**République Islamique de Mauritanie**
**Ministère de l'Education Nationale**
**Direction des Examens et de l'Evaluation**
**SERVICE DES EXAMENS**

# Baccalauréat 2018
## Session Normale

**Honneur – Fraternité – Justice**

Séries : C & TMGM
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficients : 9 & 6

**Exercice 1** (3 points)

1° On considère l'équation (E) : $25x-49y=5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières. — 0.75 pt

b) Vérifier que le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E). — 1 pt

c) Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p\equiv 5[49]$. — 0,25 pt

2° a) Justifier que si $(x,y)$ est une solution de (E) alors $5x\equiv 1[7]$ et $y\equiv 0[5]$. — 0.25 pt

b) Montrer que $5x\equiv 1[7]$ si et seulement si $x\equiv 3[7]$. — 0.25 pt

3° a) Soit x un entier relatif. Quels sont les restes de $x^2$ dans la division euclidienne par7 ? — 0.25 pt

b) Existe-t-il un couple $(x,y)$ d'entiers relatifs tels que $(x^2,y^2)$ soit solution de (E) ? — 0.25 pt

**Exercice 2** (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Pour tout nombre complexe $z$ on pose :
$P(z)=z^3-(1+4i)z^2-(9-i)z-6+18i$.

1.a) Calculer $P(3i)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}$ : $P(z)=(z-3i)(z^2+az+b)$ — 0.5 pt

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. — 0.5 pt

c) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $|z_C|\le|z_B|\le|z_A|$. Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC. — 0.5 pt

d) Soit $A'=\text{bar}\{(A;-5),(B;6),(C;12)\}$. Vérifier que l'affixe de $A'$ est $z_{A'}=-3+i$. Placer $A'$. — 0.5 pt

2° On considère l'ellipse $\Gamma$ de sommets $A$, $A'$ et $B$.

a) Déterminer le centre I et l'excentricité de $\Gamma$. — 0.5 pt

b) Ecrire une équation cartésienne de $\Gamma$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. — 0.5 pt

c) Préciser les points d'intersection de $\Gamma$ avec l'axe (Ox). — 0.5 pt

d) Déterminer les foyers et les directrices de $\Gamma$ puis construire $\Gamma$. — 0.5 pt

**Exercice 3** (4 points)

Soit ABCD un parallélogramme tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{4}$ et $AB=2AD$.

On définit les points E, F, G et H tels que AFEB et ADGH soient des carrés directs.
Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[EC]$, $[CG]$ et $[GA]$.

1° Représenter les données précédentes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure. — 0.5 pt

2° Soit $R_A$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et $f=T\circ R_A$.

a) Quelle est la nature de $f$ ? — 0.25 pt

b) Déterminer $f(D)$ puis caractériser $f$. Quelle est l'image du point F par $f$ ? — 0.5 pt

c) Justifier que les segments $[DF]$ et $[CG]$ sont perpendiculaires et de même longueur. — 0.5 pt

3°a) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CE}$ puis en déduire que le triangle $ECG$ est rectangle isocèle direct en C. — 0.5 pt

b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement $g$ qui transforme E en C et C en G. — 0.25 pt

c) Vérifier que $g$ est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite. — 0.25 pt

4° Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en D.

a) Déterminer le rapport de S et une mesure de l'angle de S. — 0.5 pt

b) Montrer que le centre $\Omega$ de S appartient aux cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ circonscrit respectivement aux carrés AFEB et ADGH. Placer $\Omega$. — 0.25 pt

c) Montrer que $S(F)=G$ puis en déduire que $S(\Gamma_1)=\Gamma_2$. — 0.25 pt

d) Soit M un point de $\Gamma_1$ et $M'=S(M)$. Montrer que les points A, M et M' sont alignés. — 0.25 pt

**Exercice 4 (4 points)**

1° a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''-6y'+8y=0$. — 0.25 pt

b) Déterminer la solution $y_0$ de (E) dont la courbe passe par le point $A(0,-1)$ et admet en ce point une tangente horizontale. — 0.25 pt

2° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{4x}-2e^{2x}$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère

**orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.**

**a) Calculer et interpréter les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.** **0.75 pt**

**b) Dresser le tableau de variations de f.** **0.75 pt**

**3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=\left]-\infty,0\right]$.**

**a) Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera.** **0.25 pt**

**b) Calculer et interpréter $\lim\limits_{x\to-1}\frac{g^{-1}(x)}{x+1}$ où $g^{-1}$ est la réciproque de g.** **0.25 pt**

**c) Soit $(C')$ la courbe de $g^{-1}$. Montrer que les courbes $(C)$ et $(C')$ se coupent en un unique point B d'abscisse $\alpha$ tel que $-0,6<\alpha<-0,5$.** **0.25 pt**

**d) Tracer dans le même repère les courbes $(C)$ et $(C')$.** **0.5 pt**

**e) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$.** **0.25 pt**

**4° Soit S l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes $(C)$, $(C')$ et les axes de coordonnées.**

**a) Montrer que $S=2\int_{\alpha}^{0}\left(x-f(x)\right)dx$.** **0.25 pt**

**b) Calculer la valeur de S en fonction de $\alpha$ et en donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près.** **0.25 pt**

**<u>Exercice 5 (5 points)</u>**

**<u>Partie A</u> :**

**Soit la fonction f définie sur $\left]-1,+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{x}{x+1}-(x+1)\ln(x+1)$.**

**On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.**

**1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.** **0.75 pt**

**2. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis étudier les variations de $f'$.** **0.5 pt**

**b) Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de $f'(x)$.** **0.25 pt**

**3. a) Dresser le tableau de variation de f.** **0.25 pt**

**b) Tracer la courbe (C).** **0.25 pt**

**3. a) Calculer $\int_0^x \frac{t}{t+1}dt$ et à l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^x (t+1)\ln(1+t)dt$.** **0.5 pt**

**b) En déduire la primitive F de f sur $\left]-1,+\infty\right[$ qui s'annule en 0.** **0.25 pt**

**c) Calculer l'aire $A_n$ du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=n$, pour n un entier naturel $n\ge1$.** **0.25 pt**

**<u>Partie B</u> :**

**Soit $(U_n)$ la suite définie $\forall n\ge1$ par $U_n=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{3}f(2)+\frac{1}{4}f(3)+...+\frac{1}{n}f(n-1)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}f(k)$.**

