10) Corrigés des exercices

Corrigé 21

1) On procède à des divisions successives de n par les nombres premiers en ordre croissant jusqu'à l'obtention d'un quotient égal à 1.

4678128	2
2339064	2
1169532	2
584766	2
292383	3
97461	3
32487	3
10829	7
1547	7
221	13
17	17
1	

On trouve: $n = 2^4 \times 3^3 \times 7^2 \times 13 \times 17$

Le nombre de diviseurs de n est : $(4+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 240$.

La somme de ces diviseurs est : $S = \dfrac{2^5-1}{2-1} \times \dfrac{3^4-1}{3-1} \times \dfrac{7^3-1}{7-1} \times \dfrac{13^2-1}{13-1} \times \dfrac{17^2-1}{17-1} = 17811360$

Corrigé 22

En base 7 :

$$\begin{array}{r} 2645 \\ +\ \ 321 \\ \hline 3266 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2645 \\ \times\ \ 321 \\ \hline 2645 \\ 5623 \\ 11601 \\ \hline 1252305 \end{array}$$

Corrigé 23

Remarquons que : $60 = 3 \times 4 \times 5$ et que les nombres $3, 4$ et 5 sont premiers entre eux deux à deux.

Pour que 60 divise A il suffit que $3, 4$ et 5 le divisent en même temps.

On a : $A = n \times n \times (n-1)(n+1)(n^2+1)$.

Commençons par 3 :

A contient trois facteurs consécutifs $n-1, n$ et $n+1$ dont l'un est divisible par 3 donc $3 \mid A$.

Passons à 4 :

Si n est pair, on pose $n = 2k$ et $n^2 = 4k^2$ donc $4 \mid n^2$ et par suite $4 \mid A$.

Si n est impair alors $n-1$ et $n+1$ sont pairs et $4 \mid (n-1)(n+1)$ et par suite $4 \mid A$

Passons à 5 :

Observons le tableau ci-contre :

Restes de n par 5	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Restes de n^4 par 5	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

Dans tous les cas $5 \mid n$ ou bien $5 \mid (n^4-1)$ et par suite $5 \mid A$.

Comme $3, 4$ et 5 sont premiers entre eux et divisent A en même temps alors $60 \mid A$.

Corrigé 24

L'entier 10 n'est pas premier : on ne peut donc pas appliquer directement la formule de Legendre.

Le plus grand exposant n tel que 10^n divise 1000! est le plus petit des deux nombres $v_2(2023!)$ et $v_5(2023!)$. La formule de Legendre prouve directement que c'est $v_5(2023!)$

$$v_5(2023!) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2023}{5^i}\right] = \left[\frac{2023}{5}\right] + \left[\frac{2023}{5^2}\right] + \left[\frac{2023}{5^3}\right] + \left[\frac{2023}{5^4}\right]$$

$$v_5(2023!) = 404 + 80 + 16 + 3 = 503$$

Le nombre 2023! se termine donc par 503 zéros.

Corrigé 25

1) On a :

$$\begin{cases} 5^0 \equiv 1[7] \\ 5^1 \equiv 5[7] \\ 5^2 \equiv 4[7] \\ 5^3 \equiv 6[7] \\ 5^4 \equiv 2[7] \\ 5^5 \equiv 3[7] \\ 5^6 \equiv 1[7] \end{cases}$$

On en déduit que pour tout entier k :

$$\begin{cases} 5^{6k} \equiv 1[7] \\ 5^{6k+1} \equiv 5[7] \\ 5^{6k+2} \equiv 4[7] \\ 5^{6k+3} \equiv 6[7] \\ 5^{6k+4} \equiv 2[7] \\ 5^{6k+5} \equiv 3[7] \end{cases}$$

2) On a $2021 = 7\times 288+5$, donc $2021 \equiv 5 \quad [7]$ et $2021^{2020} \equiv 5^{2020} \quad [7]$.

D'autre part, $2020 = 6\times 336+4$, donc 2020 est du type $6k+4$.

Alors $5^{2020} \equiv 5^{6k+4} \equiv 2 \quad [7]$.

On en déduit que le reste de la division euclidienne de 2021^{2020} par 7 est 2.

3) On a X= $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$.

a) On a $2011 = 7\times 287+2$, donc $2011 \equiv 2 \quad [7]$ et $2011 \equiv -5 \quad [7]$

On a aussi $2014 = 7\times 287+5$, donc $2014 \equiv 5 \quad [7]$.

Donc $2011^{2n+1} \equiv (-5)^{2n+1} = -5^{2n+1} \quad [7]$ (car $2n+1$ est impair) ;

et $2014^{2n+1} \equiv 5^{2n+1} \quad [7]$. Par addition $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1} \equiv 0[7]$. Alors, pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 7.

b) On sait que $2011 \equiv 11 \quad [25]$ et $2014 \equiv 14 \equiv -11 \quad [25]$.

En élevant à la puissance impaire $2n+1$ et par addition on trouve que $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1} \equiv 0[25]$. Alors, pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 25.

Remarque :

Le nombre $X=2011^{2n+1}+2014^{2n+1}$ est divisible par la somme $2011+2014$ car la puissance $2n+1$ est impaire. Donc X est divisible par 2025 qui est un multiple de 25. Alors X est divisible par 25.

c) Le nombre X est divisible par deux entiers 7 et 25 qui sont premiers entre eux. Alors X est divisible par leur produit qui est 175 .

