بسم الله الرحمن الرحيم

قالوا سبحانك لا علم لنا إلا ما علمتنا
إنك أنت العليم الحكيم

صدق الله العظيم

Classe de 7ème C

Nouveau programme

Mathématiques

- 60 sujets d'entraînement
- 15 thèmes d'étude

Professeur
Sidi MAJOR

Dédicace

→ à tous les collègues,
→ aux élèves assoiffés de savoirs,
→ à France Guerlain,
→ à Tahya Tiki Demba,
→ à Mariem mint Oumarou,
→ à Med Vadel Ould Taleb.

Dépôt légal : 1658/2016

Tiré sur

IMPRIMERIE DU SAHARA
مطبعة الصحراء
Impression et Edition للطباعة والنشر

Préambule

« Les plus belles victoires, les seules qui ne peuvent donner aucun regret, sont celles que l'on fait sur l'ignorance »
Napoléon BONAPARTE

Un vieil adage arabe dit : « un bon livre est un jardin que l'on transporte avec soi ».
Ainsi, nous avons mêlé dans ce livre sagesses du monde, connaissances scientifiques, thèmes d'approfondissements, divertissements, poésie, tout cela sous format A5, aisément transportable sur soi.

Vous y trouverez :

- *6o sujets proposés d'un niveau soutenu qui vous assureront sans doute un bon entraînement durant l'année de terminale C à la devise de l'un des corps d'élite militaires « entraînement difficile, guerre facile » ;*
- *5 thèmes d'étude sous forme de sujets d'approfondissement servant de réinvestissement des concepts appris tout au long de l'année ;*
- *Une petite aventure poétique visant à diversifier et à enrichir votre culture mathématique ;*
- *Une pile d'énigmes mathématiques pour alléger la pesanteur des tâches heuristiques que requièrent les tentatives de résolution des exercices.*

Les sujets proposés sont délibérément non corrigés afin d'éviter de vous influencer dans votre travail personnel et pour que, in fine, vous puissiez acquérir une autonomie dans la prise d'initiative en matière de recherche scientifique.

Enfin, nous souhaiterions que ce livre vous permette de découvrir le goût du travail intellectuel et qu'il soit pour vous un livre de la 3ème catégorie décrite par l'écrivain canadien Thomas Chandler Haliburton (1796–1865) lorsqu'il écrit : « Certains livres se lisent à la cuisine, d'autres au salon. Un vrai bon livre se lit n'importe où. »

Sidi MAJOR

Une dédicace de mérite

Un écrivain français dont le nom m'échappe cite : « un livre a toujours deux auteurs : celui qui l'a écrit et celui qui l'a lu ».

Convaincu du bien fondé de cette pensée, je me suis dit que ce livre-là ne peut honnêtement voir le jour sans que ce $2^{\text{ème}}$ auteur n'y soit cité nominativement en guise de reconnaissance.

Ce $2^{\text{ème}}$ auteur n'est autre que l'ensemble des élèves de la classe de $7^{\text{ème}}$ C de MENABI EL OULOUM, promotion 2017, et qui, sans leurs lectures attentives des différents énoncés et sans leurs perpétuels encouragements, ce livre ne pouvait paraître presque entièrement débarrassé des moult coquilles préjudiciables qu'il contenait.

Que chacun de ces douze jeunes auteurs en herbe dont les noms suivent comprenne combien j'ai été sensible à son soutien et à son apport :

1. *Abdallahi ould Bellal*
2. *Abdallahi ould Ely*
3. *Ahmed ould Mohamed El Moctar*
4. *Aminetou mint Jiddou*
5. *Khadijetou mint Ehdhana*
6. *Mariem mint Dahi ould Zein*
7. *Moctar ould Mohamed*
8. *Mohamed Salem ould Mahmoud*
9. *Saadna ould Mohamed Vadel*
10. *Salma mint El Eyel*
11. *Sidi Mohamed ould Amah*
12. *Varha mint Mahmouden*

Je ne pourrai terminer cette apologie sans faire un clin d'œil à deux élèves de ma 7^{e} D, Ahmed ould Moutal et Khadijetou mint Chrif, pour leur exemplarité tant au niveau du travail qu'au niveau du comportement.

De tout mon cœur, je vous dédie,

à tous, cette innocente

Coccinelle.

Sujet 1

Ex1 : Fonctions réciproques - suites
Ex2 : Nombres complexes
Ex3 : Arithmétique
Ex4 : Isométries du plan
Ex5 : Calcul intégral

«﴿ Sourire à son frère est une aumône. ﴾»

[Le prophète Mohamed (صلى الله عليه وسلم)]

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $g(x) = f(\tan x)$.
   a. Montrer que g réalise une bijection de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]1; +\infty[$.
   b. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1; +\infty[$ et que :
   $$(g^{-1})'(x) = \frac{-2x}{1+(x^2-1)^2}.$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :
   $$\varphi(x) = g^{-1}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) + g^{-1}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right).$$
   a. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\varphi'(x)$.
   b. Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$ et déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$\varphi(x) = \frac{\pi}{2}.$$
4. Pour tout $n \geq 2$, on pose :
   $$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{k=2n} g^{-1}(k)$$
   a. Montrer que $g^{-1}(2n) \leq v_n \leq g^{-1}(n)$
   b. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un r.o.d $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante :
   $$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

2. On considère les points :
   - A d'affixe $a = \sqrt{3} - i$;
   - B d'affixe $b = \sqrt{3} + i$;
   - C le milieu du segment $[OB]$, d'affixe c.

   a. Déterminer une forme exponentielle de a, b et c.
   b. Sur une figure, placer les points A, B et C.
   c. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
3. Soit D le point tel que le triangle OCD est isocèle rectangle en O et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$, et E tel que $DABE$ soit un parallélogramme.
   a. Placer les points D et E.
   b. Déterminer une forme exponentielle de l'affixe d du point D, puis sa forme algébrique et montrer que l'affixe ε du point E est : $\varepsilon = \frac{1}{2} + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right) i$.
   c. Démontrer que : $OE = BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.
4. Démontrer que les points A, C et E sont alignés.

Exercice 3

1. d et n sont des entiers naturels tels que $d \neq 0$.
   a. Démontrer que si d divise $a_n = 3n + 4$ et $b_n = 9n - 5$, alors d divise 17.
   b. Quelles sont les valeurs possibles de l'entier d?
   c. En déduire que les entiers 3775 et 11308 sont premiers entre eux.
2. x et y sont deux entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ y \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$$

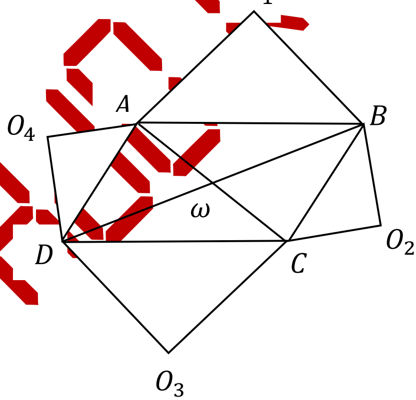
Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 de :

a. $3x + 2y$ b. $x^2 + y^2$ c. $2x^2 - 5y^2$

3. n désignant un entier naturel tel que $n \geq 4$.
   Déterminer, en fonction de n, le reste de la division euclidienne de $8n - 5$ par $2n + 1$.

4. Équations diophantiennes
   a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers naturels x et y tels que : $45x - 28y = 1$
   b. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $45x - 28y = 1$.
   c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $45x - 28y = 6$.
5. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant : $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x; y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$

Exercice 4



Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de centre ω et les triangles ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO_4 sont des triangles isocèles rectangles de sommets principaux O_1, O_2, O_3 et O_4. On suppose que le plan est orienté et que $(\overrightarrow{O_1A}; \overrightarrow{O_1B}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par R_1, R_2, R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4.

1. a. Déterminer $(R_2 \circ R_1)(A)$, $(R_3 \circ R_2)(B)$ et $(R_4 \circ R_3)(C)$.
   b. Montrer que les applications $R_2 \circ R_1$, $R_3 \circ R_2$ et $R_4 \circ R_3$ sont toutes égales à une même application f que l'on déterminera.
2. a. Montrer que $R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$.
   b. Montrer que $f(O_2) = O_4$.
   c. Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?
3. Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et S_Δ la réflexion d'axe Δ.
   On pose $g = R_2 \circ S_\Delta$.
   a. Déterminer $g(A)$ et $g(O_1)$.
   b. Montrer que g n'est pas une réflexion et en déduire la nature de g.
   c. Construire le point $\omega' = g(\omega)$.
   Déterminer les éléments caractéristiques de g.

Exercice 5

Le but de l'exercice est le calcul de :

$$L = \int_1^e \frac{1}{t}\left(\frac{\ln t}{1+\ln t}\right)^3 dt.$$

1. Calculer les deux intégrales :

$$I = \int_1^e \frac{1}{t(1+\ln t)} dt \quad \text{et} \quad J = \int_1^e \frac{1}{t(1+\ln t)^2} dt.$$

2. a. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $z \neq -1$, on ait :

$$\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 = a + \frac{b}{1+z} + \frac{c}{(1+z)^2}.$$

   b. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$K = \int_1^e \frac{1}{t}\left(\frac{\ln t}{1+\ln t}\right)^2 dt.$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$L = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2}K.$$

En déduire alors la valeur de L.

Dans un virage à 60 degrés, à droite, une voiture circule à 40 km/h.
Savez-vous qu'elle est la roue qui tourne le moins vite?
Réponse : ... !sruoces ed euor al rûs neib tse'C
(lire la réponse de la droite vers la gauche)

Sujet 2	Ex1 : Fonctions réciproques Ex2 : Nombres complexes Ex3 : Isométries du plan Ex4 : Arithmétique

« A qui sait attendre, le temps ouvre ses portes. »

Exercice 1

a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Vérifier que pour tout réel x on a : $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b. Étudier les variations de g et en déduire que pour tout réel x, on a : $g(x) > 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a. Vérifier que pour tout réel x, on a : $f'(x) = g(x)$.
   b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$. Interpréter le résultat obtenu.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
   b. Écrire une équation de la tangente T par rapport à C.
   c. Tracer, T et Δ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (on placera les points de C d'abscisses -1 et 1).
3. a. Vérifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   b. Calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$ [f^{-1} étant la fonction réciproque de f].
   c. Tracer C' la courbe représentative de f^{-1} dans le repère précédent $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 2

Soit $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complexe P.
Soit A le point d'affixe 1. On considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = 2z - z^2$.

1. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes z^2 et $2z$.
   a. Trouver l'ensemble des points M tels que O, M_1 et M_2 soient alignés.
   b. On suppose que M n'appartient pas à l'axe des abscisses. Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme.
   c. On suppose que $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi, \pi[$. Construire les points M, M_1, M_2 et M'.
2. Dans cette question, M est un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   a. Montrer que AM = MM'.
   b. Montrer que le rapport $\frac{z'-1}{z}$ est réel.
   c. En déduire que les points A et M' sont symétriques par rapport à la tangente en M au cercle $\mathcal{C}$.
3. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon r et par Γ' le cercle de centre A et de rayon r^2.

   a. Montrer que $f(\Gamma)$ est inclus dans Γ'.
   b. Soit $Z = 1 + r^2e^{2it}$ avec $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $2z - z^2 = Z$.
   c. En déduire que $f(\Gamma) = \Gamma'$.
   d. Trouver la forme trigonométrique des solutions de (E) dans le cas où $r = 1$.

Exercice 3

Dans la plan orienté on considère un carré ABCD de centre I tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Les points J et K les milieux respectifs de [AD] et [CD] et soit E un point tel que DBE soit un triangle équilatéral direct.

1. Soit R l'unique déplacement qui envoie B sur A et A sur D. Caractériser R.
2. Soit $g = R_{\left(B, \frac{\pi}{6}\right)} \circ R_{\left(E, \frac{\pi}{3}\right)}$.

Déterminer g(D). En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

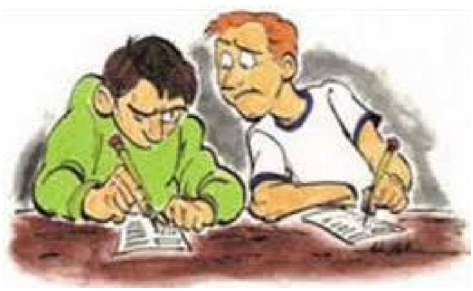
3. Soit $f = R_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)}$. On pose $t = gof^{-1}$.
   a. Déterminer t(A) puis caractériser t.
      Soit M un point n'appartenant pas (AD).
      On pose $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$.
   b. Montrer que le quadrilatère ABM_2M_1 est un parallélogramme.
   c. En déduire qu'il existe un unique déplacement qui transforme A en M_1 et D en M_2.
4. Soit $h = t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(AC)}$.
   Déterminer h(A) et h(D) puis montrer que h est une symétrie glissée dont on donnera la forme réduite.
5. Soit M_0 un point du plan. On considère la suite des points (M_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = h(M_n)$.
   a. Montrer par récurrence que $\overrightarrow{M_0M_{2n}} = n\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire que pour tout entier n, le point M_{2n+1} appartient à une droite fixe que l'on déterminera.

Exercice 4

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives
$$a = 1 + i\ ;\ b = -4 - i.$$
   Soit f la transformation du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.
   a. Exprimer z' en fonction de z.
   b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers naturels avec $1 \leq x \leq 8$ et $1 \leq y \leq 8$. Les coordonnées (x' ; y') de *M*' sont alors : x' = 3x + 2 et y' = 3y – 1.
   a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.
   b. Montrer que x' – y' est un multiple de 3.
   c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples (x'; y') de G × H tels que m = $x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.
   d. Montrer que dans ces conditions, le nombre x' – y' est un multiple de 6. Le nombre x' – y' peut-il être un multiple de 30 ?
   e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, x' + y' est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples (x'; y') qui conviennent.
   En déduire les couples (x ; y) correspondant aux couples trouvés (x'; y').

Le professeur donne les résultats du dernier devoir de maths et s'adresse à un élève :
- Que se passe t-il ? Tu avais toujours de bonnes notes et depuis quelques semaines, tu n'as même plus la moyenne ?
- Ce n'est pas ma faute, Monsieur, c'est Ali qui a changé de place !



Sujet 3

Ex1 : Nombres complexes
Ex2 : Arithmétique
Ex3 : Fonctions réciproques
Ex4 : Isométries du plan
Ex5 : Fonction logarithme - Suites

« Marche avec des sandales jusqu'à ce que la sagesse te procure des souliers. » (Avicenne)

Exercice 1

Pour tout nombre complexe distinct de 1 et de -1, on pose :

$$\varphi(z) = \frac{z}{1 - z^2}$$

1. a. Montrer que :

$$\varphi(z) \in \mathbb{R} \iff (z = \bar{z} \text{ et } z \notin \{1; -1\})$$

b. Montrer que :

$$\varphi(z) \in i\mathbb{R} \iff (z = -\bar{z} \text{ ou } z.\bar{z} = 1 \text{ avec } z \notin \{1; -1\})$$

2. Soit θ un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Justifier que $\varphi(e^{i\theta})$ est un imaginaire pur.

b. Déterminer le module et un argument de $\varphi(e^{i\theta})$.

c. On pose pour tout naturel $n \geq 1$ et pour tout θ de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(i\varphi(e^{i\theta})\right)^k$$

Calculer $S_n(\theta)$ et montrer que $S_n(\theta)$ converge pour θ de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$. Déterminer pour ces valeurs la limite de $S_n(\theta)$, en fonction de θ, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

1. Soit N un entier naturel et S la somme des chiffres de N.

Montrer que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

2. On considère le nombre $A = 2009^{2009}$. On désigne par B la somme des chiffres de A, C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C.
   a. Montrer que $A \equiv D\ [9]$.
   b. Montrer que A possède au plus 8036 chiffres. En déduire que $B \leq 72324$.
   c. Montrer que $C \leq 45$.
   d. Montrer que $D \leq 12$.
   e. En déduire la valeur de D, puis celle de C.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par :

$$f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cot\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right]$$

1. Étudier l'application f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. a. Montrer que f est bijective. Soit $h = f^{-1}$. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.
   b. Montrer que h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   c. Calculer $h'(x)$, pour tout x élément de $\mathbb{R}^*$.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = h(x-1) + h\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

   a. Calculer $g'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}^*$.
   b. En déduire que g est constante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et déterminer $g(x)$.

Exercice 4

Dans le plan orienté, ABI est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\Omega = S_{(AI)}(B)$.

A. R est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui envoi A en I.

1. Montrer que Ω est le centre de R.
2. Soit $C = R(B)$. Montrer que $I = A * C$.
3. A tout point M de [AB] distinct de A et de B, on lui associe le point M' de [IC] tel que $AM = IM'$. Montrer que ΩMM' est équilatéral.

B. On désigne par $O = A * I$, $K = B * C$ et $H = \Omega * C$.

1. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement ψ qui envoi A en I et B en C.
2. Construire I'=ψ(I).
3. Montrer que ψ n'a pas de point invariant.
4. Soit $S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ la forme réduite de ψ.
   a. Montrer que Δ est la médiatrice de [BH].
   b. Déterminer $t_{\vec{u}}(H)$. Donner alors la forme réduite de ψ.
5. Soit $g = \psi \circ S_{(BI)}$.
   a. Donner la nature de g.
   b. Caractériser g.

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1[\, \cup\,]1,+\infty[, \qquad \begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x^n}{\ln x} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Partie A

1. a. Montrer que f_n est continue et dérivable à droite en 0.
   b. Vérifier que pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on a :
   $$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}(-1 + n.\ln x)}{(\ln x)^2}.$$
   c. Dresser le tableau de variations de f_n (préciser extremum).

2. On note (C_n) la courbe de f_n dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a. Étudier la branche infinie de (C_n) en $+\infty$ pour $n = 1$ puis pour $n \geq 2$.
   b. Étudier la position relative de (C_n) par rapport à (C_{n+1}).
3. a. Montrer que (C_1) admet un point d'inflexion que l'on précisera.
   b. Tracer (C_1) et (C_2).

Partie **B**

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = -\sqrt{n}$ admet une solution unique que l'on note U_n appartenant à $]0, 1[$.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $V_n = -n.\ln(U_n)$.
   a. Montrer que $V_n.e^{V_n} = \sqrt{n}$ et que $V_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.
   b. Montrer que $V_n \leq \sqrt{n}$. En déduire que $e^{\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} < U_n < 1$ puis calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Partie **C**

Pour $n \geq 1$, on pose $W_n = e^{V_n}$.

1. On note g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x.\ln x$.
   a. Montrer que g est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
   b. Vérifier que $W_n = g^{-1}(\sqrt{n})$ puis montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty.$$

2. a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n)^n = 0$ puis que calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(U_n - 1).$$

   b. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(U_n - 1) = -\infty$.

L'inspecteur du Ministère de l'Éducation demande à un candidat de l'E.N.I (École Normale des Instituteurs) lors du concours : "Pouvez-vous me donner 4 raisons qui vous motivent à devenir instituteur ?"
Le candidat répond : juin, juillet, août et septembre.

Sujet 4

Ex1 : Nombres complexes
Ex2 : Arithmétique
Ex3 : Fonction définie à l'aide d'une intégrale
Ex4 : Similitudes directes

« Mieux vaut allumer une chandelle que de maudire l'obscurité. »
(proverbe chinois)

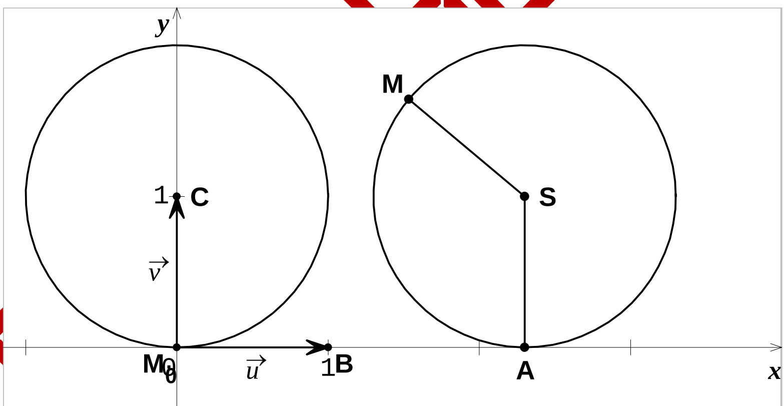
Exercice 1 (La roue du vélo)

On considère un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que le rayon de la roue soit égal à l'unité de longueur et l'axe $(O, \vec{u})$ figure le sol.

Le point de contact de la roue avec le sol est noté A, repéré par le réel t, t parcourant $[0, 2\pi]$.

Pour $t = 0$, $M = M_0$ est en O.

S désigne le centre de la roue du vélo.



1. Établir que les affixes de A, B et S sont respectivement les nombres t, 1 et t+i.
2. Expliquer pourquoi l'angle $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}) = -t$ en radians.
3. En déduire l'affixe du vecteur $\overrightarrow{SM}$ en fonction de t, puis établir que l'affixe de $\overrightarrow{BM}$ est : $Z = (t-1) + (1 - e^{-it})i$.
4. a. Exprimer $e^{it} + e^{-it}$ et $e^{it} - e^{-it}$ en fonction de $\cos t$ ou $\sin t$.

b. Calculer $BM^2 = Z \times \overline{Z}$ en fonction de t.

5. On pose : $f(t) = (t-1)^2 - 2(t-1)\sin t + 2(1-\cos t)$.
   Démontrer que : $f'(t) = 2(t-1)(1-\cos t)$.
6. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, 2\pi]$ et en déduire la position où M est au plus près de B.

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{pU_n^2 + 1} \end{cases}$$, où p est un réel non nul.

1. On suppose que $p = 1$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sqrt{n}$. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
2. On suppose que $p \in]0, 1[$.
   a. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < \frac{1}{\sqrt{1-p}}.$$
   b. Étudier la monotonie de la suite (U_n). En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.
3. On suppose que $p \in]1, +\infty[$.
   On pose $S_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1}^2 - U_n^2 = p^n$.
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sqrt{S_n}$.
4. On suppose que p est un entier différent de 1.
   a. Calculer $p^n + (1-p)U_n^2$. En déduire que p^n et $1-p$ sont premiers entre eux.
   b. Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_n): $p^n x - (1-p)y = p$.
   Justifier que l'équation (E_n) possède des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et vérifier que les solutions de (E_n) sont les couples de la forme : $(p + k(1-p), -U_n^2 + kp^n), k \in \mathbb{Z}$.
   c. En déduire dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les solutions de l'équation :
   $$10^n x + 2^{n+2} y = 10 \times 2^{n-1}.$$

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^1 \frac{2^t}{x+t} dt$ sur le domaine $D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

   a. Montrer que $\forall x < -1$ *et* $\forall t \in [0, 1]$, on a : $\frac{2^t}{x+t} \leq \frac{1}{x+t}$.

   b. Montrer que $\forall x < -1$, *on a* : $f(x) \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

   En déduire la valeur de :

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x).$$

   c. Montrer que $\forall x > 0$ *et* $\forall t \in [0, 1]$, on a : $\frac{2^t}{x+t} \geq \frac{1}{x+t}$.

   Montrer alors que :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

2. Montrer que $\forall x < -1$ *et* $\forall t \in [0, 1]$, on a : $|x + t| \geq -(1 + x)$.
3. En déduire que :

$$\forall x < -1, \qquad |f(x)| \leq \frac{-1}{(x+1)\ln 2}.$$

   Calculer alors la valeur de la limite :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x).$$

4. Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

5. Soit $x \in D$ et F une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{-x\}$ de la fonction définie par $\varphi : t \longmapsto \frac{2^t}{x+t}$.

   a. Donner en fonction de F une primitive de la fonction définie par : $t \longmapsto -\varphi(-x + t)$.

   b. En déduire que :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \varphi(-x + t)\, dt.$$

   c. Conclure que :

$$f(x) = 2^{-x} u(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = \int_x^{x+1} \frac{2^t}{t} dt.$$

d. Vérifier que : $\forall x \in D,\ u'(x) = \frac{2^{x+1}}{x+1} - \frac{2^x}{x}$ puis en déduire que $f'(x) = -(\ln 2)f(x) + \frac{x-1}{x(x+1)}$.

e. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2^t}{(x+t)^2}\,dt = -f'(x).$$

f. Dresser le tableau de variations de f et tracer l'allure de la courbe de f.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un r.o.d $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = |z|(2iz + 1)$$

1. **a.** Démontrer que f ne conserve pas l'alignement des points.

   b. En déduire que f n'est pas une similitude.
2. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et rayon r et $(\mathcal{C}')$ son image par f.
   a. Démontrer qu'il existe une similitude directe s telle que, pour tout point de $(\mathcal{C})$, f(M) = s(M).
   b. En déduire la nature de s et ses éléments caractéristiques.
3. Donner un exemple de cercle dont l'image par f n'est pas un cercle.

Un monsieur demande à son fils :
- Pourquoi as-tu de très mauvaises notes ? Je ne comprends pas !
- Papa, c'est normal, parce que ce n'est pas moi qui mets les notes!

Sujet 5	Ex1 : Hyperbole – Calcul intégral Ex2 : Nombres complexes Ex3 : Fonction réciproque

« Ce qui te manque, cherche-le dans ce que tu as. » (Koan zen)

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On appelle (H) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnés (x ,y) relativement au repère orthonormé R , vérifient :

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

   Caractériser et construire (H).

2. Soit f la composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   a. Déterminer une équation de (H') image de (H) par f.
   b. Quel est la nature de (H'), déterminer les coordonnées de ses foyers.

3. t étant un paramètre réel de l'intervalle $]0, \pi[$.
   a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^2 - \frac{4}{\sin t} z + \frac{13}{\sin^2 t} - 9 = 0.$$

   b. On note z' et z'' les solution de (E) avec $\operatorname{Im}(z') \geq 0$.
   Pour quelle valeur de t, a-t- on : $|z'| = \sqrt{43}$?
   c. M' et M''sont les points de P dont les affixes respectives sont z' et z'' solutions de l'équation (E).
   Montrer que lorsque t décrit $]0, \pi[$, les points M' et M'' appartiennent à une branche, que l'on précisera, de l'hyperbole (H). Tracer cette branche.

4. On pose pour $x \geq 0$:

$$u(x) = e^x + e^{-x} \quad \text{et} \quad F(x) = \int_2^{u(x)} \sqrt{t^2 - 4}\,dt.$$

   a. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer F'(x).

b. Montrer que $F(x) = \int_0^x (e^t - e^{-t})^2 dt$ puis calculer $F(x)$.

Calculer $u(\ln 2)$.

c. Déduire l'aire de la partie du plan limitée par (H) et les droites d'équation $x = 2$ et $x = \frac{5}{2}$.

Exercice 2

Soit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = z + j^2 . \bar{z}$ où j est le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer $f(i), f(j), f(i + j)$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ j^2 . f(z) \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)|^2 - 2|z|^2 = 2\mathrm{Re}(jz^2)$.
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Déterminer les deux ensembles :
$$(E_1) = \{M(z) / f(z) = 0\} \text{ et } (E_2) = \{M'(f(z)) / z \in \mathbb{C}\}.$$
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = j$.
6. On pose $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.
   a. Déterminer f^2, f^3 et f^4.
   b. En déduire l'expression de $f^n(z)$ en fonction de n, z et j.
7. Soit a, b et c trois nombres complexes.
   a. Vérifier que :
   $$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + b\bar{j} + cj)(a + bj + c\bar{j}).$$
   b. Soit ABC un triangle et a, b et c leurs affixes.
   Montrer l'équivalence :
   $$\begin{cases} \text{ABC équilatéral} \\ \text{ou de centre de gravité O} \end{cases} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$
   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 - 3iz + 1 - i = 0$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]-1; 1[$ par :
$$f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Construire C tout en précisant ses intersections avec les axes de coordonnées.
3. a. Montrer que f réalise une bijection de $]-1;1[$ vers $\mathbb{R}$.
   b. Construire la courbe C' de f^{-1} dans le même repère.
   c. Expliciter $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

Partie **B**

1. $\forall x \in]-1;1[$, on pose $\varphi(x) = f(x) - x$.
   c. Dresser le tableau de variations de φ.
   d. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1;1[$ une seule solution α strictement comprise entre $\frac{4}{5}$ et 1.
   e. Donner le signe de $\varphi(x)$ quand x varie dans $]-1;1[$.
2. On définit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 \in [0,\alpha] \\ U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \end{cases}, \ \forall n \in \mathbb{N}$
   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0,\alpha]$.
   b. Montrer que $\forall x \in [0,\alpha],\ f^{-1}(x) \geq x$.
   c. En déduire que la suite (U_n) est strictement monotone et qu'elle est convergente vers une limite que l'on précisera.

Partie **C**

On définit sur $]-1;1[$ la fonction h par :

$$h(x) = f\left[\cos\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)\right].$$

1. a. Montrer que $\forall x \in]-1;1[$:

$$h(x) = -1 + \cot\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right).$$

   b. Montrer que h réalise une bijection de $]-1;1[$ vers $\mathbb{R}$.
   c. Justifier la dérivabilité de h^{-1} sur $\mathbb{R}$ et montrer que :

$$(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi[(x+1)^2+1]}.$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on pose :

$$H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

a. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $H'(x)$.

b. Calculer $h\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $h\left(\frac{1}{2}\right)$.

c. En déduire que : $\begin{cases} \forall x > 0, & H(x) = -1 \\ \forall x < 0, & H(x) = 1 \end{cases}$

3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right] \text{ et } W_n = \frac{1}{n}V_n.$$

a. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1.$$

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad V_n = -n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right).$$

c. Montrer alors que la suite (W_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Dans les années 70 du siècle dernier, Damas (Syrie) a hébergé un colloque international sur la poésie arabe où des poètes de toutes les langues et de toutes les cultures étaient invités. Les travaux du colloque étaient organisés en séance de lecture de poèmes, conférence-débat et pause-déjeuner. Un poète arabe monte à la tribune et lit, avec toutes les règles de l'art, un très beau poème de 750 vers et cela lui a pris deux bonnes heures. Il a été fortement applaudi par l'audience. A la pause-déjeuner, notre charmant poète se trouve par hasard à la même table avec un poète japonais. Le poète arabe demande alors au japonais :

-Dites-moi, quel est le secret du progrès technologique du Japon ?

Et le japonais lui répond :

- C'est simple, ce que chez nous, le poème ne dépasse pas un vers !

Sujet 6

Ex1 : Parabole – Similitude directe – Nbres cplexes
Ex2 : Fonction définie à l'aide d'une intégrale-Expon.
Ex3 : Intégrales – Suites - Arithmétique

« Ce que l'homme ne veut pas apprendre par la sagesse, il l'apprendra par la souffrance. »

Exercice 1

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie **A**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui au point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. Montrer que f est une similitude directe que l'on caractérisera.
2. On se propose d'étudier la nature de la courbe (C) d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y = 0.$$

   a. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe P image de (C) par f.

   b. Montrer que P est une parabole dont on précisera le foyer, la directrice (D) et le sommet S'.

   c. Quelle est alors la nature de (C) et préciser ses éléments caractéristiques.

   d. Tracer P et (C) à laide des éléments trouvés.

Partie **B**

Soit θ un paramètre appartenant à $[0, 2\pi[$ et E_θ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2(\cos\theta)z + 9 - 8\cos^2\theta = 0$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E_θ, on désigne par z' et z'' les solutions de l'équation E_θ.
2. Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient M’ et M’’ les points d’affixes z’ et z’’ et (E) l’ensemble des points M’ et M’’ lorsque θ varie dans l’intervalle $[0, 2\pi[$.

a. Trouver une équation cartésienne de (E).

b. Montrer que (E) est une ellipse dont on précisera le centre, les sommets, les foyers et l’excentricité.

c. Tracer (E)

3. Soit $M \in E$ et A le point de coordonnée (1, 0), soit G le barycentre du système {(A, 1); (M, 2)}. Montrer que lorsque M varie sur (E) alors G varie sur une ellipse (E’) que l’on précisera.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}$.

1. a. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < f(x) \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1 + e^{2x})f'(x) + (e^{2x} - 1)f(x) = -1$.

3. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x \frac{1+e^t}{1+e^{2t}} dt$.

a. Établir que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} + \ln\left[\frac{\sqrt{2}e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right]$.

b. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$. Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(x) = x$.

c. En déduire que $I = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} f(t)dt = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ et en donner une interprétation géométrique.

4. On donne l’intégrale suivante $K = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{1+e^t}{(1+e^{2t})^2} dt$.

a. Montrer qu’il existe deux réels a et b tels que pour tout réel t, on ait : $\frac{1}{1+e^{2t}} = a + \frac{be^{2t}}{1+e^{2t}}$ puis en déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{dt}{1+e^{2t}}$.

b. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \frac{-1}{1+e^{2t}} - f(t) + \frac{2f(t)}{1+e^{2t}}$ et trouver alors la valeur de K.

Exercice 3 (vers l'irrationalité de e)

Partie I

Dans tout ce paragraphe, x désigne un nombre réel et t une variable réelle.

1. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que l'on a :

$$\int_0^x te^t dt = xe^x - \int_0^x e^t dt.$$

En déduire, par un calcul de l'intégrale $\int_0^x (x-t)e^t dt$, que :

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t dt.$$

2. On considère l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer l'égalité :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt.$$

3. Démontrer, par récurrence sur n, la formule :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

4. On pose $\varepsilon_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$. Montrer que :

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon_n(x) = 0.$$

Partie II

On pose : $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$,

$J_n = \int_{-1}^0 (1+t)^n e^t dt$

1. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, on pose $H = ae + b + ce^{-1}$.

Dans les deux premières questions, on suppose : $|a| + |c| \neq 0$.

a. Montrer que :

$n!\,H = n!\,[aP_n(1) + b + cP_n(-1)] + aI_n + (-1)^{n+1}cJ_n$.

b. Montrer que : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et $\frac{1}{e(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

En déduire la limite de $h(n) = aI_n + (-1)^{n+1}cJ_n$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Soit $Q_n = n!\,H - h(n)$.

Montrer qu'il existe deux entiers rationnels k et k' tels que :

$$n!\,P_n(1) = 1 + kn \quad \text{et} \quad n!\,P_n(-1) = (-1)^n + k'n.$$

En déduire que Q_n est, pour tout entier n, un entier, et que le nombre $Q_n - [a + (-1)^n c]$ est un multiple de n.

2. a. Prouver que, si H est nul, alors a, b et c sont nuls.

b. En déduire qu'il n'existe aucune équation du second degré à coefficients rationnels dont une racine soit égale à e.

28

Dans un devoir, on demande à un élève d'interpréter les résultats de l'expérience suivante : « Un scientifique examine une grenouille. Il lui coupe une patte et lui dit :
- Saute !
Et la grenouille sauta.
Le scientifique lui coupe la deuxième patte et lui dit :
- Saute !
Et la grenouille sauta.
Le scientifique lui coupe la troisième patte et lui demande de sauter
Et la grenouille sauta,
Alors, il lui coupe sa dernière patte et lui dit :
- Saute !
Mais la grenouille ne décolle pas cette fois-ci. »
Réponse de l'élève : quand on coupe quatre pattes à une grenouille, elle devient sourde !

Sujet 7

Ex1 : Arithmétique
Ex2 : Déplacements – Similitude directe
Ex3 : Fonction définie par une intégrale - Logarithme

« A sde boylé hannde ngam domditin de jango » proverbe peul signifiant :
« Il faut creuser les puits aujourd'hui pour étancher les soifs de demain. »

Exercice 1

Soient m et n deux entiers relatifs et N le nombre défini par :

$$N = mn(m^{60} - n^{60}).$$

1. Donner la décomposition en produits de facteurs premiers du nombre 56 786 730.
2. Montrer que N est pair.
3. En remarquant que $N = n(m^{61} - m) - m(n^{61} - n)$, montrer que 61 divise N.
4. Soit x et y deux entiers et s et t deux entiers naturels non nuls. On admet que :

   Si s divise t alors $x^s - y^s$ divise $x^t - y^t$.

   a. Montrer que pour tout $k \in \{2, 4, 6, 10, 12, 30\}$, le nombre $mn(m^k - n^k)$ divise N.

   b. Montrer que pour tout $k \in \{2, 4, 6, 10, 12, 30\}$, $k + 1$ divise $mn(m^k - n^k)$.

   c. En déduire que 56 786 730 divise $N = mn(m^{60} - n^{60})$.

Exercice 2

Soit dans un plan orienté trois points A, B et C non alignés tels que $AB < AC$. On pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha\ [2\pi]$.
Soit d_1 la demi-droite de support (AB), d'origine B, ne contenant pas le point A. Soit d_2 la demi-droite d'origine C contenant A.

On place sur d_1 un point M différent de B et sur d_2 un point N tel que $CN = BM$.

1. Justifier l'existence d'une unique rotation r transformant B en C et M en N.
   Préciser l'angle de r en fonction de α.
2. a. Démontrer que le centre O de r est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
   b. Déterminer la position du point O.
3. Soit f la similitude directe de centre O transformant B en M.
   a. Démontrer que $f \circ r = r \circ f$.
   b. En déduire que $f(C) = N$, puis que :
$$\frac{MN}{BC} = \frac{OM}{OB}.$$
4. Construire les points M sur d_1 et N sur d_2 sachant que :
$$BM = CN \text{ et } MN = BC.$$

Exercice 3

On pose $E =]1, +\infty[$ et pour tout $x \in E$, $A(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$.

Partie A

1. Démontrer que A est définie sur E.
2. Démontrer que pour tout $x \in E$, on a : $\ln x \leq x - 1$.
3. a. Démontrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$, $A(x) \geq \ln(x-1)$.
   b. Démontrer que pour tout $x \in]1, 2]$, $A(x) \leq \ln(x-1)$.
   c. Déduire de ce qui précède les limites de A en 1 et en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de A et dresser son tableau de variations.

Partie B

1. a. Démontrer que pour tout $x \in E$, on a :
$$A(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}.$$
   b. En déduire que pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$A(x) \geq \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2}.$$

2. a. Démontrer que pour tout $x \in E$, on a :

$$A(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \frac{x}{\ln^2 x} - \frac{2}{\ln^2 2} + 2\int_2^x \frac{dt}{\ln^3 t}$$

b. Montrer que tout $x \in E$, on a :

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^3 t} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^t}{t^3} dt.$$

c. En déduire que pour tout $x \in E$, on a :

$$A(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \frac{x}{\ln^2 x} - \frac{2}{\ln^2 2} + 2\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^t}{t^3} dt$$

3. a. Étudier pour $t \in]0, +\infty[$ les variations de la fonction :

$$t \longmapsto \varphi(t) = \frac{e^t}{t^3}.$$

b. Démontrer que pour tout $x \in [e^3, +\infty[$, on a :

$$\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^t}{t^3} dt \leq \int_{\ln 2}^{3} \frac{e^t}{t^3} dt + (\ln x - 3)\frac{x}{\ln^3 x}$$

4. a. Déduire de ce qui précède que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} . A(x) = 1$$

b. Donner l'allure de la courbe (Γ) représentant la fonction A.

Partie C

On suppose dans cette partie que $x \in [2, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$x_k = 2 + k\frac{x-2}{n} \quad \text{et} \quad U_n(x) = \frac{x-2}{n} . \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\ln(x_k)}$$

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{x-2}{n} . \frac{1}{\ln(x_{k+1})} \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x-2}{n} . \frac{1}{\ln(x_k)}$$

2. En déduire que :

$$0 \leq U_n(x) - A(x) \leq \frac{x-2}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}\right)$$

3. En utilisant la question précédente, quelle est la plus petite valeur de n telle que $U_n(x)$ soit une valeur approchée par excès de $A(x)$ à 10^{-1} près pour tout $x \in [2, 10]$.

Partie **D**

1. Démontrer que l'équation $A(x) = \frac{1}{x}$ a une unique solution α et que $\alpha \in]2, +\infty[$.
2. a. Démontrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$A(x) \geq \frac{x-2}{\ln x}$$

b. En intégrant par parties, démontrer que :

$$\forall x \in E, \qquad A(x) = x\ln(\ln x) - 2\ln(\ln 2) - \int_2^x \ln(\ln t)dt$$

c. En déduire que pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$\frac{x-2}{\ln x} \leq A(x) \leq x.\ln\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)$$

d. Déduire de ce précède que : $2{,}3 < \alpha < 2{,}4$.

Un commerçant mauritanien est allé en voyage d'affaires dans un pays asiatique où la population n'est pas vraiment orthodoxe sur les questions religieuses. Juste après son arrivée, il a senti la faim et décide d'aller se restaurer. Il rentre dans un restaurant et dit au patron :
-Voilà, je veux un repas qui ne contient pas du porc et une boisson non alcoolisée ...
Et le patron lui pose la question :
-Vous venez d'où Monsieur ?
Et notre compatriote :
-Je viens de la Mauritanie, un pays musulman en Afrique ...
Le patron réplique :
-Vous êtes vraiment loin de nous aussi bien sur le plan géographique que sur le plan des règles de l'alimentation. Et il ajoute :
Tu sais chez nous, les règles de l'alimentation sont claires et simples :
-Tout ce qui vole se mange sauf l'avion ;
-Tout ce qui nage se mange sauf le sous-marin ;
-Tout ce qui rampe se mange sauf le train ;
-Tout ce qui a quatre pieds se mange sauf les tables.

# Sujet 8	Ex1 : Similitude directe Ex2 : Arithmétique Ex3 : Fonction définie par une intégrale-ln et exp. Ex4 : Nombres complexes Ex 5 : Coniques

« Faisons les projets dans le silence. Le succès s'occupera du bruit. »

Exercice 1

On considère un cercle de diamètre [OB]. Soit A un point du segment [OB], distinct de O et de B, I le milieu de [AB].
La médiatrice du segment [AB] coupe le cercle en M et M' tels qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})$ est $+\frac{\pi}{2}$. Soit N le projeté orthogonal de A sur (OM).

1. Donner la nature du quadrilatère AMBM'.
   En déduire que la droite (AM') est orthogonale à (OM) et que N, A et M' sont alignés.
2. On appelle S la similitude directe de centre N, telle que $S(M) = N$.
   Préciser l'angle de cette similitude.
   Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA).
   En déduire l'image par S du point M'.
3. Montrer que l'image par S de I est le point I', milieu de [OA].
   En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre [OA].

Exercice 2

Soit n un entier naturel.

1. a. Déterminer, en fonction de la parité de n, du valeur du PGCD : $d = (n^2 + 1) \wedge (n + 1)$
   b. Montrer que le nombre $n^2 + 1$ n'est pas un carré parfait pour tout entier n non nul.
2. Soit a, b et n trois entiers naturels non nuls tels que :

$$a \wedge b = 1 \quad \text{et} \quad a(n^2 + 1) = b^2(n + 1).$$

a. Montrer que : $a \wedge b^2 = 1$ puis que : $a \leq n$ et $b \leq n$.
b. En déduire que : $(n^2 + 1) \wedge (n + 1) = 2$.
c. On pose $n^2 + 1 = 2p$ et $n + 1 = 2q$ avec $p \wedge q = 1$.
Montrer que : $q = a$ et $p = b^2$.
d. On suppose que : $b = a + 1$.
Calculer alors les entiers a, b et n.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} dx \\ u_n = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} [f'(x)]^n dx \end{cases}$$

1. Calculer u_0 et u_1.

2. a. Montrer que pour tout $x \in [0; \ln(2)]$ on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{5}$.
b. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \ln(2).$$

c. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3. a. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a :

$$1 - f''(x) = [f'(x)]^2.$$

b. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_n = u_{n-2} - \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{cases} u_{2n} = u_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1} \\ u_{2n+1} = u_1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k} \end{cases}$$

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k$$

Montrer que (v_n) converge vers un réel que l'on déterminera.

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E_n):\quad z^n = (iz + 2i)^n$$

où n est un entier naturel non nul.

1. a. Déterminer sous forme exponentielle les solutions z_1 et z_2 de (E_2). On note z_1 la solution telle que $\operatorname{Im}(z_1) > 0$.

   b. Pour tout p de $\mathbb{N}$, on pose : $u_p = z_1^p + z_2^p$.

   * Calculer u_p en fonction de p ;

   ** Déterminer les valeurs de p pour lesquelles, on a :

$$u_p = \left(\sqrt{2}\right)^{p+1}$$

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les deux points $A(-2)$ et $M(z)$.

   a. Montrer que si z est solution de (E_n) alors $OM = AM$.

   b. Déduire que les solutions de (E_n) s'écrivent sous la forme $-1 + ia$ avec $a \in \mathbb{R}$.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_n).

   b. Montrer que les solutions de (E_n) s'écrivent sous la forme :

$$z_k = -1 + i.\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{où } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant : $25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2$ ①.

1. En interprétant géométriquement l'égalité ①, démontrer que $\mathcal{E}$ est une conique de foyer O et de directrice la droite Δ d'équation $x = \frac{16}{3}$.
   Donner la nature et l'excentricité de $\mathcal{E}$.
   Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de $\mathcal{E}$ et θ une détermination de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
2. a. Déduire de l'équation ① une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.
   b. Démontrer que :
$$OM = \frac{16}{5 + 3\cos\theta}.$$
3. On suppose ici que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   La droite (OM) coupe Δ en I et recoupe $\mathcal{E}$ en un point M'.
   a. Démontrer que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante du point M.
   b. Démontrer que :
$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}.$$

Des manœuvres de la communauté urbaine de Nouakchott essayent de mesurer la hauteur d'un mât de drapeau (poteau). Pour cela, ils disposent seulement d'un mètre ruban et ils n'arrivent pas à fixer le mètre le long du poteau vertical.
Soudain, un professeur de maths, du lycée de garçons tout près, passe par là et demande ce qu'ils font. Ils lui expliquent. « C'est facile » dit-il.
Il met le mât à même le sol, l'allonge, et le mesure aisément :
voilà, 5,75 m. Après son départ, un des manœuvres dit : « il est vraiment bête ce professeur, je comprends bien maintenant, c'est pourquoi nos enfants n'ont plus de niveau ... ». On lui explique qu'on veut la hauteur, et il nous mesure la longueur !

Sujet 9

Ex1 : Nombres complexes
Ex2 : Arithmétique
Ex3 : Transformations dans le plan - Configurations

« Paresse : habitude prise de se reposer avant la fatigue. »

(Jules Renard)

Exercice **1**

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct. Soient les deux points A et B d'affixes respectives 1 et -1.