**1° Posons $\forall n\ge1$ : $V_n=\frac{1}{n+1}f(n)$.**

**a) Vérifier que $\forall n\ge1$, $V_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}-\ln(n+1)$.** **0.5 pt**

**b) En déduire que $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\ln(n!)$.** **0.25 pt**

**2° Notons $\forall n\ge1$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $S'_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.**

**a) Montrer que $\forall k\ge1$ ; $\frac{1}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\le\frac{1}{k}$ puis en déduire que $\frac{1}{n}+\ln n\le S_n\le1+\ln n$.** **0.5 pt**

**b) Montrer que $\forall k\ge1$ ; $\frac{1}{(k+1)^2}\le\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^2}\le\frac{1}{k^2}$ puis en déduire que $1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\le S'_n\le2-\frac{1}{n}$.** **0.5 pt**

**c) En déduire que $\forall n\ge1$ : $\frac{2}{n}-2\le U_n+\ln\left((n-1)!\right)\le\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$.** **0.25 pt**

**- *Fin* -**

# Corrigé

**<u>Exercice 1</u>**

**1.a) Pour appliquer l'algorithme d'Euclide on effectue les divisions euclidiennes successives :**

$$\begin{aligned}49 &= 25\times1+24\\25&=24\times1+1\\24&=1\times24+0\end{aligned}$$

**Le dernier reste non nul de la division euclidienne de 49 par 25 est égal 1. Alors $p\gcd(49,25)=1$.**
**L'équation (E) : $25x-49y=5$ admet des solutions entières car le $p\gcd(25,49)$ divise 5.**
**b) Pour vérifier que le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E), on remplace dans (E) :**
**On a $25\times10-49\times5=250-245=5$ . Alors le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E).**
**Pour résoudre (E) :**

**On sait que pour tout couple (x,y) solution de (E) on a :** $\begin{cases}25x-49y=5\\25\times10-49\times5=5\end{cases}$

**Ce qui implique, par soustraction, que : $25(x-10)-49(y-5)=0$**
**Ce qui équivaut à : $25(x-10)=49(y-5)$**

**Cette dernière égalité montre que** $\begin{cases}49\,|\,25(x-10)\\25\,|\,49(y-5)\end{cases}$

**Or $p\gcd(49,25)=1$ , d'après le théorème de Gauss :** $\begin{cases}49\,|\,(x-10)\\25(\,|\,y-5)\end{cases}$

**Ce qui équivaut à : « il existe un entier k tel que** $\begin{cases}x-10=49k\\y-5=25k\end{cases}$ **» ; soit** $\begin{cases}x=49k+10\\y=25k+5\end{cases}$

**Réciproquement ; quel que soit l'entier k on montre en remplaçant dans (E) que le couple $(49k+10,25k+5)$ est solution de $(E)$.**
**<u>Conclusion</u> : les solutions de $(E)$ sont les couples de la forme $(49k+10,25k+5)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ .**
**c) Pour tout entier p on a :**

$$\begin{aligned}25p\equiv5[49]&\Leftrightarrow \exists q\in\mathbb{Z}:\ \ 25p=49q+5\\&\Leftrightarrow\ 25p-49q=5\\&\Leftrightarrow\ (p,q)\text{ est solution de }(E)\\&\Leftrightarrow\begin{cases}p=49k+10\\q=25k+5\end{cases},k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

**Cherchons les valeurs de p comprises entre 1960 et 2018 :**

$$\begin{aligned}1960\le p\le2018&\Leftrightarrow1960\le49k+10\le2018\\&\Leftrightarrow1950\le49k\le2008\\&\Leftrightarrow49\times39+39\le49k\le49\times41+9\\&\Leftrightarrow k=40\end{aligned}$$

**car il existe un seul multiple de 49 (nombre du type 49k) compris entre $49\times39+39$ et $49\times41+9$ . C'est $49\times40$ Enfin, la seule valeur possible de p est $p=49\times40+10=1970$. Donc $p=1970$**
**<u>Conclusion</u> : Il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p\equiv5[49]$**
**2.a) Si le couple $(x,y)$ est une solution de (E) alors $25x-49y=5$ ce qui implique que $25x-5=49y$. Donc $5(5x-1)=7\times7y$ d'où 7 divise le nombre $5(5x-1)$. Or 5 et 7 sont deux nombres premiers - donc premiers aussi entre eux, d'où d'après le théorème de Gauss, 7 divise $5x-1$ . Alors il existe un entier k tel que $5x-1=7k$ .**
**Donc $5x=7k+1$ ce qui prouve que $5x\equiv1[7]$**

**D'autre part si le couple $(x,y)$ est une solution de (E) alors $25x-49y=5$ ce qui montre que $49y=5(5x-1)$.**
**Donc 5 divise le nombre $49y$ . Or 5 et 49 sont premiers entre eux ( 5 est premier et ne divise pas 49) , alors 5 divise y. C'est-à-dire que $y\equiv 0[5]$**

**b) Si $x\equiv 3[7]$, alors $5x\equiv 5\times 3[7]$. Donc $5x\equiv 1[7]$ .**
**Réciproquement : les restes de divisions possibles d'un entier x par 7 sont les éléments de l'ensemble : $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.**

**Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour x et 5x :**

| x [7] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5x [7] | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |

**On en déduit que $5x\equiv 1[7]$ implique que $x\equiv 3[7]$.**
**<u>Conclusion</u> :Pour tout entier relatif x : $5x\equiv 1[7]$ si et seulement si $x\equiv 3[7]$.**

**3.a) Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour x et $x^2$ :**

| x [7] | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ [7] | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |

**On en déduit que pour tout entier x, le reste de la division euclidienne de $x^2$ par 7 est un élément de l'ensemble $\{0;1;2;4\}$**

**b) D'après la question 2) pour que le couple $(x^2;y^2)$ soit solution de $(E)$ il faut que $5x^2\equiv 1[7]$ . Ce qui implique que $x^2\equiv 3[7]$ et ceci est impossible car le reste 3 n'appartient pas à l'ensemble précédent $\{0;1;2;4\}$ des restes de la division euclidienne de $x^2$ par 7.**
**Conclusion : il n'existe aucun couple $(x,y)$ d'entiers relatifs tels que $(x^2,y^2)$ soit solution de (E).**

