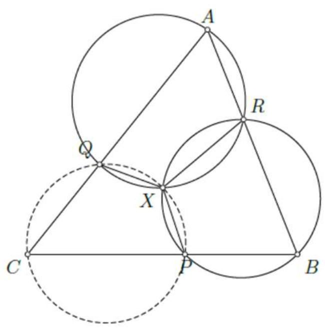
V- Corrigé des activités

1. TD1

Exercice 1

(Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Solution

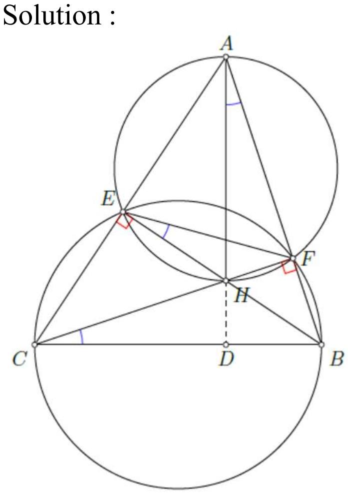


On appelle X le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AQR et BRP. Il s'agit de montrer que le point X appartient au cercle circonscrit du triangle CPQ. Or

$\widehat{\mathbf{QXP}} = \mathbf{360°} - \widehat{\mathbf{PXR}} - \widehat{\mathbf{RXQ}} = \left(\mathbf{180°} - \widehat{\mathbf{PXR}}\right) + \left(\mathbf{180°} - \widehat{\mathbf{QXR}}\right) = \widehat{\mathbf{PBR}} + \widehat{\mathbf{QAR}} = \mathbf{180°} - \widehat{\mathbf{PCQ}}$. Donc les points Q, X, P et C sont cocycliques

Exercice 2: Montrer que les hauteurs d'un triangle ABC s'intersectent en un point appelé orthocentre.

Solution :



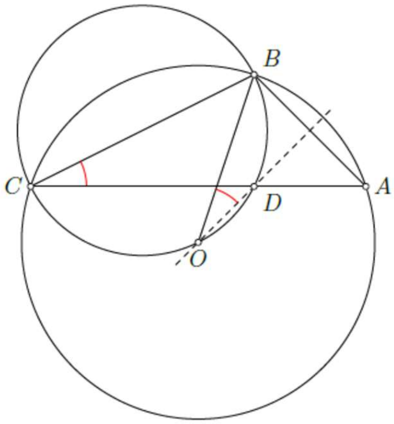
Soit E et F les pieds des hauteurs issues de B et C, on note H l'intersection des droites (BE) et (CF). On va montrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires

Pour cela on va noter D l'intersection des droites (AH) et (BC). On sait que $\widehat{BAD} + \widehat{ABD} + \widehat{BDA} = 180°$, il suffit donc de montrer que $\widehat{BAD} + \widehat{ABD}$. Cependant, $\widehat{BAD} = \widehat{FAH} = \widehat{FEH}$ comme $AEFH$ est cyclique. De plus, $\widehat{FEB} = \widehat{FCB} = 180° - \widehat{FBC} - \widehat{BFC} = 90° - \widehat{FBC}$, ce qui conclut.

Exercice 3

Soit k un cercle de centre O et soit A, B et C trois points sur le cercle k tels que $\widehat{ABC} > 90°$. La bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ recoupe le cercle circonscrit au triangle BOC en un point D. Montrer que D appartient à la droite (AC).

Solution



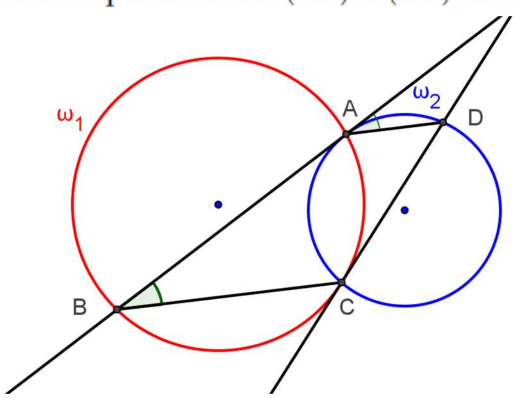
Il suffit de montrer que $\widehat{\mathbf{DCB}} = \widehat{\mathbf{ACB}}$. Or $\widehat{\mathbf{DCB}} = \widehat{\mathbf{DOB}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\widehat{\mathbf{BOA}} = \widehat{\mathbf{ACB}}$. Donc $\mathbf{D} \in (\mathbf{AC})$

Exercice 4

Deux cercles ω_1 et ω_2 se coupent en deux points distincts A et C. Soit B le second point d'intersection de ω_1 avec la tangente à ω_2 en le point A. Soit D le deuxieme point d'intersection du cercle ω_2 avec la tangente au cercle ω_1 en le point C. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Solution

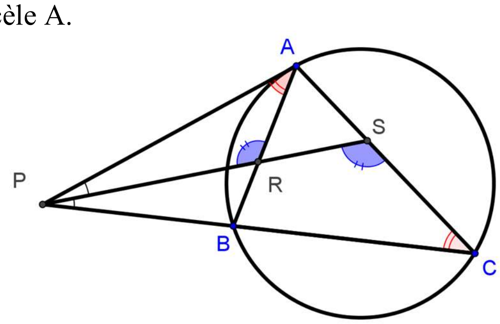
En utilisant l'angle tangentiel : $\widehat{CBA} = \widehat{ACD}$ car (CD) est tangente à ω_1. Une deuxième fois avec le fait que (AB) est tangente à ω_2, $\widehat{ACD} = 180° - \widehat{DAB}$. En combinant les deux résultats, $\widehat{CBA} = 180° - \widehat{DAB}$ ce qui donne que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.