1. Pour tout complexe z et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $P_n(z) = (z+1)^n - (z-1)^n$.
2. Montrer que si z_0 est une racine de $P_n(z)$ alors $\overline{z_0}$ et $-z_0$ sont également des racines de $P_n(z)$.
3. Montrer que toute racine de $P_n(z)$ est imaginaire pure.
4. Montrer l'équivalence : $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ z = -i\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$.
5. a. Déterminer le coefficient a_n de z^n dans le développement polynomial de $P_n(z)$. En déduire que pour tout nombre complexe z, on a :

$$P_n(z) = 2n\prod_{k=1}^{n-1}\left(z + i\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

b. Montrer que la suite définie par son 1er terme :

$$u_n = 2n \times i^{n-1} \times \prod_{k=1}^{n-1}\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

ne prend qu'un nombre fini de valeurs que l'on déterminera.

c. En déduire la valeur du produit :

$$Q = \prod_{k=1}^{10}\tan\left(\frac{k\pi}{11}\right)$$

Exercice 2

On considère l'entier naturel $n = 19^{88} - 1$.

1. a. Montrer que :

$$n = (19^{11} - 1)(19^{11} + 1)(19^{22} + 1)(19^{44} + 1).$$

   b. Montrer que 9 divise $19^{11} - 1$ et que 3 ne divise pas

$$(19^{11} + 1)(19^{22} + 1)(19^{44} + 1).$$

   c. En remarquant que $18 = 2 \times 3^2$, prouver que :

$$19^{11} - 1 = \sum_{k=1}^{11} C_{11}^{k} 2^k 3^{2k}$$

   Montrer que $19^{11} - 1 \equiv 9\ [27]$.

   Quelle est donc la plus grande puissance de 3 qui divise $n = 19^{88} - 1$?

2. a. Prouver que les entiers $19^{11} - 1$, $19^{22} + 1$ et $19^{44} + 1$ sont pairs non divisibles par 4.

   b. Prouver que $19^{11} + 1 \equiv 0\ [4]$ et que $19^{11} + 1 \not\equiv 0\ [8]$.

   c. En déduire la plus grande puissance de 2 qui divise $n = 19^{88} - 1$.

3. Calculer la somme des diviseurs de n de la forme $d = 2^a \times 3^b$ avec a, b dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3

A l'extérieur d'un triangle direct non rectangle OAB, on construit trois carrés : AONP, OBCU et BATI de centres respectifs J, H et L.

On suppose que les angles $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OU})$ et $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$ ont pour mesure $+\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Le but de l'exercice est l'étude de quelques propriétés géométriques de la configuration décrite ci-dessus.

N.B. : Il est demandé de faire une figure pour chacune des parties.

Partie $\mathbf{A}$: Propriétés d'orthogonalité et d'égalité de distances

a. On munit le plan d'un repère orthonormé direct dans lequel les points B et N ont pour affixes respectives b et n.
   a. Quelles sont les affixes a et u des points A et U ?
   b. Montrer que les droites (AU) et (BN) sont perpendiculaires et que AU = BN. Quelles conclusions similaires peut-on exhiber de la configuration ?
   c. Soit G le point tel que OUGN soit un parallélogramme. En déduire que le triangle GCP est rectangle isocèle.

b. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{GN}}$ et r le quart de tour direct de centre O.
   a. Déterminer l'image de G par $\mathbf{r} \circ \mathbf{t}$.
   b. Soit C' le symétrique de C par rapport à B. Démontrer que r transforme C'en C. Quelle est l'image de B par $\mathbf{r} \circ \mathbf{t}$?
   c. En déduire que les droites (AC) et (GB) sont perpendiculaires et que AC = GB.

Partie $\mathbf{B}$: Propriétés d'alignement et de concours

1. Soit Q le point d'intersection des droites (BP) et (AC), et t' la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{TA}}$.
   a. Quelles sont les images, par la translation t', des hauteurs du triangle TOI ?
   b. En déduire que (OQ) est la hauteur issue du sommet O du triangle OAB.
   c. Montrer que les points G, O et Q sont alignés (on pourra utiliser le résultat de A-2.c.)

2. Soit K_1 le point d'intersection des droites (AU) et (BN). Soient s et s' les deux similitudes directes de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angles respectifs $+\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.
   a. Déterminer s(B), s(N), s'(A) et s'(U).
   b. On définit les deux points K' et K'' par :

$$K' = \mathbf{s}(K_1) \text{ et } K'' = \mathbf{s}'(K_1)$$

Montrer que les triangles directs $K_1K'O$ et K_1OK'' sont isocèles rectangles en K_1 et que $K' \in (CP)$ et $K'' \in (CP)$.

c. En déduire que les droites (AU), (BN) et (CP) sont concourantes.

d. Montrer que les droites (OK_1) et (PC) sont les bissectrices de l'angle des droites (BN) et (AU).

3. a. Montrer que les points O, K_1, A, N d'une part, et K_1, A, L, B d'autre part, sont cocycliques. Quels sont les centres des cercles auxquels appartiennent respectivement ces points ?

b. Calculer $2\left(\overrightarrow{K_1O}, \overrightarrow{K_1L}\right)$. On pourra écrire :

$$\left(\overrightarrow{K_1O}, \overrightarrow{K_1L}\right) = \left(\overrightarrow{K_1O}, \overrightarrow{K_1A}\right) + \left(\overrightarrow{K_1A}, \overrightarrow{K_1L}\right)$$

Que peut-on en conclure ?

4. On admet que :

a. Les droites (OT), (BP) et (IN) sont concourantes en un point noté K_3.

b. Les droites (AC), (OI) et (UT) sont concourantes en un point noté K_2. Montrer que les droites (OK_1), (AK_2) et (BK_3) sont concourantes au point K, orthocentre du triangle HJL.

Un agent de la sécurité routière arrête un automobiliste qui vient de traverser un carrefour. Il s'agissait d'un touriste étranger.
L'agent :
« Et alors ? Vous n'avez pas vu que le feu était rouge ? »
Le touriste :
« Heu, je suis désolé, mais je suis Daltonien ... ».
L'agent, un peu dubitatif :
« Et alors, y'a pas de feux rouges en Daltonie ? ».

Sujet 10	Ex1 : Similitude directe Ex2 : Coniques Ex3 : Intégrales - Suites Ex4 : Arithmétique Ex5 : Nombres complexes

« La lumière voyage plus vite que le son, c'est la raison pour laquelle beaucoup de personnes apparaissent brillantes jusqu'à ce qu'elles se mettent à parler. »

(Pierre Dac)

Exercice 1

Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et f_a l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 + i\tan a)z - i\tan a$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a.
2. Soit A le point d'affixe 1 et M un point distinct de A. Montrer que si a n'est pas nul, alors AMM' est un triangle rectangle.
3. Soit B un point du plan.
   a. Déterminer l'ensemble des points $f_a(B)$ quand a décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   b. Déterminer l'ensemble des antécédents de B par f_a quand a décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 2

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation : $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $\left(\frac{1}{\cos\theta}, 2\tan\theta\right)$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a. Déterminer les coordonnées des sommets et des foyers de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.
   b. Donner les équations des deux asymptotes (Δ_1) et (Δ_2).

c. Tracer $(\mathcal{H})$ et placer ses foyers.

d. Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{H})$.

2. Soit (T_M) la tangente à $(\mathcal{H})$ en M.

Montrer qu'une équation de (T_M) dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ est :

$$2x - y\sin\theta - 2\cos\theta = 0.$$

3. On désigne respectivement par P_1 et P_2 les points d'intersection de (T_M) avec les droites (Δ_1) et (Δ_2).

a. Donner les coordonnées de P_1 et P_2.

b. Montrer que l'aire du triangle OP_1P_2 est indépendante de θ.

Exercice 3

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt$

1. a. Justifier l'existence de I_0.

b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\frac{2}{\sqrt{e}(2n+3)} \leq I_n \leq \frac{2}{(2n+3)}$

2. a. Montrer que (I_n) est décroissante.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{-2}{\sqrt{e}} + (2n+3)I_n$

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2}{\sqrt{e}(2n+3)} \leq I_n \leq \frac{1}{\sqrt{e}(n+1)}$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} n\, I_n$

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $U_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!} I_n$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n - \frac{2^{n+2}}{\sqrt{e}} \frac{(n+1)!}{(2n+3)!}$

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = U_0 - \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^{k+1} k!}{(2k+1)!}$

4. a. Montrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \leq 1$$

b. En déduire que : $0 \leq U_n \leq I_n$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

c. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^{k+1} k!}{(2k+1)!}$

Montrer que (S_n) converge vers un réel l tel que : $\frac{2}{3} \leq l \leq 1$.

Exercice 4

Les nombres parfaits pairs

On dit qu'un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même.

1. Le but de cette question est de montrer que si $2^p - 1$ est premier alors l'entier naturel défini par $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.(Résultat dû à Euclide). Notons q l'entier $2^p - 1$.
   a. Écrire la liste des diviseurs positifs de N (on remarquera que l'écriture connue de N est sa décomposition en facteurs premiers).
   b. Montrer que N est parfait.

   ☞ Utiliser ce résultat : Pour $a \neq 1$ et k entier naturel, on a:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

2. Preuve de la réciproque. (Résultat dû à Euler)
   Soit N un nombre parfait pair. En notant n l'exposant de 2 dans la décomposition de N en facteurs premiers (N est pair, donc $n \geq 1$) on peut écrire $N = 2^n q$ avec q impair. On note :
   $S(N)$ la somme des diviseurs de N (N est parfait, donc $S(N) = 2N$) et $S(q)$ la somme des diviseurs de q.
   a. En remarquant que chaque diviseur d de q engendre $n + 1$ diviseurs de N, montrer que :
   $S(N) = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n) \times S(q)$ puis que :
   $2N = (2^{n+1} - 1) \times S(q)$.
   b. En notant σ la somme des diviseurs de q autres que q, déduire de la question 2.a. que :
   $$q = \sigma(2^{n+1} - 1).$$
   c. En déduire que $\sigma = 1$, puis que q est premier et égal à $2^{n+1} - 1$. Ainsi $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$.

Exercice 5

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct, (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $e^{i\alpha}$, où $\alpha \in [0; 2\pi]$. On considère l'application f qui tout point M de $(\mathcal{C})$, associe $f(M) = MA \times MB$.
   a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :
   $$e^{2i\alpha} - 1 = 2i\sin\alpha\, e^{i\alpha}.$$
   b. Montrer l'égalité suivante :
   $$f(M) = \left|e^{2i\alpha} - 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|.$$
   c. En déduire l'égalité suivante :
   $$f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}.$$
3. a. En utilisant 2.c, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathcal{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels f(M) est minimal. Donner cette valeur minimale.
   b. En utilisant 2.c, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathcal{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel f(M) est maximal. Donner cette valeur maximale.

Ahmed rentre chez lui le soir.
Son père, furieux, lui demande :
-Ce n'est pas aujourd'hui que l'on devait vous donner vos bulletins ?
-Si, mais je l'ai prêté à mon ami Diallo pour qu'il fasse peur à son père.

Sujet 11	Ex1 : Arithmétique Ex2 : Nombres complexes Ex3 : Coniques Ex4 : Fonction exponentielle - Suites

« Notre tête est ronde pour permettre à la pensée de changer de direction. » (Francis Picabia)

Exercice 1

Soit la suite de terme général $u_n = 2^{3^n} + 3^{3^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Le but de l'exercice est de démontrer, par récurrence, que u_n possède au moins $n + 1$ diviseurs premiers distincts.
Soit la propriété :
$\wp(n)$: «$\forall n \geq 1, u_n$ possède $n + 1$ diviseurs premiers».

1. Initialisation :
Vérifier que $\wp(1)$ est vraie.
2. Hérédité :
On suppose que la propriété $\wp(n)$ est vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$.
Posons $X = 2^{3^n}$ et $Y = 3^{3^n}$.
   a. Montrer que $u_{n+1} = (X^2 - XY + Y^2)u_n$. En déduire que u_{n+1} admet au moins $n + 1$ diviseurs premiers distincts.
   b. Montrer que $X^2 - XY + Y^2$ admet au moins un diviseur premier p.
   c. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que p ne divise pas u_n.
3. Conclure.

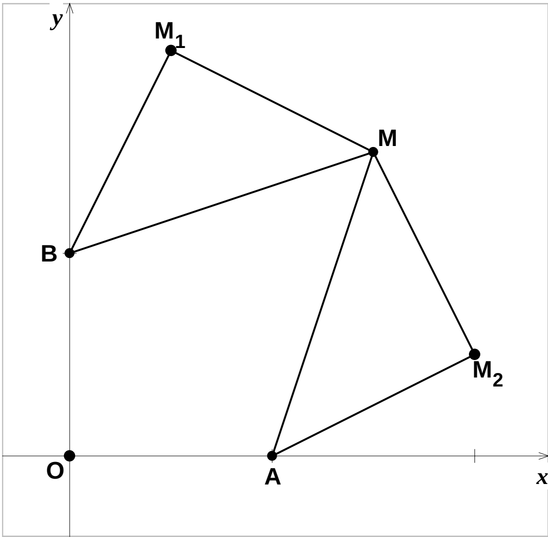
Exercice 2

Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on porte les points A, A', B et B' d'affixes respectives $1, -1, i$ et $-i$.
A tout point M d'affixe z, distinct de O, A, A', B et B' on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que les triangles BMM_1 et AM_2M soient rectangles isocèles avec :

$$(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$$

1. a. Justifier les égalités :

$$z - z_1 = i(i - z_1) \quad \text{et} \quad 1 - z_2 = i(z - z_2).$$



b. Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$$

2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.
   a. Montrer que $OM_1 = OM_2 \iff |z+1| = |z+i|$. En déduire l'ensemble Δ des points M tels que $OM_1 = OM_2$ et tracer Δ.
   b. Montrer que $OM_1 = M_1M_2 \iff |z+1|^2 = 2|z|^2$. En déduire l'ensemble Γ des points M tels que $OM_1 = M_1M_2$ et tracer Γ sur la figure jointe.
   c. En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.
3. a. Quelle relation peut-on en écrire entre z_1 et z_2 si OM_1M_2 est un triangle équilatéral ?
   b. Déduisez-en que z est alors solution des équations :

$$e^{-i\frac{\pi}{4}}(z+i) = e^{i\frac{7\pi}{12}}(z+1) \quad \text{et} \quad e^{-i\frac{\pi}{4}}(z+i) = e^{-i\frac{\pi}{12}}(z+1)$$

   c. Déduisez-en les affixes z des points M qui répondent à la question 2.

Exercice 3

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ et M le point de coordonnées $(2\cos\theta, \sin\theta)$ où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a. Déterminer les sommets et les foyers de $(\mathcal{E})$.
   b. Tracer $(\mathcal{E})$ et placer ses foyers.
   c. Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{E})$.
2. Soit (T_M) la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.
   Montrer qu'une équation de (T_M) est :
$$x\cos\theta + 2y\sin\theta - 2 = 0.$$
3. Soit $A(2,0)$ et $A'(-2,0)$ les sommets de $(\mathcal{E})$ situés sur l'axe focal. On désigne respectivement par (T) et (T') les tangentes à $(\mathcal{E})$ en A et A'. On désigne respectivement par P et P' les points d'intersection de (T_M) avec les tangentes (T) et (T').
   a. Donner les coordonnées des points P et P'.
   b. Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{A'P'}$ est indépendant de θ.

Exercice 4

On pose :
$$\begin{cases} f_0(x) = e^{-x} \\ f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}, \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
On note F_n la primitive de f_n sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro.

1. Calculer $F_0(x)$.
2. a. Montrer que :
$$\forall x \in [0,1], \text{on a} : \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$$
   b. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{on a} : \quad 0 \leq F_n(1) \leq \frac{1}{n!}$$
   puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(1)$.

3. a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

   b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+1}(x) = F_n(x) - F_{n+1}(x).$$

4. Soit la somme S_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(1).$$

   a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = 1 - \frac{1}{e} - F_n(1).$$

   b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = e - 1 - eF_n(1).$$

   c. Calculer alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

La maîtresse demande à un élève de conjuguer le verbe marcher au présent et à toutes les personnes.
L’élève lui répond lentement: je marche... tu marches... il marche... nous... quand tout à coup, la maîtresse lui demande d'aller plus vite.
Alors il lui répondit : je cours, tu cours, il court, nous courons, vous courez, ils courent !!!

Sujet 12

Ex1 : Nombres complexes
Ex2 : Fonction définie à l'aide d'une intégrale
Ex3 : Similitudes directes
Ex4 : Arithmétique

« Une fortune est plus à l'abri dans une tête que dans un sac. »

(Félix Leclerc)

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$. On considère pour tout réel $\theta \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation :

$$(E_\theta):\ \ z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1-i)e^{2i\theta} = 0$$

1. Résoudre l'équation (E_θ) dans $\mathbb{C}$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2e^{i\theta}$, $-2(1-i)e^{i\theta}$ et $2ie^{i\theta}$
   a. Montrer que pour tout $\theta \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, le point A appartient à un cercle que l'on précisera.
   b. Montrer que OACB est un parallélogramme. En déduire une construction du point B à partir de A.
3. a. Déterminer en fonction de θ, le module et un argument du nombre $-2(1-i)e^{i\theta}$.
   b. Déterminer l'ensemble des points B lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.
4. Soit l'équation (E'_θ):

$$\left(\sqrt{2}z - 1\right)^3 = (-2 + 2i)e^{i\theta}z^3$$

   a. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $(-2 + 2i)e^{i\theta}$
   b. Soit $x \in]0;\ \pi[$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\frac{\sqrt{2}z - 1}{z} = \sqrt{2}e^{ix} \iff z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

   c. En déduire les solutions de l'équation (E'_θ).

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+\sqrt{t}}\,dt$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq \sqrt{x}$.
3. Déduire de la question précédente :
   a. Que f n'est pas dérivable en 0.
   b. La limite de f en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, on a :
$$\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+\sqrt{t}}\,dt \leq \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$
   Quelle conclusion peut-on en tirer sur la courbe représentative de f ?
6. Donner l'allure de la courbe de f.

Exercice 3

On donne deux triangles ABC et ACD rectangles et isocèles tels que : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Les points B et D sont de part et d'autre du segment [CA]. On désigne par : $I = D * C$, $J = C * B$ et $K = A * B$.

1. Soit f la similitude directe de centre A qui transforme D en C.
   a. Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b. Montrer que $f(C) = B$ et $f(I) = J$.
2. Soit g la similitude directe telle que $g(C) = B$ et $g(B) = A$.
   a. Déterminer le rapport et l'angle de g.
   b. Soit Ω le centre de g.
      Déterminer $g \circ g(C)$.
      Caractériser $g \circ g$ et en déduire que $(\Omega A) \perp (\Omega C)$.
   c. Déterminer $g(J)$ puis montrer que $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega J}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

3. On désigne par Ω' le point d'intersection de (ΩC) et de la perpendiculaire à (AI) en A.
   a. Montrer que $\left(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{A\Omega'}\right) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
   b. Prouver que $f(\Omega) = \Omega'$.

Exercice 4

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

> « Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12.
> Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37.
> Ajoutez les deux nombres obtenus.
> Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.
2. a. Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
   Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.

b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie **B**

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul (programme B) : pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. Première méthode
   a. Démontrer que les entiers 7m et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.
   b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de 7m par 12.
   c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

2. Deuxième méthode
   a. Démontrer que le couple $(-2 ; 17)$ est solution de l'équation diophantienne : $12x + 31y = 503$.
   b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ est solution de l'équation : $12x + 31y = 503$, alors on a :
   $$12(x + 2) = 31(17 - y).$$
   c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$, solutions de l'équation : $12x + 31y = 503$.
   d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que $1 \leq y \leq 12$.
   En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme (B).

Sujet 13

Ex1 : Isométries du plan
Ex2 : Nombres complexes
Ex3 : Arithmétique
Ex4 : Fonction donnée par une intégrale – Exponen.

« Celui qui néglige de se préparer doit se préparer à être négligé. »

(Anonyme)

Exercice 1

Dans le plan orienté, on donne deux points distincts O et I. On note R le quart de tour direct de centre O et s la symétrie centrale de centre I.

1. a. Soit OJO'G le carré direct de centre I. Placer les différents points sur une figure. On a $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OG}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et on prendra OI = 4 cm.
   b. Prouver que $s \circ R$ est la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   c. En déduire que J est le seul point du plan tel que :
   $$R(J) = s(J).$$
2. Pour tout couple (M, N) de points du plan, on note A et B les images de M par R et s, C et D les images de N par R et s.
   Soit M un point donné distinct de J et N le symétrique de M par rapport à J.
   a. Montrer que ABCD est un carré de centre G.
   b. Placer M et N, et le carré ABCD sur la figure.
3. Le point M étant toujours distinct de J, on suppose inversement que N est tel que ABCD soit un carré.
   Prouver que J est le milieu de [MN] et que G est le centre du carré ABCD (on introduira le milieu J' de [MN] et le centre G' du carré ; on comparera alors $R(J')$ et $s(J')$.)
4. Soit R' le quart de tour direct de centre G.
   a. Prouver que $R' \circ R = s$.
   b. En déduire que, sous les hypothèses de la question 2, le carré ABCD est direct (c'est-à-dire R'(A) = B).

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ et (E_α) l'équation d'inconnue z :

$$(\alpha - i)z^2 - [2(\alpha - i) + i\alpha]z + 2i\alpha = 0.$$

On suppose que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

I. Dans cette partie, on prend $\alpha = 1$. Donc (E_1) s'écrit :

$$(1 - i)z^2 - [2 - i]z + 2i = 0.$$

1. Calculer $(2 - 3i)^2$.
2. Résoudre (E_1).
   On notera z_1 et z_2 les solutions telle que $Re(z_1) < Re(z_2)$.
3. Donner un argument de z_1.
4. Montrer que ${z_1}^{2016}$ est un réel.

II. Dans cette partie, on prend $\alpha = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que $\alpha - i = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$.
2. Vérifier que 2 est une solution de (E_α) .
3. Exprimer la 2e solution z' de (E_α) en fonction de α.
4. Donner la forme exponentielle de z'.
5. Soit les deux points M'(z') et M''(i). Déterminer la valeur de $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ pour laquelle le triangle OM'M'' est isocèle de sommet O.

Exercice 3

1. a. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : 6X - 5Y = 7 .
   b. Déterminer alors les solutions dans $\mathbb{N}$ du système suivant :
   $$\begin{cases} n \equiv 2\ [6] \\ n \equiv 9\ [5] \end{cases}.$$
   c. Déterminer les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation :
   $$(6X - 5Y - 6)(6X - 5Y + 6) = 13.$$
2. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E') : $6X^2 - 5Y^2 = 7$.
   a. Montrer que si (X, Y) est une solution de (E') alors :
   $$X^2 \equiv 2\ [5].$$

b. Quel est alors l'ensemble des solutions de (E')?

3. On considère dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation (E'') : 6X - 5Y - 4Z = 7.

   a. Montrer que Y est impair.

   b. On pose $Y = 2p + 1$; $(p \in \mathbb{N})$.
   Montrer que $Z + p$ est un multiple de 3.

   c. On pose $Z + p = 3q$; $(q \in \mathbb{N})$.
   Montrer que (X, Y, Z) solution de (E'') si et seulement si :

$$\begin{cases} Y = 2p + 1 \\ Z = 3q - p \\ X = p + 2q + 2 \end{cases} \quad \text{avec } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

   d. Retrouver alors les solutions de (E).

Exercice 4

1. Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(0) = \ln 2 \\ F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

   a. En remarquant que $e^{-u} \leq 1$ pour tout $u \geq 0$, montrer que pour tout réel $x \geq 0$:

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 \quad \text{et} \quad x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x.$$

   b. En déduire que :

$$\forall x > 0, \qquad 1 - \frac{3}{4}x \leq \frac{\ln 2 - F(x)}{x} \leq 1.$$

   c. Montrer que F est dérivable à droite en zéro et que $F'_d(0) = -1$.

2. a. Montrer que :

$$\forall x > 0 \text{ et } \forall t \in [x, 2x], \qquad 0 < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}.$$

   En déduire que :

$$0 < \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}.$$

   b. En déduire que :

$$\forall x > 0, \qquad 0 \leq F(x) \leq \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

Calculer alors :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x)\,.$$

3. a. Montrer que F est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout x de $]0;\ +\infty[$.
   b. Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe représentative.
4. a. Montrer que F est une bijection de $[0;\ +\infty[$ sur $]0, \ln 2]$.
   b. Étudier la dérivabilité de F^{-1} et calculer $(F^{-1})'(\ln 2)$.

Deux personnes qui font un tour en montgolfière sont perdues. Elles décident de descendre un peu pour demander leur chemin.
Elles aperçoivent deux hommes qui discutent sur la route. Elles s'approchent et demandent :
“ Excusez-moi, mais pouvez vous nous dire ou nous sommes ? ” Les deux hommes se regardent, délibèrent un moment, puis répondent :
“ Vous êtes dans une montgolfière ! ”
Les deux personnes de la montgolfière, un peu surpris, remercient quand même et reprennent de l'altitude.
Un peu plus loin, l'un dit à l'autre :
“ À mon avis, ces deux-là, c'était des mathématiciens.
- Qu'est-ce qui te fait dire ça ?
- Eh bien, ils ont mis beaucoup de temps à nous répondre. Ce qu'ils nous ont dit est parfaitement juste. Et ça ne nous sert absolument à rien du tout. ”
Pendant ce temps, les deux mathématiciens disent :
“ À mon avis, c'était des physiciens : ils nous posent des questions évidentes, et après, s'ils sont perdus, ça va être de notre faute !

Sujet 14

Ex1 : Configurations du plan
Ex2 : Suites de matrices
Ex3 : Fonction définie par une intégrale
Ex4 : Rotation dans le plan

« On dit que les yeux sont des caméras. Alors souriez sans cesse, puisque vous êtes en permanence filmé ! » (proverbe américain)

Exercice 1

Soit (C) un cercle de centre O, de rayon r. Soit F un point fixé, intérieur strictement au cercle (C) et distinct de O. Par le point F, on mène deux droites perpendiculaires (L_1) et (L_2) qui coupent respectivement le cercle (C) en M, P et en N, Q. On suppose que les droites (L_1) et (L_2) pivotent autour du point F en restant perpendiculaires.

1. a. Démontrer que l'isobarycentre de M, N, P, Q est un point fixe G indépendant des droites (L_1) et (L_2).

   b. Démontrer que la somme $FM^2 + FN^2 + FP^2 + FQ^2$ est égale à $4r^2$. En déduire que :

$$MN^2 + PQ^2 = MQ^2 + PN^2 = 4r^2.$$

2. Démontrer que les produits scalaires $\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FP}$ et $\overrightarrow{FN}.\overrightarrow{FQ}$ sont égaux et gardent une valeur constante ne dépendant que des distances OF et r.
3. Soit I, J, K, L les milieux respectifs des cordes [MN], [PQ], [NP], [QM]. Soit T, U, V, W les projetés orthogonaux respectifs de F sur ces cordes.
   a. Démontrer que la médiane (FI) du triangle MFN est hauteur du triangle PFQ.
   b. Démontrer que les huit points I, J, K, L, T, U, V, W appartiennent à un même cercle (Γ) fixe (de centre G). Préciser le rayon R de ce cercle (Γ) en utilisant uniquement OF et r.

Exercice 2

On cherche à modéliser l'évolution au cours du temps de deux populations d'animaux : le renard et le campagnol (un animal qui constitue l'essentiel du régime alimentaire du renard).

Pour tout entier naturel n, on note a_n la population des renards, et b_n la population des campagnols (donnée en milliers) à la fin du n-ième mois. On suppose que l'on a, pour tout n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}4b_n \\ b_{n+1} = -0{,}025a_n + 1{,}05b_n \end{cases} \quad (1)$$

1. Donner une interprétation des coefficients 0,8 et 1,05 dans le contexte de l'exercice.
2. On suppose tout d'abord que la population initiale de chaque espèce est de 90 renards et 30000 campagnols. Soit $a_0 = 90$ et $b_0 = 30$.
   a. Calculer a_1, b_1 puis a_2, b_2.
   b. A l'aide d'un tableur, on a calculé les valeurs de a_n et b_n pour $n = 10, 20, 40, 50, 80$ et 100 :

n	20	50	80	100
a_n	51,5503812	50,0118306	50,0000903	50,0000035
b_n	25,1937977	25,0014788	25,0000113	25,0000004

   Que constate-t-on ? Interpréter ces résultats.
3. Nous allons expliquer le comportement des deux suites grâce au calcul matriciel :
   a. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Écrire le système (1) sous la forme d'une égalité matricielle $U_{n+1} = A \times U_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2.
   b. Démontrer que pour tout n, on a $U_n = A^n \times U_0$. A l'aide d'une calculatrice, on a trouvé :

$$A^{20} = \begin{pmatrix} -0{,}2816 & 2{,}5633 \\ -0{,}1602 & 1{,}3204 \end{pmatrix},$$

$$A^{50} = \begin{pmatrix} -0{,}3329 & 2{,}6658 \\ -0{,}1666 & 1{,}3332 \end{pmatrix},$$

$$A^{100} = \begin{pmatrix} -0{,}3333 & 2{,}6666 \\ -0{,}1666 & 1{,}3333 \end{pmatrix}.$$

Que constate-t-on ?

c. Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

d. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

e. En déduire que, en prenant $a_0 = 90$ et $b_0 = 30$, pour tout n : $\begin{cases} a_n = 50 + 40 \times 0{,}85^n \\ b_n = 25 + \ \ 5 \times 0{,}85^n \end{cases}$.

Étudier le comportement de ces deux suites, et comparer avec les résultats obtenus à la question 2.b. Interpréter ce qui se passe à long terme.

Exercice 3

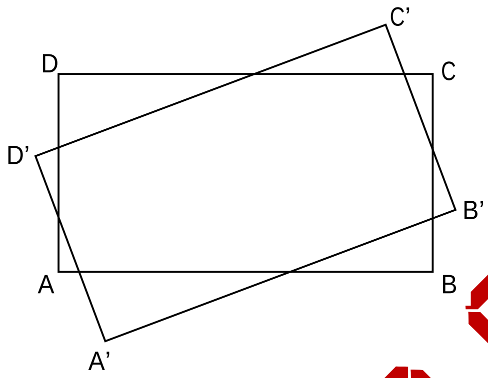
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^{e^x - e^{-x}} \sqrt{4 + t^2}\, dt$$

1. Calculer $F(0)$ puis montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $F(x) = \int_0^x (e^t + e^{-t})^2\, dt$.
2. Déterminer l'expression de $F(x)$ pour x de $\mathbb{R}$.
3. Soit $I = \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + t^2}\, dt$ et $J = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{4+t^2}}\, dt$.
   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - e^{-x} = 3/2$.
   b. Exprimer I à l'aide de F et en déduire la valeur de I.
   c. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de l'intégrale J.

Exercice 4

ABCD et A'B'C'D' sont deux rectangles isométriques sécants comme l'indique la figure ci-dessous :



Le segment $[A'B']$ coupe [AB] en M', le segment $[B'C']$ coupe [BC] en N', le segment $[C'D']$ coupe [CD] en P' et le segment $[D'A']$ coupe [DA] en Q'.

1. Montrer qu'il existe une rotation R qui transforme le rectangle ABCD en le rectangle A'B'C'D'. Soit O le centre de R.
2. Démontrer que les droites (OM') et (ON') sont perpendiculaires. Que dire alors des diagonales de M'N'P'Q' ?
3. Calculer l'aire de M'N'P'Q' en fonction de M'P' et N'Q'. En déduire que l'aire de la partie commune aux deux rectangles est supérieure à la moitié de l'aire de ABCD ?

C'est une conversation entre une maîtresse d'école et l'un de ses élèves:
L'enfant :
- Madame, madame, est-ce que je peux être puni pour quelque chose que je n'ai pas fait ?
La maîtresse :
- Mais bien sûr que non mon fils, on ne va pas te punir pour quelque chose que tu n'as pas fait.
L'enfant :
- Eh bien, ça va alors... je n'ai pas fait mes devoirs hier !

Sujet 15

Ex1 : Similitudes directes
Ex2 : Nombres complexes
Ex3 : Équations différentielles – Suites d'intégrales

« La politesse coûte peu et achète tout. » (Montaigne)

Exercice 1

On considère deux points A et B et la droite fixe (D) passant par A et telle que $(AB,(D)) = \frac{\pi}{3}\ [\pi]$. On désigne par J le projeté orthogonal de B sur la droite (D), par I le milieu de [AB].
Soit $\mathcal{C}$ un cercle variable passant par A et B ; on note O son centre.
Le cercle $\mathcal{C}$ recoupe la droite (D) au point M. Soit (T) la tangente en M au cercle $\mathcal{C}$.

1. Soit U et U' les projetés orthogonaux de B respectivement sur (OM) et (T).
   a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe S_1 de centre B qui envoie O en M.
   b. Déterminer $S_2(O)$ où S_2 est la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
2. Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ les ensembles décrits respectivement par U et U' lorsque le cercle $\mathcal{C}$ varie.
   a. Déterminer la nature de $\mathcal{E}$.
   b. Reconnaître le point U dans les deux cas :
      → Si le point O est situé sur la droite (D) ;
      → Si $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABL où L est le point d'intersection de la médiatrice de [AB] et de la droite (D).
   c. Déterminer la nature de $\mathcal{E}'$.
   d. Reconnaître le point U' dans le cas où la droite (D) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point A.
   e. Construire $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.
3. Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles distincts sécants en A et B et de centres respectifs O_1 et O_2. Ces deux cercles recoupent la

droite (D) aux points M_1 et M_2. Les droites (T_1) et (T_2) sont tangentes respectivement aux cercles Γ_1 et Γ_2 en M_1 et M_2 et elles se coupent en un point P.

a. Montrer que : $\begin{cases} \left(\overrightarrow{BM_1}, \overrightarrow{BM_2}\right) = \left(\overrightarrow{BO_1}, \overrightarrow{BO_2}\right) \ [2\pi] \\ \dfrac{BM_2}{BM_1} = \dfrac{BO_2}{BO_1} \end{cases}$

b. En déduire que M_2 est l'image de M_1 par la similitude directe de centre B qui envoie le cercle Γ_1 en le cercle Γ_2.

c. Justifier que (T_2) est l'image de (T_1) par cette même similitude.

d. En déduire que le point P appartient au cercle circonscrit au triangle BM_1M_2.

Exercice 2

1. a. Écrire sous forme exponentielle les racines sixièmes de 1.

b. Calculer $(1 + i)^6$ et montrer que $z^6 = -8i$ signifie que :

$$\left(\frac{z}{1+i}\right)^6 = 1.$$

c. En déduire les racines sixièmes de $-8i$.

2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) = z^5 + (1 + i)z^4 + 2iz^3 + (-2 + 2i)z^2 - 4z - 4 - 4i.$$

a. Vérifier que : $P(z).(z - 1 - i) = z^6 + 8i$.

b. Résoudre l'équation (E) : $P(z) = 0$.

c. Mettre $P(\sqrt{2})$ sous forme algébrique, en déduire que :

$$\left|P(\sqrt{2})\right| = 4\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

d. Justifier l'égalité :

$$P(z) = \left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right) \times \left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}\right) \times \ldots \times \left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{23\pi}{12}}\right)$$

e. En déduire que :

$$\sin\frac{7\pi}{12}\sin\frac{11\pi}{12}\sin\frac{15\pi}{12}\sin\frac{19\pi}{12}\sin\frac{23\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{32}$$

Exercice 3

Partie A

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + 2$.
   b. Soit l'équation différentielle (E') : $y' = y + 2e^{-x}$.
   Montrer que f est une solution de (E') si et seulement si g définie par $g(x) = e^{x}f(x)$ est solution de (E).
   c. Déterminer alors les solutions de (E').
2. a. Montrer que $f(x) = e^{x} - e^{-x}$ est la solution de (E') qui s'annule en 0.
   b. Dresser le tableau de variations de f.
   c. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.
   d. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} et expliciter l'expression de $f^{-1}(x)$.
3. Soit la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_{0}^{f(x)} \sqrt{4 + t^2}\,dt.$$

   a. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $H'(x)$.
   b. En que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$H(x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) + 2x.$$

   c. En intégrant par parties, calculer l'intégrale :

$$\int_{0}^{f(x)} \frac{t^2}{\sqrt{4 + t^2}}\,dt.$$

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F_n(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{f(x)}} (1 + \ln t)^n\,dt.$$

1. Calculer $F_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x)$.
2. a. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{f(x)}[1 - \ln f(x)]^{n+1} - (n+1)F_n(x).$$

b. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)}[1 - \ln f(x)]^n = 0.$$

c. Montrer par récurrence que la fonction F_n admet une limite finie non nulle L_n lorsque x tend vers $+\infty$.

d. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_n = (-1)^n . e . n!$

Un élève refuse la note 0/20 que lui a donnée son professeur dans un devoir de culture générale. Il prétend mériter 20/20. Voilà les questions et réponses, à vous de juger :

Q1 : A quelle bataille Bakar Ould Sweid'Ahmed est-il mort ?
Réponse : A sa dernière bataille.
Q2 : Où a été signée la déclaration d'indépendance de la Mauritanie ?
Réponse : Au bas de la dernière page.
Q3 : Dans quel état se trouve le fleuve Sénégal ?
Réponse : A l'état liquide.
Q4 : Quelle est la raison principale de l'échec scolaire ?
Réponse : Les examens.
Q5 : Qu'est-ce qui ressemble le plus à une demi-pomme ?
Réponse : L'autre moitié.
Q6 : Comment un homme peut-il rester 8 jours sans dormir ?
Réponse : En ne dormant que la nuit.
Q7 : Il a fallu 8 heures à 10 hommes pour construire un mur. Combien de temps faudrait-il à 4 hommes pour le construire ?
Réponse : Inutile. Le mur est déjà construit.

Sujet 16

Ex1 : Nombres complexes
Ex2 : Exponentielle – Suites d'intégrales
Ex3 : Coniques

« Mieux vaut rester silencieux et passer pour un imbécile que de parler et ne laisser aucun doute sur le sujet. » (Abraham Lincoln)

Exercice 1

1. α est un nombre réel.
   a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :
   $$z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0.$$
   b. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation : $z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0$ dans laquelle n est un entier naturel non nul donné.
2. Pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel α, pour tout nombre complexe z, on pose : $P_n(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1$
   a. Montrer que, pour tous z, α et n, on a :
   $$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$$
   b. Calculer $P_n(1)$ et en déduire que :
   $$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$$
   c. Pour tout α de $]0, \pi[$ et pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
   $$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$
   Montrer que, pour α non nul, on a :
   $$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$$

d. Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

e. En déduire que pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \ldots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n e^{-nx}$. On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
   b. Déterminer les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}.
2. a. Tracer C_1 et C_2 en précisant les demi-tangentes à l'origine.
   b. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe C_1 et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = n$.
   c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Partie B

Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a : $0 \leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$.
2. a. Montrer alors que, pour tout nombre réel $t \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}.$$

   b. En déduire que, pour tout nombre réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq F_n(x) \leq 2.$$

Partie C

Pour tout réel $u \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$G_n(u) = \int_0^u t^n e^{-t} dt.$$

1. a. Montrer que pour tout entiers $n \geq 2$:

$$G_n(u) = -u^n e^{-u} + nG_{n-1}(u).$$

   b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$:

$$G_n(u) = -n!\, e^{-u} \sum_{p=2}^{n} \frac{u^p}{p!} + n!\, G_1(u).$$

2. Montrer alors que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{u \to +\infty} G_n(u) = n!$$

3. a. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a : $G_n'(nx) = n^n f_n(x)$ (f_n étant la fonction définie dans la partie A).

   b. Montrer alors que pour réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}} G_n(nx).$$

   c. En déduire la valeur de :

$$\lim_{x \to +\infty} F_n(x).$$

Exercice 3

Soient dans le plan trois points fixes A, B et O alignés et deux à deux distincts. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle variable de centre I tangent en O à la droite (AB).

Les autres tangentes à $(\mathcal{C})$ issues de A et B se coupent en M.

On pose : $OA = a$ et $OB = b$ et on suppose que $a > b$.

1. On suppose dans cette question que le point O appartient au segment [AB].
   a. Montrer que la différence $MA - MB$ est constante.

b. En déduire que le point M varie sur une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.
c. Déterminer la tangente en M à cette hyperbole.

2. On suppose dans cette question que le point O n'appartient pas au segment [AB].
   a. Montrer que la somme MA + MB est constante.
   b. En déduire que le point M varie sur une ellipse (E) dont on précisera les foyers et les sommets du grand axe.
   c. Déterminer la tangente en M à cette ellipse.
3. Soit Δ la tangente à $(\mathcal{C})$ parallèle à (AB), l'autre tangente à $(\mathcal{C})$ issue de A coupe Δ en un point N. On désigne par A' le symétrique de A par rapport à O et par (d) la perpendiculaire à (AB) passant par A'.
   a. Montrer que le point N varie sur une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.
   b. Déterminer la tangente en N à cette parabole.

On raconte que le mathématicien Augustin Cauchy, dont la famille avait une tradition militaire c'est-à-dire que ces aïeux étaient des militaires de père en fils, était contraint par son père de s'engager dans l'armée. Pour se plier à l'injonction de son père et ensuite se dérober à l'enrôlement, il décide de saboter le jury.
Le jour de l'examen, il se présente devant un jury composé d'officiers et on lui pose les questions :
Q1 : Quelle est la plus petite unité de mesure de capacité ?
-Le millilitre
C'est bien
Q2 : Quelle est la plus petite unité de mesure de longueur ?
-Le millimètre
C'est très bien
Q3 : Quelle est la plus petite unité de mesure de l'intelligence ?
-Le militaire
-Mais tu es insolent, tu te prends pour qui ?
-Oui, je me prends pour Augustin Cauchy.
-Arrête, tu es recalé !

Sujet 17

Ex1 : Arithmétique
Ex2 : Nombres complexes - Transformations
Ex3 : Fonction définie par une intégrale - Logarithme

« La chute n'est pas un échec. L'échec c'est de rester là où on est tombé.» (Socrate)

Exercice 1

1. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Montrer que $\forall k \in \{1; 2; \ldots; p-1\}$, l'entier p divise C_p^k.
☞ Utiliser la formule $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ et le théorème de Gauss.

2. a. Déduire de la question précédente que pour p premier et pour a et b entiers, on a :

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{k=n} C_p^k a^k b^{p-k} \equiv a^p + b^p \ [p]$$

b. Montrer par récurrence sur k, que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left[\sum_{i=1}^{i=k} a_i\right]^p \equiv \sum_{i=1}^{i=k} a_i^p \quad [\text{modulo } p]$$

où les a_i désignent des entiers quelconques.
En déduire que pour tout entier a, on a : $a^p \equiv a \ [p]$.

3. Démontrer que si p est premier et si a n'est pas divisible par p, alors : $a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$

4. Applications
a. * Soit p un entier premier tel que $p-1$ divise 2016. Montrer que p divise $n^{2017} - n$.
** Soit un entier $n \geq 2$, montrer que $n^{2017} - n$ admet au moins 18 diviseurs premiers distincts.
b. Soit n un entier tel que $2n+1$ est un nombre premier.
Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :
$$n^n = 2nk + k + 1 \text{ ou } n^n = 2nk + k - 1.$$

Exercice 2

Partie A

Soit m un nombre complexe.

1. On pose $P(m) = -4m^2 - 4m(1 - 4i) + 15 + 8i$.
   Montrer que $P(m) = (2im + i + 4)^2$.
2. On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation :
   $$(E):\ z^2 - (2m + 5i)z + 2m^2 + (1 + i)m - 2(5 + i) = 0$$
   où m est un paramètre complexe.
   a. Déterminer les deux solutions de l'équation (E).
   b. Calculer m pour que m soit lui-même solution de (E).

Partie B

Dans la suite, on considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit M un point du plan d'affixe un nombre complexe m.

On désigne :

- Par S la similitude directe, qui au point M, associe le point Q d'affixe $z = (1 + i)m + 2 + 3i$;
- Par S' la similitude directe, qui au point M', associe le point Q' d'affixe $z' = (1 - i)z - 2 + 2i$.

1. Donner les éléments caractéristiques de chacune des deux similitudes directes S et S'.
2. Montrer que $S' \circ S$ est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre J.
3. Montrer que l'application f qui envoie Q en Q' est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle.
4. Soit I le milieu de $[QQ']$. On pose $I = t(M)$.
   a. Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur.
   b. Montrer que si Q est distinct de Ω, alors les droites (ΩI) et (QQ') sont perpendiculaires.

5. a. On donne un point M du plan. Déduire, de ce qui précède, une méthode pour construire simplement les points Q et Q' tels que : $S(M) = Q$ et $S'(M) = Q'$.
   b. On donne un point Q du plan. Construire les points M et Q' tels que : $S(M) = Q$ et $S'(M) = Q'$.
6. Soit M un point du plan et $S(M) = Q$ et $S'(M) = Q'$.
   a. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que les points M, Q et Q' soient alignés.
   b. En déduire, dans le cas précédent, l'ensemble des points Q et celui des points Q'. Construire ces deux ensembles.

Exercice 3

Soit n un entier naturel et F_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F_n(x) = \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^4} dt \text{ si } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } F_0(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^4}.$$

Partie A

1. a. Montrer que F_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F_n'(x)$.
   b. En déduire le sens de variation de F_n suivant la parité de n.
2. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, on a :

$$F_{n+1}(x) = -\frac{(\ln x)^{n+1}}{3x^3} + \frac{n+1}{3} F_n(x).$$

   b. Expliciter $F_0(x)$ puis $F_1(x)$ pour $x > 0$.
   c. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : F_n admet une limite finie si x tend vers $+\infty$.
   On note :

$$L_n = \lim_{x \to +\infty} F_n(x)$$

   Montrer que :

$$L_n = \frac{n!}{3^{n+1}}.$$

3. On suppose que n est pair.
   a. Montrer que pour $0 < t \leq 1$, on a :

$$\frac{(\ln t)^n}{t^4} \geq \frac{(\ln t)^n}{t}.$$

b. En déduire que pour $x \in]0,1]$, on a :

$$F_n(x) \leq \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$$

Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0^+} F_n(x)$ lorsque n est pair.

4. On suppose que n est impair.

a. Montrer que pour $0 < t \leq 1$, on a :

$$\frac{(\ln t)^n}{t^4} \leq \frac{(\ln t)^n}{t}.$$

b. En déduire que pour $x \in]0,1]$, on a :

$$F_n(x) \geq \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$$

Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0^+} F_n(x)$ lorsque n est impair.

5. Dresser le tableau de variation de F_n si n est pair et si n est impair.

Partie **B**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose :

$$G_n(x) = \int_0^{\ln x} t^n e^{-3t} dt.$$

a. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, $F_n(x) = G_n(x)$.

b. En déduire que pour tout $x \geq 1$, on a :

$$0 \leq F_n(x) \leq \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$$

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(\sqrt{e})$.

2. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(\sqrt{e})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-3t}}{1-t} dt$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-3t} t^n}{1-t} dt = I - S_n$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I - S_n \leq 2F_n(\sqrt{e})$.