**<u>Autre méthode</u> : Pour que le couple $(x^2;y^2)$ soit solution de $(E)$ il faut que $25x^2-49y^2=5$**
**Donc $(5x-7y)(5x+7y)=5$. Les décompositions possibles de 5 dans $\mathbb{Z}$ sont $5\times 1, 1\times 5, (-5)\times(-1), (-1)\times(-5)$.**
**Alors l'équation $25x^2-49y^2=5$ se ramène à l'un des quatre systèmes suivants, avec $(x,y)$ entiers relatifs:**

$$\begin{cases}5x-7y=5\\5x+7y=1\end{cases},\quad \begin{cases}5x-7y=1\\5x+7y=5\end{cases}\quad \begin{cases}5x-7y=-5\\5x+7y=-1\end{cases},\quad \begin{cases}5x-7y=-1\\5x+7y=-5\end{cases}.$$

**L'addition (ou la soustraction) des équations de chaque système implique une contradiction (x ou y non relatif). On conclut qu'il n'existe aucun couple $(x,y)$ d'entiers relatifs tels que $(x^2,y^2)$ soit solution de (E).**

## <u>Exercice 2</u>

**1.a) Pour calculer P(3i) on remplace z par 3i :**

$$\begin{aligned}P(3i)&=(3i)^3-(1+4i)(3i)^2-(9-i)(3i)-6+18i\\&=-27i+9+36i-27i-3-6+18i\\&=0\end{aligned}$$

**Alors le nombre 3i est une racine de P . Donc ils existent deux nombres complexes a et b tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-3i)(z^2+az+b)$, utilisons le tableau d'Horner pour les déterminer :**

| | 1 | -1-4i | -9+i | -6+18i |
|---|---|---|---|---|
| 3i | | 3i | -3i+3 | -18i+6 |
| | 1 | -1-i | -6-2i | 0 |

**D'où $a=-1-i$ et $b=-6-2i$**
**Alors pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-3i)(z^2-(1+i)z-6-2i)$**

**b) On a $P(z)=0\Leftrightarrow z-3i=0$ ou $z^2-(1+i)z-6-2i=0$.**
**D'une part $z-3i=0\Leftrightarrow z=3i$**
**D'autre part, le discriminant de l'équation $z^2-(1+i)z-6-2i=0$ est**

$$\Delta=(1+i)^2+4(6+2i)=24+10i=25-1+2\times5\times i=(5+i)^2$$

**D'où $\delta=5+i$ est une racine carrée de $\Delta$.**

**Alors les solutions de cette équation sont $z=\dfrac{1+i+(5+i)}{2}=3+i$ et $z=\dfrac{1+i-(5+i)}{2}=-2$.**

**<u>Conclusion</u> : L'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est $\{-2,3i,3+i\}$**

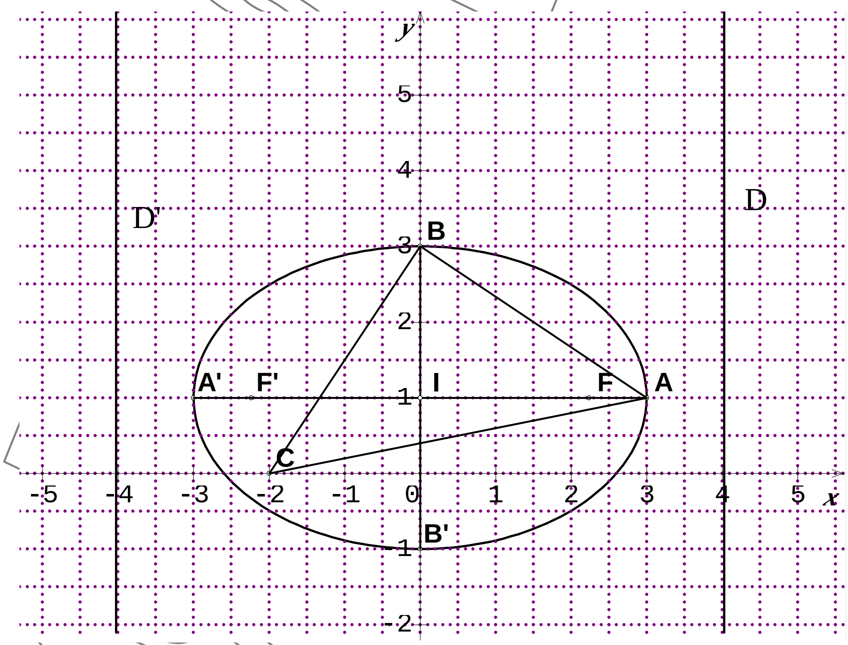
**c) En remarquant que $|-2|<|3i|<|3+i|$ ; on a alors $z_A=3+i$; $z_B=3i$ et $z_C=-2$.**

**Construction :**

$z_A=3+i\Rightarrow A(3;1)$

$z_B=3i\Rightarrow B(0;3)$

$z_C=-2\Rightarrow C(-2;0)$




**On a $\dfrac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=\dfrac{3i-(3+i)}{3i-(-2)}=\dfrac{-3+2i}{2+3i}=\dfrac{i(3i+2)}{2+3i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\dfrac{BA}{BC}=1$ . D'où le triangle ABC est rectangle isocèle direct en B.**

**d) Le point $A'$ est le barycentre du système $\{(A;-5),(B;6),(C;12)\}$ . Alors L'affixe de $A'$ est**

$$z_{A'}=\frac{-5z_A+6z_B+12z_C}{-5+6+12}$$

$$z_{A'}=\frac{-5(3+i)+6(3i)+12(-2)}{-5+6+12}$$

$$z_{A'}=\frac{-39+13i}{13}$$

**Donc : $z_{A'}=-3+i$ et $A'(-3;1)$**

**2.a) Puisque les points A, $A'$ et B sont des sommets de l'ellipse $\Gamma$ , et B appartient à la médiatrice du segment $[AA']$, donc la droite $(AA')$ est un axe de $\Gamma$ et par suite le centre de $\Gamma$ est le milieu I de $[AA']$. Son affixe est**

$$z_I=\frac{z_A+z_{A'}}{2}$$

$$z_I=\frac{3+i+(-3+i)}{2}$$

$$z_I=i$$

**Alors le centre de $\Gamma$ est le point $I(0,1)$.**

**Les demi-longueurs des axes sont** $a = IA = |z_A - z_I| = ||3+i-i| = |3| = 3$ **et** $b = IB = |z_B - z_I| = |3i - i| = |2i| = 2$

