69

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2017
Session Normale

Série : Sciences de la Nature
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

Exercice1 : (3 points)

Le tableau ci-contre donne les résultats d'une étude d'efficacité d'un vaccin, sur un groupe de 1000 personnes.

	Vaccinée	Non vaccinée	Total
Malade	100	150	250
Non malade	600	150	750
Total	700	300	1000

On choisit au hasard une personne de ce groupe, et on note V l'évènement « la personne est vaccinée » et M l'évènement « la personne est malade ».
Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $p(V)$ est	0.7	0.6	0.1	(0.5 pt)
2	La probabilité $p(M)$ est	0.1	0.15	0.25	(0.5 pt)
3	La probabilité $p(V\cap M)$ est	0.1	0.155	0.85	(0.5 pt)
4	la probabilité $p_V(M)$ est	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}$	(0.5 pt)

Le choix est répété, de façon indépendante, durant 10 jours successifs, à raison d'une personne du groupe par jour. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes à la fois malades et vaccinées choisies. Soit E l'événement « au moins une personne malade et vaccinée est choisie durant ces dix jours »

5	La probabilité $p(E)$ est	$1-(0.9)^{10}$	$1-(0.1)^{10}$	$1-(0.85)^{10}$	(0.5 pt)
6	L'espérance mathématique de X est	1	2	3	(0.5 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 : (5 points)

1° Pour tout complexe z on pose : $P(z)=z^3-10z^2+36z-40$

a) Calculer $P(2)$ (0.5pt)

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$ (0.5pt)

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. (0.5pt)

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=4-2i$, $z_B=2$ et $z_C=4+2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. (0.5pt)

b) Déterminer la nature du triangle ABC. (0.5pt)

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. (0.5pt)

3) Pour tout nombre $z\neq 4+2i$; on pose : $f(z)=\dfrac{z-4+2i}{z-4-2i}$.

a) Vérifier que $f(z_D)=i$ et interpréter graphiquement. (0.25pt)

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$. (0.5pt)

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{2}$ (0.5pt)

4° On pose $z_0=f(2i)$. Pour tout entier naturel n on note $z_n={z_0}^n$.

a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. (0.25pt)

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $|z_n|\geq 2017$. (0.25pt)

c) Vérifier que le point d'affixe z_{2018} appartient à l'axe des imaginaires purs. (0.25pt)

70

Exercice 3 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}+2x-2$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-2)\right)$. Interpréter graphiquement. (0.75pt)

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. (0.75pt)

2° a) Calculer la dérivée $f'(x)$ et vérifier que $f'(-\ln 2)=0$. (0.5pt)

b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f (0.5pt)

3° a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β.
Vérifier que $-1.7<\alpha<-1.6$ et $0.7<\beta<0.8$ (0.5pt)

b) Représenter la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (0.25pt)

4° On définit les suites (u_n) et (v_n) pour tout entier naturel n par : $u_n=e^{-n}$ et $v_n=2n-2$

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle est décroissante (0.25pt)

b) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et qu'elle est croissante (0.25pt)

c) Ces deux suites sont-elles adjacentes ? Justifier. (0.25pt)

5° Pour tout entier naturel n , on pose $S_n=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n)$

a) Exprimer S_n en fonction de n (0.5pt)

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}$ (0.5pt)

Exercice4 : (7 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(2-2x)(\ln x-2)$ et Γ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1° On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x}+1-\ln x$

a) Calculer $\lim_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ (0.5pt)

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g (0.75pt)

c) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera (0.5pt)

d) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $]0,+\infty[$ une unique solution α telle que $3.5<\alpha<3.6$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$. (0.75pt)

2° a) Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement . (1pt)

b) Calculer la dérivée $f'(x)$ et montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=2g(x)$. (0.5pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0.5pt)

3° a) Montrer que $f(\alpha)=\frac{2(1-\alpha)^2}{\alpha}$ où α est le réel trouvé dans la question 1° d) (0.25pt)

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe Γ au point A d'abscisse $x_0=1$ (0.25pt)

c) Montrer que Γ coupe (Ox) en un deuxième point B, autre que A, d'abscisse x_B tel que $7.38<x_B<7.39$ (0.25pt)

4° a) Construire Γ et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (on prendra $\alpha=1.8$ et $f(\alpha)=2.7$) (0.5pt)

b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(2-2x)\ln x=m$ (0.25pt)

5° a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^2(2-2x)\ln x\,dx=-\frac{1}{2}$. (0.5pt)

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe Γ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$ (0.5pt)

Fin

Exercice 1 :

Q	1	2	3	4	5	6
R	A	C	A	C	A	A

Exercice 2 :