Corrigé 26

1) Soit n le nombre de pièces du puzzle.

S'il les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces. Alors $n \equiv 3[5]$

S'il les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces. Alors $n \equiv 2[7]$

S'il les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièce. Alors $n \equiv 1[9]$

S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièces. Alors $n \equiv 0[11]$

On en déduit que :

$$2n-11 \equiv 6-11=-5 \equiv 0[5]$$

$$2n-11 \equiv 4-11=-7 \equiv 0[7]$$

$$2n-11 \equiv 2-11=-9 \equiv 0[9]$$

$$2n-11 \equiv -11 \equiv 0[11]$$

Alors $2n-11$ est divisible par 5, 7, 9 et 11. Sa mère a raison.

2) Le nombre $2n-11$ est divisible par quatre nombres premiers. Alors il est divisible par leur produit $5\times7\times9\times11=3465$.

Il existe un entier k tel que $2n-11=3465k$.

D'autre part $n<2020 \Rightarrow 2n-11<4029$

Alors la seule valeur possible de k est $k=1$.

$$k=1 \Rightarrow 2n-11=3465 \Rightarrow 2n=3476 \Rightarrow n=1738$$

Conclusion : Le puzzle contient 1738 pièces.

Corrigé 27

1.a) Pour appliquer l'algorithme d'Euclide on effectue les divisions euclidiennes successives :

$$49 = 25 \times 1 + 24$$
$$25 = 24 \times 1 + 1$$
$$24 = 1 \times 24 + 0$$

Le dernier reste non nul de la division euclidienne de 49 par 25 est égal 1. Alors $\text{pgcd}(49,25) = 1$.

L'équation (E) : $25x - 49y = 5$ admet des solutions entières car le $\text{pgcd}(25,49)$ divise 5.

b) Pour vérifier que le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E), on remplace dans (E) :

On a $25 \times 10 - 49 \times 5 = 250 - 245 = 5$. Alors le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E).

Pour résoudre (E) :

On sait que pour tout couple (x,y) solution de (E) on a : $\begin{cases} 25x - 49y = 5 \\ 25 \times 10 - 49 \times 5 = 5 \end{cases}$

Ce qui implique, par soustraction, que : $25(x - 10) - 49(y - 5) = 0$

Ce qui équivaut à : $25(x - 10) = 49(y - 5)$

Cette dernière égalité montre que $\begin{cases} 49 \mid 25(x - 10) \\ 25 \mid 49(y - 5) \end{cases}$

Or $\text{pgcd}(49,25) = 1$, d'après le théorème de Gauss : $\begin{cases} 49 \mid (x - 10) \\ 25 \mid (y - 5) \end{cases}$

Ce qui équivaut à : « il existe un entier k tel que $\begin{cases} x - 10 = 49k \\ y - 5 = 25k \end{cases}$ **» ; soit** $\begin{cases} x = 49k + 10 \\ y = 25k + 5 \end{cases}$

Réciproquement ; quel que soit l'entier k on montre en remplaçant dans (E) que le couple $(49k + 10, 25k + 5)$ est solution de (E).

<u>Conclusion</u> : les solutions de (E) sont les couples de la forme $(49k + 10, 25k + 5)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) Pour tout entier p on a :

$$\begin{aligned} 25p \equiv 5[49] &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} :\ 25p = 49q + 5 \\ &\Leftrightarrow 25p - 49q = 5 \\ &\Leftrightarrow (p,q) \text{ est solution de } (E) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p = 49k + 10 \\ q = 25k + 5 \end{cases} ,k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs de p comprises entre 1960 et 2018 :

$$\begin{aligned}1960 \le p \le 2018 &\Leftrightarrow 1960 \le 49k + 10 \le 2018\\ &\Leftrightarrow 1950 \le 49k \le 2008\\ &\Leftrightarrow 49 \times 39 + 39 \le 49k \le 49 \times 41 + 9\\ &\Leftrightarrow k = 40\end{aligned}$$

car il existe un seul multiple de 49 (nombre du type 49k) compris entre $49 \times 39 + 39$ et $49 \times 41 + 9$. C'est 49×40 Enfin, la seule valeur possible de p est $p = 49 \times 40 + 10 = 1970$.

Donc $p = 1970$

Conclusion : Il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p \equiv 5[49]$

2.a) Si le couple (x,y) est une solution de (E) alors $25x - 49y = 5$ ce qui implique que $25x - 5 = 49y$. Donc $5(5x-1) = 7 \times 7y$ d'où 7 divise le nombre $5(5x-1)$. Or 5 et 7 sont deux nombres premiers - donc premiers aussi entre eux, d'où d'après le théorème de Gauss, 7 divise $5x - 1$. Alors il existe un entier k tel que $5x - 1 = 7k$. Donc $5x = 7k + 1$ ce qui prouve que $5x \equiv 1[7]$

D'autre part si le couple (x,y) est une solution de (E) alors $25x - 49y = 5$ ce qui montre que $49y = 5(5x-1)$. Donc 5 divise le nombre $49y$. Or 5 et 49 sont premiers entre eux (5 est premier et ne divise pas 49) , alors 5 divise y. C'est-à-dire que $y \equiv 0[5]$

b) Si $x \equiv 3[7]$, alors $5x \equiv 5 \times 3[7]$. Donc $5x \equiv 1[7]$.