Exercice 5

Soit ABC un triangle avec $\mathbf{AB < AC}$, Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ en A coupe la droite $\mathbf{(BC)}$ en P. La bissectrice de l'angle $\widehat{\mathbf{APB}}$ coupe la droite $\mathbf{(AB)}$ en R et la droite $\mathbf{(AC)}$ en S.

Montrer que le triangle ARS est isocèle A.



On montre que $\widehat{\mathbf{ARS}} = \widehat{\mathbf{ASR}}$, ce qui est équivalent à montrer que $\mathbf{180° - \widehat{ARS} = 180° - \widehat{ASR}}$ donc que $\widehat{\mathbf{PRA}} = \widehat{\mathbf{PSC}}$. Or $\widehat{\mathbf{RPA}} = \widehat{\mathbf{SPC}}$ car la droite **(RS)** est bissectrice de l'angle $\widehat{\mathbf{APC}}$. Aussi, d'après le théorème de la tangente on a $\widehat{\mathbf{PAR}} = \widehat{\mathbf{BCA}} = \widehat{\mathbf{PCS}}$. On déduit que

$\mathbf{\widehat{PRA} = 180° - \widehat{PAR} - \widehat{RPA} = 180° - \widehat{SBP} - \widehat{PSC}}$. Donc le triangle **ARS** est bien isocèle en A.

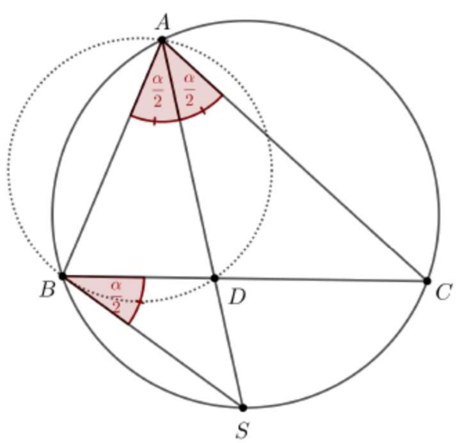
2. TD2

Exercice 1

Soit ABC un triangle. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ recoupe $[BC]$ en D et le cercle circonscrit à ABC en S. Montrer que la droite (SB) est tangente au cercle circonscrit à ABD.

Solution de l'exercice 1

D'après le théorème de l'angle tangent, il suffit de montrer que $\widehat{BAD} = \widehat{SBD}$. Or, (AS) étant la bissectrice de $\widehat{BAC}$, on a : $\widehat{BAD} = \widehat{SAC} = \frac{\alpha}{2}$. Comme B, A, C et S sont cocycliques, le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{SBC} = \widehat{SAC}$ et on a bien $\widehat{SBD} = \widehat{BAD} = \frac{\alpha}{2}$.



Exercice 2

Soient A, B, C et D quatre points cocycliques et E le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Montrer l'égalité suivante : $\frac{AC}{BC} \times \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$.

Solution de l'exercice 2

L'égalité à prouver fait intervenir des ratios de longueur entre plusieurs segments d'extrémités A, B, C, D ou E. Cherchons donc des triangles semblables entre ces points faisant intervenir les ratios en question.

D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{EAC} = \widehat{BDE}$. On en déduit que $ECA \sim EBD$, ce qui entraîne

$$\frac{EC}{AC} = \frac{BE}{BD}.$$

De même, la cocyclicité de A, B, C et D fournit $\widehat{EBC} = \widehat{EDA}$ et $\widehat{ECB} = \widehat{EAD}$, d'où l'on tire que $EBC \sim EDA$, puis

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AD}{AE}.$$

En faisant le produit des deux identiés ci-dessus, le terme EC se simplifie et on obtient bien que $\frac{BC}{AC} = \frac{AD}{BD} \times \frac{BE}{AE}$.

Exercice 3

Soient A, B, C et D quatre points dans cet ordre sur un cercle et soit S le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas C et D. Les droites (SD) et (SC) intersectent (AB) en E et F respectivement. Montrer que C, D, E et F sont cocycliques.

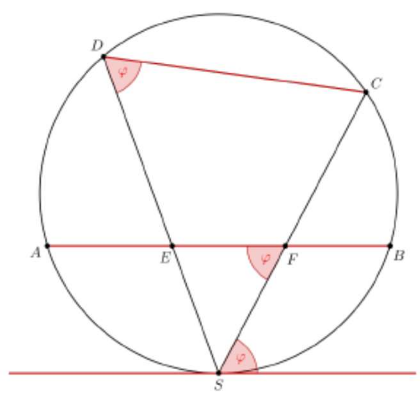
Solution de l'exercice 3

Première solution. On fait une chasse aux angles, cette dernière pouvant être accélérée en utilisant le théorème du pôle Sud, qui nous permet d'identifier que (DS) est la bissectrice de $\widehat{ADB}$ et (CS) celle de $\widehat{ACB}$.

Seconde solution, plus astucieuse. L'idée est de considérer la tangente au cercle en S, qu'on appelle t. Cette idée est motivée par le fait que, S étant le milieu de l'arc $\widehat{AB}$, $t \mathbin{//} (AB)$. On a alors

$$\begin{aligned}(DE, DC) &= (DS, DC) \text{ car } D, E \text{ et } S \text{ sont alignés}\\ &= (t, SC) \text{ d'après le cas limite du théorème de l'angle inscrit}\\ &= (AB, SC) \text{ puisque } t \mathbin{//} (AB)\\ &= (FE, FS) \text{ (alignement des points)}\end{aligned}$$

ce qui prouve la cocyclicité des points C, D, E et F.