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et donner un entier n_0 tel que S_{n_0} soit une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

Sujet 18

- Ex1 : Nombres complexes
- Ex2 : Arithmétique
- Ex3 : Fonction exponentielle - Intégrales
- Ex4 : Coniques

« Faites que le rêve dévore votre vie afin que la vie ne dévore pas votre rêve. » (Antoine de Saint-Exupéry)

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, -1 et i. A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tels que :

$$z' = \frac{z-1}{z+1}.$$

1. Montrer que si $M \in \mathcal{C}(O, 1) \setminus \{B\}$ alors $M' \in (O, \overrightarrow{v})$.
2. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère l'équation $\mathbb{E}$: $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$.
   a. Déterminer les racines carrées de $e^{i\theta} - 1$ sous forme exponentielle.
   b. Résoudre alors $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{C}$.
3. Soit M_1 et M_2 d'affixes respectives :

$$z_1 = e^{i\theta} + \sqrt{2\sin\theta}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{i\theta} - \sqrt{2\sin\theta}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

   a. Vérifier que $\mathrm{Im}(z_1) \neq 0$.
   b. En déduire que les points A, B et M_1 ne sont pas alignés.
   c. Montrer que $\frac{z_1'}{z_2'} = -1$. En déduire que les points A, B, M_1 et M_2 sont cocycliques.
   d. Montrer que $e^{i\theta} - i = -2i\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire que M_1 appartient à un cercle fixe de centre C dont on précisera le rayon.

Exercice 2

1. Étudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n$.
   a. Montrer que $4S_n = 5^{n+1} - 1$.
   b. Soit a un entier, montrer que :
   $$4S_n \equiv a\ [\text{mod } 7] \iff S_n \equiv 2a\ [\text{mod } 7].$$
   c. En déduire le reste de la division euclidienne de S_{2010} par le nombre 7.
3. Soit n un entier naturel donné. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations : (E_0): $5^n x - S_n y = 0$ et (E): $5^n x - S_n y = 7$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n, S_n et 5^n sont premiers entre eux.
   b. Résoudre l'équation (E_0).
   c. Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x ; y) tels que : $x = 35 + k \times S_n$ et $y = 28 + k \times 5^n$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système diophantien :
$$\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ \text{PGCD}(x; y) = 7 \end{cases}$$

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[-2, +\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{x+2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$
Prouver que :
$$\forall t \geq 0,\ \ 2e^{\frac{t}{2}} \geq t + 2 \ \text{ et } \ \forall t \geq 0,\ \ 0 < f(t) \leq \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{t}{4}}.$$
On pourra admettre ces deux résultats dans le cas où on n'arrive pas à les établir définitivement.

On définit sur $[e^{-2}, +\infty[$, la fonction F par $F(x) = \int_0^{\ln x} f(t)dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $[e^{-2}, +\infty[$, et que :

$$F'(x) = \sqrt{\frac{2 + \ln x}{x^3}}.$$

2. Calculer F(1) et en déduire que $\forall x \in [e^{-2}, +\infty[$, on a :

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{\frac{2 + \ln t}{t^3}}\,dt.$$

3. Montrer que $\forall x \geq 1, 0 \leq F(x) \leq 4\sqrt{2}$.
4. a. Montrer que $\forall t \in [e^{-2}, 1]$, on a : $0 \leq \sqrt{2 + \ln t} \leq \sqrt{2}$.

   b. En déduire que $\forall x \in [e^{-2}, 1]$, on a : $2\sqrt{2}(1 - e) \leq F(x) \leq 0$.
5. Donner enfin un encadrement de F(x) pour $x \in [e^{-2}, +\infty[$.

Partie **B**

On considère la suite U définie par :

$$U_n = \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!} \int_{-2}^{-1} (x+2)^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq U_n \leq e \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!}.$$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

3. En déduire que U converge vers une limite que l'on précisera.
4. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k \cdot k!}{(2k+1)!}.$$

   a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = -2\sqrt{e} \cdot \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+3)!} + U_n.$$

   b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{U_0 - U_n}{2\sqrt{e}}.$$

   c. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{F(e^{-1}) - F(e^{-2})}{2\sqrt{e}}.$$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

On appelle Γ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$x^2 - y^2 - 2xy\sqrt{3} + 2 = 0.$$

1. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et on considère la transformation g du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point $g(M)$ d'affixe jz.

   Montrer que g est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
2. On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant $\mathcal{R}e(z^2) = 1$.

   Définir la nature de cet ensemble $\mathcal{H}$ et le tracer.
3. Soit M un point du plan d'affixe z.

   Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à l'ensemble Γ si, et seulement si, $\mathcal{R}e[(jz)^2] = 1$.
4. Montrer que $\mathcal{H}$ est l'image de Γ par la transformation g.

   En déduire la nature de Γ et tracer Γ sur la figure précédente.

Un prisonnier se fait arracher une dent, deux jours plus tard il se coupe un doit à l'atelier, une semaine après on doit lui enlever l'appendice. Finalement le responsable de la prison insiste en s'adressant aux gardiens :

-Celui-là on doit le surveiller de tout près, j'ai l'impression qu'il essaie de s'évader morceau par morceau !

Sujet 19 | Ex1 : Coniques
Ex2 : Nombres complexes
Ex3 : Fonction exponentielle – Suites d'intégrales

« Il faut toujours viser la lune, car même en cas d'échec, on atterrit sur les étoiles. » (Oscar Wilde)

Exercice 1

Partie A

On donne la parabole (P) d'équation : $y = 2x^2 - 3x + 5$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le paramètre p, le sommet S, le foyer F et la directrice (D) de (P). Tracer la parabole (P).
2. Soit $M(x_0, y_0)$ un point de (P) autre que S. Trouver l'équation de la tangente et de la normale en M à (P).
3. Cette tangente et cette normale coupent l'axe focal en T et N respectivement.
   a. Montrer que le sommet S est le milieu de [HT] , où H désigne le projeté orthogonal de M sur l'axe focal.
   b. Montrer que F est le milieu de [TN].
4. Montrer que la longueur de la sous-normale HN est égale à p.

Partie B

Soit m un nombre réel différent de 1 et de 3. On considère la famille de coniques (C_m) d'équation dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\frac{x^2}{m-1} + \frac{y^2}{m-3} = 1.$$

1. Étudier suivant les valeurs de m la nature des courbes (C_m).
2. On considère le point $A\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$.
   a. Montrer qu'une ellipse (E) et une hyperbole (H) de la famille de coniques (C_m) passent par le point A et calculer les valeurs correspondantes de m.
   b. Préciser les longueurs des demi-axes de (E) et (H) et montrer que (E) et (H) ont les mêmes foyers.

c. Sous quel angle (E) et (H) se coupent-elles ?

3. Soit $M(x, y)$ un point quelconque de l'ellipse (E) et soit θ une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$.
   a. Exprimer OM^2 en fonction de θ.
   b. En déduire que si M et N sont deux points de (E) tels que (OM) et (ON) soient perpendiculaires alors la quantité $\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2}$ est constante et que la droite (MN) reste tangente à un cercle fixe que l'on caractérisera (On rappelle que dans un triangle ABC rectangle en A, la hauteur AH issue de A vérifie : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$).

Exercice 2

Partie A

Dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne le point A(i) et l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} \setminus \{A\} & \longrightarrow & \mathcal{P} \setminus \{A\} \\ M(z) & \longrightarrow & M'(z') \end{array} \quad \text{tel que } \; z' = \frac{iz}{z - i}$$

1. a. Montrer que :
   $$\overline{z'} = z' \iff |z|^2 - Im(z) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{z'} = -z' \iff \bar{z} = -z$$
   puis déterminer les deux ensembles :
   $$(\mathcal{D}) = \{M/\ M' \in (O, \vec{v})\} \quad et \quad (\mathcal{C}) = \{M/\ M' \in (O, \vec{u})\}$$
   b. Montrer que φ est une bijection et que $\varphi^{-1} = \varphi$ et déterminer l'image du cercle $\mathcal{C}(O, r)$ par φ.

2. Dans cette question, on pose $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   a. Écrire z' sous forme trigonométrique.
   b. Déterminer le lieu du point M' lorsque θ parcourt $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   c. Soient les deux points $A'(-i)$ et $N(\bar{z})$.
   Montrer que :

$$\frac{z' - i}{\bar{z} + i} = \frac{-1}{|z - i|^2}$$

Puis en déduire que les droites (AM′) et (A’N) sont parallèles. Expliquer comment construire le point M’ connaissant la position du point M.

Partie B

Soit n un élément de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On considère dans $\mathbb{C}$ l’équation :

$$(E) \quad (z - i)^n = (iz)^n.$$

1. Montrer que les solutions de l’équation (E) sont les nombres :

$$z_k = \frac{1}{2}(i - \tan\theta_k) \quad \text{avec} \quad \theta_k = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad k \in [\![0, n-1]\!]$$

2. On suppose dans cette question que $n = 4p + 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
   On pose $P(z) = (z - i)^n - (iz)^n$.
   a. Montrer que :
   $$P(z) = (1 - i)\prod_{k=0}^{4p}(z - z_k).$$
   b. En déduire que :
   $$\prod_{k=0}^{4p} z_k = \frac{i - 1}{2}.$$
   c. Prouver que :
   $$\prod_{k=0}^{4p} \frac{1}{\cos\theta_k} = 2^{4p}\left(\sin\left(\frac{3(4p+1)\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3(4p+1)\pi}{4}\right)\right).$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie **A**

1. a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que le point de C d'abscisse 0 est un point d'inflexion.

c. Construire C et la tangente à C en son point d'abscisse 0.

2. Soit λ un réel positif. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par les droites $x = 0, x = \lambda, y = 1$ et la courbe C. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I que l'on précisera. On appelle g la réciproque de f.

b. Justifier la dérivabilité de g sur I.

c. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - f^2(x)$. Donner $g'(x), \forall x \in I$.

4. Déterminer $g(x)$ pour $x \in I$ et en déduire la valeur de :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 - x^2}.$$

Partie **B**

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0$, on pose $I_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n \, dt$ (Rem. $[f(t)]^0 = 1$)

1. a. Justifier l'existence de $I_n(x)$ puis calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0$, on a :

$$I_{n+2}(x) = I_n(x) - \frac{1}{n+1}\left(f(x)\right)^{n+1}.$$

c. En déduire alors que $\forall p \geq 1, \forall x \geq 0$, on a :

$$I_{2p}(x) = x - \left[f(x) + \frac{1}{3}(f(x))^3 + \cdots + \frac{1}{2p-1}(f(x))^{2p-1}\right]$$

$$I_{2p+1}(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}(f(x))^2 + \cdots + \frac{1}{2p}(f(x))^{2p}\right]$$

2. a. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0$, on a : $0 \leq I_{2p}(x) \leq x[f(x)]^{2p}$.

b. En déduire que la suite $\left(I_{2p}(x)\right)$ est convergente pour tout réel $x \geq 0$ et calculer sa limite.

c. En utilisant les questions précédentes, calculer :

$$\lim_{p \to +\infty} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2p-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1}\right].$$

Sujet 20

Ex1 : Homothéties – Suites numériques
Ex2 : Équations différentielles
Ex3 : Exponentielle – Calcul d'aires
Ex4 : Similitudes directes - Coniques

« Celui qui combat peut perdre, mais celui qui ne combat pas a déjà perdu. » (Bertolt Brecht)

Exercice **1** (ingénierie inédite)

Soit f l'application du plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $12z' = 5z - i\bar{z} + 12 + 36i$.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x', y' sont des réels. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2. Montrer que f admet un unique point invariant Ω.
3. Soit h_1 et h_2 les homothéties de même centre Ω et de rapports respectifs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.
   a. Déterminer l'ensemble D_1 des points M du plan tels que :
   $$h_1(M) = f(M).$$
   b. Déterminer l'ensemble D_2 des points M du plan tels que :
   $$h_2(M) = f(M).$$
   c. Déterminer un point A sur D_1 et un point B sur D_2 tels que le triplet $(\Omega;\ \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ soit un repère orthonormé direct du plan.
4. a. Déterminer l'expression analytique de f dans le nouveau repère $(\Omega;\ \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.
   b. Montrer que pour tous points M, N du plan, on a :
   $$d(f(M), f(N)) \leq \frac{1}{2} d(M, N)$$
   où $d(X, Y) = XY$ désigne la distance entre les points X et Y.
   c. On se donne un point fixé M_0 et on définit les points M_n par la relation de récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M_{n+1} = f(M_n).$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ d(\Omega, M_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d(\Omega, M_0)$.

d. Quelle est la limite de la suite de terme général $d(\Omega, M_n)$?

5. On définit les deux suites numériques u et v par les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5}{12}u_n - \dfrac{1}{12}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 6 \\ v_{n+1} = -\dfrac{1}{12}u_n + \dfrac{5}{12}v_n + 3 \end{cases}$$

Étudier la convergence des suites u et v.

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. On désigne par a un réel et par u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = e^{ax}$.

On considère l'équation (E) : $y'' - 2ay' + a^2y = f.u$.

1. Soit y une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que y est solution de (E) si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left(\frac{y}{u}\right)' = F + k.$$

2. En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto e^{ax}\int_0^x F(t)\,dt + kxe^{ax} + \alpha e^{ax} \qquad (k, \alpha \text{ réels}).$$

3. Application
   Résoudre les équations différentielles suivantes :
   - $y'' - 2y' + y = e^{2x}$
   - $y'' - 4y' + 4y = 2x + 1$
   - $y'' + 2y' + y = e^{-x}\sin x$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (e^{-x} - 1)^2$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$du plan (unité : 2cm).

1. a. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Tracer (*C*).
   b. Calculer, en cm², l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (*C*) et les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.
3. a. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b. Tracer dans le même repère la courbe (*C'*) de la fonction réciproque f^{-1} de f.
   c. Calculer en cm², l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (*C*), (*C'*) et les droites d'équations : $x = 1$ et $y = 1$.
4. a. Montrer que : $\forall x \in [0, 1[$, $f^{-1}(x) = -\ln(1 - \sqrt{x})$.
   b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$ et déterminer la dérivée $(f^{-1})'(x)$.

5. On pose $I_\alpha = \int_\alpha^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx$ où α est un réel de $]0, 1[$.
   a. Montrer que $I_\alpha = 2\ln 2 - 2f^{-1}(\alpha)$.
   b. Calculer $\lim_{\alpha \to 0} I_\alpha$.

Exercice 4

Soit ABCD un losange tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ dans le plan orienté. On suppose que $AB \geq 6$ (en cm). Soit R la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [AD] et [AC]. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle BCD et O' le centre du cercle circonscrit au triangle ABD.

Partie A

1. Soit $f = S_{DA} \circ R$.
   a. Déterminer la droite Δ telle que $R = S_{DA} \circ S_\Delta$.
   b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. Soit $g = R \circ S_{BC}$.
   a. Déterminer $g(B)$ et $g(C)$.
   b. Montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale.
   c. Déterminer la nature de g et donner sa forme réduite.
3. On désigne par h l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{2}$, et on pose $S = R \circ h$. Soient $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les cercles circonscrits respectivement aux triangles BCD et DKL. Soit E le point diamétralement opposé à D sur le cercle $(\mathcal{C})$.
   a. Déterminer $S(B)$, $S(C)$ et $S(E)$.
   b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de S.
   c. Montrer que $(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $[DO']$.

Partie **B**

On désigne par (Γ) l'ellipse passant par I et de foyers D et B et par (Γ') l'ellipse passant par I et de foyers D et A. Soit B' le point de la demi-droite $[O'I)$ tel que IB' = IB.

1. a. Montrer que le réel DB' est le grand axe pour chacune des deux ellipses (Γ) et (Γ').
   b. Construire les sommets de (Γ) et (Γ').
2. Montrer que si M est un point de l'ellipse (Γ) alors R(M) est un point de l'ellipse (Γ').
3. a. Montrer que si M est commun à (Γ) et (Γ') alors M appartient à la droite (DI).
   c. Construire alors le deuxième point, noté I', d'intersection de (Γ) et (Γ').

Un jeune homme se présente à la commission chargée du recrutement dans l'armée.
L'officier lui demande :
-Comment tu t'appelles ?
-Sou-Sou-Sou-ley-ley-mane ou-ou-ould Mo-Mo-Mo-ha-ha-med.
Tu es bègue ?
-Non, mon père l'était, mais l'agent de l'état civil était bêtement précis dans son travail.

Sujet 21

Ex1 : Arithmétique
Ex2 : Nombres complexes
Ex3 : Exponentielle – Fonction intégrale

« La culture, c'est comme la confiture, moins on en a, plus on l'étale. »
(Françoise Sagan)

Exercice 1

Soit a un entier naturel strictement supérieur à 1 et p un entier naturel premier.

1. a. Montrer que pour tous entiers x et y, on a :
$$\begin{cases} p \wedge x = 1 \\ p \wedge y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \ p \wedge (xy) = 1$$
   b. En déduire que si $p > a$ alors $p \wedge (a!) = 1$.
   c. Quels sont les entiers premiers qui divisent $(a!)$?
2. On suppose dans cette question que $p \leq a$ et on cherche à déterminer le plus grand entier α tel que p^{α} divise $(a!)$ (α est appelé valuation p-adique de $(a!)$).
   a. Montrer que les facteurs de $(a!)$ divisibles par p sont les entiers : p, $2p$, $3p$, ..., qp où q est le quotient de la division euclidienne de a par p.
   b. Vérifier que le produit de tous ces facteurs est $\lambda = (q!)p^{q}$ et que λ divise $(a!)$.
   c. Vérifier que :
   → Si $p > q$ alors $\alpha = q$;
   → Si $p \leq q$ et si q_1 est le quotient de q par p alors p^{q+q_1} divise l'entier $(a!)$.
3. On prend $a = 423$ et $p = 7$.
   En appliquant les résultats de la question 2., déterminer la valuation 7-adique de $(423!)$ c'est-à-dire le plus grand entier α tel que 7^{α} divise $(423!)$.

Exercice 2

Soit l'équation (E) : $(z + j)^n - (z + j^2)^n = 0$; $j = e^{\frac{2i\pi}{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Vérifier que :

$$\frac{z + j}{z + j^2} = u \text{ et } u \neq 1 \Leftrightarrow z = -j\frac{uj - 1}{u - 1}$$

   b. Montrer que z est solution de (E) signifie il existe k de $\{1, 2, 3; \dots, n\}$ tel que : $\frac{z+j}{z+j^2} = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, en déduire que les solutions de (E) sont :

$$z_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad \text{avec } 1 \leq k \leq n - 1$$

2. On suppose que $n = 3p$; $p \in \mathbb{N}^*$.

   a. Calculer z_p ; en déduire que :

$$(1 + j)^{3p} = (1 + j^2)^{3p} = (-1)^p$$

   b. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer :

$$(1 + j)^{3p} \quad \text{et} \quad (1 + j^2)^{3p}$$

   En déduire que :

$$2(-1)^p = 2\sum_{k=0}^{p} C_{3p}^{3k} - \sum_{k=0}^{p-1} C_{3p}^{3k+1} - \sum_{k=0}^{p-1} C_{3p}^{3k+2}$$

   (On pourra remarquer que $1 + j + j^2 = 0$)

   c. En remarquant que $2^{3p} = (1 + 1)^{3p}$ et en utilisant la question 2.b, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p} C_{3p}^{3k} = \frac{2^{3p} + 2(-1)^p}{3}$$

   d. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{C_{3p}^{0} + C_{3p}^{3} + \cdots + C_{3p}^{3p}}{2^{3p}} = \frac{1}{3}$$

Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité graphique 2 cm).

1. Montrer que f est paire.
2. Dresser le tableau de variation de f. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.
3. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale :

$$\mathcal{A} = 4\int_{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}^{0} f(t)dt.$$

Partie B

1. Montrer que f possède des primitives sur $[0, +\infty[$. Soit F une de ces primitives.
2. Soit la fonction :

$$G : \begin{cases} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\ln(\tan x)}^{0} f(t)dt \end{cases}$$

   a. Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{e^t}{1+e^{2t}}$.

   b. Calculer $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $G'(x)$ pour tout réel x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   c. Prouver que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, G(x) = \frac{\pi}{4} - x$.

3. Trouver enfin la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Partie C

Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle J.
2. Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$, où g^{-1} est la réciproque de g.
3. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.
4. Trouver le réel a de $\mathbb{R}^+$ tel que $f(a) = \frac{1}{e}$.

Partie **D**

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction H_n définie par :

$$H_n(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{f(x)} (1 + \ln t)^n dt.$$

1. Justifier que H_n est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2. Calculer $H_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} H_1(x)$.
3. a. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$$H_{n+1}(x) = f(x)\big[1 + \ln\big(f(x)\big)\big]^{n+1} - (n+1)H_n(x).$$
   b. Montrer par récurrence sur n que la fonction H_n admet en $+\infty$ une limite finie non nulle L_n.
   c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $L_n = (-1)^{n-1} n! \frac{1}{e}$.
4. Montrer que H_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ H_n'(x) = f'(x)\big[1 + \ln\big(f(x)\big)\big]^n.$$
5. Discuter, suivant n, le tableau de variations de H_n (on ne demande pas de calculer $H_n(0)$).

Lors d'un grand jeu télévisé, les trois concurrents se trouvent être un ingénieur, un physicien et un mathématicien. Ils ont une épreuve à réaliser. Cette épreuve consiste à construire une clôture tout autour d'un troupeau de moutons en utilisant aussi peu de matériel que possible.
L'ingénieur fait regrouper le troupeau dans un cercle, puis décide de construire une barrière tout autour.
Le physicien construit une clôture d'un diamètre infini et tente de relier les bouts de la clôture entre eux jusqu'au moment où tout le troupeau peut encore tenir dans le cercle.
Voyant ça, le mathématicien construit une clôture autour de lui-même et se définit comme étant à l'extérieur.

Sujet 22

Ex1 : Nombres complexes
Ex2 : Arithmétique
Ex3 : Isométries du plan
Ex4 : Calcul intégral
Ex5 : Probabilités

Madi-kaama , le socrate soninké: « Sere be ga da keme debe tera, a do sere be ga da keme kitaabe xaara kun lawa massalanŋa do me » signifie : « celui qui a parcouru cent villages et celui qui a lu cent livres peuvent discuter ensemble ».

Exercice 1

Soit p un entier naturel non nul et l'équation (E_p) d'inconnue z :

$$(E_p): \quad pz^p = z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1, \quad \text{c'est à dire} \quad pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k$$

On rappelle que pour tous nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}$$

1. Dans cette question, on se demande si (E_p) peut admettre une solution de module strictement supérieur à 1. Soit z une solution (E_p) de module $r > 1$.
   a. Montrer que : $p \times r^p(r-1) \leq r^p - 1$
   b. Soit f la fonction numérique définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = px^{p+1} - (p+1)x^p + 1$.
   Étudier les variations de f.
   c. En déduire que l'on ne peut pas avoir $f(r) \leq 0$. Conclure.
2. Soit $e^{i\theta}$ une solution de (E_p) de module 1, autre que 1.
   a. Justifier l'égalité :

$$e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

   b. En déduire que $p = -1$. Conclure.

Exercice 2

On souhaite montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 1$. Supposons qu'il n'y en a qu'un nombre fini : $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ et considérons p un diviseur premier de $N = M^2 + 1$ où $M = p_1 . p_2 \dots p_n$.

1. Vérifier que $p = 2$ ou $p \equiv -1\ [4]$.
2. Montrer que N admet au moins un diviseur premier p tel que $p \equiv -1\ [4]$.
3. a. Si $p \equiv -1\ [4]$, on peut écrire $p = 4m + 3$. Montrer que :

$$M^{p-1} - 1 = M^2(M^2 - 1)(M^2 + 1)\left(\sum_{k=0}^{m-1} M^{4k}\right) + M^2 - 1.$$

   b. Montrer que p divise $M^2 - 1$.

   c. En déduire que $p = 2$ puis conclure.

Exercice 3

Dans la plan orienté on considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Les points J et K les milieux respectifs de [AD] et [CD] et soit E un point tel que DBE soit un triangle équilatéral direct.

1. Soit R l'unique déplacement qui envoie B sur A et A sur D. Caractériser R.
2. Soit $g = R_{\left(B, \frac{\pi}{6}\right)} \circ R_{\left(E, \frac{\pi}{3}\right)}$. Déterminer g(D).

   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.
3. Soit $f = R_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)}$. On pose $t = gof^{-1}$.

   a. Déterminer t(A) puis caractériser t. Soit M un point n'appartenant pas (AD). On pose $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$.

   b. Montrer que le quadrilatère ABM_2M_1 est un parallélogramme.

   c. En déduire qu'il existe un unique déplacement qui transforme A en M_1 et D en M_2.

4. Soit $h = t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(AC)}$.
   Déterminer h(A) et h(D) puis montrer que h est une symétrie glissée dont on donnera la forme réduite.
5. Soit M_0 un point du plan. On considère la suite des points (M_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = h(M_n)$.
   a. Montrer par récurrence que $\overrightarrow{M_0M_{2n}} = n\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire que pour tout entier n, le point M_{2n+1} appartient à une droite fixe que l'on déterminera.

Exercice 4

Pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, on pose :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\,dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\,dt \quad \text{où } k \in \mathbb{N}.$$

1. Établir l'inégalité suivante : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$.
2. Établir l'inégalité suivante : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k.$$
4. Déduire des résultats précédents que :
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{J_k}{I_k} = 0$$
5. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$:
$$I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1)J_{k-1}\,.$$
6. En déduire que pour tout entier $k \geq 1$:
$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}\,.$$
7. En déduire que :
$$\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux événements suivants :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une blanche ».

1. a. Calculer la probabilité de l'événement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».

   b. Calculer la probabilité de l'événement : « On obtient exactement une boule blanche ».

   c. En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont données par :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}, \qquad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad p(B) = \frac{n+1}{2^n}.$$

2. Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si, et seulement si :

$$2^{n-1} = n + 1.$$

3. Soit (u_n) la suite définie, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux, par :

$$u_n = 2^{n-1} - (n + 1).$$

Calculer u_2, u_3, u_4.

Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

Le professeur demande à Toto :
- Toto 3 et 3 ça fait quoi ?
- Match nul, monsieur !

Sujet 23

Ex1 : Transformations dans le plan
Ex2 : Calcul intégral
Ex3 : Arithmétique

« Nul ne peut atteindre l'aube sans passer par le chemin de la nuit. »

(Khalil Gibran)

Exercice 1

Dans tout l'exercice, le plan est supposé muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Partie A

Soit a un paramètre réel et T_a l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que l'on ait $z' = bz$ où b est le nombre complexe défini par : $b = \frac{1}{2} + ia$.

1. Prouver que T_a est une similitude directe. Donner son centre et son rapport.
2. Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a pour laquelle T_a est une homothétie. Déterminer les éléments caractéristiques de cette homothétie.
3. Montrer qu'il existe deux valeurs a_1 et a_2 du paramètre a pour lesquelles T_{a_1} et T_{a_2} sont des isométries.
   Vérifier que : $T_{a_1} = T_{a_2}^{-1}$. On pose : $R = T_{a_1} = T_{a_2}^{-1}$.
4. Montrer que R et R^{-1} laissent globalement invariant tout triangle équilatéral centré en O.

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = i$.
   On désigne par I, J et K les points dont les affixes sont les solutions de cette équation, I et J d'ordonnées positives et K d'ordonnée négative. Soit I_1, J_1 et K_1 les images respectives de I, J et K par T_a.
2. Donner les affixes des points I_1, J_1 et K_1 en fonction de a. En déduire que $I_1 \in (JK), J_1 \in (IK)$ et $K_1 \in (IJ)$ et cela pour toute valeur de a.

3. Montrer que si a décrit $\mathbb{R}$ alors le milieu du segment $[J_1K_1]$ décrit une droite que l'on déterminera.
4. Soit I_2 l'image de I_1 par T_a.
   a. Montrer que les coordonnées de I_2 sont : $\begin{cases} x = -a \\ y = a^2 - \frac{1}{4} \end{cases}$
   b. Reconnaître alors l'ensemble Σ des points I_2 quand le paramètre a décrit $\mathbb{R}$.
   c. Montrer que la dérivée $\dfrac{d\left(\overrightarrow{OI_2}\right)}{da}$ du vecteur $\overrightarrow{OI_2}$ par rapport à a et le vecteur $\overrightarrow{J_1K_1}$ sont colinéaires et que la droite (J_1K_1) est tangente à Σ.

Partie **C**

On fixe a et on pose pour n entier : $T_a^0 = Id$ et $T_a^{n+1} = T_a \circ T_a^n$.
Soit D le point de coordonnées $(0, -1)$ et on pose $D_n = T_a^n(D)$.

1. Calculer l'affixe z_n de D_n en fonction de b et prouver que :
$$z_n = \left(\frac{-1}{2\cos\mu}\right)^n e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+n\mu\right)}$$
   où μ est une mesure de l'angle de la similitude T_a.
   Quelles sont les valeurs de μ pour lesquelles la suite $(|z_n|)$ est décroissante ?
2. Calculer :
$$\left\|\overrightarrow{D_nD_{n+1}}\right\| \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{p=0}^{n} \left\|\overrightarrow{D_pD_{p+1}}\right\|$$
3. Comment faut-il choisir μ pour que la suite (S_n) admette une limite finie quand n tend vers $+\infty$? Donner la valeur de cette limite dans le cas où $\mu = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice **2**

Partie **A**

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}, & x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On admet que f' est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Justifier l'existence d'un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall (a, b) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad |f(b) - f(a)| \leq M \times |b - a|.$$

Partie B

Pour tous entiers n et $p \geq 1$, on pose :

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(nx)dx \quad \text{et} \quad \alpha_{n,p} = \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k\pi}{2p}\right) \int_{\frac{k\pi}{p}}^{\frac{(k+1)\pi}{p}} \sin(nx)\, dx.$$

1. Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\alpha_n - \alpha_{n,p}\right| \leq \frac{M\pi^2}{4p}.$$

2. Soit $p \geq 1$ fixé. Après avoir calculé la quantité $\int_{\frac{k\pi}{p}}^{\frac{(k+1)\pi}{p}} \sin(nx)\, dx$, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_{n,p} = 0.$$

3. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, il existe un entier N_0 tel que l'on ait :

$$n \geq N_0 \implies |\alpha_n| \leq \frac{M\pi^2}{2p}.$$

(On pourra utiliser l'inégalité: $|\alpha_n| \leq \left|\alpha_n - \alpha_{n,p}\right| + \left|\alpha_{n,p}\right|$).

Partie C

On pose pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{x} dx.$$

1. Justifier l'existence de I_n et J_n.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$ (Utiliser les résultats de la partie B).

3. a. Exprimer la différence $I_n - I_{n-2}$ en fonction de $n \geq 2$.

   b. En déduire le calcul de I_{2k+1}.

   c. Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} I_{2k+1}$.

4. En utilisant un changement de variable affine, montrer que :

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

   Donner une interprétation géométrique de cette limite.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{Z} - \{-2001, 2\}$, on pose : $g(n) = \frac{n+2001}{n-2}$.

1. a. Montrer que : $(n-2)\wedge(n+2001) = (n-2)\wedge 2003$.

   b. Vérifier que 2003 est un nombre premier.

   c. En déduire les valeurs possibles de $(n-2)\wedge(n+2001)$.

   d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que :

$$(n-2)\wedge(n+2001) = 2003.$$

2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $g(n) \in \mathbb{Z}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $p \neq q$ et $p \wedge q = 1$.

   a. Montrer que $p^2 \wedge (p^2 - q^2) = 1$.

   b. Montrer que : $g(n) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow n = 2 + \frac{2003q^2}{p^2-q^2}$.

   c. Déterminer p, q et n pour que : $g(n) = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ et $p \wedge q = 1$.

Sujet 24	Ex1 : Suites – Nombres complexes Ex2 : Fonction logarithme Ex3 : Calcul intégral - Coniques

« Les hommes naissent égaux, dès le lendemain, ils ne le sont plus par l'ambition, le travail et la persévérance. » (Jules Renard, modifié)

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. On considère la suite numérique (H_n) définie par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

1. Montrer que les suites (H_n) et $\left(H_n + \frac{1}{n}\right)$ sont adjacentes.
2. Pour tout réel x, on pose : $G_n(x) = i[(x - i)^{2n+1} - (x + i)^{2n+1}]$
   a. Montrer que :
   $$G_n(x) = 2(2n + 1)x^{2n} - 2C_{2n+1}^{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + 2(-1)^{n-p}C_{2n+1}^{2p}x^{2p} + \cdots + 2(-1)^n$$
   b. Montrer que les solutions de l'équation $G_n(x) = 0$ s'écrivent sous la forme :
   $$x_k = -\cot\left(\frac{k\pi}{2n + 1}\right) \quad \text{avec } k \in [\![1, 2n]\!]$$
   c. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n - 1]\!], \; x_{2n-k} = -x_{k+1}$.
   d. En déduire que :
   $$G_n(x) = \lambda\left(\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n + 1}\right)\right)\right)$$
   où λ est un entier naturel.
3. En exploitant les questions 2.a. et 2.b., établir que :
$$\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n + 1}\right) = \frac{2n(2n - 1)}{6}$$
4. En utilisant la double inégalité que l'on admettra :
$$\cot^2(\theta) < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2(\theta) \quad \text{pour } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$
   montrer que :

$$\frac{\pi^2}{6} \times \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2} \leq H_n \leq \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{\pi^2}{6} \times \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2}$$

5. En déduire la limite de la suite (H_n).

Exercice 2

Pour tout réel $\alpha > 0$, on note f_α la fonction définie par :

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(\alpha x)}{x}.$$

$\mathcal{C}_\alpha$ est la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé.

Partie A

1. Étudier les variations de f_1 et tracer $\mathcal{C}_1$.
2. Étudier les variations de f_α et préciser les asymptotes de $\mathcal{C}_\alpha$ et l'intersection de $\mathcal{C}_\alpha$ avec l'axe des abscisses.
3. Calculer, en fonction de α, l'aire du domaine plan formé par les points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \leq x \leq \frac{e}{\alpha} \\ 0 \leq y \leq f_\alpha(x) \end{cases}$$

Partie B

1. Soit a un nombre réel strictement positif.
   Déterminer, selon les valeurs de a, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $a^x = x$.
2. En utilisant les variations de la fonction f_1, montrer qu'il existe une paire unique (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que $b^c = c^b$ avec $b < c$. Déterminer b et c.

Partie C

1. Soit α_1 et α_2 deux réels strictement positifs distincts et λ un réel différent de 1. Pour tout réel $x > 0$, on désigne par M_1 et M_2 les points de $\mathcal{C}_{\alpha_1}$ et $\mathcal{C}_{\alpha_2}$ de même abscisse x. Soit M le barycentre du système $\{(M_1, 1), (M_2, -\lambda)\}$.
   Montrer que le point M décrit l'une des courbes $\mathcal{C}_\alpha$ lorsque x décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Soit t un réel strictement positif.
   a. Écrire l'équation de la tangente T_α à la courbe $\mathcal{C}_\alpha$ en son point d'abscisse t.
   b. Montrer que si α varie, t restant fixe alors les droites T_α passant par un point fixe I_t.
   c. Déterminer l'ensemble H des points I_t quand t parcourt l'intervalle $]0, +\infty[$. Construire H.

Exercice 3

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie **A**

Soit la fonction définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. $(C') = S_{(O; \vec{\imath})}(C)$ et $(\Gamma) = (C) \cup (C')$.
   a. Montrer que (Γ) a pour équation $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ). Tracer (Γ).
2. Soit $x \in [0, \pi]$ et $F(x) = \int_0^{1+\cos x} f(t)dt$.
   Montrer que F est dérivable sur $[0, \pi]$ et que :
   $$F'(x) = -2\sin^2 x.$$
3. a. Calculer $F(\pi)$ et en déduire l'expression de $F(x)$ pour tout nombre réel $x \in [0, \pi]$.
   b. En déduire l'aire de l'intérieur de (Γ).

Partie B

Soit θ un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et (E) l'équation définie par :

$$(\cos^2\theta)z^2 - (4\cos\theta)z + 13 - 9\cos^2\theta = 0$$

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On note z' et z'' les solutions de cette équation.
   b. Montrer que les points images M' et M'' des solutions sont situées sur la branche d'une hyperbole (H) que l'on

précisera. Préciser les sommets et les asymptotes de (H) puis représenter (H) dans un repère orthonormé.

2. Soient f et g deux fonctions telles que g est dérivable sur [a, b] et f est continue sur g([a, b]) et F une primitive de f.
   a. Montrer que $F \circ g$ est dérivable sur [a, b] et donner sa fonction dérivée.
   b. En déduire que $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)dx$.
   c. On pose $g(x) = e^x + e^{-x}$ pour tout $x \in [0, \ln 2]$ et pour tout $x \geq 2$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.
   Utiliser ce qui précède pour démontrer que :
$$\int_2^{\frac{5}{2}} \sqrt{x^2 - 4}dx = \int_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x})^2 dx$$
   d. Calculer l'aire du domaine limité par l'hyperbole (H) et les droites $x = 2$ et $x = \frac{5}{2}$.

102

Un prof de maths explique les limites à l'un de ses élèves ayant des difficultés certaines de compréhension. Il résout avec lui l'exercice suivant :

$$\lim_{x \to 8} \frac{1}{x - 8} = \infty$$

A la fin de l'exercice, il demande à notre cher élève s'il a tout compris : "Oh oui, monsieur! J'ai tout compris!"
N'y croyant qu'à moitié, il lui pose l'exercice suivant. Déterminer

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x - 5}$$

Et l'élève répond :

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x - 5} = 5$$

Sujet 25

Ex1 : Arithmétique
Ex2 : Fonction ln et exp – Fonction intégrale - Suites
Ex3 : Nombres complexes
Ex4 : Coniques

« Là où le pessimiste voit un intervalle semi-fermé, l'optimiste voit un intervalle semi-ouvert ! » (Littérature mathématique).

Exercice 1

1. Montrer que pour tout entier naturel a et pour tout entier naturel impair m, on a : $a + 1$ divise $a^m + 1$.
2. Soit q un entier naturel premier et $a \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que : $(a + 1)^q \equiv a^q + 1\ [q]$.
   b. En déduire que : $a^q \equiv a\ [q]$.
3. Pour tout entier naturel n tel que $n > 1$, on pose :
$$a_n = (n!)^2 + 1.$$
   a. Montrer que a_n est impair.
   b. Montrer que a_n admet un diviseur premier p tel que $p > n$.
   c. On suppose que p s'écrit sous la forme ①: $p = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre $1 + (n!)^{2(2k+1)}$ est divisible par a_n et que p divise $n! + (n!)^p$. (On pourra remarquer que $p - 1 = 2(2k + 1)$).
   d. En déduire que le nombre p ne peut s'écrire sous la forme ① ci-dessus.
4. Déduire de ce qui précède qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'origine O.

1. a. Étudier les variations de la fonction f. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $0 \leq f(x) \leq 1$.
   b. Tracer $\mathcal{C}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$g(x) = \ln(\tan x).$$

   a. Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.

   b. Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $h(0)$.

   c. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$2h'(x) = f(x).$$

   En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\int_0^x f(x)dx = 2h(x) - \frac{\pi}{2}.$$

Partie B

Oit n un entier naturel non nul et F_n la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$F_n(x) = \int_0^x f^n(t)dt.$$

1. a. Calculer $F_1(x)$ en fonction de $h(x)$ et montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}.$$

   b. Soit K la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $K(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$.

   Montrer que $K'(t) = f^2(t)$.

   c. Calculer alors $F_2(x)$ et montrer que $\lim_{x \to +\infty} F_2(x) = 1$.

2. a. Montrer que l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par F_n est l'intervalle $\left[0, \lim_{x \to +\infty} F_n(x)\right[$.

   b. Vérifier que pour tout réel t positif ou nul, on a $f(t) \leq 2e^{-t}$.

   En déduire, en utilisant A.1.a, que pour tout x de $[0, +\infty[$, on a : $F_n(x) \leq 2$ et que $\lim_{x \to +\infty} F_n(x)$ est finie.

   c. Vérifier que pour tout réel t positif ou nul, on a $f(t) \geq e^{-t}$.

   Montrer que pour tout réel x positif, on a :

$$\frac{1 - e^{-nx}}{n} \leq F_n(x).$$

En déduire que $\lim_{x \to +\infty} F_n(x)$ est non nul.

3. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \lim_{x \to +\infty} F_n(x)$.
   a. Donner la valeur de u_1 et la valeur de u_2.
   b. En remarquant que $4 - (e^t + e^{-t})^2 = -(e^t - e^{-t})^2$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, +\infty[$, on a :
   $$f^{n-1}(t)f'(t)K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t).$$
   c. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0, +\infty[$, on a :
   $$\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \frac{1}{n}K(x)f^n(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt.$$
   d. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $[0, +\infty[$, on a : $(n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x) = K(x)f^n(x)$.
   Montrer alors que :
   $$u_{n+2} = \frac{n}{n+1}u_n.$$

4. a. Soit n un entier naturel. Déterminer, en fonction de n, les deux termes u_{2n+1} et u_{2n+2}.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. Montrer que pour tout entier n, on a :
   $$\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1.$$
   En déduire la valeur de :
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}.$$
   d. Montrer alors que :
   $$\lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{2}{2n+1} \right] = \pi.$$

Exercice 3

On considère le polynôme d'indéterminée z :
$$P(z) = (z+i)^n - (z-i)^n.$$

On note S l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

1. Déterminer le degré du polynôme P.
2. Montrer que $z \in S \iff z \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $P(2i)$.
4. En supposant n impair, en déduire l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(4 + \cot^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \frac{3^n - 1}{2n}.$$

Exercice 4

On considère une parabole $\mathcal{P}$, de foyer F et de directrice (D).

Soit Δ une droite passant par F rencontrant $\mathcal{P}$ en M_1 et M_2.

1. Soit T_1 la tangente en M_1 à $\mathcal{P}$ et T_2 la tangente en M_2 à $\mathcal{P}$. Montrer que T_1 est perpendiculaire à T_2.
2. Montrer que T_1 et T_2 se coupent en un point I appartenant à la directrice (D).
3. Montrer que F est le projeté orthogonal de I sur Δ.

Moins on en sait, plus on gagne!
Preuve (la preuve utilise les deux lemmes évidents qui suivent) :
Lemme 1: la connaissance, c'est le pouvoir (puissance).
Lemme 2: le temps, c'est de l'argent.
Comme le sait tout ingénieur : Puissance = travail / temps
Et comme connaissance = pouvoir et temps = argent
on a alors connaissance = travail / argent.
D'où enfin :
Argent = travail / connaissance
Ainsi, quand la connaissance tends vers zéro, l'argent tends vers l'infini, quelque soit le travail effectué !!!

Sujet 26

Ex1 : Nombres complexes
Ex2 : Arithmétique
Ex3 : Fonction exponentielle – Intégrales et suites

« Ganndal ko ngesa, so remaaka, reenaaka soñetaake » proverbe peul signifiant « Le savoir est un champ, mais s'il n'est ni labouré, ni surveillé, il ne sera pas récolté. »

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $(1 + i)z^2 - (4\sqrt{2}\cos\alpha)z - 4i(1 + i) = 0$ où α est un paramètre réel de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On notera z_1 et z_2 les solutions telles que $\operatorname{Im}[(1 + i)z_1] \geq 0$ et M_1 et M_2 leurs points images. On précisera la valeur de α pour laquelle l'équation admet une solution double.

   b. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. a. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M_1 et l'ensemble Γ_2 des points M_2 lorsque le paramètre α décrit l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

   b. Déterminer l'ensemble Δ décrit par le point I, milieu du segment $[M_1M_2]$, lorsque α décrit $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. a. Montrer que lorsque $\alpha \neq 0$, la droite (M_1M_2) garde une direction fixe que l'on précisera.

   b. Montrer que les ensembles Γ_1 et Γ_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

4. a. Préciser l'angle de la rotation du plan de centre O qui envoie le point M_2 en M_1.

   b. Déterminer, en fonction de α, l'aire $S(\alpha)$ du triangle OM_1M_2. Pour quelle valeur de α l'aire $S(\alpha)$ est-elle maximale ?

Exercice 2

1. Soit p un nombre premier ($p \geq 5$) et $A = \{2, \dots, p-2\}$. Montrer que, pour tout $x \in A$, l'entier $x^2 - 1$ n'est pas divisible par l'entier p.
2. a. Soit $x \in A$; prouver qu'il existe un entier u tel que :
$$xu \equiv 1 \text{ [mod. p]}.$$
   b. En déduire l'existence d'un entier r de A, unique, distinct de x, tel que : $xr \equiv 1$ [mod. p].
   c. Établir alors que $2 \times \dots \times (p-2) \equiv 1$ [mod. p], puis que :
$$(p-1)! \equiv -1 \text{ [mod. p]}.$$
3. Ce résultat demeure-t-il vrai lorsque $p = 2$? $p = 3$?
4. Réciproquement, soit p un entier ($p \geq 2$) tel que :
$$(p-1)! \equiv -1 \text{ [mod. p]}.$$
En utilisant l'égalité de Bézout, montrer que p est premier.
5. En déduire le théorème de Wilson : « Un entier p est premier si, et seulement si, $(p-1)! + 1 \equiv 0$ [mod. p] » (On n'oubliera pas les cas $p = 2$ et $p = 3$).

Exercice 3

Partie A

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Variations de f
   a. Dresser le tableau de variations de f.
   b. Montrer que le point $I\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
2. Étude d'une aire
   a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
   b. Expliciter la réciproque $f^{-1}(x)$ pour $x \in]0, 1[$.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]0, 1[$. Vérifier que $\ln(1 + e^{-\alpha}) = -(\alpha + \ln \alpha)$.

3. Construire les deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$.
4. Soit m un réel strictement supérieur à α. On note $\mathcal{A}_m$ l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = \alpha$, $x = m$, $y = 0$ et $(\mathcal{C}_f)$.
   a. Calculer $\mathcal{A}_m$. (On pourra remarquer que $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$).
   b. Montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathcal{A}_m = -(\alpha + \ln \alpha)$.

Partie B

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{\alpha} f^n(t)dt$.

1. Vérifier que $I_1 = \alpha + \ln 2\alpha$.
2. a. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = f^2(x) - f(x).$$
   b. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x)f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x) - f^n(x).$$
3. a. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right).$$
   b. En déduire que $\forall n \geq 1$:
$$I_n = \alpha + \ln 2\alpha + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right).$$
4. a. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$$
   b. En déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right).$$
5. Pour $n \geq 1$, posons :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} I_k.$$
   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0$:

$$f(t) + f^2(t) + \cdots + f^n(t) = e^{-t} - \frac{(f(t))^{n+1}}{1 - f(t)}.$$

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = 1 - e^{-\alpha} - \int_0^{\alpha} \frac{(f(t))^{n+1}}{1 - f(t)} dt.$$

c. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq \int_0^{\alpha} \frac{(f(t))^{n+1}}{1 - f(t)} dt \leq 2I_{n+1}.$$

d. En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\alpha} \frac{(f(t))^{n+1}}{1 - f(t)} dt.$$

e. Calculer alors :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Et à chacun ses règles de calcul !!!

