

Exercice 1 (3 points)

Un groupe de 100 candidats ont passé un test d'inscription dans un centre de formation professionnelle. Le test est composé de deux épreuves obligatoires : une écrite et une orale. Les résultats ont montré que : 60 candidats ont réussi l'épreuve écrite dont 45 ont réussi aussi l'épreuve orale. Parmi ceux qui ont échoué dans l'épreuve écrite 25 % ont réussi l'épreuve orale. On choisit au hasard un candidat de ce groupe et on considère les événements suivants :
A : « le candidat a réussi l'épreuve écrite » ; B : « le candidat a réussi l'épreuve orale ».
Pour chacune des questions de cet exercice, une seule des trois réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $p(A)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
2	La probabilité $p(A \cap B)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
3	La probabilité $p_A(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
4	La probabilité $p_A^-(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
5	la probabilité $p(B)$ est	0.75	0.55	0.1	(0.5 pt)

La durée de l'épreuve écrite varie de 20 à 60 minutes. On suppose que le temps X, exprimé en minutes, mis par un candidat avant de remettre sa copie, lors de cette épreuve, est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

6	La fonction de densité de X est	$f(x) = \frac{1}{20}$	$f(x) = \frac{1}{40}$	$f(x) = \frac{1}{60}$	(0.25 pt)
7	La probabilité que ce candidat remet sa copie après 30 minutes est	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	(0.25 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.
Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6	7
Réponse							

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 3i)z - 4i$.

- 1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8 + 6i$ 0,5pt
- b) Calculer $P(i)$ 0,5pt
- c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$. 0,5pt
- d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$. 0,5pt
- 2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 1 - i$ et $z_C = 2 + 2i$.
- a) Placer les points A, B et C . 0,5pt
- b) Déterminer la nature du triangle ABC . 0,25pt
- c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. 0,25pt
- d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan d'affixe z tel que $\left| \frac{z - 2 - 2i}{z - 1 + i} \right| = 1$. 0,5pt
- 3° Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = (z_C)^n$ et $v_n = |z_n|$.
- a) Vérifier que $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis en déduire l'écriture trigonométrique de z_n . 0,5pt
- b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. 0,5pt
- c) Calculer la limite de (v_n) et exprimer en fonction de n la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ 0,5pt

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x - 1 + 2xe^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- | | |
|---|--------|
| 1° a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ | 0,5pt |
| b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement. | 0,5pt |
| c) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C) et étudier la position relative entre (C) et D . | 0,5pt |
| 2° a) Calculer la dérivée f' puis montrer que l'expression de la dérivée seconde de f est $f''(x) = (2x - 4)e^{-x}$ | 0,5pt |
| b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion A dont on donnera les coordonnées. | 0,25pt |
| c) Etudier les variations de f' et en déduire que f' est positive. | 0,5pt |
| d) Dresser le tableau de variation de f . | 0,5pt |
| 3° a) Montrer que la courbe (C) coupe (Ox) en un unique point d'abscisse α avec $0.2 < \alpha < 0.3$ | 0,5pt |
| b) Déterminer le point B de (C) où la tangente T est parallèle à l'asymptote D . Donner une équation de T . | 0,5pt |
| c) Tracer D , T et (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. | 0,5pt |
| d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation : $-m - 1 + 2xe^{-x} = 0$ | 0,25pt |

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2+x+x \ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- | | |
|---|----------|
| 1° a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter graphiquement. | (0,75pt) |
| b) Vérifier que $f(x) = \frac{2}{x} + 1 + \ln x$ | (0,5pt) |
| c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement | (0,5pt) |
| 2° a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f . | (1pt) |
| b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$ | (0,5pt) |
| 3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; 2]$ | |
| a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. | (0,5pt) |
| b) Dresser le tableau de variation de g^{-1} , où g^{-1} est la fonction réciproque de g . | (0,5pt) |
| c) Calculer $(g^{-1})'(3)$ (on pourra utiliser 2° b)) | (0,25pt) |
| d) Construire (C) , (C') et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où (C') est la courbe de g^{-1} . | (0,5pt) |
| 4° On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = f(x) - x$ | |
| a) Dresser le tableau de variation de h . | (0,5pt) |
| b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α , telle que $2 < \alpha < 3$. Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$ et en déduire que $\forall x \geq \alpha$ on a $f(x) - x \leq 0$ | (0,5pt) |
| 5° Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ | |
| a) Montrer par récurrence que $u_n \geq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$. | (0,25pt) |
| b) Montrer que (u_n) est décroissante (on pourra utiliser 4° b). En déduire que (u_n) est convergente. | (0,25pt) |
| 6° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $K = \int_1^e \ln x dx$. | (0,25pt) |
| b) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ | (0,25pt) |

