69

Baccalauréat 2017
Session Normale

Série : Sciences de la Nature
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

Exercice1 : (3 points)

Le tableau ci-contre donne les résultats d'une étude d'efficacité d'un vaccin, sur un groupe de 1000 personnes.

	Vaccinée	Non vaccinée	Total
Malade	100	150	250
Non malade	600	150	750
Total	700	300	1000

On choisit au hasard une personne de ce groupe, et on note V l'évènement « la personne est vaccinée » et M l'évènement « la personne est malade ».

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $p(V)$ est	0.7	0.6	0.1	(0.5 pt)
2	La probabilité $p(M)$ est	0.1	0.15	0.25	(0.5 pt)
3	La probabilité $p(V\cap M)$ est	0.1	0.155	0.85	(0.5 pt)
4	la probabilité $p_V(M)$ est	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}$	(0.5 pt)

Le choix est répété, de façon indépendante, durant 10 jours successifs, à raison d'une personne du groupe par jour. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes à la fois malades et vaccinées choisies. Soit E l'événement « au moins une personne malade et vaccinée est choisie durant ces dix jours »

5	La probabilité p(E) est	$1-(0.9)^{10}$	$1-(0.1)^{10}$	$1-(0.85)^{10}$	(0.5 pt)
6	L'espérance mathématique de X est	1	2	3	(0.5 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse						

Exercice 2 : (5 points)

1° Pour tout complexe z on pose : $P(z)=z^3-10z^2+36z-40$

a) Calculer $P(2)$ (0.5pt)

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$ (0.5pt)

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. (0.5pt)

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=4-2i$, $z_B=2$ et $z_C=4+2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. (0.5pt)

b) Déterminer la nature du triangle ABC. (0.5pt)

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. (0.5pt)

3) Pour tout nombre $z\neq 4+2i$; on pose : $f(z)=\dfrac{z-4+2i}{z-4-2i}$.

a) Vérifier que $f(z_D)=i$ et interpréter graphiquement. (0.25pt)

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$. (0.5pt)

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{2}$ (0.5pt)

4° On pose $z_0=f(2i)$. Pour tout entier naturel n on note $z_n={z_0}^n$.

a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. (0.25pt)

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $|z_n|\geq 2017$. (0.25pt)

c) Vérifier que le point d'affixe z_{2018} appartient à l'axe des imaginaires purs. (0.25pt)

7○

Exercice 3 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}+2x-2$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-2)\right)$. Interpréter graphiquement. (0.75pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. (0.75pt)

2° a) Calculer la dérivée $f'(x)$ et vérifier que $f'(-\ln 2)=0$. (0.5pt)

b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f (0.5pt)

3° a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β.
Vérifier que $-1.7<\alpha<-1.6$ et $0.7<\beta<0.8$ (0.5pt)

b) Représenter la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (0.25pt)

4° On définit les suites (u_n) et (v_n) pour tout entier naturel n par : $u_n=e^{-n}$ et $v_n=2n-2$

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle est décroissante (0.25pt)

b) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et qu'elle est croissante (0.25pt)

c) Ces deux suites sont-elles adjacentes ? Justifier. (0.25pt)

5° Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n)$

a) Exprimer S_n en fonction de n (0.5pt)

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n^2}$ (0.5pt)

Exercice4 : (7 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(2-2x)(\ln x-2)$ et Γ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1° On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}+1-\ln x$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (0.5pt)

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g (0.75pt)

c) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera (0.5pt)

d) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $]0,+\infty[$ une unique solution α telle que $3.5<\alpha<3.6$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$. (0.75pt)

2° a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. (1pt)

b) Calculer la dérivée $f'(x)$ et montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=2g(x)$. (0.5pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0.5pt)

3° a) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{2(1-\alpha)^2}{\alpha}$ où α est le réel trouvé dans la question 1° d) (0.25pt)

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe Γ au point A d'abscisse $x_0=1$ (0.25pt)

c) Montrer que Γ coupe (Ox) en un deuxième point B, autre que A, d'abscisse x_B tel que $7.38<x_B<7.39$ (0.25pt)

4° a) Construire Γ et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (on prendra $\alpha=1.8$ et $f(\alpha)=2.7$) (0.5pt)

b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(2-2x)\ln x=m$ (0.25pt)

5° a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^2(2-2x)\ln x\,dx=-\dfrac{1}{2}$. (0.5pt)

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe Γ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$ (0.5pt)

Fin