République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et des Concours
Service des Examens

Baccalauréat 2016
Session Complémentaire

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve : Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(1+3i)z^2+2iz+6-2i$.

1.a) Calculer $P(1-i)$. (0,5 pt)

b) Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$ on a : $P(z)=(z-1+i)(z^2+az+b)$. (0,5 pt)

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. (0,75 pt)

2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-1+i$, $z_B=1-i$ et $z_C=1+3i$.

a) Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC. (0,75 pt)

b) Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$. (0,25 pt)

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que :
$$2MA^2+MB^2+MC^2=16.$$ (0,25 pt)

d) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que :
$$-2MA^2+MB^2+MC^2=16.$$ (0,25 pt)

3) Soit s la similitude directe de centre C qui transforme A en B.

a) Déterminer l'écriture complexe de s. (0,25 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de s. (0,5 pt)

4) On considère la parabole P de foyer A et de directrice (BC).

a) Déterminer l'axe focal et le sommet de P. (0,5 pt)

b) Tracer P et P' dans le repère précédent où $P'=s(P)$. (0,25 pt)

c) Donner des équations cartésiennes de P et P' dans le repère précédent. (0,25 pt)

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. (0,75 pt)

b) Interpréter les limites précédentes. (0,5 pt)

2.a) Dresser le tableau de variation de f et représenter sa courbe (C). (0,75 pt)

b) Calculer l'aire A du domaine plan délimité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$. (0,25 pt)

3) Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}$ où n est entier naturel non nul.

Montrer que pour tout $x\in[-1;0]$ on a : $0\le f_n(x)\le\frac{e}{n!}$. (0,5 pt)

4) Soit la suite (I_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $I_n=\int_{-1}^{0}f_n(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}dx$.

a) En interprétant graphiquement I_1, donner sa valeur (On pourra utiliser A.2)). (0,25 pt)

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_{n+1}=I_n-\frac{1}{(n+1)!}$. (0,5 pt)

5) Soit la suite (U_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $U_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n=e-U_n$. (0,5 pt)

b) Démontre que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $0\le I_n\le\frac{e}{n!}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$. (0,5 pt)

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. (0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{6e^{x}}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Vérifier que f est impaire et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (0,75 pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. (0,5 pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0, 5 pt)

d) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions dont l'une α vérifie $2,8<\alpha<2,9$ (0,5 pt)

2.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera. (0,25 pt)

b) Vérifier que pour tout réel x : $(f(x))^2-(f'(x))^2=-\frac{1}{9}$. En déduire l'expression de $(f^{-1})'(x)$. (0,5 pt)

c) Soit x un réel quelconque. Exprimer l'intégrale $I(x)=\int_0^x\frac{3}{\sqrt{9t^2+1}}dt$ en fonction de $(f^{-1})(x)$. (0,25 pt)

3) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour tout point M(x,y) on note $r(M)=M'$ et $r(C)=C_1$

a) Donner l'expression complexe de la rotation r puis écrire les coordonnées x',y' de M' en fonction de x et y. (0,5 pt)

b) Montrer que (C_1) est la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\ln(-3x+\sqrt{9x^2+1}).$$ (0,25 pt)

c) Montrer que pour tout réel x , $h(-x)=f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère précédent. (0,25 pt)

4.a) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en deux points autres que l'origine. (0,25 pt)

b) Construire, dans le même repère les courbes (C) et (C') et calculer en fonction de α l'aire du domaine plan délimité par ces deux courbes (α est le nombre indiqué en 1.d). (0,5 pt)

Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre G et de coté a $(a>0)$. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB] et [AI] et D le symétrique de I par rapport à J.

1) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,75 pt)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme B en C et I en J. (0,5 pt)

b) Déterminer $r_1(K)$ et déterminer le centre et un angle de r_1. (0,75 pt)

3) Soit r_2 la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $r_2(B)$ et $r_2(I)$. (0,5 pt)

b) En déduire $r_2(C)$. (0,25 pt)

4.a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f du plan qui transforme B en C et I en J. (0,5 pt)

b) Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. (0,5 pt)

c) Caractériser la transformation $g=f\circ r_1^{-1}$. (0,25 pt)

5) On considère la transformation $\sigma=r_2\circ r_1$ et on pose $\sigma(M)=M'$.

a) Caractériser σ. (0,25 pt)

b) Montrer que si $M\neq M'$ alors la droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,25 pt)

c) En déduire que le quadrilatère AMIM' est un parallélogramme. (0,25 pt)

6) Pour tout point M du plan, on pose $r_1(M)=M_1$ et $r_2(M)=M_2$.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan pour lesquels les points M, M_1 et M_2 sont alignés (On pourra utiliser l'angle $(\overrightarrow{MG};\overrightarrow{MK})$). (0,25 pt)

Fin.

Corrigé

Exercice 01

$P(z) = z^3 - (1+3i)z^2 + 2iz + 6 - 2i$

1) a) Calculons $p(1-i)$

$p(1-i) = (1-i)^3 - (1+3i)(1-i)^2 + 2i(1-i) + 6 - 2i$

$= 0$

b) Déterminons a et b tels que

$p(z) = (z-1+i)[z^2 + az + b]$

	1	$-1-3i$	$2i$	$6-2i$
$1-i$	↓	$1-i$	$-4-4i$	$-6+2i$
	1	$-4i$	$-4-2i$	0
		a	b	

$p(z) = (z-1+i)[z^2 - 4iz - 4 - 2i]$

c) Déduisons les solutions de $P(z) = 0$

$z - 1 + i = 0$ ou $z^2 - 4iz - 4 - 2i = 0$

$z = 1 - i$ $\quad \Delta = -16 + 16 + 8i$

$= (2+2i)^2$

$z_1 = \dfrac{4i + 2 + 2i}{2} = 1 + 3i$

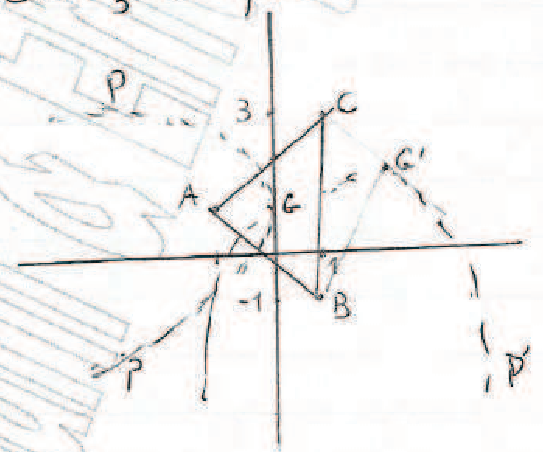
$z_2 = \dfrac{4i - 2 - 2i}{2} = -1 + i$

$S = \{1-i; -1+i; 1+3i\}$

2) Soient $z_A = -1+i$; $z_B = 1-i$

$z_C = 1+3i$

a) Plaçons les points A B et C



Déterminons la nature de (ABC)

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1+3i+1-i}{1-i+1-i} = \dfrac{2+2i}{2-2i} = \dfrac{i(2-2i)}{2-2i} = i$

donc (ABC) est isocèle rectangle en A

b) Déterminons z_G

$z_G = \dfrac{2z_A + z_B + z_C}{4} = \dfrac{-2+2i+1-i+1+3i}{4}$

$z_G = \dfrac{4i}{4} = i \Rightarrow \boxed{z_G = i}$

c) Déterminons Γ

$M \in \Gamma \Leftrightarrow 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16$

$\Leftrightarrow 2GA^2 + GB^2 + GC^2 + 4MG^2 = 16$

$2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 2 + 5 + 5 = 12$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow 12 + 4MG^2 = 16$

$\Leftrightarrow 4MG^2 = 4 \Leftrightarrow GM^2 = 1$

$\Leftrightarrow \Gamma = \mathcal{C}(G, 1) = \mathcal{C}(G, GA)$

d) Determinons Δ

$M \in \Delta \Leftrightarrow -2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 16$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + 2\vec{MA}\cdot\vec{V} = 16$

avec $\vec{V} = \vec{AB} + \vec{AC}$

$AB^2 + AC^2 = 8 + 8 = 16$

$M \in \Delta \Leftrightarrow 16 + 2\vec{AM}\cdot\vec{V} = 16$

$\Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{V} = 0$

Δ est la droite passant par A et perpendiculaire à $\vec{V} = \vec{AB} + \vec{AC}$