Fin

PROPOSITION DU CORRIGE

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6	7
Réponse	A	B	A	C	B	B	C

Exercice 2

1. $P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+3i)z - 4i$

a) Déterminons les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$:

Un nombre complexe $z = x + iy$ est une racine carrée de $-8+6i$ ssi $z^2 = -8+6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |-8+6i| \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z) \\ 2xy = \operatorname{Im}(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & (1) \\ x^2 - y^2 = -8 & (2) \\ 2xy = 6 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y = \pm 3$$

Or d'après (3) : $xy = 3 > 0$ donc x et y ont le même signe. Alors les racines carrées de $-8+6i$ sont :

$$1+3i \text{ et } -1-3i$$

b) Calcul de $P(i)$:

$$P(i) = i^3 - (3+2i)i^2 + (3+3i)i - 4i$$

$$p(i) = i^3 - (3+2i)i^2 + (3+3i)i - 4i$$

$$= -i + 3 + 2i + 3i - 3 - 4i = 0$$

Déterminons les nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$

On peut utiliser le tableau d'Horner :

i	1	$-3-2i$	$3+3i$	$-4i$
		i	$1-3i$	$4i$
	1	$-3-i$	4	0

$$\text{Donc } a = -3-i; b = 4$$

$$\text{Donc } P(z) = (z-i)(z^2 - (3+i)z + 4)$$

la division euclidienne peut être également utilisée :

$$\begin{array}{r|l} P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+3i)z - 4i & z-i \\ \hline -z^3 + iz^2 & z^2 - (3+i)z + 4 \\ \hline = \frac{1}{i}(3+i)z^2 + (3+3i)z - 4i & \\ (3+i)z^2 + (1-3i)z & \\ = 4z - 4i & \\ -4z + 4i & \\ \hline 0 & \end{array}$$

on peut aussi utiliser l'identification :

$$(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$$

$$= z^3 + (a-i)z^2 + (b-ai)z - bi$$

$$\text{Par identification } \begin{cases} a-i = -3-2i \\ b-ai = 3+3i \\ -bi = -4i \end{cases}$$

$$\text{Donc } a = -3-i; b = 4$$

d) L'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$:

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2 - (3+i)z + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-i=0 \Leftrightarrow z=i \\ z^2 - (3+i)z + 4 = 0 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\Delta = (-(3+i))^2 - 4 \times 1 \times 4 = -8+6i$$

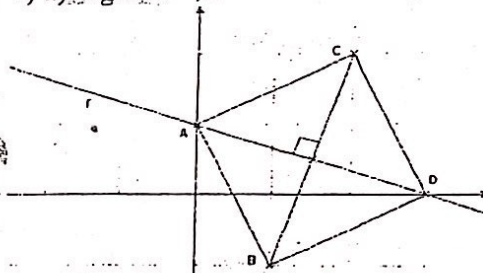
D'après la question n°1, le nombre $\delta_1 = 1+3i$ est une racine carrée de Δ , d'où les solutions de l'équation

$$P(z) = 0 \text{ sont } z' = \frac{3+i+1+3i}{2} = 2+2i \text{ et}$$

$$z'' = \frac{3+i-1-3i}{2} = 1-i. \text{ Donc l'ensemble de solutions}$$

de l'équation $P(z) = 0$ est $\{i; 1-i; 2+2i\}$

2) a) Figure :



b) La nature du triangle ABC

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1-i-i}{2+2i-i} = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{-i(i+2)}{2+i} = -i$$

Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

Autre méthode

$$AB = |z_B - z_A| = |1-i-i| = |1-2i| = \sqrt{5}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |2+2i-i| = |2+i| = \sqrt{5}$$

$$CB = |z_B - z_C| = |1-i-2-2i| = |-1-3i| = \sqrt{10}$$

Alors $AB = AC$ et $AB^2 + AC^2 = CB^2$. Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

c) ABDC est un parallélogramme si et seulement si :

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow z_{\overline{AB}} = z_{\overline{CD}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C$$

$$\Leftrightarrow z_D = z_B + z_C - z_A = 1-i+2+2i-i=3$$

$$\text{Donc } z_D = 3 \text{ et } D(3;0)$$

Autrement :

ABDC est un parallélogramme si et seulement si les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu ; c-à-d :

$$\frac{z_A + z_D}{2} = \frac{z_B + z_C}{2} \Leftrightarrow z_D = z_B + z_C - z_A = 3$$

3° L'ensemble Γ est l'ensemble des points M du plan

d'affixe z tel que $\left| \frac{z-2-2i}{z-1+i} \right| = 1$

$$\left| \frac{z-2-2i}{z-1+i} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-(2+2i)}{z-(1-i)} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-z_B}{z-z_C} \right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$|z-z_B| = |z-z_C| \Leftrightarrow MB = MC$$

Donc Γ est l'ensemble des points équidistants de B et C. c'est donc la médiatrice du segment $[BC]$ (c'est la droite (AD))

Méthode analytique : En posant $z = x + iy$:

$$\left| \frac{z-2-2i}{z-1+i} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{(x-2)+i(y-2)}{(x-1)+i(y+1)} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$\Leftrightarrow x+3y-3=0$ D'où l'ensemble Γ est la droite d'équation $x+3y-3=0$ c'est la médiatrice de $[BC]$

3° $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = (z_c)^n$ et $v_n = |z_n|$.

a) Vérifions que $z_c = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On a

$$|z_c| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ D'où :}$$

$$z_c = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

L'écriture trigonométrique de z_n :

$$z_n = (z_c)^n = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^n = (2\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{d'où } z_n = (2\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique :

$$v_{n+1} = |z_{n+1}| = |(z_c)^{n+1}| = |z_c| |z_c|^n = 2\sqrt{2} |z_c|^n = 2\sqrt{2} v_n$$

$$v_{n+1} = 2\sqrt{2} \times v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2\sqrt{2}$

et de premier terme $v_0 = (z_c)^0 = 1$

c) La limite de (v_n) :

$$v_n = (2\sqrt{2})^n \text{ et puisque } 2\sqrt{2} > 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

Calcul de la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$:

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - (q)^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - (2\sqrt{2})^{n+1}}{1 - 2\sqrt{2}}$$

Exercice 3 :

f est la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x - 1 + 2xe^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; i, j)$.

1° a) Calcul de limites :

$$\text{On a } f(x) = 2x - 1 + \frac{2x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{e^x} \right) = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\frac{e^x}{x}} \right) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{e^x} \right) = 2 - 0 + \infty = +\infty$$

Interprétation graphique

La courbe (C) admet une B.P de direction (Oy) au voisinage de $(-\infty)$

c) Montrons que la droite d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. D'autre part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 + 2xe^{-x} - (2x - 1))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^x} \right) = 0$$

Alors la droite D d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $(+\infty)$

Pour étudier la P.R de (C) et D on étudie le signe de

$$f(x) - y : f(x) - y = \frac{2x}{e^x} \text{ alors}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)-y	-	0	+
P.R.	D/(C)	\cap	(C)/D

La droite D coupe (C) au point de coordonnées $(0; -1)$

2) a) Calcul des dérivées de f :

$$f(x) = 2x - 1 + 2xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2 + 2e^{-x} + 2x(-e^{-x})$$

$$f'(x) = 2 + (2 - 2x)e^{-x} \text{ et } f''(x) = e^{-x}(-4 + 2x)e^{-x}$$

b) Le point d'inflexion de (C) :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''(x)	-	0	+

Puisque f'' s'annule et change de signe en $x_0 = 2$, et $f(2) = 3 + 4e^{-2}$, le point $A = (2; f(2))$ est un point d'inflexion de la courbe (C). $A = (2; 3 + 4e^{-2})$

c) Les variations de f' :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''(x)	-	0	+
f'(x)		$2 - \frac{2}{e^2}$	

Le minimum de f' est positif, donc f' est positive

d) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3° a) D'après l'étude et les variations de f : f est continue, strictement monotone et change de signe, alors la courbe (C) coupe l'axe (Ox) en un seul point d'abscisse α .