Sujet 27

Ex1 : Suites numériques
Ex2 : Calcul barycentrique
Ex3 : Coniques

« Si quelqu'un te jette une pierre, jette lui une fleur… Mais n'oublie pas le pot avec ! » (proverbe chinois).

Exercice 1 (ingénierie inédite)

A tout nombre réel strictement positif x, on associe les deux suites (w_n) et (t_n) définies par :

$$\begin{cases} w_0 = x \text{ et } w_{n+1} = \sqrt{w_n} \\ t_n = 2^n(w_n - 1) \end{cases}$$

1. Pour $x \geq 1$,
   a. Montrer que la suite (w_n) est minorée par 1 et décroissante.
   b. Établir que : $\forall n \geq 1,\ |w_n - 1| \leq \frac{1}{2}|w_{n-1} - 1|$.
   (On utilisera l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $k :\ t \longmapsto \sqrt{t}$ sur l'intervalle $[1, x]$)
   En déduire la limite de la suite (w_n).
2. Pour $0 < x \leq 1$, montrer que la suite (w_n) est croissante et convergente vers 1.
3. a. Exprimer (w_n) et (t_n) en fonction de (w_{n+1}) puis établir :
   $$\forall n \geq 0, \qquad t_n - t_{n+1} = 2^n(w_n - 1)^2.$$
   En déduire que la suite (t_n) est décroissante.
   b. Pour $x \geq 1$, établir que (t_n) est convergente.
   c. Soient (w_n) et (t_n) les deux suites associées à x et (w'_n) et (t'_n) les deux suites associées à $\frac{1}{x}$.
   Montrer que : ① $\forall n \geq 0,\ t'_n = \frac{-t_n}{w_n}$.
   En déduire que, dans le cas où $0 < x \leq 1$, la suite (t_n) est également convergente.
4. Pour tout réel strictement positif x, on note f(x) la limite de la suite (t_n).

a. Établir que : $f(1) = 0$ et $\forall x > 0, f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ (Utiliser ①)

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \frac{t_n}{w_n} \leq f(x) \leq 0$ ②.

(On pourra utiliser la monotonie de (t_n))

En déduire que : $\forall x > 0, \frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq x - 1$ ③.

c. Si les suites associées à x sont (w_n) et (t_n) et à y, (w'_n) et (t'_n) et à xy, (W_n) et (T_n), établir que :

$$W_n = w_n \times w'_n \quad \text{et} \quad T_n = w'_n \times t_n + t'_n.$$

En déduire que : $\forall x > 0, \forall y > 0, \ f(xy) = f(x) + f(y)$.

5. a. Soit x un réel tel que $x > 0$ et h un réel tel que $x + h > 0$.

Établir que :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

b. En utilisant ③, déterminer la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Reconnaître alors la fonction f.

Exercice 2

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère le système pondéré (A, α), (B, β), (C, γ) où A, B et C sont trois points distincts, α, β, γ des réels et l'application φ de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \alpha.MA^2 + \beta.MB^2 + \gamma.MC^2 \end{array}$$

1. On suppose $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. On désigne par G le barycentre du système pondéré (A, α), (B, β), (C, γ).

a. Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de $\varphi(G)$, MG, α, β, γ.

Donner alors les expressions de $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$.

b. Montrer que $\alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B) + \gamma\varphi(C) = 2(\alpha + \beta + \gamma)\,\varphi(G)$

c. Démontrer que : $\varphi(G) = \frac{\beta\gamma.BC^2 + \gamma\alpha.CA^2 + \alpha\beta.AB^2}{\alpha+\beta+\gamma}$.

d. On suppose A, B et C formant un triangle rectangle en A d'hypothèse $BC = 2a$ ($a > 0$), $\alpha = -4$, $\beta = \gamma = -1$.
Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\varphi(M) = -4a^2$.

2. On suppose que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.
   a. Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de $\varphi(M')$, où M' est un point quelconque du plan $\mathcal{P}$ distinct du point M.
   b. On suppose de plus que A, B et C sont alignés, et que $\alpha = \overline{BC}$, $\beta = \overline{CA}$, $\gamma = \overline{AB}$.
   Démontrer alors que : $\varphi(M) + \alpha\beta\gamma = 0$.
   c. On suppose, dans cette question, $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$, et les points A, B et C tels que $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$.
   Déterminer l'ensemble (Σ) des points M du plan tels que $\varphi(M) = k$, où k est un paramètre réel.

Exercice 3

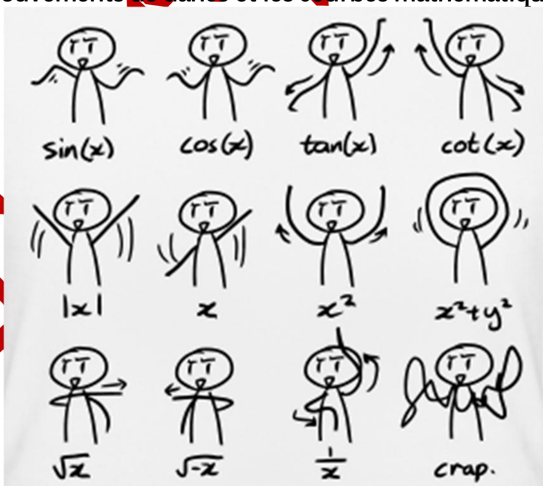
Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes principaux x'Ox et y'Oy.
On considère dans ce plan les points suivants A(1, 0), B(4, 0), C(5, 0), D(6, 0), E(3, 0) et F(−6, 0).
Faire une figure pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4.

1. Soit (Γ) le cercle variable tangent en C à x'Ox, et (γ) le cercle variable tangent en B à x'Ox.
   a. Montrer que, quand (Γ) varie, le point M de concours des tangentes à (Γ) issues de A et B, se trouve sur une ellipse $(\mathcal{E})$ dont on déterminera l'équation et l'aire.
   b. Montrer que, quand (γ) varie, le point N de concours des tangentes à (γ) issues de A et C se trouve sur une hyperbole $(\mathcal{H})$ dont on précisera l'équation.
2. Soit le cercle $(\mathcal{C}_D)$ de centre D et de rayon $R = 6$, et le cercle $(\mathcal{C}_E)$ de centre E et de rayon $R' = 1$. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle

variable, de centre M, tangent intérieurement à $(\mathcal{C}_\mathrm{D})$ et extérieurement à $(\mathcal{C}_\mathrm{E})$.
Montrer que lorsque $(\mathcal{C})$ varie le point M se trouve sur une conique dont on déterminera l'équation.

3. On considère les deux cercles $(\mathcal{C}_\mathrm{B})$ et $(\mathcal{C}_\mathrm{F})$ de centres respectifs B et F et de rayons respectifs $\mathrm{r} = 4$ et $\mathrm{r}' = 2$.
Soit $(\mathcal{Q})$ un cercle variable de centre M, tangent extérieurement à $(\mathcal{C}_\mathrm{B})$ et $(\mathcal{C}_\mathrm{F})$.
   a. Montrer que, lorsque $(\mathcal{Q})$ varie, le point M décrit une hyperbole $(\mathscr{h})$.
   b. Trouver l'équation réduite de $(\mathscr{h})$.
4. Soit les deux points $\mathrm{S}(\mathrm{a}, 0)$ et $\mathrm{T}(-\mathrm{a}, 0)$ où a est réel strictement positif et k un réel non nul donné.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que, dans le triangle MST, on ait : $(\tan \hat{\mathrm{S}}) \times (\tan \hat{\mathrm{T}}) = \mathrm{k}$.

Mouvements de dance et les courbes mathématiques



Sujet 28

Ex1 : Rotations et similitudes directes - Arithmétique
Ex2 : Équations différentielles
Ex3 : Exponentielle – Suites - Intégrales

« La confiance c'est comme une gomme, ça diminue après chaque erreur. »

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$. (unité graphique : 1 cm). On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.
2. Soit I le point d'affixe 1. On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ de centre O. La position initiale du point A est I.

   On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $(\mathcal{C})$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels). On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\frac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\frac{\pi}{5}$ cm).

   Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $(\mathcal{C})$ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.
2. On pose :

$$S_m = \underbrace{s_1 \circ s_1 \circ \cdots \circ s_1}_{m \text{ fois } s_1}$$

$$S'_n = \underbrace{s_2 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_2}_{n \text{ fois } s_2}$$

$$f = S'_n \circ S_m$$

Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3} + n\frac{6\pi}{5}$.

Exercice 2

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y = 0$ (1).
2. On considère la fonction g deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = x.g\left(\frac{1}{x}\right)$$

Montrer que f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f''(x)$ en fonction de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. On considère l'équation différentielle :

$$y'' = -\frac{1}{x}.y \qquad (2)$$

Montrer que la fonction g est solution de (2) si et seulement si la fonction f est solution de (1).

4. En déduire les solutions de (2) sur $]0, +\infty[$ puis sur $]-\infty, 0[$.
5. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Exercice 3

Partie A

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = (1 - x)e^x - 1$.
   a. Dresser le tableau de variations de g.
   b. Donner le signe de $g(x)$ pour tout réel x.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $u : [0, 1] \to \mathbb{R},\ t \longmapsto u(t) = tx$.

a. Calculer $u([0,1])$.

b. En déduire que $\forall c \in [0,x]$, il existe $\theta \in [0,1]$ tel que $c = \theta x$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit la fonction v définie par :

$$v : [0,x] \to \mathbb{R} ; \; t \mapsto \frac{(x-t)^2}{2}e^t.$$

a. Montrer qu'il existe $c \in [0,x]$ tel que $v(c) = \frac{1}{x}\int_0^x v(t)dt$ (On pourra penser à utiliser le théorème de la valeur moyenne).

b. En exploitant 2, 3.a, montrer qu'il existe $\theta \in [0,1]$ tel que :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t dt = \frac{x^3(1-\theta)^2}{2}e^{\theta x}.$$

c. Prouver que $0 \le \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t dt \le \frac{x}{2}e^{\theta x}$ puis calculer :

$$\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t dt\right).$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un R.O.N.

1. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.
3. a. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t dt = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

b. Vérifier que :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \left(\frac{x+1-e^x}{x^2}\right) \times \left(\frac{x}{e^x-1}\right).$$

c. Montrer que $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}$ (Utiliser partie A).

4. Dresser le tableau de variations de f (on suppose f dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = -\frac{1}{2}$).

Partie C

Soit F la fonction définie et dérivable sur $]e, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^{\ln x} f(t)dt.$$

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 3$ par $u_n = \int_n^{\ln(n)} F(t)dt$.

1. a. Montrer que $\forall x \in]e, +\infty[, F(x) \geq 0$.

   b. Vérifier que $\forall x \in]e, +\infty[,\ \frac{\ln x}{x-1} > 0$.

   c. Calculer $F'(x)$ puis déterminer le sens de variations de F.

2. a. Montrer que $\forall n \geq 3,\ \ln(n+1) < n$.

   b. Prouver que $\forall n \geq 3,\ u_n \leq 0$.

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

   a. Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} F(t)dt - \int_n^{n+1} F(t)dt$.

   b. A l'aide du théorème de la valeur moyenne, montrer qu'il existe :

      ① $\alpha_n \in [n, n+1]$ tel que $\displaystyle\int_n^{n+1} F(t)dt = F(\alpha_n)$

      ② $\beta_n \in [\ln(n), \ln(n+1)]$ tel que :

$$\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} F(t)dt = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) F(\beta_n)$$

   c. Prouver que $\beta_n < \alpha_n$.

   d. Montrer que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$.

   e. Montrer enfin que (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$.

4. a. Prouver que $\forall x \in]e, +\infty[,\ F(x) \leq \ln x$.

   b. Montrer que :

$$\forall n \geq 3, \quad \ln(n)\ln[\ln(n)] - \ln(n) - n\ln(n) + n \leq u_n$$

   c. Prouver enfin que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^2} = 0.$$

Sujet 29

Ex1 : Transformations du plan - coniques
Ex2 : Nombres complexes – Inégalité de Ptolémée
Ex3 : Calcul Intégral

« Ne craignez pas d'être lent, craignez seulement d'être à l'arrêt. »
(Proverbe chinois)

Exercice 1

On donne dans le plan orienté, un triangle rectangle OAB tel que : $OA = 2OB$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ (On prendra OA = 8 cm).

Soient J et K les milieux respectifs des segments [OA] et [OB]. On désigne par A' le symétrique de O par rapport à B, I le symétrique de J par rapport à O et H le projeté orthogonal de O sur (AB).

Partie A

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Préciser $r(A)$ et $r(B)$.
2. Soit $G = r(H)$.
   a. Montrer que G appartient à (IA') et que (OG) et (IA') sont perpendiculaires.
   b. Construire alors le point G.

Partie B

Soit s la similitude directe qui transforme O en A et B en O.

1. a. Déterminer le rapport et l'angle de s.
   b. Montrer que le centre de s est le point H.
   c. Montrer que $s(K) = J$; en déduire que : $(HK) \perp (HJ)$.
2. La perpendiculaire en A à (OA) coupe la droite (KH) en C.
   a. Montrer que $s(OA) = (AC)$.
   b. En déduire que $s(J) = C$.
   c. Montrer alors que $HC = OA = AC$.

Partie C

Soit $h = s \circ r^{-1}$. On désigne par L le symétrique de O par rapport au point I.

1. a. Déterminer $h(I)$ et $h(O)$.

b. Montrer que h est une homothétie et déterminer son rapport.

c. Montrer que h a pour centre le point L.

2. **a.** Déterminer l'image de G par h.

b. En déduire que G est le milieu de [LH].

c. Montrer que LHA' est un triangle rectangle.

Partie D

On désigne par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ les paraboles de même foyer H et de directrices respectives (OB) et (OA).

1. a. Montrer que $J \in \mathcal{P}$ et $K \in \mathcal{P}'$.
   b. Montrer que (JK) est une tangente commune à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
2. a. Montrer que le point C est un point commun à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
   b. Soit S le sommet de $\mathcal{P}'$. Montrer que $S \in \mathcal{P}$. Tracer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
3. Soit M un point du plan et M' son image par s.
   Montrer que $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $M' \in \mathcal{P}'$.

Exercice 2

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

1. En utilisant le fait que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = z\bar{z}$, montrer que :

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

et qu'on a l'égalité : $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$ si et seulement si :

$$\arg(z_1) = \arg(z_2)\ [2\pi].$$

2. Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts et non alignés.
   Montrer que :

$$AB \times CD + AD \times BC \geq AC \times BD$$

   et que $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$ si et seulement si les points A, B, C et D sont situés, dans cet ordre, sur un même cercle.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{3}$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

1. Étudier f et construire $(\mathcal{C})$.
2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi]$ vers un intervalle I que l'on précisera. Soit g sa réciproque.
   b. Étudier la continuité et la dérivabilité de g sur I, puis construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de g dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
3. a. Montrer que $(\mathcal{C})$ coupe la droite $\Delta : y = x$ en un seul point d'abscisse $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   b. Calculer, en fonction de x_0, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par les deux axes du repère et les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 \in]0, x_0[\\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

1. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{2n} < x_0 < U_{2n+1}$.
2. Montrer que $\forall x \in [0, \pi],\ |f(x) - x_0| \leq \frac{2}{3}|x - x_0|$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - x_0| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - x_0|$ puis que la suite (U_n) converge vers un réel que l'on déterminera.
4. Pour tout entier naturel n, on définit la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}(U_k - x_0)$$

   a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ (-1)^{k+1}(U_k - x_0) > 0$.
   b. Montrer que (S_n) est une suite strictement croissante.
   c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n| \leq 3|U_0 - x_0|$, et conclure à propos de la convergence de (S_n).

Partie C

Pour tout réel x de l'intervalle $]0,\pi[$, on pose :

$$F(x)=\int_0^{f(x)}\frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}\quad \text{et}\quad G(x)=\int_0^{f(x)}\frac{tdt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

1. **a.** Montrer que F et G sont définies et dérivables sur $]0,\pi[$, puis calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.

b. Exprimer alors $F(x)$ et $G(x)$ en fonction de x.

2. Pour tout réel α de l'intervalle $]0,1[$, on pose :

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}},\qquad J(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{tdt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}},$$

$$K(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

a. Calculer $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ en fonction de $g(\alpha)$ puis en déduire le calcul des limites suivantes :

$$\lim_{\alpha\to1^-} I(\alpha)\quad \text{et}\quad \lim_{\alpha\to1^-} J(\alpha).$$

b. Pour $x\in\left]-\frac{1}{3},1\right[$, on pose $\varphi(x)=x\sqrt{(1-x)(1+3x)}$.

Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\left]-\frac{1}{3},1\right[$, on ait :

$$\varphi'(x)=\frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{(1-x)(1+3x)}}.$$

En déduire $K(\alpha)$ en fonction de $I(\alpha)$, $J(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ puis calculer :

$$\lim_{\alpha\to1^-} K(\alpha).$$

3. Pour tout nombre réel α de l'intervalle $]0,1[$, on pose :

$$L(\alpha)=\int_0^{\alpha}\sqrt{(1-t)(1+3t)}\,dt.$$

Exprimer $L(\alpha)$ en fonction de $\varphi(\alpha)$, $J(\alpha)$ et $K(\alpha)$. En déduire :

$$\lim_{\alpha\to1^-} L(\alpha).$$

Sujet 30	Ex1 : Calcul intégral Ex2 : Arithmétique Ex3 : Fonctions Ex4 : Parabole Ex5 : Barycentre – Fonction scalaire de Leibniz

« La parole est comme l'eau, une fois versée tu ne peux plus la ramasser. »
(Proverbe burkinabé)

Exercice 1

1. Soit p et q deux nombres rationnels, avec $p \geq 0$. Pour tout $x \in [0, 1[$, on pose :
$$f_{p,q}(x) = \int_0^x t^p(1-t)^q dt.$$
   a. Justifier l'existence de $f_{p,q}(x)$.
   b. Déterminer la fonction dérivée de $f_{p,q}$.
   c. En se limitant à $p \geq 1$, montrer qu'il existe un triplet (a, b, c) de réels, dépendant du couple (p, q), tel que, pour tout x de $[0, 1[$:
$$af_{p,q}(x) + bf_{p-1,q-1}(x) = x^p(1-x)^q(cx-q).$$
   On distinguera les cas $q = 0$ et $q \neq 0$. Dans le second cas, on montrera qu'il existe une solution et une seule, à savoir : $a = (p+q)(1+p+q)$; $b = -pq$; $c = p+q$.
2. Pour $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de :
$$F_n(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\frac{t^n}{(1-t)^{n+6}}} dt$$
   dans laquelle n'intervient aucun signe d'intégration.

Exercice 2

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :
$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$, où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation : $14u + 39v = 1129$.

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation suivante : $14x + 39y = 1$.
Vérifier que le couple $(-25 ; 9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution particulière de l'équation suivante :

$$14u + 39v = 1129.$$

Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u ; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u ; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de (1) d'inconnue x :
$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.
Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.
On démontre : « Critère d'Eisenstein :
Si l'équation (E) : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admet une solution rationnelle irréductible $\frac{p}{q}$ alors p divise a_0 et q divise a_n».

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

Exercice 3

L'objet de l'exercice est la recherche des fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, telles que :

(I) : $\quad f(x+y)+x+y=(f(x)+x)(f(y)+y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

(II): $\quad f(1)+1=e$.

On suppose qu'il existe une fonction f vérifiant les propriétés (I) et (II).

1. En utilisant (I), dans le cas où $x=y$, montrer que :
   (III) : pour tout t réel, $f(t)+t \geq 0$.
2. Montrer que, s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0)+x_0=0$, alors, pour tout réel x, $f(x)+x=0$.
   Conclure en utilisant (II) et montrer que $f(0)=1$.
3. Montrer que :
   (IV) : quels que soient x réel et n entier naturel,
   $$f(nx)=(f(x)+x)^n-nx.$$
   Calculer $f(-x)-x$ et montrer que la propriété (IV) est vraie lorsque n est un entier négatif.
4. Soit q un entier relatif non nul. Calculer :
   $$f\left(\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{q}$$
   en fonction de q et e.
   En utilisant la propriété (IV), montrer que :
   (V) : quel que soit le rationnel x, $f(x)=e^x-x$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice (D).

1. On choisit un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que F a pour coordonnées (2 ; 0) et D pour équation $x=-2$.
   Écrire une équation cartésienne de la parabole $\mathcal{P}$.
2. Soit m un réel donné et T le point de la parabole $\mathcal{P}$ d'ordonnée m et d'abscisse x.
   a. Exprimer x en fonction de m.

b. Donner une équation de la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ en T en fonction de m.

c. Montrer que, si T et T' sont des points distincts de $\mathcal{P}$ d'ordonnées respectives m et m', les tangentes à $\mathcal{P}$ en T et T' sont sécantes : soit I leur point d'intersection ; déterminer les coordonnées de I en fonction de m et m'.

3. a. m décrivant $\mathbb{R}$, quel est l'ensemble des points I tels que les tangentes à $\mathcal{P}$, (IT) et (IT'), soient orthogonales ?

b. Montrer que si (IT) et (IT') sont orthogonales à (TT') et que, K et K' étant les projetés orthogonaux de T et T' sur la droite (D), on a : IK = IK' = IF.

En déduire que les points K et F sont symétriques par rapport à la droite (IT).

Exercice 5

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace ; x, y, z étant trois nombres réels dont la somme n'est pas nulle, on désigne par G le barycentre des points pondérés (A, x), (B, y), (C, z).

1. Démontrer la relation :

$$xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2 = (x + y + z)(xGA^2 + yGB^2 + zGC^2).$$

2. Déterminer l'ensemble des points G lorsque les nombres réels x, y, z varient de manière que :

$$xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2 = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z \neq 0.$$

Sujet 31

Ex1 : Calcul intégral
Ex2 : Isométries vectorielles
Ex3 : Équations différentielles

« Pourquoi s'en prendre à la flèche quand le tireur est présent. »

(Christian NZUZI LUKOKI, professeur congolais)

Exercice 1

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. On pose :

$$I = \int_a^b f^2(t)dt \quad , \quad J = \int_a^b g^2(t)dt \quad , \quad K = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

1. **a.** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Ix^2 + 2Kx + J \geq 0.$

   b. En déduire que : $|K| \leq \sqrt{IJ}.$

2. Application.

   Montrer que :

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + x + 1}dx \leq \frac{\sqrt{66}}{6}.$$

Partie B

Soit f une fonction numérique sur l'intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$) telle que :

$$\forall x, y \in [a, b], \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Soit α et β deux éléments de $[a, b]$ tels que $\alpha < \beta$.

1. **a.** Montrer que :

$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)dx + \int_\alpha^\beta f\left(\frac{x+\beta}{2}\right)dx = 2\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

   b. En déduire que :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha).$$

2. **a.** Montrer que : $\int_\alpha^\beta f(\alpha + \beta - x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$

b. En déduire que :

$$(\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

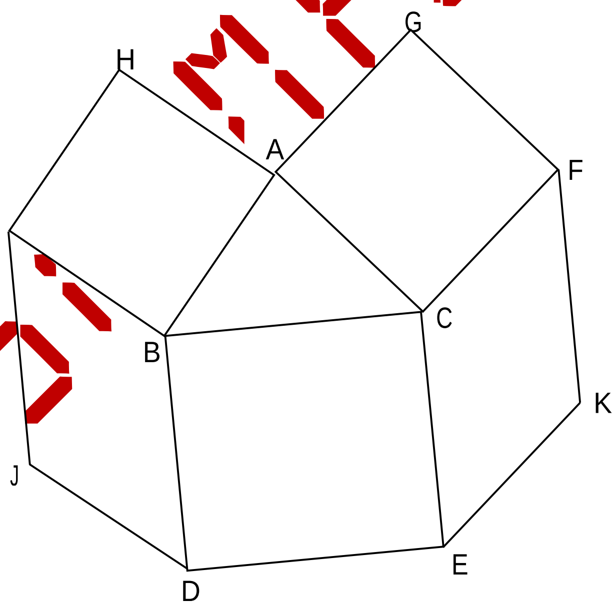
3. En déduire la double inégalité :

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Dans le cas où f est une fonction positive sur $[a,b]$, donner une interprétation géométrique de cette double inégalité.

Exercice 2

Sur les côtés[BC], [CA] et [AB] d'un triangle ABC, à l'extérieur de celui-ci, on construit les carrés BCED, ACFG et BAHI et les parallélogrammes IBDJ et FCEK. On suppose que les angles $(\widehat{\overrightarrow{AH};\ \overrightarrow{AB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{BC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AG}})$ ont pour mesure $\frac{\pi}{2}+k2\pi$.



On se propose de démontrer par trois méthodes différentes que le triangle AJK est isocèle et rectangle.

1. Première méthode : utilisation des nombres complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lequel les points B et C ont pour affixes respectives b et c.

a. Déterminer successivement les affixes des points H, I, D, J d'une part, G, F, E et K d'autre part.

b. Démontrer que le triangle AJK est rectangle et isocèle de sommet principal A.

2. Deuxième méthode : utilisation d'une rotation vectorielle

Soit φ la rotation vectorielle d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Soit O le centre du carré BCED.

a. Établir l'égalité $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{CF}$. Justifier que $\varphi(\overrightarrow{OE}) = \overrightarrow{OC}$ et que $\varphi(\overrightarrow{CF}) = \overrightarrow{CA}$. En déduire que $\varphi(\overrightarrow{OK}) = \overrightarrow{OA}$.

b. En écrivant $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$, démontrer que $\varphi(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OJ}$.

c. Déterminer $\varphi \circ \varphi$. En déduire que :

$$\overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OK} \text{ et } \varphi(\overrightarrow{OJ}) = -\overrightarrow{OA}.$$

d. En écrivant $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OA}$, démontrer que $\varphi(\overrightarrow{AJ}) = \overrightarrow{AK}$ et conclure.

3. Troisième méthode : utilisation de transformations ponctuelles

a. Soit r le quart de tour direct de centre B et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

- Prouver que $t \circ r$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Déterminer l'image de B par $t \circ r$ et en déduire le centre de $t \circ r$.
- Déterminer l'image de A par $t \circ r$ et donner la nature du triangle AOJ.

b. Soit t' la translation de vecteur $\overrightarrow{EC}$ et r' le quart de tour direct de centre C.

- Prouver que $r' \circ t'$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Déterminer l'image de E par $r' \circ t'$, puis le centre de $r' \circ t'$.

- Déterminer l'image de K par $r' \circ t'$ et en déduire la nature du triangle OKA.

c. A l'aide des résultats des questions a et b, prouver que AJK est un triangle rectangle isocèle.

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et a un réel donné. Soit l'équation différentielle :

$$(E):\ y' + ay = \frac{f}{u}$$

où u est la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = e^{ax}$.

1. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $(yu)' = f$.
2. En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$$x \mapsto e^{-ax}\int_0^x f(t)dt + \alpha e^{-ax}.$$

3. Résoudre les équations différentielles :
   $y' + 2y = e^{-2x}$
   $y' - y = (x^2 + 2x - 3)e^x$
   $y' + ay = e^{bx}$, où b est un paramètre réel non nul $(a + b \neq 0)$

Sujet 32

Ex1 : Isométries vectorielles
Ex2 : Fonction définie à l'aide d'une intégrale
Ex3 : Arithmétique

« Dans la vie il faut savoir compter... mais pas sur les autres. »

(Paul-Jean Toulet)

Exercice 1

On considère trois triangles équilatéraux OAB, OCD et OEF ayant le sommet O en commun. On suppose que les angles $(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OF}})$ ont pour mesure $\frac{\pi}{3}$. Soient P, Q et R les milieux respectifs des segments [BC], [DE] et [FA].

Cet exercice propose trois méthodes pour démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

Partie **A :** utilisation d'une transformation vectorielle

1. Établir les égalités vectorielles :
$$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{BA}$$
2. Soit φ la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   Démontrer que $\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PR}$ et conclure.

Partie **B :** utilisation de transformations ponctuelles

1. Faire une figure et placer les points P', Q' et R' tels que les quadrilatères BOCP', DCEQ' et FOAR' sont des parallélogrammes. Dans la suite de la partie B, on désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par $t_{\vec{w}}$ la translation de vecteur $\vec{w}$, $\vec{w}$ étant un vecteur donné.
2. On considère la transformation $f = r \circ t_{\overrightarrow{BO}}$.
   a. Prouver que f est une rotation dont on précisera l'angle.
   b. Déterminer l'image de B par f, puis le centre de f.
   c. Donner l'image de P' par f.
   d. Démontrer alors que P'D = P'A et $(\widehat{\overrightarrow{P'D}; \overrightarrow{P'A}}) = +\frac{\pi}{3}$.
3. On considère la transformation $g = t_{\overrightarrow{OA}} \circ r \circ t_{\overrightarrow{DO}}$.

a. Prouver que g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme D en A.
b. Vérifier que P' est le centre de g. (utiliser 2.d.)
c. Déterminer l'image Q' par g, puis la nature du triangle P'Q'R'.
d. A l'aide d'une homothétie bien choisie, prouver que le triangle PQR est équilatéral.

Partie **C** : utilisation de nombres complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O.
L'affixe de tout point M du plan sera noté z_{M}.

1. Exprimer z_{B} en fonction de z_{A}, z_{D} en fonction de z_{C} et z_{I} en fonction de z_{E}.
2. a. Déterminer les affixes $z_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{Q}}$ et z_{R}.
   b. Vérifier que $z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{P}} = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{\mathrm{Q}} - z_{\mathrm{P}})$.
   c. Conclure.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f de variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}} dt.$$

1. Montrer que pour réel x : $f(x) \leq e^{-x}$ et en déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Soit b un réel strictement positif. Montrer que :

$$\forall x \leq b, \ \ e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2} e^b . x^2$$

$$\forall x \geq -b, \ \ e^x - 1 - x \geq \frac{1}{2} e^{-b} . x^2$$

3. Soit a un nombre réel. On définit la fonction φ_{a} de variable réelle x par :

$$\begin{cases} \varphi_a(a) = 0 \\ \varphi_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}dt \quad \text{si } x \neq a \end{cases}$$

a. Soit $h > 0$ et x de $[a-h, a+h]$ et t de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Montrer que :

$$\frac{1}{2}e^{\frac{-h}{\cos^2 t}}\left(\frac{a-x}{\cos^2 t}\right)^2 + \frac{a-x}{\cos^2 t} \leq e^{\frac{a-x}{\cos^2 t}} - 1 \leq \frac{1}{2}e^{\frac{h}{\cos^2 t}}\left(\frac{a-x}{\cos^2 t}\right)^2 + \frac{a-x}{\cos^2 t}$$

b. En utilisant cette double inégalité, montrer que φ_a est continue en a.

c. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

4. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\int_0^x e^{-u^2}du = x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t}dt.$$

5. On pose pour tout x de $\mathbb{R}$: $g(x) = f(x^2)$.
Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du.$$

6. On pose pour tout x de $\mathbb{R}$: $h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$.
Calculer $h'(x)$. Que peut-on en déduire ?

7. Déduire de ce qui précède la valeur de :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Partie B

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.

2. Étudier les variations de F.

3. Construire la courbe $(\mathcal{C}_F)$ représentant F dans un repère orthonormé.

Exercice 3

On désigne par p un entier premier supérieur ou égal à 7. Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $\mathbf{n = p^4 - 1}$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru a -1 ou a 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que :
   $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$, puis que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes possibles de la division de p par l'entier 5, démontrer que 5 divise n.
4. a. Soient a, b et c trois entiers naturels. Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.
   b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.
5. Existe-t-il quinze nombres premiers p_1, p_2, ..., p_{15} supérieurs ou égaux a 7 tels que l'entier naturel $A = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

Sujet 33	Ex1 : Nombres complexes Ex2 : Arithmétique Ex3 : Calcul intégral - Suites Ex4 : Ellipse Ex5 : Probabilités

« Hamul ây nà, vandé lâjtéul a ko rav » : proverbe wolof qui signifie :
« Ne pas savoir est mauvais, mais ne pas demander est pire ».

Exercice 1

Soit v un nombre complexe. On cherche à résoudre l'équation

$$z - i\bar{z} = v \qquad (1)$$

où z est un complexe.

1. On pose $u = (1+i)/\sqrt{2}$. Calculer $|u|$, u^2 et $(\bar{u})^2$.
2. On suppose $v = 0$. Trouver toutes les solutions de (1).
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{Im}(z^2) - |z|^2 \leq 0$.
4. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution. Montrer que la partie réelle de v^2 est nulle et que l'on a $\mathrm{Im}(v^2) \leq 0$. En déduire que $v = |v|\bar{u}$.
5. On suppose que $v = |v|\bar{u}$.
   a. Montrer que $v/2$ est solution de (1).
   b. Soient z et z' des nombres complexes tels que :
   $$z' = z + (v/2).$$
   Montrer que z' est solution de (1) si et seulement si :
   $$z - i\bar{z} = 0.$$
   c. Résoudre l'équation (1).

Exercice 2

Soit a un entier naturel strictement supérieur à 1 et p un entier naturel premier.

1. a. Montrer que pour tous entiers x et y, on a :
$$\begin{cases} p \wedge x = 1 \\ p \wedge y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad p \wedge (xy) = 1$$
   b. En déduire que si $p > a$ alors $p \wedge (a!) = 1$.
   c. Quels sont les entiers premiers qui divisent $(a!)$?

2. On suppose dans cette question que $p \leq a$ et on cherche à déterminer le plus grand entier α tel que p^{α} divise $(a!)$ (α est appelé valuation p-adique de $(a!)$).
   a. Montrer que les facteurs de $(a!)$ divisibles par p sont les entiers : p, 2p, 3p, ..., qp où q est le quotient de la division euclidienne de a par p.
   b. Vérifier que le produit de tous ces facteurs est $\lambda = (q!)p^q$ et que λ divise $(a!)$.
   c. Vérifier que :
   → Si $p > q$ alors $\alpha = q$;
   → Si $p \leq q$ et si q_1 est le quotient de q par p alors p^{q+q_1} divise $(a!)$.
3. On prend $a = 423$ et $p = 7$.
   En appliquant les résultats de la question 2., déterminer la valuation 7-adique de $(423!)$ c'est-à-dire le plus grand entier α tel que 7^{α} divise $(423!)$.

Exercice 3

On considère la suite de terme général :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$$

où n est un entier naturel non nul.

1. Calculer I_1 au moyen d'une intégration par parties.
2. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.
   b. En déduire que (I_n) est convergente.
3. a. Montrer par le biais d'une intégration par parties que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

   b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{e^3}{n+4} \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+3}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$V_n = \frac{(-3)^n}{n!} \quad \text{et} \quad U_n = V_n I_n$$

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} = \frac{e^3}{3} V_{n+1} + U_n$.

   b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad U_n = -\frac{1}{3} + \frac{e^3}{3} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-3)^k}{k!}.$$

5. a. Montrer que : $\forall n \geq 3,\ |V_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|V_n|$.

   b. Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 3,\ |V_{n+1}| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} |V_3|$ puis déterminer la limite de V_n.

   c. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-3)^k}{k!} \right) = \frac{1}{e^3}.$$

Exercice 4

1. Soit une ellipse (E) de grand axe [AA′], de petit axe [BB′], de centre O et d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   Soit M un point de (E). Montrer que la somme des carrés des aires des triangles OMA et OMB est constante qu'on exprimera en fonction de a et b.
2. On suppose que l'ellipse (E) n'est pas un cercle.
   Montrer que la tangente T en un point M de l'ellipse (E) est perpendiculaire à la droite (OM), si et seulement si M est un sommet de (E).
3. On suppose que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv \alpha\ [2\pi]$.
   a. Exprimer OM^2 en fonction de a, b et α.

b. En déduire que si M et M’ sont deux points de (E) tels que $(\mathrm{OM}) \perp (\mathrm{OM}')$ alors :

$$\frac{1}{\mathrm{OM}^2} + \frac{1}{\mathrm{OM}'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

puis étudier la réciproque.

Exercice 5

I. On se donne les polynômes P et Q sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}, \qquad \text{où } n \geq 3$$

1. Exprimer $Q(x)$ comme fraction rationnelle, pour $x \neq 1$.
2. Utiliser $P(x)$ sous forme d’une fraction rationnelle en utilisant la dérivée de Q.

II. Application :

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$.

Un coureur s’entraîne sur un parcours comportant n haies, numérotées de 1 à n. Pour chaque nombre entiers k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de renverser la $k^{\text{ème}}$ haie est le nombre a.

Le coureur termine son parcours jusqu’à la nième haie quel que soit le nombre de haies renversées. Soit X l’aléa numérique défini par :

$$\begin{cases} X = n + 1 & \text{si aucune haie n'estrenversée} \\ X = k & \text{si } k \text{ est le numéro de la 1ère haie renversée} \end{cases}$$

1. Calculer en fonction de a et k la probabilité $p(X = k)$.
2. Préciser $p(X = 1)$ et $p(X = n + 1)$.
3. Calculer, en fonction de n et a, l’espérance mathématique de X.

Sujet 34	Ex1 : Probabilités – Calcul matriciel Ex2 : Fonction exponentielle Ex3 : Isométries du plan Ex4 : Nombres complexes

« Entraînement difficile, guerre facile. »

Exercice 1

Au départ, $5\ \%$ d'une population stable est malade. On suppose que d'une semaine sur l'autre :

* dans 10 % des cas, un individu est malade ou sain de façon équiprobable indépendamment de son état précédent ;
* dans 90 % des cas, si un individu était malade, il le reste avec une probabilité de $1/4$, et s'il était sain, il le reste avec une probabilité de $2/3$.

Pour tout entier naturel n, on note m_n la probabilité qu'un individu soit malade et s_n celle qu'il soit sain au bout de n semaines.

U_n est la matrice colonne des probabilités $U_n = \begin{pmatrix} m_n \\ s_n \end{pmatrix}$. Ainsi, on a la matrice colonne état initial : $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}95 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que pour tout entier n :
$$U_{n+1} = A \times U_n + C,$$
où $A = \begin{pmatrix} 9/40 & 9/30 \\ 27/40 & 18/30 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/20 \end{pmatrix}$.

2. Justifier que la matrice $B = \begin{pmatrix} 14/43 \\ 29/43 \end{pmatrix}$ vérifie $B = A \times B + C$.

3. On pose pour tout entier n : $V_n = U_n - B$.
Montrer que pour tout entier n : $V_{n+1} = A \times V_n$.
En déduire que pour tout entier n : $U_n = B + A^n \times V_0$.

4. Si au départ la population comptait 86 000 habitants, quel serait à long terme le nombre approximatif de personnes saines dans cette population.

Exercice 2

Soit la fonction g définie par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de g et en déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x - x - 1 \geq 0.$$
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   a. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   b. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. a. Montrer que f est continue en 0.
   b. Vérifier que pour tout $x \neq 0$ on a :
$$f(-x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et que} \quad \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 1.$$
   c. En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
4. a. Vérifier que pour tout $x \neq 0$, on a :
$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}.$$
   b. Dresser le tableau de variation de f.
   c. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
   d. Tracer $(\mathcal{C})$.
5. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
   b. Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de f^{-1}.
6. Pour tout naturel non nul n, on pose :
$$U_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right).$$
Montrer que la suite (U_n) est décroissante puis déterminer la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On désigne par O le milieu de [BC], par I le milieu de [AC] et par J le milieu de [AB].

1. Montrer qu'il existe un déplacement unique f qui transforme A en C et B en O.
2. a. Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle puis construire son centre D.
   b. Donner la nature du quadrilatère AODB.
3. On désigne par $R_C = \text{rot}_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}$, $R_A = \text{rot}_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$ et $T = t_{\overrightarrow{AC}}$. On pose $\varphi = R_C \circ T \circ R_A$.
   a. Déterminer $\varphi(A)$.
   b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ.
4. Soit $g = S_{(OJ)} \circ S_{(OI)}$ et $h = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(OJ)} \circ S_{(OI)}$.
   a. Caractériser g et h.
   b. On pose $M' = t_{\overrightarrow{BA}}(M)$ et $M'' = g(M)$ où M est un point quelconque du plan.
      Montrer que I est le milieu de [M'M'']
   c. En déduire l'ensemble des points M du plan tel que :

$$M'M'' = AB.$$

Exercice 4

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit l'équation (E): $z^2 - az + b = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On nommera z' et z'' les solutions de (E).

Partie **A**

Dans cette partie, on pose $a = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ et $b = 1$ avec $r \in [1, +\infty[$ et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a. Vérifier que $re^{i\theta}$ est une solution de (E).
   b. Trouver alors l'autre solution z'' de (E).
2. On considère les points A, B, M' et M'' d'affixes respectives (-1), 1, z' et z''. On suppose que M' appartient au cercle Γ de

centre B et de rayon $\sqrt{2}$. Le but de cette question est de construire M''.

a. Prouver que $4\cos^2\theta = \left(r - \frac{1}{r}\right)^2$.

b. i. Montrer que M'M'' = $\sqrt{r^2 + \frac{1}{r^2} - 2\cos 2\theta}$.

ii. En déduire que M'M'' = 2.

c. i. Prouver que :

$$\frac{\operatorname{aff}(\overrightarrow{AM'})}{\operatorname{aff}(\overrightarrow{BM''})} = \frac{e^{2i\theta} - \left(r - \frac{1}{r}\right)e^{i\theta} - 1}{\left|\frac{1}{r}e^{-i\theta} - 1\right|^2}$$

ii. En déduire que :

$$\frac{\operatorname{aff}(\overrightarrow{AM'})}{\operatorname{aff}(\overrightarrow{BM''})} = \frac{-2}{\left|\frac{1}{r}e^{-i\theta} - 1\right|^2}$$

iii. Conclure que M'' appartient à une demi-droite dont on précisera l'origine et un vecteur directeur.

d. Expliquer comment construire le point M'' pour une position donnée de M' sur Γ.

Partie B

Dans cette partie, on prend $a = 4i(1 + i\sin\theta)$ et $b = -8i\sin\theta$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.

1. Résoudre (E).
2. On considère les points M, M' et M'' d'affixes respectives :

   $z = 2e^{i\theta}$, $z_1 = 2i(1 + e^{i\theta})$ et $z_2 = 2i(1 - e^{-i\theta})$

   a. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M(z) quand θ décrit $]-\pi, \pi]$.

   b. i. Exprimer z_1 en fonction de z.

   ii. En déduire que M_1 est l'image de M par une rotation que l'on caractérisera.

   iii. Déterminer alors l'ensemble $(\mathcal{E}_1)$ des points M_1.
3. On désigne par I le milieu de $[M_1M_2]$.

   a. Vérifier que I appartient à une droite fixe $(\mathcal{D})$ que l'on précisera.

   b. Calculer $\operatorname{aff}(\overrightarrow{M_1M_2})$.

c. En déduire que $M_2 = S_{\mathcal{D}}(M_1)$.

d. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E}_2)$ des points M_2.

# Sujet 35	Ex1 : Chiffrement de Hill – Calcul matriciel Ex2 : Nombres complexes Ex3 : Probabilités – Loi exponentielle

« Ce n'est pas parce que c'est difficile qu'on n'ose pas le faire, mais parce qu'on n'ose pas le faire que c'est difficile.»

(Sénèque)

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice A, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire. Dans tout l'exercice, on note A la matrice définie par le tableau : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Partie A – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

Étape 1	On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.
	On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers x_1 et x_2 tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 3	On transforme la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vérifiant l'égalité $Y = AX$.
Étape 4	On transforme la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 celui de la division euclidienne de y_2 par 26.
Étape 5	On associe aux entiers r_1 et r_2 les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2. Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.

Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot «HILL ».

Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1. Soit a un entier relatif premier avec 26.

Démontrer qu'il existe un entier u tel que $u \times a \equiv 1$ (modulo 26).

2. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES:	a, u et r sont des nombres (a est naturel et premier avec 26)

TRAITEMENT:	Lire a
	u prend la valeur 0, et r prend la valeur 0
	Tant que $r \neq 1$
	    u prend la valeur $u + 1$
	    r prend la valeur du reste de la division euclidienne de $u \times a$ par 26
	Fin du Tant que

SORTIE	Afficher u

On entre la valeur $a = 21$ dans cet algorithme.

a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

u	0	1	2	...
r	0	21	...	...

b. En déduire que $5 \times 21 \equiv 1$ (modulo 26).

3. On rappelle que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $12A - A^2$.

b. En déduire la matrice B telle que $B \times A = 21 \times I$.

c. Démontrer que si $AX = Y$ alors $21X = BY$.

Partie C - Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot VLUP. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, à un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité : $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} X$.

Si r_1 et r_2 sont les restes respectifs de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$

2. En utilisant la question B .2., établir que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 17y_1 + 25y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

3. Déchiffrer le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $P(x) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 2$, à coefficients complexes. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de P, on pose :

$$R = \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_n|) \quad \text{et} \quad A = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|)$$

1. **a.** Montrer que si z est une racine du polynôme P, alors on a :

$$|z|^n \leq A\left(\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k\right)$$

   b. En déduire que si z est une racine de P, alors : $|z| \leq A + 1$.
   Quelle relation peut-on en déduire entre R et A ?

2. **Application :**

Soit le polynôme $Q(X) = (2 + i)X^3 - 7iX^2 + (9i - 2)X - 3i$.

   a. En se basant sur les coefficients du polynôme Q, expliquer pourquoi on est sûr que les nombres complexes suivants : $5 + 2i$, $-2 + 4i$ et $4 - i\sqrt{2}$ ne peuvent pas être racines du polynôme Q.

   b. Expliquer pourquoi on est en doute quant aux nombres complexes : $4 + i$, $2 - 3i$.

Exercice 3

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.

Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.

L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64% des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27% des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65% des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est 0,494.

2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.

L'astronome fait l'hypothèse que 50% de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

# Sujet 36	Ex1 : Arithmétique et calcul matriciel Ex2 : Nombres complexes Ex3 : Suites implicites Ex4 : Géométrie dans l'espace

« Un objectif sans plan s'appelle un vœu. »

(Antoine de Saint-Exupéry)

Exercice 1

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit x et y deux entiers relatifs. On pose A = x + y et B = 2x + 3y.

1. Montrer que tout diviseur commun à x et y divise A et B.
2. Montrer que tout diviseur commun à A et B divise x et y.
3. Démontrer que $2^n + 3^n$ et $2^{n+1} + 3^{n+1}$ sont premiers entre eux pour tout entier naturel n.

Partie B

On considère l'équation diophantienne (E) : $x^2 - 8y^2 = 1$ où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. **a.** Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de (E).
   b. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x;\ y)$ est solution de (E), alors les entiers x et y sont premiers entre eux.
   c. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors x est impair. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice A donnée par A = $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les entiers x' et y' par la relation : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
   c. Démontrer que (x ; y) est solution de (E) si et seulement si (x' ; y') est solution de (E).

d. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
Montrer que pour tout entier naturel, x_n et y_n sont des entiers naturels.

e. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n, ; y_n)$ est solution de (E).