Réciproquement : les restes de divisions possibles d'un entier x par 7 sont les éléments de l'ensemble : $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour x et 5x :

$x\ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$5x\ [7]$	0	5	3	1	6	4	2

On en déduit que $5x \equiv 1[7]$ implique que $x \equiv 3[7]$.

<u>Conclusion</u> :Pour tout entier relatif x : $5x \equiv 1[7]$ si et seulement si $x \equiv 3[7]$.

3.a) Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour x et x^2 :

$x\ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2\ [7]$	0	1	4	2	2	4	1

On en déduit que pour tout entier x, le reste de la division euclidienne de x^2 par 7 est un élément de l'ensemble $\{0;1;2;4\}$

b) D'après la question 2) pour que le couple $\left(x^2;y^2\right)$ soit solution de (E) il faut que $5x^2 \equiv 1[7]$. Ce qui implique que $x^2 \equiv 3[7]$ et ceci est impossible car le reste 3 n'appartient pas à l'ensemble précédent $\{0;1;2;4\}$ des restes de la division euclidienne de x^2 par 7.

Conclusion : il n'existe aucun couple (x,y) d'entiers relatifs tels que $\left(x^2,y^2\right)$ soit solution de (E).

<u>Autre méthode</u> : Pour que le couple $\left(x^2;y^2\right)$ soit solution de (E) il faut que $25x^2 - 49y^2 = 5$

Donc $(5x-7y)(5x+7y)=5$. Les décompositions possibles de 5 dans $\mathbb{Z}$ sont $5\times 1, 1\times 5, (-5)\times(-1), (-1)\times(-5)$.

Alors l'équation $25x^2 - 49y^2 = 5$ se ramène à l'un des quatre systèmes suivants, avec (x,y) entiers relatifs:

$$\begin{cases}5x-7y=5\\5x+7y=1\end{cases},\quad \begin{cases}5x-7y=1\\5x+7y=5\end{cases}\quad \begin{cases}5x-7y=-5\\5x+7y=-1\end{cases},\quad \begin{cases}5x-7y=-1\\5x+7y=-5\end{cases}.$$

L'addition (ou la soustraction) des équations de chaque système implique une contradiction (x ou y non relatif).

Par exemple l'addition des équations du premier système implique 10x = 6, ce qui est impossible dans l'ensemble des entiers relatifs.

On conclut qu'il n'existe aucun couple (x,y) d'entiers relatifs tels que $\left(x^2,y^2\right)$ soit solution de (E).

<u>Corrigé 28</u>

Si n est un multiple de 3, alors n^2 est un multiple de 9 . Donc n^6 est divisible par 9. C'est-à-dire que $n^6 - 1$ n'est pas divisible par 9. C'est le cas où n congru 0 ; 3 ou 6 modulo 9.

Sinon :

$$n \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9]$$

$$n \equiv 2[9] \Rightarrow n^3 \equiv 8 \equiv -1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9]$$

$$n \equiv 4[9] \Rightarrow n^3 \equiv 64 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9]$$

$$n \equiv 5[9] \Rightarrow n \equiv -4[9] \Rightarrow n^3 \equiv -1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9]$$

$$n \equiv 7[9] \Rightarrow n \equiv -2[9] \Rightarrow n^3 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9]$$

$$n \equiv 8[9] \Rightarrow n \equiv -1[9] \Rightarrow n^6 \equiv 1[9] \Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0[9].$$

Conclusion : Les solutions sont donc tous les entiers non divisibles par 3.

Corrigé 29

$$11x - 7y = 25 \quad (E)$$

1. a) Existence des solutions entières de (E) et solution particulière :

On sait que 7 et 11 sont des nombres premiers distincts, donc ils sont premiers entre eux, c'est-à-dire que $PGCD(7, 11) = 1$. Et comme 1 divise 25 alors (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

D'autre part : $11 \times 8 - 7 \times 9 = 88 - 63 = 25$, ce qui signifie que le couple $(8, 9)$ est une solution particulière de (E).

b) Résolution de (E) :

Si (x, y) est une solution générale de (E), alors : $11x - 7y = 25$.

Et comme : $11 \times 8 - 7 \times 9 = 25$. Alors par soustraction :

$$11(x - 8) - 7(y - 9) = 0$$
$$\Rightarrow 11(x - 8) = 7(y - 9) \quad (*)$$

Donc 7 divise $11(x - 8)$.

Or $PGCD(7, 11) = 1$, alors d'après Gauss 7 divise $(x - 8)$.

Donc il existe un entier relatif k tel que : $x - 8 = 7k$, c'est-à-dire :

$$x = 7k + 8$$

En injectant cette valeur de x dans la relation $(*)$, on obtient :

$$11 \times 7k = 7(y - 9)$$

Ce qui implique que :

$$y = 11k + 9$$

Réciproquement :

Si $x = 7k + 8$ et $y = 11k + 9$ avec k un entier relatif, alors :

$$11x - 7y = 11 \times 7k + 11 \times 8 - 7 \times 11k - 7 \times 9 = 11 \times 8 - 7 \times 9 = 25$$

Et ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{S = \{(7k + 8, 11k + 9); k \in \mathbb{Z}\}}$$

2. (x, y) est une solution de (E).

a) Montrons que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25 :

si x est un diviseur de y, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y = kx$.

Mais comme (x, y) est une solution de (E), alors :

$$11x - 7y = 25$$
$$\Rightarrow 11x - 7kx = 25$$
$$\Rightarrow x(11 - 7k) = 25$$

Ce qui implique que x est un diviseur de 25.