D'autre part : $f(0.2) \approx -0.27$ et $f(0.3) \approx 0.04$

$f(0.2) \times f(0.3) < 0$ Alors $0.2 < \alpha < 0.3$

b) Pour que à (C) en un point d'abscisse x soit parallèle à l'asymptote D d'équation $y = 2x - 1$ il faut et il suffit que : $f'(x) = 2$

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 2 + (2 - 2x)e^{-x} = 2$$

$$\Leftrightarrow (2 - 2x)e^{-x} = 0 \text{ or } e^{-x} > 0$$

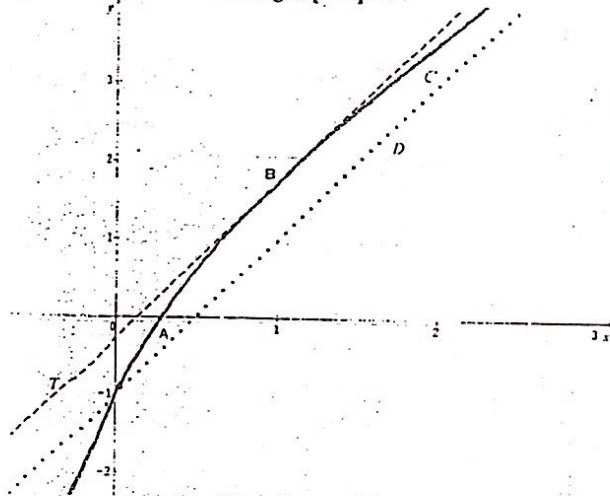
Donc $2 - 2x = 0$ et $x = 1$ et comme $f(1) = 1 + 2e^{-1}$ alors le point auquel la tangente est parallèle à D est

$$B(1; 1 + 2e^{-1})$$

Equation de la tangente en B : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$\begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 1 + 2e^{-1} \end{cases} \text{ donc } T: y = 2x - 1 + 2e^{-1}$$

c) La Représentation graphique :



d) Discussion graphique, du nombre de solutions de l'équation : $-m - 1 + 2xe^{-x} = 0$

$$-m - 1 + 2xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2xe^{-x} = m$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 + 2xe^{-x} = 2x + m \Leftrightarrow f(x) = 2x + m$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 2x + m$ sont les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec la droite D_m d'équation $y = 2x + m$ parallèle à D et à T. Alors

si $m \leq -1$: il y a une seule solution

si $-1 < m < -1 + 2e^{-1}$: il y a 2 solutions

si $m = -1 + 2e^{-1}$: il y a une seule solution

si $m > -1 + 2e^{-1}$: il n'y a pas de solution

Exercice 2 :

1) f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x + 2 + x \ln x}{x}$$

$$a) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 + x \ln x) = 2$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2 + x \ln x}{x} = +\infty$$

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$ (c'est l'axe des ordonnées)

$$b) f(x) = \frac{x + 2 + x \ln x}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} + \frac{x \ln x}{x} = 1 + \frac{2}{x} + \ln x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \ln x \right) = 1 + 0 + (+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $(+\infty)$

$$2) a) f(x) = \frac{2}{x} + 1 + \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2 + x}{x^2}$$

Tableau de variation de f

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$2 + \ln 2$	$+\infty$

b) Equations de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1 :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow T: y = -x + 4$$

3) g est la restriction de f sur $I =]0; 2]$

a) Tableau de variation de g :

x	0	2
$g'(x)$		- 0
$g(x)$	$+\infty$	$2 + \ln 2$

D'après l'étude et le t. v. de g : g est continue et strictement croissante de $I =]0; 2]$ sur

$J = [2 + \ln 2; +\infty[$ donc g réalise une bijection de I sur J .

