بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SERVICE DES EXAMENS

Honneur – Fraternité – Justice

Séries: C & TMGM
Sujet: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

BACCALAUREAT 2001

Session Complémentaire

NB: Le 1[er] exercice (Exercice 1) n'est pas commun aux deux séries C et TMGM.

Exercice1 (4points)

(Uniquement pour les candidats de la serie C)

Pour tout nombre complexe $\mathbf{z}$ on pose:

$$P(z) = z^4 - (2+6i)z^3 + (-12+9i)z^2 + (13+9i)z + 2 - 6i$$

1.a) Calculer $P(i)$ et $P(2i)$. **(1pt)**

b) Déterminer les nombres complexes $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ tels que pour tout nombre complexe $\mathbf{z}$ on a:

$$P(z) = (z^2 - 3iz - 2)(z^2 + az + b). \qquad \textbf{(1pt)}$$

c) Déterminer les nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 solutions de l'équation : $P(z) = 0$ tels que : $|z_1| < |z_2| < |z_3| < |z_4|$. **(0,5pt)**

2. On écrit chacun des nombres z_1, z_2, z_3 et z_4 sur l'une des quatre faces d'un dé tétraédrique truqué. On lance ce dé et on admet que la probabilité pour que l'une de ces faces soit cachée est proportionnelle au carré du module du nombre complexe z_k inscrit sur cette face,

c'est-à-dire que: $p_k = t|z_k|^2$; $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ où $t \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Démontrer que : $p_1 = \dfrac{1}{12}$. **(0,25pt)**

b) Calculer p_2, p_3 et p_4. **(0,75pt)**

c) Soit $\mathbf{X}$ la variable aléatoire réelle, qui à chaque jet du tétraèdre associe la somme des parties imaginaires des nombres inscrits sur les faces latérales de ce dé.

Vérifier que $\mathbf{X}$ prend exactement deux valeurs puis déterminer sa loi de probabilité. **(0, 5pt)**

Exercice1 (4points)

(Uniquement pour les candidats de la serie TMGM)

1. Résoudre l'équation différentielle suivante : **(E)** $y'' - 4y' + 5y = 0$. **(1pt)**

2. On considère l'équation différentielle : **(E')** $y'' - 4y' + 5y = (-x+1)e^x$.

a) Déterminer les réels $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ tels que la fonction $\mathbf{g}$ définie par : $g(x) = (ax+b)e^x$ soit une solution de (E'). **(1pt)**

b) $\mathbf{h}$ désignant une solution quelconque de l'équation différentielle (E), montrer que la fonction $\mathbf{f}$ telle que : $f(x) = g(x) + h(x)$ est une solution de l'équation (E'). **(1pt)**

3. Déterminer, parmi les fonctions $\mathbf{f}$ définies au **2.b)**, celle dont la courbe représentative dans un repère orthonormé passe par le point $A(0;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation : $y + x = 0$. **(1pt)**

Exercice2 (5points)

Soit la fonction f_n définie par : $\forall x \in IR;\ f_n(x) = x^n e^{1-x}$;

où n est un entier naturel non nul et e est la base du logarithme népérien $\ln$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f_1 (le cas où $n = 1$). **(1pt)**
2. Pour tout entier naturel non nul n on pose : $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.
   a) En utilisant une intégration par partie prouver que : $U_1 = e - 2$. **(0,5pt)**
   b) Démontrer que : $\forall n \in IN^*;\ \frac{1}{n+1} \le U_n \le \frac{e}{n+1}$. **(0,5pt)**
   c) Démontrer, en utilisant une intégration par partie, la relation de récurrence suivante :
   $\forall n \in IN^*;\ U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$. **(0,5pt)**
3. Pour tout entier naturel non nul n on pose : $V_n = n!e - U_n$.
   a) Démontrer que : $\forall n \in IN^*;\ V_{n+1} = (n+1)V_n + 1$. **(0,5pt)**
   b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in IN^*;\ V_n \in IN$. **(0,5pt)**
   c) Montrer que pour tout entier $n \ge 2$; le nombre $n!e = V_n + U_n$ n'est pas un entier naturel. **(0,5pt)**

4) Soient p et q deux entiers naturels strictement positifs.
   a) Prouver que pour tout entier naturel $n \ge q$; le nombre $\frac{n!p}{q}$ est un entier naturel. **(0,5pt)**
   b) Prouver, en utilisant une démonstration par l'absurde, que le nombre e n'est pas rationnel (Pour cela on peut supposer que $e = \frac{p}{q}$ où $p, q \in IN^*$). **(0,5pt)**

Problème (11points)

Partie A

Dans le plan orienté on considère le triangle direct ABB' dont tous les angles sont aigus et on pose $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB'}) = \theta\ [2\pi]$. On construit à l'éxterieur de ce triangle deux carrés $ABCD$ et $AB'C'D'$ de centres respectifs O et O' et soit P et Q les milieux respectifs de $[BB']$ et $[DD']$.