Ainsi, si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25.

b) m est un entier relatif. Voyons s'il existe des valeurs de m pour lesquelles le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est un entier relatif :

On sait que :

$$20+11m = 11(m+1)+9$$

Et :

$$15+7m = 7(m+1)+8$$

Donc le couple $(15+7m, 20+11m)$ est une solution de (E) car $(m+1) \in \mathbb{Z}$.

Si le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est un entier relatif, alors $(15+7m)$ divise $(20+11m)$, ce qui implique, d'après la question 2. a), que : $(15+7m)$ divise 25.

Or les diviseurs de 25 sont : -25, -5, -1, 1, 5 et 25, alors l'un des cas ci-dessous se pose :

$15+7m = -25 \Rightarrow 7m = -40$: impossible car m est un entier relatif.

$15+7m = -5 \Rightarrow 7m = -20$: impossible car m est un entier relatif.

$15+7m = -1 \Rightarrow 7m = -16$: impossible car m est un entier relatif.

$15+7m = 5 \Rightarrow 7m = -10$: impossible car m est un entier relatif.

$15+7m = 25 \Rightarrow 7m = 10$: impossible car m est un entier relatif.

$15+7m = 1 \Rightarrow 7m = -14 \Rightarrow m = -2$: pour cette valeur de m, le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est égal à $\frac{20-22}{15-14} = -2$ est bien un entier relatif.

Ainsi, la seule valeur de m pour laquelle le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est un entier relatif est : $\boxed{m=-2}$.

Corrigé 30

1) Par factorisation

$a_n = n\left(n^2-n-12\right) = n(n-4)(n+3)$

$b_n = (n-4)(2n+1)$

n est un entier naturel supérieur ou égal à 5. Alors $n(n-4)(n+3) > 0$ et $(n-4)(2n+1) > 0$

.

Donc a_n et b_n sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

2.a) On a $\beta = n+3 \Rightarrow n = \beta - 3$.

D'autre part $\alpha = 2n+1 \Rightarrow \alpha = 2(\beta-3)+1 = 2\beta - 5$.

Enfin $-\alpha + 2\beta = 5$

On peut tout simplement éliminer n entre α et β : $\alpha - 2\beta = 2n+1-2(n+3) = -5$.

b) Le nombre d est le PGCD de α et β. Alors d divise α et d divise β et divise toute combinaison linéaire de α et β. Donc d divise $-\alpha+2\beta$; d'où d divise 5. ceci signifie que d=1 ou 5 car un pgcd est toujours positif.

c) <u>$1^{ère}$ méthode : divisibilité(1)</u>

On sait que si a divise 2 nombres, il divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres.

$5 \mid (n-2) \Rightarrow 5 \mid (n-2+5) \Rightarrow 5 \mid (n+3) \Rightarrow 5 \mid \beta$,

$5 \mid (n-2)$ et $5 \mid \beta \Rightarrow 5 \mid (n-2+\beta) \Rightarrow 5 \mid (n-2+n+3) \Rightarrow 5 \mid (2n+1) \Rightarrow 5 \mid \alpha$.

Réciproquement: $5 \mid \alpha$ et $5 \mid \beta$ donc $5 \mid (\alpha-\beta) \Rightarrow 5 \mid (2n+1-n-3) \Rightarrow 5 \mid (n-2)$.

<u>$2^{ème}$ méthode : congruence</u>

Si les nombres α et β sont multiples de 5, alors $\alpha \equiv 0[5]$ et $\beta \equiv 0[5]$.

Or $\alpha = 2n+1$ donc $2n+1 \equiv 0[5]$ et $2(n-2) = 2n-4 = -5 \equiv 0[5]$, or 2 et 5 sont premiers, d'après le théorème de Gauss, $n-2 \equiv 0[5]$; n-2 est bien un multiple de 5.

De même $\beta = n+3$ donc $n+3 \equiv 0[5]$ et $n-2 = -5 \equiv 0[5]$.

Réciproquement, si $n-2 \equiv 0[5]$, $n+3 = 5 \equiv 0[5]$ donc $\beta = n+3 \equiv 0[5]$, $2n \equiv 4[5]$ et $2n+1 = 5 \equiv 0[5]$ donc $\alpha \equiv 0[5]$

<u>$3^{ème}$ méthode</u> : relation entre α, β et n-2 :

On a $\alpha - \beta = 2n+1-n-3 = n-2$. Il est donc clair que si α et β sont des multiples de 5, alors $\alpha-\beta$ est aussi un multiple de 5 et par suite n-2.

Réciproquement si n-2 est un multiple de 5, $\alpha-\beta$ aussi. Or $\beta = n+3 = 5(k+1)$ l'est aussi, donc α aussi.

*

<u>$4^{ème}$ méthode : divisibilité</u>(2)

Si les nombres α et β sont multiples de 5, alors il existent k et k' de $\mathbb{Z}$ tels que $\alpha = 5k$ et $\beta = 5k'$.

On a $\alpha = 2n+1 \Rightarrow 2n = \alpha - 1$

$\alpha = 2n+1 \Rightarrow 2n = \alpha - 1 \Rightarrow 2n-4 = 5k-5 \Rightarrow 2(n-2) = 5(k-1)$

Donc 5 divise 2(n-2), mais 2 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise (n-2), donc n-2 est un multiple de 5.