1) $p(z) = z^3 - 10z^2 + 36z - 40$

a) $P(2) = 2^3 - 10.(2^2) + 36.(2) - 40$

$= 8 - 40 + 72 - 40 =$

$80 - 80 = 0 \Rightarrow p(2) = 0$

Donc 2 est la racine p(z)

b) $p(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

D'après le tableau d'ohner suivant :

1	-10	36	-40
	2	2	2
1	-8	20	0

$a = -8$ et $b = 20 \Rightarrow$

$P(z) = (z-2)(z^2 - 8z + 20)$

c) $p(z) = 0 \Rightarrow (z-2)(z^2 - 8z + 20) = 0 \Rightarrow$

$z - 2 = 0 \Rightarrow z_0 = 2$ ou

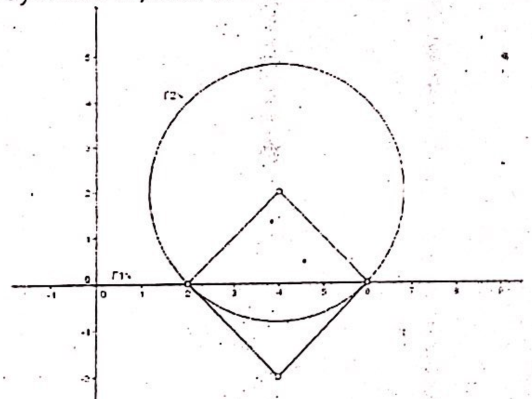
$z^2 - 8z + 20 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 80 = -16 = (4i)^2$

$z_1 = \frac{8+4i}{2} = 4 - 2i$ et $z_2 = \frac{8-4i}{2} = 4 + 2i$

$P(z) = 0 \Rightarrow s = \{4 - 2i \ ; \ 2 \ ; \ 4 + 2i\}$

2) On a $z_A = 4 - 2i$; $z_B = 2$; $z_C = 4 + 2i$

a) Placer A, B et C.



b) $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \quad \frac{4+2i-2}{4-2i-2} = \frac{2+2i}{2-2i} \times \frac{2+2i}{2+2i} =$

$= \frac{8i}{8} = i$

⇒Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

c) ABCD est un parallélogramme ⇒

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow Z_C - Z_D = Z_B - Z_A \Rightarrow$

$Z_D = Z_C - Z_B + Z_A = 4 + 2i - 2 + 4 - 2i = 6$

3) $f(z) = \frac{z-4+2i}{z-4-2i} = \frac{z-z_C}{z-z_B}$

a) $f(z_D) = \frac{6-4+2i}{6-4-2i} = \frac{2+2i}{2-2i} =$

$\frac{(2+2i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{8i}{8} = i$

Interprétation:

Le triangle ACD est rectangle isocèle en D.

b) $|f(z)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z-4+2i}{z-4-2i}\right| = 1 \Rightarrow$

$\left|\frac{z_M - z_A}{z_M - z_C}\right| = 1 \Rightarrow \frac{AM}{CM} = 1 \Rightarrow CM = AM$

L'ensemble $\Gamma 1$ des points M d'affixe z est la médiatrice de $[AC]$.

c) $|f(z) - 1| = \sqrt{2} \rightarrow \left|\frac{z-4+2i}{z-4-2i} - 1\right| = \sqrt{2}$

$\left|\frac{z-4+2i-z+4+2i}{z-(4+2i)}\right| = \sqrt{2} \rightarrow \left|\frac{4i}{z_M - z_C}\right| = \sqrt{2} \rightarrow$

$\frac{4}{CM} = \sqrt{2} \rightarrow CM = 2\sqrt{2} \rightarrow \Gamma_2$ est un cercle de centre C et de rayon $2\sqrt{2}$ cm

4) a) $Z_0 = f(2i) = \frac{2i-4+2i}{2i-4-2i} = \frac{-4+4i}{-4} = 1 - i$

$|Z_0| = \sqrt{2}$ et $\arg Z_0 = \frac{-\pi}{4} \Rightarrow Z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}}$

b) $Z_n = Z_0{}^n = (\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}})^n = (\sqrt{2})^n e^{\frac{-n\pi}{4}} \Rightarrow$

$|Z_n| = (\sqrt{2})^n$

$|Z_n| \geq 2017 \Rightarrow (\sqrt{2})^n \geq 2017 \Rightarrow$

$ln(\sqrt{2})^n \geq ln2017 \Rightarrow nln\sqrt{2} \geq ln2017 \Rightarrow$

$n \geq \frac{\ln(2017)^2}{ln2} \Rightarrow n \geq 21{,}95 \Rightarrow n_0 = 22$

c) $\arg Z_{2018} = \frac{-2018\pi}{4} =$

$-504\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} [2\pi]$

$\Rightarrow Z_{2018}$ *est imaginaire pur*

Exercice 3 :

1) $f(x) = e^{-x} + 2x - 2$

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} + 2x - 2)$

$= 0 + \infty = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (2x - 2)) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} (e^{-x}) = 0$$