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives i et – i. A tout point M (z) on associe par l'application f le point M′ tel que :

$$z' = \frac{z + iz\bar{z}}{1 + z\bar{z}}.$$

Partie A

1. Déterminer les points invariants par f.
2. Montrer que les points A, M et M' sont alignés.
3. a. Montrer que pour tout point $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-i\}$, on a :

$$\arg(z') = \frac{\pi}{2} - \left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi].$$

b. Déduire que si M décrit le cercle $C_{[OB]}$ de diamètre[OB] alors M' décrit une droite à préciser.

c. Donner la construction du point M′ image de $M \in C_{[OB]}$ (avec $M \neq O$ et $M \neq B$)

4. a. Montrer que pour tout $z \neq i$, on a :

$$|z' - z| = |z' - i| \Leftrightarrow M \in C(O, 1).$$

b. Déduire que si $M \in C(O, 1)$ alors $M' = A * M$.

Partie B

Soit M d'affixe $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et $M' = f(M)$.

1. Montrer que :

$$z' = \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}i(1 + \sin\theta).$$

2. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$2e^{i\theta}z^2 - \left(1 + ie^{i\theta}\right)z + i + e^{i\theta} = 0.$$

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) avec z_2 est la solution non imaginaire de l'équation.

b. Écrire la solution z_2 sous forme exponentielle.

c. Déterminer l'ensemble (E) des points $M_2(z_2)$ quand θ décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

d. Soit N le point d'affixe $\cos\theta$.
Montrer que $OM'NM_2$ est un losange.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n une fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = 1 - \frac{x}{2} - x^n.$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in [0; 1]$ telle que :
$$f_n(x_n) = 0.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que (x_n) est monotone et qu'elle converge vers une limite ℓ.
4. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$0 \leq x_n \leq M < 1.$$
   a. Calculer la limite de x_n^n lorsque n tend vers l'infini.
   b. Montrer qu'il y a une contradiction et en déduire la limite de x_n.

Exercice 4

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(4\,;\,-2\,;\,3)$, $B(1\,;\,-6\,;\,4)$ et $C(-1\,;\,0\,;\,-4)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

b. Déterminer les coordonnées du point O', projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t.\overrightarrow{BC}$.

a. Démontrer que :

$$t = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}.$$

b. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

c. Justifier que les droites (O'H) et (BC) sont perpendiculaires.

4. Démontrer que la sphère de centre O et de rayon OH coupe le plan (ABC) suivant un cercle Γ. Ce cercle est-il tangent à la droite (BC) ?

Sujet 37

Ex1 : Nombres complexes
Ex2 : Matrices et suites
Ex3 : Similitudes directes
Ex4 : Fonctions numériques

« Celui qui n'avance pas recule par rapport à celui qui progresse. »

Exercice 1

Dans un plan (P), rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on donne deux points fixes et distincts F et F'. On suppose de plus que la droite (FF') ne passe pas par O et que les distances OF et OF' ne sont pas égales.

On désigne par f et f' les affixes de F et F'. Soit l'équation du second degré en X :

$$X^2 - \lambda(f + f')X + \lambda ff' = 0$$

(λ étant un réel non nul).

On désigne par m et m' les racines de cette équation et par M et M' leurs images dans (P).

1. Quelles relations lient m, m', λ, f et f' ? En déduire que les couples de droites $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OF'})$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ ont les mêmes bissectrices.

2. Vérifier que :
$$\frac{(m - f)(m - f')}{m^2} = \frac{(m' - f)(m' - f')}{m'^2} = 1 - \frac{1}{\lambda}$$
En déduire que, si $\lambda \in]0, 1[$, la droite (OM) est une bissectrice de $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'})$ et (OM') une bissectrice de $(\overrightarrow{M'F}, \overrightarrow{M'F'})$.

3. Soit s l'affixe du milieu S de [MM']. Quel est le lieu du point S lorsque λ varie ?
Démontrer que le point Φ, d'affixe φ, définie par :
$$\frac{2}{\varphi} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}$$
n'appartient pas à cet ensemble (On ne cherchera pas à construire Φ).

4. Établir la relation :

$$s(s - \varphi) = \frac{(m - m')^2}{4}$$

En déduire quelle est la bissectrice de $(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{S\Phi})$?

5. On suppose désormais que, a étant une longueur donnée :

$$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OF}\right) = \frac{\pi}{4}\ , \qquad \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OF'}\right) = \frac{3\pi}{4}\ ,$$

$$f + f' = 2a\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

Construire F et F'. Calculer φ et démontrer que Φ est le symétrique de O par rapport à la droite (FF').

6. On pose $\theta = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$ et $r = OM$. Démontrer que :

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin(2\theta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{8} - \theta\right)}$$

Exercice 2

Un éleveur élève des lapins. On suppose que, chaque mois, chaque couple de lapins donne naissance à deux couples de lapins, lesquels ne se reproduiront qu'après deux mois. L'éleveur achète en plus chaque mois un couple de lapins nouveau-nés. Initialement, il y a un seul couple de lapins.

Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n le nombre de couples de lapins au bout de n mois.

Ainsi, $\ell_0 = 1$; $\ell_1 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$\ell_{n+2} = 2\ell_n + \ell_{n+1} + 1.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ \ell_{n+1} \end{pmatrix}$.

3. Justifier que pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = A \times U_n + C, \qquad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \times A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \times I_2.$$

5. Déterminer la matrice colonne $V = \binom{x}{y}$ telle que :

$$V = A \times V + C.$$

6. On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - V$.
   a. Calculer V_0.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A \times V_n$ puis que $V_n = A^n \times V_0$.
   c. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
7. Au bout de combien de mois est-on certain qu'il y a plus de 1000 couples de lapins ? Plus de 10 000 couples de lapins ?

Exercice 3

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives -1 et i.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1 + i)z + i.$$

1. a. Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Soit un point distinct de A. Montrer que le triangle AMM′ est rectangle en M.
2. On pose $M_0 = O$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe de M_n.
   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n = (1 + i)^n - 1$.
   b. Montrer l'équivalence :

   O, A, M sont alignés $\Leftrightarrow$ n est un multiple de 4.

   c. Déterminer les valeurs de n telles que le vecteur $\overrightarrow{BM_n}$ soit un vecteur vertical non nul.
   d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BM_n}$ sont orthogonaux.

Exercice 4

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$; soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$.

On appelle (Γ) sa courbe représentative.

Partie A

1. Étudier les variations de f.
2. Démontrer que pour tout x de $[0\,;1]$ on a $f \circ f(x) = x$. En déduire que la courbe (Γ) est symétrique par rapport à la droite $y = x$.
3. Construire (Γ).

Partie B

On considère les points $A_\lambda\left(\frac{1}{2}+\lambda\,;0\right)$ et $B_\lambda\left(0\,;\frac{1}{2}-\lambda\right)$ où λ est un réel de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$. On note (D_λ) la droite passant par ces deux points.

1. Déterminer une équation de la droite (D_λ) sous la forme $a(\lambda)x + b(\lambda)y + c(\lambda) = 0$ où a, b et c sont trois fonctions de λ.
2. Soit (D'_λ) la droite d'équation $a'(\lambda)x + b'(\lambda)y + c'(\lambda) = 0$ où a', b' et c' sont les dérivées des fonctions a, b et c. Vérifier que pour toute valeur de λ, (D_λ) et (D'_λ) sont sécantes en un point M_λ.
3. Montrer que les coordonnées de M_λ sont $x_\lambda = \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^2, y_\lambda = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2$.
4. Démontrer que lorsque λ décrit $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$, M_λ décrit la courbe (Γ) de la première partie.
5. Démontrer que la droite (D_λ) est tangente à (Γ) au point M_λ.

Sujet 38

Ex1 : Probabilités - Suites
Ex2 : Fonction numériques
Ex3 : Géométrie dans l'espace

« La jeunesse est le temps d'étudier la sagesse, la vieillesse est le temps de la pratiquer. »

(Jean-Jacques Rousseau)

Exercice 1

Lors des recrutements massifs de 1940, l'armée américaine mit sur pied une méthode de détection de certaines maladies évitant de procéder par unité (on ne testait pas chaque individu).

On suppose que dans une population, il y ait une proportion p de personnes atteintes d'une maladie donnée, détectable par analyse sanguine. On choisit un échantillon de taille n (certaines recrues de 1940) dont on mélange les prélèvements sanguins.

Si le résultat est négatif aucune de ces n personnes n'est malade, sinon on analyse individuellement chacun des prélèvements. Le problème est évidemment d'optimiser le coût des analyses et donc la taille de l'échantillon n.

1. Soit X_n la variable aléatoire égale au « nombre d'analyses nécessaires pour un groupe de n personnes ».
   a. Montrer que $P(X_n = 1) = (1 - p)^n$. En déduire $P(X_n = n + 1)$.
   b. Montrer que le nombre moyen d'analyses par personne est :
$$\frac{1}{n}E(X_n) = 1 + \frac{1}{n} - (1 - p)^n.$$
2. Si on procède par échantillons de 1, on teste tout le monde ; il faut donc minimiser $\frac{1}{n}E(X_n)$ et pour cela déterminer quand $u_n = \frac{1}{n} - (1 - p)^n$ est négatif.

a. On pose $v_n = n(1-p)^n$; montrer qu'il existe une valeur n_0 de n (qui dépend de p) telle que lorsque $n \leq n_0$, (v_n) est croissante et lorsque $n \geq n_0$, (v_n) est décroissante.
b. En déduire qu'il existe une valeur n_1 de n pour laquelle $v_n > 1$ lorsque $n \leq n_1$ et $v_n < 1$ lorsque $n \geq n_1$.
c. On pose $n = x$ et $f(x) = 1 - x(1-p)^x$. Retrouver les résultats précédents en étudiant les variations de f.
d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $u_n > 0$.

3. On se demande quelle est la valeur de n pour laquelle l'économie moyenne est la plus forte. Quelle méthode proposeriez-vous pour répondre à cette question ?

Exercice 2

f est la fonction définie pour tout x de l'intervalle [0; 1[par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}.$$

1. f est-elle dérivable en 0 ? Dressez le tableau de variation de f.
2. On note (C_1) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
   a. Écrire une équation de la tangente T à la courbe (C_1) au point d'abscisse 1/2.
   b. Sur le même graphique tracez (C_1) et T, puis la courbe (C_2) symétrique de (C_1) par rapport à l'axe des abscisses.
   Démontrez que « M(x ; y) appartient à $\Gamma = C_1 \cup C_2$ » est équivalent à « les coordonnées de M vérifient l'équation E : $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$ ». La courbe Γ est appelée **cissoïde de Dioclès.**
3. Interprétation géométrique de (E).
   I est le point de coordonnées (1 ; 0), (C) est le cercle de diamètre [OI] et Δ est la tangente à (C) au point I. (d) est la droite passant par O et de coefficient directeur t (t est un réel).

a. Déterminer les coordonnées de M, point d'intersection, autre que O, de (C) et (d).

b. Déterminer les coordonnées de M′, point d'intersection, autre que O, de Γ et (d).

c. Déterminer les coordonnées de M, point d'intersection de Δ et (d).

d. Démontrer que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MN}$.

e. En déduire un procédé permettant de construire Γ point par point à partir de M et N. Construire Γ.

4. Prolongements

La droite (IM′) coupe l'axe des ordonnées en P.

a. Démontrer que $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NI}.\overrightarrow{NO} = NI^2$ et que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OI} = OI^2$.

b. En déduire que $NI^2 = OM' \times NO$ et que $OI^2 = OM \times ON$. Démontrer que :

$$\frac{OP}{NI} = \frac{OM'}{M'N} = \frac{OM'}{OM}.$$

c. Déduire des questions précédentes que $OP.OI^2 = IN^3$ ou encore $OP = IN^3$.

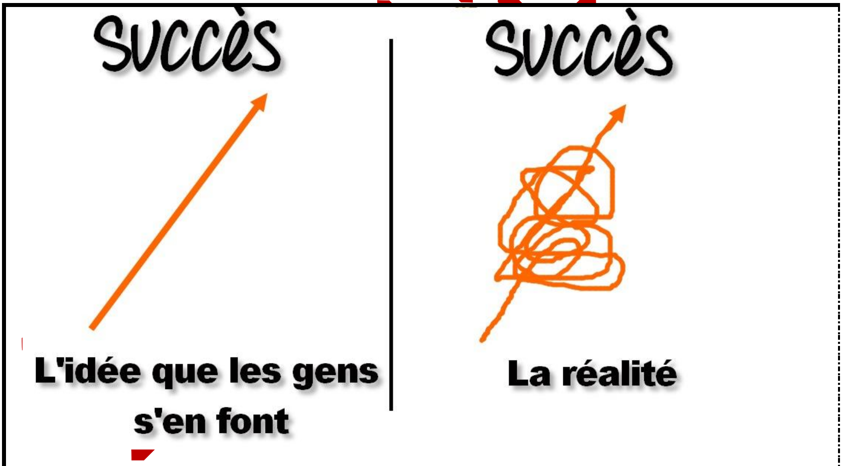
En choisissant $OP = 2$, il vient $IN = \sqrt[3]{2}$.

Expliquez comment la cissoïde de Dioclès permet de résoudre le problème suivant : « Étant donné un cube d'arête a, construire l'arête x d'un cube dont le volume est le double du cube précédent. »

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation $3x + y - z - 1 = 0$ et (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

1. a. Le point C (1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan (P) ? Justifier.
   b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).
2. Soit (Q) le plan passant par C et orthogonal à la droite (D).
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).
   b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan (Q) et de la droite (D).
   c. Montrer que $CI = \sqrt{3}$.
3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (D) de triplet de coordonnées $(-t+1 ; 2t ; -t+2)$.
   a. Vérifier que pour tout nombre réel t, $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.
   b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.



Le succès suit souvent des chemins sinueux

Sujet 39

Ex1 : Arithmétique
Ex2 : Probabilités – Loi binomiale
Ex3 : Géométrie dans l'espace
Ex4 : Matrices

« Quand un homme est déterminé à atteindre son but, les obstacles n'ont plus qu'une seule chose à faire : s'écarter. »

(Anonyme)

Exercice 1

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. **a.** Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 7.

b. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 3.

c. Le nombre k est un entier relatif. Vérifier que si $x = 21k + 1$ ou $x = 21k - 2$ alors n est divisible par 42.

2. **a.** Montrer que si a et b sont des entiers tels que $a^2 + b^2$ est impair alors a et b sont de parité différente.

b. Montrer qu'un entier impair n qui est la somme de deux carrés est de la forme $n = 4k + 1$.

c. En déduire qu'un entier de la forme $4k - 1$ ne peut pas être la somme de deux carrés.

3. **a.** Soit p un nombre premier. Quel est le reste de la division euclidienne de $1^p + 2^p + \cdots + (p-1)^p$ par le nombre p ?

b. Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} \mathrm{PPCM}(x;y) = 240 \times \mathrm{PGCD}(x;y) \\ \mathrm{PGCD}(x;y) = y - x \end{cases}$$

Exercice 2

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de voitures à un carrefour donné. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n voitures franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de voitures à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ;

on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $E(S_n)$ est égale à 10.
Soit p la probabilité pour une voiture d'être accidentée à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$p(S_n = k) = C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}.$$

2. Stabilité de $p(S_n = k)$ pour n assez grand
   a. Établir l'égalité :

$$\ln[p(S_n = 0)] = -10 \times \frac{\ln\left(1 - \frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$$

   où ln désigne le logarithme népérien.
   En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} p(S_n = 0) = e^{-10}.$$

   b. Démontrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$p(S_n = k + 1) = p(S_n = k) \times \frac{n - k}{n - 10} \times \frac{10}{k + 1}.$$

   c. Démontrer que si pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n - 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} p(S_n = k) = e^{-10} \times \frac{10^k}{k!}$$

   alors on a également :

$$\lim_{n \to +\infty} p(S_n = k + 1) = e^{-10} \times \frac{10^{k+1}}{(k + 1)!}.$$

   d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que :

$$\lim_{n \to +\infty} p(S_n = k) = e^{-10} \times \frac{10^k}{k!}.$$

3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10} \times \frac{10^k}{k!}$ est une approximation

acceptable de $p(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de voitures à ce carrefour.

Exercice 3

Les lettres a, b et c étant trois nombres réels non nuls, on considère les points A(a, 0, 0), B(0, b, 0) et C(0, 0, c) dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. a. Vérifier qu'une équation du plan passant par A, B et C est :
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$
   b. Écrire une équation de chacun des plans (P), (Q) et (R) passant par O et perpendiculaires respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB).
   c. Vérifier que ces trois plans contiennent une même droite perpendiculaire au plan (ABC).
   d. Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Montrer que :
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$
2. On suppose maintenant que a, b et c varient de façon que :
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = m \quad \text{(m réel non nul donné).}$$
   a. Montrer que le plan (ABC) passe par un point fixe S.
   b. On suppose que m décrit $\mathbb{R}^*$. Quel est l'ensemble des points S lorsque a, b et c varient ?
3. On suppose dans cette question que ab + bc + ca = 0.
   a. Montrer que les points A, B et C affectés respectivement des coefficients b+c, c+a et a+b ont un barycentre G et calculer les coordonnées x, y et z de celui-ci en fonction de a, b et c.
   b. Calculer x + y + z et en déduire l'ensemble des points G ?

Exercice 4

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que :
$$B = \frac{1}{2}A + \frac{5}{2}I_3.$$
2. Calculer B^2 et trouver une relation entre B^2 et B.
3. Établir l'égalité : $A^2 + 4A - 5I_3 = O_3$.
4. Déduire de 3. que A est inversible et donner l'expression de sa matrice inverse A^{-1}.
5. En déduire la résolution du système dans $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{cases} -3x - 2y + 2z = 1 \\ -2x - 3y - 2z = -1 \\ 2x - 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

Quand un être a confiance en lui-même, les autres ne tardent pas à lui porter leur confiance.

Sujet 40

Ex1 : Matrices de Gram
Ex2 : Fonctions - suites
Ex3 : Nombres complexes
Ex4 : Arithmétique

« Si nous avons chacun un objet et que nous les échangeons, nous avons chacun un objet. Si nous avons chacun une idée et que nous les échangeons, nous avons chacun deux idées. »

(Proverbe chinois)

Exercice 1

Considérons une droite $\mathcal{D}$ du plan, passant par deux points distincts A et B, C est un point quelconque du plan. Notons H le projeté orthogonal du point C sur la droite $\mathcal{D}$.

La **matrice de Gram** associée aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est la matrice carrée d'ordre 2 définie par :

$$G = \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} \end{pmatrix}.$$

1. a. Justifier que CH est la distance du point C à la droite $\mathcal{D}$, que l'on notera $d(C, \mathcal{D})$.

   b. Prouver que :

$$[d(C, \mathcal{D})]^2 = \frac{\det(G)}{AB^2}$$

   où $\det(G)$ désigne le déterminant de la matrice de Gram G.

2. Munissons le plan d'un repère orthonormé et considérons la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 3$ ainsi que le point C de coordonnées $(3, 6)$ dans ce repère.

   a. Déterminer les coordonnées de deux points distincts A et B de cette droite $\mathcal{D}$.

   b. Calculer les coefficients de la matrice de Gram associée aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   c. A partir des résultats de la question 1.b., déterminer la distance du point C à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 2

Soit p un entier naturel, $p \geq 2$, et $a_1, a_2, \dots, a_p$ une famille de p nombres réels tels que : $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p$.

Partie A

Étant donné un entier naturel n, $n \geq a_p$, on considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E) : a_1^x + a_2^x + \cdots + a_p^x = n^x.$$

i. Pour k entier, $1 \leq k \leq p$, on considère la fonction :

$$g_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \to \left(\frac{a_k}{n}\right)^x$$

Étudier ses variations sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et étudier sa limite en $+\infty$.

ii. Soit f_n la somme des fonctions g_k, pour k compris entre 1 et p. Préciser le sens de variation de f_n ainsi que sa limite en $+\infty$.

iii. En déduire que l'équation (E) admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}_+$.

Partie B

Pour chaque $n > a_p$, on note x_n la solution de l'équation (E). On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq r}$, où r est le plus petit entier strictement supérieur à a_p.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq r$ et tout réel $x \geq 0$, on a :

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

En déduire que la suite (x_n) est décroissante.

2. Soit c un réel strictement positif quelconque. Montrer que, pour chacun des entiers k, $1 \leq k \leq p$, la suite de terme général $v_n = \left(\frac{a_k}{n}\right)^c$ est convergente. Quelle en est sa limite ?
3. Déduire de la question précédente que la suite de terme général $f_n(c)$ est convergente. Quelle en est sa limite ?
4. Montrer qu'il existe un entier m tel que $0 < f_m(c) < 1$. En déduire que, pour tout $n \geq m$, $x_n < 0$.

5. Déduire de ce qui précède que la suite $(x_n)_{n \geq r}$ admet 0 pour limite.
6. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \,.\, \ln n = p.$$

Exercice 3

1. On considère l'application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
   $\mathrm{P}(z) = z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z$ où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont quatre nombres complexes donnés. On pose $\omega_j = e^{i\frac{2j\pi}{5}}$, où j désigne un entier naturel compris entre 0 et 4.
   Montrer que : $\mathrm{P}(\omega_0) + \mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_2) + \mathrm{P}(\omega_3) + \mathrm{P}(\omega_4) = 5$.
2. Soit A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cinq points du plan. On construit un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre A_1 de rayon R.
   Démontrer qu'il existe un sommet S du pentagone tel que :

$$\mathrm{SA}_1 \times \mathrm{SA}_2 \times \mathrm{SA}_3 \times \mathrm{SA}_4 \times \mathrm{SA}_5 \geq \mathrm{R}^5.$$

☞ On pourra considérer le polynôme :

$$\mathrm{P}(z) = z(z + \alpha_1 - \alpha_2)(z + \alpha_1 - \alpha_3)(z + \alpha_1 - \alpha_4)(z + \alpha_1 - \alpha_5).$$

Soit α_k l'affixe de A_k ; S_k a pour affixe $\omega_k + \alpha_k$ (par exemple).
Montrer que $\mathrm{S}_k\mathrm{A}_1 \times \mathrm{S}_k\mathrm{A}_2 \times \mathrm{S}_k\mathrm{A}_3 \times \mathrm{S}_k\mathrm{A}_4 \times \mathrm{S}_k\mathrm{A}_5 = |\mathrm{P}(\omega_k)|$ et raisonner par l'absurde.

Exercice 4

La démonstration du théorème « l'ensemble des nombres premiers est infini » qui figure dans presque tous les manuels scolaires date d'environ 2 300 ans et a été proposée la première fois par l'honorable Euclide. Celle que nous allons voir dans cet exercice a été proposée, tout récemment, en 1938.
Supposons qu'il existe un nombre fini A d'entiers premiers que nous noterons $p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{A}}$.

Soit N un entier supérieur ou égal à 1 et soit n un entier compris entre 1 et N.

1. En utilisant le théorème de la décomposition en facteurs premiers, justifier que n admet une écriture de la forme : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_A^{\alpha_A}$ où les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_A$ sont des entiers naturels éventuellement nuls.
2. On écrit chacun des exposants α_i sous la forme $2a_i + b_i$, avec $b_i = 0$ si α_i est pair et $b_i = 1$ si α_i est impair. Montrer qu'on peut mettre n sous la forme :
$$n = k^2 \times p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times \ldots \times p_A^{b_A}$$
où k est un entier naturel dont on précisera la valeur.
3. a. Montrer que $k^2 \leq N$.
   b. Justifier qu'il y a au plus 2^A entiers de la forme :
   $$p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times \ldots \times p_A^{b_A}.$$
   c. En déduire que le nombre de valeurs prises par n (c'est-à-dire N) est inférieur ou égal à $\sqrt{N} \times 2^A$, puis que $N \leq 2^{2A}$.
4. Conclure.

☞ N est au départ un entier quelconque.

Sujet 41

Ex1 : Arithmétique
Ex2 : Nombres complexes
Ex3 : Probabilités – Adéquation à une loi théorique
Ex4 : Intégrales
Ex5 : Fonction logarithme - Inégalités

« La vie ressemble à un conte. Ce qui importe, ce n'est pas sa longueur, mais sa valeur. »

(Sénèque)

Exercice 1

1. Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que :
$$a \wedge b = 1 \quad \text{et} \quad c^2 = a \times b.$$
Montrer qu'il existe deux entiers naturel α et β tels que :
$$a = \alpha^2 \ \text{ et } \ b = \beta^2.$$
2. Soit x et y deux entiers naturels non nuls vérifiant :
$$x^2 = 2y^2 + 1.$$
   a. Déterminer le PGCD de x et y.

   b. Déterminer le PGCD des deux entiers $x-1$ et $x+1$. (On remarquera que $(x-1)(x+1) = 2y^2$)

   c. Démontrer que l'un des deux entiers $x-1$ et $x+1$ est pair, non divisible par 4.

   d. On suppose que $x-1$ est pair, non divisible par 4.

   * Montrer que :
$$(x+1) \wedge \left(\frac{x-1}{2}\right) = 1.$$
   ** Montrer que les nombres $\sqrt{x+1}$ et $\sqrt{\frac{x-1}{2}}$ sont des entiers naturels qui divisent y.

Exercice 2

Soit u un nombre complexe non nul et j le nombre complexe défini par $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On pose : $u = re^{i\theta}$, $z_1 = uj$ et $z_2 = ui$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. On pose :

$$Z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \times z_2}$$

   a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\overline{j} - i$ $\left(\text{On prendra } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$.

   b. En déduire une forme trigonométrique de Z en fonction de r et θ.
3. a. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles Z est un réel positif.

   b. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles Z est un imaginaire pur.
4. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 - ujz^2 + u^2z - u^3j = 0$.

   a. Vérifier que le nombre $(-iu)$ est solution de (E).

   b. Résoudre l'équation (E).

   c. Montrer que les points images des solutions de (E) sont situés sur un cercle que l'on précisera.

Exercice 3

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.

Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.

On considère les évènements suivants :

E est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,

F est l'évènement « à l'issue d une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des évènements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.
2. On effectue dix parties identiques et indépendantes. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré. Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	34	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel suivant défini par $\sum_{i=1}^{4}\left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$.

On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble (1 ; 2 ; 3 ; 4) puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(F_i - \frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le 9ème décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098. Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

Exercice 4

Soit α un réel strictement positif. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \int_0^{\alpha} e^{-nt^2}dt$ (On ne demande pas de calculer u_n).

1. Étudier le sens de variation de la suite numérique (u_n).
2. Soit n de $\mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, démontrer l'inégalité :

$$\int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nt^2} dt \leq \frac{1}{\ln(n)}.$$

3. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $\frac{1}{\ln(n)} < \alpha$ et que l'on a alors :

$$\int_0^{\frac{1}{\ln(n)}} e^{-nt^2} dt \leq \left(\alpha - \frac{1}{\ln(n)}\right) e^{-\frac{n}{(\ln(n))^2}}.$$

4. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1 + nx) - \frac{n}{1+n} \ln x.$$

1. Étudier les variations de f et montrer que pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$, on a : $f(x) > \ln(1 + n)$.
2. Déduire de l'inégalité précédente que pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$, on a :

$$x^n < \left(\frac{1 + nx}{1 + n}\right)^{n+1}.$$

3. En exploitant judicieusement l'inégalité précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

puis

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Sujet 42

Ex1 : Suites – Calcul matriciel
Ex2 : Loi exponentielle
Ex3 : Arithmétique
Ex4 : Nombres complexes

« Tout le monde est un génie. Mais si on juge un poisson sur sa capacité à grimper à un arbre, il passera sa vie à croire qu'il est stupide.»
(Albert Einstein)

Exercice 1

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes :

$$u_0 = 2\,, \qquad v_0 = -1,$$

et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{6}v_n + \dfrac{2}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3}v_n - \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

On pose, pour tout entier naturel n :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer les matrices carrées d'ordre 2 telles que, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

5. a. Vérifier que la matrice $I_2 - A$ est inversible et donner sa matrice inverse.

b. En déduire une matrice-colonne C telle que :

$$C = AC + B.$$

6. a. A l'aide des questions 1 et 2, justifier que, pour tout n :

$$U_{n+1} - C = A(U_n - C).$$

b. Par analogie, avec les suites géométriques réelles, on est amené à conjecturer que, pour tout n non nul :

$$U_n - C = A^n(U_0 - C).$$

Démontrer cette conjecture par récurrence.

7. On pose : $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer les produits MA et NA, et vérifier l'égalité :

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}M + \frac{5}{6}N\right).$$

b. Démontrer par récurrence que, pout tout n non nul :

$$A^n = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n M + \left(\frac{5}{6}\right)^n N\right).$$

c. Expliciter la matrice A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

8. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n $(n \in \mathbb{N}^*)$. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites.

Exercice 2

1. À la caisse d'un magasin, on admet que la variable aléatoire T qui, à un client pris au hasard, fait correspondre le temps de son passage en caisse exprimé en secondes, suit la loi exponentielle de paramètre $\mu = 0,008$.

a. Pour un client pris au hasard, quelle est la probabilité que son passage en caisse dure moins de 2 minutes ? Plus de 5 minutes ?

b. Quel est le temps moyen de passage en caisse dans ce magasin ?

2. Une file d'attente se forme devant cette caisse. Un client arrive dans la file. On admet que la variable aléatoire T' qui donne le temps (en secondes) entre l'arrivée de deux clients successifs dans la file suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a. Sur la plage horaire considérée, il arrive en moyenne un client toutes les 150 secondes devant cette caisse. En déduire la valeur du paramètre λ.

b. On démontre que, dans une telle modélisation, le nombre moyen de clients dans le système (personne servie en caisse et personnes dans la file d'attente) est :

$$\frac{\rho}{1-\rho} \quad \text{où} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Donner, à l'entier près, le nombre de personnes en moyenne dans la file d'attente.

Exercice 3

Soit p un nombre premier et x un entier naturel non nul.

Il s'agit de montrer que tout nombre premier divisant $(x+1)^p - x^p$ est de la forme $np + 1$ et d'examiner quelques applications.

1. Soit q un nombre premier divisant $(x+1)^p - x^p$.
   a. Montrer que $q \geq 3$ et que q est premier avec x.
      En déduire que : $x^{p(q-1)} \equiv 1 \; [\text{mod}.\, q]$.
   b. On pose $a = (x+1)x^{q-2}$.
      Montrer que $a^p \equiv 1 \; [\text{mod}.\, q]$ mais que $a \not\equiv 1 \; [\text{mod}.\, q]$.
      En déduire que l'ordre de a modulo q est égal à p, puisqu'il existe n $(n \geq 1)$ tel que $q = np + 1$.
2. Application 1.
   On pose $x = N!$ (N entier naturel non nul).
   a. Montrer que tout nombre premier divisant $(x+1)^p - x^p$ est plus grand que N.
   b. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $np + 1$.
3. Application 2.
   On pose $x = 1$.
   a. Montrer que tout nombre premier divisant le nombre de Mersenne $M_p = 2^p - 1$ (avec p premier différent de 2) est de la forme $2kp + 1$ $(k \geq 1)$.
   b. On veut savoir « à la main » si M_{11} est composé. Que doit être votre premier essai ?

Exercice 4

1. Donner les solutions de l'équation (1) : $z^2 + z + 1 = 0$ sous forme trigonométrique.
2. On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (2) suivante :

$$z^{2n} + z^n + 1 = 0 \quad (\text{où } n \in \mathbb{N}^*).$$

   a. Montrer que les solutions de l'équation (2) peuvent s'écrire sous la forme :

$$z_k = e^{i\left(\frac{2\varepsilon\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{avec } \varepsilon^2 = 1 \text{ et } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

b. Établir que : $z_0 \times z_1 \times \dots \times z_{n-1} = 1$.

3. Dans le plan complexe, on donne les points $A(i)$ et $M_k(z_k)$ et l'ensemble :

$$(\mathcal{D}) = \{M(z) \text{du plan tel que } z = (1+i)\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}\}$$

a. Soit (a, b) de $\mathbb{R}^2$. Établir que :

$$M(a+ib) \in (AM_k) \iff 1 - b = a \times \cot\left(\frac{\beta_k}{2}\right)$$

avec $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varepsilon^2 = 1$, $\theta_k = \dfrac{2\varepsilon\pi}{3n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ et $\beta_k = \dfrac{\pi}{2} + \theta_k$.

b. Est-il possible d'avoir $z_k = 1$?

c. En déduire que $(AM_k) \cap (\mathcal{D}) \neq \emptyset$.

4. Montrer que :

$$M(z) \in (AM_k) \cap (\mathcal{D}) \iff z = \frac{1+i}{1+\cot\left(\frac{\beta_k}{2}\right)}$$

5. Prouver que :

$$\cot\left(\frac{\beta_k}{2}\right) = \frac{ie^{i\beta_k} + i}{e^{i\beta_k} - 1}$$

6. En déduire que :

$$\frac{1+i}{1+\cot\left(\frac{\beta_k}{2}\right)} = \frac{e^{i\theta_k}(i-1) - (1+i)}{e^{i\theta_k}(i-1) + (1+i)}$$

7. En déduire que :

$$M(z) \in (AM_k) \cap (\mathcal{D}) \iff \begin{cases} z \text{ solution de l'équation} \\ \left(\dfrac{z-i}{1-z}\right)^n + \left(\dfrac{1-z}{z-i}\right)^n = 1 \end{cases}$$

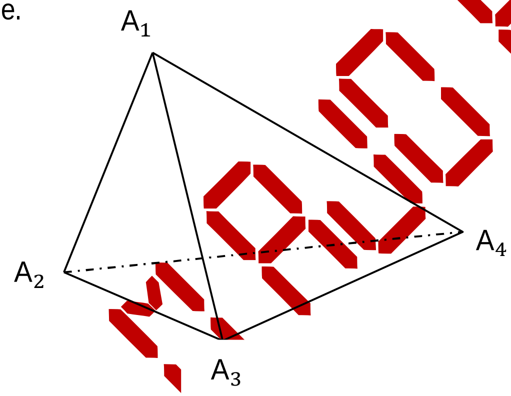
# Sujet 43	Ex1 : Probabilités – Calcul matriciel Ex2 : Arithmétique Ex3 : Nombres complexes

«Mieux vaut prévoir sans certitude que de ne pas prévoir du tout.»

(Henri Poincaré)

Exercice 1

Une puce se déplace d'un sommet à l'autre d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_3$. Au départ, la puce est en A_1. A chaque saut, la puce peut se retrouver sur l'un des 3 sommets de manière équiprobable.



On définit pour tout entier naturel n, la variable aléatoire X_n représentant le numéro du sommet sur lequel se trouve la puce à l'issue du n-ième saut. Ainsi $X_0 = 1$.

1. Calculer la loi de X_1 et calculer son espérance mathématique.
2. Écrire la matrice M de transition du système, c'est-à-dire la matrice dont le coefficient m_{ij} représente la probabilité de passage du sommet i au sommet j.
3. On convient que $M^0 = I_4$.
   a. Démontrer l'existence de deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout entier naturel n, la matrice M^n s'écrit :

$$M^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

   Déterminer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

b. Déterminer la matrice A carrée d'ordre 2 telle que pour tout entier naturel n, on ait :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

4. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   b. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
   c. En déduire explicitement A^n en fonction de n.
5. Calculer u_n et v_n en fonction de n.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la matrice ligne :

$$T_n = (p[X_n = 1] \;\; p[X_n = 2] \;\; p[X_n = 3] \;\; p[X_n = 4]).$$

   a. Montrer que $T_{n+1} = T_n M$.
   b. En déduire que $T_n = T_0 M^n$.
   c. En déduire la loi de X_n.
   d. Que se passe-t-il après un grand nombre de sauts ?
7. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de sauts effectués pour que la puce se retrouve, pour la première fois, sur le sommet A_1.
   a. Déterminer la loi de Y.
   b. Vérifier que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} P([Y = k]) = 1$.
8. On définit $E(Y)$ en posant, si la limite existe :

$$E(Y) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} k.P([Y = k]).$$

   a. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.
   Calculer $f_n'\left(\frac{2}{3}\right)$ et démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n'\left(\frac{2}{3}\right) = 9.$$

   b. Démontrer l'existence de $E(Y)$ et la calculer. Interpréter ce résultat.

Exercice 2

Soit (F_n) la suite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout entier $n > 0$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

En déduire que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

2. Montrer que pour tous $n > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :
$$F_{n+p} = F_p F_{n+1} + F_{p-1} F_n.$$
☞ On pourra faire une récurrence sur p.

En déduire que $\text{PGCD}(F_n, F_p) = \text{PGCD}(F_{n+p}, F_p)$.

3. Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Si r désigne le reste de la division euclidienne de a par b, montrer que :
$$\text{PGCD}(F_a, F_b) = \text{PGCD}(F_b, F_r)$$

4. Montrer que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \text{PGCD}(F_n, F_p) = F_{\text{PGCD}(n,p)}$.

☞ On pourra s'inspirer de l'algorithme d'Euclide.

En déduire la valeur de $\text{PGCD}(F_{2016}, F_{105})$.

5. Étant donné un entier naturel $a \geq 2$ quelconque, on cherche à démontrer qu'il existe un entier n non nul tel que a divise F_n.
On note $\overline{F}_k$ le reste dans la division euclidienne de F_k par l'entier a.

a. Justifier que $\overline{F}_k$ appartient à l'ensemble $I_a = [\![0, a-1]\!]$.
Ainsi, on peut donc noter les $\overline{F}_k$: $\overline{F}_0, \overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_{a-1}$.

b. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, a-3\}$, on a :
$$\overline{F}_{k+2} = \overline{F}_{k+1} + \overline{F}_k.$$

c. On sait que pour tout entier p, il existe $m \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$ tel que : $F_p \equiv \overline{F}_m\ [a]$.
Montrer par récurrence que :
$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, m\}, F_{p-k} \equiv \overline{F}_{m-k}\ [a].$$

d. En prenant $k = m$ dans la dernière congruence, conclure.

e. **Application :**
Montrer qu'il existe un terme de la suite de Fibonacci dont l'écriture décimale se termine par 2017 zéros.

Exercice 3

Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0 = \cos x + i \sin x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{cases}$$

où x est un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Écrire sous forme trigonométrique le terme z_1.
2. Soit (α_n) la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \arg z_n \ [2\pi] \text{ et } \alpha_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

   a. Montrer que la suite (α_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.
   b. En déduire l'expression de α_n en fonction de x et de n.
3. Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = z_n - \overline{z_n}$.
   a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Que peut-on en déduire ?
   b. Montrer que :

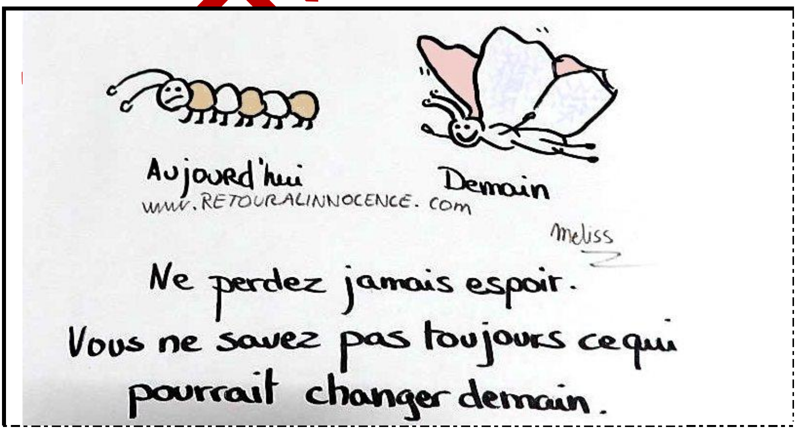
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| = \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$$

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n - z_0 = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{n-1}|$$

5. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\cot \frac{x}{2^n} - \cot x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} + \cdots + \frac{1}{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}$$



Sujet 44

Ex1 : Matrices
Ex2 : Loi exponentielle
Ex3 : Configuration-Lieu-Construction
Ex4 : Nombres complexes
Ex5 : Logarithme népérien-Intégrale

« Tant que dure ta jeunesse, acquiers des choses qui ensuite te consoleront du dommage de ta vieillesse.»

(Léonard de Vinci)

Exercice 1

On considère la suite (F_n) définie par :

$F_0 = F_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. a. Calculer les dix premiers termes de la suite (F_n).

   b. On pose $U_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Démontrer que l'on a $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 à déterminer.

   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = A^n U_0$.

2. a. On donne $P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   b. Calculer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.

   c. Démontrer que $A = PDP^{-1}$ puis que, pour tout entier n, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

   Écrire explicitement les coefficients de la matrice A^n.

3. a. Déduire de la question 1.c, que le terme général de la suite (F_n) est :

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

   b. Vérifier cette formule pour $n = 2$ et $n = 3$.

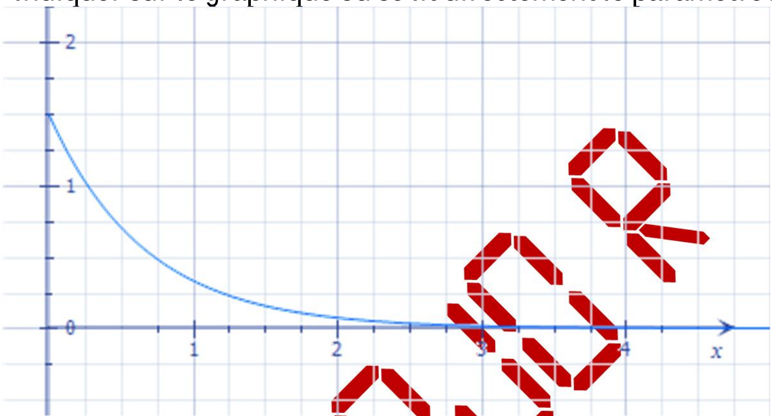
Exercice 2

Partie A

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On rappelle que $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$. La courbe donnée ci-dessous représente la fonction f de densité associée.

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leq 1)$.
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.



Partie B

On pose $\lambda = 1{,}5$.

1. Calculer $P(X \leq 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.
2. Calculer $P(X > 2)$.
3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante :
$$P(1 \leq X \leq 2) = 0{,}173 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$
4. Calculer l'intégrale $G(x) = \int_0^x 1{,}5e^{-1{,}5t} dt$.
   Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $G(x)$. En déduire l'espérance de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

• Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté.
• Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas.
• Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.
b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
   b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

Exercice 3

Soit [AB] un segment de longueur a, et M un point variable de ce segment. On construit d'un même côté de la droite (AB) les triangles équilatéraux PAM et QMB ; C est le point d'intersection des droites (AP) et (BQ) ; I est le milieu de [AC] et J celui de [BC].

1. Quel est l'ensemble des milieux O de [PQ] lorsque M décrit le segment [AB] ?
2. Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme P en Q et I en J. En déduire que la médiatrice de [PQ] passe par un point fixe F. Que représente F pour le triangle ABC ?
   Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle MPQ ?
3. K désigne le centre du cercle circonscrit au triangle PQC.
   Quel est l'ensemble des points K lorsque le point M décrit le segment [AB] ?
4. Construire les points P et Q lorsque :
   a. On connaît la direction de la droite (PQ) ;
   b. On connaît la longueur du segment [PQ].

Exercice 4

Soit θ un nombre réel.

Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^3 + (1 + 3ie^{i\theta})z^2 + [1 + i(1 + 3e^{i\theta})]z + (3i - 3)e^{i\theta}.$$

1. Vérifier que le nombre $z_1 = -3ie^{i\theta}$ est une solution de l'équation (E) : $P(z) = 0$.
2. a. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = \left(z + 3ie^{i\theta}\right)(z^2 + az + b).$$
   b. Soit z_2 et z_3 les deux solutions de $z^2 + az + b = 0$.
   Déterminer z_2 et z_3.
3. a. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
   b. On pose $\theta = {}^{\pi}/_{10}$.
   Écrire sous forme algébrique le nombre complexe :
$$\alpha = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5.$$

Exercice 5

Soit la fonction : $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ et g_n la fonction définie pour $n \geq 2$, par $g_n(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$ $(x > 1)$. On note (C_n) la courbe de g_n dans un repère orthonormé.

1. Dresser le tableau des variations de f.
2. a. Montrer que : $\forall t > 1, 0 < \ln t < t - 1$ puis en déduire que :
$$g_2(x) \geq \ln\frac{2x-1}{x-1}.$$
   b. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $g_n(x) \geq g_2(x)$ puis en déduire que :
$$\lim_{x\to 1^+} g_n(x) = +\infty.$$
3. a. Démontrer que :
$$\forall x > 1, \qquad \frac{(n-1)x}{\ln(nx)} \leq g_n(x) \leq \frac{(n-1)x}{\ln(x)}.$$
   b. Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) \ \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{g_n(x)}{x}.$$
4. a. Montrer que : $\forall x > 1$, $g_n(x) = \frac{n\ln(x)-\ln(nx)}{\ln(x)\ln(nx)}$ et dresser le tableau de variations de g_n.
   b. Donner l'allure de la courbe (C_2) de g_2 en précisant un encadrement de l'ordonnée du point Ω_2 de C_2 en lequel la tangente est horizontale.

Sujet 45	Ex1 : Arithmétique-Codage affine monoalphabétique Ex2 : Probabilités conditionnelles Ex3 : Barycentre-Fonction scalaire de Leibniz Ex4 : Configurations du plan Ex5 : Suites implicites

«Le savoir est la seule matière qui s'accroît quand on la partage.»

(Socrate)

Exercice 1

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine. Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est celle qui code la lettre d'origine).

Exemple : M correspond à $x = 12$: $7 \times 12 + 5 = 89$

Or $89 \equiv 11\ [26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

5. Coder la lettre L.
6. **a.** Soit k un entier. Montrer que :

$$\text{Si } k \equiv 7x\ [26] \text{ alors } 15k \equiv x\ [26].$$

   b. Démontrer que la réciproque de l'implication précédente.

   c. En déduire que : $y \equiv 7x + 5\ [26] \Leftrightarrow x \equiv 15y + 3\ [26]$.
7. A l'aide de la question précédente, décoder la lettre E.

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) tells que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 7a_n + 5$ et $b_{n+1} = 15b_n + 3$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}$.

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n, $b_n = \left(b_0 + \frac{3}{14}\right) \times 15^n - \frac{3}{14}$.

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.

Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H.

Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6. Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ.

Exercice 2

Un œuf de tortue marine vient d'éclore. Pour gagner la haute mer, la petite tortue nouvellement née doit parcourir 20 mètres.

La probabilité pour que la tortue croise un oiseau prédateur (frégate) sur son chemin est notée p. On admet que, si un oiseau prédateur croise une tortue, c'est de manière aléatoire sur les 20 mètres, c'est-à-dire que leur lieu de rencontre suit la loi uniforme sur [0; 20].

À la distance d du nid se trouve la mer, et on note les événements suivants :

F : « La tortue croise un oiseau prédateur »

S : « La tortue croise un oiseau prédateur sur le sable ».