Exercice 4

Soit ABC un triangle isocèle en A, Γ le cercle tangent à (AB) et (AC) en B et C, et M un point de l'arc de Γ intérieur au triangle ABC. On définit E et F les projetés orthogonaux de M sur $[AC]$ et $[AB]$ respectivement, et D son projeté orthogonal sur $[BC]$. Prouver que $MD^2 = ME \times MF$.

Solution de l'exercice 4

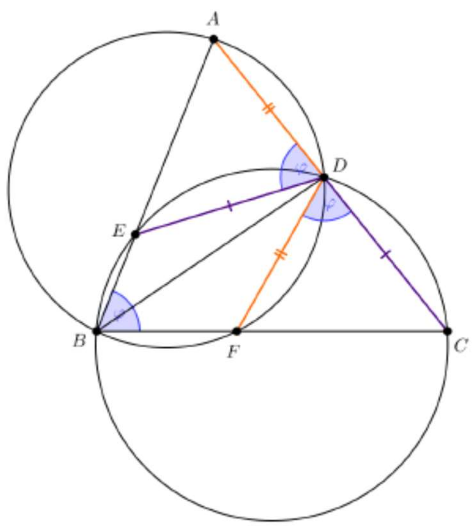
On remarque d'abord que $MD^2 = ME \times MF \iff \frac{MD}{ME} = \frac{MF}{MD}$. Ce rapport de longueur nous indique la piste des triangles semblables. Nous allons donc faire une chasse aux angles pour identifier des triangles semblabes de côté MD, ME, et MF.

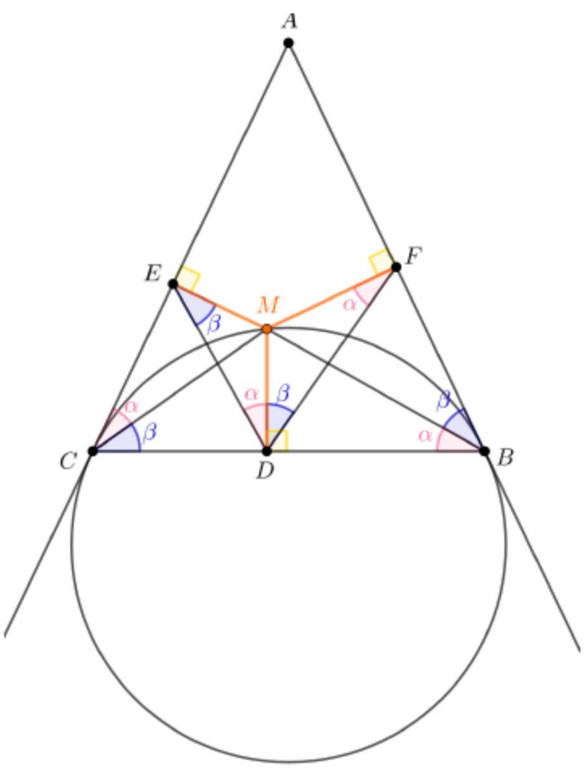
On a $\widehat{MEC} + \widehat{MDC} = 180$ donc les points M, E, C et D sont cocycliques par réciproque du théorème de l'angle inscrit. De même, $\widehat{MFB} + \widehat{MDB} = 180$ et les points M, F, B et D sont cocycliques. Par angle inscrit, il vient $\widehat{MED} = \widehat{MCD}$ et $\widehat{MFD} = \widehat{MBD}$. De plus, (AC) et (AB) étant tangentes au cercle Γ, le théorème de la tangente donne $\widehat{MCD} = \widehat{MBF}$ et $\widehat{MBD} = \widehat{MCE}$. Pour finir, par angle inscrit on a $\widehat{MBF} = \widehat{MDF}$ et $\widehat{MCE} = \widehat{MDE}$.

Ainsi, $\widehat{MED} = \widehat{MDF}$ et $\widehat{MFD} = \widehat{MDE}$. Les triangles EMD et DMF sont semblables car ils ont deux angles égaux. Les rapports nous donnent $\frac{MD}{ME} = \frac{MF}{MD}$.

Exercice 5
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de B. Les cercles circonscrits aux triangles ABD et BCD recoupent les côtés $[AB]$ et $[BC]$ en E et F respectivement. Montrer que $AE = CF$.

Solution de l'exercice 5
D'après le théorème du pôle Sud appliqué dans les triangles ABF et CBE, nous savons que d'une part $DA = DF$ et d'autre part que $DE = DC$. Qui plus est, le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{CBE} = \widehat{EDA}$ (cocyclicité de B, C, D et E) et $\widehat{ABF} = \widehat{FDC}$ (cocyclicité de A, B, F, D). Ainsi, $\widehat{ADE} = \widehat{FDC}$. Mis avec les égalités de longueurs précédentes, on en conclut que les triangles ADE et FDC sont superposables, ce qui implique que $AE = CF$.



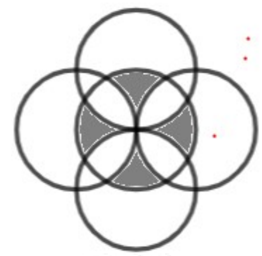


2. Exercices des olympiades

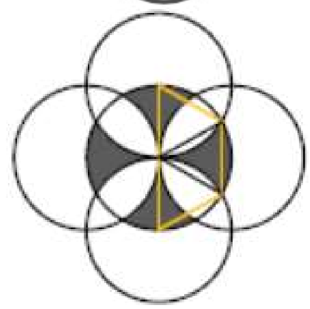
a) Niveau 4AS

Exercice 1 (T2-2022)

Dans la figure ci-contre, les cinq cercles sont de même rayon 2 cm.
1) Déterminer l'aire d'un triangle équilatéral de côté 2 cm.
2) Déterminer l'aire de partie hachurée.



Solution



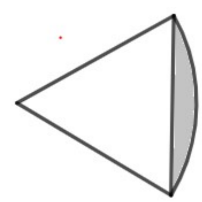
1) La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (en utilisant le théorème de Pythagore). Donc l'aire d'un triangle équilatéral de côté 2 cm est

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

2) Le cercle intérieur peut être partagé en 6 triangles équilatéraux d'aire $A_1 = \sqrt{3} \text{ cm}^2$ chacun

L'aire d'un secteur circulaire de rayon 2 cm d'angle $\frac{\pi}{6}$ est :

$$\frac{\pi}{6} \times 2^2 = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}^2$$



L'aire de la partie hachurée dans figure ci-contre est :

$$A_2 = \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \text{cm}^2$$

La surface A hachurée demandée est composée de 4 parties identiques, l'aire de chacune est

$$A_3 = A_1 - A_2 = \sqrt{3} - \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ cm}^2$$

La surface hachurée est $A = 4A_3 = 4\left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = \left(8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}\right) \text{cm}^2$

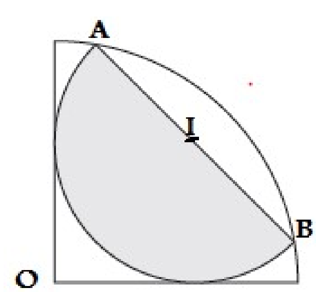
Exercice 2 (T2 2021)

La figure ci-contre représente un demi-cercle (colorié), inscrit dans un quart de cercle. Soit I le centre du demi-cercle et O celui du quart de cercle et soit $[AB]$ un diamètre du demi- cercle.

1) Montrer que $OI^2 = 2AI^2$

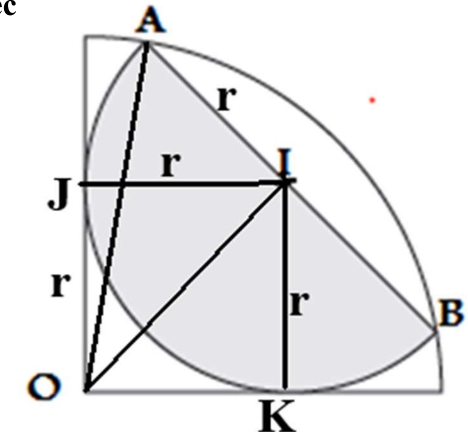
2) Montrer que $OA = \sqrt{3} \times IA$

3) Déduire la valeur de fraction $\dfrac{\text{aire coloriée}}{\text{aire non coloriée}}$



Solution

1) **Soient J et K les points de contacts du demi-cercle avec ses tangentes passant par O.**



Le quadrilatère OJIK a 3 angles droits. Donc OJIK est un rectangle. De plus $IJ = IK = \text{rayon du demi-cercle } (r)$.

Alors OJIK est un carré.

D'après le théorème de Pythagore : $OI^2 = OJ^2 + JI^2 = 2r^2$

Alors $OI^2 = 2IA^2$

1) **Puisque $OA = OB = \text{rayon du quart de cercle}$, alors le triangle OAB est isocèle et (OI) est perpendiculaire à (AB)**

$$OA^2 = OI^2 + AI^2 = 2AI^2 + AI^2 = 3AI^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{OA = AI\sqrt{3}}$$

3) $$\frac{\text{aire coloriée}}{\text{aire non coloriée}} = \frac{\frac{1}{2}\pi IA^2}{\frac{1}{4}\pi \times OA^2 - \frac{1}{2}\pi IA^2} = \frac{\frac{1}{2}\pi IA^2}{\frac{1}{4}\pi \times 3IA^2 - \frac{1}{2}\pi IA^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times 3 - \frac{1}{2}} = 2$$

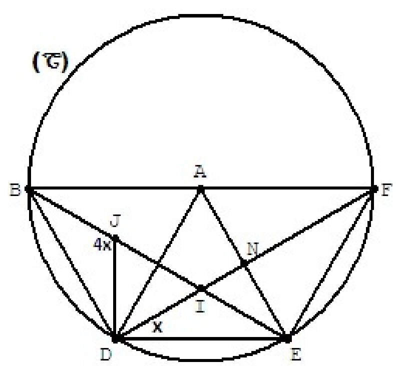
Exercice 3: (T1-2021-4AS)

Sur la figure ci-contre :

(C) est un cercle de centre A

Les points B, A et F sont alignés Le point J est le milieu de $[BI]$.

$(AD)//(EF)$; $\widehat{BJD} = 4x$ et $\widehat{EDF} = x$.



1) Montrer que le triangle IDE est isocèle en I

2) Exprimer en fonction de x les mesures des angles $\widehat{BFD}$, $\widehat{ADF}$, $\widehat{EBF}$ et $\widehat{DFE}$.