On a aussi $\beta = n+3 \Rightarrow n-2 = \beta - 5 \Rightarrow n-2 = 5k'-5 = 5(k'-1)$**, donc n-2 est un multiple de 5.**

<u>Réciproquement :</u>

Si n-2 est un multiple de 5, il existe un entier k tel que $n-2 = 5k$ **soit** $n = 5k+2$**, or,** $\beta = n+3$**, donc** $\beta = 5k+2+3 = 5k+5 = 5(k+1)$ **et** β **est un multiple de 5.**

De même $\alpha = 2n+1$**, donc** $\alpha = 2(5k+2)+1 = 5\times 2k+5 = 5\times(2k+1)$ **et** α **est un multiple de 5.**

3) <u>1</u>

3) <u>$1^{\text{ère}}$ méthode : algorithme d'Euclide</u>

On divise 2n+1 par n : $2n+1 = 2\times n+1$**, puis** $n = 1\times n+0$**, le dernier reste non nul est 1. C'est le PGCD des 2 nombres qui sont donc premiers entre eux.**

<u>$2^{\text{ème}}$ méthode : Théorème de Bézout</u>

On sait que s'il existe deux relatifs a et b tels que au + bv =1, alors u et v sont premiers entre eux.

Si u = 2n+1 et v = n , alors u – 2v = (2n+1)-2n=1. Il existe 2 relatifs (a,b) = (1,-2) tels que au+bv=1, d'après le théorème de Bézout , les nombres 2n + 1 et n sont premiers entre eux.

4) On a :

$$\mathrm{PGCD}(a_n, b_n) = \mathrm{PGCD}\big(n(n-4)(n+3), (n-4)(2n+1)\big)$$

$$\mathrm{PGCD}(a_n, b_n) = (n-4)\mathrm{PGCD}\big(n(n+3), 2n+1\big)$$

$$\mathrm{PGCD}(a_n, b_n) = (n-4)\mathrm{PGCD}(n\beta, \alpha)$$

Or n et $\alpha = 2n+1$ **sont premiers entre eux. Nous allons montrer que** $\mathrm{PGCD}(n\beta, \alpha) = \mathrm{PGCD}(\beta, \alpha)$

Soit $D_{\alpha,\beta}$ **l'ensemble des diviseurs de** α **et** β **et** $D_{\alpha,n\beta}$ **l'ensemble des diviseurs de** α **et** $n\beta$ **. Montrons que ces deux ensembles sont égaux.**

Si $d \in D_{\alpha,\beta}$, $d \mid \alpha$ **et** $d \mid \beta$**, donc** $d \mid n\beta$ **et** $d \in D_{n\alpha,\beta}$**. On vient de montrer que** $D_{\alpha,\beta} \subset D_{\alpha,n\beta}$ **.**

Montrons l'inclusion réciproque ; Soit $d \in D_{\alpha,n\beta}$, on suppose que $d > 1$(si d=1, d appartient de manière triviale à $D_{\alpha,\beta}$). $d \mid \alpha$ et $d \mid n\beta$, donc $d \mid n\alpha$ et par suite $d \mid n(\alpha-\beta)$.

Soit m le pgcd de n et d ; m divise d et n, mais d divise α , donc m divise α et n , or n et α sont premiers entre eux, donc m =1. d'après le théorème de Gauss, $d \mid (\alpha-\beta)$, mais d divise α ; d divise toute combinaison linéaire, donc aussi β. Par suite $d \in D_{\alpha,\beta}$ et $D_{\alpha,n\beta} \subset D_{\alpha,\beta}$.

<u>Conclusion</u> : Les deux ensembles sont égaux et par suite les PGCD de ces deux ensembles sont égaux.

On a donc maintenant $PGCD(a_n,b_n) = (n-4)PGCD(\beta,\alpha)$; d'après 2b, $PGCD(\beta,\alpha)$ vaut 1 ou 5. D'après 1.C, ce pgcd vaut 5 si et seulement si (n-2) est un multiple de 5 soit n-2 = 5k. Donc si n=5k+2, $PGCD(a_n,b_n) = 5(n-4)$ et sinon, $PGCD(a_n,b_n) = (n-4)$.

b) On a $a_n = n(n-4)(n+3)$ et $b_n = (n-4)(2n+1)$.

<u>Cas de n = 11 nombre qui n'est pas de type 5k +2 :</u>

$a_{11} = 1078 = 11 \cdot 7 \cdot 14 = 2 \cdot 7^2 \cdot 11$ **et** $b_{11} = 161 = 7 \cdot 23$

$PGCD(a_{11},b_{11}) = 7 = n-4$

<u>Cas de n = 7 nombre de type 5k +2 :</u>

$a_7 = 730 = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ **et** $b_7 = 45 = 3 \cdot 15 = 3^2 \cdot 5$

$PGCD(a_7,b_7) = 5 \cdot 3 = 5(n-4)$

Les valeurs du $PGCD(a_n,b_n)$ sont conformes avec les résultats précédents.

c) L'équation $1078x + 161y = 35$

peut s'écrire sous la forme $a_{11}x + b_{11}y = 35$

Or $PGCD(1078,161) = PGCD(a_{11},b_{11}) = 7$, on simplifie par 7 : on obtient l'équation équivalente (E): $154x + 23y = 5$.