M : « La tortue croise un oiseau prédateur dans la mer ».

1. Exprimer en fonction de d : $P_F(S)$ et $P_F(M)$.
2. Exprimer en fonction de p et d les probabilités $P(S)$ et $P(M)$.

3. Sachant que la tortue est parvenue jusqu'à la mer, quelle est la probabilité qu'elle croise un oiseau prédateur ?
4. On suppose que $d = 15$. On estime qu'environ 5% des tortues parviennent en haute mer. Effectuer les calculs de probabilités précédents.

Exercice 3

Partie A

Dans cette partie, ABC est un triangle rectangle d'hypothèse $BC = 2d$, et J le milieu de [BC].

1. Démontrer que le point K défini par $4\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ est le symétrique de J par rapport à A.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan (ABC) tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4d^2 \text{ (Noter que } A \in \mathcal{E}\text{).}$$

Partie B

Dans cette partie, le triangle ABC est quelconque avec $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1. Construire le barycentre G des points $(A, 3)$, $(B, 2)$, $(C, -2)$ et calculer GA^2, GB^2, GC^2 en fonction de a, b, c. En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan (ABC) tels que :

$$3MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = 2c^2 - 2b^2.$$

2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des points I tels que :

$$I = \text{bar} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 3 - 2\alpha & 2 - \alpha & 3\alpha - 2 \end{array}$$

où α est un réel quelconque.

3. Préciser les points de l'ensemble $\mathcal{I}$ qui sont situés sur les droites (BC), (CA) et (AB).

Exercice 4

Soit deux droites fixes Δ et Δ' perpendiculaires en O. [Ot) est une demi-droite d'origine O. Sur [Ot), on considère deux points P et Q tels que $OP = a$ et $OQ = b$ $(a > b)$ et I le milieu de [PQ].

Le cercle de centre I passant par O recoupe Δ en U, Δ' en V et [Ot) en W. Les cercles Γ et Ω circonscrits respectivement à WPU et WQV se recoupent en M et recoupent respectivement Δ en S et Δ' en T.

1. Montrer que :
   $\rightarrow$ P est le projeté orthogonal de S sur (OW) ;
   $\rightarrow$ Q est le projeté orthogonal de T sur (OW) ;
   $\rightarrow$ M est le projeté orthogonal de W sur (ST).
2. Démontrer que les points O, T, W et S sont cocycliques.
   En déduire que $M \in$ (UV).
3. Démontrer que : (QM) $\parallel \Delta$ et (PM) $\parallel \Delta'$.

Exercice 5

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = (n+1)^x + (n+2)^x + \cdots + (n+n)^x.$$

Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 1$ et E_n l'équation d'inconnue x :

$$f_n(x) = n\lambda.$$

1. a. Pour n fixé, étudier les variations de f_n.
   b. Démontrer qu'il existe un unique réel x_n solution de E_n.
2. a. Démontrer que :
   $$n(n+1)^{x_n} \leq n\lambda \leq n(2n)^{x_n}.$$
   b. En déduire un encadrement de x_n.
3. Démontrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} x_n \ln n = \ln \lambda.$$

Sujet 46	Ex1 : Coniques Ex2 : Transformations dans le plan Ex3 : Nombres complexes Ex4 : Fonctions convexes

« Celui qui n'a pas le courage de soulever une pierre ne peut espérer trouver de diamants.»

(Anonyme)

Exercice 1

Dans le plan euclidien, muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$, d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{avec } a>b>0, \qquad c^2=a^2-b^2.$$

1. A tout point M de $\mathcal{E}$, d'affixe z, on assimile le point M' d'affixe z' telle que : $z^2+z'^2=c^2$.

   Démontrer que $\overrightarrow{OM'}^2=\left\|\overrightarrow{MF}\right\|\times\left\|\overrightarrow{MF'}\right\|$.

2. Établir les relations :

$$|z-c|^2+|z+c|^2=2(|z|^2+c^2)$$
$$(|z-c|+|z+c|)^2=2(|z|^2+|z'|^2+c^2).$$

   Puis les relations :

$$\left\|\overrightarrow{MF}\right\|+\left\|\overrightarrow{MF'}\right\|=\left\|\overrightarrow{M'F}\right\|+\left\|\overrightarrow{M'F'}\right\|$$
$$\overrightarrow{OM}^2+\overrightarrow{OM'}^2=a^2+b^2$$

3. Soit I et I' les points d'affixes respectives $u=z+iz'$ et $u'=z-iz'$.

   Démontrer que :

$$u\times u'=c^2\,;$$
$$|z-c|+|z+c|=|u|+|u'|\,;$$
$$\left\|\overrightarrow{MF}\right\|+\left\|\overrightarrow{MF'}\right\|=\left\|\overrightarrow{OI}\right\|+\left\|\overrightarrow{OI'}\right\|.$$

Exercice 2

Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sens direct de sommet A et $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit et O le milieu de [BC].

1. Soit D le point de [BC] tel que $BD = BA$.
   a. Prouver qu'il existe un seul déplacement R tel que $R(C) = D$ et $R(A) = B$. Justifier que R est une rotation.
   b. Soit ω le centre de R.
      Prouver que $\omega \in (\mathcal{C})$ et que $\omega \in (AD)$.
   c. Construire le point $O' = R(O)$.
2. Soit Δ la médiatrice de [AC]. Posons $g = R \circ S_\Delta$.
   a. Prouver que g est une symétrie glissée.
   b. Déterminer $g(C)$.
   c. En déduire que $\overrightarrow{OO'}$ est le vecteur de la symétrie glissée g et déterminer son axe.
3. Dans cette question, on prend $AB = AC = 2$ cm. On pose :
   $$g^1 = g \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad g^n = g \circ g^{n-1}.$$
   a. Caractériser g^n (on discutera selon les valeurs de n).
   b. Calculer la distance OO'.
   c. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $C_n = g^n(C)$.
      Calculer la distance OO_{2016}.
   d. Déterminer la plus petite valeur de n pour lesquelles, on a :
   $$CC_n \geq 257 \text{ cm} \quad \text{et} \quad (CC_n) \parallel (OO').$$

Exercice 3

On considère le nombre complexe $z = e^{i\theta}$ avec les données $\theta \in \mathbb{R}$, $z \neq -1$ et $z \neq 1$.

1. Déterminer, en fonction de θ, le module et un argument de chacun des nombres $z + 1$ et $z - 1$.
2. On suppose que $\theta = \frac{2\pi}{1+2n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Montrer que :
   $$\sum_{k=0}^{2n} (-z)^k = \frac{2}{1+z}$$

b. En déduire que : $|1 + z| \geq \frac{2n}{1+2n}$

c. Prouver que : $\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \geq \frac{1}{1+2n}$

3. On suppose que : $0 < \theta < \pi$. On pose : $u = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$

   a. Montrer que : $\overline{u} = \frac{z+1}{(z-1)^2}$
   puis déterminer, en fonction de θ, le module et un argument de u.

   b. On considère, dans le plan complexe, l'ensemble (Γ) des points M d'affixe u lorsque θ décrit l'intervalle $]0, \pi[$.
   Écrire l'équation cartésienne de (Γ) puis déterminer la nature de (Γ). Construire (Γ).

Exercice 4

Partie A

On dit qu'une fonction numérique f, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est convexe sur I si :

$$\forall x \in I \text{ et } \forall y \in I, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. Exemples et contre-exemples
   a. Montrer que les fonctions $f_1 : x \to x^2$ et $f_2 : x \to e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
   b. La fonction $f_3 : x \to \ln x$ est-elle convexe sur $]0, +\infty[$?
2. On désigne par h la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $h(x) - \sin x$.
   a. Montrer que h est convexe sur $[0, \pi]$.
   b. Montrer que, si $x \neq y$, on a :
   $$h\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{h(x)+h(y)}{2}.$$
3. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) > 0.$$
   a. Soit x_0 un réel et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = f\left(\frac{x+x_0}{2}\right) - \left[\frac{f(x)+f(x_0)}{2}\right].$$

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

b. Montrer que, si $x < x_0, \quad g'(x) > 0$

et, si $x > x_0, \quad g'(x) < 0$.

En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \leq 0$ et que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction φ définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{4}.$$

Étudier les variations de φ. En déduire l'inégalité :

$$\forall x \in [0, 2\pi], \qquad \varphi(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Partie C

Dans un plan, on considère un cercle Γ de centre O et de rayon R. Soit A un point fixé de Γ et α, β et γ des réels positifs vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. On désigne par B et C les points de Γ tels que α, β et γ soient des mesures des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$.

1. Calculer, en fonction de R, α et β, le périmètre P du triangle ABC.
2. Montrer, en utilisant les parties A et B, que :

$$P \leq 2R\varphi(\alpha + \beta) \leq 3R\sqrt{3}$$

et que, si $\alpha \neq \beta$: $P < 3R\sqrt{3}$.

3. Pour quelles positions des points B et C le triangle ABC a-t-il un périmètre maximal ?

Sujet 47

Ex1 : Similitude directe
Ex2 : Calcul intégral
Ex3 : Inégalités de convexité-Fonction logarithme
Ex4 : Loi normale

«La seule chose que les enfants usent plus vite que leurs chaussures, c'est la patience de leurs professeurs.»

(Anonyme)

Exercice 1

On donne un rectangle direct AOBC tel que $BO = \sqrt{2}OA$. On appelle I, J, K les milieux respectifs des segments [OB], [AC] et [BC]. Soit S la similitude directe qui transforme A en I et O en B. Faire une figure.

1. Caractérisation de S
   a. Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b. Soit Ω le centre de S. Construire Ω.
   c. Quelle est l'image par S du rectangle AOBC ?
2. On considère la transformation $S^2 = S \circ S$.
   a. Quelles sont les images des points O, A, B par S^2 ?
   b. Déterminer la nature de S^2 et la caractériser.
   c. En déduire que les droites (OC), (BJ) et (AK) sont concourantes.

Exercice 2

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$.

1. Démontrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.
2. a. Déterminer la dérivée de la fonction : $x \longmapsto \tan^{n+1} x$.
   b. En déduire que :
      - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ (1);
      - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$;
      - $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

c. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = I_{n+4} - I_n$.

Utiliser 1 pour démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}.$$

3. **a.** Calculer I_2.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(2) + f(6) + f(10) + \cdots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2.$$

c. En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

4. **a.** Calculer I_1.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

Exercice 3

1. Soit α un nombre réel vérifiant $0 < \alpha < 1$. Étudier la fonction f_α définie par : $f_\alpha(x) = \ln(1 - \alpha + \alpha x) - \alpha \ln x$.

Préciser l'ensemble de définition de f_α ; établir le tableau de ses variations.

Pour étudier la limite de f_α en $+\infty$, on pourra considérer la différence $f_\alpha - g_\alpha$, g_α étant la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g_\alpha(x) = (1 - \alpha) \ln x.$$

Représenter graphiquement $f_{1/2}$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

2. **a.** Montrer que si deux réels, α et r, sont tels que :

$$0 \leq \alpha \leq 1 \ \text{ et } \ 0 < r$$

ils vérifient l'inégalité : $\ln(1 - \alpha + \alpha r) \geq \alpha \ln r$ 1.

b. En déduire que si quatre réels u, v, X, Y, sont tels que :

$$0 \leq u, \qquad 0 \leq v, \qquad u + v = 1, \qquad X > 0, \qquad Y > 0$$

ils vérifient l'inégalité : $\ln(uX + vY) \geq u \ln X + v \ln Y$ 2.

On pourra poser $\alpha = u$, $r = \frac{X}{Y}$.

c. Préciser les conditions dans lesquelles les deux membres de l'inégalité ① sont égaux. Même question pour l'inégalité ②.

3. Montrer que si les réels u, v, w, X, Y et Z sont tels que :

$$0 \leq u, 0 \leq u, 0 \leq u, u + v + w = 1, X > 0, Y > 0, Z > 0$$

ils vérifient : $\ln(uX + vY + wZ) \geq u \ln X + v \ln Y + w \ln Z$ ③.

On pourra utiliser la question 2 en considérant des réels t et T tels que : $t = v + w$ et $uX + vY + wZ = uX + tT$.

Les deux membres de ③ peuvent-ils être égaux ? A quelles conditions ?

4. Montrer que des réels positifs a, b et c vérifient toujours les inégalités :

$$a + b + c \geq \sqrt[3]{abc}$$
$$\sqrt{ab + bc + ca} \geq \sqrt{3}\sqrt[3]{abc}$$
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

5. Montrer que, n étant un entier naturel non nul, $u_1, u_2, \dots, u_n$ étant des réels positifs tels que : $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1$, toute famille $x_1, x_2, \dots, x_n$ de réels strictement positifs vérifie l'inégalité :

$\ln(u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n) \geq u_1 \ln x_1 + u_2 \ln x_2 + \cdots + u_n \ln x_2$ ④

Préciser les conditions sous lesquelles les deux membres de l'inégalité ④ sont égaux.

6. Étant donné le réel strictement positif A et l'entier naturel on nul, à toute famille $x_1, x_2, \dots, x_n$ de réels strictement positifs vérifiant : $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = A$, on associe le produit :

$$Y = x_1x_2 \dots x_i \dots x_n.$$

Montrer que :

$$Y \leq \left(\frac{A}{n}\right)^n.$$

Peut-on choisir la famille des x_i de façon que
$$Y \leq \left(\frac{A}{n}\right)^n ?$$

7. Étant donné un réel A > 0, on cherche l'entier n et la famille des x_i de façon que Y soit le plus grand possible.
Remarquant que :
$$\ln\left(\frac{A}{n}\right)^n = A\frac{\ln\frac{A}{n}}{\frac{A}{n}}$$
montrer, par une étude sommaire de la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\varphi(t) = \frac{\ln t}{t},$$
que la valeur convenable de n est soit $E\left(\frac{A}{e}\right)$, soit $1 + E\left(\frac{A}{e}\right)$ où E(x) désigne la partie entière de x.

8. Pour A = 12, préciser la valeur de n et celles des x_i pour réaliser la condition indiquée à la question 7.
On rappelle l'inégalité : $2{,}71 < e < 2{,}72$.

Exercice 4

La durée de vie d'une ampoule mesurée en heures, est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
On a pu déterminer expérimentalement les probabilités :
$$p(D > 2000) = 0{,}9251 \quad \text{et} \quad p(D > 3000) = 0{,}8577.$$

1. Quelle loi suit la variable aléatoire Z définie par :
$$Z = \frac{D - \mu}{\sigma}?$$
2. Déterminer un système vérifié par μ et σ.
3. En déduire μ et σ.
4. Déterminer $p(D < 1000)$ et $p(D > 5000)$.

Sujet 48

Ex1 : Nombres complexes - Antidéplacements
Ex2 : Nombres complexes – Logarithme - Intégrales
Ex3 : Calcul intégral
Ex4 : Arithmétique

« Celui qui pose une question est un ignorant pendant deux minutes ; celui qui ne pose pas de questions demeure ignorant toute sa vie.»
(Anonyme)

Exercice 1

Soit α un réel de l'intervalle $[-\pi, \pi[$ et f_α l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = y + \sqrt{2}\cos\alpha \\ y' = x + \sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$$

1. On note $I_\alpha = \{M \text{ du plan tel que } f_\alpha(M) = M\}$.
   a. Montrer que si $\cos\alpha + \sin\alpha \neq 0$ alors $I_\alpha = \emptyset$.
   b. Montrer que $I_{-\frac{\pi}{4}}$ et $I_{\frac{3\pi}{4}}$ sont deux droites dont on donnera les équations.
2. On note z l'affixe de M et z' l'affixe de M'.
   a. Montrer que $z' = i\bar{z} + \sqrt{2}e^{i\alpha}$.
   b. En déduire que f_α est une isométrie du plan.
   c. Caractériser chacune des applications $I_{-\frac{\pi}{4}}$ et $I_{\frac{3\pi}{4}}$.
3. On suppose que $\alpha \notin \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.
   a. Montrer que f_α est une symétrie glissée d'axe D_{f_α} et de vecteur noté $\vec{u}$.
   b. Déterminer $f(O)$ et en déduire que le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\alpha}$ est un point de la droite D_{f_α}.
   c. Déterminer $f(I)$ et en déduire que D_{f_α} a une direction fixe.
   d. Déterminer α pour que D_{f_α} soit la droite d'équation $y = x$.
   e. Caractériser alors f_α dans chacun des cas trouvés.

Exercice 2

Partie A

Soit a un réel de l'intervalle $[0, \pi]$. On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = \ln(x^2 - 2x\cos a + 1).$$

On désigne par $\mathcal{C}_a$ la courbe de f_a dans un repère orthonormé.

1. Étudier les variations de f_a.
2. Tracer la courbe $\mathcal{C}_a$ pour $a = \frac{\pi}{2}$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^{2n} - 1 = 0$.

   b. Soit Z_k le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{k\pi}{n}$ avec $k \in I = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$.
   Soit $k \in I \setminus \{0, n\}$ et k' un entier tel que $k + k' = 2n$.
   Développer l'expression $(Z - Z_k)(Z - Z_{k'})$.

   c. On admettra que :
   $$\forall Z \in \mathbb{C},\ Z^{2n} - 1 = (Z - Z_0)(Z - Z_1) \dots (Z - Z_{2n-1}).$$
   En utilisant la question B. 1. b, montrer que :
   $$Z^{2n} - 1 = (Z^2 - 1 =) \prod_{k=1}^{n-1} \left(Z^2 - 2Z\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right).$$

2. On considère la fonction S_n définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_{\frac{k\pi}{n}}(x)$$
   avec $f_{\frac{k\pi}{n}}(x) = \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$.

   a. Montrer que S_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   b. Déduire de la question B. 1. c, que si $x^2 \neq 1$, on a :
   $$S_n(x) = \ln\left(\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}\right).$$

   c. En déduire alors $S_n(1)$ et $S_n(-1)$.

3. Le réel x étant fixe, distinct de 1 et -1 , on considère la fonction g_x telle que :

$$g_x(t) = \ln(x^2 - 2x\cos t + 1) \quad \text{pour } t \in [0, \pi].$$

   a. Vérifier que g_x est bien définie sur $[0, \pi]$ et qu'elle admet une primitive sur $[0, \pi]$ qui s'annule en 0.
   b. Exprimer la quantité suivante en fonction de $S_n(x)$:

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_x\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

   c. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\,dt.$$

Exercice 3

1. On considère la fonction $x \longmapsto \tan x$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   a. Montrer que la fonction tan est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on déterminera.
   b. Soit g la fonction réciproque de $x \longmapsto \tan x$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

2. Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1 + t^2}\,dt.$$

   a. Calculer $F(1)$.
      i. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$;
      ii. Déduire que $\forall x \in]0, +\infty[$, on a : $F(x) = 0$.
   b. Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$F(x) = \left(g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{g(t)}{1 + t^2}\,dt.$$

3. Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad \ln x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{g(t)}{1+t^2}dt.$$

Exercice 4

1. a. Vérifier que l'entier 101 est premier.
   b. Justifier que l'équation ①: $77x + 100y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
   c. Résoudre l'équation ① dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Soit (D) la droite passant par les points $A(13, -10)$ et $B(113, -87)$.
   a. Les coordonnées de A et B sont-elles solutions de ① ?
   b. Existe-t-il un point de (D) dont les coordonnées sont des entiers naturels ?
3. On considère, dans $\mathbb{N}$, l'équation ②: $x^{77} \equiv 3\ [101]$.
   a. Soit z une solution de ②. Prouver que z et 101 sont premiers entre eux et que $z^{100} \equiv 1\ [101]$.
   b. Montrer alors que : $z \equiv 3^{13}\ [101]$.
   c. Montrer que si $x \equiv 3^{13}\ [101]$ alors x est solution de ②.
   d. Montrer que l'ensemble des solutions de ② est l'ensemble des entiers naturels de la forme $x = 38 + 101k$ où k est un entier naturel.
   e. Soit z une solution de ②. Prouver que $51 + x^{2017}$ est un multiple de 101.

Sujet 49

Ex1 : Similitude directe
Ex2 : Probabilité-Conditionnement-Loi uniforme
Ex3 : Intégrale-Logarithme-Calcul d'aires
Ex4 : Arithmétique-Nombres de Fermat

« Q ui parle sème, qui écoute récolte.»

(Pythagore)

Exercice 1

On considère, dans le plan orienté, un rectangle ABIJ inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre [AB] tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit S la similitude directe de centre B qui transforme I en J.

1. a. Montrer que le rapport de S est égal à $\sqrt{3}$ et donner une mesure de son angle.

   b. On pose $S^n = \underbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n \text{ fois}}$ (avec $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$).

   Trouver la nature et les éléments caractéristiques de S^n. En déduire les valeurs de n pour lesquelles S^n est une homothétie de rapport négatif.

   c. Soit I_n l'image de I par S^n. Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle, on a : $BI_n > 1000.BI$?

2. a. Montrer que S transforme la droite (AI) en (AJ).

   b. Préciser l'image de la droite (AB) par S. En déduire la construction du point $A' = S(A)$. Construire l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par S.

   c. Montrer que pour tout point M du cercle $(\mathcal{C})$ privé du point B d'image M' par S, la droite (MM') passe par J.

3. Soit f une similitude directe transformant le cercle $(\mathcal{C})$ en le cercle $(\mathcal{C}')$.

   a. Quel est le rapport de f ?

   b. On désigne par Ω le centre de f. Calculer $\frac{\Omega O'}{\Omega O}$ où O et O' sont les centres respectifs de $(\mathcal{C})$ et de $(\mathcal{C}')$.

   c. Déterminer l'ensemble Γ des centres Ω de f.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\, \vec{u}, \vec{v})$ tel que B a pour affixe 1.
   a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S.
   b. Soit g l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M associe le point N tel que N soit le milieu du segment [MS(M)].
   Caractériser l'application g.
   c. Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.

Exercice 2

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non-médecins) et le personnel AT (administratifs ou techniques).
En outre, on sait plus précisément que :

→ 12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants.

→ 67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} *près.*

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
   a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
   b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
   c. On sait que 80% du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.
   En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.
2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal $\grave{\mathrm{a}}$ une heure et on suppose que la durée

exacte du trajet est une variable uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 1]$.
On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min ?

3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel, mais ne connait pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sin x\,(1 - \ln(\sin x))\,, & x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$.
2. Étudier la variation de f.
3. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a. Placer le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse $\frac{\pi}{4}$. (On prendra $\sqrt{2} \cong 1{,}4$)
   b. Tracer les tangentes à $(\mathcal{C})$ aux points O et $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
   c. Construire la courbe $(\mathcal{C})$.
4. a. Écrire $\sin x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$ puis en déduire que :

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx = -\ln\left(\tan\frac{\pi}{8}\right).$$

   b. Calculer l'intégrale :

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,(\ln(\sin x))dx.$$

c. En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4

On pose $P_n(x) = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)\cdots(x^{2^n}+1)$.

1. Simplifier $(x-1)\,P_n(x)$.
2. En déduire la forme développée de $P_n(x)$.
3. En déduire que si $F_n = 2^{2^n} + 1$ alors $F_n = F_0 F_1 \ldots F_{n-1} + 2$ où F_n est le n^ième nombre de Fermat.
4. En déduire que si, contrairement à ce qu'espérait Fermat, les nombres de Fermat ne sont pas tous premiers, ils sont au moins premiers entre eux deux à deux.
5. En déduire une démonstration du fait qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.

Sujet 50	Ex1 : Similitude directe-Nombres complexes Ex2 : Calcul intégral-Arithmétique Ex3 : Lois à densité Ex4 : Parabole

«Il y a de la place au soleil pour tout le monde,
surtout quand tout le monde veut rester à l'ombre.»
(Jules Renard)

Exercice 1

Soit un plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$. Dans tout l'exercice, α est un nombre réel donné de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. A tout réel t sont associés les points $\mathrm{M_t}$ et $\mathrm{N_t}$ du plan dont les coordonnées respectives sont : $\mathrm{M_t}(1 + \mathrm{t}\cos\alpha, 0)$ et $\mathrm{N_t}(-1, \mathrm{t}\sin\alpha)$.

1. Faire une figure pour $\mathrm{t} = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
2. Soit $\mathrm{G_t}$ le milieu du segment $[\mathrm{M_tN_t}]$. Montrer que, lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, le point $\mathrm{G_t}$ décrit une droite.
3. a. Soit $(\mathrm{C_t})$ le cercle de diamètre $[\mathrm{M_tN_t}]$. Tracer $(\mathrm{C_0})$ et $(\mathrm{C_2})$.
   b. Donner une équation du cercle $(\mathrm{C_t})$.
   c. Montrer qu'il existe un unique point noté T, distinct de $\mathrm{N_0}$ tel que, pour tout $\mathrm{t} \in \mathbb{R}$, T appartienne au cercle $(\mathrm{C_t})$. On ne demande pas de calculer les coordonnées de T.
4. Montrer que, pour tout réel t, on a l'égalité angulaire :
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{TM_0}}, \overrightarrow{\mathrm{TM_t}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{TN_0}}, \overrightarrow{\mathrm{TN_t}}\right)\ [\pi].$$
5. A tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$ du plan, on associe son affixe $z = x + iy$. Soit S l'application de P dans P qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$, avec $(x', y') \in \mathbb{R}$, définie par :
$$z' = iz\tan\alpha - (1 + i\tan\alpha).$$
   a. Montrer que S admet un unique point invariant K dont on calculera les coordonnées dans le repère $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.
   b. Reconnaître l'application S et vérifier que $S(\mathrm{M_t}) = \mathrm{N_t}$.

6. a. Montrer que K appartient au cercle (C_t) pour tout réel t.
   b. En déduire que $K = T$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\forall n \geq 3, \qquad \pi(2n+1) \geq \ln(2) \times \frac{2n+1}{\ln(2n+1)}$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x.

1. Soient n et p deux entiers naturels. On pose :

$$I_{p,n} = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx$$

   a. Calculer $I_{p,0}$ et $I_{p,1}$.
   b. Calculer $I_{0,n}$ et en déduire $I_{1,n}$.
   c. Établir, pour $n \geq 1$, la relation :

$$I_{p,n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}.$$

   En déduire que

$$I_{p,n} = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}.$$

   d. Calculer $I_{n,n}$ en utilisant la formule du binôme Newton pour le développement de $(1-x)^n$ puis en déduire l'égalité :

$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1}.$$

2. Soit D_n le PPCM des entiers $n+1, n+2, \ldots, 2n+1$.
   a. Montrer qu'il existe un entier naturel $a \geq 1$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1} = \frac{a}{D_n}.$$

   b. En déduire que $D_n \geq \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

c. Soit $D_n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de l'entier D_n. Justifier que pour tout i compris entre 1 et k, $p_i^{\alpha_i}$ divise l'un des entiers $n+1, n+2, \dots, 2n+1$. En déduire que $p_i^{\alpha_i} \leq 2n+1$ puis que $k \leq \pi(2n+1)$.

3. a. Montrer que $D_n \leq (2n+1)^{\pi(2n+1)}$.

   b. Montrer par récurrence que pour tout naturel $n \geq 3$:

$$\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \geq 2^{2n+1}$$

   c. En déduire la minoration annoncée en début de l'exercice.

Exercice 3

Au 1er janvier 2011, une entreprise a mis sur le marché d'un pays donné un téléphone portable. Le public visé est l'ensemble des personnes âgées de 15 à 30 ans résidant dans ce pays. Le temps écoulé, exprimé en mois, entre la mise sur le marché et l'acquisition de ce produit par une telle personne est modélisé par une loi dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x+8}}{(1+e^{-x+8})^2}.$$

1. Déterminer la primitive F de f qui vérifie $F(8) = 0{,}5$.

2. On choisit au hasard une personne âgée de 15 à 30 ans résidant dans le pays en question. X est la variable aléatoire égale au temps écoulé en mois entre la mise sur le marché et l'acquisition du produit par cette personne.

   a. Qu'elle est la probabilité qu'elle soit déjà en possession de ce produit avant le 1er juillet 2011 ?

   b. Quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas encore acheté ce produit au bout de 11 mois ?

   c. Déterminer le nombre de mois n à partir duquel on a :

$$p(X \leq) > 0{,}99.$$

   d. Une personne qui a entre 15 et 30 ans n'a toujours pas acheté ce téléphone à la fin du 6e mois. Calculer la probabilité qu'elle ne l'ait toujours pas acheté à la fin du 9e mois.

Exercice 4

Dans le plan orienté, on munit le plan du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la parabole P d'équation $y^2 = 4x$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de P (directrice D, foyer F, sommet S et paramètre p).
2. Soit K un point de la directrice D d'ordonnée 3.
   - a. Montrer que la médiatrice du segment [FK] est une tangente à P au point M d'ordonnée 3 puis construire M.
   - b. Montrer que la tangente au sommet S coupe la tangente à P en M au point I, milieu de [FK].
3. La droite (MI) recoupe D en J. Soit K' le symétrique de K par rapport à J. Montrer que la droite (MI) est parallèle à (FK′).
4. Soit M' l'intersection de la médiatrice de [FK′] avec la perpendiculaire à D en K'.
   - a. Vérifier que M' est un point de P.
   - b. Montrer que les tangentes à P en M et M' sont perpendiculaires.
5. a. Montrer que $(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MF}) = \left(\overrightarrow{FK'}, \overrightarrow{FM'}\right)\ [2\pi]$.
   - b. Déduire que les points M, F et F' sont alignés.
6. Tracer P.

Sujet 51

Ex1 : Parabole
Ex2 : Arithmétique
Ex3 : Fonction réciproque-Intégrale

« Savoir écouter, c'est posséder, outre le sien, le cerveau des autres.»
(Léonard de Vinci)

Exercice 1

Dans le plan orienté, on donne un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O ; [AB] est un diamètre de $(\mathcal{C})$; Δ_1 la tangente à $(\mathcal{C})$ en A et Δ_2 la tangente à $(\mathcal{C})$ en B. Soient θ un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, F un point de $(\mathcal{C})$ tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right) = \theta\ [2\pi]$ et $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer F et de directrice la droite (AB) (faire une figure pour $\theta = \frac{\pi}{3}$).

1. La tangente à $(\mathcal{C})$ en F coupe Δ_1 en A' et Δ_2 en B'.
   a. Montrer que les deux points A' et B' appartiennent à $(\mathcal{P})$.
   b. Préciser les tangentes à $(\mathcal{P})$ en A' et B' puis montrer qu'elles sont perpendiculaires.
2. Les droites (A'B) et (AB') se coupent en S et la droite (FS) coupe (AB) en K.
   a. Montrer que :
   $$\frac{\overline{\mathrm{SB}}}{\overline{\mathrm{SA}}} = \frac{\overline{\mathrm{FB'}}}{\overline{\mathrm{FA'}}}.$$
   b. En déduire que K est le projeté orthogonal de F sur (AB) puis calculer en fonction de θ et OB le paramètre de $(\mathcal{P})$.
   c. Montrer que S est le sommet de $(\mathcal{P})$.
3. (D) est la droite passant par A' et parallèle à (AB) et $(\mathcal{P}')$ la parabole de foyer F et de directrice (D).
   Montrer qu'il existe une valeur θ_0 de θ telle que A soit un point de la parabole $(\mathcal{P}')$.
4. On suppose que $\theta = \frac{\pi}{3}$.
   a. Montrer que si M est un point commun à $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ alors M appartient à la médiatrice de [AA'] (On notera H le

projeté orthogonal de M sur (AB) et H' le projeté orthogonal de M sur (D)).

Construire les points communs à $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

b. Montrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ n'ont aucune tangente commune.

c. Tracer $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Exercice 2

1. On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k, 68 + 109k)$ où k appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e).

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a qui vérifient l'inégalité $a \leq 226$. On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1\ [\text{mod.}\ p]$.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1$ (modulo 227).

c. En utilisant 1.b., en déduire que, quel que soit l'entier naturel non nul a de A, $g[f(a)] = a$.
Que peut-on dire de $f[g(a)] = a$?

Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + (\ln x)^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. a. Étudier les variations de f.
   b. Construire la courbe $\mathcal{C}$.
2. Soit λ un nombre réel strictement positif et $I(\lambda)$ l'intégrale définie par : $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f(x)dx$.
   a. Calculer en fonction de λ l'intégrale $\int_{\lambda}^{1} \ln x\, dx$ et montrer l'égalité : $I(\lambda) = 3(1-\lambda) + 2\lambda\ln\lambda - \lambda(\ln\lambda)^2$.
   b. Montrer que :
$$\lim_{\lambda\to 0^+} I(\lambda) = 3.$$
3. Soit $n \geq 2$. On pose :
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad J_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \quad \text{où } 1 \leq k \leq n-1.$$
   a. Montrer que f est décroissante sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ et déduire que :
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq J_k \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
   b. Montrer que $\forall n \geq 2$:
$$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} f(1)$$
   et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
   c. En déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{n}{k}\right)^2 = 2.$$

4. Soit g la restriction de f à $]0, 1]$.
   a. Montrer que g est une bijection de $]0, 1]$ sur $[1, +\infty[$.
   b. Exprimer $g^{-1}(x)$ pour $x \geq 1$.

Partie B

Soit $x \in]0, 1]$, $K(x) = \int_0^1 (1-t)e^{tx}dt$, $L(x) = \int_0^1 (1-t)^2 e^{tx}dt$.

Posons :

$$\varphi(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

1. a. Montrer que $\forall x \in]0, 1]$:
$$\frac{1}{3} \leq L(x) \leq \frac{e}{3}$$
   En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} xL(x)$.
   b. Montrer que $\forall x \in]0, 1]$, $xL(x) = 2K(x) - 1$.
   c. Montrer que $\forall x \in]0, 1]$, $K(x) = \varphi(x)$.
   En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$.
2. Soit $F(x) = -2\left(\sqrt{x-1} + 1\right)e^{-\sqrt{x-1}}$ pour $x \geq 1$.
   a. Montrer que $\forall x \in]1, 2]$, $\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 2e^{-\sqrt{x-1}}\varphi\left(\sqrt{x-1}\right)$.
   b. En déduire que F est dérivable à droite en 1 et calculer le nombre dérivé $F'_d(1)$.
3. a. Justifier que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
   b. En déduire que F est une primitive de g^{-1} sur $[1, +\infty[$.
4. Soit $\lambda \geq 1$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par $x = 1$, $x = \lambda$, $y = 0$ et $(C_{g^{-1}})$.
   a. Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ.
   b. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

Sujet 52	Ex1 : Arithmétique-Chiffrement par exponentiation Ex2 : Transformations dans le plan-forme complexe Ex3 : Intégrale-Fonction à l'aide d'une intégrale Ex4 : Nombres complexes

«La seule chose dont on doit avoir peur c'est la peur elle-même.»
(Roosevelt)

Exercice 1

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (13, 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples de relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation : $25g - 108c = 1$.
On rappelle le petit théorème de Fermat : si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p, ce que l'on note $a^{p-1} \equiv 1$ [p].

1. Soit x un entier naturel.
   Démontrer que si $x \equiv a$ [7] et $x \equiv a$ [19] alors $x \equiv a$ [133].
2. a. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
   Démontrer que $a^6 \equiv 1$ [7] puis que $a^{108} \equiv 1$ [7].
   En déduire que $(a^{25})^g \equiv a$ [7].
   b. On suppose que a est un multiple de 7.
   Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a$ [7].
   c. On admet que pour tout entier naturel a, $(a^{25})^g \equiv a$ [19].
   Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a$ [133].

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leq a \leq 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r$ [133] avec $0 \leq r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à r, l'entier r_1 tel que :

$$r^{13} \equiv r_1 \ [133] \text{ avec } 0 \leq r_1 < 133.$$

1. Justifier que $r_1 \equiv a\,[133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des 2 entiers suivants :

$$128 \text{ et } 59.$$

   Décoder ce message.

Exercice 2

Soit ABC un triangle direct rectangle en A et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et O le milieu de $[BC]$.

Partie A

1. a. Prouver qu'il existe un seul antidéplacement f tel que

$$f(A) = C \text{ et } f(B) = A.$$

   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. Soit le point D de $[BC]$ tel que $BD = BA$.
   a. Prouver qu'il existe un seul déplacement R tel que $R(C) = D$ et $R(A) = B$. Justifier que R est une rotation.
   b. Soit ω le centre de R. Prouver que $\omega \in \mathcal{C}$ et que $\omega \in (AD)$.
   c. Construire $O' = R(O)$.
3. Prouver que l'application $\varphi = f \circ R$ est une réflexion.
4. Soit Δ la médiatrice de $[AC]$. Posons $g = R \circ S_\Delta$.
   a. Prouver que g est une symétrie glissée.
   b. Déterminer $g(C)$.
   c. Déduire que $\overrightarrow{OO'}$ est le vecteur de g et déterminer son axe.

Partie B

On suppose en outre que $AB = AC = 1$. Ainsi $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation R_1 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
2. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On considère la transformation $\psi = h \circ R_1$.
   a. Donner l'écriture complexe de ψ.

b. Prouver que pour tout point M distinct de O, d'image M' par ψ, le triangle AMM$'$ est rectangle en M'.

3. Soit M_0 le point du plan d'affixe 2i et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_{n+1} = \psi(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe du point M_n.

a. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis déduire z_n en fonction de n.

b. Déterminer la forme des entiers n tels que le point M_n appartient à [AB) \ {A}.

Exercice 3

On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt & \text{si } x > 0 \\ F(0) = \ln 3 \end{cases}$$

Question préliminaire :

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\text{Pour tout réel } t \geq 0,\ |\sin t| \leq t.$$

Partie A

1. Démontrer que : $\forall x > 0,\ |F(x)| \leq \ln 3$.

2. **a.** Démontrer que :

$$\forall x > 0, \qquad F(x) = \ln 3 - 2\int_x^{3x} \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\, dt.$$

b. En déduire que : $\forall x > 0,\ 0 \leq \ln 3 - F(x) \leq 2x^2$.

(On pourra utiliser la question préliminaire)

3. **a.** En utilisant une intégration par parties portant sur F(x), démontrer que :

$$\forall x > 0, \qquad \left|F(x) - \frac{\sin 3x}{3x} + \frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{2}{3x}.$$

b. En déduire que :

$$\forall x > 0, \qquad |F(x)| \leq \frac{2}{x}.$$

On pourra écrire :

$$\forall x > 0, \qquad F(x) = F(x) - \frac{\sin 3x}{3x} + \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin x}{x}.$$

Partie B

1. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
2. Démontrer que F est continue en 0.
3. Démontrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.
4. a. Vérifier que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et démontrer que :

$$\forall x > 0, \qquad F'(x) = \frac{-4\cos x \,.\, \sin^2 x}{x}.$$

   b. Étudier les variations de la fonction F sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 4

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(z-1)^5 = (z+1)^5$.
   a. Montrer que si z est solution de (E) alors z est un imaginaire pur.
   b. Montrer que les solutions de l'équation (E) peuvent s'écrire sous la forme :

$$z_k = -i.\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{5}\right) \quad \text{avec } k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$.
   a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').
   b. Montrer que : (E) $\Leftrightarrow$ (E').
   En déduire les valeurs exactes de :

$$\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) \qquad \text{et} \qquad \tan\left(\frac{3\pi}{10}\right).$$

Sujet 53

Ex1 : Arithmétique-Chiffrement de Vigenère
Ex2 : Fonction définie par une intégrale - Logarithme
Ex3 : Nombres complexes
Ex4 : Loi normale

«J'ai suivi six honnêtes serviteurs, ils m'apprirent tout ce que je connais, ils se nomment : Quoi et Pourquoi et Quand et Où et Qui et Comment.» (Rudyard Kipling)

Exercice 1

Le chiffrement affine mono-alphabétique est trop facile à « craquer » sur le plan mathématique.

C'est pourquoi le diplomate français Blaise de Vigenère eut l'idée d'utiliser une clé pour doper le chiffrement affine. Cette clé peut être un mot, une phrase, un paragraphe ou même carrément un livre !!!

Si l'on veut coder la phrase « il fait beau et chaud » avec la clé « beau ciel », on procède de la façon suivante :

Étape 1 : On superpose la phrase et la clé (que l'on répète autant de fois qu'il le faut) :

I	L	F	A	I	T	B	E	A	U	E	T	C	H	A	U	D
B	L	E	U	C	I	E	L	B	L	E	U	C	I	E	L	B

Étape 2 : On associe à une lettre de la phrase son entier x_i, et à la lettre correspondante de la clé son entier y_i.

Étape 3 : On détermine z_i tel que $\begin{cases} x_i + y_i \equiv z_i \; [26] \\ 0 \leq z_i \leq 25 \end{cases}$.

Étape 4 : On associe à l'entier z_i sa lettre.

1. Coder la phrase « il fait beau et chaud » avec la clé « bleu ciel ».
2. Quel est le gros intérêt de ce chiffrement par rapport au chiffrement affine ?
3. On s'intéresse maintenant à la procédure de décodage.
   a. Montrer que cette procédure est élémentaire lorsque l'on connait la clé.
   b. Décoder la phrase suivante : « DZQGGBIDZPYR ».

Exercice 2

Partie A

Soit l'intervalle $I = [e^{-1}, e]$ et f la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x}.$$

1. Montrer que f n'est pas dérivable à gauche en $x = e$ et à droite en $x = e^{-1}$.
2. a. Montrer que :
   $\text{signe}(f'(x)) = \text{signe}[(\ln x)^2 - \ln x - 1]$ pour tout $x \in I$.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
3. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

Partie B

Soit la fonction F définie sur I par :

$$\forall x \in I, \qquad F(x) = \int_1^x f(t)dt.$$

1. Prouver que F est dérivable sur I.
2. Préciser le sens de variation de F.
3. Soit $x_0 \in]1, e]$. Interpréter géométriquement le réel $F(x_0)$.

Partie C

Soit H la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, \qquad H(x) = \int_1^{\ln x} \sqrt{1-t^2}dt.$$

1. a. Montrer que $\forall x \in I,\ H'(x) = F'(x)$.
   b. Déduire que $\forall x \in I,\ F(x) = H(x) - H(1)$.
2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
   Montrer que $\mathcal{A} = -H(1)$.

Partie D

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $K(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}dt$.

1. Calculer $K(0)$ et montrer que $K'(x) = \cos^2 x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $K(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

3. Calculer enfin $\mathcal{A}$.

Partie E

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k = 1 + \frac{k}{n}$ pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Soit la somme R_n définie par :

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)dx.$$

1. Prouver qu'il existe un réel $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in [1, 2], \text{ on a } |f'(x)| \leq M.$$

2. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [a_k, a_{k+1}], \qquad |f(x) - f(a_k)| \leq \frac{M}{n}.$$

3. Montrer que :

$$\left|\int_1^2 f(x)dx - R_n\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(a_k)|dx \leq \frac{M}{n}.$$

4. En déduire alors la valeur de :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n.$$

Exercice 3

1. Soit z un nombre complexe de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
   a. En développant $(z + |z|)^2$, trouver une formule simple pour calculer les racines carrées de z.
   b. Déterminer les racines carrées de $z = 5 + 12i$ en utilisant cette formule.
2. Soit z un nombre complexe.
   a. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(z) \geq 0 \Rightarrow z = \left(\sqrt{\frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2}} + i\sqrt{\frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2}}\right)^2$$

$$\operatorname{Im}(z) \leq 0 \Longrightarrow z = \left(\sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}} - i\sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2}}\right)^2$$

b. En déduire les racines carrées des deux nombres complexes : $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = 4 - 3i$.

Exercice 4

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm. Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2}près.

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?
2. a. Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.

   b. De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52% de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1,70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

Sujet 54	Ex1 : Géométrie dans l'espace Ex2 : Loi uniforme-Loi normale Ex3 : Intégration Ex4 : Fonction logarithme

«L'intelligence consiste à ne pas faire deux fois la même erreur.»

(Proverbe chinois)

Exercice 1

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\,;\,-1;\,5)$ et $N_t(11;\,0{,}8t\,;\,1+0{,}6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

   b. La droite (CD) se trouve dans un plan (P) parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan (P).

   c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan (P), coupe ce plan au point E(11; −1; 5).

   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2. a. Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$.

   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

Exercice 2

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante. Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps. Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4% des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5% des cas. On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'événement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192.
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée. Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.

On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.

On note Z' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T' - 15}{\sigma'}$.

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, a est un réel donné strictement positif.

1. Par une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_0^a te^t\,dt = ae^a - \int_0^a e^t\,dt.$$

En déduire que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a - t)e^t\,dt$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose :

$$I_n = \int_0^a \frac{(a - t)^n}{n!} e^t\,dt.$$

Démontrer que :

$$I_n = \frac{a^{n+1}}{(n + 1)!} + I_{n+1}.$$

3. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \qquad e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n.$$

4. a. Démontrer que :

$$0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}(e^a - 1).$$

b. On pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n.$$

En déduire que pour tout $n \geq n_0$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

c. En déduire les limites de u_n et de I_n quand n tend vers $+\infty$ et montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a.$$

Exercice 4

Soit a et b deux réels tels que : $0 < a < b$. Soit f la fonction telle que :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + ax)}{\ln(1 + bx)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. On pose : $g(x) = a(1 + bx)\ln(1 + bx) - b(1 + ax)\ln(1 + ax)$.
   Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$. En déduire que f est strictement croissante.
3. Montrer que :

$$\ln\left(\frac{a}{b} + 1\right)\ln\left(\frac{b}{a} + 1\right) < (\ln 2)^2.$$

Sujet 55

Ex1 : Arithmétique-Repunits
Ex2 : Déplacements du plan
Ex3 : Logarithme-Nombre de chiffres de 1000 !
Ex4 : Loi normale

« Seul on va plus vite, ensemble on va plus loin.»

(Anonyme)

Exercice 1

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres 1. Ainsi, on a : $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, ...

1. Citer deux nombres inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit.
2. A quelle condition sur k le nombre 3 apparait-il dans la décomposition de N_k ?
3. On sait que :
$$\forall k \geq 1, N_k = 1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}.$$
   a. Justifier que : $\forall k \geq 1,\ 9N_k = 10^k - 1$.
   b. Démontrer que : $10^k \equiv 1\ [mod 7] \iff k$ est un multiple de 6.
   En déduire que : 7 divise $N_k \iff 6$ divise k.
   c. Quel est le plus petit rep-unit divisible par 7 ?
   En utilisant N_6, déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne du rep-unit N_{2018} par 7.
4. On note $N_0 = 0$. Soit x un entier naturel.
   a. Étudier les restes de la division euclidienne de x^2 par 4.
   b. Pour tout entier $k \geq 2$, exprimer N_k en fonction de N_{k-2}.
   c. Montrer que le seul rep-unit carré parfait est $N_1 = 1$.
5. On admet que pour tout réel x et tout entier naturel non nul n :
$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1).$$
   a. Démontrer que :
$$\forall x \neq 1, \forall m, r \in \mathbb{N}, \qquad \frac{x^{mr}-1}{x-1} = \frac{x^m - 1}{x-1}\sum_{i=0}^{r-1}(x^m)^i.$$
   En déduire que si p divise k alors N_p divise N_k.
   b. Démontrer que si N_k est premier alors k est premier. La réciproque est-elle vraie ?