**donc** $a > b$ **, d'où** $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ **et par conséquent l'excentricité de** $\Gamma$ **est** $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ **.**

**b) Le centre de** $\Gamma$ **est le point** $I(0,1)$ **. Ses demi-longueurs des axes sont** $a = 3$ **et** $b = 2$ **. Alors, une équation cartésienne de** $\Gamma$ **dans le repère** $(O;\vec{i},\vec{j})$ **est** $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$

**C'est-à-dire :** $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

**c) Pour déterminer les coordonnées** $(x,y)$ **des points d'intersection de** $\Gamma$ **avec** $(Ox)$ **, on résout le système :**

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

**Ceci équivaut à** $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{9} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = \frac{27}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{27}{4}} \end{cases}$$

**Donc** $\Gamma$ **coupe** $(Ox)$ **en deux points** $M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ **et** $N\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$**.**

**d) Dans le repère** $(I;\vec{i},\vec{j})$ **, l'équation réduite de** $\Gamma$ **est** $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$ **; avec** $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$

**Les foyers de** $\Gamma$ **sont** $F(c;0)$ **et** $F'(-c;0)$ **avec** $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

**Donc** $F(\sqrt{5};0)$ **et** $F'(-\sqrt{5};0)$ **.**

**Les directrices de** $\Gamma$ **sont les droites D et** $D'$ **d'équations respectives** $X = \frac{a^2}{c}$ **et** $X = -\frac{a^2}{c}$ **.**

**Donc** $X = \frac{9}{\sqrt{5}}$ **et** $X = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ **.**

**Alors dans le repère** $(O;\vec{i},\vec{j})$

**Les foyers :** $F(\sqrt{5};1)$ **et** $F'(-\sqrt{5};1)$ **car** $Y = y - 1 \Rightarrow y = Y + 1$ **.**

**Les directrices ont pour équations:** $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$ **et** $x = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ **car** $X = x$ **.**

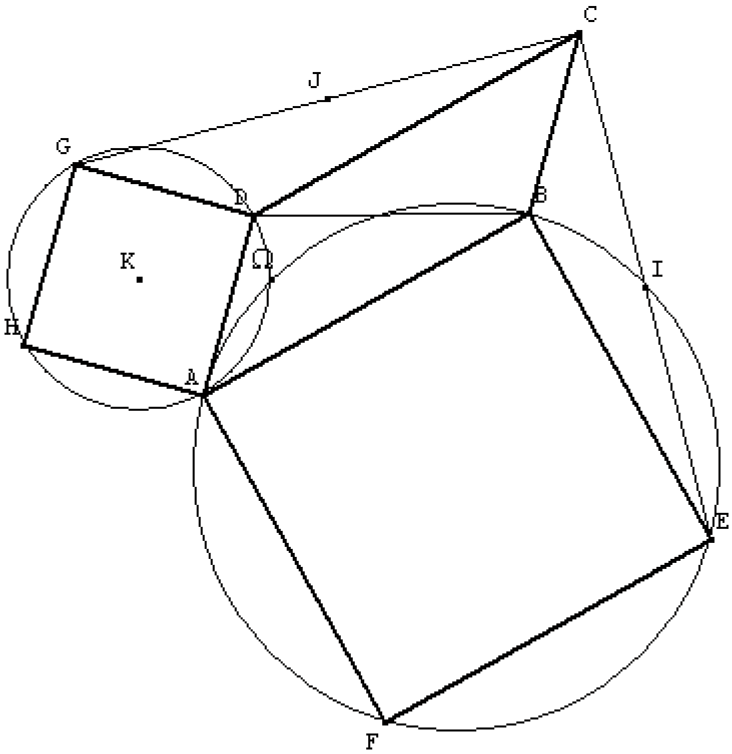
**Pour la construction voir la figure précédente.**

**Exercice 3**

**1) Représentation graphique :**

**ABCD est un parallélogramme tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{4}$ et $AB=2AD$.**

**AFEB et ADGH sont des carrés directs. I, J et K les milieux respectifs des segments $[EC]$, $[CG]$ et $[GA]$.**




**2.a) La composée $f=T\circ R_A$ de la translation T et la rotation $R_A$ est une rotation de même angle que la rotation $R_A$. D'où f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.**

**b) On a $R_A(D)=H$ car $\begin{cases}AD=AH\\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AH}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\end{cases}$ et $T(H)=G$ car $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{BC}$. Alors**

**$f(D)=T(R_A(D))=T(H)=G$**

**Pour caractériser f :**

**D'après 2.a) l'angle de f est $\frac{\pi}{2}$.**

**D'autre part, le centre de f est l'unique point $\Omega$ qui vérifie $\begin{cases}\Omega D=\Omega G\\ \left(\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega G}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\end{cases}$**

**Alors $\Omega$ est le centre du carré ADGH. Donc $\Omega$ est confondu avec K.**

**On a alors : $f(F)=T(R_A(F))=T(B)=C$.**

**c) On a : $\begin{matrix}D\xrightarrow{f}G\\ F\rightarrow C\end{matrix}$. Alors $\begin{cases}DF=GC\\ \left(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{GC}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\end{cases}$**

**Alors les segments $[DF]$ et $[CG]$ sont perpendiculaires et de même longueur**

**3.a) On a $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}$.**

**Dans le parallélogramme ABCD on a : $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$**

**Dans le parallélogramme AFEB on a : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE}$**

**Donc $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$.**

**Alors $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{CE}$**

**D'après 3.c) :** $\begin{cases} DF = GC \\ (\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{GC}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$ **on obtient** $\begin{cases} CE = GC \\ (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{GC}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$

**Donc** $\begin{cases} CE = GC \\ (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CG}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$ **ce qui montre que le triangle CEG est rectangle isocèle indirect en C .**

**Donc ECG est rectangle isocèle direct en C.**

**b) On a $EC = CG \neq 0$ alors il existe un unique antidéplacement g tel que** $\begin{cases} g(E) = C \\ g(C) = G \end{cases}$