On cherche une solution particulière de cette équation en utilisant l'algorithme d'Euclide (Division de a = 154 par b = 23) :

$154 = 23\times 6 + 16$ $23 = 16\times 1 + 7$ $16 = 7\times 2 + 2$ $7 = 2\times 3 + 1$	$a = 6b + 16$ $b = (a-6b)+7$ $a-6b = (-a+7b)\times 2+2$ $-a+7b = (3a -20b)\times 3+1$	$16 = a - 6b$ $7 = -a + 7b$ $2 = 3a - 20b$ $1 = -10a + 67b$

Vérifions : $-10\times 154 + 67\times 23 = -1540 + 1541 = 1$

Multiplions par 5 : $-50\times 154 + 335\times 23 = 5$

Alors (-50, 335) est une solution particulière de l'équation E.

Si (*x* , *y*) est une solution générale de (E) , alors on a : $154x + 23y = 5$

Comme : $154\times(-50) + 23\times 335 = 5$, et par soustraction :

$$154(x+50) + 23(y-335) = 0$$

$$154(x+50) = -23(y-335)$$

Comme 154 et 23 sont premiers entre eux, cette égalité implique que 154 divise y-335 . Donc il existe donc *k* dans $\mathbb{Z}$ tel que y – 335 = 154k.

Ceci conduit à :

$$154(x+50) = -23\times 154k$$

donc : $x + 50 = -23k$

Toute solution de (E) est donc de la forme ($x = -50 - 23k$, $y = 335 + 154k$) où *k* est un entier relatif.

Réciproquement, on vérifie que le couple (-50 – 23k, 335 +154*k*) est bien solution de (E) pour tout *k* dans Z :

154(-50 – 23k) + 23(335 +154*k*) = -154*50-154*23k+23*335+23*154k

= -7700 +7705

= 5.

<u>Conclusion</u> :

L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$S = \{(-20+12k, 10-5k); k\in\mathbb{Z}\}$$

<u>Corrigé 31</u>

$$35u - 96v = 1 \quad (E)$$

$$x^{35} \equiv 2 \quad [97] \quad (F)$$

1. a) 97 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{97}$, à savoir : 2, 3, 5 et 7. Donc, d'après le critère de primalité, 97 est un nombre premier.

b) On sait que : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 385 - 384 = 1$, ce qui signifie que le couple $(11, 4)$ est une solution de (E).

c) Résolution de (E) :

Si (u, v) est une solution générale de (E), alors : $35u - 96v = 1$.

Et comme : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$. Alors par soustraction :

$$35(u - 11) - 96(v - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 35(u - 11) = 96(v - 4) \quad (*)$$

Donc 96 divise $35(u - 11)$.

Mais vu que : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$, donc d'après Bézout, $\text{PGCD}(35, 96) = 1$, d'où, d'après Gauss, 96 divise $(u - 11)$.

Donc il existe un entier relatif k tel que : $u - 11 = 96k$, c'est-à-dire que :

$$u = 96k + 11$$

En injectant cette valeur de u dans la relation $(*)$, on obtient :

$$35 \times 96k = 96(v - 4)$$

Ce qui implique que : $\quad v = 35k + 4$

Réciproquement :

Si $u = 96k + 11$ et $v = 35k + 4$ avec k un entier relatif, alors :

$$35u - 96v = 35 \times 96k + 35 \times 11 - 96 \times 35k - 96 \times 4 = 35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$$

Et ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{S = \{(96k + 11, 35k + 4); k \in \mathbb{Z}\}}$$

2. x est une solution de (F).

a) Prouvons que x et 97 sont premiers entre eux :

Supposons que x et 97 ne sont pas premiers entre eux, alors 97 divise x puisqu'il est premier. Et par suite, il divise x^{35}.

Mais x est une solution de (F), ce qui veut dire que 97 divise $\left(x^{35} - 2\right)$.

Donc 97 divise $x^{35} - \left(x^{35} - 2\right) = 2$, ce qui est absurde.

Ainsi, x et 97 sont premiers entre eux.

b) Montrons que $x^{96} \equiv 1 \quad [97]$ puis que $x \equiv 2^{11} \quad [97]$

x et 97 sont premiers entre eux. Donc d'après Fermat :

$$x^{96} \equiv 1 \quad [97]$$

Et comme $(11, 4)$ est une solution de (E), donc : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$, c'est-à-dire que : $35 \times 11 = 1 + 96 \times 4$, d'où :

$$x^{1+96\times 4} \equiv x^{35\times 11} \quad [97]$$

$$\Rightarrow x \times (x^{96})^4 \equiv \left(x^{35}\right)^{11} \quad [97] \quad (*)$$

Mais vu que : $x^{96} \equiv 1 \quad [97]$ et $x^{35} \equiv 2 \quad [97]$ (car x est une solution de (F)), alors $(*)$ entraîne que :

$$x \equiv 2^{11} \quad [97]$$

3. n est un entier relatif. Montrons que si $n \equiv 2^{11} \quad [97]$, alors n est solution de (F) :

$$n \equiv 2^{11} \quad [97]$$

$$\Rightarrow n^{35} \equiv 2^{11\times 35} \quad [97]$$

$$\Rightarrow n^{35} \equiv 2^{1+96\times 4} \quad [97]$$

$$\Rightarrow n^{35} \equiv 2 \times (2^{96})^4 \quad [97]$$

Mais $2^{96} \equiv 1 \quad [97]$ car 2 et 97 sont premiers entre eux, donc :

$$\Rightarrow n^{35} \equiv 2 \quad [97]$$

Ce qui signifie que n est une solution de (F).