1. a) Faire une figure illustrant les données précédantes. **(0,5pt)**
   b) Prouver que $B'D = BD'$ et que $(B'D) \perp (BD')$; en déduire la nature du quadrilatère $OPO'Q$. **(1pt)**
2. Soit I le point de concours des segments $[B'D]$ et $[BD']$.
   a) Prouver que les points A et I sont symétriques par rapport à la droite (OO'). **(0,5pt)**
   b)En déduire que : $AQ = IP = \frac{BB'}{2}$ et $AP = IQ = \frac{DD'}{2}$. **(1pt)**
3. Les droites (AQ) et (BB') se coupent en H et les droites (AP) et (DD') se coupent en K.
   a) Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{DD'}$ en déduire que les droites (AQ) et (AP) sont respectivement des hauteurs dans les triangles ABB' et ADD'. **(1,5pt)**
   b) Prouver que les six points O, O', P, Q, H et K sont cocycliques. **(0,5pt)**

Partie B

On suppose, dans la suite du problème, que $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ où $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB'}) = \theta\ [2\pi]$.

Soient Γ et Γ' les deux cercles circonscrits respectivement aux carrés **ABCD** et **AB'C'D'**.
On considère la similitude directe **s** de centre **I** et qui transforme **O** en **O'**.

1. a) Faire une nouvelle figure (Pour une meilleure construction, prendre : $\theta = 50^0$; $AB' = 7cm$; $AB = 5cm$) puis déterminer l'intersection des deux cercles Γ et Γ'. **(0,5pt)**

   b) Construire le point A_1 tel que $s(A) = A_1$, donner une justification de cette construction. **(0,5pt)**

2. Soit **M** un point de Γ distinct de **A** et de **I**, on pose $s(M) = M_1$.

   a) Comparer les deux angles $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{O'I}; \overrightarrow{O'M_1})$;puis démontrer que les points **A**, **M** et M_1 sont alignés. **(0,75pt)**

   b) Déduire de ce qui précède une construction simple de M_1 pour un point **M** donné de Γ distinct de **A** et de **I**. **(0,5pt)**

3. Soient les points A_1, B_1, C_1 et D_1 les images respectives des points **A**, **B**, **C** et **D** par s on pose:
$[AB'] \cap [A_1B_1] = \{E\}$, $[B'C'] \cap [A_1D_1] = \{F\}$, $[C'D'] \cap [D_1C_1] = \{G\}$ et $[D'A] \cap [C_1B_1] = \{J\}$.

   a) Construire les points B_1, C_1 et D_1, en déduire une deuxième méthode de construction du point A_1 ; (le point A_1 à été construit au **B.1.b)**. **(0,75pt)**

   b) Montrer que le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ est un carré de centre **O'**. **(0,5pt)**

4. Soit **r** la rotation de centre **O'** et d'angle $\frac{\pi}{2}$.Démontrer que $r(E) = F$ et $r(F) = G$; en déduire que le quadrilatère **EFGJ** est un carré de centre **O'**. **(0,5pt)**

Partie C

Dans cette partie on conserve la figure précédente (celle de la partie **B**).
On désigne par α l'angle de la similitude **s** définie dans la partie **B**,

On pose : $\beta = (\overrightarrow{B_1A_1}; \overrightarrow{AB'})\ [2\pi]$.

1.a) Prouver que :

$$\alpha = -\theta - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad (1) \ ; \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

$$\alpha = \theta - \beta + \pi \quad [2\pi] \quad (2). \qquad \textbf{(0,25pt)}$$

   b) En déduire que : $\beta = 2\theta - \frac{\pi}{2}\quad [2\pi]\quad (3)$. **(0,25pt)**

2. a) Démontrer que : $(\overrightarrow{O'B_1}; \overrightarrow{O'A}) = \beta \quad [2\pi]$. **(0,25pt)**

   b) Pour quelles valeurs de β, l'octogone formé par les sommets des deux carrés **AB'C'D'** et $A_1B_1C_1D_1$ est régulier? **(0,25pt)**

   c) En déduire les valeurs de l'angle $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB'})$ pour lesquelles l'octogone précédent est régulier. **(0,25pt)**

3. Calculer, dans la situation précédente **C.2.c)**, l'aire du carré **EFGJ** en fonction de $AB' = a$ longueur du côté du triangle **ABB'**. **(0,25pt)**

Fin