**c) Un antidéplacement g dans le plan est une réflexion ou une symétrie glissante.**
**Les segments $[EC]$ et $[CG]$ n'ont pas la même médiatrice. Donc g n'est pas une réflexion. D'où g est une symétrie glissante.**
**On peut remarquer aussi que si g est une réflexion alors $g(E) = C$ implique que $g(C) = E$ . Or $g(C) = G$ et $G \neq E$ donc g n'est pas une réflexion. Alors g est une symétrie glissante.**
**L'axe de g passe par les milieux des segments $[EC]$ et $[CG]$ qui sont respectivement I et J. D'où l'axe de g est la droite $(IJ)$. En plus, comme $g \circ g(E) = G$, ( situation de chaine) alors le vecteur de g est $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EG}$ mais**

**d'après le théorème des milieux on a $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{IJ}$. Donc la forme réduite de g est $g = t_{\overrightarrow{IJ}} \circ S_{IJ} = S_{IJ} \circ t_{\overrightarrow{IJ}}$ .**

**4.a) On a** $\begin{cases} S(B) = A \\ S(A) = D \end{cases}$ **avec** $\begin{cases} \dfrac{AD}{BA} = \dfrac{1}{2} \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + \pi = \dfrac{5\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases}$

**Alors le rapport de S est $\dfrac{1}{2}$ et une mesure de l'angle de S est $\dfrac{5\pi}{4}$ (ou $\dfrac{-3\pi}{4}$ ).**

**b) Le centre $\Omega$ de S vérifie :** $\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = \dfrac{5\pi}{4} \quad [2\pi] \\ (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) = \dfrac{5\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases}$

**On sait que $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ et $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GD}) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$**

**Alors on peut écrire** $\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) \quad [\pi] \\ (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) = (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GD}) \quad [\pi] \end{cases}$

**On a donc les points $\Omega, A, B$ et $E$ qui sont cocycliques. D'autre part les points $\Omega, A, D$ et $G$ sont cocycliques.**
**Alors $\Omega$ appartient au cercle circonscrit au triangle ABE qui est $\Gamma_1$ .**
**De plus $\Omega$ appartient au cercle circonscrit au triangle ADG qui est $\Gamma_2$ .**
**Ces cercles se coupent en A et un autre point. On a $S(A) \neq A$ . Ce qui montre que $\Omega$ est le deuxième point d'intersection, autre que A, des cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ .**
**Pour la construction voir la figure.**
**c) Pour montrer que $S(F) = G$ on utilise la conservation de configuration :**
**Soit $F' = S(F)$, on a alors :**

$$\begin{aligned} B &\xrightarrow{S} A \\ A &\rightarrow D \ . \\ F &\rightarrow F' \end{aligned}$$

**Le triangle BAF est rectangle isocèle direct en A, alors son image $ADF'$ ,par S, est aussi rectangle isocèle direct en $D = S(A)$. C'est exactement le cas du triangle ADG d'où $F' = G$. Donc $S(F) = G$ .**
**On sait que le cercle $\Gamma_1$ est de diamètre $[BF]$ . S transforme le segment $[BF]$ en $[AG]$ qui est un diamètre de $\Gamma_2$ . Alors $S(\Gamma_1) = \Gamma_2$ .**

**d) Pour tout point M de $\Gamma_1$, différent de A et B, on a par cocyclicité : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}\right)\quad[\pi]$. Alors**
**$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=-\dfrac{\pi}{4}\quad[\pi]\qquad$ (1)**

**D'autre part on a : $\begin{cases}S(M)=M'\\S(B)=A\end{cases}$. Alors $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{M'A}\right)=\dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$ et par conséquent $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{M'A}\right)=\dfrac{\pi}{4}[\pi]\qquad$ (2)**

**Par addition de (1) et (2) on obtient : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{M'A}\right)=0[\pi]$, ce qui montre que les points A, M et M' sont alignés.**
**Si M est confondu avec A, alors les points A, M et M' sont alignés (réduits en deux points A et D car $S(A)=D$).**
**Si M est confondu avec B, alors les points A, M et M' sont alignés (réduits en deux points B et A car $S(B)=A$).**
**<u>Conclusion</u> : Pour tout point M de $\Gamma_1$, les points A, M et M' sont alignés.**

## Exercice 4

**1. a) L'équation caractéristique de (E) est $r^2-6r+8=0$ dont les solutions sont $r_1=2$ et $r_2=4$**
**Alors, la solution générale y de l'équation (E) est définie par $y(x)=Ae^{2x}+Be^{4x}$, A et B des réels.**
**b) Si $y_0$ est une solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(0;-1)$, alors $y_o(0)=-1$.**
**Si la courbe admet en une tangente horizontale, alors $y_o'(0)=0$.**
**Soit $y_0(x)=Ae^{2x}+Be^{4x}$. Donc $y_0'(x)=2Ae^{2x}+4Be^{4x}$**

$$\begin{cases}y_o(0)=-1\\y_o'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=-1\\2A+4B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=-1\\A+2B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=1\end{cases}.$$

**Donc on a $y_0(x)=-2e^{2x}+e^{4x}$**
**2) La fonction f est définie par : $f(x)=e^{4x}-2e^{2x},x\in\mathbb{R}$**
**a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{4x}-2\times\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ et par conséquent la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe $(C)$.**
**On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}(e^{2x}-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-2)$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$.**
**$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}(e^{2x}-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-2)$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ car**
**$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-2)=+\infty$. Alors $(C)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(Oy)$.**
**b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables $x\mapsto e^{4x}$ et $x\mapsto-2e^{2x}$.**
**On a $f'(x)=4e^{4x}-4e^{2x}$. On peut écrire $f'(x)=4e^{2x}(e^{2x}-1)=4e^{2x}(e^{x}+1)(e^{x}-1)$**
**Le signe de $f'(x)$ est celui de $e^{x}-1$ :**

$$f'(x)\geq0\Leftrightarrow e^{x}-1\geq0\Leftrightarrow e^{x}\geq1\Leftrightarrow x\geq0\ \text{ et }\ f(0)=-1$$

**Tableau de variation de f :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3.a) On déduit du tableau de variation de f celui de g sa restriction sur l'intervalle $I=]-\infty,0]$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ |
| $g(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