6. a. Démontrer l'égalité :

$\forall b$ entier ≥ 2, et $k \geq k'$,

$$\frac{b^k - 1}{b - 1} = b^{k-k'}\left(\frac{b^{k'} - 1}{b - 1}\right) + \frac{b^{k-k'} - 1}{b - 1}.$$

b. En déduire que les diviseurs communs de N_k et $N_{k'}$ sont les diviseurs communs de $N_{k'}$ et $N_{k-k'}$.

c. Montrer par récurrence que :

$$k \wedge k' = 1 \implies N_k \wedge N_{k'} = 1.$$

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère la figure ci-contre.

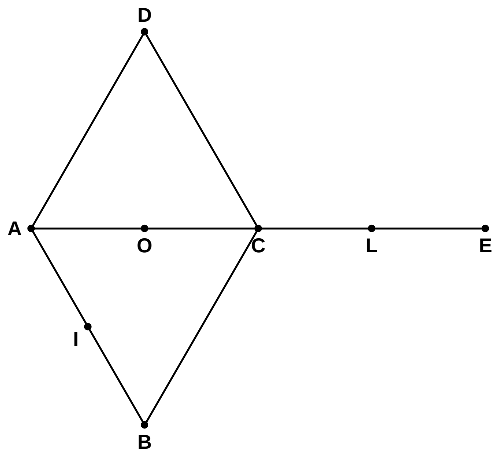
Les triangles ABC et ACD sont des triangles équilatéraux directs, tels que :

$$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Les points O et I sont les milieux respectifs de [AC] et [AB], et les points L et E sont tels que :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{LE}.$$



Soit r la rotation de centre A dont l'angle a pour mesure $\frac{\pi}{3}$, et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

On note $r' = r \circ t$.

1. a. Quelle est l'image de O par r' ?

b. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA}\right)$.

c. Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'application r'.

2. M est un point quelconque du plan, on note $N = r(M)$, J est le milieu du segment [EM], et K le milieu du segment [ND].
   a. Soit P l'antécédent de M par t. Quel est le milieu du segment [LP] ?
   b. Montrer que lorsque I, J et K sont distincts, le triangle IJK est équilatéral. On pourra utiliser $r'(L)$ et $r'(P)$.

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est de déterminer un encadrement du nombre : $S_n = \ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

1. Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).
2. Pour tout entier naturel non nul p, on désigne par A_p le point de coordonnées (p, 0).
   a. Construire les rectangles de bases $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$ et de hauteurs respectives ln 2, ln 3, ..., ln n.
   Montrer que la somme des aires de ces rectangles est S_n.
   b. En utilisant une autre couleur qu'au a, construire les rectangles de bases $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$ et de hauteurs ln 1, ln 2, ..., $\ln(n-1)$.
   Calculer la somme des aires de ces rectangles.
   c. Interpréter graphiquement l'intégrale :
   $$I_n = \int_1^n \ln x \, dx.$$
   où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   d. A l'aide de considérations géométriques, déduire que :
   $$S_{n-1} \leq I_n \leq S_n \quad \text{pour } n \geq 2.$$
3. a. Prouver à l'aide du 2. d, que pour tout entier $n \geq 2$:
   $$I_n \leq S_n \leq I_n + \ln n.$$
   b. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n.

c. Expliciter l'encadrement de S_n ainsi obtenu.

4. En déduire un encadrement du nombre p tel que :

$$10^p \leq 1000! < 10^{p+1}.$$

Conclure alors quant au nombre de chiffres de 1000 !.

Exercice 4

Le grand mathématicien Henri Poincaré (1954-1912) avait l'habitude d'acheter tous les jours un pain de 1 kg chez son boulanger. Il s'était aperçu que sur une période de 6 mois, tous les pains achetés pesaient moins de 900 g. Après s'être plaint au boulanger, il avait constaté que durant les six mois suivants, tous les pains pesaient plus de 1 kg. Il était finalement revenu voir le boulanger pour lui dire qu'il était décidément un incorrigible tricheur.

On suppose que le poids réglementaire du pain, en kg, suit une distribution normale de loi $\mathcal{N}(1, \sigma^2)$.

1. Le boulanger assure que 95 % de ses pains pèsent entre 0,9kg et 1,1kg.
   a. En déduire une valeur approchée de σ.
   b. En déduire la probabilité qu'un pain pèse moins de 0,9 kg, puis la probabilité que pendant six mois, tous les pains pèsent moins de 0,9 kg.
2. Avec les mêmes hypothèses, déterminer la probabilité pour qu'un pain pèse plus de 1 kg, puis la probabilité que tous les pains pendant six mois pèsent plus de 1 kg.
3. Refaire les calculs précédents en supposant que simplement 68% des pains pèsent entre 0,9 kg et 1 kg.

Sujet 56

Ex1 : Fonction exponentielle – suite implicite
Ex2 : Probabilités conditionnelles – loi binomiale
Ex3 : barycentre
Ex4 : Nombres complexes

«Par la rue de "Plus tard", on arrive à la place de "Jamais."»

(Anonyme)

Exercice 1

On considère les fonctions f et F définies $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 1 \quad \text{et} \quad F(x) = (e-1)e^x - x - \frac{3}{2}.$$

1. Montrer que pour tout réel x, on a : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.
2. Étudier les fonctions f et F, tracer leurs courbes respectives $\mathcal{C}$ et Γ (On précisera leur position relative).
3. Soit $x > 0$, justifier l'existence d'un réel c de $[x, x+1]$ tel que l'on ait $f(c) = \int_x^{x+1} f(t)dt$, en déduire que : $F(\mathbb{R}_+) \subset f(\mathbb{R}_+)$.

4. On considère la suite (c_n) définie par $f(c_n) = \int_n^{n+1} f(t)dt$ et la suite (δ_n) définie par $\delta_n = c_n - n$.
   a. Montrer que la suite (δ_n) est bornée.
   b. En utilisant les courbes $\mathcal{C}$ et Γ, représenter les points M_0, M_1, M_2 d'abscisses c_0, c_1 et c_2.
   c. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$e - 1 - \frac{1}{2e^n} = e^{\delta_n} - \frac{\delta_n}{e^n}.$$
   d. Montrer que (δ_n) admet une limite finie ℓ à déterminer.
   e. Pour tout x de $\mathbb{R}$, calculer F(x)-f(x+1). En déduire que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une transformation simple à déterminer.

Exercice 2

Le directeur du personnel d'une entreprise constate que, chaque hiver, un nombre important d'employés s'absentent, malades de la grippe. Le médecin de l'entreprise lui assure qu'une personne non vaccinée contre la grippe a 40 % de chances d'attraper la maladie alors qu'une personne vaccinée n'a que $5\ \%$ de chances de tomber malade. Le directeur décide donc de proposer au personnel une vaccination gratuite.

1. On choisit un employé au hasard et on considère les événements suivants :

   V : l'employé s'est fait vacciner.
   G : l'employé contractera la grippe durant l'hiver.

   On note $p_E(F)$ la probabilité d'un événement F sachant que E s'est réalisé.

   a. Déterminer les probabilités suivantes : $p_V(G)$, $p_V(\overline{G})$, $p_{\overline{V}}(G)$ et $p_{\overline{V}}(\overline{G})$.

   b. Exprimer la probabilité $p(G)$ en fonction de la probabilité $p(V)$.

2. Déterminer le pourcentage minimum de personnes à vacciner pour que moins de 20% des employés aient la grippe cet hiver.

3. Finalement $80\ \%$ du personnel accepte de se faire vacciner.

   a. Quelle est la probabilité p_1 qu'un employé, pris au hasard, tombe malade cet hiver ?

   b. Euclide, employé au service informatique, tombe malade de la grippe. Quelle est la probabilité p_2 qu'il soit vacciné ?

   c. Calculer la probabilité p_3 qu'un employé, pris au hasard, ne soit pas vacciné et attrape la grippe cet hiver.

4. L'entreprise comporte 500 personnes. On considère que le fait pour une personne de tomber malade est indépendant du fait que d'autres personnes le soient.

   a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades. Quelle est la loi de probabilité de X ?

   b. Quel est le nombre moyen de personnes qui tomberont malades de la grippe cet hiver ? En moyenne dans quel intervalle ce nombre peut-il varier ?

Exercice 3

Soit ABC un triangle dont les longueurs des côtés sont toutes différentes : $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On note Δ_a la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et δ_a sa bissectrice intérieure.

1. Les points I_a et J_a sont les points d'intersection de (BC) respectivement avec Δ_a et δ_a.
   a. Calculer de deux manières différentes les aires des triangles ABI_a et ACJ_a.
   b. En déduire que $I_a = \text{bar}\{(B, b), (C, c)\}$.
2. On désigne par (C_a) l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}.$$
   a. Montrer que (C_a) est le cercle de diamètre $[I_aJ_a]$ et que $A \in (C_a)$.
   b. Soit Ω_a le centre du cercle (C_a). Montrer que :
$$\Omega_a = \text{bar}\{(B, b^2), (C, -c^2)\}.$$

3. On définit de même les cercles (C_b), ensemble des points du plan tels que $\frac{MC}{MA} = \frac{a}{c}$, de centre Ω_b et (C_c), ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}$, de centre Ω_c.
   a. Montrer que pour tout point M du plan :
$$(b^2 - c^2)\overrightarrow{M\Omega_a} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{M\Omega_b} + (a^2 - b^2)\overrightarrow{M\Omega_c} = \vec{0}.$$
   b. En déduire que les points Ω_a, Ω_b et Ω_c sont alignés.
4. Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme et N un point du segment [AB] et P le point tel que AN = CP. Les droites (AP) et (CN) se coupent en Q. Montrer que la droite (DQ) est bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$.

Exercice 4

1. a. α est un nombre réel.
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :
$$z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0.$$

b. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation : $z^{2n} - 2z^{n}\cos\alpha + 1 = 0$ dans laquelle n est un entier naturel non nul donné.

2. Pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel α, pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P_n(z) = z^{2n} - 2z^{n}\cos\alpha + 1$$

a. Montrer que, pour tous z, α et n, on a :

$$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$$

b. Calculer $P_n(1)$ et en déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$$

c. Pour tout α de $]0, \pi[$ et pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Montrer que, pour α non nul, on a :

$$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$$

d. Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

e. En déduire que pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \ldots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Sujet 57

Ex1 : Fonction logarithme – suites numériques
Ex2 : Arithmétique – Critère d'Eisenstein
Ex3 : Loi normale – Intervalle de fluctuation
Ex4 : Nombres complexes

«Ne dépends de personne dans ce monde ; même ton ombre te quitte lorsque tu fais face à la noirceur.»
(Anonyme)

Exercice 1

1. On considère la fonction u définie sur $]1, +\infty[$ par $u(x) = \frac{1}{\ln x}$.
   Dresser le tableau de variation de u.
2. On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$.
   Dresser le tableau de variation de f.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \int_x^{x+n} f(t)dt$ où $x \in]1, +\infty[$.
   a. Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[, nf(x+n) \leq F_n(x) \leq nf(x)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$.
   b. Montrer que : $\forall x > 0, e^x > x + 1$. En déduire que :
   $$\forall t > 1, \quad 0 < \ln t < t - 1.$$
   c. Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, \ F_n(x) - n > \ln\left[\frac{n+x-1}{x-1}\right]$. En déduire $\lim\limits_{x \to 1^+} F_n(x)$.
   d. Dresser le tableau de variation de F_n.
   e. Tracer une allure de la courbe représentative de F_1.
4. Soit la quantité :
   $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f'\left(\frac{k}{n}\right), \quad \text{pour } n \geq 2.$$
   a. Montrer que pour tout $n \geq 2$:
   $$S_n - \frac{1}{n}f'\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(1) - f\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n}f'(1).$$
   b. En déduire que pour tout $n \geq 2$:
   $$2\ln 2 + \frac{1}{n}\ln 2 - f\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq 2\ln 2 + \frac{1}{n}\ln(1+n) - f\left(\frac{1}{n}\right).$$

c. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

5. a. Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$S_n = \frac{1}{n} \ln\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right].$$

b. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = 4.$$

Exercice 2

1. Démontrer que, si les entiers p et q sont premiers entre eux, alors pour tout entier naturel n, les entiers p et q^n sont aussi premiers entre eux.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ des entiers relatifs tels que $a_n \neq 0$. On considère l'équation algébrique de degré n :

$$(E) \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

a. On suppose que (E) admet une solution rationnelle, pouvant donc s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible p/q. En appliquant le théorème de Gauss, démontrer que p divise a_0 et que q divise a_n.

b. Énoncer alors un critère permettant de connaître les fractions qui peuvent être solutions d'une équation polynomiale, à coefficients entiers, donnée. Ce critère est appelé critère d'**Eisenstein** (mathématicien allemand 1823-1852).

3. En utilisant le critère d'Eisenstein, résoudre l'équation :

$$4x^3 - 7x^2 - 12x + 21 = 0.$$

4. On note $\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

a. Exprimer, pour tout réel x, $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.

b. En déduire que α est solution de l'équation :

$$(E) \quad 4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

c. En utilisant le critère d'Eisenstein, démontrer que α est irrationnel.

Exercice 3

Le taux d'hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne $\mu = 45{,}5$ et d'écart-type σ.

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-45{,}5}{\sigma}$.

1. a. Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
   b. Déterminer $P(X \leq \mu)$.
2. En prenant $\sigma = 3{,}8$, déterminer $P(37{,}9 \leq X \leq 53{,}1)$. Arrondir le résultat au centième.

Partie B

Une certaine maladie V est présente dans la population française avec la fréquence 1%. On sait d'autre part que 30% de la population française a plus de 50 ans, et que 90% des porteurs de la maladie V dans la population française ont plus de 50 ans.
On choisit au hasard un individu dans la population française. On note α l'unique réel tel que $P(X \leq \alpha) = 0{,}995$, où X est la variable aléatoire définie au début de l'exercice. On ne cherchera pas à calculer α. On définit les évènements :
M : « l'individu est porteur de la maladie V » ;
S : « l'individu a plus de 50 ans » ;
H : « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».
Ainsi : $P(M) = 0{,}01$, $P_M(S) = 0{,}9$ et $P(H) = P(X > \alpha)$.
D'autre part, une étude statistique a révélé que 60% des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V.

1. a. Déterminer $P(M \cap S)$.
   b. On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est égale à 0,03.
2. a. Calculer la probabilité $P(H)$.

b. L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V. Arrondir au millième.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie V.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de la maladie V dans les échantillons de taille 1 000, prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millième.
2. Dans un échantillon aléatoire de 1 000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V. Au regard de ce résultat, peut-on décider, au seuil de 95%, que le gène a une influence sur la maladie ?

Exercice 4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère trois points A, B et C non alignés dont les affixes respectives a, b et c vérifient la condition :

$$(R): \ (a+b+c)^2 = 3(bc+ca+ab)$$

1. Donner trois points A, B et C dont les affixes vérifient (R).
2. On se propose de chercher les points M tels que :

$$(1): \ \frac{1}{\|\overrightarrow{MA}\|^2}.\overrightarrow{MA} + \frac{1}{\|\overrightarrow{MB}\|^2}.\overrightarrow{MB} + \frac{1}{\|\overrightarrow{MC}\|^2}.\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

   a. Si z désigne l'affixe de M, montrer que la relation (1) est équivalente à la relation suivante :

$$(2): \ \frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} + \frac{1}{z-c} = 0.$$

   b. Qu'est le point M pour le triangle ABC ?

Sujet 58

Ex1 : Arithmétique – Codage - Matrices
Ex2 : Probabilité – Intervalle de confiance
Ex3 : Équations différentielles
Ex4 : Fonction logarithme – Fonction réciproque

«Mon miroir est mon meilleur ami car lorsque je pleure, il ne rit jamais.»

(Charlie Chaplin)

Exercice 1

Partie A : préliminaires

1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que : $n^2 \equiv N-1 \bmod N$. Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \bmod N$.

   b. En déduire l'existence un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \bmod 26$.

   On admettra que l'unique entier k tel que :
   $0 \le k \le 25$ et $5k \equiv 1 \bmod 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

   a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

   b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

   c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

   d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

• X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : Y = AX.

• Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

• Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) donne « YE » :

$$\text{OU} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{YE}.$$

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que : Y = AX.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.

2. En utilisant la question 1. b. de la partie A, établir que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \mod 26 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \mod 26 \end{cases}.$$

3. Décoder le mot « QP ».

Exercice 2

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.
4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

   52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A

   (*estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes)

   Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?
5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.
   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.
   Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

Exercice 3

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Déterminer une équation de la courbe $\mathcal{C}$ passant par le point A(1 ; 1) et telle qu'en chacun des points M de $\mathcal{C}$ la tangente ait un coefficient directeur double du carré de l'ordonnée de M.
2. Trouver les courbes $\mathcal{C}$ telles qu'en tout point M de $\mathcal{C}$ la tangente à $\mathcal{C}$ soit perpendiculaire à la droite (OM).

3. Déterminer une équation de la courbe $\mathcal{C}$ passant par le point A(1 ; 3) et telle qu'en tout point M de $\mathcal{C}$ la pente de la tangente soit le double de celle de la droite (OM).

Exercice 4

On considère la fonction $f(x) = x - 1 - \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.
2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0, 1]$.
   a. Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
   b. Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ de g^{-1} dans le repère précédent.
   c. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}'$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{e}$.
   d. Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{2\ln 2 - 1}{2}\right)$.
3. Soit $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de nombres réels strictement positifs, et M et U_k les nombres définis par :

$$M = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{et} \quad U_k = \frac{x_k}{M}.$$

   a. En utilisant les variations de f, montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\ln x \leq x - 1$ ①.
   b. Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \quad ②.$$

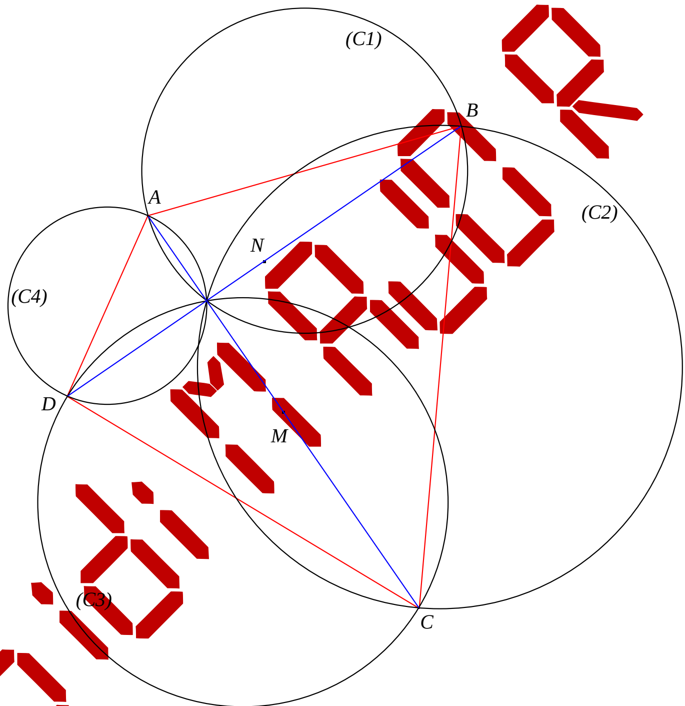
   c. En utilisant ②, montrer que :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Sujet 59	Ex1 : Transformations dans le plan Ex2 : Calcul intégral Ex3 : Géométrie dans l'espace Ex4 : Fonction logarithme – Suite convergente

«J'ai appris que le courage n'est pas l'absence de peur, mais la capacité de la vaincre.» (Nelson Mandela)

Exercice 1



Dans le plan, on considère deux segments [AC] et [BD] tels que $AC = BD$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On désigne par M le milieu de [AC] et par N celui de [BD]. On appelle (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) les cercles de diamètres respectifs [AB], [BC], [CD] et [DA]. On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1. **a.** Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles (C_1) et (C_3).

b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles (C_2) et (C_4).

c. Quelle est la nature du quadrilatère INJM ? On désigne par P et R les points diamétralement opposés à I sur, respectivement, (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamétralement opposés à J sur, respectivement, (C_2) et (C_4).

2. Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?

b. En déduire que J est le milieu de [PR].

Exercice 2

On considère l'intégrale $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos t}$ et pour $n \geq 1$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^n}{\cos t} dt$

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \cos t \, dt$ et en déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.
2. Calculer I_1, I_3 et I_5.
3. Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

a. Montrer que f est une primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{\cos t}$.

b. En déduire le calcul de I_0, I_2 et I_4.

4. On étend la définition de la fonction g à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Étudier les variations de g et tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

b. Montrer que la restriction h de g à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection sur un intervalle à déterminer.

c. Étudier la dérivabilité de h^{-1} et calculer sa dérivée.

d. En déduire le calcul des intégrales :

$$u = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} \quad \text{et} \quad v = \int_{e^{\sqrt{2}}}^{e^2} \frac{dt}{t \ln t \sqrt{(\ln t)^2 - 1}}.$$

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

* les points $A(0\,;1\,;-1)$ et $B(-2\,;2\,;-1)$.

* la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. a. Montrer que les droites (AB) et D ne sont pas parallèles.

   b. Montrer que les droites (AB) et D ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel. On considère le point M de la droite D de coordonnées $(-2+u\,;1+u\,;-1-u)$.

3. Vérifier que le plan P d'équation $x+y-z-3u=0$ est orthogonal à la droite D et passe par le point M.
4. Montrer que le plan P et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\,;3-3u\,;-1)$.
5. a. Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à D.

   b. Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?
6. a. Exprimer MN^2 en fonction de u.

   b. En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

1. a. Montrer que f est une fonction paire.

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter ce résultat.
2. a. Montrer que f est dérivable en 0.

   b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{2}{x}\left[f(x) - \frac{x^2}{x^2+1}\right].$$

3. a. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $g(t) = \ln t$, montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, il existe un réel $c \in]x^2, x^2+1[$ tel que :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{c}.$$

b. Déduire que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{x^2}{x^2+1} < f(x) < 1.$$

c. Déterminer alors le signe de $f'(x)$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe représentative (C) de f relativement à un repère orthonormé.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$.

a. Exprimer u_n en fonction de $f(n)$. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e.$$

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

6. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(n.\, u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k\right).$$

b. Montrer que (V_n) est une suite croissante.

c. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $V_n < e$. En déduire que la suite (V_n) est convergente.

Sujet 60

Ex1 : Géométrie dans l'espace
Ex2 : Arithmétique
Ex3 : Probabilité – Loi binomiale
Ex4 : Coniques

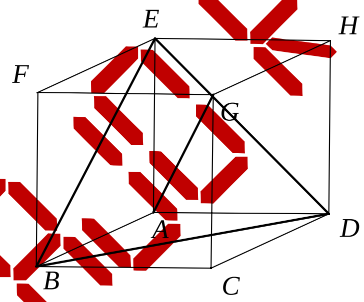
« On n'est pas orphelin d'avoir perdu père et mère, mais d'avoir perdu l'espoir.» (Anonyme)

Exercice 1

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

O_1 et O_2 sont les centres des carrés ABCD et EFGH, et I est le centre de gravité du triangle EBD.

Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :
$\{(E\,;1), (B\,;1-m),$
$(G\,;2m-1), (D\,;1-m)\}$.



Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.
2. Préciser la position du point G_1.
   Vérifier que $G_0 = A$. En déduire que A, I et G sont alignés.
3. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
4. a. Vérifier que les points A, G_m, E et O_1 sont coplanaires.
   b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

Partie B

Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (EBD).
   En déduire une équation cartésienne du plan ABD.

2. Déterminer les coordonnées du point G_m.
3. Pour quelles valeurs de m, la distance de G_m au plan (EBD) est-elle égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$?

Exercice 2

1. a. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois entiers p, $p+10$ et $p+20$, et l'un seulement, est divisible par le nombre 3.
   b. Les entiers a, b et c sont dans cet ordre les trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois termes sachant qu'ils sont premiers.
2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs (u, v, w) tels que $3u + 13v + 23w = 0$.
   a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w\ [3]$.
   b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leq r \leq 2$.
   Montrer que les éléments de E sont de la forme : $(-13k - 23k' - 12r, 3k + r, 3k' + r)$.
   c. L'espace est rapporté à un repère orthonormé d'origine O et soit (P) le plan d'équation : $3x + 13y + 23z = 0$.
   Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées (x, y, z) entières relatives appartenant au plan (P) et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Exercice 3

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de cinquante ouguiyas, en cas de fraude l'amende est de cinq cent ouguiyas. Ali fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Ali est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Dans cette partie on suppose que $p = \frac{1}{20}$.
   a. Calculer l'espérance mathématique de X.
   b. Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
   c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Ali soit contrôlé au plus deux fois.
3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
   Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \frac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Ali subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99%.
   a. Démontrer que $P(X \leq 2) = (1 - p)^{38}(741p^2 + 38p + 1)$.
   b. Soit f la fonction définie sur [0; 1] par :
   $$f(x) = (1 - x)^{38}(741x^2 + 38x + 1).$$
   Montrer que f est strictement décroissante sur [0; 1] et qu'il existe un unique réel x_0 de l'intervalle [0; 1] tel que $f(x_0) = 0{,}01$. Déterminer l'entier naturel n tel que :
   $$\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}.$$
   c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Ali subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99%. (On exprimera p en fonction de x_0).

Exercice 4

On considère un segment [AB] de milieu O et de médiatrice Δ et F un point de Δ distinct de O.

1. a. Montrer que si $(\mathcal{E})$ est une ellipse passant par A et B et de foyer F alors son second foyer F' appartient à Δ.
   b. On considère le cas où F' est le symétrique de F par rapport à la droite (AB).
   Montrer que dans ce cas, A et B sont les sommets du petit axe de l'ellipse $(\mathcal{E})$.
   c. Construire les sommets S et S' du grand axe de $(\mathcal{E})$ puis tracer $(\mathcal{E})$.
2. a. Montrer que si $(\mathcal{H})$ est une hyperbole passant par A et B et de foyer F alors son second foyer F' appartient à Δ ou à une ellipse $(\mathcal{E}')$ de foyers A et B.
   b. Construire les sommets de $(\mathcal{E}')$ puis tracer $(\mathcal{E}')$.
   c. On considère le cas où $\overline{\mathrm{OF}'} = 5\overline{\mathrm{OF}}$.
   Construire la tangente T en A à l'hyperbole $(\mathcal{H})$ ainsi que les sommets et les asymptotes de $(\mathcal{H})$. Tracer $(\mathcal{H})$.
3. a. Montrer qu'il existe deux paraboles $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ de même foyer F et passant par A et B. Construire les directrices de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
   b. Montrer qu'en chacun des points A et B, les tangentes à $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont perpendiculaires.

Thèmes d'étude

1. Codage de Hill – Inverse d'une matrice modulo n.

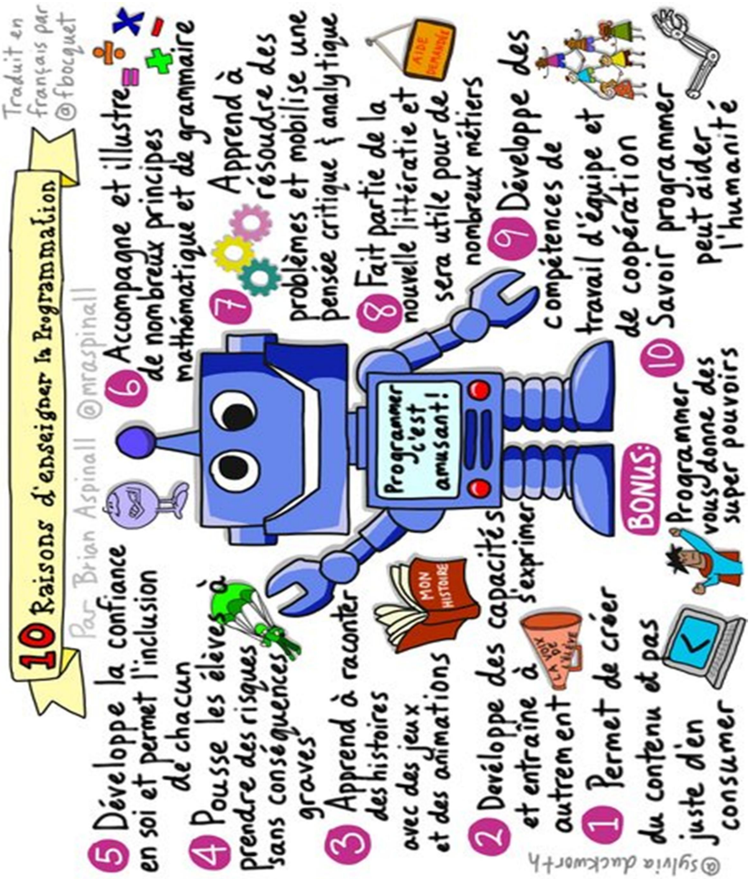
2. Chiffrement RSA.

3. Pertinence d'une page web.

4. Restes chinois.

5. Modèle proie-prédateur – Dynamique population.

10 raisons pour réclamer l'introduction de l'algorithmique dans nos programmes



Thème 1	Codage de Hill – Inverse d'une matrice modulo n.

« Croyez en vos rêves et ils se réaliseront peut-être. Croyez en vous et ils se réaliseront sûrement.»
(Martin Luther King)

On s'intéresse ici à un chiffrement bigraphique, c'est-à-dire que les lettres seront groupées deux à deux. (On peut imaginer des chiffrements où les lettres seront regroupées par paquets plus grands). Si le nombre de lettres du message est impair, on peut ajouter une lettre arbitraire à la fin du message original.
On remplace les lettres par leur rang dans l'alphabet :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Les rangs R_k et R_{k+1} des lettres du texte clair sont chiffrées C_k et C_{k+1} à l'aide du système suivant dans lequel a, b, c et d désignent des entiers naturels donnés :

$$\begin{cases} C_k = \text{reste de la division euclidienne de } (aR_k + bR_{k+1}) \text{ par } 26 \\ C_{k+1} = \text{reste de la division euclidienne de } (cR_k + dR_{k+1}) \text{ par } 26 \end{cases}.$$

On note ce système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} C_k \\ C_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_k \\ R_{k+1} \end{pmatrix} \pmod{26}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la clef du chiffrement.

7. Un exemple de chiffrement

Mohamed veut transmettre le message « JE SUIS PRÊT » et utilise la clef $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. Les deux premières lettres du message sont J et E numérotées $R_1 = 10$ et $R_2 = 5$. Pour les coder, on écrit :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \pmod{26} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \text{reste de } 7 \times 10 + 3 \times 5 = 85 \text{ par } 26 \\ C_2 = \text{reste de } 5 \times 10 + 8 \times 5 = 90 \text{ par } 26 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 7 \\ C_2 = 12 \end{cases}.$$

Les deux premières lettres du message codées sont : « GL ».

En procédant de la même façon, recopier et compléter le tableau suivant :

Lettres	J	E	S	U	I	S	P	R	E	T
Rang	10	5	19	21	9	19	16	18	5	20
Rang chiffré C_k	7	12								
Lettres chiffrées	G	L								

2. Un exemple de déchiffrement

a. Vérifier que A^{-1}, la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{41} & -\frac{3}{41} \\ -\frac{5}{41} & \frac{7}{41} \end{pmatrix}.$$

b. Déterminer l'unique entier naturel non nul k $(1 \leq k \leq 25)$ tel que $41k \equiv 1\ [26]$. Cet entiers k est appelé l'inverse de 41 modulo 26 et noté $\mathbf{41^{-1}}$ $(\mathbf{mod}\ \mathbf{26})$. Quelle est la valeur de 41^{-1} (mod 26) ?

c. Un entier m admet un inverse modulo 26 si, et seulement si, il existe un unique entier k compris entre 1 et 25 tel que $mk \equiv 1\ [26]$. Démontrer que m admet un inverse modulo 26 si, et seulement si, m et 26 sont premiers entre eux.

d. On construit alors la matrice notée A^{-1} (mod 26) de la manière suivante : pour chacun des termes A^{-1}, on remplace $\frac{1}{41}$ par 41^{-1} (mod 26) et on calcule le reste dans la division euclidienne par 26.

Par exemple, pour le premier terme : $8 \times \frac{1}{41}$ est remplacé par 8×7, puis par 4.

Montrer que A^{-1} (mod 26) $= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 17 & 23 \end{pmatrix}$.

e. On déchiffre alors les messages en utilisant :

$$\begin{pmatrix} R_k \\ R_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 17 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_k \\ C_{k+1} \end{pmatrix} \quad (\text{mod } 26).$$

On a codé un message et on a obtenu :

« QWPYWFHHBA »

Déchiffrer ce message à l'aide de la matrice de déchiffrement.

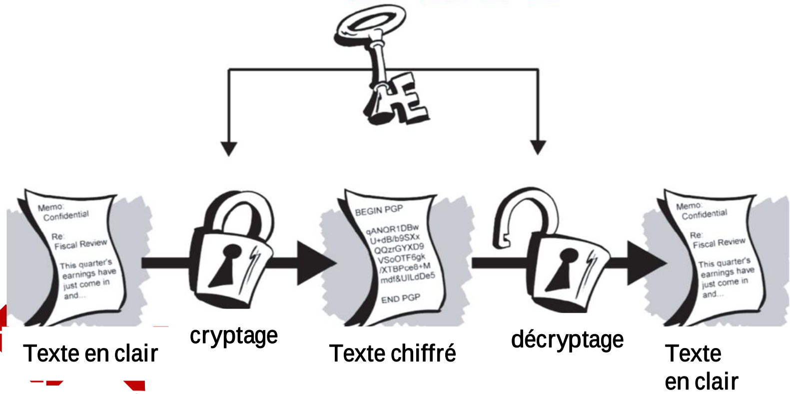
Thème 2 — Chiffrement RSA

« Si vous voyez un sourd courir, ne vous posez pas de questions, suivez-le, car il n'a pas entendu le danger, lui... il l'a vu !»

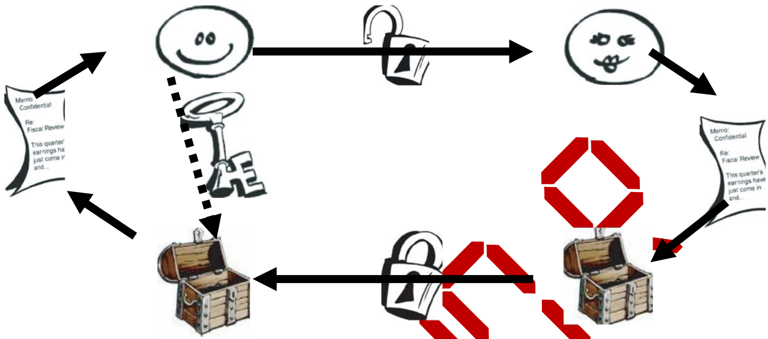
(Anonyme)

I. Introduction

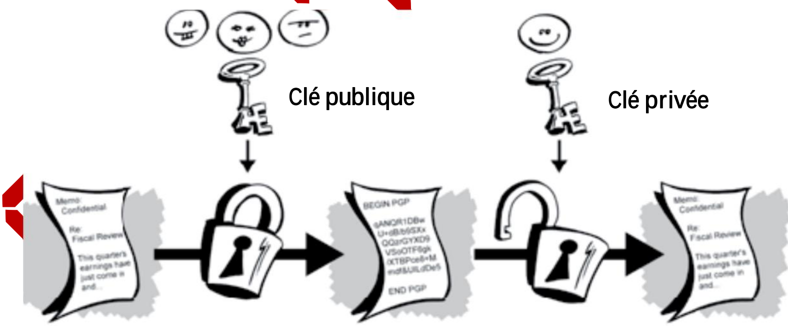
Dans les années 1970, la cryptographie n'est plus seulement l'apanage des militaires. Les banques, pour la sécurité de leurs transactions, sont devenues de grandes consommatrices de messages codés. Les chiffrements disponibles alors sont sûrs, eu égard aux possibilités d'attaques contemporaines. Le problème essentiel est alors la distribution des clés, ce secret que l'envoyeur et le destinataire doivent partager pour pouvoir respectivement chiffrer et déchiffrer. Les armées et les états ont recours aux valises diplomatiques pour ces échanges, mais ceci n'est pas accessible aux civils...



En 1976, Whitfield Diffie et Martin Hellman proposent une nouvelle façon de chiffrer, qui contourne cet écueil. Commençons par expliquer leur procédé de façon imagée. Un ami doit vous faire parvenir un message très important par la poste, mais vous n'avez pas confiance en votre facteur que vous soupçonnez d'ouvrir vos lettres. Comment être sûr de recevoir ce message sans qu'il soit lu ? Vous commencez par envoyer à votre ami un cadenas sans sa clé, mais en position ouverte. Celui-ci glisse alors le message dans une boîte qu'il ferme à l'aide du cadenas, puis il vous envoie cette boîte. Le facteur ne peut pas ouvrir cette boîte, car la seule clé le permettant est en votre possession.



La cryptographie à clé publique repose exactement sur ce principe. Mais il s'agira de créer deux clés différentes : une permettant de crypter (clé publique) et une deuxième, ne pouvant de déduire de la précédente permettant de décrypter le message (clé privée).



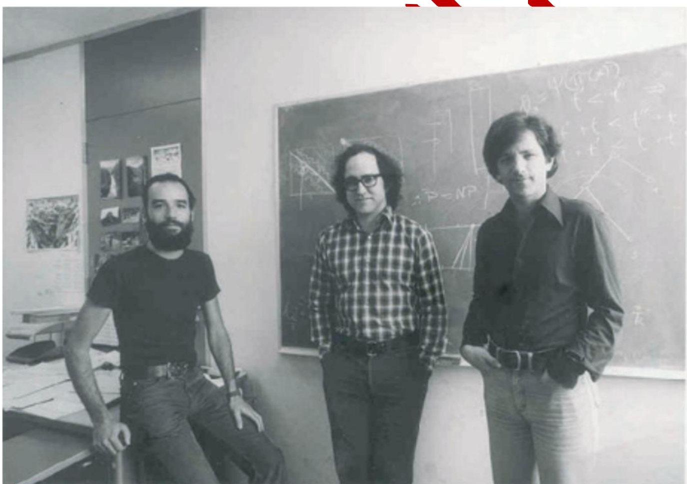
On dispose d'une fonction f sur les entiers, qui possède un inverse g. On suppose qu'on peut fabriquer un tel couple (f ; g), mais que connaissant uniquement f, il est impossible (ou du moins très difficile) de retrouver g. f est la **clé publique**, que vous pouvez révéler à quiconque. Si une personne veut vous envoyer un message M, elle le code à l'aide de f et vous transmet M', sans aucune précaution. g est la **clé privée**, elle reste en votre seule possession. Vous décodez le message en calculant :

$$g(f(M)) = g(M') = M.$$

La connaissance de f par un tiers ne compromet pas la sécurité de l'envoi des messages codés, puisqu'elle ne permet pas de retrouver g. Il est possible de donner librement f, qui mérite bien son nom de clé publique.

Mais, comment trouver de telles fonctions f et g ?

Diffie et Hellman n'ont pas eux-mêmes proposé de fonctions satisfaisantes, mais dès 1977, R. Rivest, A. Shamir et L. Adleman trouvent une solution possible, la meilleure et la plus utilisée à ce jour, la **cryptographie RSA**



Adi Shamir — Ronald Rivest — Len Adleman

Le système RSA sert aussi bien au chiffrement de documents, qu'à l'identification des messages.

Ce système a résisté à toutes les attaques, jusqu'à présent, et il est devenu un standard dans le monde.

Tout le principe de RSA repose sur le fait qu'il est très difficile et long de décomposer un très grand nombre en deux facteurs premiers.

II. La base arithmétique du RSA

1. Soit deux nombres premiers p et q distincts et différents de 2. On pose $n = pq$ et $\varphi(n) = (p-1) \times (q-1)$

(φ est l'indicateur d'Euler de n).

On choisit un entier e premier avec $\varphi(n)$ vérifiant :

$$1 < e < \varphi(n).$$

Montrer qu'il existe un seul entier d vérifiant :

$$1 \leq d < \varphi(n) \text{ et } de \equiv 1 \ [\varphi(n)].$$

Le triplet (p, q, d) constitue la clé privée, le couple (n, e) constitue la clé publique.

La clé publique, comme son nom l'indique, est rendue publique dans un annuaire, la clé privée qui lui est associée est conservée évidemment par son propriétaire.

2. On veut montrer que pour tout entier naturel m, on a :

$$m^{de} \equiv m \ [n].$$

   a. On rappelle que $n = pq$; montrer qu'il suffit d'établir que p et q divisent $m^{de} - m$.

   b. Montrer qu'il existe un entier k tel que :

$$de = k \times (p-1)(q-1) + 1.$$

   c. Montrer que p divise $m^{de} - m$.

   d. Conclure.

III. Description du fonctionnement à travers un exemple

Étape 1 : Confection des clés

On choisit ici $p = 11$ et $q = 17$; alors $n = 187$ (dans la pratique p et q sont des entiers d'une centaine de chiffres et donc n comporte environ 200 chiffres).

On peut choisir $e = 7$ (premier avec $\varphi(n) = 160$) ; ainsi, on a formé la **clé publique** (187, 7) qui sera divulguée à tout le monde en indiquant le propriétaire. Elle sera utilisée par les personnes voulant envoyer un message au propriétaire de cette clé pour crypter celui-ci. A présent on doit déterminer la clé privée.

L'entier d doit vérifier $de \equiv 1 \ (\varphi(n))$; donc il existe un entier k tel que :

$$ed = 160k + 1 \quad \text{soit} \quad 7d = 160k + 1.$$

On cherche donc k pour que 7 divise $160k + 1$.

$k = 1$ convient d'où $d = 23$. ($k = 8$ donne $d = 183 > 160$ qui ne convient pas).

On vient ainsi de former la **clé privée** (11, 17, 23) qui permettra de décoder tout message codé avec la clé publique correspondante.

Étape 2 : conversion du message en nombre

A = 01, B = 02, ... , espace = 00, 0 = 30, 1 = 31, ...

Soit M le message à envoyer (et donc à crypter).

Exemple : M=PUISSANCE ARITHMETIQUE sera codé en :

M'=16210919190114200500011809200813052009172105

Étape 3 : découpage

On découpe M' en tranches ayant un chiffre de moins que la clé n.

Ici, on découpe le message en tranches de 2. Le message devient :

M'=**16** 21 **09** 19 **19** 01 **14** 20 **05** 00 **01** 18 **09** 20 **08** 13 **05** 20 **09** 17 **21** 05

Étape 4 : cryptage

Chaque tranche est élevée à la puissance e (ici 7) et on cherche la congruence de ce nouveau nombre avec n (ici 187).

Exemple :

16 devient 135, car $16^7 = 268435456 \equiv 135 \pmod{187}$.

Si on appelle t une tranche du message d'origine et t' la tranche correspondante du nouveau message, on a : $t' = t^e \pmod{187}$.

M' ainsi codé est en tranches de 3 chiffres :

135 098 **070** 145 **145** 001 **108** 147 **146** 000 **001** 171 **070** 147 **134** 106 **146** 147 **070** 085 **098** 146

On envoie ensuite ce message débarrassé de ses espaces à la personne propriétaire de la clé publique utilisée ?

Étape 5 : décodage

Le propriétaire de la clé reçoit le message et le découpe en tranches de 3 chiffres comme la clé n.

$t' \equiv t^{e} \pmod{187}$, donc $t'^{d} \equiv t^{ed} \pmod{187} \equiv t \pmod{187}$.

Ainsi chaque tranche est élevée à la puissance d (ici 23) et on recherche la congruence de ce nouveau nombre avec n.

Exemple : 135 devient 16, car $135^{23} \equiv 16 \pmod{187}$.

Ainsi, chaque tranche t' du message codé retrouve sa valeur initiale t.

Le propriétaire récupère donc le message :

16 21 **09** 19 **19** 01 **14** 20 **05** 00 **01** 18 **09** 20 **08** 13 **05** 20 **09** 17 **21** 05

Donc il ne reste plus qu'à le traduire alphabétiquement pour récupérer PUISSANCE ARITHMETIQUE.

Thème 3 — Pertinence d’une page web

«Mettez beaucoup de temps à vous améliorer vous-mêmes, il n'en restera plus alors pour critiquer les autres.»

(Anonyme)

I. Introduction

Un moteur de recherche copie dans un premier temps les pages web sur des milliers d’ordinateurs et les trie par ordre alphabétique des mots clés. La première idée simple consisterait pour chaque requête à fournir la liste de pages contenant le (ou les) mots clés de la requête. Mais il y en a des dizaines de milliers! Aussi l’ordre alphabétique n’apparaît pas le meilleur pour assurer un service rapide et de qualité.

Larry Page
cofondateur de Google.

Les pages référencées pour le client doivent donner une idée aussi juste que possible de l’information disponible au moment de la requête et faire apparaître en premières citations celles qui y répondent le mieux, les plus *pertinentes*. C’est ici qu’intervient l’innovation de Larry Page (fondateur avec Serguei Brin de Google) connue sous le nom de *Pagerank* (*to rank : classer*).

L’idée pour déterminer la pertinence d’une page en lien avec un mot clé va être de s’appuyer sur l’existence des liens hypertextes qui existent entre les pages web, en partant de l’idée basique que plus une page est citée, plus elle est *pertinente*.

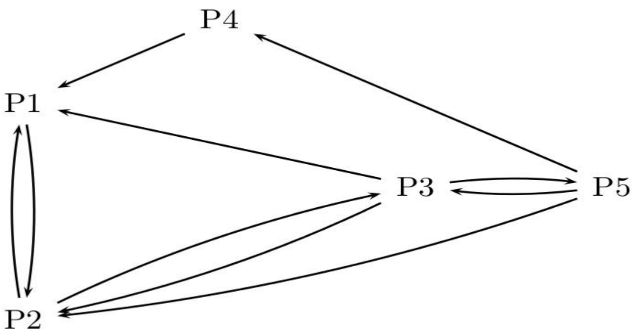
On apprend sur *Wikipédia* que :

« Le PageRank est l’algorithme d’analyse des liens concourant au système de classement des pages Web *utilisé par le* moteur de recherche Google*. Il mesure quantitativement la popularité d’une page web. Le principe de base est d’attribuer à chaque page une valeur (ou score) proportionnelle au nombre de fois que passerait par cette page un utilisateur parcourant le* graphe du

Web*, en cliquant aléatoirement sur un des liens apparaissant sur chaque page. Ainsi, une page a un PageRank d'autant plus important qu'est grande la somme des PageRanks des pages qui pointent vers elle (elle comprise, s'il y a des liens internes).*
Les internautes peuvent obtenir une approximation du classement de chaque page en consultant la zone PageRank de la Google Toolbar*, qui indique sa valeur sur une échelle de 0 à 10* (Échelle logarithmique)*. Il existe aussi de nombreux outils pour l'obtenir sans afficher la toolbar. »*

II. Mesurer la pertinence

On se propose de calculer le PageRank des pages Web dans un cas simple sur le "mini-internet" ci-dessous qui ne comporte que 5 pages Web (en 2007 le nombre de pages Web avoisinait 25 milliards de pages), où les flèches représentent leurs liens hypertexte. Dans tout l'exercice, on note μ_i la mesure de pertinence de la page *i*.