) soit S la similitude directe

$S(C) = C$ et $S(A) = B$

a) Determinons l'écriture Complexe de S

$S(C) = C \Leftrightarrow Z_C = aZ_C + b$

$S(A) = B \Leftrightarrow Z_B = aZ_A + b$

$\Rightarrow a = \frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} = \frac{1+3i-1+i}{1+3i+1-i} = \frac{4i}{2+2i} = \frac{4i(2-2i)}{8}$

$\boxed{a = 1+i}$

$b = Z_B - aZ_A = 1-i-(1+i)(-1+i)$

$b = 1-i+1-i+i+1 = 3+i$

$S(M) = M' \Leftrightarrow Z' = (1+i)Z + 3 + i$

b) Determinons le rapport et un angle de S

rapport $|a| = |1+i| = \sqrt{2}$

angle $\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

$S = S(C, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

(4) P parabole de foyer A et de directrice (BC)

(a) l'axe focal est (AG)

le sommet le point G.

b)

	Pour P	$\xrightarrow{S}$	Pour P'
Foyer	A	$\longrightarrow$	B
Somnet	G	$\longrightarrow$	$G' = S(G) = G'(2,2)$
Directrice	(BC)		La perpendiculaire à (BG') passant par C

$Z_{G'} = S(G) \Rightarrow Z_{G'} = (1+i)(i) + 3 + i$

$= i - 1 + 3 + i$

$= 2 + 2i$

Exercice 02

soit $f(x) = (1+x)e^{-x}$

de courbe $\mathcal{C}$

1) a) Verifions

• $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} (1+x)e^{-x} = -\infty \cdot +\infty = -\infty$

• $\lim\limits_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty} \left[\frac{1+x}{x} \cdot e^{-x}\right] = 1 \cdot +\infty = +\infty$

• $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} (e^{-x} + xe^{-x}) = 0$

b) Interpretation

• $y=0$ AH au voisinage de $+\infty$

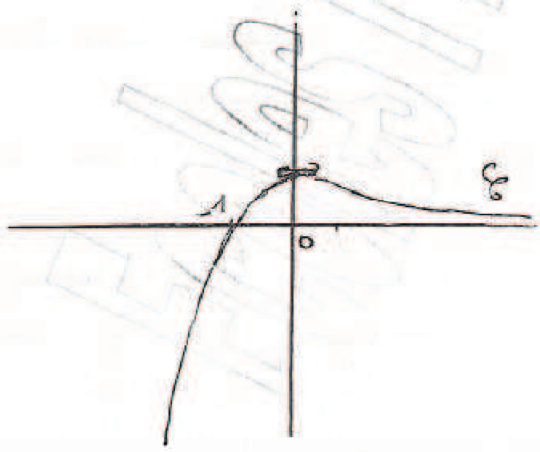
• $\mathcal{C}$ admet une b.p de direction (oy) au voisinage de $-\infty$

2) a) Dressons le T.V de f

$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(1+x) = -xe^{-x}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



b) Calcul de A

$$A = \int_{-1}^{0} (1+x)e^{-x}\,dx$$

on pose $u = 1+x \longrightarrow u' = 1$

$v' = e^{-x} \longrightarrow v = -e^{-x}$

$$A = [uv] - \int u'v$$

$$= \left[-(1+x)e^{-x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^{-x}dx$$

$$= \left[-(1+x)e^{-x}\right]_{-1}^{0} - \left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \left[-(2+x)e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

$$= (-2) - (-e)$$

$$A = e - 2 \text{ UA}$$

3) $f_n(x) = \frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}$ $\quad n \geq 1$

Montrons que $\forall x \in [-1, 0]$ $\quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$

• $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq e^{-x} \leq e$

• $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1+x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq (1+x)^n \leq 1$

