République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM Epreuve: Mathématiques Durée: 4 heures coefficients: 9 & 6

Baccalauréat 2004

Session normale

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de centre O et de coté a.
Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et soit H l'intersection des droites (AJ) et (DI).

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre $AB = a = 8cm$ et la droite (AB) horizontale) (0,75pt)

2. **Etude d'une rotation r_1.**
   a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme A en I et J en D. (0,5pt)
   b) Soit R le quart de tour vectoriel direct, montrer que $R(\overrightarrow{AJ}) = \overrightarrow{ID}$, en déduire l'angle de la rotation r_1. (0,5pt)
   c) On se propose, dans cette question de déterminer le centre Ω de la rotation r_1 par trois méthodes :
      i) Méthode 1 : Montrer que les points Ω, A, H et I d'une part et Ω, J, H et D d'autre part sont cocycliques en déduire une construction de Ω. (0,5pt)
      ii) Méthode 2 : Déterminer $r_1(L)$ puis $r_1 o r_1(L)$ et monter que Ω appartient à (IL) en précisant sa position sur (IL). (0,5pt)
      iii) Méthode 3 : Déterminer une droite (Δ) telle que $r_1 = S_{(AC)} o S_{(\Delta)}$, (où S est la réflexion par rapport à l'axe associé) puis déterminer deux réels α et γ tels que Ω soit le barycentre du système $\{(A,\alpha);(C,\gamma)\}$. (0,75pt)

3. **Caractérisation de quelques transformations et étude de leurs actions sur le rectangle $ABJL$.**
   a) Déterminer $r_1(B)$. Déduire des questions précédentes l'image du rectangle $ABJL$ par r_1. (0,5pt)
   b) Soit g l'antidéplacement qui transforme K en J et laisse C invariant. Reconnaître g et préciser l'image du rectangle $ABJL$ par g. (0,5pt)
   c) Soit r_2 la transformation définie par : $r_2 = S_{(JL)} o S_{(AC)}$.
   Déterminer la nature de r_2, donner ses éléments caractéristiques et préciser l'image du rectangle $ABJL$ par r_2. (0,5pt)

Exercice 2: (5 points)

On considère un triangle direct ABC rectangle en A avec $AB = 2AC$ et soient H le milieu du segment $[AB]$, E le symétrique de H par rapport à A. Les points J et K sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et E sur (BC) et I le projeté orthogonal du point A sur (EK).

L'objectif de cet exercice est l'étude de la configuration précédente.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,75pt)

2. On considère la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   a) Déterminer $r(E)$, en déduire l'image de la droite (EK) par r. (0,5pt)
   b) Montrer que $r(I) = J$. (0,25pt)
   c) Déterminer $r(C)$, en déduire l'image de la droite (BC) par r puis la construire. (0,5pt)
   d) On pose $r(K) = L$, déterminer le point L puis le construire et montrer que $\overline{BL} = \frac{1}{3}\overline{BK}$. (0,25pt)

3. Soit h l'homothétie de centre B et qui transforme A en E.
   Déterminer le rapport de h et montrer que $h(J) = K$. (0,5pt)

4. On pose $s = h \circ r$ et on se propose de caractériser s.

a) Montrer que s est une similitude directe. Donnera son rapport et son angle. (0,5pt)

b) Soit Ω le centre de s, déterminer $s(I)$ et $s(A)$, montrer que Ω appartient aux deux cercles de diamètre respectif $[AE]$ et $[IK]$, construire Ω. (0,75pt)

5. Soit (P) une parabole de directrice (BC) et qui passe par les deux points A et I

a) Démonter qu'ils existent deux paraboles (P_1) et (P_2) vérifiant la condition précédente, on note F_1 et F_2 leur foyer respectif, où F_1 est le foyer le plus proche de la directrice (BC). Construire les foyers F_1 et F_2 en justifiant cette construction. (0,5pt)

b) Construire, en le justifiant, l'axe focal et le sommet de chacune des paraboles (P_1) et (P_2) puis représenter (P_1) et (P_2) sur la figure. (0,25pt)

c) Déterminer le foyer, le sommet et la directrice de la parabole (P_1') image de (P_1) par la similitude s puis construire (P_1'). (0,25pt)

Problème(10 points)

Partie A

Soit f_n la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n(1+\ln x); & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

où n est un entier naturel tel que $n \geq 1$ et x est une variable réelle.

