République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
SERVICE DES EXAMENS

Baccalauréat 2018
Session Complémentaire

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: MATHEMATIQUES
Durée: 4 heures
Coefficients : 9 & 6

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(7+3i)z^2+(12+15i)z-4-18i$.

1.a) Calculer $P(2)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}: P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$	0.75 pt
b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$.	0.5 pt
c) On considère les points A, B et D images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $\mathrm{Im}(z_A)\le \mathrm{Im}(z_B)\le \mathrm{Im}(z_D)$. Placer les points A, B et D et déterminer la nature du triangle ABD.	0.75 pt
2° a) Déterminer le barycentre du système $\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$, où C est le symétrique de A par rapport à (BD).	0.5 pt
b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $9MA^2-6MB^2+2MC^2=-10$.	0.5 pt
c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que $4MA^2-6MB^2+2MC^2=-10$	0.5 pt
d) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan tels que $\left(9\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=10$.	0.5 pt
3° Soit $S^0=id$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $S^{n+1}=S\circ S^n$ où S est la similitude directe qui transforme A en B et B en D.	
a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S^{2018}	0.5 pt
b) Justifier que $S^{2020^{2020}}$ est une homothétie de rapport positif.	0.5 pt

Exercice 2 (5 points)

I- On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{\frac{-1}{x}};\ \forall x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

1° a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0	0.5 pt
b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$	0.5 pt
2° a) Montrer que $\forall t\ge 0,\ 0\le e^{-t}+t-1\le \frac{t^2}{2}$	0.5 pt
b) En déduire que $\forall x>0,\ \frac{-1}{x}\le f(x)-x\le \frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}$	0.25 pt
c) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ dont on donnera l'équation.	0.25 pt
3° Construire la courbe (C) et la droite Δ .	0.5 pt
4° a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.	0.25 pt
b) Construire la courbe (C') de f^{-1}, où f^{-1} est la réciproque de f.	0.25 pt

II- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction numérique f_n par $\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{x}};\ \forall x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$.

1° a) Montrer que f_n est continue et dérivable à droite de 0	0.5 pt
b) Etudier les variations de f_n et en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n sur $]0,+\infty[$.	0.5 pt
2° a) Soit $g_n(x)=f_n(x)-\frac{1}{n}$. Etudier sur $]0,+\infty[$ le signe de de $g_{n+1}(x)-g_n(x)$ et en déduire que la suite (α_n) est strictement décroissante et qu'elle est convergente.	0.5 pt
b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)$. En déduire la limite de α_n .	0.5 pt

Exercice 3 (5 points)

Soit ABCD est un carré direct de centre O et de côté $a > 0$. On note G le milieu du segment $[AB]$ et E et F les points tels que le quadrilatère AEFG soit un carré direct.

1°.a) Faire une figure illustrant les données qu'on complétera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale. — 0.5 pt

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme O en A et B en O. — 0,25 pt

c) Déterminer les éléments caractéristiques de r. — 0,25 pt

d) Soit g l'antidéplacement défini par $g(B) = E$ et $g(O) = G$. Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite. — 0.5 pt

2°.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme C en F et B en E, déterminer le rapport et un angle de s. — 0.5 pt

b) Déterminer l'image du carré ABCD par s puis en déduire le centre de s — 0.5 pt

3° Soit $h = s \circ r^{-1}$

a) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport — 0,25 pt

b) Soit I le centre de h. Montrer que I est le barycentre du système $\{(O,1);(E,2)\}$. Placer I — 0,25 pt

c) Pour tout point M du plan, autre que I, on pose $M' = r(M)$ et $M'' = s(M)$. Montrer que la droite $(M'M'')$ passe par un point fixe que l'on précisera — 0,25 pt

4° Soit Γ l'hyperbole, de foyers O et F, qui passe par le point Jprojeté orthogonal de Isur (OF).

a) Déterminer les cordonnées des points O, E, I et J dans le repère $(G,\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GO})$. — 0.5 pt

b) Ecrire l'équation de Γ dans ce repère. — 0.5 pt

c) Déterminer les sommets, les asymptotes et l'excentricité de Γ. — 0.5 pt

d) Construire Γ. — 0.25 pt

Exercice 4 (5 points)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 2\ln(1+e^x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A :

1° a) Donner le tableau de variation de f — 1 pt

b) Démontrer que la courbe (C) admet deux asymptotes D et D' que l'on déterminera et préciser leurs positions relatives par rapport à (C). — 0.5 pt

c) Construire la courbe (C) et leurs asymptotes dans le même repère. — 0.25 pt

2° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [0,+\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera. — 0.25 pt

b) Construire, dans le repère précédent, la courbe (C') de g^{-1} — 0.25 pt

Partie B :

On considère la suite numérique (u_n) par $u_0 = \ln 5$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_n = \int_0^{\ln 5}(f'(t))^n\,dt$

1° Calculer u_1 — 0.25 pt

2° a) Montrer que $\forall x\in[0,\ln 5]$ $0 \le f'(x) \le \frac{2}{3}$ — 0.25 pt

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$ $0 \le u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \ln 5$ — 0.25 pt

c) Déterminer la limite de (u_n) — 0.25 pt

3° a) Montrer que $\forall x\in[0,+\infty[$ $(f'(x))^2 - 1 = -2f''(x)$ — 0.25 pt

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+2} - u_n = \frac{-2}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ — 0.25 pt

c) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_{2n} = \ln 5 - \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}$ et $u_{2n+1} = \ln\left(\frac{9}{5}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$ — 0.5 pt

4° $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}\left(\frac{2}{3}\right)^p$. Montrer que $v_n = \ln 3 - \frac{u_{2n}+u_{2n+1}}{2}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. — 0.5 pt

- *Fin*