$\begin{cases} 1 \leq e^{-x} \leq e \\ 0 \leq (1+x)^n \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq (1+x)^n e^{-x} \leq e$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{e}{n!}$

$0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$

(4) $\forall n\geq 1 \quad I_n=\int_{-1}^{0} f_n(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}dx$

(a) Interpretation de I_1

I_1 : designe l'aire limité par $\mathcal{C}$ l'axe (ox) et les droites $x=-1$ et $x=0$

$I_1=\mathcal{A}=e-2$

(b) Montrons que $I_{n+1}=I_n-\frac{1}{(n+1)!}$

$I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\int_{-1}^{0}(1+x)^{n+1}e^{-x}dx$

$u(x)=(1+x)^{n+1} \longrightarrow u'(x)=(n+1)(1+x)^n$

$v'(x)=e^{-x} \longrightarrow v(x)=-e^{-x}$

$I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left[\left[(1+x)^{n+1}e^{-x}\right]_{-1}^{0}+(n+1)\int_{-1}^{0}(1+x)^{n}e^{-x}dx\right]$

$I_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)!}+I_n$

$I_{n+1}=I_n-\frac{1}{(n+1)!}$

5) $\forall n\geq 1 \quad U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

(a) Montrons que $I_n=e-U_n$

$I_{n+1}=I_n-\frac{1}{(n+1)!}$

$$\begin{cases} I_2=I_1-\frac{1}{2!} \\ I_3=I_2-\frac{1}{3!} \\ \\ I_n=I_{n-1}-\frac{1}{n!}\end{cases}$$

$I_n=I_1-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\quad\cdots\quad-\frac{1}{n!}$

$I_n=e-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\quad\quad-\frac{1}{n!}$

$I_n=e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e-U_n$

(a) Montrons par recurrence que

$\forall n\geq 1 \quad I_n=e-U_n$

• $n=1 \quad I_1=e-2=e-1-1$

$=e-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}=e-\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!}$

$=e-U_1$

• supposons que $I_n=e-U_n$

• Montrons pour $(n+1)$

$I_{n+1}=I_n-\frac{1}{(n+1)!}=e-U_n-\frac{1}{(n+1)!}$

$=e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{(n+1)!}$

$=e-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}=e-U_{n+1}$

donc $\forall n\geq 1 \quad I_n=e-U_n$

(b) Montrons que $\forall n\geq 1 \quad 0\leq I_n\leq\frac{e}{n!}$

$0\leq f_n(x)\leq\frac{e}{n!}$

$0\leq I_n\leq\int_{-1}^{0}\frac{e}{n!} \Rightarrow 0\leq I_n\leq\frac{e}{n!}(0+1)$

$\Rightarrow 0\leq I_n\leq\frac{e}{n!}$

on en deduit que $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$

(c) Deduisons $\lim_{n\to+\infty}U_n$

$U_n=e-I_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}U_n=e$

Exercice 3

$f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{6e^x} = \dfrac{1}{6}(e^x - e^{-x})$

1) ⓐ Vérifions que f est impaire

$f(-x) = \frac{1}{6}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{6}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$

- $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \frac{1}{6}(e^x - e^{-x}) = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ (par symétrie)

b) $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{xe^x}\right) = +\infty$

- $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$

ⓒ Dressons le tableau de variation de f

$f'(x) = \frac{1}{6}(e^x + e^{-x}) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet 3 solutions dont l'une α vérifie $2{,}8 < \alpha < 2{,}9$

on pose $h(x) = f(x) - x$

$h'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{e^{2x} - 6e^x + 1}{6e^x}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 3 + 2\sqrt{2}$ ou $e^x = 3 - 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = 1{,}7$ ou $x = -1{,}6$

x	$-\infty$		$-1{,}6$		$1{,}7$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0{,}98$	$\searrow$	$-0{,}81$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction $h(x)$ change 3 fois sur $\mathbb{R}$ alors $f(x) = x$ admet 3 solutions

$h(2{,}8) < 0$

$h(2{,}9) > 0$

$2{,}8 < \alpha < 2{,}9$

2) ⓐ Montrons que f réalise une bijection

comme f est continue et croissante alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

ⓑ Vérifions que : $(f(x))^2 - (f'(x))^2 = -\frac{1}{9}$.