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n au point $x_0 = 0$, interpréter géométriquement (distinguer le cas particulier où $n = 1$). (1pt)

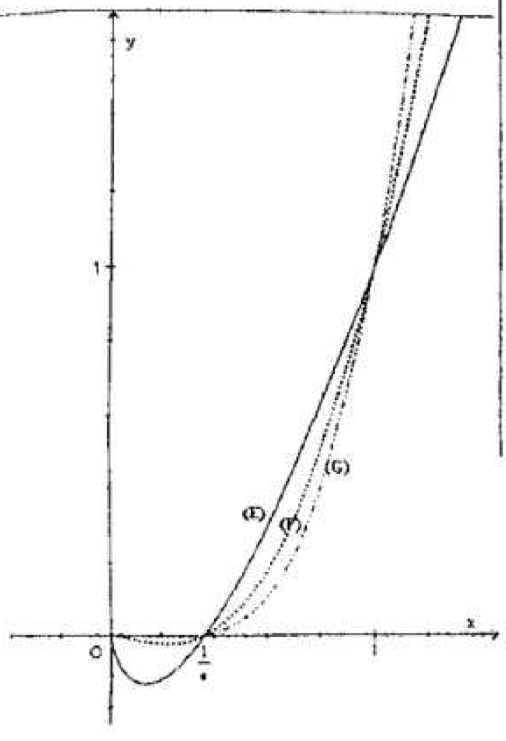
2. Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations. (1pt)

3. Montrer, par le calcul que toutes les courbes (C_n) passent par trois points communs que l'on déterminera. (0,75pt)

4. Etudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}) (faire un tableau). (0,5pt)

5. Les courbes (E), (F) et (G) ci-contre représentent les fonctions f_1, f_2 et f_3.

Associer à chaque courbe sa fonction puis justifier votre réponse (on ne demande pas de reproduire les cette figure). (0,75pt)



Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit le point $M_n(x_n;y_n)$ de la courbe (C_n) d'abscisse $x_n = e^{-(1+\frac{1}{n})}$, où n est un entier aturel non nul.

. Calculer y_n en fonction de n et montrer que tous les points $M_n(x_n;y_n)$ appartiennent à une ›ranche de courbe d'une fonction numérique φ que l'on déterminera. (0,75pt)

. Montrer que la suite (x_n) est croissante et majorée. (0,5pt)

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, en déduire que quand n tend vers $+\infty$, le point M_n tend vers une ›osition donnée que l'on déterminera. (0,5pt)

Soit U_n l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_n), l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x = e^{-1}$ et $x = 1$.

a) En utilisant une intégration par parties, écrire U_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et interpréter graphiquement. (0,75pt)

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive, donner une interprétation graphique. (0,5pt)

Partie C

›n considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = (1+\ln x)e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}; & x \in]0,\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e},+\infty[\\ g(\frac{1}{e}) = 0 \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+} g(x)$ puis étudier la continuité et la dérivabilité de g au point $_0 = \frac{1}{e}$, donner une interprétation géométrique. (0,75pt)

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ puis interpréter géométriquement. (0,75pt)

3. Calculer $g'(x)$ puis étudier son signe. (0,5pt)

. Dresser le tableau de variations de g et construire sa courbe Γ dans un nouveau repère. (0,5pt)

.a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, les courbes Γ et (C_n) ont trois points d'intersection d'ont deux sont indépendants de n que l'on déterminera et donner les coordonnées u troisième point en fonction de n. (0,25pt)

›) Reconnaître le troisième point cité en 5 a). Déterminer ses coordonnés et le placer sur Γ dans es deux cas: $n = 1$ et $n = 2$. (0,25pt)

Fin.