République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2009

Session complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit la transformation ponctuelle f_ω qui associe à tout point M du plan d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que :

$z' = (\frac{1}{2} + \omega i)z + 1 - 2\omega i, \qquad \omega \in \mathbb{C}$.

1. Reconnaître et caractériser la transformation f_ω pour les valeurs suivantes du nombre complexe ω :

a) $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\omega = -\frac{1}{2}i$ c) $\omega = 1 + \frac{1}{2}i$ d) $\omega = 2i$. (1,5pt)

2. Dans la suite de l'exercice on considère $\omega \in \mathbb{R}$ et on pose $\theta = \arg(\frac{1}{2} + \omega i)$ avec $\theta \in]-\pi;\pi]$. On considère les points $A(2;0)$ et $M_0(3;0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $M_{n+1} = f_\omega(M_n)$ et on désigne z_n l'affixe de M_n.

a) Vérifier que $z_1 = \frac{5}{2} + \omega i$ puis calculer z_2 en fonction de ω. (1pt)

b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$. (0,5pt)

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = |z_n - 2|$. Montrer que la suite (V_n) est géométrique puis déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la suite (V_n) est convergente. (0,5pt)

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $d_n = \|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$. Montrer que $d_n = V_{n+1}$ puis calculer, en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$, en donner une interprétation géométrique. (0,5pt)

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction numérique f_n définie par : $f_n(x) = \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}$ où n est un entier naturel. Soit C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Dresser le tableau de variation de f_0 où $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. (1pt)

b) Montrer que C_0 admet deux asymptotes horizontales que l'on déterminera. (0,5pt)

c) Montrer que le point $\Omega(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe C_0 puis construire C_0. (0,5pt)

2.a) Vérifier que pour tout réel x : $f_1(x) = f_0(-x)$. En déduire une transformation géométrique simple qui permet de construire C_1 à partir de C_0. (0,5pt)

b) Vérifier que pour tout réel x : $f_1(x) = 1 - f_0(x)$. En déduire une transformation géométrique simple qui permet de construire C_1 à partir de C_0. (0,5pt)

c) Construction C_1 à partir de C_0 dans le repère précèdent. (0,25pt)

3. On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

a) Calculer U_0 et U_1. (0,5pt)

b) Prouver que pour tout entier naturel $n > 1$ on a : $0 < U_n < \frac{1}{n-1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$. (0,5pt)

4. On pose pour tout entier naturel non nul n : $V_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$ et $V_0 = 1$.

Soit $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$.

a) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul on a : $U_{n+1} + U_n = |V_n|$. (0,25pt)

b) Prouver que pour tout entier naturel n non nul on a : $|S_n - U_0| = |U_{n+1}|$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. (0,5pt)

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et de coté a. Soit G le centre de gravité de ce triangle et soit D le symétrique de A par rapport à C.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes. Elle sera complétée au fur et à mesure. (1pt)

2.a) Prouver qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en C et B en D. (0,5pt)

b) Préciser un angle de r et déterminer son centre E puis le lacer sur la figure. (0,5pt)

3. Prouver que les points A, B, D et E sont cocycliques, préciser le centre et le rayon de ce cercle puis le construire. (0,5pt)

4. Soit s la similitude directe de centre B et transforme D en C.

a) Déterminer un angle et le rapport de s. (0,5pt)

b) Déterminer l'image du triangle BDE par $s \circ s$. (0,5pt)

5. On pose $f = r \circ s$ et $g = s \circ r$.

a) Préciser et construire $f(B)$, $f(E)$, $g(B)$ et $g(A)$. (0,5pt)

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et g. (0,75pt)

c) Démontrer que les cercles de diamètres respectifs $[AG]$, $[BC]$, $[CE]$ et $[DB]$ ont un point commun. Quelle est la particularité de ce point ? (0,25pt)

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = 2x - 3 + \ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Vérifier que l'ensemble de définition de f est IR^*. (0,5pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, interpréter graphiquement; (0,5pt)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (0,5pt)

d) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une notée D est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D. (0,75pt)

2.a) Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{2(x-1)}{x}\varphi(x)$ où φ est une fonction strictement positive pour tout $x \neq 0$ à déterminer. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,5pt)

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes α, β et γ dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1}. (0,75pt)

d) Construire (C). (0,25pt)

3. On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe et les droites d'équations respectives : $y = 2x - 3$, $x = 2$ et $x = 1+\sqrt{3}$.

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{1+(x-1)^2}$. (0,5pt)

b) Calculer $A = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$. (0,5pt)

c) En posant $x = 1+\tan t$ pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$; calculer $B = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2}{1+(x-1)^2}dx$. (0,5pt)

d) Déduire de ce qui précède le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire. (0,25pt)

Fin