1. Calcul naïf.

On part du principe que plus la page est citée, plus celle-ci est pertinente. Ainsi, dans ce modèle, on attribue à i le nombre de liens qui pointent vers la page *i*.

a. Selon ce modèle, donner la pertinence de chaque page du "mini Internet".

b. On crée une sixième page et une septième page qui comportent chacune un seul lien pointant vers la page 3. Calculer la pertinence de chacune de ces sept pages. Que peut-on en conclure ?

2. **Calcul pondéré.**

On décide de diminuer le poids des pages qui émettent beaucoup de liens. Si une page i émet k liens (k ≠ 0), chacun aura pour poids $^1/_k$. Dans ce deuxième modèle, la pertinence μ_i de la page i est définie comme la somme des poids de chaque lien qui pointe vers la page i.

a. Selon ce modèle, donner la pertinence de chaque page du "mini Internet".

b. On crée une sixième page et une septième page qui comportent chacune un seul lien pointant vers la page 3. Calculer la pertinence de chacune de ces sept pages. Que peut-on en conclure ?

c. Est-il facile de manipuler l'ordre de pertinence des pages ? Que penser d'une page n'émettant aucun lien ?

3. **Approche probabiliste.**

On considère que le surfeur suit une marche aléatoire sur le graphe et on s'intéresse à la loi de probabilité de la position du surfeur sur le graphe après m étapes (m clics), m étant un entier naturel non nul.

Le surfeur qui visite une page i comportant k liens (k ≠ 0) à l'étape m atteint à l'étape $m + 1$ une page pointée par i avec une probabilité de $^1/_k$ (les choix des liens sont équiprobables).

On note X_m la variable aléatoire qui prend comme valeurs le numéro de la page sur laquelle se trouve le surfeur au bout de m étapes. On note U_m la matrice ligne :

$$(P(X_m = 1)\ P(X_m = 2)\ P(X_m = 3)\ P(X_m = 4)\ P(X_m = 5)).$$

On suppose que le surfeur se trouve au départ sur la page 2. Ainsi $U_0 = (0\ 1\ 0\ 0\ 0)$.

a. 1. Donner U_1 puis U_2.

2. On note $U_m = (p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5)$. Exprimer U_{m+1} à l'aide de p_1 , p_2 , p_3 , p_4 et p_5.

3. Écrire la matrice A telle que $U_{m+1} = U_m \times A$.

4. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $U_n = U_0 \times A^n$.

5. Calculer A^{10} puis A^{1000}. Que peut-on en conclure ?

b. On considère une autre position initiale. Que dire de U_p lorsque p tend vers $+\infty$?

c. Selon ce modèle, donner la pertinence de chaque page du "mini Internet".

d. **Impact de quelques modifications**

1. Première modification : on ajoute au "mini Internet" de cinq pages une sixième page qui comporte un seul lien pointant vers la page 3. Évaluer la pertinence de chacune des six pages de ce nouveau réseau.
2. Seconde modification : à partir du "mini Internet" de cinq pages de départ, on ajoute une sixième page telle que la première page (et uniquement celle-ci) pointe vers elle. Cette sixième page n'a pas de lien vers d'autres pages. Écrire U_{n+1} en fonction de U_n et donner la pertinence de chaque page de ce nouveau réseau.

4. La matrice Google.

Le modèle précédent ne prend pas en compte les "trous noirs", c'est-à-dire les pages qui ne comportent aucun lien vers d'autres pages. Pour pallier ce défaut, la méthode de calcul développée par Google prend en compte la possibilité qu'un surfeur atteigne directement une page quelconque du "mini Internet" en tapant directement une adresse.

Le *coefficient d'échappement* évalue la probabilité que le surfeur effectue ainsi un saut direct. Cette probabilité est répartie équitablement entre les pages du graphe et son complémentaire est appliqué à la marche aléatoire définie par le "mini Internet".

Le compromis entre la vitesse de calcul et la réalité a conduit Google à choisir la valeur expérimentale $= 0{,}15$. On reprend le réseau initial et on note U_n l'état probabiliste après n étapes.

a. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

b. En déduire la pertinence des pages du "mini Internet".

c. On ajoute au "mini Internet" initial de cinq pages une sixième page. La première page (et uniquement celle-ci) pointe vers elle. Cette sixième page n'a pas de lien vers d'autres pages. Déterminer la pertinence de chaque page du nouveau réseau.

Thème 4	Restes chinois

«Face au monde qui change, il vaut mieux penser le changement que changer le pansement.» (Francis Blanche)

Partie **A :** Cas de deux congruences

1. Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux et supérieurs ou égaux à 2.
   a. Démontrer que pour tous entiers relatifs a et b, il existe deux entiers relatifs u et v tels que :
   $$b + (a - b)vn = a + (b - a)um.$$
   b. En déduire que le système (1) $\begin{cases} x \equiv a\ [m] \\ x \equiv b\ [n] \end{cases}$ admet au moins une solution dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.
2. a. Démontrer que si x et y sont des entiers relatifs solutions du système (1) alors l'entier $x - y$ est multiple de m et de n.
   b. En déduire si x est solution de (1) alors tout entier y tel que $y \equiv x\ [mn]$ est également solution du (1) dans $\mathbb{Z}$.

Partie **B :** Généralisation

Soient k entiers naturels $n_1, n_2, \dots, n_k$ premiers entre eux deux à deux et k entiers $r_1, r_2, \dots, r_k$.

On note (S) le système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv r_1\ [n_1] \\ x \equiv r_2\ [n_2] \\ \quad\vdots \\ x \equiv r_k\ [n_k] \end{cases}.$$

Démontrer qu'il existe $u_1, u_2, \dots, u_k$ dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$$x \equiv r_1N_1u_1 + r_2N_2u_2 + \cdots + r_kN_ku_k\ [n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k]$$

avec pour tout $p \in [\![1; k]\!]$:

$$N = \frac{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k}{n_p} = n_1 \times n_2 \times \dots n_{p-1} \times n_{p+1} \times \dots \times n_k$$

Partie **C** : Application

Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager également et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait trois pièces. Mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués. Le cuisinier recevrait alors 4 pièces. Survient alors un naufrage et seuls 6 pirates, le cuisinier et le trésor sont sauvés et le partage laisserait 5 pièces d'or à ce dernier. On cherche alors à déterminer la fortune minimale que peut espérer ce dernier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates.

1. On note x la fortune que peut espérer ce dernier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates. Démontrer qu'il existe u_1, u_2, u_3 et k dans $\mathbb{Z}$ tels que :
$$x = 198u_1 + 408u_2 + 935u_3 + 1122k$$
2. Trouver a et b dans $\mathbb{Z}$ tels que $17a + 66b = 1$ et en déduire la valeur de u_1.
3. De la même façon, trouver u_2 et u_3.
4. En déduire que $x = 4151 + 1122k$.
5. Répondre au problème.

Thème 5 — Modèle proie-prédateur
Dynamique de population

« Un sourire ne coûte rien, mais il rapporte beaucoup ;
il enrichit celui qui le reçoit sans appauvrir celui qui le donne.»
(Dale Carnegie)

En dynamique de populations, il est fréquent que les populations de deux espèces animales interagissent.
Dans les années 1920-1930, l'italien Vito Volterra et l'américain Alfred James Lotka ont mené séparément des recherches sur des systèmes où des prédateurs (requins ou lynx) et leurs proies (sardines en mer adriatique ou rongeurs) sont liés, dans un milieu stable. Voici une version simplifiée de leur modèle.

Pour tout entier naturel n, on note R_n l'effectif de la population de proies et L_n l'effectif de la population de prédateurs au bout de n années après l'introduction des prédateurs.

On fait les hypothèses que d'une année à l'autre :

→ Le taux d'accroissement des proies est une fonction affine décroissante du nombre de prédateurs :

$$\forall n \geq 0, \qquad \frac{R_{n+1} - R_n}{R_n} = a - bL_n,$$

où a et b sont des réels positifs ;

→ Le taux d'accroissement des prédateurs est une fonction affine croissante du nombre de proies :

$$\forall n \geq 0, \qquad \frac{L_{n+1} - L_n}{L_n} = cR_n - d,$$

où c et d sont des réels positifs.

Partie A : Mise en place des suites

1. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$(E) : \begin{cases} R_{n+1} = (1 + a)R_n - bL_nR_n \\ L_{n+1} = cL_nR_n + (1 - d)L_n \end{cases}.$$

2. a. Expliquer qu'en l'absence de prédateurs, la population de proies est une suite géométrique croissante.

   b. Que peut-on dire de la population des prédateurs en l'absence de proies ?

3. On suppose qu'initialement il y a 3 000 proies et 90 prédateurs, puis qu'au bout d'un an, il y a 3 153 proies et 94 prédateurs, et qu'au bout de deux ans, on dénombre 3 312 proies et 99 prédateurs.

   a. Montrer que les réels a, b, c et d vérifient les systèmes :

$$\begin{cases} 1\,000a - 90\,000b = 51 \\ 1\,051a - 98\,784b = 53 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 135\,000c - 45d = 2 \\ 296\,382c - 94d = 5 \end{cases}.$$

   b. En utilisant des matrices et à l'aide de la calculatrice, déterminer des valeurs approchées de a, b, c et d.

Partie B : Étude de l'équilibre du système

On appelle **équilibre du système** les cas où les suites (L_n) et (R_n) sont constantes.

On suppose que les suites (L_n) et (R_n) ne s'annulent pas.

1. Montrer qu'il y a équilibre si, et seulement si, pour tout entier naturel n :

$$R_n = \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad L_n = \frac{a}{b} \quad \text{c'est-à-dire} \quad R_0 = \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad L_0 = \frac{a}{b}.$$

Dans la suite de cette activité, on se place autour du point d'équilibre $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$, c'est-à-dire que $R_0 = \frac{d}{c}$ et $L_0 = \frac{a}{b}$. On admet qu'alors le système (E) peut être approché par le système :

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n - \dfrac{bd}{c} L_n + \dfrac{ad}{c} \\ L_{n+1} = \dfrac{ca}{b} R_n + L_n - \dfrac{ad}{b} \end{cases}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ L_n \end{pmatrix}$.

2. Déterminer la matrice carrée A et la matrice colonne C telles que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = A \times U_n + C$.

3. Dans la suite, on choisit $a = 0{,}06$, $b = 0{,}0001$, $c = 0{,}00005$ et $d = 0{,}1$ ($R_0 = 2000$ et $L_0 \approx 600$).

On a alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 \\ 0{,}03 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 120 \\ -60 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que la matrice $U = \begin{pmatrix} 2000 \\ 600 \end{pmatrix}$ vérifie : $U = A \times U + C$.

En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} - U = A \times (U_n - U),$$

puis que $U_{n+1} = U + A^n \times (U_0 - U)$.

b. On choisit $R_0 = 2010$ et $L_0 = 610$.

A la calculatrice, estimer les populations de chaque espèce au bout de 5 ans, de 10 ans, de 50 ans et de 100 ans.

c. Même question avec $R_0 = 1990$ et $L_0 = 605$.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} R_{n+1} - R_n = 0{,}2(600 - L_n) \\ L_{n+1} - L_n = 0{,}03(R_n - 2000) \end{cases}.$$

b. En déduire que la population des proies augmente si le nombre de prédateurs est inférieur à 600, et qu'elle diminue si le nombre de prédateurs est supérieur à 600.

c. De la même façon, donner un critère permettant d'étudier le sens de variation de la population de prédateurs.

« LES MATHEMATIQUES SONT LA POESIE DES SCIENCES »

Léopold Sedar Senghor

Au

carrefour

de la

Poésie

et des

Mathématiques

①

La bosse des maths

de Monique Mérabet

Un petit chameau rechignait
aux leçons de mathématique ;
il récolta, comme c'est logique,
réprimande et zéro pointé.

À sa mère atterrée, il explique,
avec force détails scientifiques :
« À l'école, j'ai appris maman,
que la bosse des chameaux
ne contient que graisse et eau ;
pas le moindre instrument
pour m'aider en calcul ;
voilà pourquoi je suis nul
en arithmétrie, en géométique ;
pour ainsi dire, c'est génétique.
Ah ! gémit-il en se tordant les pattes,
pourquoi ne pas m'avoir fait une bosse en math ? »

La chamelle courroucée par tant d'effronterie,
blatéra fermement : « Assez de pitreries !
Et, bosse des maths ou pas,
bosse tes maths ou tu auras...
affaire à moi. »

②

Les tribulations d'un triangle

de *Monique Mérabet*

Un quelconque triangle irascible,
un peu « sommet monté ››,
ne pouvait plus supporter
d'être perpétuellement la cible
de calamiteux tracés.

Les apprentis géomètres, sans science
ni conscience,
avec acharnement le tourmentaient
à la pointe du compas,
ou, d'une règle trop rigide,
le sillonnaient de rides.
Et pour quel piètre résultat !

L’orthocentre : pas d’équerre !
Le centre de gravité : à pleurer de rire !
Cercle inscrit ? Circonscrit ?
Les points dépassaient de la périphérie.
La bonne fée Isomète
vint promptement secourir
le triangle martyr.
En trois coups de baguette,
elle le transforma, c’était génial !
en triangle équilatéral.
Aussitôt, toutes les droites se confondent :
hauteurs, médiatrices,
médianes, bissectrices...
Et, un seul centre pour tout le monde !

Le triangle en souffrit dans son orgueil :
« On me croira borgne avec ce seul œil. »

La fée n’aimait pas les ingrats.
Elle aligna tous les sommets :
plus de surface, de côtés,
plus de hauteurs, de bissectrices,
plus de médianes, de médiatrices.

Sa froide vengeance fut un triangle plat !

③

La métamorphose du parallélogramme

de *Monique Mérabet*

Quel poète dira les charmes délectables
de l’insaisissable parallélogramme,
polymorphe dans l’âme,
qui se déforme,
se transforme
au gré des humeurs d'un crayon ?

On le croit rectangle,
bien d’équerre sur ses sommets ;
lui, rêve d'azur ;
il se fait losange, cerf-volant
et s’envole dans le vent.

Carré, on le nomme
quand on oublie son nom,
à ce sacré polygone !
Tous les cancres vous le diront.

Quand, - avec l’âge ? - il devient obèse,
ce n'est plus qu'un trapèze,
un parallélogramme handicapé,
sur sa grande base, affalé.

Si on pousse un peu
sur ses articulations,
le voilà tout aplati
qui se cache sous un trait.
Quadrilatère, vous disiez ?

Quand l’ignorance s'en mêle,
il est baptisé « quadrupède ››
et, les sommets emmêlés,
se réveille croisé.
Quelle destinée !

④

Triangle

de *David Tainturier*

Qui ?
Parmi...
Les mystères ?
Toutes les mers ?
A bien mieux que moi
Réussi à égarer les navires ?
De mon angle parfois droit, ou pas
J'ai aidé, aidé les hommes, aidé à bâtir
Sur la terre infinie des dieux grands pharaons
D'immenses tombeaux, tous de pierres et de sable
Dont chaque face éclairée porte désormais mon nom.
Tantôt acutène, tantôt rectangle, isocèle, ou bien équilatéral,
Trois points me définiront, mais le plus souvent simple, scalène.
De mes trois points vitaux dessinés de la main même du génial Euler
Droites et cercles dansent en chœur. Galilée ! Toute la géométrie règne
En mon sein ; moi, nécessaire ! Déséquilibré boiteux rempli de mystères...

⑤

Archimède et le nombre Pi

de *David Tainturier*

Le poème qui suit permet de retenir les premières décimales de Pi. Le nombre de lettres de chaque mot coïncide dans le même ordre avec une décimale de Pi. Un nombre à 10 lettres correspond au chiffre 0.

Que*(3)* j*(1)*'aime*(4)* à*(1)* faire*(5)* apprendre ce nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.
Jadis, mystérieux, un problème bloquait
Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.

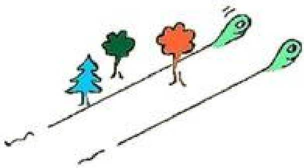
Ô quadrature ! Vieux tourment du philosophe
Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
Défié Pythagore et ses imitateurs.
Comment intégrer l'espace plan circulaire ?
Former un triangle auquel il équivaudra ?
Nouvelle invention : Archimède inscrira
Dedans un hexagone ; appréciera son aire
Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :
Dédoublera chaque élément antérieur ;
Toujours de l'orbe calculée approchera ;
Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle
Professeur, enseignez son problème avec zèle.

⑥

Euclidiennes

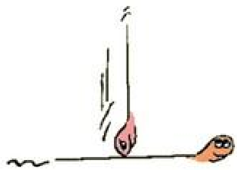
Eugène Guillevic

Parallèles



On va, l'espace est grand,
On se côtoie,
On veut parler.
Mais ce qu'on se raconte
L'autre le sait déjà,
Car depuis l'origine
Effacée, oubliée,
C'est la même aventure.
En rêve on se rencontre,
On s'aime, on se complète.
On ne va plus loin
Que dans l'autre et dans soi.

Perpendiculaire



Facile est de dire
Que je tombe à pic.
Mais c'est aussi sur moi
Que l'autre tombe à pic.

⑦

Psychologie du zéro

de *Monique Mérabet*

Regardez-les passer
si fièrement campés
sur leur rotondité.
Ils inspirent le respect.
A droite... ce sont des chiffres
Très significatifs :
Un tantinet farauds,
Ces zéros !

On peut en distinguer,
En repères posés :
Les feux de position
De la numération ;
Ils gardent avec classe
A chaque entier sa place.   Des serviteurs loyaux,
Ces zéros !

Et parfois, ils s'ennuient,
Esseulés, en sursis,
Au bout d'un signe égal.
Ils mourront, c'est fatal,
Pour donner solution
A la belle équation.
Quel dévouement ! Bravo,
Les zéros !

Mais lorsqu'ils vont, tremblants,
Honteux, insignifiants,
Pressés par la virgule
Pour atteindre le nul,
L'infiniment petit,
Qu'ils se sentent incompris,
Ne méprisez pas trop...

Les zéros !!!

⑧

La belle inconnue

de *Pierre Lamy*

Diophante, permets au pauvre rimailleur
De bousculer un peu cette douce ingénue
Que fit naître un beau jour ta plume bienvenue
Pour le plus grand plaisir des esprits pinailleurs.

Il me faut avant tout, patient orpailleur,
Pour débusquer enfin cette belle inconnue,
Chercher obstinément sa cache saugrenue.
Au coin de l'hypothèse ? Ici ? Peut-être ailleurs ?

Je crois avoir trouvé la bonne algorithmique.
A petits pas prudents, j'approche. C'est magique !
Va-t-elle se laisser surprendre de plein gré ?

Oui! Victoire ! Je l'ai ! Mais elle a deux copines ?
- Est-il si surprenant de trouver trois racines
Dans une équation du troisième degré ?

⑨

Les amours de la règle et du compas

de *Charles Perrault*

Le Compas glorieux se réveille en sursaut,
Ému de cette vue et d'un espoir si haut.
Il rend grâce au Soleil, et ferme comme un Aigle
Le regarde et s'en va : Puis rencontre la Règle ;

Droite, d'un grave port, pleine de majesté,
Inflexible et surtout observant l'équité
Il la suit, elle fuit d'une égale vitesse
Il double en son ardeur ses efforts vainement
Tous les cœurs s'opposaient à son contentement
Il pense la tenir, sans la voir il la touche
De ses rayons aigus il joint cette farouche
...
Quoi ? dit-elle en riant, je serais la conquête
D'un amant qui n'aurait que les pieds et la tête ?
Toutefois nos amours, répliqua le Compas,
Produiront des enfants qui vaincront le trépas.
De nous deux sortira la belle Architecture,
Et mille nobles arts pour polir la nature,
Ne pense pas, dit-elle, ébranler mon repos,
Ou pour autoriser tes étranges propos
Tâche à plaire à mes yeux par quelques gentillesses ;
Et montre des effets pareils à tes promesses.
Le Compas aussitôt sur un pied se dressa,
Et de l'autre, en tournant un grand cercle traça
La règle en fut ravie, et soudain se vint mettre
Dans le milieu du cercle, et fit le diamètre.
Son amant l'embrassa, l'ayant à sa merci,
Tantôt s'élargissant et tantôt raccourci,
Et l'on vit naître alors de leurs doctes postures
Triangles et carrés, et mille autres figures.

⑩

La géométrie en vers technique

de *Desrois*

Sans surface est le point, le plan sans épaisseur ;
La ligne droite ou courbe est longue sans largeur :
La raison le condamne, et la raison l'exige.
La ligne droite au but constamment se dirige ;
Et c'est, par conséquent, devant tous les humains
Entre deux points donnés le plus court des chemins.

La courbe est, au contraire, une route incertaine,
Qui vers le point quitté bien souvent me ramène ;
Mais elle a des vertus qui partout font du bruit :
C'est le cercle d'abord qui me plaît et m'instruit.
Voyez l'astre du jour en sa vaste carrière ;
Il promène avec pompe un cercle de lumière,
Forme parfaite aux yeux, dont l'art du Créateur
Sur nos savants esprits revendique l'honneur.

J'établirai d'abord, comme lois générales,
Que les arcs égaux ont des cordes égales,
Et que les plus grands arcs sont toujours sous-tendus
Par les cordes aussi qui s'étendent le plus.
L'angle, au centre placé par sa propre nature,
Dans les degrés du cercle a trouvé sa mesure :
L'aigu, l'obtus, le droit qui n'a point de rivaux ;
Opposés au sommets, ils sont toujours égaux.

La perpendiculaire a confondu l'oblique ;
Je la démontrerai plus courte sans réplique,
Et que chacun des points, mesuré dans son lieu,
Des deux extrémités tient le juste milieu.

A l'abri de l'envie, en compagnes fidèles,
On voit marcher de front deux lignes parallèles ;

Mais l'oblique sécante, aussitôt survenant
Va nous faire observer l'angle correspondant.
Il sert à comparer les alternes internes,
Égaux entre eux ainsi qu'entre eux sont les externes.
Deux cercles se touchant en un point, quel qu'il soit,
Leurs centres et le point sont sur un chemin droit.
Si la corde au rayon est perpendiculaire,
Elle est coupée en deux, et la part circulaire.
Parallèles étant deux cordes, j'en conclus
Que deux arcs égaux y seront contenus,
Et que toute tangente à corde parallèle,
Touche au milieu de l'arc sous-tendu par icelle.

L'angle dont le sommet à la courbe se rend,
A moitié des degrés de l'arc qu'il comprend,
Lorsqu'il est au dehors, le cas devient complexe,
Du concave moitié, moins moitié du convexe ;
S'il est entre le centre et la courbe compris,
Des moitiés des deux arcs les degrés seront pris.

Avançant pas-à-pas, par des règles austères
Des triangles égaux traçons les caractères.
1º Entre côtés égaux un angle intercepté ;
2º Les deux angles égaux sur un égal côté ;
3º Les trois côtés enfin tous égaux l'un à l'autre,
Satisfont sur cela mon esprit et le vôtre.
Ces trois règles qui sont faciles à montrer,
Dans d'autres vérités sauront nous faire entrer.
Parallèles glissant entre deux parallèles,
S'offrent par la seconde être égales entre elles.

⑪

Épitaphe

Traduction en alexandrins d'Emile Fourrey dans ses Récréations mathématiques, 1899

Une légende au sujet de Diophante d'Alexandrie raconte qu'il était écrit sur sa tombe l'épitaphe suivante :

Passant sous ce tombeau repose Diophante.
Ces quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort.
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,
Puis s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
Reçut de jours hélas! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

Voici la solution :

En mettant le problème en équation,

$x = x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4$, *soit :*

$$84x/84 = 14x/84 + 7x/84 + 12x/84 + 420 + 42x/84 + 336$$

$$84x = 14x + 7x + 12x + 42x + 756$$

$$9x = 756$$

$$x = 84$$

Ainsi Diophante est mort à 84 ans.

⑫
Hyperbole
De Victor Hugo

À quoi sert une hyperbole ?

À boire de l’hypersoupe !

L’homme n’est pas un cercle à un seul centre ; c’est une ellipse à deux foyers.

Les faits sont l’un, les idées sont l’autre.

⑬
Le cancre
de Jacques Prévert

Il dit non avec la tête
mais il dit oui avec le cœur
il dit oui à ce qu’il aime
il dit non au professeur
il est debout
on le questionne
et tous les problèmes sont posés
soudain le fou rire le prend
et il efface tout
les chiffres et les mots
les dates et les noms
les phrases et les pièges
et malgré les menaces du maître
sous les huées des enfants prodiges
avec des craies de toutes les couleurs
sur le tableau noir du malheur
il dessine le visage du bonheur.

14

Le quart d'heure de bon temps

de *Nicolas Boileau*

L'homme, dont la vie entière
Est de quatre-vingt-seize ans,
Dort le tiers de sa carrière,
C'est juste trente-deux ans.
Ajoutons pour maladies,
Procès, voyages, accidents
Au moins un quart de la vie,
C'est encore deux fois douze ans.
Par jour deux heures d'études
Ou de travaux - font huit ans,
Noirs chagrins, inquiétudes
Pour le double font seize ans.
Pour affaires qu'on projette
Demi-heure, - encore deux ans.
Cinq quarts d'heures de toilette
Barbe et cætera - cinq ans.
Par jour pour manger et boire
Deux heures font bien huit ans.
Cela porte le mémoire
Jusqu'à quatre-vingt-quinze ans.
Reste encore un an pour faire
Ce qu'oiseaux font au printemps.
Par jour l'homme a donc sur terre
Un quart d'heure de bon temps.

15

Biographie d'Henri Poincaré

Retracée en poésie par deux élèves de terminale S, Pauline et Marie, à l'occasion du centième anniversaire du décès du mathématicien Henri Poincaré (11 novembre 2012)

Né en 1854 à Nancy (France)et mort le 11 novembre 1912, Henri Poincaré appartient à une famille d'élite intellectuelle. Homme de toutes les sciences Mathématiques, Poincaré fut longtemps désigné comme l'un des derniers génies universels.

C'est en 1854 qu'est né,
A Nancy, Henri Poincaré.
Philosophe et physicien,
Ingénieur et mathématicien,
Son BAC de Science il l'obtient
Avec une mention assez bien.
Grandement attiré par les lettres,
Il n'en devint cependant pas illustre maître.
A Polytechnique il est inscrit,
A l'École des Mines il est admis,
A la Faculté des Sciences de Paris, il réussit.
Loin d'être un mathématicien banal,
Il n'en demeure pas moins défenseur du calcul infinitésimal.
Fut-il un simple et lambda intellectuel,
Il amena tout de même au système d'équation différentielle.
Spécialiste en optique,
Il émet aussi la théorie des systèmes dynamiques.
Précurseur de la relativité restreinte,
Sur la toile de son savoir, la théorie du chaos fut peinte.
Du système des Trois Corps et de la topologie algébrique,
Il en posa les briques,
Et au risque de provoquer parmi ses collègues un schisme,
Il montra la non-pertinence du logicisme ;
Car pour le grand homme qu'il fut,
La résolution, jamais par la déduction ne s'effectue,
Mais plutôt, la continuité primant,

Par l’induction, sans négliger la théorie pour autant.
Poincaré émit une conjecture à son nom : un vrai mystère,
Qui demeura dans les mathématiques l’un des sept problèmes du millénaire,
Jusqu’à ce que Perelman trouvera la clé de l’énigme,
Les mathématiques étant pour les Sciences le paradigme.
De ses publications connues,
Il remet en cause l’Éther, l’espace et le temps absolu,
Leur universelle intouchabilité,
Et de par leurs dimensions mathématiques et philosophiques contestées,
Car Cicéron c’est Poincaré.
Nombreuses furent ses récompenses,
D’abord celle d’appartenir à l’Académie de France,
Maître de conférences,
Il était aussi membre de l’Académie des Sciences,
Lauréat du concours général, il décrochera aussi,
En 1900, la médaille d’or de la Royal Astronomical Society.
Prix de Bolyai en 1905, médaille de Bruce en 1911,
commandeur de la Légion d’Honneur,
Ses importants travaux auront une grande ampleur,
Tout comme ses ouvrages, d’ailleurs
Qui bénéficieront d’une grande clameur,
En 1902 c’est La Science et l’hypothèse qu’il publie,
Où il met en évidence le lien entre les lettres et les mathématiques
Avec le cubisme pour l’exemple géométrique
Il démontre un ouvrage fort réfléchi.
Également auteur en 1905 de La valeur de la Science,
Ainsi que Science et méthode, en 1908, dont il témoigne une prestigieuse pertinence.
L’existence de l’homme en 1912 prit fin,
Mais ses nombreux apports ne seront jamais vains.

Remue-méninges

via

les énigmes

Ne répondez pas instantanément, ne trichez pas, murissez votre réflexion avant de vous décider ! Ne vous faites pas aider d'une tierce personne, c'est plutôt un travail individuel.

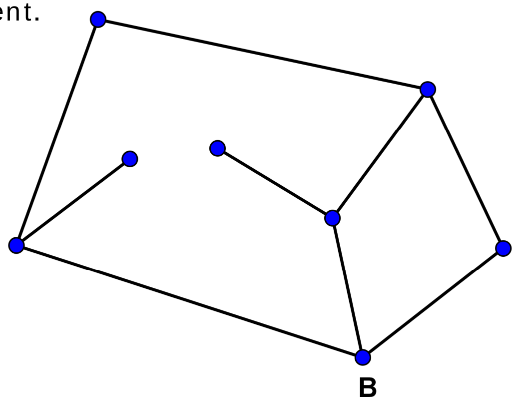
Attention ! Les tricheurs seront fouettés et leurs plaies, ah !, seront badigeonnées de sel...

Let's go !

1

Les huit villes

Sur cette carte routière, chaque point est une ville et chaque trait représente une route reliant deux villes.
La ville B est déjà notée à sa place.
La ville D est reliée directement aux villes A et B.
La ville C est reliée directement aux villes D, F et G.
La ville H est reliée seulement à la ville E.
Notez où sont situées les villes A, C, D, E, F, G et H.
Trouvez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.



2

Trois amis

Un groupe d'amis veut trouver qui est le plus jeune et qui est le plus vieux parmi eux.
Voici quatre informations. Trois de ces informations sont vraies, une seule de ces informations est fausse (mais on ne sait pas laquelle)!
1) Ali est plus vieux que Mohamed.
2) Diagana est plus jeune que Mohamed.
3) Si on additionne les âges de Mohamed et de Diagana, on obtient un nombre qui est le double de l'âge de Ali.
4) Diagana est plus vieux que Ali.
Qui est le plus jeune? Qui est le plus vieux? Expliquer!

3

Un gros livre

Les pages d'un livre sont numérotées en continu en commençant par la page 1. En tout, on a eu besoin de 2880 chiffres. Combien de pages a le livre ?
Expliquer la réponse !

4

Jeu de nombres

A partir d'un nombre à 4 chiffres, Mansoura additionne le nombre formé par les 3 premiers chiffres à celui formé par les 3 derniers chiffres.
En partant de 1234 par exemple, elle obtiendrait 123 + 234 = 357.
Si Mansoura a obtenu 682, de quel nombre à 4 chiffres est-elle partie ? Peux-tu trouver plusieurs réponses ?
Explique le raisonnement et vérifie la réponse!

5

Voisines et voisins

Lors d'une réunion, toutes les places d'une grande table ronde sont occupées.
7 femmes ont une femme à leur droite.
12 femmes ont un homme à leur droite.
3 hommes sur 4 ont une femme à leur droite.
Combien de personnes sont assises autour de la table ?
Justifiez votre réponse.

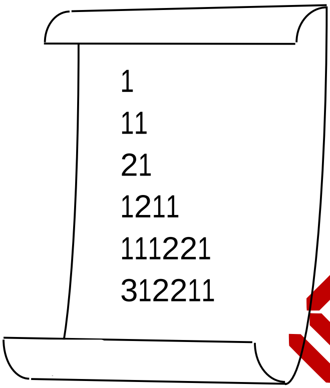
6

Peintres au travail

Pour peindre une salle de classe, un peintre met 4 heures.
Son collègue peint la salle en deux heures.
Combien de temps leur faut-il pour peindre une salle à deux ? Expliquer le raisonnement.

7

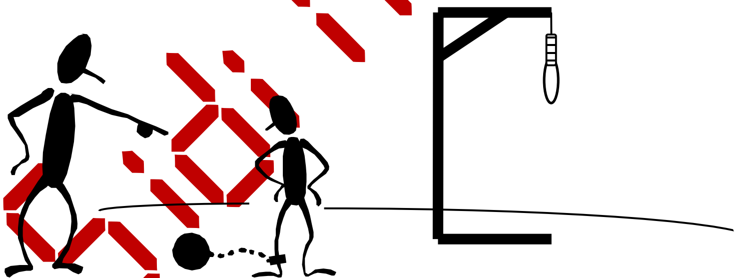
Combinaison de chiffres



Quelle est la prochaine ligne ?

8

La condamnation à mort

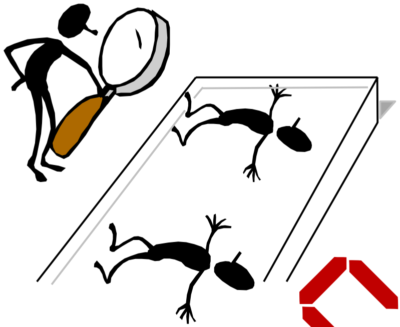


Un condamné peut choisir sa mort. Ses bourreaux lui demandent de faire une AFFIRMATION. Si cette dernière est vraie, il sera pendu. Si elle est fausse, il sera décapité. Si elle est incertaine (du style « Je suis né à Néma » ou « Il va pleuvoir dans 10 jours »), la phrase est considérée comme fausse, donc le condamné sera décapité.

Quelle est l'affirmation qui permet au condamné de sauver sa peau ?

9

L’archéologue futé

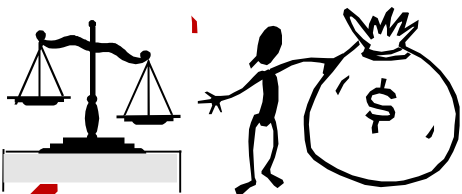


Deus ethnologues découvrent un tombeau dans lequel il y a deux êtres à l’état de chair (c’est-à-dire non décomposés, avec la peau sur les os). L’un des deux s’écrie « Mais c’est Adam et Ève !! ».

Comment les a-t-il reconnus?

10

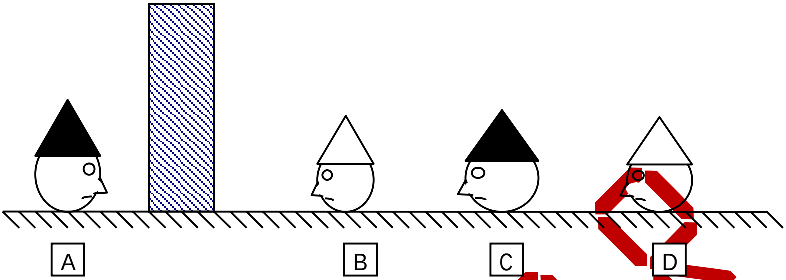
Les sacs de monnaie



Dix sacs contiennent théoriquement chacun 10 pièces de 10 grammes chacune. Or un sac est rempli de fausses pièces, qui, elles, pèsent 9 grammes.
On dispose d’une balance et de ses poids, ce qui permet d’avoir une pesée au gramme près.
Comment savoir, <u>EN UNE SEULE PESEE</u>, quel est le sac en question ?

11

La couleur du chapeau



Quatre hommes condamnés, A, B, C et D sont enterrés dans le sol jusqu’au cou. Ils ne peuvent pas bouger la tête et donc ne voient que devant eux. Entre A et B il y a un mur de briques au travers duquel on ne peut rien discerner. Ils savent que deux d’entre eux portent un chapeau noir et les deux autres portent un chapeau blanc (2 chapeaux blancs et 2 chapeaux noirs au total). Mais ils ne savent pas de quelle couleur ils sont eux mêmes coiffés.

Afin d’éviter d’être fusillés, l’un d’entre eux doit crier au bourreau la couleur de son chapeau. S’il promulgue une fausse affirmation, tous seront fusillés. Ils ne sont pas autorisés à communiquer et ils ont une minute pour trouver la solution.

Qui doit prendre la parole ?

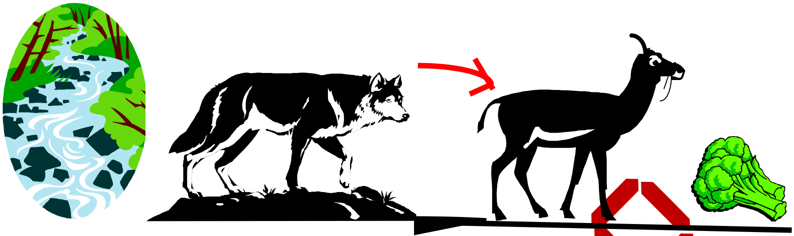
12

Les signes

Quel est le signe suivant ?

13

La chèvre, le chou et le loup



Un berger possède 3 « éléments » : Une chèvre, un loup et un chou. Il doit les faire passer de l'autre côté de la rivière avec sa barque, qui ne supporte qu'un seul « élément » en même temps. En l'absence du berger, la chèvre mange le chou, et le loup mange la chèvre.

Comment doit s'y prendre le berger ?

14

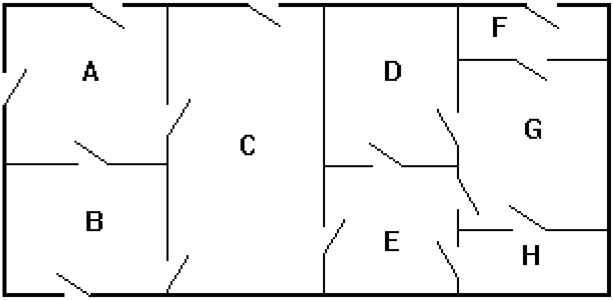
La partie de chasse

Deux pères et deux fils partent ensemble à la chasse. Ils ont tué chacun un pigeon.
De retour chez eux, ils cuisinent leurs trois pigeons.

Y a-t-il une erreur dans cette histoire ?

15

La chambre à coucher du professeur Ferson



Chaque soir avant de se coucher, le professeur Ferson part de l'extérieur de la maison, et fait le tour de la maison en passant par toutes les portes en les fermant à clef derrière lui. Afin d'éviter de perdre du temps, le professeur Ferson ne passe jamais deux fois par la même porte.

Où dort le professeur Ferson?

16

Le cadre des R

DANS CE RECTANGLE,
LE R EST PRÉSENT
.... FOİS.

Complétez en toutes lettres.

17

Les trois maisons

Trois commerçants, un Suisse, un Italien et un Français, habitent dans ces trois maisons de la même rue qui sont de couleurs différentes.

Le boucher habite dans la maison jaune qui est à côté de la rouge mais qui n'est pas à côté de la verte.

L'épicier, qui n'est pas suisse, habite à côté du Français. L'Italien habite au numéro 21 et sa maison n'est pas jaune.

Quelle est la nationalité du pharmacien et de quelle couleur est sa maison ?

18

A bas les profs !

Quatre élèves sont restés dans la classe pendant la récréation ; l'un d'eux a écrit : « à bas les profs ! » au tableau noir.

Lorsque le professeur rentre en classe, il demande : « Qui a écrit ça ? »

- Ali, qui porte des lunettes : « C'est une fille » ;
- Jemal qui n'a pas de lunettes : « C'est quelqu'un qui porte des lunettes » ;
- Mariem qui ne porte pas de lunettes : « ce n'est pas moi » ;
- Fatou qui porte des lunettes : « C'est quelqu'un qui ne porte pas de lunettes ».

Un seul des élèves a menti. Les trois autres ont dit la vérité.

Qui a menti et qui a écrit au tableau noir ?

19

Lettres particulières

On dispose les lettres de l'alphabet comme ci-dessous :

A EF HI KLMN T VWXY

BCD G J OPQRS U

Où doit-on mettre le Z et pourquoi ?

20

Les cents déclarations

Sur une feuille de papier, cent déclarations sont inscrites.

La première dit : « Sur cette feuille il n'y a qu'une seule fausse déclaration. »

La seconde dit : « Sur cette feuille il y a deux et seulement deux fausses déclarations. »

La troisième dit : « Sur cette feuille il y a trois et seulement trois fausses déclarations. »

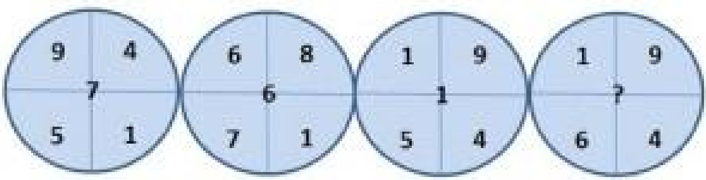
et ainsi de suite jusqu'à...

... la 100e qui dit : « Sur cette feuille il y a cent et seulement cent fausses déclarations. »

Combien de déclarations sont vraies sur cette feuille? Combien sont fausses? Et pourquoi?

21

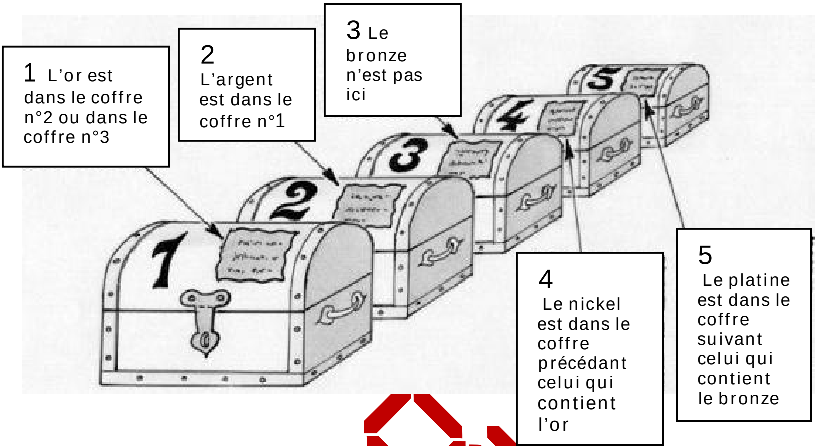
Le nombre manquant



Compléter la valeur manquante située dans le dernier disque.

22

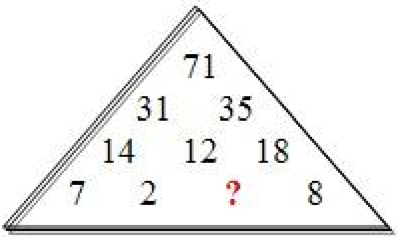
Le coffre, le trésor et le lingot d'or



Déterminer le contenu de chacun des cinq coffres.

23

Une pyramide de nombres



Quel est le nombre manquant ?

24

L'année 2017

Dans la suite 122333444455555......., chaque entier est écrit autant de fois que sa valeur.

Quel est le 2017 ième chiffre écrit?

25

Poids des nombres

Le poids d'un nombre est la somme de ses chiffres.

Quel est le plus petit nombre qui pèse 2000?

26

Voyelles

Fatimetou remarque dans un texte 15 fois l'utilisation d'une voyelle. Il s'aperçoit aussi que plus une voyelle est d'un rang important dans l'alphabet, moins elle est utilisée. (La lettre e a par exemple le rang 5 dans l'alphabet).

Combien y a t-il de i dans le texte?

27

Puissance

Trouvez le dernier chiffre de :

777777.....7777 à la puissance 7777.....77777

2017 fois 2017 fois

28

Quarts d'heure

Dans une journée, combien de fois les aiguilles des heures et des minutes d'une horloge font un angle droit entre elles?

29

Réveil digital

Sur une pendule à affichage digital, combien de fois par jour un chiffre passe-t-il à 1? On considère l'affichage comme allant de 0:00

30

Démographie

Dans une société, le personnel est réparti entre deux groupes, les employés et l'encadrement. 80% des personnels sont des hommes. 95 % des employés sont des hommes et 65% des hommes de la société sont des employés.

Pouvez-vous dire si les femmes sont majoritaires dans l'encadrement?

Bibliographie

Oui, c'est fini... ou presque fini ! Attention, c'est important ! Il reste encore la bibliographie. En effet, c'est quoi un livre de mathématiques ou de sciences physiques ou de ... sans sa bibliographie, si ce n'est qu'à la fois un leurre et un manque d'honnêteté intellectuelle autrement dit un délit de plagiat dont l'auteur se cache honteusement derrière sa propre ombre !?

La rédaction de ce livre s'est faite sur la base de la consultation des ressources suivantes :

Bibliographie :

- P.H. Terracher-R.Ferachoglou, Maths Term. S Obl. Et spéc. Hachette 2002. ISBN 2.01.13.5294.0
- P.H. Terracher-R.Ferachoglou, Maths Term. S spéc. Hachette 1994. ISBN 2.01.13.4986.9
- J.M. Barros et Col., Maths Term. S spec. Transmath-Nathan 2012. N° édit. 10183118
- J.P. Bouvier, Maths Term. S spec. Belin 1998. ISBN 2.7011.2140.X
- A. Mohsen-S. Nabbout, Géom-Arithm-Prob. MCG Liban 1995. Dépôt légal 03/310409 – 06/627265
- G. Cohen, 52 nouvelles énigmes math. FFJM-vol. 21. Editions POLE 2000. ISBN 2.909737.55.1
- A. Mimouni et Col., Maths 4ème année. Kounouz Editions 2014
- S. Touré, Maths Term. SM, CIAM-EDICEF 1999. ISBN 2.84.129554.0
- J.P. Galandrin et Col. Maths Term. S. Spéc. Déclic-Hachette 1998. ISBN 2.01.13.5056.5
- M.Bonté-Joseph, Maths Term. S. Obl. Et Spéc. ABC du bac-Nathan. ISBN 2.09.186045.X
- D. Besnard et Col. Maths Term. S. ABC du bac-Nathan 2012. ISBN 978.2.09.188472.1

Cybergraphie :

- http : //www.laroche.free.fr
- http://www.recreomath
- http://www.mathmoufid.com
- http://www.matheleve.net
- http://www.memopage.com
- http://www.lyceedadultes.fr
- http://www.animath.fr
- http://www.jeusetetmaths.com
- http://chingatome.net
- http://labomath.free.fr
- http://www.lesreferences.com
- http://www.bac-de-maths.fr

Que Dieu me pardonne, si j'ai oublié !

اللهم صل على محمد وآل محمد