{4} = 1,1 \quad 0,25pt$

CETTE PARTIE N'EST PAS DEMANDÉE

JUSTIFICATION DE L'EXERCICE [1]

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \frac{n}{n^2 + n} = \frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$X_n = \frac{1}{U_n} \quad \text{et} \quad Y_n = \ln(V_n)$

1. $X_n = \frac{1}{U_n} \Leftrightarrow X_n = 2n + 1$

Donc $X_5 = 2 \times 5 + 1 = 11 \Leftrightarrow X_5 = 11$ Réponse B

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$
 Réponse A

3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$

Et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} < 1 \Leftrightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} < 1$

Donc (V_n) est décroissante Réponse B

4. $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = 2n + 1$
 $X_{n+1} - X_n = 2(n+1) + 1 - (2n + 1)$
 $= 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2$

$X_{n+1} - X_n = 2$ Donc (X_n) est S.A. de raison 2

Réponse A

5. $Y_n = \ln(V_n) = \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = n \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -n \ln 3$

$Y_n = -n \ln 3$ Réponse B

On pose $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Comme (V_n) est S.G. alors

$S_n = V_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$

Réponse B

FIN