3) En déduire la valeur de x.

1)* Le triangle BDI est rectangle en D et

J est le milieu $[BI]$, donc $\widehat{BID} = \frac{\widehat{BJD}}{2} = 2x$

* $\widehat{EID} = 180° - \widehat{BID}$

$= 180° - 2x$

*** Dans le triangle IDE :**

$\widehat{IED} = 180° - (\widehat{EID} + \widehat{IDE})$

$= 180° - (180° - 2x + x) = x$

*Comme $\widehat{IED} = \widehat{IDE}$ alors le triangle IDE est isocèle en I

2) * Les angles inscrits $\widehat{BFD}$ et $\widehat{BED}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BD}$, donc

$\widehat{BFD} = \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{BFD} = x$

- Le triangle ADF est isocèle en A donc
  $\widehat{ADF} = \widehat{AFD}$ or $\widehat{AFD} = \widehat{BFD} = x$ donc $\widehat{ADF} = x$
- Les angles inscrits $\widehat{EBF}$ et $\widehat{EDF}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{EF}$, donc
  $\widehat{EBF}=\widehat{EDF} \Rightarrow \widehat{EBF}=x$
  $\widehat{DFE}$ et $\widehat{ADF}$ Sont deux angles alternes-internes et (AD) //(EF) donc $\widehat{DFE} = \widehat{ADF}$ alors
  $\widehat{DFE} = x$

3) * L'angle inscrit $\widehat{BFD}$ et l'angle au centre $\widehat{BAD}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BD}$, donc
$\widehat{BAD} = 2\times\widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{BAD} = 2x$

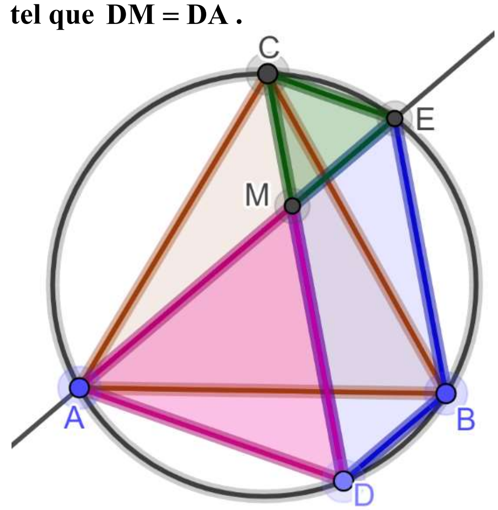
- L'angle inscrit $\widehat{EBF}$ et l'angle au centre $\widehat{EAF}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{EF}$, donc
  $\widehat{EAF} = 2\times\widehat{EBF} \Rightarrow \widehat{EAF} = 2x$
- $$\begin{cases}\widehat{EAD} = 180° - (\widehat{EAF} + \widehat{BAD}) = 180° - (2x + 2x) = 180° - 4x \\ \widehat{EAD} = 2\times\widehat{EFD} = 2x\end{cases}$$
  $\Rightarrow 2x = 180° - 4x \Rightarrow 6x = 180° \Rightarrow x = 30°$

Exercice 4 (T3 2021):

ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (Γ).

Soit D un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ distinct de A et B et M un point de $[CD]$ tel que $DM = DA$.

1) Faire une figure et montrer que le triangle ADM est équilatéral.
2) La droite (AM) recoupe le cercle (Γ) en un point E.
   Montrer que le quadrilatère DMEB est un parallélogramme.
3) Montrer que le triangle MEC est équilatéral.
4) Montrer que $DC = DA + DB$.



__Solution de l'exercice 4__

1) * Le triangle ABC est équilatéral, donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60°$.
*Les angles inscrits $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$,
donc $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} \Leftrightarrow \widehat{ADC} = 60°$ $M \in [DC]$; $\Rightarrow \widehat{ADM} = 60°$

*Comme $DM = DA$ et $\widehat{ADM} = 60°$; alors le triangle ADM est équilatéral.

2) Pour Montrer que le quadrilatère DMEB est un parallélogramme il suffit de montrer que ses angles opposés sont égaux.

- * Les angles inscrits $\widehat{AEB}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$, donc ils sont égaux,

  d'où $\widehat{AEB}=60°$. $M\in[AE]; \Rightarrow \widehat{MEB}=60°$.

  * Les angles inscrits $\widehat{BDC}$ et $\widehat{BAC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$, donc ils sont égaux, d'où

  $\widehat{BDC}=60°$. $M\in[DC]; \Rightarrow \widehat{BDM}=60°$.

  * - Le triangle ADM est équilatéral donc $\widehat{MAD}=60°$ $M\in[AE]; \Rightarrow \widehat{DAE}=60°$.

  - Les points A et B sont de part et d'autre de la corde $[DE]$ donc

  $\widehat{DBE}=180°-\widehat{DAE}=180°-60°=120°$

  * Dans le quadrilatère DMEB on a $\widehat{MEB}=60°$; $\widehat{BDM}=60°$ et $\widehat{DBE}=120°$.

  Donc $\widehat{DME}=360°-(60°+60°+120°)=120°$

- Comme $\widehat{BDM}=\widehat{BEM}=60°$ et $\widehat{DBE}=\widehat{DME}=120°$; alors le quadrilatère DMEB est un parallélogramme.

3) Pour Montrer que le triangle MEC est équilatéral il suffit de montrer que $\widehat{MEC}=\widehat{CME}=60°$

* Le triangle ADM est équilatéral et les angles $\widehat{DMA}$ et $\widehat{CME}$ sont opposés par le sommet

donc $\widehat{CME}=60°$.

