République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
et de la Réforme du Système Educatif
Direction des Examens et des Concours

**BACCALAUREAT**
**Session Normale 2022**
**Epreuve de MATHEMATIQUES**

Série : Mathématiques
(Classes Expérimentales)
Coefficient : 9 Durée : 4h

**Exercice 1 : (3 points)**

Les statistiques montrent que 5% des candidats au bac national 2019 étaient en série C.
On choisit, de façon aléatoire, de l'ensemble des candidats de 2019, un échantillon de n candidats ($n \geq 2$). On suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats au bac C choisis dans cet échantillon

1. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique — 1 pt
2. Calculer en fonction de n la probabilité de chacun des événements A et B suivants :
A « Seulement deux candidats au bac C ont été choisis » — 0.5 pt
B « Au moins un candidat au bac C a été choisi ». — 0.5 pt
3. Soit $p_n$ la probabilité d'avoir choisi au moins un candidat au bac C donc $p_n = p(B)$.
a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter le résultat. — 0.5 pt
b) Quel est le nombre minimal de candidats qu'il faut choisir pour que $p_n \geq 0{,}99$ ? — 0.5 pt

**Exercice 2 : (5 points)**

1. Soit $P(z) = z^3 - (5+6i)z^2 + (-6+16i)z + 20 + 10i$, $z \in \mathbb{C}$
a) Calculer $P(-1+i)$ puis déterminer les complexes a et b tels que $P(z) = (z+1-i)(z^2+az+b)$ — 1pt
b) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
On notera $z_1$, $z_2$ et $z_3$ les solutions de cette équation avec $|z_1| < |z_2| < |z_3|$. — 0.5pt
2. Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_1$, $z_2$ et $z_3$.
a) Placer les points A, B , C et I, où I est le milieu du segment $[AB]$. — 1 pt
b) Soit D le barycentre du système $\{(A;3),(B;1)\}$. Vérifier que $z_D = i$ et placer D. — 0.5pt
3. Soit H l'hyperbole de foyers A et B dont D est un sommet
a) Déterminer le centre et l'excentricité de H. — 0.5pt
b) Vérifier que l'équation réduite de H dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, s'écrit $(x-1)^2 - \frac{(y-1)^2}{3} = 1$. — 0.5pt
c) Déterminer le 2e sommet, les directrices et les asymptotes de l'hyperbole H et la construire. — 1 pt

**Exercice 3 (4 points)**

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O et D le symétrique de O par rapport à $(AC)$.
On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
1. Faire une figure soignée illustrant les données précédentes. — 0.5pt
2. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme B en C et O en D. — 0.5pt
b) Justifier que f est une rotation et préciser ses éléments caractéristiques. — 0.5pt
c) En utilisant une décomposition convenable, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $t_{\overrightarrow{AB}} \circ f$. — 0.5pt
3. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme A en C et K en J. — 0.5pt
b) Prouver que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. — 0.5pt
4. On considère la transformation $S = h \circ f$ où h est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et f la transformation définie dans la question 2.
a) Déterminer $S(O)$ puis caractériser S. — 0.5pt
b) On considère la suite des points $(M_n)$ définie par $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = S(M_n)$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+3}}) = \pi$ puis en déduire que $M_{2022} \in [OA]$ — 0.5pt

**Exercice 4 : (4 points)**

**Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-3-\dfrac{3\ln x}{x}$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.**

| | |
|---|---|
| **1. Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=x^2-3+3\ln x$.** | |
| **a) Dresser le tableau de variations de la fonction u.** | **0.5pt** |
| **b) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ et que $1.4<\alpha<1.41$.** | **0.5pt** |
| **c) En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0;+\infty[$.** | **0.25pt** |
| **2. a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.** | **0.5pt** |
| **b) Montrer que la courbe $(C)$ admet une asymptote oblique D et étudier sa position relative par rapport à $(C)$.** | **0.5pt** |
| **3. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$ puis dresser le tableau de variation de f .** | **0.5pt** |
| **b) Construire la courbe $(C)$.** | **0.5pt** |
| **4. Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$.** | **0.25pt** |
| **5. Soit $\varphi$ la restriction de f sur l'intervalle $I=]0;\alpha]$.** | |
| **a) Montrer que $\varphi$ réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.** | **0.25pt** |
| **b) Construire, dans le repère précédent, la courbe $(C')$ de la réciproque $\varphi^{-1}$ de $\varphi$ .** | **0.25pt** |

**Exercice 5 : (4 points)**

**Pour tout entier naturel n, non nul, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g_n$ par $g_n(x)=x^n e^{-x}$.**

| | |
|---|---|
| **1. a) Calculer, suivant la parité de n, $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g_n(x)}{x}$.** | **1pt** |
| **b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.** | **0.5pt** |
| **2. a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $g_n'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$.** | **0.5pt** |
| **b) Dresser le tableau de variation de $g_n$ selon la parité de n.** | **0.5pt** |
| **3. On pose $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^1 g_n(x)dx$.** | |
| **a) Justifier que $I_0=1-\dfrac{1}{e}$.** | **0.25pt** |
| **b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}=(n+1)I_n-e^{-1}$.** | **0.25pt** |
| **4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+1)e}\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(I_n)$.** | **0.5pt** |
| **5. $\forall n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\dfrac{1}{n!}I_n$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{e^{-1}}{(n+1)!}$ et en déduire que $e(1-u_n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$** | **0.5pt** |

**Fin.**