4. Montrons que les solutions de (F) sont tous les entiers $x = 11 + 97k$ où $k \in \mathbb{Z}$:

On a prouvé, dans les questions 2. et 3., que x est une solution de (F) si, et seulement si $x \equiv 2^{11} \quad [97]$.

Et vu que : $2^{11} = 2048 = 97 \times 21 + 11$, donc : $2^{11} \equiv 11 \quad [97]$, alors : x est une solution de (F) si, et seulement si $x \equiv 11 \quad [97]$. Autrement dit, les solutions de (F) sont tous les entiers $x = 11 + 97k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Corrigé 32</u>

$$109x - 226y = 1 \quad (E)$$

1. a) Calcul du PGCD de 109 et 226 :

On utilise l'algorithme d'Euclide (division de $a = 226$ par $b = 109$) :

$$226 = 2 \times 109 + 8$$

$$109 = 13 \times 8 + 5$$

$$8 = 1 \times 5 + 3$$

$$5 = 1 \times 3 + 2$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

Donc : $\boxed{\mathrm{PGCD}(109, 226) = 1}$

Et par suite (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

b) Recherche d'une solution particulière de (E) en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$226 = 2 \times 109 + 8$ $109 = 13 \times 8 + 5$ $8 = 1 \times 5 + 3$ $5 = 1 \times 3 + 2$ $3 = 1 \times 2 + 1$	$a = 2b + 8$ $b = 13(a - 2b) + 5$ $a - 2b = 27b - 13a + 3$ $27b - 13a = 14a - 29b + 2$ $14a - 29b = 56b - 27a + 1$	$8 = a - 2b$ $5 = 27b - 13a$ $3 = 14a - 29b$ $2 = 56b - 27a$ $\boxed{1 = 41a - 85b}$

Vérification : $41a - 85b = 41 \times 226 - 85 \times 109 = 9266 - 9265 = 1$.

Donc : $109 \times (-85) - 226 \times (-41) = 1$, **d'où le couple** $(-85, -41)$ **est une solution particulière de** (E).

Résolution de (E) **:**

Si (x, y) **est une solution générale de** (E)**, alors :**

$$\begin{cases} 109x - 226y = 1 \\ 109 \times (-85) - 226 \times (-41) = 1 \end{cases}$$

Alors par soustraction :

$$109(x + 85) - 226(y + 41) = 0$$

$$\Rightarrow 109(x + 85) = 226(y + 41) \quad (*)$$

Donc 226 **divise** $109(x + 85)$.

Or $\text{PGCD}(109, 226) = 1$**, alors d'après le théorème de Gauss** 226 **divise** $(x + 85)$.

Donc il existe un entier relatif k **tel que :** $x + 85 = 226k$**, c'est-à-dire :**

$$x = 226k - 85$$

En injectant cette valeur de x **dans la relation** $(*)$**, on obtient :**

$$109 \times 226k = 226(y + 41)$$

Ce qui implique que :

$$y = 109k - 41$$

Réciproquement :

Si $x = 226k - 85$ **et** $y = 109k - 41$ **avec** k **un entier relatif, alors :**

$$109x - 226y = 109 \times 226k - 109 \times 85 - 226 \times 109k - 226 \times (-41) = 1$$

Et ainsi l'ensemble des solutions de (E) **est :**

$$\boxed{S = \{(226k - 85, 109k - 41); k \in \mathbb{Z}\}}$$

c) Déduisons qu'il existe un unique entier naturel d inférieure ou égal à 226 et un unique entier naturel e tels que $109d = 1 - 226e$ **:**

<u>Unicité :</u>

Si d est un entier naturel inférieure ou égal à 226 et e est un entier naturel tels que $109d = 1 + 226e$, alors (d, e) est une solution de (E) et donc il existe un entier relatif k tel que :

$$\begin{cases} d = 226k - 85 \\ e = 109k - 41 \end{cases}$$

Et donc :

$$\begin{cases} 0 \leq 226k - 85 \leq 226 \\ 0 \leq 109k - 41 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{85}{226} \leq k \leq 1 + \dfrac{85}{226} \\ k \geq \dfrac{41}{109} \end{cases}$$

La seule valeur possible de l'entier k est 1. Et donc :

$$\boxed{\begin{cases} d = 141 \\ e = 68 \end{cases}}$$

D'où l'unicité.

<u>Existence :</u>

Si $d = 141$ et $e = 68$, alors d est un entier naturel inférieure ou égal à 226 et e est un entier naturel tels que $109d = 15369 = 1 + 15368 = 1 + 226e$.

2. Montrons que 227 est premier :

On sait que $\sqrt{227} \simeq 15{,}06$ et que 227 n'est pas divisible par aucun des nombres 2, 3, 5, 7, 11 et 13 : nombres premiers inférieures à $\sqrt{227}$. Donc 227 est premier (Critère de primalité) .

3. $A = \{a \in \mathbb{N}; a \leq 226\}$

$$f: \begin{array}{l} A \to A \\ a \mapsto r \end{array}$$

où r est le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

$$g: \begin{array}{l} A \to A \\ a \mapsto r' \end{array}$$

où r' est le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a) Vérifions que $g \circ f(0) = 0$:

On sait que $0^{109} = 0$ est divisible par 227, donc $f(0) = 0$.