**La fonction g est continue et strictement décroissante sur $I=]-\infty,0]$.**

**Alors g réalise une bijection de I sur son image l'intervalle $J = f(I) = [-1;0[$ .**

**b) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{g^{-1}(x)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{g^{-1}(x) - g^{-1}(-1)}{x-(-1)}$ . En posant $g^{-1}(x) = y$ on a alors $x = g(y)$ et $\left(x \to -1^+ \Leftrightarrow y \to 0^-\right)$**

**et par conséquent $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{g^{-1}(x)}{x+1} = \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{y-0}{g(y)-g(0)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{g(y)-g(0)}{y-0}}$ .**

**D onc $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{g^{-1}(x)}{x+1} = -\infty$ car $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{g(y)-g(0)}{y-0} = g'_g(0) = f'_g(0) = 0^-$**

**La limite trouvée est celle du taux d'accroissement de $g^{-1}$ à droite de -1. Ce qui implique que la courbe $(C')$ de $g^{-1}$ admet en son point d'abscisse -1 une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.**

**c) Les courbes $(C)$ et $(C')$ étant symétriques par rapport à la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ . Alors les points communs à $(C)$ et $(C')$ sont exactement les points d'intersections de $(C)$ et $\Delta$. Pour déterminer ces points on résout l'équation $g(x) = x$ dans l'intervalle $I = ]-\infty, 0]$. On définit la fonction h telle que $h(x) = g(x) - x,\ x \in I$ . La fonction h est continue et dérivable sur $I$ et de dérivée $h'(x) = g'(x) - 1$ .**

$$h'(x) = 4e^{4x} - 4e^{2x} - 1.$$

**On peut écrire $h'(x) = \left(2e^{2x} - 1\right)^2 - 2 = \left(2e^{2x} - 1 - \sqrt{2}\right)\left(2e^{2x} - 1 + \sqrt{2}\right)$**

**On constate que le nombre $-1+\sqrt{2}$ est positif, ce qui implique que $2e^{2x} - 1 + \sqrt{2} > 0, \quad \forall x \in I$ . Alors le signe de $h'(x)$ est celui de $2e^{2x} - 1 - \sqrt{2}$ :**

$$h'(x) \le 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 1 - \sqrt{2} \le 0 \Leftrightarrow e^{2x} \le \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x \le \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

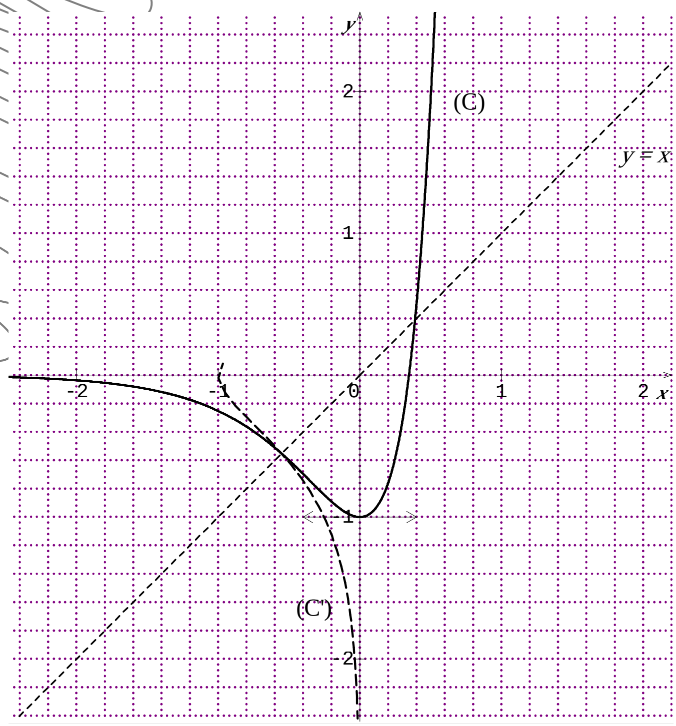
**On sait que $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right) > 0$ . Alors $\forall x \in I = ]-\infty, 0]$ il est claire que $x < \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.**

**et par conséquent, $\forall x \in I, h'(x) < 0$.**

**On a $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (g(x) - x) = \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) - \lim\limits_{x\to -\infty} x = +\infty$ et $h(0) = -1$ . Par conséquent h est continue et strictement décroissante et change de signe sur $I$, d'où l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $I$.**

**En plus $h(-0,6) \simeq 0.088$ et $h(-0,5) \simeq -0.100$, d'où $h(-0,5) \times h(-0,6) < 0$ . Donc le théorème des valeurs intermédiaires prouve que $-0,6 < \alpha < -0,5$ .**

**d) Représentation graphique des courbes $(C)$ et $(C')$ :**



**e) Pour trouver l'expression de $g^{-1}(x)$ , on pose $y = g(x)$ et on écrit x en fonction de y :**

$$\begin{cases} y = g(x) \\ x \in ]-\infty;0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{4x} - 2e^{2x} \\ x \in ]-\infty;0] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = e^{4x} - 2e^{2x} + 1 \\ x \in ]-\infty;0] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = (e^{2x} - 1)^2 \\ x \in ]-\infty;0] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} - 1 = \pm\sqrt{y+1} \\ x \in ]-\infty;0] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \ln(1 \pm \sqrt{y+1}) \\ x \in ]-\infty;0] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{y+1}) \text{ ou } x = \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{y+1}) \\ x \in ]-\infty;0] \end{cases}$$

**On remarque que $1+\sqrt{y+1} \geq 1$ et $1-\sqrt{y+1} \leq 1$. Donc $\ln(1+\sqrt{y+1}) \geq 0$ et $\ln(1-\sqrt{y+1}) \leq 0$. Comme $x \in ]-\infty;0]$ ,on obtient $x = \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{y+1})$. C'est-à-dire que $g^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{y+1}), \forall y \in [-1;0[$**