Interprétation:

D : y = 2x - 2 est A. Ob de (C) en $+\infty$

Avec Cf / D

b)) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$$\lim_{x \to -\infty} (e^{-x} + 2x - 2) =$$

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x}(1 + 2xe^{x} - 2e^{x}) =$

$+\infty \times (1) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} + 2 - \frac{2}{x}\right) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{xe^{x}} + 2 - \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{0^-} + 2 - \frac{2}{-\infty} =$$

$-\infty + 2 - 0 = -\infty$

Interprétation:

Cf admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de$-\infty$

2) a) $f'(x)= 2 - e^{-x}$

$f'(-\ln 2) = 2 - e^{\ln 2}= 2 - 2=0$

si $x\leq -ln2 \Rightarrow -x \geq \ln 2 \Rightarrow e^{-x} \geq 2$

$\Rightarrow -e^{-x} \leq -2 \Rightarrow 2 - e^{-x} \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$

Le TV de f

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	$-2\ln 2$	↗ $+\infty$

D'après le TV, f(x) est strictement décroissante et continue de $]-\infty; -\ln 2]$ *et change le signe ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation ; f(x)= 0 admet une solution α.*

$f(-1,7) = \approx 0,07 > 0$

$f(-1,6) = \approx -0,24 < 0$

$f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$ *alors*

$\Rightarrow -1,7 < \alpha < -1,6$

De même

f(x) est strictement croissante et continue de$[-\ln 2; +\infty[$ *et change le signe ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation ; f(x)= 0 admet une solution β.*

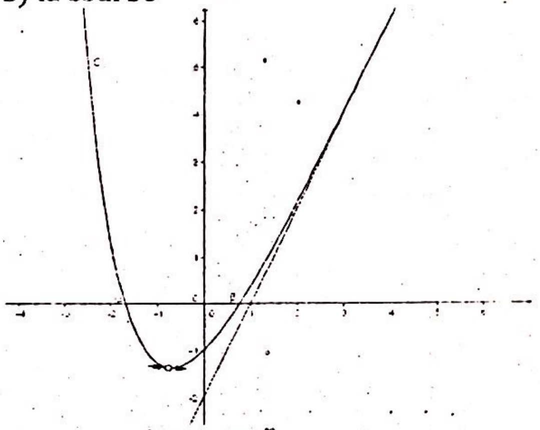
$f(0,7) = \approx -0,103 < 0$

$f(0,8) = \approx 0,049 > 0$

$f(0,7) \times f(0,8) < 0$ *alors*

$\Rightarrow 0,7 < \alpha < 0,8$

b) la courbe



4) On Pose $\begin{cases} u_n = e^{-n} \\ V_n = 2n - 2 \end{cases}$

a) $U_{n+1} = e^{-(n+1)} = e^{-n-1} = e^{-n}.e^{-1} \Rightarrow$

$U_{n+1} = U_n.e^{-1} \Rightarrow$

U_n *est une suite géométrique de* Raison $q = e^{-1}$

$U_0 = 1, |q| < 1 \Rightarrow U_n$ *est décroissante.*

b) $V_{n+1} = 2(n+1) - 2 = 2n = V_n + 2 \Rightarrow$

V_n *est une suite Arithmétique de raison* $r = 2$ *et* $V_0 = -2 \Rightarrow V_n$ *est croissante.*

$\lim_{x\to+\infty} U_n = 0 \Rightarrow U_n$ *est convergente.*

$\lim_{x\to+\infty} V_n = +\infty \Rightarrow V_n$ *est Divegente.*

c) Donc U_n et V_n *ne sont Pas adjàcentes.*

c) $S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n) =$

$U_0+V_0+U_1+V_1......+u_n+V_n = U_0 + U_1....+U_n + V_0+ V_1+...+V_n$

$\Rightarrow S_n = \frac{(1-(e^{-1})^{n+1})}{1-e^{-1}} + \frac{(n+1)(2n-2-2)}{2} \Rightarrow$

$S_n = \frac{e-e^{-n-2}}{e-1} + n^2 - n - 2 \Rightarrow$

$\lim_{x\to+\infty} S_n = \frac{e}{e-1} + \infty = +\infty$ .et

$\lim_{x\to+\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{e-e^{-n-2}}{e-1}}{n^2} + \frac{n^2-n-2}{n^2} \right) = 1.$

Exercice 4 :

1) $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) = \frac{1}{x} + 1 - \ln x$

a) $\lim_{x\to0^+} g(x) =$

$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} + 1 - \ln x\right) = +\infty + \infty = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 - \ln x\right) =$

$0 - \infty = -\infty$

b) $g'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-(x+1)}{x^2} < 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

Le TV

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g'(x)		-	
g(x)	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

c) D'après le TV, g(x) est strictement croissante et continue donc g(x) est bijective de $I = [0; +\infty[$ *sur* $J = R$

d)g(x) est bijective de $I=[0;\ +\infty[$ et change le signe ; $0\in J$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation ; g(x)= 0 admet une solution α.

$g(3{,}5) = \approx 0{,}77 > 0$

$g(3{,}6) = \approx -3{,}36 < 0$

$\Rightarrow f(3{,}5)\times f(3{,}6) <$ à

$\Rightarrow 3{,}5 < \alpha < 3{,}6$

Signe de g :

x	0		α		$+\infty$
g(x)	||	+	0	-	

2)f(x) = (2-2x)(lnx-2)

a) $\lim_{x\to0^+} f(x) =$

$\lim_{x\to0^+}((2-2x)(lnx-2)) =$

$2(-\infty) = -\infty$

Donc d : x =0 est AV de Cf

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty}((2-2x)(lnx-2)) =$

$-\infty\times+\infty = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{x}-2\right)(lnx-2)\right) =$$

$-2(+\infty) = -\infty$

Cf admet une branche parabolique de direction (oy)en $+\infty$

b) $f'(x) = -2lnx + 4 + \frac{(2-2x)}{x}$

$= -2lnx + 4 + \frac{2}{x} - 2 = -2lnx + 2 + \frac{2}{x}$

$= 2(\frac{1}{x} + 1 - lnx) = 2g(x)$

Donc f' et g ont le même signe

c)Le TV de f

x	0		α		$+\infty$
f'(x)	||	+		-	
f(x)	|| $+\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3)a) $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + 1 - ln\alpha = 0$

$\Rightarrow ln\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha}$

$f(\alpha) = (2-2\alpha)(ln\alpha - 2)$

$\Rightarrow f(\alpha) = (2-2\alpha)(\frac{\alpha+1}{\alpha} - 2)$

$= 2(1-\alpha)(\frac{1-\alpha}{\alpha}) = \frac{2(1-\alpha)^2}{\alpha}$

b)La tangente en A

$f'(1) = 4$

$f(1) = 0$

$\Rightarrow T : y = 4(x-1)+0 \Rightarrow T: y = 4x+4$

c)intersection de Cf avec (ox)

f(x) =0

D'après le TV, f(x) ; change le signe deux fois de $I=]0;+\infty[$ donc f(x)= 0 admet deux solutions: $x = 1$ et $x = \beta$

f(7,38)= 0,01 ; f(7,38)=-0,001

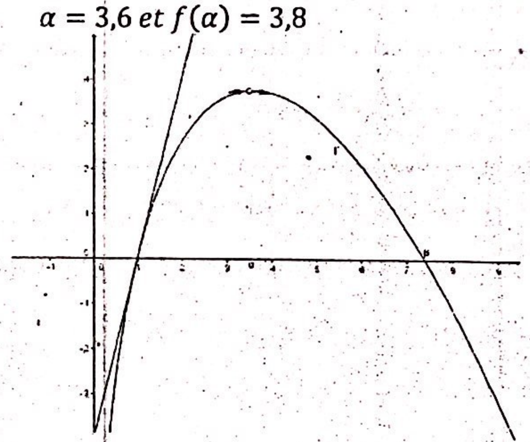
$f(7{,}3\_)\times f(7{,}39) < 0$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation ;

$7{,}38 < \beta < 7{,}39$

4) a)Représentation graphique

$\alpha = 3{,}6$ *et* $f(\alpha) = 3{,}8$



b) $(2-2x)lnx = m$

$\Rightarrow (2-2x)lnx - 2(2-2x) =$

$m - 2(2-2x) = 4x - 4 + m$

$\Rightarrow f(x) = 4x - 4 + m$

Le nombre de solution de cette équation est le nombre de point d'intersection de (C) avec les parallèles à T .

(la tangente en A)

on peut résumer les résultats dans un tableau suivant :

Les valeurs de m	*Nombre de Solutions*
$m < 0$	*2Solution*
$m = 0$	*1 Solution(T)*
$m > 0$	*0Solutions*

5) a) Soit $I = \int_1^2 (2-2x)\ln x dx$

on pose $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

et $V' = 2 - 2x \Rightarrow v = 2x - x^2$

$\Rightarrow I = [(2x - x^2)\ln x]_1^2 - \int_1^2 (2-x)dx \Rightarrow$

$I = [(2x - x^2)\ln x]_1^2 - \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \Rightarrow$

$I = -2 + 2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

b) $\Rightarrow s = \int_1^2 (f(x))dx =$

$\int_1^2 ((2-2x)\ln x - 2(2-2x))dx =$

$\int_1^2 (2-2x)\ln x dx -$

$\int_1^2 (2-2x)\ln x dx = I - [4x - 2x^2]_1^2$

$= -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$