* Les angles inscrits $\widehat{AEC}$ et $\widehat{ABC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$, donc ils sont égaux,

d'où $\widehat{AEB}=60°$. $M\in[AE]; \Rightarrow \widehat{MEC}=60°$.

Comme $\widehat{CME}=\widehat{MEC}=60°$; Alors le triangle MEC est équilatéral .

4) Montrons que $DC=DA+DB$.

$DC=DM+MC$

Le triangle ADM est équilatéral $\Rightarrow DM=DA$

Le triangle MEC est équilatéral $\Rightarrow MC=ME$

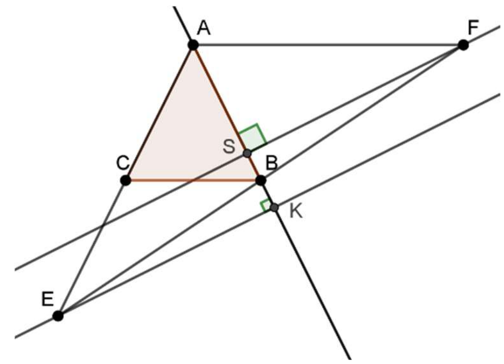
Le quadrilatère DMEB est un parallélogramme $\Rightarrow ME=DB$

D'où $DC=DA+DB$.

Exercice 5 (T2- 2020)

Soit ABC un triangle isocèle en A. E est le symétrique de A par rapport à C. F est le symétrique de E par rapport à B. Soit K le projeté orthogonal de E sur (AB). Les points R et S sont les projetés orthogonaux respectifs de E et F sur (AB).

1) Faire une figure.
2) Montrer que l'aire du triangle AFB est le double de celle de ABC.
3) Montrer que $FS=EK$.
4) Montrer que $FREK$ est un parallélogramme.



<u>Solution :</u>

1) La figure

2) Montrons que l'aire du triangle AFB est le double de celle de ABC.

Aire de AFB = Aire de AEB $\rightarrow$ car B est le milieu [FE]

= $2\times$ Aire de ABC $\rightarrow$ car C est le milieu [AE]

3) Montrons que FS = EK

Aire de FAC = $\dfrac{\text{Aire de FAE}}{2}$ $\rightarrow$ car C est le milieu [AE]

Aire de EAB = $\dfrac{\text{Aire de FAE}}{2}$ $\rightarrow$ car B est le milieu [FE]

Donc Aire de FAC = Aire de EAB

$$\frac{FS\times AC}{2}=\frac{EK\times AB}{2} \quad \text{or } AB=AC \quad \text{donc } FS=EK$$

Ou bien on utilise les triangles FAB et EAB qui ont la même aire.

En utilisant la base commune $[AB]$, on trouve la $\dfrac{FS\times AB}{2}=\dfrac{EK\times AB}{2}$ donc $FS=EK$

4) Montrons que FREK est un parallélogramme.

*Aire de AFB = Aire de AEB $\Rightarrow$ $\dfrac{FR\times AB}{2}=\dfrac{EK\times AB}{2}\Rightarrow \boxed{FR=EK}$

*$(FR)\perp(AB)$ et $(EK)\perp(AB)$ $\Rightarrow \boxed{(FR)//(EK)}$.

Comme $FR=EK$ et $(FR)//(EK)$ donc FREK est un parallélogramme

b) Niveau 7C

Exercice 6 (T2-2022-7C)

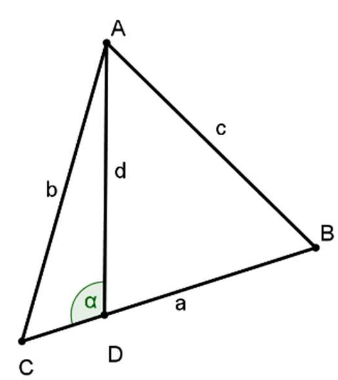
Soit ABC un triangle et D un point du segment $[BC]$ distinct de B et C..

1° Montre que $BD\times AC^2+DC\times AB^2=BC\times\left(AD^2+BD\times DC\right)$

2° On suppose que le triangle ABC est équilatéral de côté 10cm et que $AD\in\mathbb{N}$ déterminer alors les distances BD et CD.

<u>Solution</u>:

1° Soit $x=CD$ et $y=DB$.



D'après Alkashi on a :

$b^2=d^2+x^2-2dx\cos\alpha$ et

$c^2=d^2+y^2-2dy\cos(\pi-\alpha)\Rightarrow c^2=d^2+y^2+2dy\cos\alpha$

D'où :

$$\begin{cases}b^2=d^2+x^2-2dx\cos\alpha\\ c^2=d^2+y^2+2dy\cos\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}yb^2=yd^2+yx^2-2dxy\cos\alpha\\ xc^2=xd^2+xy^2+2dxy\cos\alpha\end{cases}$$

La somme des deux équations donne

$xc^2+yb^2=(x+y)d^2+xy(x+y)=(x+y)(d^2+xy)=a(d^2+xy)$

D'où $BD\times AC^2+DC\times AB^2=BC\times\left(AD^2+BD\times DC\right)$

2° Soit $n=AD$ donc n est un entier naturel. En plus $n\in[5;10[$ donc $n\in\{5;6;7;8;9\}$.

Soit x la plus petite valeur entre CD et BD.