$\frac{1}{36}(e^x - e^{-x})^2 - \frac{1}{36}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{36}(-4e^x e^{-x}) = -\frac{1}{9}$.

Déduisons $(f^{-1})'(x)$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{f^2(x) + \frac{1}{9}}} = \dfrac{3}{\sqrt{9f^2+1}}$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$

c) Exprimons $I(x)$

$I(x) = \int_0^x \frac{3}{\sqrt{9t^2+1}}\,dt = \int_0^x (f^{-1})'(t)\,dt = f^{-1}(x)$

③ soit $r(O, \frac{\pi}{2})$

$r(M) = M' \iff z' = iz$

$\iff x' + iy' = i(x + iy)$

$\iff \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

b) soit $r(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1$

Determinons l'equation de $\mathcal{C}_1$

$M(x,y) \in \mathcal{C} \iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{6}$

$\iff 6y = e^x - e^{-x}$

$\iff -6x' = e^{y'} - e^{-y'}$

$\iff -6x'e^{y'} = e^{2y'} - 1$

$\iff e^{2y'} + 6x'e^{y'} - 1 = 0$

on pose $X = e^{y'}$

$X^2 + 6x'X - 1 = 0$

$\Delta = 36x'^2 + 4 = (2\sqrt{9x'^2+1})^2$

$e^{y'} = \frac{-6x' - 2\sqrt{9x'^2+1}}{2}$ ou $e^{y'} = \frac{-6x' + 2\sqrt{9x'^2+1}}{2}$

$\cancel{e^{y'} = -3x' - \sqrt{9x'^2+1}}$ $\quad e^{y'} = -3x' + \sqrt{9x'^2+1}$

a rejeter

$y' = \ln(-3x' + \sqrt{9x'^2+1})$

l'equation de $\mathcal{C}_1$ est

$h(x) = \ln(-3x + \sqrt{9x^2+1})$

c) Montrons que $h(-x) = f^{-1}(x)$

$h(-x) = \ln(3x + \sqrt{9x^2+1})$

calculons $h'(x) = \dfrac{3 + \frac{18x}{2\sqrt{9x^2+1}}}{3x + \sqrt{9x^2+1}}$

$h'(x) = \frac{3(3x + \sqrt{9x^2+1})}{(3x + \sqrt{9x^2+1})\sqrt{9x^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{3x^2+1}} = (f^{-1})'(x)$

$h(0) = 0$

donc $h'(x) = f^{-1}(x)$

4) a) Montrons que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de f^{-1} se coupent en deux points autre que l'origine

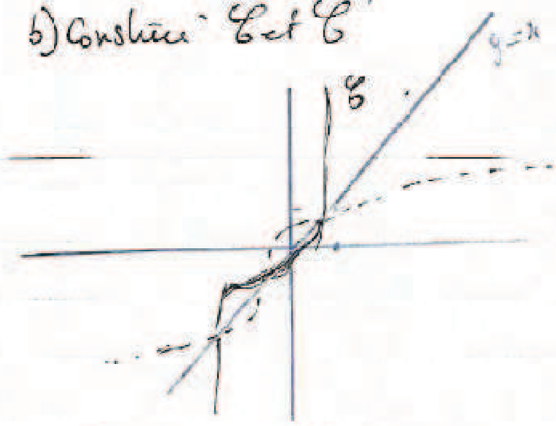
$f(x) = f^{-1}(x) \iff f(x) = x$

$\Rightarrow h(x) = 0$

$\iff h(x) = 0$

admet 3 points dont l'un est l'origine

b) Construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$

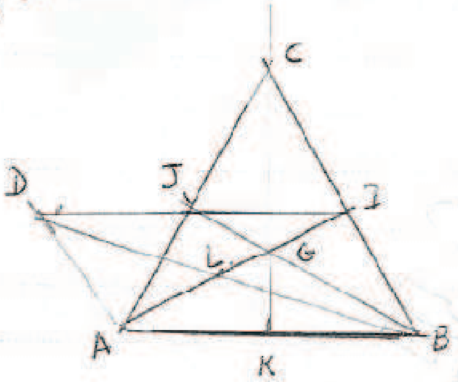


$A = \int_0^{\alpha} (f(x) - x)\,dx = \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{6}(e^x - e^{-x}) - x\right)dx$