**Enfin $\forall x \in [-1;0[$ on a $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{x+1})$.**

**4.a) Soit $S_1$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(C)$, l'axe des ordonnées et la première bissectrice $\Delta$ et $S_2$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(C')$, l'axe des abscisses et la première bissectrice $\Delta$.**
**Les deux domaines étant symétriques par rapport à $\Delta$, ils ont la même aire d'où $S_1 = S_2$, or $S = S_1 + S_2$ ce qui vérifie que $S = 2S_1$.**
**D'autre part d'après la question 3°c) la courbe $(C)$ et la droite $\Delta$ se coupent au point d'abscisse $\alpha$ et la droite $\Delta$ est au-dessus de $(C)$ sur l'intervalle $[\alpha;0]$. On en déduit que $S_1 = \int_\alpha^0 (x - f(x))dx$ et par conséquent on trouve $S = 2\int_\alpha^0 (x - f(x))dx$.**

**b) $S = 2\int_\alpha^0 (x-f(x))dx = 2\int_\alpha^0 (x - e^{4x} + 2e^{2x})dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}e^{4x} + e^{2x}\right]_\alpha^0 = 2\left(\left(0 - \frac{1}{4} + 1\right) - \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}e^{4\alpha} + e^{2\alpha}\right)\right)$.**

**Donc $S = \frac{3}{2} - \alpha^2 + \frac{1}{2}e^{4\alpha} - 2e^{2\alpha}$ u a et on a $S \simeq 0.59$ u a .**

## Exercice 5

### Partie A

**La fonction f est définie par : $f(x) = \frac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1), \ \forall x \in ]-1,+\infty[$**

**1.a)**

- **Pour montrer que $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ , on a :**

$$\begin{cases} \lim_{x\to -1^+} (x+1) = 0^+ \\ \lim_{x\to -1^+} x = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$$

**D'autre part, en posant $t = x+1$ on a $(x \to -1^+ \Leftrightarrow t \to 0^+)$. Donc $\lim_{x\to -1^+}(x+1)\ln(x+1) = \lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0^-$**

**Par addition : $\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1)\right) = -\infty$. Ce qui montre que $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ .**

**Interprétation graphique : la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe (C).**

- **Pour montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, on a :**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\ln(x+1) = +\infty \end{cases}.$$

**Par soustraction on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ .**

- **Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ on a :**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x}\ln(x+1)\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0, \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \text{et} \lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty .$$

**On en déduit que la courbe (C) admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction (Oy) .**

**2. a) Pour calculer $f'(x)$ on a:** $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2} - \left(\ln(x+1) + (x+1)(\dfrac{1}{x+1})\right)$.

**Donc** $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \ln(x+1) - 1$ .

**Pour trouver $f''(x)$ dérivons $f'(x)$ : alors** $f''(x) = \dfrac{-2(x+1)}{(x+1)^4} - \dfrac{1}{x+1}$ **, donc** $f''(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3} - \dfrac{1}{x+1}$

**On constate que** $f''(x) = -\left(\dfrac{2}{(x+1)^3} + \dfrac{1}{x+1}\right)$. **Donc** $f''(x) < 0, \forall x \in \left]-1;+\infty\right[$ **, ce qui montre que $f'$ est strictement décroissante sur $\left]-1;+\infty\right[$**

**b) En remplaçant par 0 dans l'expression de $f'(x)$, on obtient :** $f'(0) = 1 - 0 - 1 = 0$

**La décroissance de $f'$ implique que :**

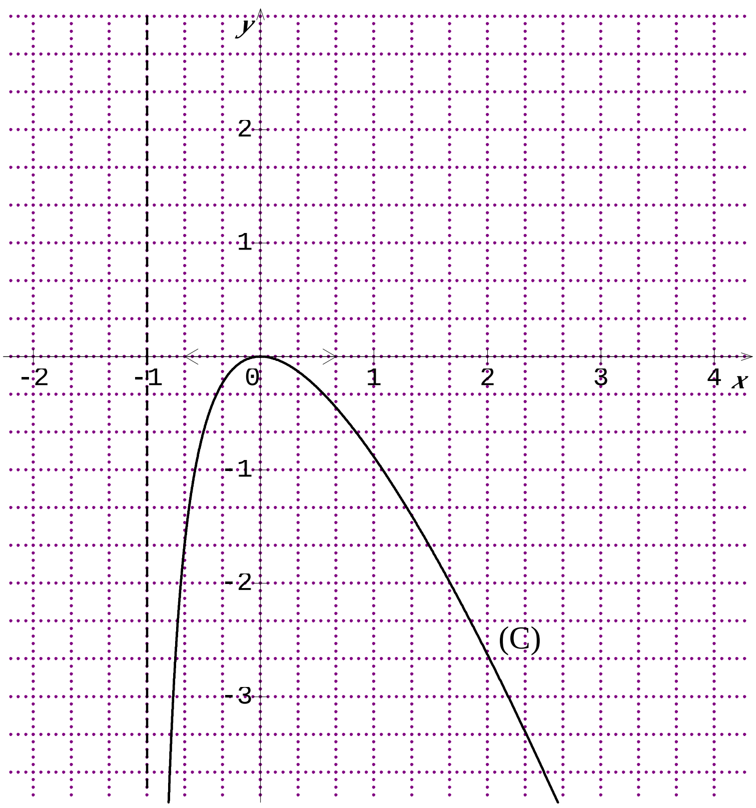
$$\forall x \in \left]-1;+\infty\right[, \quad x < 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \text{ et } x > 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0).$$

**Alors :** $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \text{ si } x \in \left]-1;0\right] \\ f'(x) \leq 0 \text{ si } x \in \left[0;+\infty\right[ \end{cases}$

**3. a) Traçons le tableau de variation de f en utilisant les résultats précédents:**

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**b) La courbe de f :**




**On remarque que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ , une tangente horizontale en $O(0;0)$ et une branche parabolique en $+\infty$ de direction (Oy) .**

