RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2010 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	(U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $U_5=17$ alors :	$U_{10}=34$	$U_{10}=32$	$U_{10}=85$
2	(U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 10$ et de premier terme $U_0=\frac{11}{2}$ si $U_0+U_1+\cdots.+U_n=2010$ alors :	$n = 19$	$n = 20$	$n = 21$
3	Si $S_n = 1+2+2^2+\cdots.+2^n$ alors :	$s_n = 1-2^n$	$s_n=2^{n+1}-1$	$s_n = 2^n-1$
4	La suite de terme général $U_n=\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^2}$	Converge vers 1	Ne converge pas	Converge vers 0
5	La suite de terme général $U_n=\frac{10^n}{n!}$	Croissante	Décroissante	Non monotone
6	Sooient (U_n) et (U_n) deux suite numériques telles que $U_n \leq v_n$ .Si (U_n) est croissante	(U_n) est bornée	(V_n) est bornée	(V_n) est divergente

Recopie sur la feuille et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (4 points)

1 .Résoudre dans C l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2-4z+13=0$ et soient $z_1$et z_2 ses solutions telles que $I_m(z_1)>0$.

2 .On considère dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives :
$z_A=1+z_1$ et $z_B=i+z_2$

a) Écrire les nombres z_A et $z_B$sous forme algébrique et trigonométrique

b) Représenter dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les points A et B. Déterminer la nature du triangle OAB.

c) Déterminer et placer le point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme.

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan d'affixe z tel que le complexe $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}$ soit imaginaire.

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm .

1a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$et $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ et interpréter graphiquement

2a) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f
b) Dresser le tableau de variation de f
3a) Dresser le tableau de variation de ln :$(x \to lnx)$
b) Tracer les courbes (C) et Γ représentative de f et ln dans le repère($O;\vec{\imath},\vec{\jmath}$)
4. Soit h la restriction de f sur $I =]1,+\infty[$
a)Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) Soit C' la courbe de représentative de h^{-1} dans le repère($O;\vec{\imath},\vec{\jmath}$).Etudier la position de (C') avec sa tangente au point d'abscisse$x_0 = 1$
c) Construire (C') repère($O;\vec{\imath},\vec{\jmath}$)
5a) Calculer$A = \int_1^e lnxdx$ (on pourra utiliser une intégration par parties)
b) En déduire l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisse et les droites d'équations respectives$x = 1$ et $x = e$

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction numérique f définie $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm
1a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 0^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
b) En déduire que la courbe (C) possède trois asymptotes dont on donnera des équations
2a) Calculer la dérivée de la fonction f et vérifier que pour tout x non nul : $f'(x) = -\frac{f(x)}{e^x - 1}$
b) Dresser le tableau de variation de f
3a) Montrer que la fonction g restriction de f sur $I =]0,+\infty[$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) Déterminer l'expression de la réciproque g^{-1} de g
4a) Montrer que la courbe (C) possède le point $\Omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ comme centre de symétrie
b) Construire les courbes (C) et (C') représentatives des fonctions f et g^{-1} dans le repère($O;\vec{i},\vec{j}$)
5a) Déterminer une primitive F de f sur $I =]0,+\infty[$
b) Soit n un entier naturel , $n \geq 1$,U_n l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$ calculer U_n en fonction de n
c) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{n\to +\infty} U_n$

Fin

Corrigé baccalauréat 2010 session complémentaire

Exercice 1 :

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse exacte	B	A	B	C	C	A

Exercice 2 :

1° Résolution de : $z^2-4z+13=0$. $\Delta'=(-2)^2-1\times 13=-9=(3i)^2$; $z_1=2+3i$ et $z_2=2-3i$.

2° a) $z_A=1+z_1=1+2+3i=3(1+i)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