b) T.V de g^{-1}

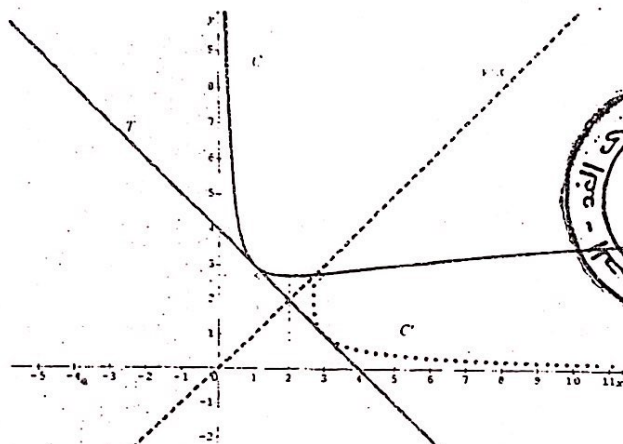
x	$2 + \ln 2$	$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$		
$g^{-1}(x)$	2	0

c) Calcul de $(g^{-1})'(3)$

$$(g^{-1})'(3) = \frac{1}{g'(g^{-1}(3))} = \frac{1}{g'(1)} = -1$$

En effet $\begin{cases} g^{-1}(3) = 1 \\ g'(1) = -1 \end{cases}$

d) La représentation graphique de (C) et (C')



4) On considère la fonction $h(x) = f(x) - x$

a) Les variations de h :

$$h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-2+x}{x^2} - 1 = \frac{-x^2+x-2}{x^2}$$

Réolvons l'équation : $-x^2+x-2=0$

$$\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times (-2) = -7 < 0$$

Donc $-x^2+x-2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'après le T.V de h :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$		
$h(x)$	$+\infty$	$-\infty$

D'après l'étude et les variations de h :

h est continue et strictement décroissante de $]0; +\infty[$ sur \mathbb{R} et comme $0 \in \mathbb{R}$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α

or : $h(2) = \frac{4+2\ln 2}{2} - 2 \approx 0,69 > 0$

$$h(3) = \frac{9+3\ln 3}{3} - 3 \approx -4,23 < 0$$

$$h(2) \times h(3) < 0 \quad \text{Donc } 2 < \alpha < 3$$

Comme $h(\alpha) = 0$ alors $f(\alpha) - \alpha = 0$ soit $f(\alpha) = \alpha$

D'après le T.V de h :

$$\forall x \geq \alpha, h(x) \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq \alpha: f(x) - x \leq 0$$

$$5) \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Montrons par récurrence que : $U_n > \alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $U_0 = 3 > \alpha$

Donc c'est vrai pour le 1^{er} terme

Hérédité

Supposons que $U_n > \alpha$

Comme f est croissante sur $[1; +\infty[$ alors :

$$f(U_n) > f(\alpha) \text{ d'où } U_{n+1} > \alpha$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \alpha$

b) Montrons que (U_n) est décroissante

D'après 4° b) on a : $\forall x \geq \alpha; f(x) - x \leq 0$

$$\text{Puisque } U_n \geq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Alors } f(U_n) - U_n \leq 0$$

$$\text{D'où } U_{n+1} - U_n \leq 0$$

Donc (U_n) est décroissante

Puisque (U_n) décroissante et minorée (par α) alors

(U_n) est convergente

$$6) \text{ Calcul de } K = \int_1^e \ln x \, dx$$

Par une intégration par parties :

$$K = \int_1^e 1 \times \ln x \, dx$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u'(x) = 1 \rightarrow u(x) = x \\ v(x) = \ln x \rightarrow v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Alors :

$$K = [x \ln x]_1^e - \int_1^e \left(x \times \frac{1}{x} \right) dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e$$

$$\Rightarrow K = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) \Rightarrow K = 1$$

b) l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ est

$$A = \int_1^e f(x) \, dx = \int_1^e \left(\frac{2}{x} + 1 + \ln x \right) dx$$

$$\Rightarrow A = \int_1^e \left(\frac{2}{x} + 1 \right) dx + k = [2 \ln x + x]_1^e + k$$

$$A = (2 \ln e + e) - (2 \ln 1 + 1) + 1 \Rightarrow A = (2 + e) \text{ u.a.}$$