$= \left[\frac{1}{6}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{6}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{3}$

Exercice 04

(1) Figure



2) (a) Existence de r_1

$r_1(B) = C$

$r_1(I) = J$

comme $BI = CJ$ et $\overrightarrow{BI} \neq \overrightarrow{CJ}$

alors il existe une unique rotation r_1 telle que $r_1(B) = I$ et $r_1(I) = J$

b) Calculons $r_1(K)$

Puisque $\begin{pmatrix} K \\ B \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1} \begin{pmatrix} I \\ C \\ J \end{pmatrix}$ équilatéral direct.

Triangle équilatéral direct

donc $r_1(K) = I$

. centre de r_1

$med[BC] \cap med[IJ] = (AI) \cap (CK) = \{G\}$

. angle de r_1

$(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}) = \frac{2\pi}{3}$

donc $r_1 = r(G, 2\pi/3)$

(3) (a) Determinons

. $r_2(B) = I$ car (KBI) equilateral direct

$r_2(I) = J$

Determinons $r_2(C)$

on a $I = B*C \Rightarrow r_2(I) = r_2(B) * r(C)$

$\Rightarrow J = I * r(C)$

or $J = I * D$

donc $r_2(C) = D$

(4) a) Existence de l'antideplacement f

Puisque $BI = CJ$ alors il existe un antideplacement f telle que

$f(B) = C$ et $f(I) = J$

(b) Montrons que f est une symetrie glissee

comme $med[BC] \neq med[IJ]$

alors f est une symetrie glissee

Donnons sa forme reduite

* son axe Δ

. $f(B) = C \Rightarrow I \in \Delta$
$I = B*C$

$f(I) = J$

$I*J \in D$

Donc $(\Delta) = (IJ)$

. son vecteur

$f = t_{\vec{u}} \circ S_{IJ}$ $(I) = J$

$t_{\vec{u}}(I) = J \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{IJ}$

$f = t_{\overrightarrow{IJ}} \circ S_{IJ} = S_{IJ} \circ t_{\vec{u}}$

forme reduite de f

c) Caractérisons $g = f \circ r^{-1}$

Comme g est la composée d'un antidéplacement f et d'un déplacement r^{-1} alors g est un antidéplacement

$g(J) = f \circ r^{-1}(J) = f(I) = J$

$g(C) = f \circ r^{-1}(C) = f(B) = C$

g est un antidéplacement admet deux points invariants

alors $g = S_{CJ}$

5) On pose $\sigma = r_2 \circ r_1$

$\sigma(M) = M'$

a) Caractérisons σ

comme $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

alors σ est une symétrie centrale

On $r_2 \circ r_1(B) = r_2(C) = D$

et $L = B * D$ car $(ABCD)$ est un parallélogramme

donc $\sigma = S_L$

b) Comme $M \neq M'$ et $\sigma(M) = M'$

$S_L(M) = M'$

donc $L = M * M' \Rightarrow L \in (MM')$

c) Déduisons que $(AMIM')$ est un parallélogramme

on a $L = M * M' = A * I$

6) $r_1(M) = M_1$ et $r_2(M) = M_2$

Déterminons l'ensemble Γ tel que M; M_1 et M_2 sont alignés

M, M_1 et M_2 alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) = k\pi$

Soit $M \in \Gamma$ calculons

$(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MM_1}) + (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) + (\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MK})$

$= (\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) + (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BK})$

$= -\frac{\pi}{6} + (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) + \frac{\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{6} + (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2})$

$= (\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BK}) + k\pi$

donc $(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BK})\ [\pi]$

donc M, B, G, K sont cocycliques

donc Γ est le cercle circonscrit au triangle (BGK)