Et que $[f(0)]^{141} = 0$ est divisible par 227, donc $g[f(0)] = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{g \circ f(0) = 0}$$

b) Justifions que, quel que soit l'entier a non nul de A, $a^{226} \equiv 1 \quad [227]$

Si a est un entier non nul de A, alors a n'est pas divisible par le nombre premier 227 (car $0 < 1 \leq a \leq 226 < 227$). Donc a et 227 sont premiers entre eux. Donc d'après le petit théorème de Fermat :

$$a^{226} \equiv 1 \quad [227]$$

c) Déduisons que, quel que soit l'entier a non nul de A, $g[f(a)] = a$

Si a est un entier non nul de A, alors :

$$a^{226} \equiv 1 \quad [227]$$
$$\Rightarrow (a^{226})^e \equiv 1 \quad [227]$$
$$\Rightarrow a^{226e} \equiv 1 \quad [227]$$
$$\Rightarrow a \times a^{226e} \equiv a \quad [227]$$
$$\Rightarrow a^{1+226e} \equiv a \quad [227]$$
$$\Rightarrow a^{109d} \equiv a \quad [227]$$
$$\Rightarrow (a^{109})^{141} \equiv a \quad [227] \quad (1)$$

Or :

$$a^{109} \equiv f(a) \quad [227]$$
$$\Rightarrow (a^{109})^{141} \equiv [f(a)]^{141} \quad [227] \quad (2)$$

(1) et (2) montrent que :

$$[f(a)]^{141} \equiv a \quad [227]$$

Et comme $a \in A$, donc a est le reste de la division euclidienne de $[f(a)]^{141}$ par 227. Ce qui signifie que : $\boxed{g[f(a)] = a}$

Le même raisonnement permet aussi de montrer que : $\boxed{f[g(a)] = a}$.

Corrigé 33

1) **a) Vérifions que 2017 est un nombre premier :**

Comme $\sqrt{2017} \simeq 44.9$, et les nombres premiers inferieurs à 45 sont :

$2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41$ et 43 ; et comme 2017 n'est divisible par aucun de ces nombres, il est alors premier.

b- Vérifions que $(-5, 246)$ est solution de l'équation (E) : $2017x + 41y = 1$,

On a : $2017(-5) + 41 \times 246 = -10085 + 10086 = 1$

Donc le couple $(-5, 246)$ est solution de l'équation (E) .

Résolution de l'équation (E) :

Comme $2017 \wedge 41 = 1$ alors l'équation (E) admet des solutions entières. Soit $(x;y)$ un couple solution de l'équation (E) :

$$2017x + 41y = 2017(-5) + 41(246) \Leftrightarrow 2017(x+5) = 41(246-y)$$

Donc 41 divise $2017(x+5)$ or $41 \wedge 2017 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : 41 divise $x+5$,

D'où il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x+5 = 41k$ soit $x = -5 + 41k$,

En remplaçant $x+5$ par $41k$ dans l'égalité $2017(x+5) = 41(246-y)$ on obtient $y = 246 - 2017k$.

Donc $S = \{(-5+41k, 246-2017k); k \in \mathbb{Z}\}$

c) Montrons qu'il existe un unique entier naturel y inférieur ou égal à 2016 tel que : $41y \equiv 1[2017]$

Soit y un entier naturel inférieur ou égal à 2016 vérifiant : $41y \equiv 1[2017]$

Il existe donc un entier x tel que $41y = 1 + 2017 \times (-x)$ soit $2017x + 41y = 1$ par conséquent (x ; y) est solution de l'équation (E) et $y = 246 - 2017k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad 0 \le 246 - 2017k \le 2016$ d'où $-0,87 \le k \le 0,12$ donc $k = 0$ et $y = 246$

2) **Soient a et b deux entiers relatifs**

a) **Montrons que si $a.b \equiv 0[2017]$ alors $a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017]$**

Si $ab \equiv 0[2017]$ et $a \not\equiv 0[2017]$ alors $\begin{cases} 2017 | ab \\ 2017 \wedge a = 1 \end{cases}$, car 2017 est premier

Donc d'après Gauss $2017 | b$ et $b \equiv 0[2017]$

Par conséquent soit $a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017]$

b) Montrons que si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a = 1[2017]$ ou $a \equiv -1[2017]$

Si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a^2 - 1 \equiv 0[2017] \Rightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0[2017]$

D'après 2) a) soit $a - 1 \equiv 0[2017]$ ou $a + 1 \equiv 0[2017]$

$$a = 1[2017] \text{ ou } a \equiv -1[2017]$$

c) **Déterminons les entiers de l'intervalle $[1, 4033]$ qui sont égaux à leur inverse modulo 2017 :**

Supposons qu'un entier a est égal à son inverse, c-à-d que $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a = \pm 1[2017]$

Soit $a \equiv 1 \ [2017]$ ou bien $a \equiv -1 \ [2017]$

$a = 2017k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$	$a = 2017k - 1, \quad k \in \mathbb{Z}$
$1 \le a \le 4033$	- $1 \le a \le 4033$
$1 \le 2017k + 1 \le 4033$	$1 \le 2017k - 1 \le 4033$
$0 \le k \le \dfrac{4033}{2017}$	$2 \le 2017k \le 4034$
$0 \le k \le 1{,}99$	$0{,}0009 \le k \le 2$
$\Rightarrow \ k = 0$, ou $k = 1$	$\Rightarrow \ k = 1$ ou $k = 2$
$a = 1$ ou $a = 2018$	$a = 2016$ ou $a = 4033$

Donc les entiers de l'intervalle $[1, 4033]$ qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 sont $\{1, 2018, 2016, 4033\}$.