| République Islamique de Mauritanie<br>Ministère de l'Education Nationale<br>Direction des Examens et des Concours<br>**Service des Examens** | **Baccalauréat 2016**<br>**Session Complémentaire** | Honneur – Fraternité – Justice<br>**Séries : C & TMGM**<br>**Epreuve: Mathématiques**<br>**Durée: 4 heures**<br>**Coefficients: 9 & 6** |
|---|---|---|

**Exercice 1 (5 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe $z$ on pose : $P(z)=z^3-(1+3i)z^2+2iz+6-2i$ .

1.a) Calculer $P(1-i)$. (0,5 pt)

b) Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$ on a : $P(z)=(z-1+i)(z^2+az+b)$. (0,5 pt)

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. (0,75 pt)

2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-1+i$, $z_B=1-i$ et $z_C=1+3i$.

a) Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC. (0,75 pt)

b) Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$. (0,25 pt)

c) Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma$ des points M du plan tels que :

$$2MA^2+MB^2+MC^2=16.$$ (0,25 pt)

d) Déterminer et construire l'ensemble $\Delta$ des points M du plan tels que :

$$-2MA^2+MB^2+MC^2=16.$$ (0,25 pt)

3) Soit s la similitude directe de centre C qui transforme A en B.

a) Déterminer l'écriture complexe de s. (0,25 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de s. (0,5 pt)

4) On considère la parabole P de foyer A et de directrice (BC).

a) Déterminer l'axe focal et le sommet de P. (0,5 pt)

b) Tracer P et P' dans le repère précédent où $P'=s(P)$ . (0,25 pt)

c) Donner des équations cartésiennes de P et P' dans le repère précédent. (0,25 pt)

**Exercice 2 (5 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

Soit $(C)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Vérifier que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. (0,75 pt)

b) Interpréter les limites précédentes. (0,5 pt)

2.a) Dresser le tableau de variation de f et représenter sa courbe $(C)$. (0,75 pt)

b) Calculer l'aire A du domaine plan délimité par $(C)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$. (0,25 pt)

3) Soit la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}$ où n est entier naturel non nul.

Montrer que pour tout $x\in[-1;0]$ on a : $0\le f_n(x)\le\frac{e}{n!}$. (0,5 pt)

4) Soit la suite $(I_n)$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $I_n=\int_{-1}^{0}f_n(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^n e^{-x}}{n!}dx$.

a) En interprétant graphiquement $I_1$, donner sa valeur (On pourra utiliser A.2)). (0,25 pt)

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $I_{n+1}=I_n-\frac{1}{(n+1)!}$. (0,5 pt)

5) Soit la suite $(U_n)$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $U_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $I_n=e-U_n$. (0,5 pt)

b) Démontre que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $0\le I_n\le\frac{e}{n!}$ . En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$. (0,5 pt)

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. (0,5 pt)

**Exercice 3 (5 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{6e^{x}}$.

Soit $(C)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Vérifier que f est impaire et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (0,75 pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. (0,5 pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0, 5 pt)

d) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions dont l'une $\alpha$ vérifie $2,8<\alpha<2,9$ (0,5 pt)

2.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera. (0,25 pt)

b) Vérifier que pour tout réel x : $(f(x))^2-(f'(x))^2=-\dfrac{1}{9}$. En déduire l'expression de $(f^{-1})'(x)$. (0,5 pt)

c) Soit x un réel quelconque. Exprimer l'intégrale $I(x)=\int_0^x \dfrac{3}{\sqrt{9t^2+1}}dt$ en fonction de $(f^{-1})(x)$. (0,25 pt)

3) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Pour tout point M(x,y) on note $r(M)=M'$ et $r(C)=C_1$

a) Donner l'expression complexe de la rotation r puis écrire les coordonnées x',y' de M' en fonction de x et y. (0,5 pt)

b) Montrer que $(C_1)$ est la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\ln(-3x+\sqrt{9x^2+1}).$$ (0,25 pt)

c) Montrer que pour tout réel x , $h(-x)=f^{-1}(x)$. On note $(C')$ la courbe représentative de $f^{-1}$ dans le repère précédent. (0,25 pt)

4.a) Montrer que les courbes $(C)$ et $(C')$ se coupent en deux points autres que l'origine. (0,25 pt)

b) Construire, dans le même repère les courbes $(C)$ et $(C')$ et calculer en fonction de $\alpha$ l'aire du domaine plan délimité par ces deux courbes ($\alpha$ est le nombre indiqué en 1.d). (0,5 pt)

**Exercice 4 (5 points)**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre G et de coté a $(a>0)$. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ et $[AI]$ et D le symétrique de I par rapport à J.

1) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,75 pt)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation $r_1$ qui transforme B en C et I en J. (0,5 pt)

b) Déterminer $r_1(K)$ et déterminer le centre et un angle de $r_1$. (0,75 pt)

3) Soit $r_2$ la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $r_2(B)$ et $r_2(I)$. (0,5 pt)

b) En déduire $r_2(C)$. (0,25 pt)

4.a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f du plan qui transforme B en C et I en J. (0,5 pt)

b) Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. (0,5 pt)

c) Caractériser la transformation $g=f\circ r_1^{-1}$. (0,25 pt)

5) On considère la transformation $\sigma=r_2\circ r_1$ et on pose $\sigma(M)=M'$.

a) Caractériser $\sigma$. (0,25 pt)

b) Montrer que si $M\neq M'$ alors la droite $(MM')$ passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,25 pt)

c) En déduire que le quadrilatère AMIM' est un parallélogramme. (0,25 pt)

6) Pour tout point M du plan, on pose $r_1(M)=M_1$ et $r_2(M)=M_2$.

Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points M du plan pour lesquels les points M, $M_1$ et $M_2$ sont alignés (On pourra utiliser l'angle $(\overrightarrow{MG};\overrightarrow{MK})$). (0,25 pt)

**Fin.**