D'après la question précédente on a
$AD^2+BD\times DC=100\Rightarrow n^2+x(5-x)=100\Rightarrow x^2-5x+100-n^2=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta=4n^2-375<0$ alors l'équation n'a pas de solution.

Exercice 7 (T2 - 2021-7C)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et Γ un cercle dont le centre L est situé sur le segment $[BC]$. On suppose que le cercle Γ est tangent à (AB) en B' et à (AC) en C'. On suppose aussi que le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est situé sur le petit arc $B'C'$ du cercle Γ. Soit x, y et z les mesures en degré respectivement des angles géométriques $\widehat{COB}$, $\widehat{C'OB'}$ et $\widehat{CAB}$; $x,y,z\in[0,180]$.

1.a) Justifier que $x<y$.

b) Montrer que $2y-z=180°$ puis en déduire que $z<60°$.

2) Montrer que le cercle Γ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en deux points.

Solution

1.a) Justifier que $x<y$.

Les angles étant aigus alors les pieds des hauteurs sont situés sur les cotés (segments) d'où $\widehat{COB}<\widehat{C'OB'}\Rightarrow x<y$

b) Montrer que $2y-z=180°$ puis en déduire que $z<60°$.

Les points A,B',C',L sont cocycliques en plus les points A et L sont de part et d'autre de la droite $(B'C')$ d'où $\widehat{C'LB'}=\pi+\widehat{C'AB'}=180+\widehat{CAB}=180°+z$. D'autre part d'après le théorème de l'angle inscrit on a $\widehat{C'LB'}=2\widehat{C'OB'}=2y$ d'où $2y=180°+z\Rightarrow\boxed{2y-z=180°}$

$$2z=2\widehat{CAB}=\widehat{COB}<\widehat{C'OB'}=\pi-\frac{1}{2}\widehat{C'LB'}=\pi-\frac{1}{2}(\pi-z)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}z$$

$$\Rightarrow 2z-\frac{1}{2}z<\frac{\pi}{2}\Rightarrow z<\frac{2}{3}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}=60°$$

Donc on a $\boxed{z<60°}$.

2) Soit $O'=S_{BC}(O)$ et notons Γ' le cercle circonscrit au triangle ABC

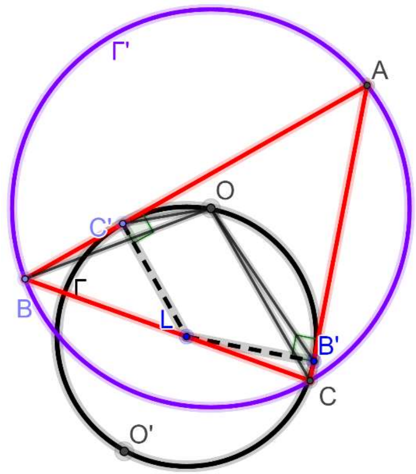
Dans le quadrilatère $ABO'C$ on a

$$\begin{aligned}\widehat{CAB}+\widehat{CO'B}&=\widehat{CAB}+\widehat{COB} && \text{(la reflexion conserve les angles géométriques)}\\ &=\widehat{CAB}+2\widehat{CAB} && \text{(théorème de l'angle inscrit)}\\ &=3z\end{aligned}$$

Or $z<60°$ d'où $\widehat{CAB}+\widehat{CO'B}<180°$

Ce qui montre que le point O' est à l'exterieur du cercle Γ'. Donc O et O' sont deux points de Γ telsque l'un se trouve à l'interieur de Γ' et l'autre se trouve à l'exterieur.

D'où les cercles Γ et Γ' se coupent en deux points.



Exercice 8 (T1-2021-7C)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et on note D, E et F les pieds de ses hauteurs issues respectivement de A, B et C

Les cercles inscrits dans les triangles BDF et CDE sont notés Γ_B et Γ_C. Soit I et J leurs centres respectifs.

La droite (DF) est tangente à Γ_B au point M.

La droite (DE) est tangente à Γ_C au point N.

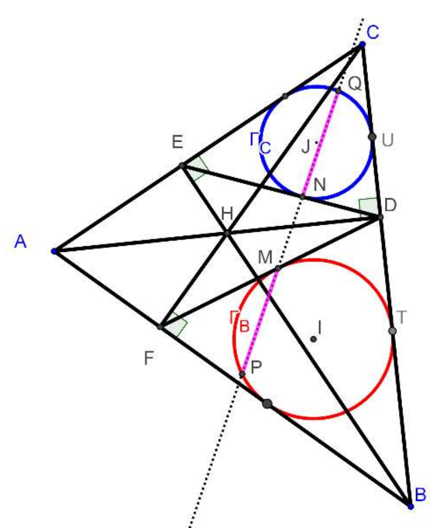
La droite (MN) recoupe les cercles Γ_B et Γ_C en P et Q respectivement ($P \neq M$ et $Q \neq N$).

1) Faire une figure.

2) Montrer que $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DI}) = (\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DN}) \quad [\pi]$.

3) Montrer que $PM = QN$.

Solution :



1) Figure

2) On note r_B et r_C les rayons respectifs des cercles Γ_B et Γ_C ;
T et U leurs points de contact avec la tangente commune (BC).
Les triangles ACD et ACF sont rectangles de même hypoténuse.
Alors les points A,F,D et C sont cocycliques. Il en est de même pour les points A,B,D et E
Donc on a (modulo π) :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DI}) &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DT}) && \text{symétrie}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}) && \text{colinéarité}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}) && \text{cocyclicité}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}) && \text{colinéarité}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}) && \text{cocyclicité}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DU},\overrightarrow{DN}) && \text{colinéarité}\\ &= (\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DN}) && \text{symétrie}\end{aligned}$$

3) Les triangles rectangles DMI et DNJ sont semblables (mêmes mesures d'angles).

$\frac{DN}{DM} = \frac{JN}{JM} = \frac{r_C}{r_B}$.

D'autre part, $\frac{\sin\widehat{MND}}{DM} = \frac{\sin\widehat{DMN}}{DN} \Rightarrow \frac{DN}{DM} = \frac{\sin\widehat{DMN}}{\sin\widehat{MND}}$.

On a : $PM = 2r_B \sin\widehat{MTP}$ **et** $(\overrightarrow{TM},\overrightarrow{TP}) = (\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MP}) = (\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MN})[\pi]$ **donc** $PM = 2r_B \sin\widehat{DMN}$

$QN = 2r_C \sin\widehat{QUN}$ **et** $(\overrightarrow{UN},\overrightarrow{UQ}) = (\overrightarrow{NE},\overrightarrow{NQ}) = (\overrightarrow{ND},\overrightarrow{NM})[\pi]$ **donc** $QN = 2r_C \sin\widehat{MND}$

Donc $\frac{PM}{QN} = \frac{2r_B \sin\widehat{DMN}}{2r_C \sin\widehat{MND}} = \frac{r_B}{r_C} \times \frac{\sin\widehat{DMN}}{\sin\widehat{MND}} = \frac{DM}{DN} \times \frac{DN}{DM} = 1$.

Enfin $PM = QN$.

Exercice 9 (T3 – 2021-7C):

Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. Soit I le centre de son cercle inscrit, I_A le pied de la bissectrice intérieure issue de A et S le point d'intersection de cette bissectrice avec Γ.

1° Faire une figure

2° Montrer que S est sur la médiatrice de $[BC]$.

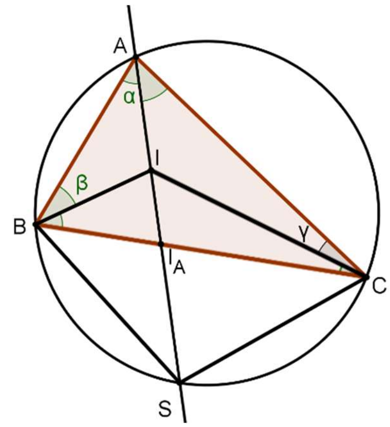
3° Montrer que $BS = IS$.

4° Montrer que les triangles ABS et SBI_A sont semblables.

NB : Le point S est appelé le pôle sud de ABC (par rapport à A) et le cercle de centre S passant par B, C et I est appelé le cercle antarctique de ABC (par rapport à A)

Solution

1° La figure



2° On a :

$\widehat{SBC} = \widehat{SAC}$ **Cocyclicité**

$= \widehat{SAB}$ **bissectrice**

$= \widehat{SCB}$ **Cocyclicité**

D'où $\widehat{SBC} = \widehat{SCB}$ ce qui montre que le triangle SBC est isocèle en S donc $S \in med[BC]$

3° On a

$\widehat{SBI} = \widehat{SBC} + \widehat{CBI} = \alpha + \beta$ **or** $\widehat{SIB} = \pi - \widehat{AIB} = \pi - [\pi - (\alpha + \beta)] = \alpha + \beta$

D'où $\widehat{SBI} = \widehat{SIB}$ alors le triangle SBI est isocèle en S . Donc $IS = SB = SC$.

4° Comme $\widehat{I_ASB} = \widehat{BSA} = \theta$ et $\widehat{I_ABS} = \widehat{BAS} = \alpha$ alors les triangles ABS et SBI_A sont semblables.

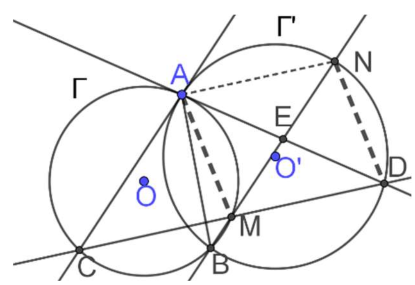
Exercice 10 (T1 – 2020 – 7C)

Soit Γ et Γ' deux cercles qui se coupent en A et B. Les tangentes en A à Γ et Γ' recoupent respectivement Γ' et Γ en D et C et la droite (CD) recoupe le cercle Γ en un point M différent de B. On se propose de montrer que la droite (MB) passe par le milieu du segment $[AD]$

1) Soit N le point d'intersection de (BM) avec Γ'. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CD})$.

2) Déterminer la nature du quadrilatère AMDN puis conclure.

Solution :



1) En appliquant le théorème de la tangente avec celui de la cocyclicité sur Γ' on trouve

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN})\ [\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA})\ [\pi]$ **, d'où :**

$(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})\ [\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})\ [\pi] \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CD}) = 0\ [\pi]}$.

Donc (AN) est parallèle à (CD).

2) En appliquant le théorème de la tangente avec celui de la cocyclicité sur Γ on trouve

$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})\ [\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA})\ [\pi]$,

d'où : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DN}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DN}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN})\ [\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DN}) = 0\ [\pi]$

alors les droites (AM) et (DN) sont également parallèles.

D'où AMDN est un parallélogramme ce qui montre que les segments $[AD]$ et $[MN]$ ont le même milieu donc la droite (MB) passe par le milieu du segment $[AD]$.