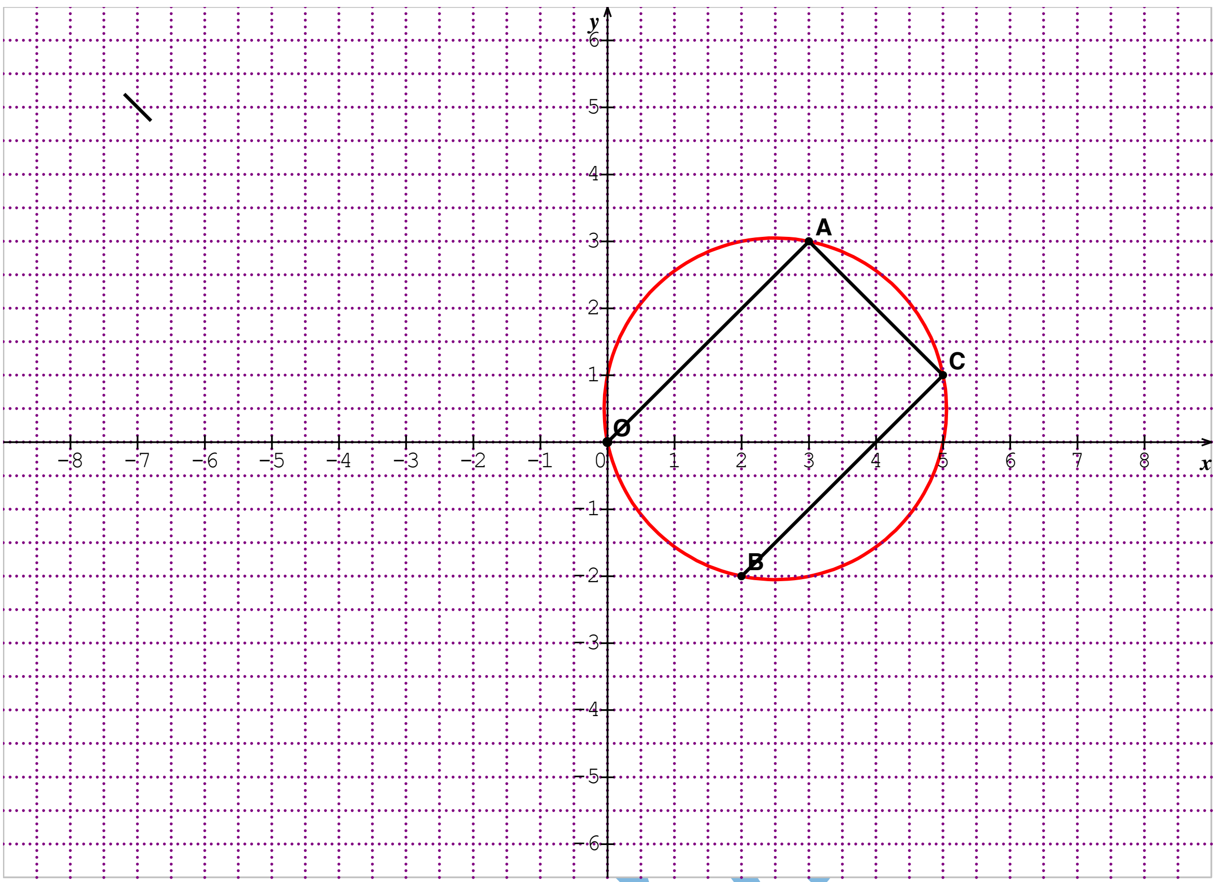
$z_B=i+z_2=i+2-3i=2(1-i)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b) .On remarque que : $\frac{z_A}{z_B}=\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}=\frac{3(1+i)}{2(1-i)}=\frac{3}{2}i$ donc $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle OAB est rectangle en O.

c) .Le quadrilatère OACB est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow$ $z_C-z_A=z_B\Leftrightarrow z_C=z_A+z_B=3+3i+2-2i=5+i$

- $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}=\frac{z-z_B}{z-z_A}$ donc $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}\in(i\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{z-2+2i}{z-3-3i}=0\\ \text{ou}\\ \arg\frac{z-2+2i}{z-3-3i}=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}M=B\\ \text{ou}\\ \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{cases}$. L'ensemble est le cercle de diamètre $[AB]$, privé du point A.



Exercice 3 :

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

1° a) On a : $f(x)=\frac{1+x\ln x}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$. La droite d'équation : $x=0$ est une asymptote verticale.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Les courbes de f et de $\ln x$ sont voisines en $+\infty$, c'est-à-dire que la branche infinie de (C), en $+\infty$, est de direction (Ox).

2° a) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}$.

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$; $f(1)=1$

Le TV de f :

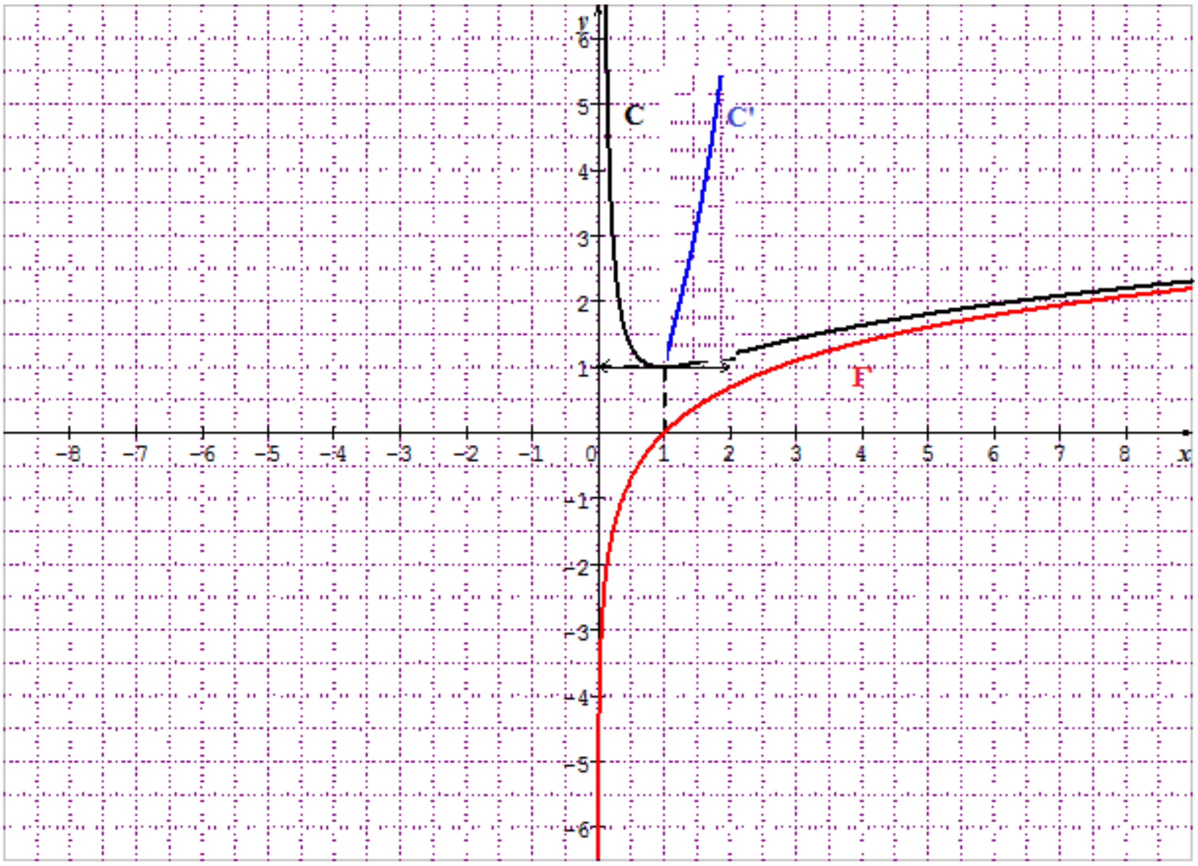
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	0

3° a)Le TV de f :

x	0	$+\infty$

$1/x$		$+$
Lnx		$-\infty \nearrow +\infty$

b) Représentation de (C)



3° a) La restriction h de f , à l'intervalle $[1;+\infty[$, est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $]0;1]$.

b) Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $x=1$ donc verticale. La courbe (C') est à droite de cette tangente.

c) Pour le tracé de (C'), voir figure.

5° a) Soit $\int_1^e \ln x dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_1^e \ln x dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e-[x]_1^e = e-e+1=1$.

b) L'aire demandée est $S=\int_1^e f(t)dt = \int_1^e \dfrac{1}{t}dt + \int_1^e \ln t dt = [\ln t]_1^e + 1 = 2$.

Exercice 4 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

1° a) Le signe de e^x-1 est :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
e^x-1	$-$ 0 $+$

Donc $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x}{e^x-1}=\text{"}\dfrac{1}{0^-}\text{"}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x}{e^x-1}=\text{"}\dfrac{1}{0^+}\text{"}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=\text{"}\dfrac{0}{-1}\text{"}=0$;
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-e^{-x}}=1$

b) La courbe (C) possède trois asymptotes, à savoir : La droite d'équation : $x=0$ une asymptote verticale, les droites d'équations : $y=0$ et $y=1$ des asymptotes horizontales respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

.2° a) $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{e^x-1}\times\dfrac{1}{e^x-1}=-\dfrac{f(x)}{e^x-1}$.

b) Le TV de f :

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 1$

3° a) La restriction g de f, à l'intervalle $]0;+\infty[$, est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J=]1;+\infty[$.

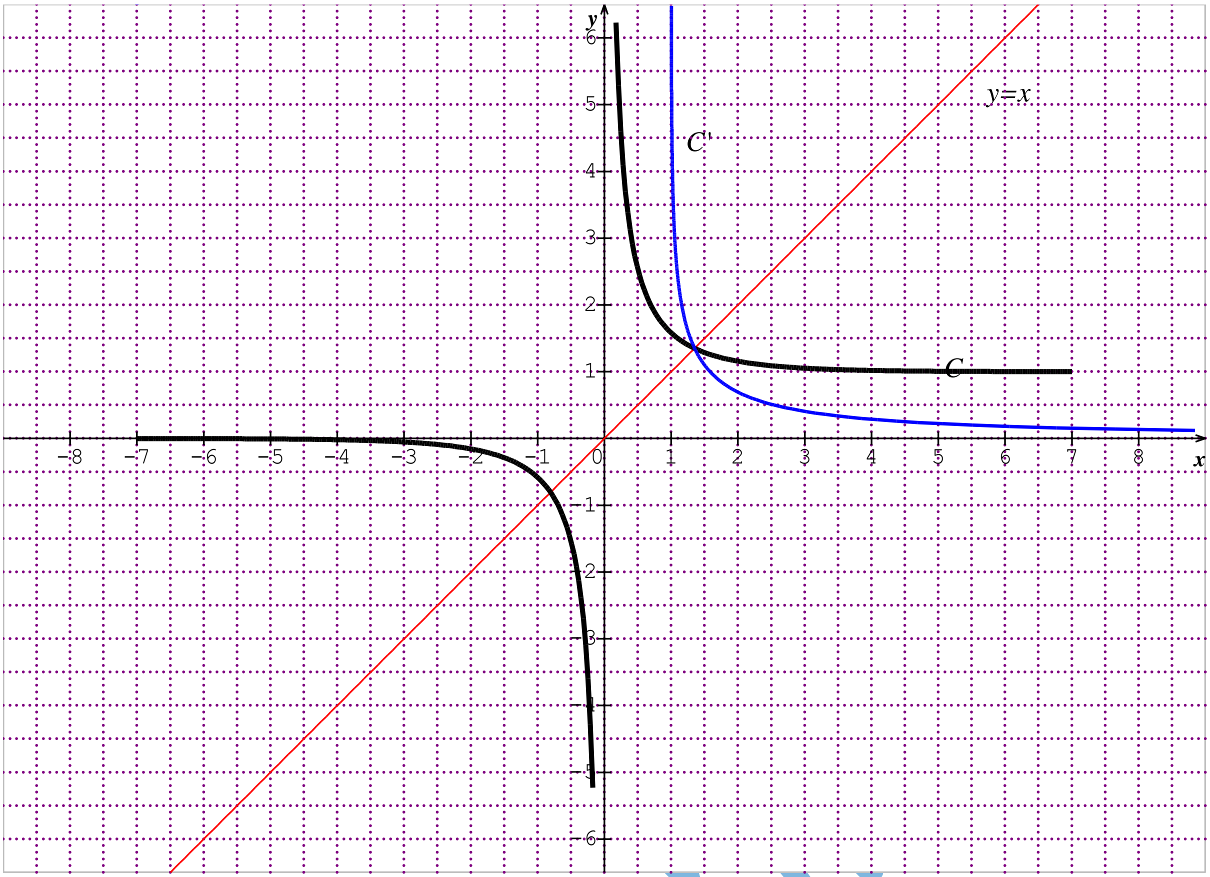
b) Soit $x\in J$ et $t\in I$ tels que $g(t)=x$ alors $g^{-1}(x)=t$.

$g(t)=\dfrac{e^t}{e^t-1}=x\Leftrightarrow xe^t-x=e^t\Leftrightarrow(x-1)e^t=x\Leftrightarrow e^t=\dfrac{x}{x-1}\Leftrightarrow t=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.L'expression de g^{-1} est : $\forall x\in J$,$g^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

4° a) $\Omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie si, $f(2\times0-x)+f(x)=2\times\dfrac{1}{2}$ (1).

$f(-x)+f(x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}-1}+\dfrac{e^x}{e^x-1}=-\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{e^x}{e^x-1}=\dfrac{e^x-1}{e^x-1}=1$, donc (1) est vérifié et par suite $\Omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

b) Tracés :



5° a) Pour $x \in I$, f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x - 1$. Une primitive de f est : $F(x) = \ln(e^x - 1)$.

b) $U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = [F(x)]_{\frac{1}{n}}^{1} = F(1) - F\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(e-1) - \ln\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln\left(\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0^+$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\right) = +\infty$. La limite de (U_n) est l'aire du domaine plan limité par (C), (Ox), (Oy) et la droite : $x = 1$.