**4.a) Pour calculer** $\int_0^x \frac{t}{t+1}dt$ **on peut écrire** $\frac{t}{t+1}=\frac{t+1-1}{t+1}=1-\frac{1}{t+1}$.

**Alors** $\int_0^x \frac{t}{t+1}dt=\int_0^x (1-\frac{1}{t+1})dt$

$$\int_0^x \frac{t}{t+1}dt=\left[t-\ln(t+1)\right]_0^x$$

$$\int_0^x \frac{t}{t+1}dt=x-\ln(x+1)$$

**Pour calculer** $\int_0^x (t+1)\ln(t+1)\,dt$ **on utilise une intégration par parties:**

**Posons** $\begin{cases} u(t)=\ln(t+1) \\ v'(t)=t+1 \end{cases}$. **Alors:** $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t+1} \\ v(t)=\frac{1}{2}(t+1)^2 \end{cases}$

$$\int_0^x (t+1)\ln(t+1)dt=\left[\frac{1}{2}(t+1)^2\ln(t+1)\right]_0^x-\int_0^x \frac{1}{2}(t+1)dt$$

$$\int_0^x (t+1)\ln(t+1)dt=\left[\frac{1}{2}(t+1)^2\ln(t+1)\right]_0^x-\left[\frac{1}{4}(t+1)^2\right]_0^x$$

$$\int_0^x (t+1)\ln(t+1)dt=\left(\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-0\right)-\left(\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{4}\right)$$

$$\int_0^x (t+1)\ln(t+1)dt=\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{1}{4}$$

$$\int_0^x (t+1)\ln(t+1)dt=\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$$

**b) La primitive de f sur** $]-1,+\infty[$ **qui s'annule en 0 est la fonction F définie par** $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

**Alors** $F(x)=\int_0^x\left(\frac{t}{t+1}-(t+1)\ln(t+1)\right)dt$

$$F(x)=\int_0^x \frac{t}{t+1}dt-\int_0^x (t+1)\ln(t+1)dt$$

**D'après 4.a) :**

$$F(x)=x-\ln(x+1)-\left(\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\right)$$

$$F(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\ln(x+1)-\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)$$

$$F(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}(x^2+2x+3)\ln(x+1)$$

**c) Sur l'intervalle** $[0;n]$ **, la fonction f est continue et négative pour tout entier naturel** $n\geq 1$**. Alors l'aire** $A_n$ **du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives** $x=0$ **et** $x=n$ **est :**

$$A_n=-\int_0^n f(t)dt$$

$$A_n=-F(n)+F(0)$$

$$A_n=-F(n)$$

$$A_n=-\frac{1}{4}n^2-\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}(n^2+2n+3)\ln(n+1)$$

## Partie B

**1.a) On a pour tout $n \geq 1$ , $v_n = \frac{1}{n+1} f(n)$. Donc $v_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1} - (n+1)\ln(n+1)\right)$**

**D'où :** $$\forall n \geq 1,\ v_n = \frac{n}{(n+1)^2} - \ln(n+1)$$

$$v_n = \frac{n+1-1}{(n+1)^2} - \ln(n+1)$$

$$v_n = \frac{n+1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} - \ln(n+1)$$

$$V_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \ln(n+1)$$

**b) On a pour tout $\forall n > 1$ , $u_n = \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{3} f(2) + \frac{1}{4} f(3) + ... + \frac{1}{n} f(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} f(k)$**

**On constate alors que $\forall n > 1$ , $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} v_k$**

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{(k+1)^2} - \ln(k+1)\right)$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} - \ln(k+1)\right)$$

$$u_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \ln k\right) \text{ car } 2 \leq k+1 \leq n \Leftrightarrow 1 \leq k \leq n-1$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \ln k\right) \text{ car l'expression } \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \ln k \text{ est nulle pour } k = 1$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \ln(n!)$$

**2.a) On a pour tout entier $k \geq 1$, et pour tout réel t :**

$$k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1} [t]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} [t]_k^{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1}(k+1-k) \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}(k+1-k)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

$$\text{Par somme : } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow -1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\le-\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow -1+S_n\le\int_1^n\frac{1}{t}dt\le-\frac{1}{n}+S_n$$

$$\Rightarrow S_n-1\le\left[\ln t\right]_1^n\le S_n-\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow S_n-1\le\ln n\le S_n-\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S_n-1\le\ln n\\ \ln n\le S_n-\frac{1}{n}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S_n\le 1+\ln n\\ \frac{1}{n}+\ln n\le S_n\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{n}+\ln n\le S_n\le 1+\ln n$$

**b) On a pour tout entier $k\ge 1$, et pour tout réel t : $k\le t\le k+1\ \Rightarrow\ 0\le k^2\le t^2\le(k+1)^2$**

$$\Rightarrow\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{1}{t^2}\le\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^2}dt\le\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt\le\int_k^{k+1}\frac{1}{k^2}dt$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(k+1)^2}\int_k^{k+1}dt\le\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt\le\frac{1}{k^2}\int_k^{k+1}dt$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{(k+1)^2}\left[t\right]_k^{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt\le\frac{1}{k^2}\left[t\right]_k^{k+1}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(k+1)^2}\left(k+1-k\right)\le\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt\le\frac{1}{k^2}\left(k+1-k\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{(k+1)^2}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt\le\frac{1}{k^2}$$

**Par somme :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2}\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2}\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$$

$$-1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt\le-\frac{1}{n^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow S'_n-1\le\int_1^n\frac{1}{t^2}dt\le S'_n-\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow S'_n-1\le\left[\frac{-1}{t}\right]_1^n\le S'_n-\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow S'_n-1\le-\frac{1}{n}+1\le S'_n-\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S'_n-1\le-\frac{1}{n}+1\\ -\frac{1}{n}+1\le S'_n-\frac{1}{n^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S'_n \leq 2 - \dfrac{1}{n} \\ 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \leq S'_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq S'_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

c) D'après 1.a) on a $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \ln(n!)$ . D'où : $\forall n \geq 1,\ u_n = S_n - S'_n - \ln(n!)$

Donc : $u_n + \ln((n-1)!) = S_n - S'_n - \ln(n!) + \ln((n-1)!)$

D'où : $u_n + \ln((n-1)!) = S_n - S'_n - \ln\left(\dfrac{n!}{(n-1)!}\right)$

Alors : $u_n + \ln((n-1)!) = S_n - S'_n - \ln(n)$

Puisque : $\forall n \geq 1,\quad \dfrac{1}{n} + \ln n \leq S_n \leq 1 + \ln n$ et $\dfrac{1}{n} - 2 \leq -S'_n \leq \dfrac{1}{n} - 1 - \dfrac{1}{n^2}$

on a par addition: $\dfrac{2}{n} - 2 + \ln n \leq S_n - S'_n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \ln n$ . D'où $\dfrac{2}{n} - 2 \leq S_n - S'_n - \ln n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$

Ce qui montre que $\forall n \geq 1,\quad \dfrac{2}{n} - 2 \leq u_n + \ln((n-1)!) \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ .