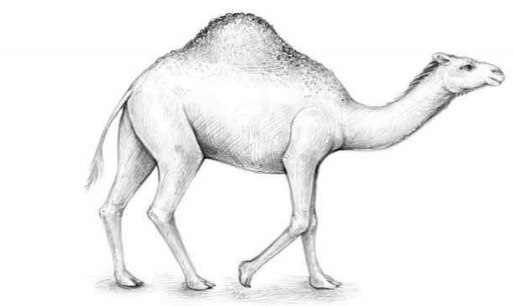

# La bosse des maths pour les bossus

## 145 bosses dégraissées



Sous la supervision
du professeur Sidi Major

**Dépôt légal**
**2391/2021**
**Bibliothèque Nationale de Mauritanie**

# La bosse des maths en poésie

La fameuse bosse des maths tu l'as à la naissance
Si par chance ta fée n'était pas en vacances.
Ce don naturel je n'en fus jamais pourvu,
Mes absences terminaient collé en garde à vue.
La seule évocation du fameux nombre pi,
Je levais ma paluche pour dire madame pipi.
Je prétextais aussi être atteint de courante,
Pour m'éclipser du cours et prendre... la tangente.
Les grecs Thalès, Pythagore et leurs théorèmes
J'vous laisse imaginer s'ils m'ont posé... problème.
Je passe sous silence les terribles fractions
Qui tentèrent de rentrer chez moi par effraction.
Quant aux équations dites à plusieurs inconnues
Se solutionnaient en heures de retenue.
Et pourtant vingt ans plus tard....
Les superficies chez moi ont enfin trouvé grâce,
Puisque aujourd'hui je suis technicien... de surface.

*Internaute anonyme*

# Qui sont ces bossus dégraisseurs?

Les dégraissages (corrigés) de ces bosses (excercices) sont produits par une équipe de professeurs chevronnés dans le cadre d'un échange collégial au sein d'un groupe WhatsApp portant le nom « La bosse des maths ». Il s'agit des professeurs et inspecteurs :

- Ahmed Med Vakhim
- Sidia Bouceif
- Md El Hacen Youba
- Ahmed Salem Memah
- Mohamed Fah
- Md Taghyoullah Md Vadel
- Ahmed Sidaty Sidi Mahmoud
- Cheikh Sidia Md Dadah
- Brahim Haïmouda
- Yahya Jiddou
- Taregh Ahmedou Salem
- Md Mokhtar Dahi
- Daha Mustapha
- Alhoucein Md Salem
- Md Salem Jiyid
- Sidi Major

# Dédicace à:

Tahya Tiki Demba

Mariem Oumarou

Md Vadel Taleb

Md Lemine Hasnatt

Khalil Md Abdallahi

qui savent bien pourquoi !!!

## Bosse 1

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ .**

### Dégraissage

L'écriture $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ suppose $x > 0$. Sous cette réserve, l'égalité $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ équivaut à :

$$x^x \ln x = x \ln x^x = x^2 \ln x$$

ou encore :

$$(x^x - x^2) \ln x = 0$$

Ce qui donne : $x^x - x^2 = 0$ ou $\ln x = 0$.

- $\ln x = 0 \implies x = 1$
- $x^x - x^2 = 0 \iff x^x = x^2 \iff x \ln x = 2 \ln x$
  $\iff x = 2 \text{ ou } x = 1$

L'équation donnée admet donc deux solutions : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

## Bosse 2

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $a^{b^x} = c$ (discuter selon $a$, $b$, $c$).**

### Dégraissage

L'écriture $a^{b^x} = c$ n'a de sens que si $a$ et $b$ sont strictement positifs.

- Si $c \leq 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $c > 0$, l'équation équivaut à :

$$b^x \ln a = \ln c.$$

  - Si $a = 1$ et $c = 1$, tout réel $x$ est solution.
  - Si $a = 1$ et $c \neq 1$, l'équation n'a pas de solution.
  - Si $a \neq 1$, on peut écrire :

$$b^x = \frac{\ln c}{\ln a}.$$

    - Si $\ln c / \ln a \leq 0$, l'équation n'a pas de solution.
    - Si $\ln c / \ln a > 0$, l'équation s'écrit :

$$x \ln b = \ln\left(\frac{\ln c}{\ln a}\right)$$

- Si $b = 1$ et $a \neq c$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $b = 1$ et $a = c$, tout réel $x$ est solution.
- Si $b \neq 1$, l'équation admet une solution unique :

$$x = \frac{\ln\left(\frac{\ln c}{\ln a}\right)}{\ln b}.$$

## Bosse 3

**Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme $\boldsymbol{P}$ tel que, pour tout entier $\boldsymbol{n}$ :**

$$\boldsymbol{P(n) = \ln(n!)}$$

## Dégraissage 1

On suppose qu'il existe un polynôme $P$ tel que pour tout entier naturel $n$ : $P(n) = \ln(n!)$.
On a : $P(0) = P(1) = 0$, et donc $0$ et $1$ sont des racines de $P$.
D'où l'existence d'un polynôme $R$ tel que pour tout entier $n$ :

$$P(n) = n(n-1)R(n) = \ln(n!)$$

Donc pour $n \geq 2$ :

$$R(n) = \frac{P(n)}{n(n-1)} = \frac{\ln(n!)}{n(n-1)} \leq \frac{n\ln(n)}{n(n-1)} = \frac{\ln(n)}{n-1} \underbrace{\longrightarrow}_{n \to +\infty} 0$$

D'où $deg(P) < deg[n(n-1)] = 2$, ce qui n'est possible que si le polynôme $P$ est nul. Mais ce dernier cas se contredit avec le fait que $P(2) = \ln(2!) = \ln 2 \neq 0$.
Donc il n'existe aucun polynôme $P$ tel que pour tout entier $n$ :

$$P(n) = \ln(n!).$$

## Dégraissage 2

Si un tel polynôme P existe alors on aurait :

$$P(n) = \ln(n!) \leq n \ln n \leq n^2.$$

Et donc pour tout $n \geq 1$ :

$$0 \leq \frac{P(n)}{n^2} \leq 1$$

Il s'ensuit que $deg(P) \leq 2$ sinon $\lim_{n\to+\infty} P(n)/n^2 = +\infty$, ce qui n'est pas le cas.
Comme $P(0) = P(1) = 0$, il existe une constante réelle $a$ telle que pour tout entier $n$ :

$$P(n) = an(n-1).$$

Pour $n = 2$, on a $P(2) = 2a = \ln 2$, c'est-à-dire $a = (\ln 2)/2$.
Pour $n = 3$, on a $P(3) = 6a = \ln(3!) = \ln 2 + \ln 3$.
D'où :

$$6 \times \frac{\ln 2}{2} = \ln 2 + \ln 3$$

ou encore : $2\ln 2 = \ln 3$, soit enfin $\ln 4 = \ln 3$, ce qui est faux.
Donc il n'existe aucun polynôme vérifiant les conditions de la bosse.

## Bosse 4

**On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon 1. Soient $A$ et $B$ deux points quelconques de $\mathcal{C}$.**
**Déterminer la valeur moyenne de la corde $AB$.**

## Dégraissage

On peut, sans nuire à la généralité, fixer le point $A$ et faire varier le point $B$ sur $\mathcal{C}$.
Si on pose $\alpha = mes(\widehat{AOB})$ alors on peut appliquer Al Kashi :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos\alpha$$

avec $\alpha$ variant de $0$ à $\pi$ et $OA = OB = 1$.
D'où $AB^2 = 2 - 2\cos\alpha$, et par suite :

$$AB = \sqrt{2 - 2\cos\alpha} = \sqrt{2(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

puisque $0 \leq \alpha/2 \leq \pi/2$ et $\sin\frac{\alpha}{2} \geq 0$.
Par définition, la valeur moyenne de la distance $AB$ est égale :

$$\mu = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi AB d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin\frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{1}{\pi}\left[-4\cos\frac{\alpha}{2}\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi}.$$

**Remarque :**
Si le cercle $\mathcal{C}$ avait pour rayon $R$, la valeur moyenne de la corde $AB$ serait $4R/\pi$.

## Bosse 5

**On considère un triangle dont les côtés mesurent $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ et dont les mesures des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, données dans cet ordre, sont en progression arithmétique.**
**Trouver la valeur de :**

$$\frac{a}{c}\sin 2\widehat{C}+\frac{c}{a}\sin 2\widehat{A}$$

### Dégraissage

Selon les données de la bosse :

$$\hat{A}+\hat{C}=2\hat{B} \quad \text{et} \quad \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$$

D'où $\hat{B}=\pi/3$.
D'autre part, la loi des sinus nous permet d'écrire :

$$\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{C}}{c} \iff \frac{c}{a}=\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\frac{a}{c}\sin 2\hat{C}+\frac{c}{a}\sin 2\hat{A}&=\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{C}}\times 2\cos\hat{C}\sin\hat{C}+\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}\times 2\cos\hat{A}\sin\hat{A}\\&=2\left[\cos\hat{A}\sin\hat{A}+\cos\hat{C}\sin\hat{C}\right]=2\sin\left(\hat{A}+\hat{C}\right)\\&=2\sin 2\hat{B}=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}\end{aligned}$$

## Bosse 6

**Trouver les entiers naturels $\boldsymbol{n}$ tels que $\boldsymbol{n}!+5$ est un carré parfait.**

### Dégraissage

- Pour $n=0,\ 1,\ 2$, on a respectivement :

  $$n!+5=6, \qquad 6, \qquad 7$$

  Donc $n!+5$ n'est pas un carré parfait.
- Pour $n\geq 3$, on a $n!\equiv 0\ [mod.3]$, d'où : $n!+5\equiv 2\ [mod.3]$.

Or, le carré de tout entier est congru à $0$ ou à $1$ modulo $3$, d'où il n'existe aucun entier naturel $n$ pour lequel $n! + 5$ est un carré parfait.

## Bosse 7

**Soient $a, b, c, d$ des entiers naturels tels que :**

$$a + b + c + d = 63.$$

**Quelle est la valeur maximale de $ab + bc + cd$ ?**

### Dégraissage

On a : $\forall x, y \geq 0,\ \sqrt{xy} \leq (x + y)/2$, d'où :

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} \leq \frac{(a + c) + (b + d)}{2} = \frac{63}{2}$$

Donc :

$$(a + c)(b + d) \leq \left(\frac{63}{2}\right)^2 = \frac{3969}{4}$$

Soit, après développement et transposition de $ad$ :

$$ab + bc + cd \leq \frac{3969}{4} - ad \leq \frac{3969}{4}$$

Et donc :

$$ab + bc + cd \leq Ent\left(\frac{3969}{4}\right) = 992$$

D'autre part, pour $a = c = 16$, $b = 3$ et $d = 0$, on trouve :

$$ab + bc + cd = 16 \times 16 + 16 \times 3 + 16 \times 0 = 992$$

Donc la valeur maximale de $ab + bc + cd$ est $992$.

## Bosse 8

**Trouver tous les entiers naturels $n$ tels que $(n - 1)!$ ne soit pas un multiple de $n$.**

### Dégraissage

- Si $n$ est premier alors $n$ ne divise pas $(n - 1)!$.
  Donc tout entier premier est solution du problème.
- Si $n$ n'est pas premier, on envisage deux cas :

① $n = a \times b$ avec $1 < a < b < n$.

Donc comme $a, b \leq n - 1$ alors $a$ et $b$ sont des facteurs dans $(n-1)!$ et par suite $a \times b$ divise $(n-1)!$.

② $n = a^2$ avec $a$ premier.

On a $n - 1 = a^2 - 1 > 2a$ pour tout $a > 2$.

Donc parmi les facteurs composant $(n-1)!$ figurent les deux entiers $a$ et $2a$.

Donc $a \times 2a = 2a^2 = 2n$ divise $(n-1)!$ et par suite $n$ divise $(n-1)!$.

Le seul cas $a = 2$ (premier) a été omis dans ce 2ème point c'est-à-dire le cas $n = 2^2 = 4$. Il suffit de vérifier :

Pour $n = 4$, $(n-1)! = 3! = 6$ et $4$ ne divise pas $6$.

En conclusion, les entiers naturels $n$ tels que $n$ ne divisent pas $(n-1)!$ sont les nombres premiers et le nombre $4$.

## Bosse 9

**Un triangle rectangle a ses côtés mesurés par des entiers. Démontrer que l'un des cathètes (les côtés de l'angle droit) a une longueur multiple de 3.**

### Dégraissage

Si $a$, $b$, $c$ sont les mesures des côtés du triangle ($c$ celle de l'hypoténuse), on peut écrire :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Si a et b ne sont pas divisibles par 3, le petit théorème de Fermat nous légitime l'égalité modulaire :

$$a^{3-1} - 1 + b^{3-1} - 1 \equiv 0 \ [mod. 3]$$

D'où :

$$c^2 - 2 \equiv 0 \ [mod. 3]$$

ou encore :

$$c^2 \equiv 2 \ [mod. 3]$$

Ce qui est impossible puisque le carré de tout entier est congru à $0$ ou à $1$ modulo $3$. Donc au moins $a$ ou $b$ est multiple de $3$.

## Bosse 10

**Montrer que parmi $n+1$ entiers de l'intervalle $[\![1,2n]\!]$, il en existe toujours un qui est multiple de l'autre.**

### Dégraissage

Soient $n+1$ entiers $a_1$, $a_2$, …, $a_{n+1}$ tels que :

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} \leq 2n$$

Chacun des entiers $a_i$ peut être écrit sous la forme $a_i = 2^{k_i}\beta_i$ où $\beta_i$ est un entier impair et $i$ variant de $1$ à $n+1$.
Or, on sait qu'il n'existe que $n$ entiers naturels impairs dans $[\![1,2n]\!]$ et donc selon le principe des tiroirs il existe deux indices $i_1$ et $i_2$ tels que $i_1 \neq i_2$ et $\beta_{i_1} = \beta_{i_2}$. Notons $\beta = \beta_{i_1} = \beta_{i_2}$
Donc $a_{i_1} = 2^{k_{i_1}}\beta$ et $a_{i_2} = 2^{k_{i_2}}\beta$.
Si, par exemple, $k_{i_1} < k_{i_2}$ alors :

$$a_{i_2} = 2^{k_{i_2}-k_{i_1}} \times a_{i_1}$$

et donc $a_{i_1}$ divise $a_{i_2}$.
**Remarque :**
*Ce problème a été posé la 1ère fois par Paul ERDÖS (1935) et résolu par Martha Wachs-BERGER (1937).*

## Bosse 11

**Trouver tous les polynômes $P$ de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient :**

$$\boldsymbol{P(X^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}).\mathrm{P}(\mathrm{X}+1).}$$

### Dégraissage

On remarque tout d'abord que le polynôme nul vérifie la condition souhaitée.
Soit $P$ un polynôme non nul vérifiant la condition :

$$P(X^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}).\mathrm{P}(\mathrm{X}+1).$$

Si $\beta$ est une racine de $P$, alors :

$$P(\beta^2) = \mathrm{P}(\beta).\mathrm{P}(\beta+1) = 0$$

donc $\beta^2$ est aussi une racine de $P$. Ainsi de suite, on établit par récurrence que $\beta^{2k}$ est une racine de P pour tout $k$ entier naturel.

On remarque de même que :

$$P((\beta-1)^2) = \mathrm{P}(\beta-1).\mathrm{P}((\beta-1)+1) = \mathrm{P}(\beta-1).\mathrm{P}(\beta) = 0$$

donc $\beta - 1$ est aussi racine de P, ainsi que $(1-\beta)^{2k}$ pour tout $k$ entier naturel.

Or un polynôme non nul ne peut avoir une infinité de racines, donc il faut que les suites $\beta^{2k}$ et $(1-\beta)^{2k}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Donc, pour cela, $\beta$ (comme $\beta - 1$) doit être nul ou être une racine de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Cherchons donc les complexes $\beta$ qui vérifient simultanément :

- $\beta$ est soit $0$, soit une racine de l'unité ;
- $\beta - 1$ est soit $0$, soit une racine de l'unité.

On voit que $0$ et $1$ vérifient ces conditions.
On pose $\beta = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
$\beta$ et $\beta - 1$ racines de l'unité implique que :

$$x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 = 1$$

d'où $x = 1/2$, auquel cas $y^2 = 1 - 1/4 = 3/4$, et donc :

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc seuls quatre nombres complexes vérifient les conditions mentionnées et sont susceptibles d'être racines de $P$ et par suite :

$$\beta \in \Omega = \left\{1, \qquad 0, \qquad -j = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Mais comme on sait que si $\beta$ est racine de $P$ alors $\beta^2$ est aussi racine de $P$, et que $(-j)^2 = j^2 \notin \Omega$, $(-j^2)^2 = j^4 = j \notin \Omega$ alors ni $-j$ ni $-j^2$ ne sont des racines de $P$. Le polynôme $P$ admet seulement deux racines $0$ et $1$.

Ainsi $P(X)$ est nécessairement de la forme :

$$P_{a,b}(X) = X^a(X-1)^b$$

Maintenant, on cherche les couples $(a, b)$ d'entiers naturels pour lesquels $P_{a,b}$ vérifie :

$$P_{a,b}(X^2) = P_{a,b}(X) \times P_{a,b}(X+1) \;\; (*)$$

On a :

$$P_{a,b}(X^2) = X^{2a}(X^2-1)^b = X^{2a}(X-1)^b(X+1)^b$$
$$= [X^a(X-1)^b] \times [X^a(X+1)^b]$$

$$= P_{a,b}(X) \times [X^a(X+1)^b]$$

Donc pour que l'égalité $(*)$ soit vérifiée, il faut que :

$$X^a(X+1)^b = P_{a,b}(X+1) = (X+1)^a(X+1-1)^b = (X+1)^a(X)^b$$

Donc on doit avoir nécessairement $a = b$. Réciproquement, on vérifie aisément que le polynôme :

$$P_{a,a}(X) = X^a(X-1)^a$$

satisfait à la condition voulue.

L'ensemble des solutions recherché est donc :

$$\{0\} \cup \{X^a(X-1)^a / \, a \in \mathbb{N}\}.$$

## Bosse 12

**Soit $\boldsymbol{P}$ un polynôme quelconque à coefficients complexes. Montrer que $\boldsymbol{P(X) - X}$ divise $\boldsymbol{(P(X)) - X}$ .**

## Dégraissage

On note :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

Donc, on a :

$$P(P(X)) - X = P(P(X)) - P(X) + P(X) - X$$

Comme $P(X) - X$ est divisible par lui-même, alors il suffit de monter que $P(P(X)) - P(X)$ est divisible par $P(X) - X$.

On a :

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i P^i(X) - \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \left[P^i(X) - X^i\right]$$

Or on sait que si $M$ et $N$ sont deux éléments de $\mathbb{C}[X]$, on a :

$$M^i - N^i = (M-N)\left(M^{i-1} + M^{i-2}N + \cdots + MN^{i-2} + N^{i-1}\right)$$

et donc $M^i - N^i$ est divisible par $M - N$. En appliquant ce résultat à $M = P(X)$ et $N = X$, on déduit que $P^i(X) - X^i$ est divisible par $P(X) - X$ pour tout $i \geq 1$, et par suite la somme :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\left[P^i(X) - X^i\right]$$
est divisible par $P(X) - X$.
Donc enfin, $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

## Bosse 13

**Si $\boldsymbol{M}$ est une matrice carrée, on appelle exponentielle de la matrice $\boldsymbol{M}$ la matrice définie par :**

$$\mathbf{exp}(\boldsymbol{M}) = \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}.$$

**Déterminer l'exponentielle de la matrice :**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

### Dégraissage

On note $(e_1, e_2)$ la base canonique. Pour calculer l'exponentielle d'une matrice, il faut commencer par l'exprimer sous la forme la plus simple possible : diagonale, triangulaire, ou autre.
Ici, on a $A = 6Id + B$ avec :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Mais cette matrice est de carré nul ($B^2 = 0_2$), en utilisant la commutativité de $6Id$ et $B$ :

$$(6Id + B)^n = \sum_{k \geq 0} C_n^k B^k (6Id)^{n-k}$$

Donc : $(6Id + B)^n = C_n^0 6^n Id + 6^{n-1} C_n^1 B = 6^n Id + 6^{n-1} nB$
D'où :

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \sum_k \frac{A^k}{k!} \\ &= \sum_k \frac{6^k Id + 6^{k-1} kB}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{6^k}{k!} Id + \sum_{k \geq 0} \frac{6^{k-1} k}{k!} B \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\geq 0} \frac{6^k}{k!} Id + \sum_{k\geq 1} \frac{6^{k-1}}{(k-1)!} B \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{6^k}{k!} Id + \sum_{k\geq 0} \frac{6^k}{k!} B \\
&= e^6 Id + e^6 B
\end{aligned}
$$

Enfin, on a :

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 2e^6 & -e^6 \\ e^6 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Bosse 14

**Déterminer tous les entiers $n$ tels que $(n-1)!$ ne soit pas divisible par $n^2$.**

## Dégraissage

- Évidemment tout nombre premier répond à la question.
- De même, d'après la bosse $8$, tout carré d'un nombre premier répond aussi à la question, sauf peut-être $4$, mais $3!$ n'est pas divisible par $4^2 = 16$ et cette exception disparait.
- Si $n$ est le produit de deux facteurs inégaux $pq$ au moins égaux à 3, $(3 \leq q < p)$,

  $$3q < pq = n \text{ et donc } 3q \leq n-1.$$

  Dans le produit $(n-1)!$ figurent donc $q$, $2q$ et $3q$, ainsi que $p$ et $2p$. Comme au moins l'un des deux nombres $2q$ et $3q$ n'est pas égal à $2p$, on trouve dans le produit $(n-1)!$ ou bien $q$, $2q$, $p$, $2p$ ou bien $q$, $3q$, $p$,$3p$.

  Dans l'un et l'autre cas, on y trouve en facteur $p^2$ et $q^2$, et ce produit est divisible par $p^2q^2 = n^2$.

Reste à examiner les autres cas :

- Le cas où $n$ est le double d'un nombre premier.

  Dans le produit $(n-1)!$ figure une seule fois le facteur $p$. Il n'est donc pas divisible par $p^2$, ni par $n^2 = 4p^2$.
- Les cas où n n'est pas le produit de deux facteurs inégaux au moins égaux à 3 sont :

$$n = 2 \times 4, \qquad n = 3 \times 3, \qquad n = 2 \times 8$$

On vérifie directement que :

$7!$ n'est pas divisible par $8^2$ ;

$8!$ n'est pas divisible par $9^2$ ;

$15!$ n'est pas divisible par $16^2 = 2^8$ ;

Les entiers cherchés sont donc 8 et 9, les nombres premiers, les carrés des nombres premiers, et les doubles des nombres premiers.

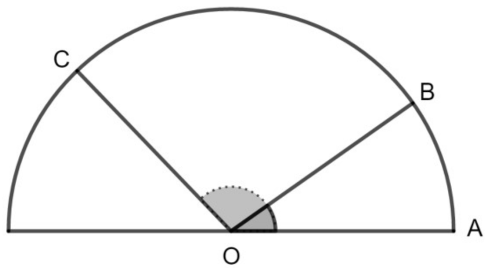
## Bosse 15

**Sur un demi-cercle de rayon 1 et de centre $\boldsymbol{O}$, on place arbitrairement trois points $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$.**

**Démontrer que : $\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OC}}\right\| \geq \mathbf{1}$.**

## Dégraissage

On suppose les points placés dans l'ordre indiqués sur la figure.




Désignons par $b$ et $c$ les mesures des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ avec $0 \leq b \leq c \leq \pi$.

Soit $T$ le point tel que $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Les trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ étant unitaires, on a :

$$OT^2 = 3 + 2(\cos b + \cos c + \cos(c - b))$$

La fonction cosinus est décroissante sur $[0,\pi]$, et donc, pour les valeurs de $c$ comprises entre $b$ et $\pi$, le minimum de $OT^2$ est atteint en $\pi$, et vaut :

$$OT^2 = 3 + 2(\cos b - 1 + \cos(\pi - b)) = 1.$$

## Bosse 16

**Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux réels non nuls. A quelle condition le polynôme $\boldsymbol{x^3+ax+b}$ a une racine double ?**

## Dégraissage

Si un polynôme $P$ admet une racine double $\beta$ alors $\beta$ est une racine du polynôme dérivé $P'$.

On a $P'(x)=3x^2+a$ et donc :

$$\begin{aligned} P(x)=x^3+ax+b &= (3x^2+a)\frac{x}{3}+\left(\frac{2ax}{3}+b\right) \\ &= \frac{x}{3}P'(x)+Q(x) \end{aligned}$$

avec $Q(x)=2ax/3+b$.

Donc pour que $\beta$ soit racine double de $P$, il faut que :

$$\begin{cases} P'(\beta)=0 \\ Q(\beta)=0 \end{cases}$$

$$Q(\beta)=0 \iff \beta=\frac{-3b}{2a}$$

En injectant cette valeur de $\beta$ dans $P'(\beta)$, on trouve :

$$\begin{aligned} P'\left(\frac{-3b}{2a}\right)=0 &\iff 3\left(\frac{-3b}{2a}\right)^2+a=0 \\ &\iff \frac{4a^3+27b^2}{4a^2}=0 \\ &\iff 4a^3+27b^2=0 \end{aligned}$$

## Bosse 17

**Soit $\boldsymbol{P(X)=X^3+pX+q}$ avec $\boldsymbol{p, q}$ dans $\mathbb{C}$, et soient $\boldsymbol{a, b, c}$ les racines de $\boldsymbol{P}$. Déterminer un polynôme $\boldsymbol{Q(X)}$ dont les racines sont $\boldsymbol{a^2, b^2, c^2}$.**

# Dégraissage

Développons le polynôme $P(X)$ :

$P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$

$\quad = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$

Donc par identification des coefficients :

$$a+b+c=0, \qquad ab+bc+ca=p, \qquad abc=-q.$$

Si le coefficient dominant de $Q(X)$ est $1$ alors $Q(X)$ s'écrit :

$Q(X) = (X-a^2)(X-b^2)(X-c^2)$

$\quad = X^3 - (a^2+b^2+c^2)X^2 + (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)X - a^2b^2c^2$

Donc :

$$Q(0) = -a^2b^2c^2 = -q^2.$$

On a :

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\quad = a^2+b^2+c^2+2p$

mais $a+b+c=0$, donc $a^2+b^2+c^2=-2p$.

D'autre part, on a :

$p^2 = (ab+bc+ca)^2$

$\quad = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)$

$\quad = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c) = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

Donc enfin :

$$Q(X) = X^3 - 2pX^2 + p^2X - q^2.$$

## Bosse 18________________________________

**Soient deux réels $a$ et $b$ avec $a \neq 0$. Montrer que :**

$$\boldsymbol{a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a} \geq \sqrt{3}}.$$

# Dégraissage 1

On a :

$$A = a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a} = \left(b+\frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}+a^2$$

$$= a^2+\frac{3}{4a^2}+\left(b+\frac{1}{2a}\right)^2 \geq a^2+\frac{3}{4a^2}$$

D'autre part, par application de l'inégalité $X^2+Y^2 \geq 2XY$, on a également :

$$a^2+\frac{3}{4a^2}=a^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)^2 \geq 2a\frac{\sqrt{3}}{2a}=\sqrt{3}.$$

Et donc en conclusion $A \geq \sqrt{3}$ .

## Dégraissage 2

On suppose $a$ quelconque fixé dans $\mathbb{R}^*$. On pose :

$$A=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}-\sqrt{3}=b^2+\frac{1}{a}.b+a^2+\frac{1}{a^2}-\sqrt{3}$$

Donc $A$ est un trinôme du second degré en $b$. Pour que $A$ soit positif il faut et il suffit que son discriminant $\Delta$ soit négatif (le coefficient de $b^2$ étant positif).

On a :

$$\Delta=\left(\frac{1}{a}\right)^2-4\left(a^2+\frac{1}{a^2}-\sqrt{3}\right)=-4a^2+\frac{-3}{a^2}+4\sqrt{3}$$
$$=-4\left[a^2+\frac{3}{4a^2}-\sqrt{3}\right]=-4\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)^2 \leq 0$$

Donc l'inégalité voulue est bien établie.

## Bosse 19

**Soit $ABC$ un triangle, $G$ son centre de gravité et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Les médianes $(AG)$, $(BG)$ et $(CG)$ recoupent le cercle $\mathcal{C}$ respectivement en $D$, $E$ et $F$.**

**Évaluer le rapport :**

$$\frac{GA}{GD}+\frac{GB}{GE}+\frac{GC}{GF}.$$

## Dégraissage 1

Calculons la puissance du point G par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

On a : $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(G)=\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GF}$

Or, on sait que :

$$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GD} = OG^2 - R^2$$

$$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GE} = OG^2 - R^2$$

$$\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GF} = OG^2 - R^2$$

d'où, tenant compte du fait que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GD}$ sont colinéaires et de sens contraires :

$$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GD} = -GA \times GD$$

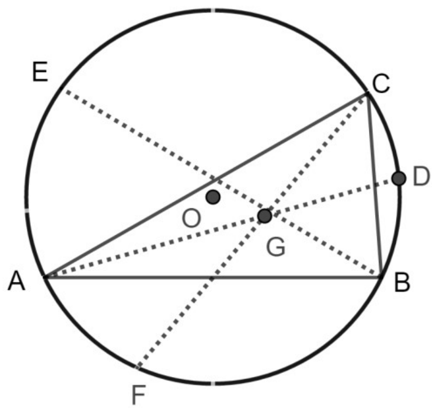
et par suite :

$$GA \times GD = R^2 - OG^2$$

De même, on a :

$$GB \times GE = R^2 - OG^2$$

$$GC \times GF = R^2 - OG^2$$




Ceci étant fait, on peut évaluer maintenant la quantité demandée comme suit :

$$\frac{GA}{GD} + \frac{GB}{GE} + \frac{GC}{GF} = \frac{GA^2}{GA \times GD} + \frac{GB^2}{GB \times GE} + \frac{GC^2}{GC \times GF}$$

$$= \frac{GA^2}{R^2 - OG^2} + \frac{GB^2}{R^2 - OG^2} + \frac{GC^2}{R^2 - OG^2}$$

$$= \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{R^2 - OG^2}$$

D'autre part, on sait que :

$$3R^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

D'où enfin :

$$\frac{GA}{GD} + \frac{GB}{GE} + \frac{GC}{GF} = \frac{3(R^2 - OG^2)}{R^2 - OG^2} = 3.$$

# Dégraissage 2

On se place dans le plan complexe d'origine $O$ (centre du cercle circonscrit à $ABC$), et on suppose, sans nuire à la généralité, que le cercle circonscrit à $ABC$ a pour rayon $1$.
On envisage deux cas :
1$^{\text{er}}$ cas : le triangle $ABC$ est équilatéral ($G = O$)
Dans ce cas, on a : $GA = GD$, $GB = GE$ et $GC = GF$, et donc :

$$\frac{GA}{GD} + \frac{GB}{GE} + \frac{GC}{GF} = 3.$$

2$^{\text{ème}}$ cas : le triangle $ABC$ n'est pas équilatéral
On note $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$ les affixes respectives de $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$.
On a :

$$g = \frac{a+b+c}{3}.$$

Les points $A$, $G$, $D$ étant alignés, on a :

$$\frac{d-a}{\overline{d}-\overline{a}} = \frac{g-a}{\overline{g}-\overline{a}}.$$

De même, vu l'alignement des points $B$, $G$, $E$ d'une part et des points $C$, $G$, $F$ d'autre part, on a :

$$\frac{e-b}{\overline{e}-\overline{b}} = \frac{g-b}{\overline{g}-\overline{b}}, \quad \frac{f-c}{\overline{f}-\overline{c}} = \frac{g-c}{\overline{g}-\overline{c}}.$$

D'autre part, on sait que :

$$\overline{a} = \frac{1}{a}, \qquad \overline{b} = \frac{1}{b}, \qquad \overline{c} = \frac{1}{c}, \qquad \overline{d} = \frac{1}{d}, \qquad \overline{e} = \frac{1}{e}, \qquad \overline{f} = \frac{1}{f}.$$

On a donc :

$$\frac{d-a}{\overline{d}-\overline{a}} = \frac{d-a}{\frac{1}{d}-\frac{1}{a}} = -ad.$$

D'où :

$$d = -\frac{1}{a}\left(\frac{g-a}{\overline{g}-\frac{1}{a}}\right) = \frac{g-a}{1-a\overline{g}}.$$

Donc :

$$GA = |g-a| = \sqrt{(g-a)(\overline{g}-\overline{a})} = \sqrt{\frac{1}{a}(g-a)(a\overline{g}-1)}$$

$$GD = |g - d| = \left|g - \frac{g-a}{1-a\overline{g}}\right| = \left|\frac{a(1-g\overline{g})}{1-a\overline{g}}\right|$$
$$= \sqrt{\frac{a(1-g\overline{g})\overline{a}(1-g\overline{g})}{(1-a\overline{g})(1-\overline{a}g)}} = (1-g\overline{g})\sqrt{\frac{a}{(1-a\overline{g})(a-g)}}$$

Par suite, on peut évaluer le rapport :

$$\frac{GA}{GD} = \frac{1}{1-g\overline{g}}\sqrt{\frac{(a-g)(1-a\overline{g})(g-a)(a\overline{g}-1)}{a^2}} = \frac{(a\overline{g}-1)(g-a)}{(1-g\overline{g})a}$$
$$= \frac{g\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{a\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{g\overline{a}}{1-g\overline{g}} + \frac{1}{1-g\overline{g}}$$

De manière analogue, on établit :

$$\frac{GB}{GE} = \frac{g\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{b\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{g\overline{b}}{1-g\overline{g}} + \frac{1}{1-g\overline{g}}$$
$$\frac{GC}{GF} = \frac{g\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{c\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{g\overline{c}}{1-g\overline{g}} + \frac{1}{1-g\overline{g}}$$

D'où en faisant la somme des trois rapports :

$$\frac{GA}{GD} + \frac{GB}{GE} + \frac{GC}{GF} = \frac{3g\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{(a+b+c)\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{g(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})}{1-g\overline{g}} + \frac{3}{1-g\overline{g}}$$
$$= \frac{3g\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{3g\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{3g\overline{g}}{1-g\overline{g}} + \frac{3}{1-g\overline{g}}$$
$$= \frac{3(1-g\overline{g})}{1-g\overline{g}} = 3$$

## Bosse 20

**Soient $x$, $y$, $z$ des réels strictement positifs. Prouver que :**

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 \geq 12.$$

### Dégraissage

On pose :

$$A = \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2, \qquad B = \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2, \qquad C = \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2$$

On a $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. En appliquant l'inégalité de la moyenne, on obtient :

$$A + B + C \geq 3\sqrt[3]{A \times B \times C}$$

Or on sait que :

$$A \geq 4\frac{x}{y} \times \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}$$
$$B \geq 4\frac{y}{z} \times \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}$$
$$C \geq 4\frac{z}{x} \times \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}$$

D'où :

$$A + B + C \geq 3 \times \sqrt[3]{4^3\left(\frac{x}{y}.\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right) \times \left(\frac{y}{z}.\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right) \times \left(\frac{z}{x}.\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)}$$
$$= 3 \times 4\sqrt[3]{\frac{xyz}{xyz}} = 12.$$

Ce qui achève la démonstration.

## Bosse 21__________________________________

**Trouver tous les nombres premiers $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ tels que :**

$$\boldsymbol{p \times q} \textbf{ divise } (\mathbf{5}^{\boldsymbol{p}} - \mathbf{2}^{\boldsymbol{p}})(\mathbf{5}^{\boldsymbol{q}} - \mathbf{2}^{\boldsymbol{q}}).$$

### Dégraissage

Nous devons avoir $p \,/\, (5^p - 2^p)$ ou $p \,/\, (5^q - 2^q)$. On suppose que $p \,/\, (5^p - 2^p)$. Par le petit théorème de Fermat, on arrive à :

$$5^p - 2^p \equiv 3 \equiv 0\ [p] \quad \Rightarrow \quad p = 3$$

Nous devons également avoir $q \,/\, (5^3 - 2^3)$ ou $q \,/\, (5^q - 2^q)$. Par la même méthode, la 2ème relation donne $q = 3$ tandis la 1ère rend $q = 13$. Donc usant de la symétrie, nous obtenons les solutions $(p, q) = (3,3), (3, 13), (13, 3)$.

On suppose maintenant que $p \neq 3$ et $q \neq 3$.
Nous devons alors avoir $p \,/\, (5^q - 2^q)$ et $q \,/\, (5^p - 2^p)$.

$$5^q - 2^q \equiv 0 \ [p]$$
$$2^q[(5 \times 2^{-1})^q - 1] \equiv 0 \ [p]$$
$$(5 \times 2^{-1})^q - 1 \equiv 0 \ [p]$$
En utilisant la même logique, nous arrivons à :
$$(5 \times 2^{-1})^p - 1 \equiv 0 \ [q]$$
En posant $a = 5 \times 2^{-1} \ [pq]$ et si l'on note $ord_y(x)$ l'ordre de $x$ modulo $y$ c'est-à-dire le plus petit entier naturel t tel que $x^t \equiv 1 \ [y]$, on trouve que :
$$\begin{cases} ord_p(a)/q \\ ord_q(a)/p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ord_p(a) \in \{1, q\}/\varphi(p) = p - 1 \\ ord_q(a) \in \{1, p\}/\varphi(q) = q - 1 \end{cases}$$
où $\varphi$ représente la fonction indicatrice d'Euler.
Si $ord_p(a) = q$ et $ord_q(a) = p$ alors nous aurons :
$$\begin{cases} q/p - 1 \\ p/q - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq q + 1 \\ q \geq p + 1 \end{cases}$$
ce qui est absurde.
On suppose que $ord_p(a) = 1$, et donc $a - 1 \equiv 0 \ [p]$.
A partir de $a = 5 \times 2^{-1} \ [p]$, nous obtenons :
$$2(a - 1) \equiv 2 \times 5 \times 2^{-1} - 2 \equiv 3 \equiv 0 \ [p]$$
ce qui est contradictoire car $p \neq 3$ et $q \neq 3$.
Enfin, les seules solutions sont :
$$(p, q) = (3,3), (3, 13), (13, 3).$$

## Bosse 22

**Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. Le mouvement d'un point $M$ est tel que, à tout instant, sa vitesse soit égale au produit vectoriel $\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}$ ($O$ point fixe).**
**Déterminer la trajectoire de $M$.**

### Dégraissage

On sait que le vecteur vitesse $\vec{V}$ est donné par : $\vec{V} = d\overrightarrow{OM}/dt$.

La relation $\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{V}$ entraîne que le vecteur $\vec{V}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\overrightarrow{OM}$. On en déduit donc que les quantités $\vec{u}.\overrightarrow{OM}$ et $OM^2$ sont constantes. On a :

$\vec{u}.\vec{V} = 0 \ \Rightarrow \ M$ appartient à un plan normal au vecteur $\vec{u}$ ;

$OM^2$ constant $\Rightarrow$ $M$ appartient à une sphère de centre $O$.
Donc en conclusion, la trajectoire du point $M$ est incluse dans un cercle de centre $O$.

## Bosse 23

**Pour tout couple d'entiers naturels $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$, montrer que l'un des deux nombres $\boldsymbol{m}^{1/n}$ et $\boldsymbol{n}^{1/m}$ est inférieur à $3^{1/3}$.**

### Dégraissage

Si $m = n$, l'inégalité $m^{1/m} \leq 3^{1/3}$ équivaut à $m^3 \leq 3^m$.
Cette propriété est vraie pour $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$. D'autre part, pour $m > 3$, on a : $3m^2 \leq m^3$ et $3m + 1 \leq m^3$ (la 1ère inégalité est évidente, la 2ème résulte du fait que $m^3 > 3m$).
Donc : $(m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \leq m^3 + m^3 + m^3$, ce qui, par hypothèse de récurrence, est inférieur à $3 \times 3^m = 3^{m+1}$.
Si $m < n$ alors :

$$m^{\frac{1}{n}} < n^{\frac{1}{n}} < 3^{\frac{1}{3}}.$$

## Bosse 24

**On sait que la suite harmonique :**

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$$

**est divergente. On transforme cette suite en éliminant toutes les fractions dont le dénominateur comporte le chiffre 7. Montrer que la suite ainsi obtenue est convergente.**

### Dégraissage

On note $k(n)$ le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de l'entier naturel $n$. On désigne par $S'_{k(n)}$ la somme des inverses des entiers écrits avec au plus $n$ chiffres, sans le 7.

Donc, par définition, $S'_{k(n)} - S'_{k(n-1)}$ est la somme des inverses des entiers écrits avec exactement n chiffres, sans le $7$.
Ces entiers sont au nombre de $8 \times 9^{n-1}$ (le premier chiffre est choisi entre $8$ car différent de $0$ et $7$, les suivants entre $9$ chiffres), et sont tous supérieurs à $10^{n-1}$. La somme de leurs inverses est donc majorée par :

$$\frac{8 \times 9^{n-1}}{10^{n-1}}.$$

Ainsi, on a (en considérant $S'_{k(0)} = 0$) :

$$S'_{k(1)} - S'_{k(0)} \leq 8$$
$$S'_{k(2)} - S'_{k(1)} \leq \frac{8 \times 9^1}{10^1}$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$S'_{k(n)} - S'_{k(n-1)} \leq \frac{8 \times 9^{n-1}}{10^{n-1}}$$

En faisant une somme télescopique, on obtient :

$$S'_{k(n)} \leq 8\left(1 + \frac{9^1}{10^1} + \frac{9^2}{10^2} + \dots + \frac{9^{n-1}}{10^{n-1}}\right) = 8\left(\frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n}{1 - \frac{9}{10}}\right) < 80$$

La suite de $\left(S'_{k(n)}\right)$ étant croissante et majorée, elle est donc convergente.

# Bosse 25

**Trouvez tous les polynômes de forme $p(x) = x^3 + mx + 6$ dont tous les zéros sont des nombres entiers.**

## Dégraissage

Le polynôme $p(x)$ se factorise en $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ où $a,\ b,\ c$ sont ses zéros entiers. En développant, on obtient :

$$p(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

Ainsi $abc = -6$ et $a + b + c = 0$. Donc $a, b, c$ sont des diviseurs de $-6$. On trouve alors la seule possibilité : $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$ (ou ses symétriques). On conclut que :

$$m = ab + bc + ca = 2 - 3 - 6 = -7.$$

Le seul polynôme qui vérifie les conditions est :

$$p(x) = x^3 - 7x + 6$$

## Bosse 26

**Déterminer la fonction $f$ qui, à tout vecteur $\vec{X}$ de l'espace, associe un vecteur $f(\vec{X})$ tel que, pour tout vecteur $\vec{Y}$, on ait l'égalité :**

$$\boldsymbol{\vec{Y}.f(\vec{X}) + \vec{X}.f(\vec{Y}) = 0}.$$

### Dégraissage

Soit $a$ et $b$ deux réels quelconques, $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ deux vecteurs de l'espace. Quel que soit le vecteur $\vec{Y}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{Y}.f\left(a\overrightarrow{X_1} + b\overrightarrow{X_2}\right) &= -\left(a\overrightarrow{X_1} + b\overrightarrow{X_2}\right).f\left(\vec{Y}\right) \\ &= -a\overrightarrow{X_1}.f\left(\vec{Y}\right) - b\overrightarrow{X_2}.f\left(\vec{Y}\right) \\ &= -a\vec{Y}.f\left(\overrightarrow{X_1}\right) - b\vec{Y}.f\left(\overrightarrow{X_2}\right) \\ &= \vec{Y}.\left[af\left(\overrightarrow{X_1}\right) + bf\left(\overrightarrow{X_2}\right)\right] \end{aligned}$$

D'où : $f\left(a\overrightarrow{X_1} + b\overrightarrow{X_2}\right) = af\left(\overrightarrow{X_1}\right) + bf\left(\overrightarrow{X_2}\right)$

Donc l'application $f$ est linéaire.

On considère une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On a :

$2\vec{\imath}.f(\vec{\imath}) = 0$, $\vec{\imath}.f(\vec{\jmath}) = -\vec{\jmath}.f(\vec{\imath})$ et deux autres relations analogues.

Soit $\vec{T}$ le vecteur de coordonnées $f(\vec{\jmath}).\vec{k}$, $f\left(\vec{k}\right).\vec{\imath}$, $f(\vec{\imath}).\vec{\jmath}$.

Les coordonnées du vecteur $\vec{T} \wedge \vec{\imath}$ sont :

$$0,\ \ f(\vec{\imath}).\vec{\jmath},\ \ -f\left(\vec{k}\right).\vec{\imath} = f(\vec{\imath}).\vec{k}$$

Donc $\vec{T} \wedge \vec{\imath} = f(\vec{\imath})$. On vérifie de même que :

$$\vec{T} \wedge \vec{\jmath} = f(\vec{\jmath}) \text{ et } \vec{T} \wedge \vec{k} = f(\vec{k}).$$

Donc, on peut conclure, en vertu de la linéarité de $f$, que pour tout vecteur $\vec{X}$ de l'espace :

$$f\left(\vec{X}\right) = \vec{T} \wedge \vec{X}.$$

## Bosse 27

**On donne huit nombres réels non tous nuls $x_1$, $x_2$, …, $x_8$, et on définit une suite $(u_n)$ :**

$$\boldsymbol{u_n = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_8^n}$$

**On suppose que, pour tout $n$ premier, on a $u_n = 0$.**
**Déterminer tous les entiers pour lesquels $u_n = 0$.**

### Dégraissage

On suppose que les nombres $x_1$, $x_2$, …, $x_8$ sont tels que :

$$|x_1| > |x_2| > \cdots > |x_8|.$$

On pose alors :

$$y_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad y_3 = \frac{x_3}{x_2}, \quad \ldots, \quad y_8 = \frac{x_8}{x_1}, \quad v_n = \frac{u_n}{x_1^n}.$$

La question est transposée donc en la suivante :
On donne sept réels non tous nuls $y_2$, $y_3$, …, $y_8$ tels que :

$$|y_2| > |y_3| > \cdots > |y_8|.$$

et on définit une suite $(v_n)$ : $v_n = 1 + y_2^n + \cdots + y_8^n$.
On suppose que, pour tout $n$ premier, $v_n = 0$. Déterminer tous les entiers pour lesquels $v_n = 0$.
Parmi les nombres $y_2$, $y_3$, …, $y_8$, il y en a, peut-être, qui sont égaux à $1$ (soit $s$ leur nombre) et peut-être d'autres qui sont égaux à $-1$ (soit $t$ leur nombre). Pour tous les autres, la suite géométrique $(y^n)$ converge vers $0$. La suite $(v_n)$ a pour limite 1+s-t, et si ce nombre n'est pas nul, il est impossible qu'une infinité de ses termes soient nuls.
Les termes de la suite $(u_n)$ de plus grande valeur absolue s'éliminent donc deux à deux.
On recommence et on constate que $v_n = 0$ pour tout $n$ impair.

## Bosse 28

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :**

$$\boldsymbol{4x^2 - 40E(x) + 51 = 0}$$

**où $E(x)$ désigne la partie entière de $x$.**

## Dégraissage

En réarrangeant l'équation, on obtient : $4x^2+51=40E(x)$. On sait que $x-1<E(x)\le x$, et donc :

$$4x^2+51=40E(x)>40(x-1$$
$$4x^2-40x+91>0$$
$$(2x-13)(2x-7)>0$$

Ainsi $x>13/2$ ou $x<7/2$.

D'autre part, on a aussi :

$$4x^2+51=40E(x)\le 40x$$
$$4x^2-40x+51\le 0$$
$$(2x-17)(2x-3)\le 0$$

Ainsi $3/2\le x\le 17/2$. En combinant ces inégalités, on obtient :

$$3/2\le x<7/2 \text{ ou bien } 13/2<x\le 17/2.$$

On peut alors envisager deux cas :

**1er cas : $\boldsymbol{3/2\le x}<7/2$**

Pour ce cas, les valeurs possibles de $E(x)$ sont $1$, $2$ et $3$.

Si $E(x)=1$ alors $4x^2+51=40\times 1$, et donc $4x^2=-11$, qui ne donne pas de solution réelle.

Si $E(x)=2$ alors $4x^2+51=40\times 2$, et donc $4x^2=29$ puis $x=\sqrt{29}/2$. On remarque que $\sqrt{16}/2<\sqrt{29}/2<\sqrt{36}/2$, c'est-à-dire $2<x<3$ et donc $E(x)=2$.

Si E(x)=3 alors $4x^2+51=40\times 3$ et $x=\sqrt{69}/2>\sqrt{64}/2=4$. Cette solution est donc rejetée.

**2ème cas : $\boldsymbol{13/2}<x\le 17/2$**

Dans ce cas, les valeurs possibles de $E(x)$ sont $6$, $7$ et $8$.

Si $E(x)=6$ alors $4x^2+51=40\times 6$ et donc $6<x=\sqrt{189}/2<7$.

Si $E(x)=7$ alors $4x^2+51=40\times 7$ et donc $7<x=\sqrt{229}/2<8$.

Si $E(x)=8$ alors $4x^2+51=40\times 8$ et donc $8<x=\sqrt{269}/2<9$.

Enfin, l'équation proposée admet quatre solutions :

$$\sqrt{29}/2,\ \sqrt{189}/2,\ \sqrt{229}/2,\ \sqrt{269}/2.$$

## Bosse 29

**Soient $\boldsymbol{a, b, c}$ des nombres réels positifs. Montrer que :**

$$\boldsymbol{a^a\times b^b\times c^c\ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}.$$

## Dégraissage 1

On démontre l'inégalité équivalente :

$$a^{3a} \times b^{3b} \times c^{3c} \geq (abc)^{a+b+c}$$

Par symétrie, on peut supposer que $a \geq b \geq c$. Donc $a - b \geq 0$, $b - c \geq 0$, $a - c \geq 0$ et $a/b \geq 1$, $b/c \geq 1$, $a/c \geq 1$. On aura donc :

$$\frac{a^{3a} \times b^{3b} \times c^{3c}}{(abc)^{a+b+c}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} . \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c} . \left(\frac{a}{c}\right)^{a-c} \geq 1.$$

## Dégraissage 2

Si on considère les nombres $a$, $b$, $c$ pondérés par les poids $a$, $b$, $c$, on peut appliquer l'inégalité entre moyenne géométrique, moyenne harmonique et moyenne arithmétique :

$$\sqrt[a+b+c]{a^a \times b^b \times c^c} \geq \frac{a+b+c}{\dfrac{a}{a} + \dfrac{b}{b} + \dfrac{c}{c}} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

D'où l'inégalité voulue s'en déduit aisément.

## Dégraissage 3

On suppose que $a \geq b \geq c$ par raison de symétrie.

$$a \geq b \geq c \implies \ln a \geq \ln b \geq \ln c$$

Selon l'inégalité de Tchebychev, on :

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3}\right) \leq \frac{a \ln a + b \ln b + c \ln c}{3}$$

ou encore :

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)(\ln a + \ln b + \ln c) \leq a \ln a + b \ln b + c \ln c$$

ce qui donne :

$$\ln(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq \ln(a^a . b^b . c^c)$$

La fonction $x \mapsto \ln x$ étant croissante sur $]0, +\infty[$, on déduit que :

$$a^a . b^b . c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

## Bosse 30

**On dispose d'un ensemble de 10 nombres à deux chiffres. Montrer que l'on peut en extraire deux sous-ensembles disjoints non vides tels que les sommes des nombres soient les mêmes dans ces deux sous-ensembles.**

### Dégraissage

Un ensemble à dix éléments possède $2^{10} = 1024$ sous-ensembles dont $1023$ non vides.
La somme d'au plus dix nombres de deux chiffres est inférieure à la somme :

$$99 + 98 + 97 + 96 + 95 + 94 + 93 + 92 + 91 + 90 = 945.$$

Selon le principe des tiroirs, il existe au moins deux sous-ensembles distincts donnant la même somme. S'ils sont disjoints, le problème est résolu.
Sinon, on leur ôte leurs éléments communs et l'un des nouveaux ensembles est non vide, donne donc une somme non nulle, de sorte que l'autre sous-ensemble est lui aussi non vide.

## Bosse 31

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\boldsymbol{E(x^2) + 2E(x) - 3 = 0}$**
**où $\boldsymbol{E(x)}$ désigne la partie entière de $\boldsymbol{x}$.**

### Dégraissage

On note $S$ l'ensemble des solutions de l'équation proposée.
Si $x$ est entier alors $E(x) = x$ et $E(x^2) = x^2$.
L'équation devient $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$, donc $x = 1$ ou $x = -3$.
D'où : $x = 1 \in S$ et $x = -3 \in S$.
Si $x$ est non nécessairement entier, posons $E(x) = n$ avec bien sûr $n \leq x < n + 1$.
On envisage deux cas :
**1$^{er}$ cas : $\boldsymbol{x}$ positif**

$$\begin{aligned} 0 \leq n \leq x < n + 1 &\Rightarrow n^2 \leq x^2 < n^2 + 2n + 1 \\ &\Rightarrow n^2 \leq E(x^2) \leq n^2 + 2n \end{aligned}$$

- $n = 1 \implies E(x^2) \in \{1, 2, 3\}$
  Deux possibilités :
  $E(x^2) = 1 \implies 1 \leq x^2 < 2$, et donc $1 \leq x < \sqrt{2}$, l'équation est vérifiée dans ce cas : $\mathbf{1} + 2 \times \mathbf{1} - 3 = 0$. D'où : $\left[1, \sqrt{2}\right[ \subset S$.

  $E(x^2) = 2 \implies 2 \leq x^2 < 3$, et donc $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$, l'équation n'est pas vérifiée dans ce cas : $\mathbf{2} + 2 \times \mathbf{2} - 3 \neq 0$.

  Dès que $n \geq 2$ (i.e $x \geq 2$), on a $E(x) \geq 2$ et $E(x^2) \geq 4$ et par suite : $E(x^2) + 2E(x) - 3 \geq \mathbf{4} + 2 \times \mathbf{2} - 3 = 5 \neq 0$. L'équation n'a pas de solution pour $x \geq 2$.

**2$^{\text{ème}}$ cas : $x$ négatif**

$n \leq x < n + 1 \leq 0 \implies n^2 + 2n + 1 < x^2 \leq n^2$, donc $E(x^2)$ ne peut prendre que les valeurs $n^2 + 2n + 1$, $n^2 + 2n$, …, $n^2$.
Donc : $n^2 + 2n + 1 \leq E(x^2) \leq n^2$, c'est-à-dire :

$$n^2 + 2n + 1 \leq -2n + 3 \leq n^2$$

ou encore :

$$n^2 + 4n - 3 \leq 0 \leq n^2 + 2n - 3$$
$$(n + 2)^2 - 6 \leq 0 \leq (n - 1)(n + 3)$$
$$\left(n + 2 - \sqrt{6}\right)\left(n + 2 + \sqrt{6}\right) - 6 \leq 0 \leq (n - 1)(n + 3)$$

- D'où : $-2 - \sqrt{6} \leq n \leq -3$, et comme $-2 - \sqrt{6} \cong -4{,}64$ alors :

$$n = -4 \text{ ou } n = -3.$$

Pour $n = -3$, on a $-3 \leq x < -2$ et donc $4 < x^2 \leq 9$, et par suite : $E(x^2) = -2E(x) + 3 = 9$
Seule possibilité $x = -3$ (solution déjà trouvée en début de corrigé).

- Pour $x = -4$, on a $-4 \leq x < -3$ et donc $9 < x^2 \leq 25$, et par suite : $E(x^2) = -2E(x) + 3 = 11$
  Donc $11 \leq x^2 < 12$, soit encore $-\sqrt{12} < x \leq -\sqrt{11}$, et cela convient bien puisque $E\left(-\sqrt{12}\right) = E\left(-\sqrt{11}\right) = -4$.

Enfin, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left[1, \sqrt{2}\right[ \cup \left]-\sqrt{12}, -\sqrt{11}\right] \cup \{-3\}.$$

## Bosse 32

**Trouver tous les couples $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ de nombres premiers avec $\boldsymbol{p} > q$ tels que le nombre :**

$$\frac{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})^{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}-\mathbf{1}}{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})^{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}-\mathbf{1}}$$

**est un entier.**

## Dégraissage

On pose :

$A=(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q}-1$ et $B=(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}-1$

On cherche les couples $(p,q)$ d'entiers premiers tels que :

$$\frac{A}{B}\in\mathbb{N}.$$

On a : $\begin{cases} B/A \\ B/B \end{cases} \Longrightarrow B/(A-B)$

Donc : $B/(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q}-(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q}$, soit :

$$B/(p+q)^{p-q}(p-q)^{p-q}[(p+q)^{2q}-(p-q)^{2q}]$$

Or $PGCD(B,\ p+q)=PGCD(B,\ p-q)=1$, d'où d'après Gauss :

$$B/[(p+q)^{2q}-(p-q)^{2q}] \quad (*)$$

**1) On a : $\boldsymbol{p}<3\boldsymbol{q}$.**

En effet : $(*) \Longrightarrow B\le (p+q)^{2q}-(p-q)^{2q}\le (p+q)^{2q}-1$

Or : $1\le (p-q)^{p+q} \Longrightarrow (p+q)^{p-q}\le (p-q)^{p+q}(p+q)^{p-q}$

Donc :

$$(p+q)^{p-q}-1\le B\le (p+q)^{2q}-1$$

D'où :

$$(p+q)^{p-q}\le (p+q)^{2q}$$

Soit : $p-q\le 2q$ et donc $p\le 3q$. On a nécessairement $p\neq 3q$ sinon $p$ ne serait pas premier. Enfin $p<3q$.

**2) Si $\boldsymbol{p}=\mathbf{2}$ alors la seule solution est $(\mathbf{3},\mathbf{2})$**

En effet, d'après 1), $p<6$ et donc $p=3$ ou $p=5$.

Pour $p=3$, on a $\begin{cases} A=5^5-1=3\,124 \\ B=5-1=4 \end{cases}$ et $A/B=781\in\mathbb{N}$

Pour $p=5$, on a $\begin{cases} A=7^7\times 3^3-1=3\,124 \\ B=7^3\times 3^7-1 \end{cases}$ et $A/B=29{,}6\notin\mathbb{N}$

**3) On suppose maintenant que $p > q \geq 3$**

Soit $r$ un diviseur premier de $B$.

On a soit $r = q$ ou $r \equiv 1 \ [q]$ :

En effet, comme $r/B$ et $B/[(p+q)^{2q} - (p-q)^{2q}]$ alors :

$$(p+q)^{2q} \equiv (p-q)^{2q} \ [r]$$

D'autre part, comme on sait que $pgcd(B, p-q) = 1$ alors $pgcd(r, p-q) = 1$, c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathbb{N}$ tel que :

$$v(p-q) \equiv 1 \ [r]$$

D'où : $[v(p-q)]^{2q} \equiv 1 \ [r]$ et par suite $d = ord_r(v(p-q))$ divise $2q$, autrement dit $d \in \{1, 2, q, 2q\}$.

- Si $d = 1$ ou $d = 2$ alors $[v(p-q)]^2 \equiv 1 \ [r]$. Donc :

$$(p+q)^2 \equiv (p-q)^2 \ [r]$$

D'où : $r/(p+q)^2 \equiv (p-q)^2 = 4pq$, et comme $B$ est impair alors $r/pq$ c'est-à-dire $r/p$ ou $r/q$ puisque $p$ et $q$ sont premiers.

Or si $r = p$ alors $B \equiv 0 \ [p]$ c'est-à-dire :

$$(q)^{p-q}(-q)^{p+q} - 1 \equiv 0 \ [p]$$

Donc $q^{2p} \equiv 1 \ [p]$, d'autre part Fermat assure que :

$q^2 \equiv 1 \ [p]$ c'est-à-dire que $p$ divise $(q-1)(q+1)$.

L'entier $p$ étant premier, on déduit que :

$$p/(q-1) \ \text{ ou } \ p/(q+1)$$

ce qui est absurde car $p \geq q + 2$.

- Si $d = q$ ou $d = 2q$ alors, selon Fermat, $d/(r-1)$ et donc :

$$r \equiv 1 \ [q].$$

D'après 3), tout diviseur de $B$ est soit congru à $0$ ou congru à $1$ modulo $q$. On a :

$$B = (C-1)(C+1) \text{ avec } C = (p+q)^{\frac{p-q}{2}}(p-q)^{\frac{p+q}{2}}.$$

Donc $C-1$, $C+1 \equiv 0$ ou $1 \ [q]$, d'où :

$(C-1) + (C+1) \equiv -1$ ou $0$ ou $1 \ [q]$, soit :

$$-2 \equiv -1 \text{ ou } 0 \text{ ou } 1 \ [q]$$

ce qui n'est possible que si $q \leq 3$, et par suite $q = 3$.

D'après 1), on a $p \leq 3q = 9$, donc $p \in \{5, 7\}$.

Pour $p = 5$ et $q = 3$, on a $A/B = 4\,096{,}2 \notin \mathbb{N}$

Pour $p = 7$ et $q = 3$, on a $A/B = 244{,}14 \notin \mathbb{N}$

En conclusion : l'unique solution est $(p, q) = (3, 2)$.

## Bosse 33

**Soient $x$, $y$, $z$, $t$ des réels strictement positifs. Montrer que :**

$$\frac{x}{y+2z+3t}+\frac{y}{z+2t+3x}+\frac{z}{t+2x+3y}+\frac{t}{x+2y+3z}\geq\frac{2}{3}.$$

## Dégraissage 1

Si on multiplie $x$, $y$, $z$, $t$ par un même réel non nul $\alpha$, l'inégalité reste inchangée. Il s'agit donc d'un inégalité homogène. Dans ce cas, sans nuire à la généralité, on peut poser $x+y+z+t=1$.

On pose :

$$A=\frac{x}{y+2z+3t}+\frac{y}{z+2t+3x}+\frac{z}{t+2x+3y}+\frac{t}{x+2y+3z}.$$

On remarque que :

$$A=xf(y+2z+3t)+yf(z+2t+3x)+zf(t+2x+3y)$$
$$+tf(y+2z+3t)$$

avec $f(r)=1/r$, fonction convexe sur $]0,+\infty[$.

Donc :

$$\begin{aligned}A&\geq f[4(xy+xz+xt+yz+yt+zt)]\\&=\frac{1}{4(xy+xz+xt+yz+yt+zt)}\end{aligned}$$

Or, on sait que :

$$\frac{xy+xz+xt+yz+yt+zt}{6}\leq\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

d'où :

$$A\geq\frac{1}{4}\times\frac{16}{6}=\frac{2}{3}.$$

## Dégraissage 2

On pose $(a_1,a_2,a_3,a_4)=(x,y,z,t)$ et :

$$A_1=y+2z+3t$$
$$A_2=z+2t+3x$$
$$A_3=t+2x+3y$$
$$A_4=x+2y+3z$$

$$S=\frac{x}{y+2z+3t}+\frac{y}{z+2t+3x}+\frac{z}{t+2x+3y}+\frac{t}{x+2y+3z}.$$
On sait que :
$$\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i}{A_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4}a_iA_i\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{4}a_i\right)^2$$
ce qui donne :
$$S\geq\frac{(x+y+z+t)^2}{4(xy+xz+xt+yz+yt+zt)}$$
D'autre part, l'inégalité de Maclaurin permet de conclure aisément :
$$xy+xz+xt+yz+yt+zt\leq\frac{3}{8}(x+y+z+t)^2$$
Note : l'inégalité de Maclaurin résulte du fait que :
$(x-y)^2+(x-z)^2+(x-t)^2+(y-z)^2+(y-t)^2+(z-t)^2\geq 0.$

## Bosse 34

**Démontrer que, si une fonction $f$ continue admet pour périodes 1 et $\sqrt{2}$, elle est constante.**

### Dégraissage

Soit $x_0$ un réel fixé. Si $f$ n'est pas constante alors il existe un réel $x$ tel $f(x)\neq f(x_0)$. La fonction $f$ étant continue en $x$, il existe donc un intervalle $]\alpha,\beta[$ tel que pour tout $y$ de $]\alpha,\beta[$, on ait $f(y)\neq f(x_0)$.
D'autre part, on peut établir par récurrence que pour tout entier $n$ :
$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}\ ,\ \text{ avec } a_n,\ b_n\in\mathbb{Z}.$$
De plus, on sait que :
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^n=0.$$
$$\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^n=0\right]\Longrightarrow\exists p\in\mathbb{N},\qquad\left(\sqrt{2}-1\right)^p<\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Donc selon que $y > x_0$ ou $y < x_0$, on rajoute ou on retranche à $x_0$ un multiple convenable de $\left(\sqrt{2}-1\right)^p$ qui nous ramène à un nombre de la forme $x_0 + a_q + b_q\sqrt{2}$ dans $]\alpha, \beta[$.
Le nombre $a_q + b_q\sqrt{2}$ étant une période, on a :

$$f\left(x_0 + a_q + b_q\sqrt{2}\right) = f(x_0)$$

ce qui se contredit avec le fait que $f\left(x_0 + a_q + b_q\sqrt{2}\right) \neq f(x_0)$ puisque $x_0 + a_q + b_q\sqrt{2} \in ]\alpha, \beta[$.
En conclusion, la fonction $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.

## Bosse 35

**Déterminer les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout couple de réels $(x, y)$, l'inégalité :**

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

### Dégraissage 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ (quelconque) et $h \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$|f(a+h) - f(a)| \leq (a + h - a)^2 = h^2$$

D'où :

$$\left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right| \leq |h|$$

Donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0.$$

On conclut que la fonction $f$ est dérivable en tout réel $a$ et que pour tout réel $a$, on $f'(x) = 0$.
Donc, la fonction $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.
Réciproquement toute fonction constante $f$ sur $\mathbb{R}$ vérifie la propriété :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ |f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

### Dégraissage 2

Soit $x$ et $y$ deux réels et $t = (x + y)/2$. On a :

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(t) + f(t) - f(y)|$$

$$\leq |f(x)-f(t)|+|f(t)-f(y)|$$
$$\leq (\mathrm{x}-\mathrm{t})^2+(\mathrm{t}-\mathrm{y})^2$$
$$=\left(\mathrm{x}-\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{2}-\mathrm{y}\right)^2=\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2}{2}$$

En réitérant ce procédé, on montre que pour tous $x$, $y$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout entier $n \geq 2$ :

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2}{\mathrm{n}}$$

Donc $|f(x)-f(y)|=0$, pour tous $x$, $y$ dans $\mathbb{R}$ , et par suite $f$ est une fonction constante.

## Bosse 36

**Montrer que si $n$ nombres réels ($n \geq 2$) ont une somme non nulle, alors pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$, il existe $p$ termes de cette somme dont la somme est aussi non nulle.**

### Dégraissage 1

On suppose que quelle que soit la façon de choisir $p$ nombres $a_1$, $a_2$, …, $a_p$ parmi $n$ nombres on a : $a_1+a_2+\cdots+a_p=0$. Comme la somme des $n$ nombres est non nulle, on en déduit la somme des $(n-p)$ autres nombres est non nulle et par suite il existe, parmi ces $(n-p)$ nombres, au moins un nombre non nul. Soit $a_q$ ce nombre. Alors il existe au moins un nombre parmi $a_1$, $a_2$, …, $a_p$, qui est différent de $a_q$ (sinon on aurait $a_1+a_2+\cdots+a_p=pa_q \neq 0$), $a_1$ par exemple. D'où : $a_q+a_2+\cdots+a_p \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse formulée ci-haut.
Conclusion :
Il existe au moins $p$ nombres dont la somme est non nulle.

### Dégraissage 2

Soient $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ les $n$ nombres donnés et on suppose que quelle que soit la façon de choisir p termes parmi ces $n$ nombres (il y en a $C_n^p$) on obtient une somme nulle. Si on additionne toutes ces sommes on obtient une somme de $n \times C_n^p$ termes où chaque nombre $a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ figure $C_{n-1}^{p-1}$ fois. Ainsi :

$$C_{n-1}^{p-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$

Comme $C_{n-1}^{p-1} \neq 0$ alors $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

Conclusion :

Parmi les $C_n^p$ sommes, il existe au moins une somme non nulle.

## Bosse 37

**Soit un triangle de côtés $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ non nuls. Démontrer que l'un au moins des rapports $\boldsymbol{a/b}$, $\boldsymbol{b/c}$, $\boldsymbol{c/a}$ appartient à l'intervalle $\left[(\sqrt{5}-1)/2, (\sqrt{5}+1)/2\ \right]$.**

### Dégraissage

Notons $I = [\omega; \overline{\omega}]$ avec $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$ et $\overline{\omega} = (\sqrt{5}+1)/2$. On peut bien remarquer que : $\omega.\overline{\omega} = 1$ c'est-à-dire que $\overline{\omega} = 1/\omega$.

Raisonnons par l'absurde :

Si les trois rapports $a/b$, $b/c$, $c/a$ étaient extérieurs à l'intervalle $I$, au moins deux d'entre eux seraient inférieurs $\omega$ (ou au moins deux d'entre eux seraient supérieurs à $\overline{\omega}$, mais cela revient au même en inversant les rapports car $\overline{\omega} = 1/\omega$).

On aurait donc par exemple $a/b < \omega$ et $b/c < \omega$ ce qui entrainerait $a < b\omega$ et $a < b\omega < c\omega^2$. Alors on aurait $c \leq a + b < b\omega + c\omega^2 = c(\omega + \omega^2) = c$ car :

$$\omega + \omega^2 = (\sqrt{5}-1)/2 + (3-\sqrt{5})/2 = 1$$

ce qui mène à la contradiction $c < c$.

Enfin, l'un au moins des rapports $a/b$, $b/c$, $c/a$ appartient à l'intervalle $I$.

## Bosse 38

**On définit une suite $(u_n)$ par $u_0 = 2$ et $u_1 = 5/2$ et la relation de récurrence :**

$$u_{n+1} = u_n\left(u_{n-1}^2 - 2\right) - \frac{5}{2}.$$

**Calculer la partie entière $Ent(u_n)$.**

## Dégraissage

On a :

$$u_0 = 2^0 + 2^{-0},\ \ u_1 = 2^1 + 2^{-1},\ \ u_2 = 2^1 + 2^{-1},$$
$$u_3 = 2^3 + 2^{-3},\ \ u_4 = 2^5 + 2^{-5},\ \ u_6 = 2^{11} + 2^{-11}.$$

D'où l'hypothèse de l'existence d'une suite $s_n$ d'entiers telle que $u_n = 2^{s_n} + 2^{-s_n}$. En reportant dans la relation de récurrence, on obtient :

$$2^{s_{n+1}} + 2^{-s_{n+1}} = (2^{s_n} + 2^{-s_n})(2^{2s_n} + 2^{-2s_n}) - (2^1 + 2^{-1})$$

On peut espérer que cette relation soit vérifiée dès lors que : $s_{n+1} = s_n + 2s_{n-1}$ qu'on résout classiquement en passant par l'équation $r^2 - r - 2 = 0$ qui admet deux racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. Donc l'expression de $s_n$ est de la forme $s_n = a \times 2^n + b \times (-1)^n$.

Avec $s_1 = 1$ et $s_0 = 0$, on obtient :

$$s_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n).$$

Alors, on a bien :

$$s_n - 2s_{n-1} = b(-1)^n - 2b(-1)^{n-1} = 3b(-1)^n = (-1)^n$$

Ce qui achève la vérification de la relation.

Le nombre $2^{-s_n}$ étant élément de l'intervalle $]0,1[$, la partie entière de $u_n$ est $2^{s_n}$.

## Bosse 39

**Quel est le chiffre des unités du nombre suivant :**

$$\boldsymbol{N = ENT\left(\frac{10^{1992}}{10^{83}+7}\right)?}$$

## Dégraissage

On a :

$$\frac{10^{1992}}{10^{83}+7} = \frac{10^{1992}}{10^{83}}\left(\frac{1}{1+\frac{7}{10^{83}}}\right) = 10^{1909} \times \left(\frac{1}{1-\left(\frac{-7}{10^{83}}\right)}\right)$$

On remarque que $1909 = 83 \times 23$ et donc on peut écrire de façon plus simple :

$$\frac{10^{1992}}{10^{83}+7} = (10^{83})^{23}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{-7}{10^{83}}\right)}\right] = b^{23}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{-7}{b}\right)}\right]$$

avec $b = 10^{83}$

Or on sait que :

$$\frac{1}{1-\left(\frac{-7}{b}\right)} = 1 - \frac{7}{b} + \left(\frac{7}{b}\right)^2 + \cdots - \left(\frac{7}{b}\right)^{23} + \frac{\left(\frac{7}{b}\right)^{24}}{1+\frac{7}{b}}$$

D'où :

$$\frac{10^{1992}}{10^{83}+7} = b^{23} - 7b^{22} + 7^2b^{21} - \cdots - 7^{23} + \frac{\frac{7^{24}}{b}}{1+\frac{7}{b}}$$

$$\frac{10^{1992}}{10^{83}+7} = b^{23} - 7b^{22} + 7^2b^{21} - \cdots - 7^{23} + \frac{7^{24}}{b+7}$$

Le nombre $\frac{7^{24}}{b+7}$ est dans l'intervalle $]0,1[$ car $0 < 7^{24} < b+7$ et donc il n'affecte pas le chiffre des unités. Donc, il suffit de chercher le chiffre des unités du nombre suivant $b^{23} - 7b^{22} + 7^2b^{21} - \cdots - 7^{23}$. Or la quantité $b^{23} - 7b^{22} + 7^2b^{21} - \cdots + 7^{223}b$ se termine par zéro, ce qui revient à déterminer le reste de la

division euclidienne de $7^{23}$ par 10 et le complément à 10 de ce reste est le chiffre des unités cherché.
On a :

$$7^2 = 49 \equiv -1\ [10] \implies 7^{22} \equiv (-1)^{11} \equiv -1\ [10]$$
$$\implies 7^{23} \equiv -7 \equiv 3\ [10]$$

Donc $7^{23}$ se termine par 3 et par conséquent le chiffre des unités cherché est 7.

## Bosse 40

**Si l'on permute les deux aiguilles d'un réveil, on obtient en général une position impossible sur une montre normale. Par exemple, la permutation obtenue en effectuant cette permutation à 4 h ne s'observe jamais.**
**Combien de fois par jour cette permutation conduit-elle à une configuration observable sur une montre analogique ?**

### Dégraissage 1

Repérons les aiguilles par les points correspondant du cercle unité.

Soit $z_1$ le nombre complexe représenté par la petite aiguille (celle des minutes) et $z_2$ le nombre complexe représenté par la grande aiguille (celle des heures). Plaçons la montre en sorte que, à midi : $z_1 = z_2 = 1$.

A tout instant, puisque la grande aiguille tourne douze fois plus vite que la petite (ou en d'autres termes si la petite fait un angle β alors la grande fait un angle égal à 12β) alors :

$$z_2 = z_1^{12}.$$

Une permutation est possible lorsque le couple $(z_1, z_2)$ est tel que :

$$z_2 = z_1^{12} \quad et \quad z_1 = z_2^{12}.$$

Soit : $z_1^{144} = z_1$

Puisque $|z_1| = 1$, $z_1$ est non nul, et est donc solution de l'équation :

$$z_1^{143} = 1.$$

Il y a donc 143 solutions dans un intervalle de 12 heures, régulièrement espacés à partir de $12^h$ (midi).

## Dégraissage 2

On repère la position $(x, y)$, des deux aiguilles en minutes à partir de midi (le cercle a donc une circonférence de longueur 60) ; toutes les heures possibles ($n$ heures, $a$ minutes, $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq n \leq 11$, $a \in \mathbb{R}$ et $0 \leq a < 60$) sont obtenues de la manière suivante :

- La grande aiguille (des minutes) occupe la position $y = a$ ;
- La petite aiguille (celle des heures) occupe alors la position $x = 5n + a/12$.

On échange les deux aiguilles et elles indiquent une heure également possible : donc il existe $m \in \mathbb{N}$ et $0 \leq m \leq 11$ et il existe $b \in \mathbb{R}$ et $0 \leq a < 60$ tels que :

$$y = a = 5m + b/12 \quad \text{et} \quad x = b = 5n + a/12.$$

La première égalité est équivalente aux égalités $m = Ent(a/5)$ et $b = 12a - 60m$. Le problème posé admet donc une solution si et seulement si $b = 5n + a/12$, c'est-à-dire si et seulement si :

$12a - 60m = 5n + a/12$, soit :

$$a = 60\frac{n + 12m}{143} = y \quad \text{et} \quad x = 60\frac{m + 12n}{143}.$$

Il y a $143$ positions possibles ; se sont :
$n$ heures $60(n+12m)/143$ minutes, avec les conditions suivantes $0 \leq n < 11$, $0 \leq m < 11$ ($m = n = 11$ donne la même position que $m = n = 0$).
L'heure inversée est $m$ heures $60(m+12n)/143$ minutes.
**Remarque :** Le phénomène se répète toutes les $(5+5/143)$ minutes.

## Bosse 41

**Soit $ABC$ un triangle de longueurs $a$, $b$, $c$. On note $m$, $n$, $p$ les longueurs de ses médianes. Pour tout réel $\alpha > 0$, on définit le réel $f(\alpha)$ par la relation :**

$$\boldsymbol{a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = [f(\alpha)]^\alpha(m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha).}$$

1) **Calculer $f(2)$.**
2) **Calculer $\lim_{\alpha \to 0^+} f(\alpha)$.**

### Dégraissage

1) D'après le théorème de la médiane :

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$c^2 + a^2 = 2n^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = 2p^2 + \frac{c^2}{2}$$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient :

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(m^2 + n^2 + p^2) + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

ou encore :

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m^2 + n^2 + p^2)$$

Donc on déduit la valeur de $f(2)$ : $[f(\alpha)]^2 = 4/3$, et enfin :

$$f(2) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{car} \quad f(2) > 0.$$

2) Pour $\alpha > 0$, on a :

$$[f(\alpha)]^{\alpha} = \frac{a^{\alpha} + b^{\alpha} + c^{\alpha}}{m^{\alpha} + n^{\alpha} + p^{\alpha}} = \frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}$$

avec $A(0) = B(0) = 3$.

En composant par le logarithme, on trouve :

$$\ln[f(\alpha)] = \frac{1}{\alpha}\left[\ln\left(\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}\right) - \ln\left(\frac{A(0)}{B(0)}\right)\right].$$

Si on pose $G(\alpha) = \ln(A(\alpha)/B(\alpha))$ alors on peut écrire :

$$\lim_{\alpha\to 0} \ln[f(\alpha)] = \lim_{\alpha\to 0} \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha} = G'(0).$$

D'autre part, on sait que :

$$G'(\alpha) = \frac{A'(\alpha)}{A(\alpha)} - \frac{B'(\alpha)}{B(\alpha)}$$

$$= \frac{\ln a \,.\, a^{\alpha} + \ln b \,.\, b^{\alpha} + \ln c \,.\, c^{\alpha}}{a^{\alpha} + b^{\alpha} + c^{\alpha}} - \frac{\ln m \,.\, m^{\alpha} + \ln n \,.\, n^{\alpha} + \ln p \,.\, p^{\alpha}}{m^{\alpha} + n^{\alpha} + p^{\alpha}}$$

D'où :

$$G'(0) = \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} - \frac{\ln m + \ln n + \ln p}{3} = \ln\left[\left(\frac{abc}{mnp}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

Donc finalement, on obtient :

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) = \left(\frac{abc}{mnp}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

## Bosse 42

**Soit $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ quatre points alignés dans cet ordre. Démontrer que :**

$$\boldsymbol{AB\sqrt{OC} + BC\sqrt{OA}} < AC\sqrt{\boldsymbol{OB}}.$$

## Dégraissage

Si l'on pose $\sqrt{OA} = a$, $\sqrt{OB} = b$, $\sqrt{OC} = c$ alors on aura :

$$AB = OB - OA = b^2 - a^2,\ BC = OC - OB = c^2 - b^2,$$

$$AC = OC - OA = c^2 - a^2$$

Donc l'inégalité demandée $AB\sqrt{OC} + BC\sqrt{OA} < AC\sqrt{OB}$ équivaut à l'inégalité :

$$c(b^2 - a^2) + a(c^2 - b^2) < b(c^2 - a^2)$$

ou encore : $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) > 0$.
On pose $P = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$.
Factorisons le polynôme $P$.
On remarque que le polynôme est du 3$^e$ degré et reste inchangé si l'on permute circulairement les lettres $a$, $b$, $c$.
Si l'on prend $b = c$, on trouve $P = 0$ et donc le polynôme $P$ contient le facteur $b - c$. On justifie de manière analogue que $P$ contient également les facteurs $c - a$ et $a - b$. On a donc :

$$P = \beta(b - c)(c - a)(a - b)$$

En identifiant les coefficients du monôme en $ab^2$ (par exemple) dans les deux membres, il vient $\beta = 1$. Finalement, on a :

$$a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (b - c)(c - a)(a - b).$$

D'après la disposition des points $O$, $A$, $B$ et $C$, on a $a < b < c$, et donc $b - c < 0$, $c - a > 0$, $a - b < 0$ et par suite le résultat cherché.

## Bosse 43

**Soit $P$ un polynôme de degré $n$. Prouver que si $P$ admet $n$ racines réelles distinctes, il en est de même du polynôme $Q = P + sP'$, quel que soit le réel $s$.**

### Dégraissage

Comme $deg(P) = n$ et $P$ admet $n$ racines réelles distinctes alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } P(x) = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$$

où $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_n$ sont les $n$ racines de $P$.
On sait que $P$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$P'(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x-\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i} \lambda \prod_{j=1}^{n} (x-\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P}{x-\alpha_i}.$$

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ par :

$$f(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}.$$

On a pour tout réel $x$ de $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i}$$

Donc, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ :

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{(x-\alpha_i)^2} < 0$$

Donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur chacun des intervalles constituant son domaine de définition.

On rappelle que le domaine de définition de $f$ est la réunion :

$$D_f = ]-\infty, \alpha_1[ \cup ]\alpha_1, \alpha_2[ \cup \dots \cup ]\alpha_{n-1}, \alpha_n[ \cup ]\alpha_n, +\infty[$$

En tenant compte des limites suivantes :

$$\text{Pour } i \in [\![1, n]\!], \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to \alpha_i^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to \alpha_i^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

on peut dresser le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ pour $i$ de $1$ à $n-1$:

| $x$ | $\alpha_i$ | | $\alpha_{i+1}$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Pour tout réel $s \neq 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de confirmer :

$$\exists!\, \beta_i \in ]\alpha_i, \alpha_{i+1}[ \text{ tel que } f(\beta_i) = -1/s.$$

C'est-à-dire :

$$\frac{P'(\beta_i)}{P(\beta_i)} = -\frac{1}{s}$$

ou encore :

$$P(\beta_i) + sP'(\beta_i) = 0$$

D'où l'existence de $n-1$ racines de $P + sP'$ :

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{n-1}.$$

D'autre part, si $s < 0$, alors dans l'intervalle $]\alpha_n, +\infty[$, il existe un réel unique $\beta_n$ tel que :

$$f(\beta_n) = -\frac{1}{s}$$

| $x$ | $\alpha_n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

Et donc $\beta_n$ est racine de $P + sP'$ .

Si $s > 0$ alors un raisonnement analogue montre l'existence d'une unique racine $\beta_n$ de $P + sP'$ dans l'intervalle $]-\infty, \alpha_1[$.

En conclusion, le polynôme $P + sP'$ admet $n$ racines réelles distinctes.

## Bosse 44

**Déterminer les dix derniers chiffres du nombre $7^{9999}$.**

## Dégraissage

On va plutôt transposer la question sur $7^{10\,000}$.

On a : $7^{10\,000} = (7^4)^{2500} = 2\,401^{2500} = (1 + 2\,400)^{2500}$

D'où :

$$7^{10\,000} = 1 + C_{2500}^{1}2400 + \cdots + \underbrace{C_{2500}^{4}2400^4 + \cdots + C_{2500}^{2500}2400^{2500}}_{\equiv 0\ [10^{10}]}$$

D'où encore :

$$7^{10\,000} = 1 + C_{2500}^{1}2400 + C_{2500}^{2}2400^2 + C_{2500}^{3}2400^3 [10^{10}]$$

Or on a :
$C_{2500}^{1} 2400 = 2500 \times 2400 = 600\,000$

$$C_{2500}^{2} 2400^2 = \frac{2500 \times 2499}{2} \times 2400^2 = 17\,992\,800\,000\,000$$

$$C_{2500}^{3} 2400^3 = \frac{2500 \times 2499 \times 2498}{6} \times 2400^3 \equiv 0\ [10^{10}]$$

Enfin, on obtient :
$7^{10\,000} \equiv 1 + 600\,000 + 17\,992\,800\,000\,000\ \ [10^{10}]$
$7^{10\,000} \equiv 2\,806\,000\,001\ \ [10^{10}]$
Comme ce dernier nombre est divisible par 7, il n'y a pas de retenue et les 10 derniers chiffres de $7^{9999}$ sont :

$$2\,806\,000\,0017 \;\big|\; 7 \quad = \mathbf{0\,400\,857\,143}$$

## Bosse 45

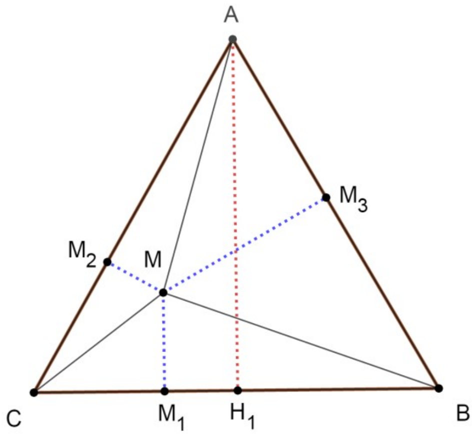
**On lance un bâton de longueur 1 mètre. Il se casse en trois morceaux. Quelle est la probabilité qu'avec ces trois morceaux on puisse former un triangle propre (non aplati).**

### Dégraissage 1

Cette solution s'appuie sur une propriété du triangle équilatéral qui porte le nom de théorème de Viviani que nous aurons à démontrer au préalable en tant que lemme.

**Lemme :** Soit $ABC$ un triangle équilatéral et $M$ un point à l'intérieur de $ABC$.

**La somme des distances de $M$ aux côtés du triangle est égale à la hauteur du triangle $ABC$.**

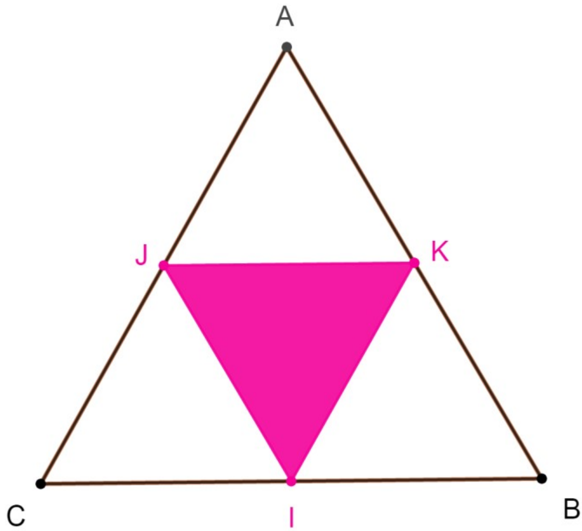



Soit $M_1$, $M_2$, $M_3$ les projetés orthogonaux de $M$ sur les droites $(BC)$, $(CA)$, $(AB)$ et $H_1$ le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$. Soit a la longueur du côté du triangle équilatéral.
Le point $M$ est à l'intérieur du triangle donc l'aire de $ABC$ est égale à la somme des aires des triangles $BMC$, $CMA$, $AMB$ :

$$a.AH_1 = a.MM_1 + a.MM_2 + a.MM_2$$

Soit enfin : $AH_1 = MM_1 + MM_2 + MM_2$.

**Revenons à nos moutons :**
Considérons un triangle équilatéral $ABC$ dont la hauteur mesure 1 mètre. Chaque position du point $M$ à l'intérieur du triangle $ABC$ modélise une cassure du bâton en trois morceaux. Ainsi les longueurs des trois morceaux après la cassure sont représentées par les distances $MM_1$, $MM_2$, $MM_3$ où $M_1$, $M_2$, $M_3$ sont les points définis précédemment. Soient $I$, $J$, $K$ les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.



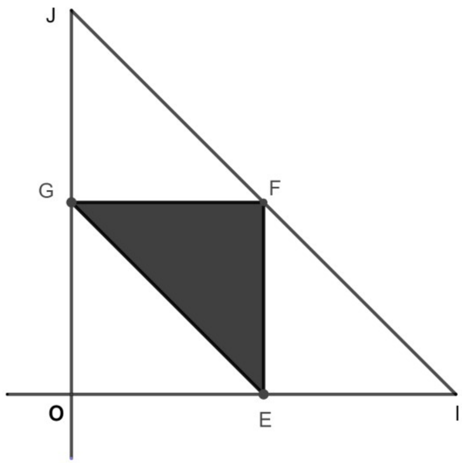

On remarque que tout point $M$ à l'intérieur du triangle $ABC$ mais à l'extérieur de $IJK$ définit une cassure du bâton où l'un des morceaux est plus grand que $1/2$, ce qui fait que l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée dans ce cas. Donc la seule zone pour laquelle, les distances $MM_1$, $MM_2$, $MM_3$ sont les longueurs des côtés d'un triangle est l'intérieur du triangle $IJK$.
Enfin, nous pouvons conclure que la probabilité cherchée est égale à $1/4$.

## Dégraissage 2

Notons $x$, $y$, $z = 1 - x - y$ les longueurs des trois morceaux du bâton.Toute cassure définit trois longueurs $x$, $y$, $z = 1 - x - y$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z = 1 - x - y \leq 1 \end{cases}$$

Ce système est représenté par l'intérieur du triangle $OIJ$donné ci-dessous dans un plan rapporté à un repère orthonormé$(O,I,J)$ :




Mais en tenant compte de la condition imposée, on rajoute au système précédent des inéquations qui expriment les inégalités triangulaires requises. Ainsi, cela nous ramène au système suivant :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq 1 - x - y \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - x - y \leq x + y \end{cases}$$

Soit enfin :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ x + y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ce dernier système est représenté par l'intérieur du triangle $EFG$ où $E = O * I$, $F = I * J$, $G = J * O$. Il apparait clairement que la probabilité cherchée est égale à $1/4$.

## Bosse 46

**Trouver le chiffre des unités dans le développement décimal du nombre $\left(\mathbf{15} + \sqrt{\mathbf{220}}\right)^{\mathbf{19}} + \left(\mathbf{15} + \sqrt{\mathbf{220}}\right)^{\mathbf{82}}$.**

### Dégraissage

On peut bien remarquer que $15 - \sqrt{220} < 0{,}2$ et à la calculatrice, on vérifie que :

$$\left(15 - \sqrt{220}\right)^{19} + \left(15 - \sqrt{220}\right)^{82} < (0{,}2)^{19} + (0{,}2)^{82} < 10^{-12}$$

Une astuce classique consiste à ajouter $\left(15 - \sqrt{220}\right)^{19} + \left(15 - \sqrt{220}\right)^{82}$ au nombre de départ $\left(15 + \sqrt{220}\right)^{19} + \left(15 + \sqrt{220}\right)^{82}$.

En fait, les nombres $X = \left(15 + \sqrt{220}\right)^{19} + \left(15 + \sqrt{220}\right)^{82}$ et $Y = \left(15 + \sqrt{220}\right)^{19} + \left(15 + \sqrt{220}\right)^{82} + \left(15 - \sqrt{220}\right)^{19} + \left(15 - \sqrt{220}\right)^{82}$ ont le même nombre d'unités dans leurs développements décimaux.

D'autre part, en développant, par exemple, $\left(15 + \sqrt{220}\right)^{19} + \left(15 - \sqrt{220}\right)^{19}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\left(15+\sqrt{220}\right)^{19}+\left(15-\sqrt{220}\right)^{19} &= \sum_{k=0}^{19}\left(\sqrt{220}\right)^{k}(15)^{19-k}+\sum_{k=0}^{19}\left(-\sqrt{220}\right)^{k}(15)^{19-k} \\ &= 2\sum_{k=0}^{9}(220)^{k}(15)^{19-2k}\end{aligned}$$

Donc le nombre $\left(15+\sqrt{220}\right)^{19}+\left(15-\sqrt{220}\right)^{19}$ est un entier divisible par $10$. Tel est aussi le cas du nombre $\left(15+\sqrt{220}\right)^{82}+\left(15-\sqrt{220}\right)^{82}$ et donc le nombre $Y$ est un entier divisible par le nombre $10$.

En conséquence, le chiffre des unités de $X=\left(15+\sqrt{220}\right)^{19}+\left(15+\sqrt{220}\right)^{82}$ est $9$ car on soustrait à $Y$ un nombre positif plus petit que $1$.

## Bosse 47

**Les dimensions des côtés d'un quadrilatère sont des nombres entiers tels que l'une quelconque d'entre elles divise la somme des trois autres. Démontrer que deux côtés au moins de ce quadrilatère sont égaux.**

### Dégraissage

Chaque dimension de côté divise aussi le périmètre $P$ du quadrilatère, somme de ce côté et des 3 autres. Considérons les quotients de ces divisions, soit $a \leq b \leq c \leq d$. Le plus grand côté mesure $P/a$, inférieur au demi-périmètre (sinon la chaîne des côtés ne se refermerait pas, ou en cas d'égalité le quadrilatère serait aplati). Ainsi $a > 2$. L'addition des côtés donne $P = P/a+P/b+P/c+P/d \leq 4P/a$, l'inégalité étant stricte si les côtés ne sont pas tous égaux. En ce cas $a < 4$, puis

$a = 3$, et s'il n'y a pas deux côtés égaux, $b \geq 4$, $c \geq 5$, $d \geq 6$ d'où :
$P \leq P/3 + P/4 + P/5 + P/6 = 19P/20 < P$, contradiction.

## Bosse 48

**On donne deux triangles rectangles d'aires respectives $S$ et $S'$ tels que le cercle inscrit dans le premier soit le cercle circonscrit au second. Montrer que :**

$$\frac{S}{S'} \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

## Dégraissage

On donne deux triangles $ABC$ et $A'B'C'$ rectangles respectivement en $A$ et $A'$, d'aires respectives $S$ et $S'$.
Le cercle inscrit dans le triangle $ABC$ est le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ ; on note $r$ son rayon et $O$ son centre.
On a :

$$S' = \frac{h \times B'C'}{2} = \frac{h \times 2r}{2} = hr \quad \text{avec } h \leq A'O, \qquad \text{donc } S' \leq r^2.$$

Posons $AB = c, AC = b, BC = a$, on a :

$$S = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) r = \left(\frac{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}{2}\right) r$$

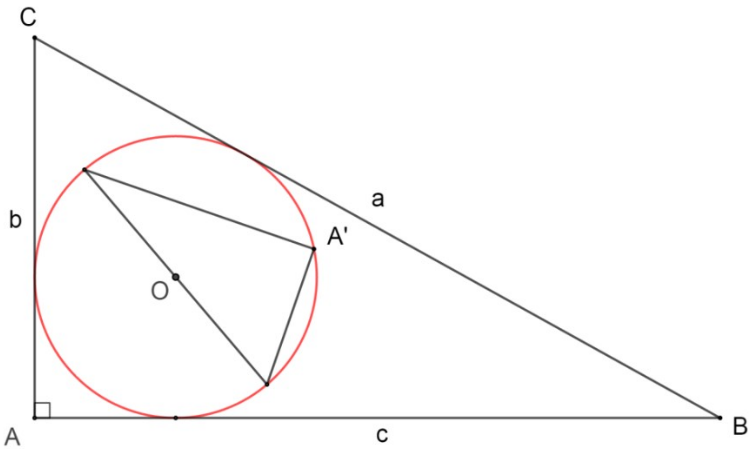
Les réels $b$ et $c$ étant positifs, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ et $b^2 + c^2 \geq 2bc$, donc :

$$a + b + c \geq \sqrt{2}(1+\sqrt{2})\sqrt{bc}.$$

On obtient :

$$S \geq (1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{bc}{2}}\, r, \qquad \text{soit} \quad S \geq (1+\sqrt{2})\sqrt{S}\, r,$$

Puis : $S \geq (1+\sqrt{2})^2 r^2$.




Des deux égalités $S' \leq r^2$ et $S \geq \left(1+\sqrt{2}\right)^2 r^2$, on déduit que :

$$\frac{S}{S'} \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

## Bosse 49

**Soit $f(n)$ le nombre de zéros dans l'écriture décimale de l'entier positif $n$. Quelle est la valeur de la somme :**

$$\boldsymbol{S = 2^{f(1)} + 2^{f(2)} + 2^{f(3)} + \cdots + 2^{f(999\ldots99)}}$$

**où le dernier nombre contient $10$ fois le chiffre $9$.**

## Dégraissage

On calcule le nombre des entiers naturels compris entre $1$ et $999\ldots99 = 10^{10}-1$ ayant $k$ zéros dans leur écriture décimale. Pour former un tel nombre constitué de $l$ chiffres ($k < l$), il faut placer $k$ zéros dans $l-1$ positions possibles, puis il faut choisir $l-k$ chiffres tous différents de zéro. Ainsi, le nombre des entiers compris entre $1$ et $10^{10}-1$ ayant $k$ zéros dans leur écriture décimale est :

$$\sum_{l=k+1}^{10} C_{l-1}^{k}\, 9^{l-k}.$$

La somme $S$ vaut donc :

$$\sum_{l=1}^{10}\sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^{k} 9^{l-k} \times 2^{k} = \sum_{l=1}^{10} 9^{l} \times \left(\frac{11}{9}\right)^{l-1} = \frac{9}{11}(10^{11}-1).$$

## Bosse 50

**Soient $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ deux entiers strictement positifs tels que :**

$$\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} < \sqrt{\mathbf{7}}$$

**Démontrer que $\boldsymbol{m/n + 1/(mn)} < \sqrt{\mathbf{7}}$.**

### Dégraissage

On a :

$$\frac{m}{n} < \sqrt{7} \quad \Longrightarrow \quad m^2 < 7n^2$$
$$\Longrightarrow \quad m^2 \leq 7n^2 - 1$$

Donc on va se demander, via la congruence modulo 7, si on peut avoir : $m^2 = 7n^2 - 1$ ou $m^2 = 7n^2 - 2$ ou $m^2 = 7n^2 - 3$. Pour cela, étudions les restes modulo 7 du carré d'un entier :

| $x \equiv \cdots\ [7]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 \equiv \cdots\ [7]$ | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |

Ainsi :

- Si $m^2 = 7n^2 - 1$ alors $m^2 \equiv -1 \equiv 6\ [7]$

Ce qui est impossible et donc nécessairement : $m^2 \leq 7n^2 - 2$.

- Si $m^2 = 7n^2 - 2$ alors $m^2 \equiv -2 \equiv 5\ [7]$
  Ce qui est impossible et donc nécessairement : $m^2 \leq 7n^2 - 3$.

L'égalité $m^2 = 7n^2 - 3$ est plausible car elle donne un résultat possible $m^2 \equiv -3 \equiv 4\ [7]$.

Enfin, on a $m^2 \leq 7n^2 - 3$ soit $m^2 + 3 \leq 7n^2$, et en multipliant par $m^2$, on trouve :

$$m^4 + 3m^2 \leq 7m^2n^2.$$

On sait que $m^4 + 3m^2 = m^4 + 2m^2 + m^2 \geq m^4 + 2m^2 + 1$ car on sait que $m \geq 1$.

D'où : $m^4 + 3m^2 \geq (m^2 + 1)^2$ et par suite $(m^2 + 1)^2 \leq 7m^2n^2$.

En divisant la dernière inégalité par $m^2n^2$, on obtient :

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{1}{m.n}\right)^2 \leq 7$$

En passant à la racine carrée, on trouve :

$$\frac{m}{n} + \frac{1}{m.n} \leq \sqrt{7}.$$

Mais comme $m/n + 1/mn \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$ alors l'inégalité est stricte.

## Bosse 51

**Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Prouver que s'il existe $y \in [15, 16]$ tel que $P(y) > 1921$, alors il existe un nombre rationnel $r \in [0, 1]$ tel que $P(r) > 1$.**

### Dégraissage

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $y \in [15, 16]$ tel que $P(y) > 1921$.

*Raisonnons par l'absurde* : supposons que pour tout rationnel $r \in [0, 1]$, on ait $P(r) \leq 1$.

Alors, puisque $P$ est continue et que l'ensemble des rationnels de $[0, 1]$ est dense dans $[0, 1]$, on a :

$$P(x) \leq 1, \text{ pour tout } x \in [0,1] \quad (1).$$

On pose $y = x + 15$ où $x \in [0, 1]$. On a :

$$P(y) = a(x + 15)^2 + b(x + 15) + c = P(x) + 15(2ax + b) + 225a.$$

Or $\begin{cases} P(0) = c \\ P(1) = a + b + c \\ 4P(1/2) = a + 2b + 4c \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 2P(0) - 4P(1/2) + 2P(1) \\ b = -3P(0) + 4P(1/2) - P(1) \end{cases}$

D'après ①, on a alors :

$$\begin{cases} |a| \leq 2|P(0)| + 4\left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right| + 2|P(1)| \leq 2 + 4 + 2 = 8 \\ |b| \leq 3|P(0)| + 4\left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right| + |P(1)| \leq 2 + 4 + 1 = 8 \end{cases}$$

D'autre part, la fonction $f : x \longmapsto 2ax + b$ est affine, donc elle atteint ses extremums sur $[0,1]$ en $0$ et en $1$. D'où, pour tout $x \in [0,1]$ : $|f(x)| \leq max\{|f(0)|, |f(1)|\} = max\{|b|, |2a + b|\}$.

Or, d'après ce qui précède :

$$|2a + b| = \left|P(0) - 4P\left(\frac{1}{2}\right) + 3P(1)\right| \leq |P(0)| + 4\left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right| + 3|P(1)| \leq 8$$

D'où, pour tout $x \in [0,1]$ : $|2ax + b| \leq 8$, et donc :

$$P(y) \leq |P(x)| + 15|2ax + b| + 225|a| \leq 1 + 15 \times 8 + 225 \times 8 = 1921$$

ce qui contredit la donnée $P(y) > 1921$.

Ainsi, il existe un rationnel $r \in [0,1]$ tel que $P(r) > 1$.

## Bosse 52

**Prouver que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, la partie entière du nombre :**

$$\boldsymbol{N = \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^n}$$

**est de la même parité que $n$.**

### Dégraissage

On pose :

$$u = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \quad v = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

On remarque que $u$ et $v$ sont solutions de l'équation du second degré $x^2 - 3x - 4 = 0$. De plus $v > 1$ et $-1 < v < 0$.
Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on note : $S_n = u^n + v^n$.
Alors :

$$S_1 = u + v = 3$$
$$S_2 = u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv = 17$$
$$S_3 = u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 63$$

Montrons que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $S_{n+2} = 3S_{n+1} + 4S_n$.
On sait que :

$$u^2 = 3u + 4 \quad \text{et} \quad v^2 = 3v + 4$$

En multipliant $u^2 = 3u + 4$ par $u^n$, et $v^2 = 3v + 4$ par $v^n$, puis en additionnant, on obtient :

$$S_{n+2} = 3S_{n+1} + 4S_n.$$

Comme 3 est impair et 4 est pair, on en déduit aisément par récurrence sur $n$ que pour $n \geq 1$, $S_n$ est un entier impair.
Ainsi, puisque $u^n = S_n - v^n$, on a :

- Si n est impair alors $-1 < v^n < 0$ et $S_n < u^n < S_n + 1$, d'où $\lfloor u^n \rfloor = S_n$ impair.
- Si n est pair alors $0 < v^n < 1$ et $S_n - 1 < u^n < S_n$, d'où $\lfloor u^n \rfloor = S_n - 1$ pair.

Ce qui achève la démonstration.

## Bosse 53

**Parmi les $5\,040\,(= 7!)$ entiers qu'on peut écrire avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 chacun utilisé une seule fois, démontrer qu'il n'y a pas deux dont l'un est multiple de l'autre.**

### Dégraissage

Tout entier de 7 chiffres écrit à l'aide d'une permutation des 7 chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 est congru à $1$ modulo $9$ puisque :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 \equiv 1\,[9].$$

Soit $A$ et $B$ deux nombres de cette catégorie tels que $B$ divise $A$.

$$B/A \Longrightarrow \exists c \in \mathbb{N} \text{ et que } A = c \times B$$

Comme $A \equiv B \equiv 1\,[9]$ alors $c \equiv 1\,[9]$ c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $c = 9k + 1$.

Le cas $c = 1$ étant écarté alors $k \geq 1$ et par suite $c \geq 10$.

Or, on sait que :

$$c = \frac{A}{B} \leq \frac{Max}{Min} = \frac{7654321}{1234567} \cong 6{,}20$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $c \geq 10$. D'où le résultat escompté.

## Bosse 54

**On considère les fonctions suivantes à valeurs dans $\mathbb{R}$ :**

$$\boldsymbol{f: x \longrightarrow x + 1; \quad g: x \longrightarrow \frac{x}{x+1}.}$$

**Par applications successives de $\boldsymbol{f}$ ou de $\boldsymbol{g}$, obtenir la fraction $\mathbf{9102/2019}$ à partir du nombre 1.**

### Dégraissage

Le principe est qu'il faut partir de la fin, et chercher à appliquer les réciproques de $f$ ou de $g$ c'est-à-dire $f^{-1}$ ou $g^{-1}$. En effet, $f$ et $g$ sont bijectives et :

$$f^{-1}: x \longrightarrow x - 1; \quad g^{-1}: x \longrightarrow \frac{x}{1-x}.$$

Puisque $1$ est positif, les images successives de $1$ par $f$ ou $g$ seront toujours positives.

Mais l'image par $g$ de $x > 0$ est un nombre $y$ plus petit que$1$, et l'image par $f$ de $x > 0$ est un nombre $y$ plus grand que $1$. Donc, à partir de là, le bon choix s'impose :

- Tant que $y > 1$, on applique $f^{-1}$ jusqu'au tarissement de la partie entière,
- Dès que $0 < y < 1$, on applique $g^{-1}$.

$$y = \frac{9102}{2019} > 1 \overset{f^{-4}}{\leftrightarrows} \frac{1026}{2019} < 1 \overset{g^{-1}}{\leftrightarrows} \frac{1026}{993} > 1 \overset{f^{-1}}{\leftrightarrows} \frac{11}{331}$$
$$\frac{11}{331} < 1 \overset{g^{-3}}{\leftrightarrows} 11 > 1 \overset{f^{-10}}{\leftrightarrows} 1$$
Ainsi, le cheminement qui ramène à $1$ à partir de $9102/2019$ est :

$$1 \overset{f^{10}}{\leftrightarrows} 11 \overset{g^{30}}{\leftrightarrows} \frac{11}{331} \overset{f}{\leftrightarrows} \frac{1026}{993} \overset{g}{\leftrightarrows} \frac{1026}{2019} \overset{f^4}{\leftrightarrows} \frac{9102}{2019}.$$

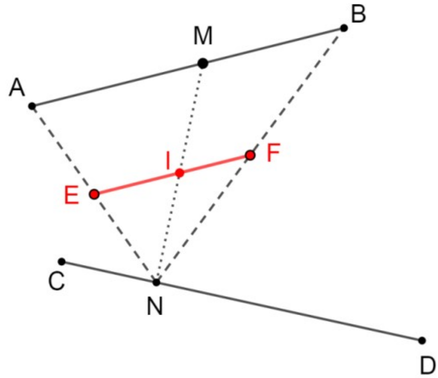
## Bosse 55

**Soit $[AB]$ et $[CD]$ deux segments du plan. Le point $M$ décrit $[AB]$ et $N$ décrit $[CD]$. Déterminer l'ensemble des points $I$, milieux de $[MN]$.**

### Dégraissage 1

Distinguons deux cas selon que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont sécantes ou parallèles.

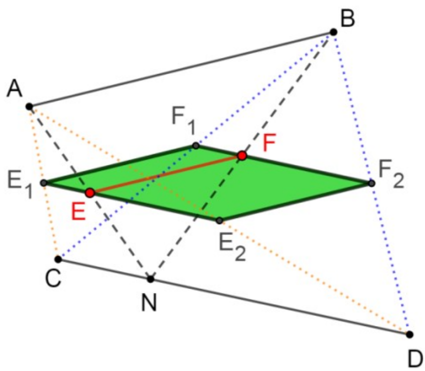
- **1^er cas : les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont sécantes en $O$ :**
  On a deux points $M$ et $N$ variables, donc d'un point de vue méthodologique, on doit en fixer un et examiner ce qui se passe pour le point $I$.
  Supposons $N$ fixe. On a : $\overrightarrow{NI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$.
  Cette relation vectorielle traduit le fait que $I$ est l'image de $M$ par l'homothétie de centre $N$ et de rapport $1/2$.
  Donc le point décrit le segment image de $[AB]$ par cette homothétie en l'occurrence le segment $[EF]$ avec $E = A * N$ et $F = B * N$.




Déterminons maintenant l'ensemble des segments $[EF]$ lorsque $N$ décrit le segment $[CD]$, ce qui revient à déterminer l'ensemble des points $E$ et celui des points $F$.

Quelque soit la position de $N$ sur $[CD]$, on a : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Ce qui signifie que le point $E$ décrit le segment image de $[CD]$ par $Hom(A, 1/2)$. Notons-le $[E_1E_2]$ tel que $E_1 = A * C$ et $E_2 = A * D$ comme le montre la figure :




Par économie de raisonnement, on peut conclure également que l'ensemble des points F est le segment $[F_1F_2]$ avec $F_1 = B * C$ et $F_2 = B * D$.

On a $E_1E_2F_2F_1$ est un parallélogramme puisque :

$$2\overrightarrow{E_1E_2} = 2\overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{CD}.$$

Donc le point $I$ se trouve à l'intérieur du parallélogramme $E_1E_2F_2F_1$, bords y compris.

**Réciproquement**, est-ce-que tout point $P$ de l'intérieur du parallélogramme $E_1E_2F_2F_1$ est le milieu d'un segment $[MN]$ avec $M \in [AB]$ et $N \in [CD]$ ?

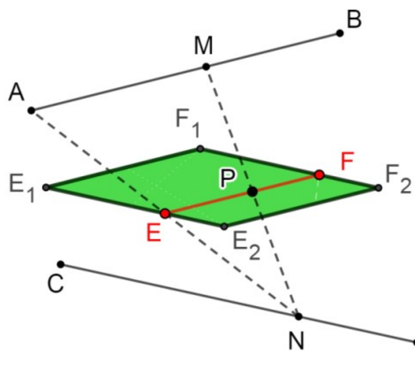
Soit $P$ un point à l'intérieur du parallélogramme $E_1E_2F_2F_1$. Traçons par $P$ la parallèle à $[E_1F_1]$, elle coupe les deux côtés $[E_1E_2]$ et $[F_1F_2]$ respectivement en $E$ et $F$. La droite $(AE)$ coupe $(CD)$ en $N$ : $E = A * N$, et $(NP)$ coupe $(AB)$ en $M$.

On a donc :

$$\left.\begin{matrix} E = A * N \\ (EP)//(AB) \end{matrix}\right\} \quad \text{entraîne} \quad P = M * N$$

En conclusion :

Le lieu du point $I$ est l'intérieur du parallélogramme $E_1E_2F_2F_1$, bords y compris.



# Dégraissage 2

Distinguons deux cas selon que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont sécantes ou parallèles.

On choisit comme origine le point $O$, intersection des droites $(AB)$ et $(CD)$. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $(CD)$ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de $(AB)$. Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on a :

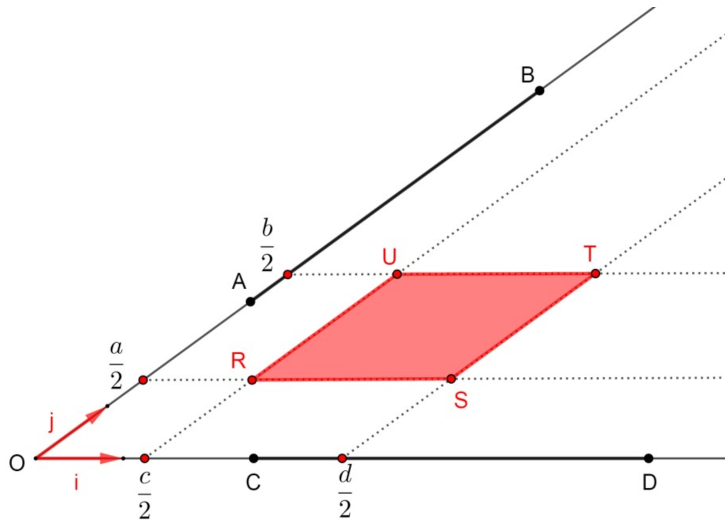
$A(0,a)$, $B(0,b)$, $C(c,0)$, $D(d,0)$, $M(0,y)$, $N(x,0)$ avec les inégalités :

$$c \leq x \leq d \text{ et } a \leq y \leq b.$$

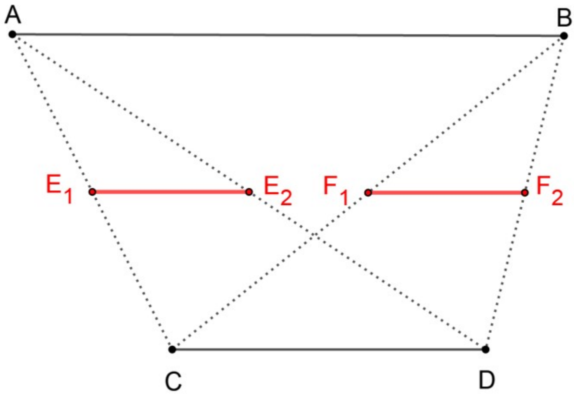
Les coordonnées du point $I = M * N$ sont donc :

$$\left(x_I = \frac{x}{2};\ y_I = \frac{y}{2}\right) \text{avec} \begin{cases} \frac{c}{2} \leq x_I \leq \frac{d}{2} \\ \frac{a}{2} \leq y_I \leq \frac{b}{2} \end{cases}$$

Ce qui définit bien un parallélogramme comme on le voit sur la figure suivante :



- **2[ème] cas : les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles :**
  Ce cas se passe de commentaires : on a un parallélogramme aplati $E_1E_2F_2F_1$.




## Bosse 56

**Soit $m = min\{x + 2y + 3z\}$ avec $x$, $y$, $z$ des réels positifs vérifiant $x^3y^2z = 1$. Calculer $m^3$.**

## Dégraissage

On peut décomposer $x + 2y + 3z$ et utiliser l'inégalité arithmético-géométrique (IAG) comme suit :

$$x + 2y + 3z = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + y + y + 3z \geq 6\sqrt[6]{\frac{1}{3}x.\frac{1}{3}x.\frac{1}{3}x.y.y.3z}$$

D'où, en tenant compte que $x^3y^2z = 1$ :

$$x + 2y + 3z \geq 6\sqrt[6]{\frac{1}{3}x.\frac{1}{3}x.\frac{1}{3}x.y.y.3z} = 6\sqrt[6]{\frac{1}{9}x^3y^2z} = 6\sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

De plus, on sait que le cas d'égalité dans l'IAG correspond à $\frac{1}{3}x = y = z = \frac{1}{6}\left(6\sqrt[6]{\frac{1}{9}}\right) = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$.

Donc le minimum de la quantité $x + 2y + 3z$ sous la contrainte $x^3y^2z = 1$ est bien $6\sqrt[6]{\frac{1}{9}}$.

Soit enfin :

$$m^3 = \left(6\sqrt[6]{\frac{1}{9}}\right)^3 = 6^3 \times \sqrt[2]{\frac{1}{9}} = \frac{6^3}{3} = 72.$$

## Bosse 57

**Quelle est la somme $S_n$ des plus grands diviseurs impairs des entiers $1, 2, 3, \dots, 2^n$, où $n$ est un entier naturel.**

### Dégraissage

Pour passer de $S_{n-1}$ à $S_n$, il suffit à $S_{n-1}$ les plus grands diviseurs impairs des entiers $2^{n-1} + 1,\ 2^{n-1} + 2,\ 2^{n-1} + 3,\ \dots,\ 2^n$. Tout entier parmi les entiers $2^{n-1} + 1,\ 2^{n-1} + 2,\ 2^{n-1} + 3,\ \dots,\ 2^n$ s'écrit sous la forme $2^\alpha(2\beta + 1)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. Le plus grand diviseur impair d'un tel entier est alors $2\beta + 1$. Réciproquement, si $2\beta + 1$ est un entier impair plus petit que $2^n$, alors il existe un unique entier parmi les nombres $2^{n-1} + 1$, $2^{n-1} + 2$, $2^{n-1} + 3$, …, $2^n$ dont $2\beta + 1$ soit le plus grand diviseur impair.

D'où la relation de récurrence :

$$S_n = S_{n-1} + (1 + 3 + 5 + \dots + 2 \times 2^{n-1} - 1) \text{ pour } n \geq 2.$$

On sait que :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2 \times 2^{n-1} - 1) = (2^{n-1})^2 = 4^{n-1}.$$

D'où :

$$S_n - S_{n-1} = 4^{n-1}$$
$$S_{n-1} - S_{n-2} = 4^{n-2}$$

$$S_{n-2} - S_{n-3} = 4^{n-3}$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$S_3 - S_2 = 4^1$$
$$S_2 - S_1 = 1$$

En télescopant ces sommes, nous obtenons :

$$S_n = S_1 + 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{n-1} = 1 + \frac{4^n - 1}{3} = \frac{4^n + 2}{3}.$$

## Bosse 58________________________________

**Déterminer la plus petite valeur de l'entier $n$ pour la quelle le premier chiffre de gauche du nombre $2^n$ soit égale à 7.**

## Dégraissage

Si $p$ désigne le nombre de chiffres de $2^n$ dans le système décimal alors on peut se permettre d'écrire :

$$7 \times 10^{p-1} \leq 2^n < 8 \times 10^{p-1}$$

D'où, la fonction logarithme décimal étant croissante :

$$p - 1 + \log 7 \leq n \times \log 2 < p - 1 + \log 8$$

Soit :

$$\frac{p-1}{\log 2} + \frac{\log 7}{\log 2} \leq n < \frac{p-1}{\log 2} + \frac{\log 8}{\log 2}$$

L'intervalle $\left[\frac{p-1}{\log} + \frac{\log 7}{\log 2}, \frac{p-1}{\log} + \frac{\log 8}{\log 2}\right[$ a une amplitude constante égale à $(\log 8 - \log 7)/\log 2 \cong 0{,}18 < 1$.

De ce fait cet intervalle ne contient pas forcément un entier. Pour cela, nous devons faire varier $p$ et choisir comme valeur de $n$ le premier entier contenu dans un tel intervalle.

Après avoir testé, successivement, les valeurs $p = 1, 2, 3, \dots, 13, 14$, on a trouvé que l'intervalle obtenu pour $p = 14$ contient l'entier $46$.

Donc la première puissance entière de $2$ qui commence par le chiffre $7$ est $2^{46}$. D'ailleurs, la calculatrice affiche :

$$2^{46} = 70\,368\,744\,177\,664.$$

## Bosse 58

**Soient $P_1$, $P_2$, $P_3$, …, $P_n$ des points du plan, $n \geq 2$. Montrer que :**

$$\underset{1\leq i<j\leq n}{\mathbf{Max}} P_iP_j > \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{n}-1\right) \times \underset{1\leq i<j\leq n}{\mathbf{Min}} P_iP_j$$

**où $P_iP_j$ est la distance euclidienne entre $P_i$ et $P_j$.**

### Dégraissage

Posons :

$$\mathrm{a} = \underset{1\leq i<j\leq n}{\mathrm{Min}} P_iP_j \quad ; \quad b = \underset{1\leq i<j\leq n}{\mathrm{Max}} P_iP_j$$

On va utiliser le résultat évident : « il existe un disque de rayon $r \leq b/\sqrt{3}$ contenant tous les points $P_i$ ».

De plus les disques de centre $P_i$ et de rayon $a/2$ sont disjoints et inclus dans un disque de rayon $b/\sqrt{3} + a/2$ ; donc, en comparant les aires, on a :

$$n\pi\frac{a^2}{4} < \pi\left(\frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2}\right)^2$$

D'où finalement :

$$b > \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{n}-1\right)a.$$

## Bosse 59

**Soit $A$ un point fixe du plan. On considère deux demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$ qui pivotent autour de $A$, et deux points variables $B$ sur $[Ax)$ et $C$ sur $[Ay)$ de telle manière que :**

$$\begin{cases} AB + AC = \ell \\ ([Ax),[Ay)\,) = \alpha \end{cases}$$

**où $\ell$ est un réel strictement positif donné et $\alpha$ un réel fixé de l'intervalle $]0,\pi[$.**

**Déterminer le lieu géométrique du centre $\Omega$ du cercle circonscrit au triangle $ABC$.**

## Dégraissage

On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, et en appliquant la formule d'Al Kashi, on trouve :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\alpha$$

On pose $AB = x$ $(0 \leq x \leq \ell)$ et donc $AC = \ell - x$. Donc, on peut réécrire alors l'égalité précédente :

$$BC^2 = x^2 + (\ell - x)^2 - 2x \times (\ell - x) \times \cos\alpha$$
$$BC^2 = 2(1 + \cos\alpha)x^2 - 2(1 + \cos\alpha)\ell x + \ell^2$$

Dérivons $BC^2$ par rapport à $x$ :

$$(BC^2)'_x = 4(1 + \cos\alpha)x - 2(1 + \cos\alpha)\ell$$

D'où :

$$(BC^2)'_x = 0 \iff x = \frac{2(1 + \cos\alpha)\ell}{4(1 + \cos\alpha)} = \frac{\ell}{2}$$

Maintenant comme $1 + \cos\alpha > 0$ alors $BC^2$ admet un maximum $m$ atteint pour $x = \ell/2$. Donc $m \leq BC < l$. Si $R$ désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle $ABC$ alors :

$$R = \frac{BC}{2\sin\alpha}$$

D'où :

$$\frac{m}{2\sin\alpha} \leq A\Omega < \frac{\ell}{2\sin\alpha}$$

Donc $\Omega$ décrit la couronne de centre $A$ et de rayons $m/2\sin\alpha$ et $\ell/2\sin\alpha$.

## Bosse 60________________________________

**Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $a$, $b$, $c$ des réels strictement positifs tels que $a^n + b^n = c^n$. Pour quel entier k, existe-t-il un triangle obtusangle (i.e avec un angle obtus) dont les longueurs sont $a^k$, $b^k$, $c^k$ ?**

## Dégraissage

Convenons qu'un triangle rectangle ou aplati n'est pas obtusangle, afin d'éviter les cas dégénérés.
Montrons tout d'abord que si $a^n + b^n = c^n$, alors $a^m + b^m < c^m$ pour tout $m > n$. En effet, le nombre $c$ est strictement plus grand que $a$ et $b$, et donc :

$$a^m + b^m < a^n c^{m-n} + b^n c^{m-n} = (a^n + b^n)c^{m-n} = c^m$$

On en déduit que si $k \geq n$, les nombres $a^k$, $b^k$, $c^k$ ne sont pas les longueurs des côtés d'un triangle.
On montre de même que si $k < n$, les nombres $a^k$, $b^k$, $c^k$ sont bien les longueurs des côtés d'un triangle (comme $c^k$ est la plus grande longueur, il suffit de vérifier que l'on a $c^k < a^k + b^k$).
Notons $\alpha$ l'angle opposé au côté de longueur $a^k$.
La relation d'Al Kashi s'écrit $a^{2k} = b^{2k} + c^{2k} - 2b^k c^k \cos\alpha$.
Ainsi $\alpha$ est aigu (ou droit), i.e. $\cos\alpha \geq 0$, si et seulement si $a^{2k} \leq b^{2k} + c^{2k}$. En écrivant les relations analogues pour les autres angles, on voit que le triangle est acutangle si et seulement si $a^{2k}$, $b^{2k}$, $c^{2k}$ sont les longueurs des côtés d'un triangle (éventuellement aplati), c'est-à-dire $2k \leq n$ d'après ce qui précède.
Finalement, les $k$ qui conviennent sont les réels de l'intervalle $]n/2, n[$.

## Bosse 61

**Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ :** $\begin{cases} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2 = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} \\ (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})^2 = \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{y} \\ (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})^2 = \boldsymbol{z}^2 + \boldsymbol{z} \end{cases}$

## Dégraissage

On note $(S)$ le système à résoudre.
Soient $x$, $y$, $z$ des nombres complexes.

- Si $x = -1$ et $(x, y, z)$ vérifie $(S)$, alors on en déduit immédiatement que $y = -1$, puis $z = -1$.
  Réciproquement : $(-1, -1, -1)$ est bien une solution du système. Bien entendu, si $y = -1$ ou $z = -1$, on retrouve la même solution.

On suppose donc que $x$, $y$, $z$ dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

- L'équation $(x - y)^2 = x^2 + x$ est équivalente à $x(2y + 1) = y^2$, c'est-à-dire :

$$y \neq -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{y^2}{y + 1}$$

  ou encore :

$$\frac{x}{x + 1} = \left(\frac{y}{y + 1}\right)^2$$

  Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(t) = \frac{t}{t + 1}$$

  En raisonnant comme ci-dessus sur les deux autres équations, on déduit que, sous la contrainte $x \neq -1$, $y \neq -1$, $z \neq -1$, le système $(S)$ est équivalent à :

$$(S') \begin{cases} f(x) = [f(y)]^2 \\ f(y) = [f(z)]^2 \\ f(z) = [f(x)]^2 \end{cases}$$

  Si $(x, y, z)$ vérifie $(S')$, alors $f(x) = [f(x)]^8$, c'est-à-dire $f(x).([f(x)]^7 - 1) = 0$.

  - Si $f(x) = 0$, alors $x = 0$. D'où $y = z = 0$.

  Réciproquement : $(0, 0, 0)$ est bien une solution de $(S')$.

  - Si $[f(x)]^7 = 1$, alors $f(x) = e^{2ik\pi/7}$ où $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$. Or $f(x) = x/(x + 1) \neq 1$, donc $k \neq 0$. Dans ces conditions, il vient :

$$x = \frac{e^{2ik\pi/7}}{1 - e^{2ik\pi/7}} = \frac{e^{ik\ \ /}}{-2i\sin(k\pi/7)} = \frac{1}{2}\left(-1 + i.\cot\left(\frac{k\pi}{7}\right)\right)$$

    En remplaçant dans $(S')$, on obtient :

$$y = \frac{1}{2}\left(-1 + i.\cot\left(\frac{4k\pi}{7}\right)\right)\ ,\ \ z = \frac{1}{2}\left(-1 + i.\cot\left(\frac{2k\pi}{7}\right)\right)$$

Enfin les triplets solutions sont $(0,0,0)$, $(-1,-1,-1)$ et ceux de la forme :

$$\left(\frac{1}{2}\left(-1 + i.\cot\left(\frac{k\pi}{7}\right)\right), \quad \frac{1}{2}\left(-1 + i.\cot\left(\frac{4k\pi}{7}\right)\right), \quad \frac{1}{2}\left(-1 + i.\cot\left(\frac{2k\pi}{7}\right)\right)\right)$$

où $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

## Bosse 62

**Les trois aiguilles d'une horloge (celle des heures, celle des minutes et celle des secondes) peuvent-elles former entre elles des angles de 120° ?**

### Dégraissage

Si les trois aiguilles (celle des heures, celle des minutes et celle des secondes) forment entre elles des angles de 120° et si on suppose que le cadran de l'horloge est subdivisé en 60 divisions, chaque extrémité d'aiguilles (supposées égales) est distante de l'autre de 20 divisions.

Si à cet instant, l'extrémité de l'aiguille des heures marque $\beta$ divisions à partir de midi, l'extrémité de l'aiguille des minutes sera sur la division $\beta + 20$ et celle de l'aiguille des secondes sur la division $\beta + 40$. Ou inversement celle de l'aiguille des secondes sur $\beta + 20$ et celle de l'aiguille des minutes sur $\beta + 40$.

Montrons qu'aucun de ces deux cas ne peut se produire.

En effet, dans le 1er cas, on a :

$$\begin{cases} 60n + \beta + 20 = 12\beta \\ 60n' + \beta + 40 = 720\beta \end{cases}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} 60n + 20 = 11\beta \\ 60n' + 40 = 719\beta \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{3n+1}{3n'+2} = \frac{11}{719}$$

ou encore : $11(3n'+2) = 719(3n+1)$ ①

Mais : $11 \equiv 2 \ [3]$ et $719 \equiv 2 \ [3]$

Donc : $11(3n'+2) \equiv 1 \ [3]$ et $719(3n+1) \equiv 2 \ [3]$. D'où l'impossibilité de l'égalité ①.

L'autre cas aboutirait à une égalité $719(3n+2) = 11(3n'+1)$ et le même raisonnement fait aboutir à une impossibilité.

## Bosse 63

**Trouver le plus petit nombre réel $k$ tel que, pour tout triangle d'aire $S$ et de périmètre $2p$, on ait $S \leq kp^2$.**

### Dégraissage

La formule de Héron permet d'écrire :

$$\frac{S}{p^2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2} = \sqrt{\left(1-\frac{a}{p}\right)\left(1-\frac{b}{p}\right)\left(1-\frac{c}{p}\right)}$$

On remarque que les nombres $1 - a/p$, $1 - b/p$ et $1 - c/p$ sont tous les trois positifs et de somme égale à 1.

Or, on sait, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, que pour trois réels positifs x, y, z, on a :

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

Et qu'il y a égalité si et seulement si $x = y = z$.

D'où la quantité $\sqrt{(1-a/p)(1-b/p)(1-c/p)}$ atteint son maximum si et seulement si $1 - a/p = 1 - b/p = 1 - c/p = 1/3$ c'est-à-dire si $a = b = c = 2p/3$. Ainsi :

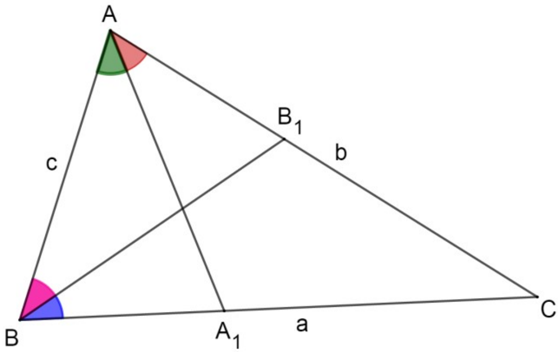
$$\frac{S}{p^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{p}\right)\left(1 - \frac{b}{p}\right)\left(1 - \frac{c}{p}\right)} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{9} = k.$$

## Bosse 64

**Montrer qu'un triangle a deux bissectrices de même longueur si, et seulement si, il est isocèle.**

### Dégraissage

Soit $a$, $b$, $c$ les longueurs des côtés d'un triangle $ABC$. $A_1$ est le pied de la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ et $B_1$ le pied de la bissectrice intérieure de $\widehat{CBA}$.




On a $A_1 \in [BC]$ et $B_1 \in [AC]$ et par suite :

$$\frac{BA_1}{c} = \frac{CA_1}{b} = \frac{a}{b+c}$$

(En effet $A_1 = bar\{(B,b);(C,c\})$. D'où :

$$BA_1 = \frac{ac}{b+c}, \quad CA_1 = \frac{ab}{b+c}.$$

On applique la relation d'Al Kashi dans le triangle $BAA_1$:

$$BA_1{}^2 = AB^2 + AA_1{}^2 - 2AB \times AA_1 \times \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

Soit :

$$\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 = c^2 + {AA_1}^2 - 2c \times AA_1 \times \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) ①$$

Et également dans le triangle $CAA_1$ :

$${CA_1}^2 = AC^2 + {AA_1}^2 - 2AC \times AA_1 \times \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

Soit :

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 = b^2 + {AA_1}^2 - 2b \times AA_1 \times \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) ②$$

En effectuant l'opération ① $\times b -$ ② $\times c$, et après simplification par $b - c$, on obtient :

$${AA_1}^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(-a+b+c).$$

Le même raisonnement nous conduit également à une formule similaire pour ${BB_1}^2$ :

$${BB_1}^2 = \frac{ca}{(c+a)^2}(a+b+c)(a-b+c).$$

On a, en posant $2p = a + b + c$ :

$${AA_1}^2 = {BB_1}^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(-a+b+c) = \frac{ca}{(c+a)^2}(a+b+c)(a-b+c).$$

$$\Updownarrow$$

$$b\frac{(2p-b)^2}{p-b} = a\frac{(2p-a)^2}{p-a}$$

Donc l'égalité ${AA_1}^2 = {BB_1}^2$ est vérifiée si, et seulement si, on a :$f(a) = f(b)$ avec $f$ la fonction définie sur $]0; p[$ par :

$$f(x) = \frac{x(2p-x)^2}{p-x}.$$

La fonction $f$ est dérivable et sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{-2x^3 + 7px^2 - 8p^2x + 4p^2}{(p-x)^2}.$$

Donc la dérivée est du même signe que l'expression :

$$g(x) = -2x^3 + 7px^2 - 8p^2x + 4p^2.$$

Étudions le signe de $g(x)$ sur $[0;\, p]$.

On a : $g'(x) = -6x^2 + 14px - 8p^2$ , en fait $g'(x) = 0$ pour $x = p$ et pour $x = 4p/3$. Donc selon la règle des signes du trinôme du second degré, $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0;\, p]$. Ce qui entraîne que $g$ est strictement décroissante sur $[0;\, p]$ avec $g(p) = 0$. Donc $g(x) > 0$ pour tout $x \in ]0;\, p[$ et par suite $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0;\, p[$.

Donc, en conclusion la fonction $f$ est strictement croissante sur $]0;\, p[$, et par conséquent : $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$

Ce qui donne enfin CQFD : ${AA_1}^2 = {BB_1}^2 \Leftrightarrow a = b$.

## Bosse 65

**A tout entier $\boldsymbol{n}$, on associe $\boldsymbol{k(n)}$ le plus petit chiffre figurant dans l'écriture de $\boldsymbol{n}$ en système décimal.**

**Par exemple : $\boldsymbol{K(6735) = 3}$. Calculer :**

$\boldsymbol{A = k(1\,000\,000\,000) + k(1\,000\,000\,001) + \cdots + k(9\,999\,999\,999)}$

### Dégraissage

Le nombre d'entiers de $10$ chiffres ne comportant que les chiffres de 1 à 9 est $9^{10}$. Il y en a $8^{10}$ qui ne contiennent que les chiffres de2 à 8. On a donc $9^{10} - 8^{10}$ nombres pour lesquels $k$ vaut $1$. De même on a $8^{10} - 7^{10}$ pour lesquels $k$ vaut $2$, etc.

Le nombre cherché $A$ est donc :

$$\begin{aligned} A &= (9^{10} - 8^{10}) + 2(8^{10} - 7^{10}) + 3(7^{10} - 6^{10}) + \cdots + 8(2^{10} - 1^{10}) + 9 \\ &= 9^{10} + 8^{10} + \cdots + 1^{10} = 4\,914\,341\,925. \end{aligned}$$

## Bosse 66

**Lequel de ces deux nombres est le plus grand :**

$$\boldsymbol{A = (20192020!)^2} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{B = 20192020^{20192020}}\ \textbf{?}$$

## Dégraissage 1

Pour tout entier $k$ tel que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$k.[n-(k-1)] = nk - k^2 + k = \boldsymbol{n} + \underbrace{nk - k^2 - \boldsymbol{n} + k}_{=(k-1)(n-k)\geq 0} \geq n$$

Il y a égalité entre $k.[n-(k-1)] = n$ si $k = 1$ ou $k = n$.

Donc pour tout entier $n \geq 2$ :

$$(n!)^2 = (1 \times 2 \times \ldots \times n)(\mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \ldots \times \boldsymbol{n})$$
$$= (1 \times \boldsymbol{n})(2 \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})) \times \ldots \times ((n-1) \times \mathbf{2})(n \times \mathbf{1})$$
$$> \underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n}_{n\, fois\, "n"} = n^n$$

Et la conclusion s'en déduit en prenant $n = 20192020$.

## Dégraissage 2

Démontrons que $(n!)^2 > n^n$ pour $n \geq 3$.

- On a $(3!)^2 = 36 > 27 = 3^3$, donc l'inégalité vraie pour $n = 3$.
- Supposons que pour un $k \geq 3$, on a $(k!)^2 > k^k$.

**Lemme**

Pour tout $k \geq 3$ ; on a :

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 3.$$

**Démonstration du lemme**

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \sum_{p=0}^{k} C_k^p \frac{1}{k^p} = 1 + \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p!} \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{k \times k \times \ldots k}$$
$$\leq 1 + \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{2^{p-1}} < 1 + 2 = 3$$

**Retour à notre problème :**

Par hypothèse de récurrence : $(k!)^2 > k^k$

En multipliant par $k+1$ :

$$(k!)^2(k+1) > k^k(k+1) > 3k^n > k^k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = k^k\frac{(1+k)^k}{k^k}$$

En multipliant encore par $k+1$ : $(k!)^2(k+1)^2 > (1+k)^{1+k}$.
Ainsi, on a établi l'inégalité $(n!)^2 > n^n$, ce qui justifie l'inégalité demandée.

# Dégraissage 3

On a :

$$\begin{aligned}\ln[(n!)^2] &= 2\ln(n!) = 2[\ln(1)+\ln(2)+\cdots+\ln(n)]\\ &\geq 2[(\ln(2)-\ln(1))+(\ln(3)-\ln(2))+\cdots+(\ln(n)-\ln(n-1))]\\ &= 2\left[\int_1^2 \ln(t)\,dt + \int_2^3 \ln(t)\,dt + \cdots + \int_{n-1}^n \ln(t)\,dt\right] = 2\int_1^n \ln(t)\,dt\end{aligned}$$

Or, on sait que :

$$\begin{aligned}2\int_1^n \ln(t)\,dt &= 2[t\ln(t)-t]_1^n = 2(n\ln(n)-n+1)\\ &= n\ln(n)+n(\ln(n)-2)+2 > n\ln(n) = \ln(n^n)\end{aligned}$$

puisque pour $n \geq e^2$, on a $\ln(n)-2>0$.
Ainsi, on a trouvé que : $\forall n \geq 8\ (\geq e^2),\ \ \ln[(n!)^2] > \ln(n^n)$
En appliquant la fonction exponentielle aux deux côtés, on obtient $(n!)^2 > n^n$ pour tout $n \geq 8$.

# Dégraissage 4

Considérons les $n-1$ nombres suivants :

$$\frac{1}{1\times 2},\quad \frac{1}{2\times 3},\quad \frac{1}{3\times 4},\quad \cdots\quad ,\frac{1}{(n-1)\times n}$$

Ils ont pour moyenne arithmétique $ma$ et moyenne géométrique $mg$ :

$$ma = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}\right]$$

$$ma = \frac{1}{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$ma = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n$$

$$mg = \left(\frac{1}{1\times 2} \times \frac{1}{2\times 3} \times \ldots \times \frac{1}{(n-1)\times n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{n}{(n!)^2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

La moyenne arithmétique d'une suite de nombres distincts étant toujours supérieure à sa moyenne géométrique, on peut conclure que pour tout $n > 2$ :

$$ma = \frac{1}{n} > \left(\frac{n}{(n!)^2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

ou

$$\left(\frac{(n!)^2}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} > n$$

soit

$$\frac{(n!)^2}{n} > n^{n-1}$$

Et enfin : $(n!)^2 > n^n$. La conclusion en découle en prenant $n = 20192020$.

## Bosse 67

**Existe-t-il un triangle d'aire entière dont les mesures des côtés sont des entiers naturels premiers ?**

### Dégraissage

Soient $a$, $b$, $c$ les mesures des côtés du triangle $ABC$. On suppose $a$, $b$, $c$ premiers. On sait que l'aire $S$ du triangle $ABC$ est donnée par la formule de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{où} \quad 2p = a + b + c \quad (*).$$

Donc en remplaçant $p$ par sa valeur et en élevant au carré, on obtient :

$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

Envisageons deux cas :

- Cas où $a, b, c$ sont tous trois $> 2$ :
  Alors les trois entiers $a, b, c$ sont impairs et donc il en est de même des sommes alternées $a+b+c$, $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$.
  D'où :
  $$a+b+c \equiv a+b-c \equiv a+c-b \equiv b+c-a \equiv 1 \ [2].$$
  Or, de toute évidence, on sait que $16S^2 \equiv 0 \ [2]$, et donc l'égalité $(*)$ conduit à la congruence fausse : $0 \equiv 1 \ [2]$.
  Finalement, il n'existe pas un tel triangle avec $a, b, c$ tous trois premiers supérieurs strictement à 2.

- Cas où l'un au moins des entiers $a, b, c$ est égal à 2 :
  Supposons, par exemple, $a \leq b \leq c$.
  - On prend $a = 2$, $b$ et $c$ impairs : alors l'inégalité triangulaire $c < b + a$ devient $c < b + 2$ et par suite on peut écrire $b \leq c < b + 2$. Cela laisse deux possibilités à $c$ : $c = b + 1$ (impossible car de parités différentes) ou $c = b$. Donc on trouve un triangle isocèle dont les côtés mesurent $2, b, b$ et son aire est $S = \sqrt{b^2 - 1}$.
    Vérifions si $S = \sqrt{b^2 - 1}$ est entier ou non :
    On sait que l'écart entre les carrés de deux entiers consécutifs $k$ et $k+1$ vaut $2k+1$, ce qui fait que $b^2$ et $b^2 - 1$ sont des carrés parfaits si, et seulement, si $2k + 1 = 0$ soit $k = 0$ et donc $b = 1$ qui n'est pas premier.
    Donc $S = \sqrt{b^2 - 1} \notin \mathbb{N}$.
  - On prend $a = 2$, $b = 2$ : l'inégalité $c < b + a$ ne laisse que deux possibilités pour $c$ : $c = 2$ ou $c = 3$.
    Pour $c = 2$ ; on a un triangle équilatéral d'aire :
    $$S = \sqrt{3} \notin \mathbb{N}.$$
    Pour $c = 3$, on a un triangle isocèle d'aire $S = 3\sqrt{3}/8 \notin \mathbb{N}$.

En conclusion, il n'existe pas de triangle d'aire entière dont les mesures des côtés sont des nombres premiers.

## Bosse 68

**Déterminer le premier chiffre de gauche du nombre $3^{2020}$.**

### Dégraissage

Si $p$ désigne le nombre de chiffres de $3^{2020}$ et $k$ son premier chiffre de gauche alors nécessairement :

$$k \times 10^{p-1} \leq 3^{2020} < (k+1) \times 10^{p-1} \text{ avec } 1 \leq k \leq 9$$

En prenant le logarithme décimal de chacun des nombres, on obtient : $p - 1 + \log k \leq 2020 \log 3 < p - 1 + \log(k+1)$

Soit : $\log k \leq 2020 \log 3 - p + 1 < \log(k+1)$

Or, on sait que $p = 1 + Ent(2020 \log 3) = 964$, d'où $k$ est l'entier tel que :

$$k \leq 10^{2020 \log 3 - 963} \cong 6{,}094 \quad \text{et} \quad 10^{2020 \log 3 - 963} - 1 \cong 5{,}094 < k.$$

Donc, finalement $k = 6$.

## Bosse 69

**Soit $P$ un polynôme à coefficients réels vérifiant :**

$$\begin{cases} \deg(P) = 2019 \\ \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 2019 \implies P(n) = \dfrac{n}{n+1} \end{cases}.$$

**Calculer $P(2020)$.**

### Dégraissage

On définit le polynôme $Q$ à coefficients réels par :

$$Q(x) = (x+1)P(x) - x.$$

D'abord Q est de degré 2020 puisque $xP(x)$ est de degré $2020$ et $p(x) - x$ de degré $2019$.

Ensuite, $Q$ a $2020$ racines réelles qui sont tous les entiers compris entre $0$ et $2019$ inclusivement. En effet, pour $0 \leq n \leq 2019$, on a :

$$Q(n) = (n+1)P(n) - n = (n+1) \times \frac{n}{n+1} - n = 0.$$

Ainsi, le polynôme $Q$ étant de degré $2020$, ces racines sont toutes les racines de $Q$ et on peut écrire :

$$Q(x) = A \prod_{k=0}^{k=201} (x-k)$$

avec $A \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer la valeur du nombre $A$, on peut évaluer $Q$ en $(-1)$ à l'aide de la définition de $Q$ :

$$Q(-1) = (-1+1)P(-1) + 1 = 1$$

De plus on peut calculer $A$ :

$$A = \frac{Q(-1)}{\prod_{k=0}^{2019}(-1-k)} = \frac{1}{(-1)^{2020}\prod_{k=0}^{2019}(1+k)} = \frac{1}{2020!}.$$

Finalement, on calcule la valeur de $Q(2020)$ :

$$Q(2020) = \frac{1}{2020!} \prod_{k=0}^{k=2019} (2020-k) = \frac{2020!}{2020!} = 1.$$

On peut donc en déduire celle de $P(2020)$ :

$$P(2020) = \frac{Q(2020) + 2020}{2020+1} = \frac{2021}{2021} = 1.$$

## Bosse 70

**On suppose que l'on a colorié tous les points du plan à l'aide de trois couleurs : rouge (R), vert (V) et bleu (B). Montrer que quelle que soit la distance $a$, il existe deux points du plan ayant la même couleur et qui sont distants de $a$.**

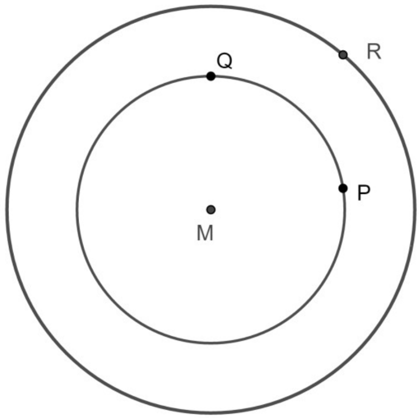
### Dégraissage

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'en soit pas ainsi.

Soit $M$ un point, ROUGE pour fixer les idées, et soit le cercle de centre $M$ et de rayon $a$.
Soit $P$ et $Q$ deux points de ce cercle, distants de $a$. Ils sont nécessairement de couleurs différentes sans pouvoir être ROUGES.
Considérons alors le point $R$ tel que $MQRP$ soit un losange. Le point $R$ appartient au cercle de centre $M$ et de rayon $a\sqrt{3}$.

Considérons alors le point $R$ tel que $MQRP$ soit un losange. Le point $R$ appartient au cercle de centre $M$ et de rayon $a\sqrt{3}$.

Le point $R$ ne pouvant être ni de la couleur de $P$, ni de la couleur de $Q$, est ROUGE.




On en déduit que le cercle de centre $M$ et de rayon $a\sqrt{3}$ est unicolore, donc qu'il existe deux points de ce cercle, distants de $a$, et ayant la même couleur.

## Bosse 71

**On donne la somme $1+2+3+4+5+\cdots.+94+95+96$ des entiers de 1 à 96.**
**Si, dans cette somme, on supprime des signes d'addition (en remplaçant, par exemple, $2+3$ par $23$, ou $2+3+4$ par $234$), on obtient une nouvelle somme.**
**Quel est le nombre minimum de signes d'addition qu'il faut supprimer pour obtenir un total de $9696$ ?**

## Dégraissage

En concaténant $N$ et $N+1$, dans une somme contenant ces deux termes, on augmente la somme de :

- $9N$ si $N+1$ est un nombre à 1 chiffre ($9 < 9N < 72$),
- $99N$ si $N+1$ est un nombre à 2 chiffres ($891 < 99N < 9405$),
- $999N$ si $N+1$ est un nombre à 3 chiffres ($98\,901 < 999N$), impossible ici car $N+1$ vaut au maximum 96.

En concaténant $N$, $N+1$, $N+2$, dans une somme contenant ces trois termes, on augmente la somme de :

- $9(12N+1)$ si $N+2$ est un nombre à 1 chiffre ($117 < 9(12N+1) < 765$),
- $9 \times 987$ si $N = 8$,
- $99(102N+1)$ si $N+1$ est un nombre à 2 chiffres au plus égal à 95
  ($90\,981 \leq 99(102N+1) \leq 949311$).

En concaténant $N$, $N+1$, $N+2$, $N+3$, dans une somme contenant ces quatre termes, on augmente la somme de $9(123N+13)$ si $N+3$ est un nombre à 1 chiffre
($1224 \leq 9(123N+13 < 6759$).

La somme des entiers de 1 à 96 est égale à $97 \times 96/2 = 4656$. Il manque donc $9696 - 4656 = 5040$ pour atteindre la somme voulue.

Le nombre 5040 est divisible par 9, mais non par 99, d'où l'impossibilité d'atteindre la somme 9696 en supprimant un seul chiffre.

On a $5040 = 99 \times 50 + 90$. On peut augmenter la somme de 4950 en concaténant 50 et 51, mais on ne peut gagner 90 en supprimant un seul signe. D'où l'impossibilité de supprimer seulement 2 signes.

Par contre, c'est possible **en supprimant 3 signes** $+$, et ceci de 3 façons :

$$1+2+3+\underbrace{\mathbf{45}}_{+36}+\underbrace{\mathbf{67}}_{+54}+8+9+\cdots+\underbrace{\mathbf{5051}}_{+4950}+52+\cdots+95+96$$
$$=9696$$
$$1+2+\underbrace{\mathbf{34}}_{+27}+5+6+\underbrace{\mathbf{78}}_{+63}+9+\cdots+\underbrace{\mathbf{5051}}_{+4950}+52+\cdots+95+96$$
$$=9696$$
$$1+\underbrace{\mathbf{23}}_{+18}+4+5+6+7+\underbrace{\mathbf{89}}_{+72}+10+\cdots+\underbrace{\mathbf{5051}}_{+4950}+52+\cdots+95+96$$
$$=9696$$

## Bosse 72

**Soient $a$, $b$ et $c$ des nombres réels strictement positifs. Prouver que :**

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}$$

### Dégraissage 1

On se met dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine $O$. On considère les points :

$$A\left(b-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right),\quad B\left(b-\frac{c}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$$

D'après l'inégalité triangulaire : $AB\leq OA+OB$.

Or, on a :

$$OA=\sqrt{\left(b-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

$$OB=\sqrt{\left(b-\frac{c}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2}=\sqrt{b^2-bc+c^2}$$

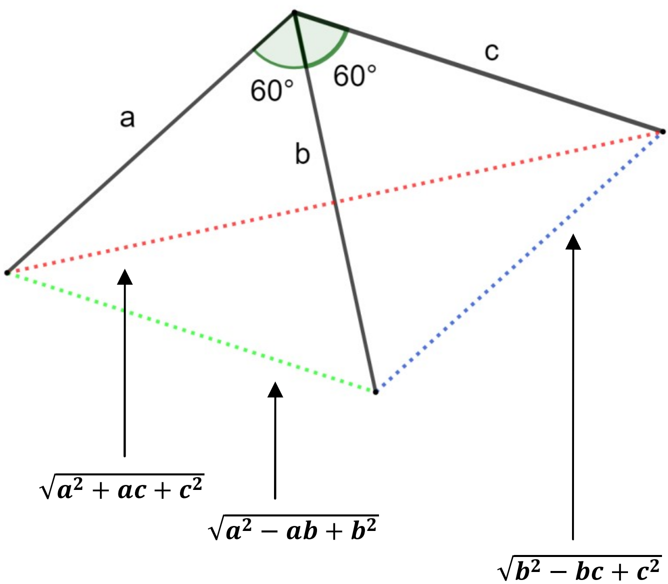
$$AB=\sqrt{\left(b-\frac{c}{2}-b+\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\sqrt{a^2+ac+c^2}$$

D'où le résultat demandé.

# Dégraissage 2

On remarque que $a^2 - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$, ce qui nous fait penser à la relation d'Al Kashi.
Ainsi :

$$b^2 - bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60°$$
$$a^2 + ac + c^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 120°$$




Donc en considérant trois segments de longueurs a, $b$, $c$ ayant une extrémité commune et tels que $\widehat{(a,b)} = 60°$, $\widehat{(b,c)} = 60°$, on remarque que $\widehat{(a,c)} = 120°$, et l'illustration graphique précédente est assez éloquente pour achever la démonstration.

# Dégraissage 3

On a :

$$a^2 - ab + b^2 = \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}$$

$$b^2 - bc + c^2 = \left(\frac{c}{2} - b\right)^2 + \frac{3c^2}{4}$$

Donc :

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} = \sqrt{\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}} + \sqrt{\left(\frac{c}{2} - b\right)^2 + \frac{3c^2}{4}}$$

$$= \left[\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}\right]^{1/2} + \left[\left(\frac{c}{2} - b\right)^2 + \frac{3c^2}{4}\right]^{1/2}$$

Or, d'après l'inégalité de Minkowski

$$\left[\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}\right]^{1/2} + \left[\left(\frac{c}{2} - b\right)^2 + \frac{3c^2}{4}\right]^{1/2}$$

$$\geq \left[\left(b - \frac{a}{2} + \frac{c}{2} - b\right)^2 + \frac{3}{4}(a + c)^2\right]^{1/2}$$

Soit, tous calculs faits,

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

## Bosse 73

**Par combien de zéros se termine $(\mathbf{100}!)$? Quel est son dernier chiffre non nul ?**

### Dégraissage

On sait qu'un zéro final ne peut résulter que du produit $2 \times 5$. Donc il s'agit ici de déterminer les exposants respectifs m et n de $2$ et $5$ dans la décomposition en facteurs premiers de $100!$ (m est appelé la valuation $2 - \text{adique}$ de $100!$ et n sa valuation $5 - \text{adique}$). Si on arrive à « épuiser » les facteurs premiers 2 et 5 dans $100!$, on pourra ainsi écrire $100!$ sous la forme $100! = 10^{\min(\text{m};\,\text{n})} \times \text{Q}$ où $\text{Q} \not\equiv 0\ [10]$ et dans ce cas $100!$ se termine par $\text{p} = \min(\text{m}\,;\,\text{n})$ chiffres « 0 ». Ici, il appert de toute évidence que $\text{p} = \min(\text{m}\,;\,\text{n}) = \text{n}$ car il y a plus de multiples de 2 que de 5 entre 1 et 100. De ce fait, nous pouvons nous limiter à déterminer seulement la valuation $5 - \text{adique}$ de $100!$.

On voit clairement :

- Qu'il existe 20 multiples de 5 compris entre 1 et 100 ;
- Qu'il existe 4 multiples de $5^2$ compris entre 1 et 100 ;
- Qu'il n'existe aucun multiple de $5^3$ entre 1 et 100.

D'autre part, entre 1 et 100, il y a $16\ (= 20 - 4)$ multiples de 5 qui ne sont pas des multiples de $5^2$.

D'où :

$$100!\ = 2^{\mathrm{m}} \times \underbrace{5 \times 5 \times \ldots \times 5}_{16\text{ fois}} \times \underbrace{5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2}_{4\text{ fois}} \times \mathrm{Q} = 2^{\mathrm{m}} \times 5^{24} \times \mathrm{Q}$$
$$= 2^{24} \times 5^{24} \times 2^{\mathrm{m}-24} \times \mathrm{Q} = 10^{24} \times 2^{\mathrm{m}-24} \times \mathrm{Q}\ .$$

Donc l'écriture décimale de $100!$ se termine par $24$ zéros.

Pour déterminer le dernier chiffre non nul de $100!$, il suffit de déterminer la congruence modulo 10 du produit de tous les entiers premiers impairs de 3 à 47 (qui ne se terminent pas par 1) élevés à la puissance des valeurs p-adiques de $100!$ de chacun de ses nombres.

Ainsi, on peut sans peine, établir que $100!$ contient :

- $2^{97}$ dont $2^{24}$ ont été déjà couplés avec $5^{24}$ pour donner les 24 zéros (dont il reste $\mathbf{2^{73}}$) ;
- $3^{47},\ \ 13^7,\ \ 19^5\ \text{(comptés comme}3^{10}\text{)},\ \ 23^4,$
  $29^3\ \text{(comptés comme}3^{6}\text{)},\ \ 23^2$
  Soit au total $3^{47+7+10+4+6+}\ = \mathbf{3^{76}}$.
- $7^{16},\ \ 17^5,\ \ 37^2,\ \ 47^2$ soit au total $7^{16+5+2+2} = \mathbf{7^{25}}$.

Donc, il revient de déterminer la congruence modulo 10 du produit : $\mathbf{2^{73}} \times \mathbf{3^{76}} \times \mathbf{7^{25}}$.

On a :

$2^{10} \equiv 4\ [10]$ et donc

$$\mathbf{2^{73}} = (\mathbf{2^{10}})^7 \times \mathbf{2^3} \equiv \mathbf{4^8} \times \mathbf{2} \equiv \mathbf{6^4} \times \mathbf{2} \equiv \mathbf{2}\ \ [\mathbf{10}].$$

$3^4 \equiv 1\ [10]$ et donc $\mathbf{3^{76}} = (\mathbf{3^4})^{\mathbf{19}} \equiv \mathbf{1}\ [\mathbf{10}]$.

$7^4 \equiv 1\ [10]$ et donc $\mathbf{7^{25}} = (\mathbf{7^4})^{\mathbf{6}} \times \mathbf{7} \equiv \mathbf{7}\ [\mathbf{10}]$.

Donc : $\mathbf{2^{73}} \times \mathbf{3^{76}} \times \mathbf{7^{25}} \equiv \mathbf{2} \times \mathbf{1} \times \mathbf{7} \equiv \mathbf{4}\ [\mathbf{10}]$.

Enfin le dernier chiffre non nul de $100!$ est **4**.

# Bosse 74

**Soit $n$ un entier naturel non nul et $z_n$ le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale de $n$!. Montrer que :**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{z_n}{n} = \frac{1}{4}.$$

## Dégraissage

On sait que pour un entier $n$, le nombre $z_n$ de zéros à la fin de l'écriture décimale de $n!$ est égale à la valuation $5-$adique de $n!$ notée $v_5(n!)$.

Considérons la décomposition de $n$ en base $5$ :

$$n = 5^d n_d + 5^{d-1} n_{d-1} + \cdots + 5n_1 + n_0$$

Alors, pour tout entier $i$, on a :

$$\left[\frac{n}{5^i}\right] = n_i + 5n_{i+1} + \cdots + 5^{d-i} n_d$$

où $[x]$ désigne la partie entière de $x$.

Donc, d'après la formule de Legendre, on a :

$$\begin{aligned}
z_n = v_5(n!) &= \sum_{i\geq 1} \left[\frac{n}{5^i}\right] \\
&= (n_1 + 5n_2 + \cdots + 5^{d-1} n_d) + (n_2 + 5n_3 + \cdots + 5^{d-2} n_d) + \cdots + \\
&\qquad + (n_{d-1} + 5n_d) + (n_d) \\
&= n_1 + (5-1)n_2 + \cdots + (1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{d-1}) n_d \\
&= \frac{(5-1)n_1 + (5^2-1)n_2 + \cdots + (5^d-1)n_d}{5-1} = \frac{n - s_5(n)}{4}
\end{aligned}$$

où $s_5(n)$ est la somme des chiffres de $n$ en base 5.

D'où :

$$\frac{z_n}{n} = \frac{1 - \dfrac{s_5(n)}{n}}{4}.$$

D'autre part : $0 \leq s_5(n) \leq 4 \times p$ avec $p$ le nombre de chiffres de $n$ dans la base $5$.

On sait que $p = [\log_5 n] + 1$, d'où :

$$0 \leq \frac{s_5(n)}{n} \leq \frac{[\log_5 n] + 1}{n} \leq \frac{1 + \log_5 n}{n}$$

Comme on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \log_5 n}{n} = 0.$$

Enfin :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{z_n}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \frac{s_5(n)}{n}}{4} = \frac{1}{4}.$$

## Bosse 75

**Le plus grand nombre premier connu à ce jour est le 49e nombre de Mersenne $2^{74\,207\,281} - 1$. Il a été découvert le 7 janvier 2016 dans le cadre du projet GIMPS (Internet Mersenne Prime Search). La vérification de sa primalité a nécessité 49 jours de calcul continu sur de puissants ordinateurs. Si on veut l'écrire, ce nombre remplirait 28 livres de 500 pages chacun soit un fichier de 27 Mo.**
**Déterminer le nombre de ses chiffres en base 10 et ses deux deniers chiffres.**

### Dégraissage

* Pour tout naturel $N \geq 1$, il existe un seul entier naturel $p$ tel que :

$$10^p \leq N < 10^{p+1}.$$

Comme $10^{\mathrm{p}}$ s'écrit à l'aide de $\mathrm{p} + 1$ chiffres et que $10^{\mathrm{p}+1}$ est le plus petit entier naturel qui s'écrit à l'aide de $p + 2$ chiffres, alors $N$ s'écrit avec $p + 1$ chiffres.
D'autre part, on a : $10^p \leq N < 10^{p+1} \implies p \leq log\, N < p + 1$
D'où : $p + 1 = Ent(\log N) + 1$.
Donc le nombre de chiffres de $\mathrm{N}$ est $Ent(\log N) + 1$.

**Application :**

Pour $N = 2^{74\,207\,281} - 1$, on sait que les puissances de $2$ ne se terminent jamais par 0, donc le nombre de chiffre de n est celui de $2^{74\,207\,281}$. Ainsi, on calcule $\log\left(2^{74\,207\,281}\right)$ à la calculette :

$$\log(2^{74\,207\,281}) = 74\,207\,281 \times \log(2) = 22\,338\,617{,}48$$

Ainsi, le nombre $N = 2^{74\,207\,281} - 1$ s'écrit sous forme décimale à l'aide de $22\,338\,618$ chiffres.

** Il s'agit donc de calculer $N = 2^{74\,207\,281} - 1$ modulo $100$.

Puisque $100 = 2^2 \times 5^2 = 4 \times 25$, le théorème chinois nous invite a calculer ce nombre modulo $4$ et $25$, pour en déduire sa valeur modulo $100$.

Tout d'abord, modulo $4$, l'énorme puissance de $2$ se réduit évidemment à $0$. On a donc $N \equiv -1\ [4]$.

Ensuite, il faut examiner le comportement des puissances de $2$ modulo $25$. Pour cela, on peut par exemple remarquer que $2^{10} = 1024 \equiv 24 \equiv -1\ [25]$. En élevant au carré, on a donc $2^{20} \equiv 1\ [25]$. Par ailleurs, il est bien visible qu'on a la congruence $74\,207\,281 \equiv 1\ [20]$. On peut donc trouver un entier $r \in \mathbb{N}$ (qu'il serait facile mais inutile de calculer) tel que l'on ait $74\,207\,281 = 20r + 1$. On peut alors calculer la réduction de Nmodulo $25$ :

$$N = 2^{20r+1} - 1 = 2 \times (2^{20})^r - 1 \equiv 2 \times 1^r - 1 \equiv 1\ [25].$$

Ainsi, $N \equiv -1\ [4]$ et $N \equiv 1\ [25]$. Le théorème chinois assure que cela détermine la réduction de $N$ modulo $100$. Ici, c'est assez facile à vérifier à la main : si un nombre est congru à $1$ modulo $25$, il est congru à $1$, $26$, $51$ ou $76$ modulo $100$. De toutes ces possibilités, seule la troisième est congrue à $-1$ modulo $4$.

On en déduit donc $N \equiv 51\ [100]$ et les deux derniers chiffres du plus grand nombre premier connu à ce jour sont $5$ et $1$.

## Bosse 76

**Est-il possible que le produit de cinq nombres entiers consécutifs soit un carré parfait ? Si oui, donner au moins un exemple.**

## Dégraissage

Il s'agit de savoir si l'équation :

$$y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

(avec $x$, $y$ entiers strictement positifs) admet des solutions.

On peut bien remarquer que pour deux paires de facteurs du second membre, le plus grand diviseur commun est au plus égale à 4. On déduit de cette remarque que tout nombre premier $p \geq 5$ qui rentre dans la décomposition en facteurs premiers de l'un des 5 facteurs $x$, $x+1$, $x+2$, $x+3$,$x+4$ doit figurer avec un exposant pair. Pour ce qui est des facteurs premiers 2 et 3, on peut scinder les 5 entiers $x$, $x+1$, $x+2$, $x+3$,$x+4$ en 4 catégories disjointes deux à deux :

G1 : ceux où 2 et 3 figurent avec des exposants pairs ;

G2 : ceux pour lesquels 2 et 3 figurent avec des exposants respectivement pairs et impairs ;

G3 : ceux pour lesquels 2 et 3 figurent avec des exposants respectivement impairs et pairs ;

G4 : ceux où 2 et 3 figurent avec des exposants impairs.

Donc selon le principe des tiroirs, au moins deux des 5 nombres $x$, $x+1$, $x+2$, $x+3$,$x+4$ (**objets**) sont dans la même catégorie (**tiroirs**). La différence de ces deux nombres est au plus égale à 4, ce qui est le cas de $x$ et $x+4$. Dans ce cas, les seules valeurs possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 dont le produit 120 n'est pas un carré parfait.

Enfin : Le produit de cinq entiers consécutifs (dont aucun n'est nul) n'est jamais un carré parfait.

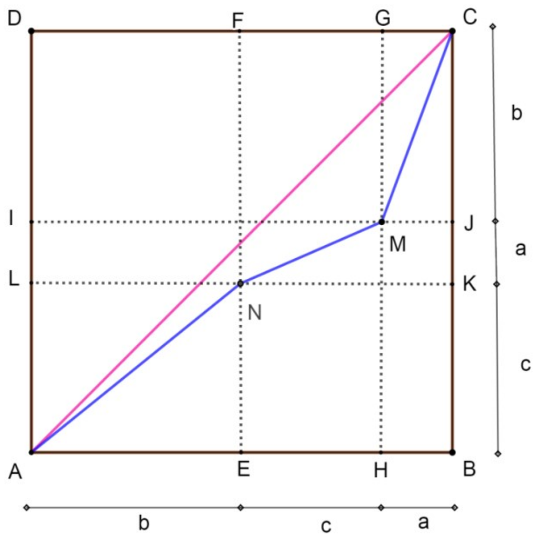
## Bosse 77

**On donne trois réels $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Montrer que :**

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\sqrt{2} \leq \sqrt{\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}+\sqrt{\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{a}^2}+\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}.$$

## Dégraissage 1

**1er cas : les réels $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sont positifs :** Soit $ABCD$ un carré de côté $a+b+c$. La longueur de la diagonale $[AC]$ est inférieure à la somme des longueurs des segments $[CM]$, $[MN]$ et $[NA]$ c'est-à-dire que : $AC \leq AN+NM+MC$.




Ainsi, on a bien :

$$(a+b+c)\sqrt{2} \leq \sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{a^2+b^2}.$$

**2ème cas : les réels $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ne sont pas tous positifs :**

On sait que : $(a+b+c)\sqrt{2} \leq (|a|+|b|+|c|)\sqrt{2}$

Comme $|a|$, $|b|$, $|c|$ sont positifs, on se ramène au 1er cas et on conclut que l'inégalité est également vérifiée ;

Donc, pour tous réels $a$, $b$, $c$, on a :

$$(a+b+c)\sqrt{2} \leq \sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{a^2+b^2}.$$

## Dégraissage 2

Dans le plan euclidien, on considère les vecteurs :

$$\vec{V}\binom{a+b+c}{a+b+c},\quad \overrightarrow{U_1}\binom{b}{c},\quad \overrightarrow{U_2}\binom{c}{a},\quad \overrightarrow{U_3}\binom{a}{b}$$

On a bien : $\vec{V} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_3}$ et on sait que :

$$\|\vec{V}\| = \|\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_3}\| \leq \|\overrightarrow{U_1}\| + \|\overrightarrow{U_2}\| + \|\overrightarrow{U_3}\|$$

Puis on distingue les cas où $a$, $b$ et $c$ sont tous positifs ou non.

## Dégraissage 3

On considère les nombres complexes $z_1 = a + ia$, $z_2 = b + ib$ et $z_3 = c + ic$.

On a : $z_1 + z_2 + z_3 = (a+b+c)(1+i)$ et donc :

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |a+b+c|\sqrt{2}$$

D'autre part, on a :

$$z_1 + z_2 + z_3 = (a+ib) + (c+ia) + (b+ic)$$

Et donc :

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |a+ib| + |c+ia| + |b+ic|$$

Soit : $|a+b+c|\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{b^2+c^2}$

Puis on utilise l'inégalité $a+b+c \leq |a+b+c|$ pour conclure.

## Bosse 78

**On note $[x]$ la *partie entière* du réel $x$, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.**

**Montrer que l'équation $[x](x^2+1) = x^3$ admet une unique solution dans tout intervalle dont les extrémités sont des entiers positifs consécutifs et que cette solution est irrationnelle.**

## Dégraissage

Plaçons-nous dans l'intervalle $[n, n+1[$ et posons $x = n + y$. L'équation initiale s'écrit : $n((n+y)^2+1) = (n+y)^3$, ou encore : $y(n+y)^2 = n$. Sur l'intervalle $[0,1[$, la fonction $y \longmapsto y(n+y)^2$ est continue et croissante. Elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0,(n+1)^2[$ et donc prend une et une seule fois la valeur $n$ pour une valeur $y_0$ de $y$.

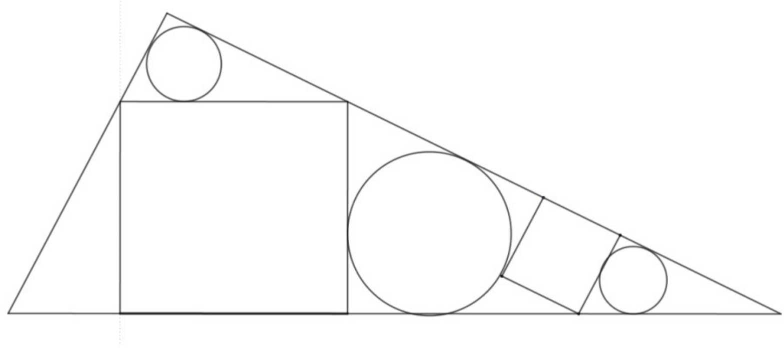
On remarque tout d'abord que :

$$y_0 \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = n + y_0 \in \mathbb{Q}$$

Reprenons l'équation de départ en posant $x_0 = \frac{p}{q}$ , $p$ et $q$ étant premiers entre eux. En appelant $n$ la partie entière de $x_0$, il s'en suit que $\frac{n(p^2+q^2)}{q^2} = \frac{p^3}{q^3}$ , ou encore $qn(p^2+q^2) = p^3$, d'où $q$ divise $p^3$, et donc $q$ divise $p$, ce qui constitue une contradiction avec l'irréductibilité supposée de $\frac{p}{q}$.

## Bosse 79

**Un triangle rectangle contient des carrés et des disques (tangents à des côtés du rectangle ou à des côtés des carrés). Le rayon du plus grand disque est $a$, celui du disque du côté de l'angle aigu est $b$. Quel est le rayon du troisième disque ?**



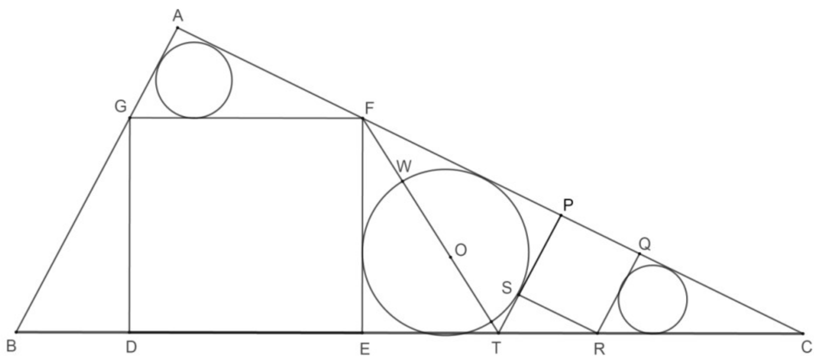
# Dégraissage

Notons $c$ le rayon du disque du côté de l'angle droit et $\alpha = \widehat{ACB}$.
Si $r$ est le rayon du cercle inscrit dans triangle $XYZ$ alors :

$$r = \frac{S(XYZ)}{p(XYZ)}$$

où $S(XYZ)$ est l'aire du triangle $XYZ$ et $p(XYZ)$ son périmètre.
Les trois cercles sont respectivement inscrits dans les triangles $FAG$, $CEF$ et $CQR$ qui ont tous les mêmes angles. Donc ces trois triangles sont semblables et par conséquent les longueurs des côtés sont proportionnelles. Si, par exemple, $FG = k \times CR$ alors $S(FAG) = k^2 \times S(CQR)$ et $p(FAG) = k \times p(CQR)$. On en déduit donc que $b = k \times c$.
Posons : $x = DE$, $y = AG$, $z = PQ$ ($x$, $y$, $z$ sont des distances).
D'après ce qui précède, on a :

$$\frac{b}{a} = \frac{y}{x} \text{et} \frac{c}{a} = \frac{z}{x}.$$




Il reste à trouver une relation entre $x$, $y$, $z$.

- On a $AG = y$ et $FG = x$, donc $AF = \sqrt{x^2 - y^2}$.
- En considérant le centre $O$ du grand cercle, comme $(FO)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{EFP}$, on a : $FP = FE = x$.
- $\widehat{AFG} = \alpha$, donc :

$$\sin\alpha = AG/FG = y/x \text{ et } \cos\alpha = AF/FG = \left(\sqrt{x^2-y^2}\right)/x.$$

- Dans le triangle $CFE$, on a $\sin\alpha = FE/CF$, donc : $CF = FE/\sin\alpha = x^2/y$. Or $CP = CF - FP$, d'où :
$$CP = \frac{x^2}{y} - x = x(x-y)/y.$$
- Dans le triangle $CPT$, on a $\tan\alpha = PT/CP$, donc :
$$PT = (x(x-y)/y)\left(y/\sqrt{x^2-y^2}\right) = x(x-y)/\sqrt{x^2-y^2}$$
- Dans le triangle $RST$, on a $\tan\alpha = ST/RS$, donc :
$$ST = z \times y/\sqrt{x^2-y^2}$$
- On a $PT = PS + ST$, donc :
$$\frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2-y^2}} = z\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right).$$

On en déduit :
$$\frac{z}{x} = \frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}+y} = \frac{1-\frac{y}{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}}.$$

Enfin, d'après la remarque préliminaire :
$$c = a\frac{1-\frac{b}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{b}{a}} = \frac{a(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}+b}.$$

## Bosse 80

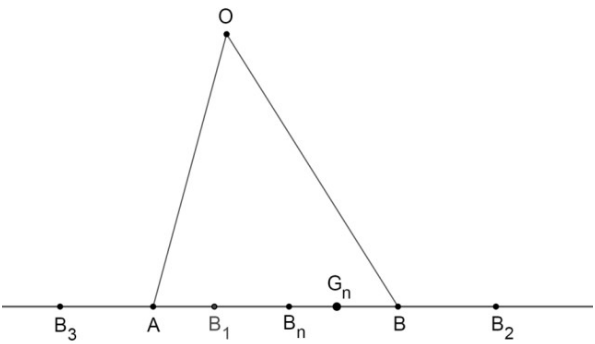
**On donne un triangle $OAB$, et un réel $a$ non nul. On définit, pour tout entier naturel non nul $n$, le point $B_n$ par :**
$$\overrightarrow{AB_n} = a^n\overrightarrow{AB}$$
**et le point $S_n$ par :**
$$\overrightarrow{OS_n} = a\overrightarrow{OB_1} + a^2\overrightarrow{OB_2} + \cdots + a^n\overrightarrow{OB_n}$$
**Montrer qu'on peut choisir $a$ de façon que, pour tout entier $n$, le point $S_n$ soit intérieur au triangle $OAB$.**

## Dégraissage

Tout d'abord, analysons en termes de barycentre les égalités vectorielles données en hypothèse.

Considérons le barycentre $G_n$ des points $(B_1, a)$, $(B_2, a^2)$, $(B_3, a^3)$, …, $(B_n, a^n)$. L'égalité $\overrightarrow{AB_n} = a^n\overrightarrow{AB}$ traduit le fait que le point $B_n$ est le barycentre de $(A, 1 - a^n)$, $(B, a^n)$. D'autre part, dans l'égalité $\overrightarrow{OS_n} = a\overrightarrow{OB_1} + a^2\overrightarrow{OB_2} + \cdots + a^n\overrightarrow{OB_n}$, en introduisant le point $G_n$, nous obtenons :

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a^i\right)\overrightarrow{OS_n} + \left(\sum_{i=1}^{n} a^i\right)\overrightarrow{G_nS_n} = \vec{0}$$




C'est-à-dire que :

$$S_n = bar\left\{\left(O, 1 - \sum_{i=1}^{n} a^i\right), \left(G_n, \sum_{i=1}^{n} a^i\right)\right\}$$

A partir des ces relations, il s'avère que pour que le point $S_n$ soit intérieur au triangle $OAB$, il suffit que $G_n$ soit sur le segment $[AB]$ et que $S_n$ soit sur le segment $[OG_n]$.

- Pour que $G_n \in [AB]$, il suffit que les coefficients $1 - a^n$ et $a^n$ soient positifs. Ce qui revient à prendre $0 < a < 1$.
- Pour que $S_n \in [OG_n]$, il suffit que les coefficients $1 - \sum_{i=1}^{n} a^i$ et $\sum_{i=1}^{n} a^i$ soient positifs.

  On sait que :

$$1-\sum_{i=1}^{n} a^i = 1 - a\frac{1-a^n}{1-a}\ , \quad \sum_{i=1}^{n} a^i = a\frac{1-a^n}{1-a}$$

D'autre part :

$$1 - a\frac{1-a^n}{1-a} > 1 - \frac{a}{1-a} = \frac{1-2a}{1-a}$$

Comme on sait que $a\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right) > 0$ (car $0 < a < 1$), donc pour que $1 - a\frac{1-a^n}{1-a} > 0$, il suffit que $\frac{1-2a}{1-a} > 0$ c'est-à-dire que :

$$0 < a < 1/2.$$

En conclusion, il suffit de prendre $a$ tel que $0 < a < 1/2$ pour que le point $S_n$ soit intérieur au triangle $OAB$.

## Bosse 81

**On donne $\boldsymbol{n}$ points $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, …, $\boldsymbol{A_n}$ du plan ($\boldsymbol{n \geq 2}$). Soit $\boldsymbol{T}$ un point du plan vérifiant :**

$$\left(\overrightarrow{TA_1}, \overrightarrow{TA_2}\right) = \cdots = \left(\overrightarrow{TA_{n-1}}, \overrightarrow{TA_n}\right) = \left(\overrightarrow{TA_n}, \overrightarrow{TA_1}\right) = \frac{2\pi}{n}\,[2\pi]$$

**Montrer que pour tout point $\boldsymbol{M}$ du plan :**

$$MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_n \geq TA_1 + TA_2 + \cdots + TA_n.$$

### Dégraissage

On considère le plan complexe d'origine $T$ dont l'axe des réels est l'axe $\left(A, \overrightarrow{TA_1}\right)$, $z_k$ est l'affixe de $A_k$. Soit $\omega = e^{i(2\pi/n)}$, si on pose $r_k = TA_k$ alors on aura $z_k = r_k . \omega^{k-1}$.

Soit $M$ un point du plan et $z$ son affixe, posons :

$$S(M) = MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_n.$$

On sait que :

$$S(M) = |z - r_1| + |z - r_2\omega| + |z - r_3\omega^2| + \cdots + |z - r_n\omega^{n-1}|,$$

d'où :

$$S(M) = |z - r_1| + |\omega| \times \left|\frac{z}{\omega} - r_2\right| + \cdots + |\omega^{n-1}| \times \left|\frac{z}{\omega^{n-1}} - r_n\right|$$

Comme pour tout $k$ : $|\omega^k| = |\omega|^k = 1$ alors :

$$S(M) = |z - r_1| + \left|\frac{z}{\omega} - r_2\right| + \left|\frac{z}{\omega^2} - r_3\right| + \cdots + \left|\frac{z}{\omega^{n-1}} - r_n\right|$$

Par application de l'inégalité triangulaire généralisée, nous obtenons :

$$S(M) \geq \left|(z - r_1) + \left(\frac{z}{\omega} - r_2\right) + \left(\frac{z}{\omega^2} - r_3\right) + \cdots + \left(\frac{z}{\omega^{n-1}} - r_n\right)\right|$$

$$S(M) \geq \left|z\left(1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^{n-1}}\right) - (r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n)\right|$$

Or on sait que :

$$1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{\omega^n}}{1 - \frac{1}{\omega}} = \frac{1 - 1}{1 - \frac{1}{\omega}} = 0$$

d'où : $S(M) \geq |r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n| = S(T)$. CQFD.

## Bosse 82

**Sans développer et sans recourir à l'utilisation de la dérivée, déterminer le minimum de l'expression :**

$$\boldsymbol{A(x) = 3(x-2)^2 + 8(x+2)^2 + 2(x-5)^2.}$$

### Dégraissage 1

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = 3(x-2)^2 + 8(x+2)^2 + 2(x-5)^2$.

Comme $3 + 8 + 2 \neq 0$ alors le système pondéré

| Points | $2$ | $-2$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| Coefficients | $\mathbf{3}$ | $\mathbf{8}$ | $\mathbf{2}$ |

admet un barycentre qui est donné par :

$$\frac{\mathbf{3} \times 2 + \mathbf{8} \times (-2) + \mathbf{2} \times 5}{\mathbf{3} + \mathbf{8} + \mathbf{2}} = 0.$$

Donc $A$ est la fonction scalaire de Leibniz associée au système déjà défini et par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) = (\mathbf{3} + \mathbf{8} + \mathbf{2})(x - 0)^2 + A(0)$$

Et donc le minimum est manifestement :

$$A(0) = 3(0-2)^2 + 8(0+2)^2 + 2(0-5)^2 = 94.$$

## Dégraissage 2

Posons $i(x) = A(x) - A(-x)$.
On sait que la fonction $i$ est impaire. Elle est de degré 1. Donc i(x) est de la forme $i(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$.
Comme $i(1) = A(1) - A(-1) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ i(x) = 0$ et par suite : $A(x) = A(-x)$.
D'autre part, on considère la fonction $p$ définie par :

$$p(x) = A(x) + A(-x)(= 2A(x)).$$

On remarque que $p$ est paire, positive et polynomiale du 2nd degré. Son minimum est donc $p(0) = 2A(0) = 188$.
D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = 2A(x) \geq p(0) = 2A(0)$ et par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) \geq A(0) = \frac{188}{2} = 94.$$

## Bosse 83

**Pour tout entier naturel $n$, on note $I_n$ le nombre d'entiers naturels $p$ vérifiant l'inégalité $50^n < 7^p < 50^{n+1}$.**

1) **Démontrer que pour tout $n$, $I_n$ vaut 2 ou 3.**
2) **Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n$ pour lesquels $I_n$ vaut 3 et donner le plus petit d'entre eux.**

## Dégraissage

1) On a :

$$\begin{aligned} 50^n < 7^p < 50^{n+1} &\Leftrightarrow n \ln 50 < p \ln 7 < (n+1) \ln 50 \\ &\Leftrightarrow n < p \frac{\ln 7}{\ln 50} < n+1 \end{aligned}$$

Comme $\ln 7 / \ln 50 < 1/2$ (car $7^2 < 50$), $I_n \geq 2$ et comme $\ln 7 / \ln 50 > 1/3$ (car $7^3 > 50$), donc $I_n \leq 3$.

2) Si, pour tout $n$, $I_n = 2$, alors comme $50^0 < 7^1 < 7^2 < 50^1$ et $50^1 < 7^3 < 7^4 < 50^2$, on aurait pour tout $n$ :

$$50^n < 7^{2n+1} < 7^{2n+2} < 50^{n+1}.$$

En particulier $(50/49)^n < 7$.

Ceci est impossible car $\lim_{n\to+\infty}(50/49)^n = +\infty$.
Il existe donc au moins un entier $n_0$ tel que $I_{n_0} = 3$. Il existe alors un entier $p$ tel que $50^{n_0} < 7^p < 7^{p+1} < 7^{p+2} < 50^{n_0+1}$. En élevant tout au carré, on a aussi :

$$50^{2n_0} < 7^{2p} < 72^{p+1} < 7^{2p+2} < 7^{2p+3} < 7^{2p+4} < 50^{2n_0+2}$$

ce qui implique que $I_{2n_0} + I_{2n_0+1} = 5$, d'où $I_{2n_0} = 3$ ou $I_{2n_0+1} = 3$. Dans les deux cas, il existe un entier $n > n_0$ tel que $I_n = 3$.

## Bosse 84

**On considère un triangle $ABC$ de côtés $a$, $b$, $c$. On suppose $B$ et $C$ fixes. Déterminer le lieu des points $A$ tels que :**

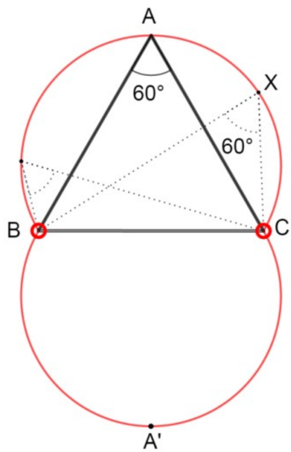
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = a^2.$$

### Dégraissage

$$\begin{aligned}\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = a^2 &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = a^2(a + b + c)\\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + a^2(b + c)\\ &\Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2(b + c)\end{aligned}$$

Puisque $b^3 + c^3 = (b^2 - bc + c^2)(b + c)$ et $b + c > 0$, la dernière équation se simplifie ainsi : $b^2 - bc + c^2 = a^2$.
Selon Al Kashi, on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$. En comparant les deux expressions pour $a^2$, on obtient :$\cos(\widehat{A}) = 1/2$.
Puisque les mesures des angles d'un triangles sont entre $0°$ et $180°$, on a bien mes($(\widehat{A})$)=60°.
Réciproquement, comme on a mené le raisonnement par équivalences alors si $mes((\widehat{A})) = 60°$, on a bien :

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = a^2.$$




Considérons les triangles équilatéraux $ABC$ et $A'BC$ symétriques par rapport à $(BC)$. Traçons les cercles circonscrits à $ABC$ et à $A'BC$. On sait que tout point $X$ de l'un des deux arcs rouges est tel que $mes(\widehat{(X)}) = 60°$.
Donc l'ensemble cherché est la réunion des deux arcs de cercles privée des points $B$ et $C$.

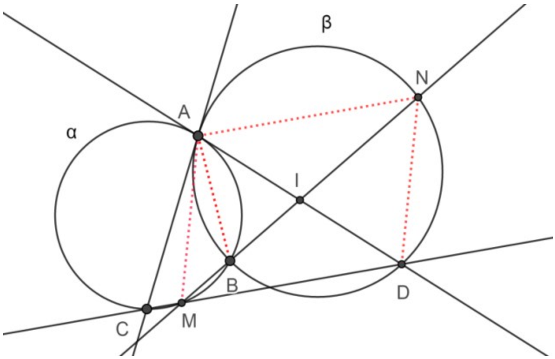
## Bosse 85

**Soient $\alpha$ et $\beta$ deux cercles situés dans un même plan, et qui se coupent en deux point $A$ et $B$. La tangente en $A$ au cercle $\beta$ recoupe le cercle $\alpha$ en $C$ et la tangente en $A$ au cercle $\alpha$ recoupe le cercle $\beta$ en $D$. La droite $(CD)$ recoupe le cercle $\alpha$ en un point $M$ distinct de $B$. Montrer que la droite $(MB)$ coupe la corde $[AD]$ en son milieu.**

### Dégraissage

La droite $(MB)$ recoupe le cercle $\beta$ en $N$. Les égalités angulaires, modulo $\pi$, suivantes :

$$(NB,ND) \underbrace{=}_{dans\ \beta} (AB,AD) \underbrace{=}_{dans\ \alpha} (MB,MA)$$
$$(NB,NA) \underbrace{=}_{dans\ \beta} (AB,AC) \underbrace{=}_{dans\ \alpha} (MB,MC)$$
montrent que le quadrilatère $ANDM$ est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent en un point $I$, milieu à la fois des segments $[MN]$ et $[AD]$.




## Bosse 86

**Trouver tous les entiers $x$ tels que le produit des chiffres de l'écriture décimale de $x$ est égal à $x^2 - 10x - 22$.**

## Dégraissage

Soit $n$ le nombre de chiffres de $x$ en écriture décimale et $p(x)$ le produit de ses chiffres.

- Si $n = 1$, $p(x) = x$ et $x$ doit être solution de l'équation $x^2 - 10x - 22 = 0$ qui n'a pas de solution entière.
- Si $n = 1$, $x \geq 10$ et $p(x) \geq 81$.

Comme $x^2 - 10x - 22 = p(x)$, on a $x^2 - 10x - 103 \leq 0$. Comme de plus $x \geq 10$, les seules possibilités pour $x$ sont $10$, $11$, $12$, $13$, $14$, $15$ et $16$. On peut alors écrire $x = 10 + y$ où $0 \leq y \leq 6$.

Alors $p(x) = y$ soit $(10+y)^2 - 10(10+y) - 22 = y$ c'est-à-dire $y^2 + 9y - 22 = 0$ ce qui donne $y = 2$ et $x = 12$.

- Si $n \geq 3$, alors montrons qu'il ne peut y avoir de solution.

On sait que $p(x) \leq 9^n$ et $x \geq 10^{n-1}$.

Donc :

$$\begin{aligned} x^2 - 10x - 22 - p(x) &= x(x-10) - p(x) \\ &\geq 10^{n-1}(10^{n-1} - 10) - 9^n - 22. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} x^2 - 10x - 22 - p(x) &> 10^{n-1}(10^{n-1} - 10) - 10^n - 22 \\ &= 10^{n-1}(10^{n-1} - 20) - 22 \\ &> 100(100 - 20) - 22 > 0. \end{aligned}$$

Finalement la seule solution est $x = 2$.

## Bosse 87

**Déterminer tous les entiers naturels tels qu'en permutant le premier chiffre de gauche et le dernier chiffre de droite, le nombre résultant affiche une baisse égale exactement à $\mathbf{15,84\%}$.**

### Dégraissage

Soit $B$ le plus grand et $A$ le plus petit des deux nombres. La condition de l'exercice nous dicte que :

$$A = B \times (1 - 01584) = 0{,}8416 \times B = \frac{526}{625} B$$

Avec bien sûr le fait que $526/625$ est une fraction irréductible, on peut conclure que $526$ divise $A$ et $625$ divise $B$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k$ tel que $A = 526k$ et $B = 625k$, et donc $B - A = 99k$.

Si $B = m \dots n$ et $A = n \dots m$ alors $B - A = 99 \dots 9(m-n)$ où le chiffre 9 se répète autant de fois que le nombre de chiffres de $B$ moins un. D'où l'égalité $99 \dots 9(m-n) = 99k$, qui se simplifie

en : $11\ldots1(m-n)=11k$. Or $m-n$ est plus petit que $11$, et donc est premier avec $11$, ce qui nous donne, selon Gauss, 11 divise $11\ldots1$.
On remarque que $11\ldots1$ doit comporter un nombre pair de chiffres $1$ pour qu'il divisible par $11$ (donc le nombre de chiffre de $B$ est impair) et dans ce cas :

$$\frac{11}{11}=1,\quad \frac{1111}{11}=101,\quad \frac{111111}{11}=10101,\quad \text{etc.}$$

Donc : $k=1010\ldots01(m-n)$.
Avec $m-n=1$, on a :

| $k$ | 1 | 101 | 10101 | 1010101 |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | 625 | 63125 | 6313125 | 631313125 |
| $A$ | 526 | 53126 | 5313126 | 531313126 |

Si $m-n$ est l'un des nombres $2$, $3$, $4$, $5$, 6, $7$, $8$, le deuxième chiffre à gauche de $B$ est différent du deuxième chiffre à gauche de $A$ et cela ne convient pas.
Les seuls nombres $B$ convenables sont ceux obtenus en intercalant entre $6$ et $25$ un nombre quelconque de fois le nombre $31$.

## Bosse 88

**Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Démontrer l'inégalité de Ptolémée :**

$$\boldsymbol{AC\times BD\leq CD\times AB+BC\times AD}.$$

### Dégraissage

Calculons les normes des trois vecteurs :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2}-\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2},\qquad \frac{\overrightarrow{AD}}{AD^2}-\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2},\qquad \frac{\overrightarrow{AD}}{AD^2}-\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2}$$

Puis appliquons l'inégalité triangulaire.

On a :

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2}-\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2}\right)^2=\frac{1}{AB^2}-2\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB^2\times AC^2}+\frac{1}{AC^2}$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2}-\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2}\right)^2=\frac{\overrightarrow{AC}^2}{AB^2\times AC^2}-2\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB^2\times AC^2}+\frac{\overrightarrow{AB}^2}{AB^2\times AC^2}$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2}-\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2}\right)^2=\frac{CB^2}{AB^2\times AC^2}$$

Soit en termes de module :

$$\left\|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2}-\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2}\right\|=\frac{CB}{AB\times AC}.$$

On établit de manière analogue que :

$$\left\|\frac{\overrightarrow{AD}}{AD^2}-\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2}\right\|=\frac{BD}{AD\times AB}\text{ et }\left\|\frac{\overrightarrow{AD}}{AD^2}-\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2}\right\|=\frac{CD}{AD\times AC}.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\left\|\frac{\overrightarrow{AD}}{AD^2}-\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2}\right\|\leq\left\|\frac{\overrightarrow{AD}}{AD^2}-\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2}\right\|+\left\|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2}-\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2}\right\|$$

Soit :

$$\frac{BD}{AD\times AB}\leq\frac{CD}{AD\times AC}+\frac{CB}{AB\times AC}$$

En multipliant par $AB\times AC\times AD$, on trouve l'inégalité demandée : $AC\times BD\leq CD\times AB+BC\times AD$.

## Bosse 89

**Dans une journée, combien de fois les aiguilles des heures et des minutes d'une horloge font un angle droit entre elles.**

### Dégraissage

Assimilons le quadrant de l'horloge au cercle trigonométrique. Soit $z_1$ le nombre complexe représentant la petite aiguille (celle

des heures) et $z_2$ celui représentant la grande aiguille (celle des minutes).
Supposons, au départ, que $z_1 = z_2 = 1$ (les deux aiguilles à 12h).
Comme la grande aiguille tourne 12 fois plus vite que la petite aiguille alors, on doit avoir à tout moment : $z_2 = {z_1}^{12}$.
Les deux aiguilles font entre elles un angle droit si, et seulement si :

$$z_2 = z_1 . e^{i\pi/2} \text{ou} z_2 = z_1 . e^{-i\pi/2}.$$

Ce qui signifie, en tenant compte de $z_2 = {z_1}^{12}$ :

$${z_1}^{12} = z_1 . e^{i\pi/2} \text{ou} {z_1}^{12} = z_1 . e^{-i\pi/2}.$$

Comme $|z_1| = 1$ alors $z_1 \neq 0$ et donc en simplifiant par $z_1$, on obtient :

$${z_1}^{11} = e^{i\pi/2} \text{ou} {z_1}^{11} = e^{-i\pi/2}$$

Ce qui donne 22 solutions car chacune de ces deux équations admet 11 solutions distinctes.
En conclusion : Donc en une journée (soit 12 heures), les aiguilles de l'horloge font entre elles, 22 fois, un angle droit.

## Bosse 90

**Dans un pays, il y a une entreprise où il n'existe pas de jour férié. L'usage est de donner congé à tout le personnel chaque jour où l'un de ses membres célèbre son anniversaire.**
**Les personnels recrutés ayant la même probabilité d'avoir leur anniversaire un jour quelconque, quel est le nombre d'employés à recruter pour maximiser le travail obtenu en une année non bissextile ?**

## Dégraissage

Soit $n$ le nombre d'employés dans cette entreprise.
La probabilité pour que le 1er janvier soit un jour férié est $(364/365)^n$ et donc le nombre de jours fériés sera :

$$u_n = n(364/365)^n.$$

La suite de terme général $u_n$ reste croissante aussi longtemps que $u_{n+1}/u_n > 1$ et décroissante dans le cas $u_{n+1}/u_n < 1$.

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{364}{365} \geq 1 \iff n \leq 364$$

On remarque que $u_{364} = u_{365}$, et que la suite $(u_n)$ est croissante pour $n \leq 364$ et décroissante pour $n \geq 365$.

Il faut donc recruter 364 ou 365 employés.

## Bosse 91

**Soit $ABC$ un triangle, on note $R$ le rayon de son cercle circonscrit et $r$ celui de son cercle inscrit. Montrer que :**

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A} + \frac{\cos B}{\sin^2 B} + \frac{\cos C}{\sin^2 C} \geq \frac{R}{r}.$$

### Dégraissage

On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $2p = a + b + c$. D'après la loi des sinus :

$$\frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = R.$$

On sait que l'aire du triangle ABC est égale à :

$$aire(ABC) = p \times r = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{abc}{4R}$$

Donc $abc = 4R \times r \times p$. En combinant la loi des sinus et la formule d'Al Kashi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\cos A}{\sin^2 A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{4R^2}{a^2} &= \frac{2R^2}{abc}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a}\right)\\ &= \frac{R}{2pr}\left(\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} - a\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos B}{\sin^2 B}+\frac{\cos C}{\sin^2 C}=\frac{R}{2pr}\left(\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}-a-b-c\right)$$

Les quantités $a^2/b+b^2/a,\ b^2/c+c^2/b,\ a^2/c+c^2/a$ sont de la forme $x^2/y+y^2/x$ et :

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}=(x+y)\frac{(x^2-xy+y^2)}{xy}=(x+y)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)$$

Or pour $x$, $y$ des réels strictement positifs, on a :

$$x/y+y/x=f(x/y)\text{avec } f(t)=t+1/t$$

La fonction $f$ admet un minimum égal à 2 sur $]0;+\infty[$ et par suite, pour $x>0$, $x>0$ :

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=(x+y)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)\leq(x+y)(2-1)=x+y$$

Soit enfin :

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b,\quad \frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}\geq b+c,\quad \frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}\geq c+a$$

ce qui donne :

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos B}{\sin^2 B}+\frac{\cos C}{\sin^2 C}\geq\frac{R}{2pr}(a+b+c)=\frac{R}{r}.$$

## Bosse 92

**Déterminer le $PGCD$ de tous les entiers de la forme :**

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$$

**où $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ parcourent $\mathbb{Z}$.**

### Dégraissage

Si on calcule le produit en question pour $a=0$, $b=1$, $c=2$, $d=3$, on trouve $-12$, donc le PGCD en question divise nécessairement le nombre $12=3\times 4$.

Réciproquement, nous allons montrer que ce $PGCD$ est $12$, en montrant que tous les nombres de cette forme sont divisibles par $3$ et par $4$.

Un entier n divise la différence entre deux des entiers $a$, $b$, $c$, $d$ si ces entiers ont le même reste dans la division euclidienne par l'entier $n$. Puisqu'il n'y a que $3$ restes possibles modulo 3, il y a forcément deux entiers parmi $a$, $b$, $c$, $d$ qui ont le même reste. Tous les produits considérés dans l'énoncé sont donc divisibles par $3$. Regardons maintenant les restes modulo $4$ : il y a alors deux cas à considérer.

- S'il existe deux entiers parmi $a$, $b$, $c$, $d$ qui ont le même reste dans la division euclidienne par le nombre 4. La différence entre ces deux entiers sera divisible par $4$.
- Si $a$, $b$, $c$, $d$ ont tous des restes différents modulo $4$, cela veut dire que les $4$ restes possibles dans la division euclidienne par $4$ sont représentés. Ainsi, il y a parmi $a, b, c, d$ deux entiers pairs et deux entiers impairs. La différence entre deux entiers de même parité étant paire, nous avons montré que dans ce cas aussi tous les produits considérés sont divisibles par $2 \times 2 = 4$.

## Bosse 93

**Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ trois réels de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Démontrer que :**

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\mathbf{1}}+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\mathbf{1}}+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\mathbf{1}}+(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})(\mathbf{1}-\boldsymbol{b})(\mathbf{1}-\boldsymbol{c}) \leq \mathbf{1}.$$

### Dégraissage

On considère la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\frac{x}{b+c+1}+\frac{b}{c+x+1}+\frac{c}{x+b+1}+(1-x)(1-b)(1-c)$$

où $b$ et $c$ sont pris comme constantes.

La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0,1]$ de part sa forme. Donc elle atteint son maximum aux extrémités de l'intervalle $[0,1]$. Idem en raisonnant sur les deux autres variables.

En conclusion l'expression donnée atteint son maximum en l'un des huit points $(a, b, c)$ où $a, b, c$ varient dans $\{0,1\}$ et ce maximum vaut $1$. D'où CQFD.

## Bosse 94

**Soient $\boldsymbol{a}$et $\boldsymbol{b}$ deux entiers positifs, montrer que :**

$$\boldsymbol{PGCD(a,b) = a + b - ab + 2\sum_{k=1}^{b-1} E\left(k\frac{a}{b}\right)}$$

**où $\boldsymbol{E(x)}$ est la partie entière de $\boldsymbol{x}$.**
**Cette formule a été découverte par Marcelo Polezzi en 1997.**

### Dégraissage

Posons $d = PGCD(\, a, b)$. On sait qu'il existe deux entiers naturels $a'$ et $b'$ premiers entre eux tels que :

$$a = da' \text{ et } b = db'.$$

Lorsque $k$décrit $\{0,1,\dots,b-1\}$, $k\frac{a}{b} = k\frac{a'}{b'}$ est un entier si et seulement si $\mathrm{b}'$ divise $k$. Ceci se produit exactement :

$$E\left(\frac{b-1}{b'}\right) = E\left(d - \frac{1}{b'}\right) = d - 1 \text{ fois.}$$

Or on a:

$$E\left(k\frac{a}{b}\right) + E\left(a - k\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} a - 1 & si\; k\frac{a}{b} \notin \mathbb{N} \\ a & si\; k\frac{a}{b} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{b-1}\left[E\left(k\frac{a}{b}\right) + E\left(a - k\frac{a}{b}\right)\right] = (a-1)(b-1) + (d-1)$$
$$= ab - a - b + d$$

Pour conclure, on a :

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{b-1}\left(E\left(k\frac{a}{b}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{b-1}\left(E\left(k\frac{a}{b}\right)\right)+\sum_{k=1}^{b-1}\left(E\left((b-k)\frac{a}{b}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{b-1}\left(E\left(k\frac{a}{b}\right)\right)+\sum_{k=1}^{b-1}\left(E\left(a-k\frac{a}{b}\right)\right)\\
&= ab-a-b+d
\end{aligned}
$$

D'où le résultat demandé.

## Bosse 95

**Montrer qu'il n'existe que trois valeurs de l'entier naturel $n$ pour lesquelles on peut paver le plan avec des polygones réguliers égaux ayant le même nombre $n$ de côtés. Les alvéoles des abeilles, pour recueillir le miel, sont formées d'hexagones réguliers. Pourquoi pas de carrés ou de triangles équilatéraux ?**

### Dégraissage

Si $k$ polygones réguliers d'angle $\alpha$ se raccordent au sommet commun $A$, alors on a $k\alpha = 2\pi$. Or, on sait que l'angle $\alpha$ formé entre deux côtés consécutifs d'un tel polygone est donné par :

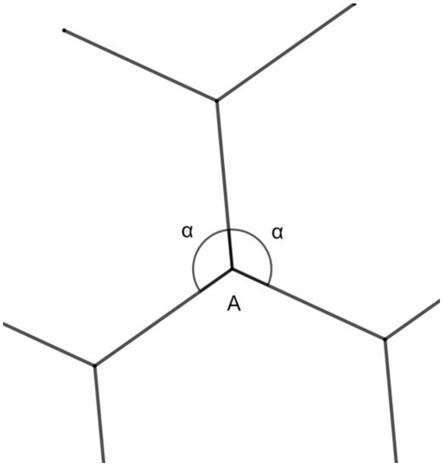
$$\alpha = \frac{n-2}{n}\pi$$

On doit donc avoir :

$$k\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi = 2\pi$$

D'où : $k(n-2) = 2n$ avec $n$ et $k$ deux entiers supérieurs à $2$.

L'égalité $k(n-2) = 2n$ peut s'écrire $1/k + 1/n = 1/2$. On comprend bien que si $k$ et $n$ deviennent assez grands, leurs inverses deviennent trop petits pour que leur somme soit égale à $1/2$.




- Pour $k = 3$, on obtient $n = 6$ (hexagone régulier : $\alpha = 120°$)
- Pour $k = 4$, on obtient $n = 4$ (carré : $\alpha = 90°$)
- Pour $k = 5$, on obtient $n = 10/3$, ce qui est impossible.
- Pour $k = 6$, on obtient $n = 3$ (triangle équilatéral : $\alpha = 60°$)
- Enfin, si $k > 7$, $1/k < 1/6$, d'où $1/n > 1/2 - 1/6$, soit $n < 3$, ce qui est impossible.

On a donc trouvé les seules valeurs de k et n qui conviennent. On ne peut paver le plan qu'avec des hexagones réguliers, des carrés ou des triangles équilatéraux.

Les abeilles ont à déposer leur miel dans des alvéoles disposées sur une surface donnée. Il s'agit de paver cette surface au moyen de polygones réguliers juxtaposés, de telle sorte que la construction de chaque alvéole soit la plus économique possible. Pour la même surface, il faut faire des économies de périmètre (la nature travaille par optimisation). Le problème est donc le suivant : pour une même surface, quel est, parmi les trois polygones réguliers permettant de paver le plan, celui qui a le plus petit périmètre ?

- **Le carré :** si $a$ est le rayon du cercle circonscrit, le périmètre est $p_4 = 4a\sqrt{2}$ et son aire est $A_4 = 2a^2$.
- **Le triangle équilatéral :** si b est le rayon du cercle circonscrit, le périmètre est $p_3 = 3b\sqrt{3}$ et son aire est $A_3 = 3\sqrt{3}b^2/4$.
- **L'hexagone régulier :** si c est le rayon du cercle circonscrit, le périmètre est $p_6 = 6c$ et l'aire est $A_6 = 3\sqrt{3}c^2/2$.

Les aires doivent être égales, d'où : $2a^2 = 3\sqrt{3}b^2/4 = 3\sqrt{3}c^2/2$.

- **Comparaison de $p_4$ et $p_3$ :**

$$\left(\frac{p_4}{p_3}\right)^2 = \frac{32 \times 3\sqrt{3}}{27 \times 8} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \cong 0,769$$

Donc : $p_4 < p_3$.

- **Comparaison de $p_4$ et $p_6$ :**

$$\left(\frac{p_4}{p_6}\right)^2 = \frac{32}{36} \times \frac{a^2}{c^2}$$

Or, on sait que :

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

D'où :

$$\left(\frac{p_4}{p_6}\right)^2 = \frac{32 \times 3\sqrt{3}}{36 \times 4} \cong 1,15$$

Donc : $p_4 > p_6$.

Enfin, on a : $p_3 > p_4 > p_6$.

En conclusion, pour une aire égale, c'est donc l'hexagone régulier qui a le plus petit périmètre !! Ce qui explique le travail à la fois ingénieux et astucieux des abeilles.

## Bosse 96

**On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)$ est définie par :**

$$\begin{cases} F_0 = 1, & F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

**Prouver que tout entier est la somme de termes de la suite de Fibonacci d'indices distincts.**

## Dégraissage

Montrons par récurrence que tout entier strictement positif $x \leq F_n$ est la somme de termes de la suite de Fibonacci d'indices $i$ distincts avec $i < n$.

- Pour $n = 1$, on a $x = F_1$ et donc la propriété est vraie.
- Supposons ceci vrai pour tout entier $x \leq F_n$ pour un rang donné $n$.

  Tout entier non nul $x$ tel que $x \leq F_{n+1}$ est soit :
  - $x \leq F_n$, et $x$ vérifie la propriété selon l'hypothèse de récurrence ;
  - $F_n < x < F_{n+1}$, et donc il existe un entier $y$ vérifiant :
  
    $$0 < y < F_{n+1} - F_n = F_{n-1} < F_n \text{ tel que } x = F_n + y.$$
    
    Donc $y$ est la somme de termes $F_i$ d'indices $i$ avec $i < n$.
    Enfin, l'entier $x$ est la somme de termes $F_i$ d'indices $i$ avec $i < n + 1$. CQFD.

## Bosse 97

**Soit $ABC$ un triangle.On note $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. On désigne par $M$ un point à l'intérieur du triangle $ABC$. Les distances de $M$ aux droites $(BC)$, $(CA)$, $(AB)$ sont notées respectivement $X$, $Y$, $Z$.**

**Pour quelle position du point $M$, le produit $XYZ$ est-il maximal ?**

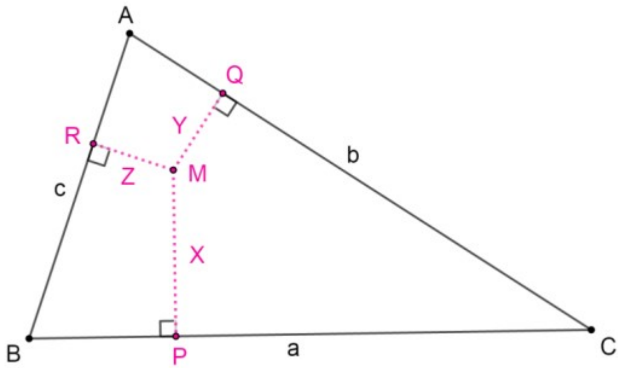
# Dégraissage

Soit $S$ l'aire de $ABC$. Comme $M$ est à l'intérieur de $ABC$ alors :

$$2S = aX + bY + cZ.$$

Si $M$ reste sur une parallèle à $(AB)$ alors la distance $Z$ est constante et par suite $XYZ$ est maximal quand $XY$ l'est c'est-à-dire quand $aXbY$ est maximal. Or on sait que $aX + bY$ est constante, donc $XY$ est maximal pour $aX = bY$. Mais $aX = bY$ signifie que $aire(BMC) = aire(CMA)$ et donc $M$ se trouve sur la médiane issue de $C$.

De même, on démontre que si le point $M$ reste sur une parallèle à la droite $(BC)$, $XYZ$ est maximal si et seulement si $M$ est sur la médiane issue de $A$.




En conclusion :
Le produit $XYZ$ est maximal si le point $M$ est confondu avec le centre de gravité $G$ du triangle $ABC$.

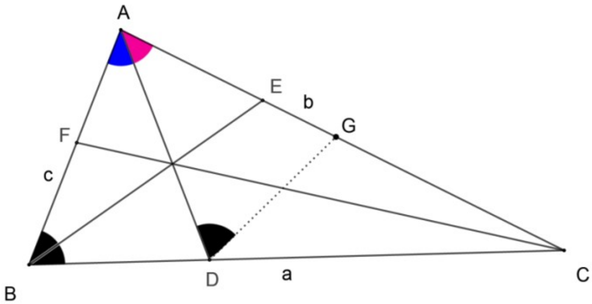
## Bosse 98

**Soit $ABC$ un triangle ; $D$, $E$, $F$ les pieds de ses bissectrices intérieures relatives respectivement aux angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$. Montrer que : $AD \times BE \times CF$** $< AB \times BC \times CA$.

## Dégraissage

Le point $D$ est entre $B$ et $C$, donc $\widehat{ADC} = \widehat{ABD} + \widehat{BAD}$ et par suite $\widehat{ADC} > \widehat{ABD}$. Il existe donc un point $G$ de $[CA]$ tel que $\widehat{ADG} = \widehat{ABD}$, ce qui signifie que les triangles $ABD$ et $ADG$ sont semblables et donc $AB/AD = AD/AG$ autrement dit :

$$AD^2 = AB \times AG.$$




Le point $G$ étant sur le segment $]AC[$, on a $AG < AC$. D'où :

$$AD^2 < AB \times AC.$$

On démontre de manière analogue que :

$$BE^2 < BA \times BC \quad \text{et} \quad CF^2 < CA \times CB.$$

En faisant le produit membre à membre puis en prenant la racine carrée, nous obtenons le résultat cherché :

$$AD \times BE \times CF < AB \times BC \times CA.$$

## Bosse 99

**On tire successivement d'une urne les $n$ boules qu'elle contient, qui portent les numéros de $1$ à $n$.**
**Soit $a_k$ le numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage. Quelle est la probabilité pour que, pour tout $k$, on ait $a_k \geq k - 3$ ?**

### Dégraissage

Dénombrons, parmi les $n!$ tirages possibles, ceux qui conduisent au résultat recherché.
$a_n$ peut être égal à $n$, $n-1$, $n-2$ ou $n-3$, soit quatre possibilités ;
$a_{n-1}$ peut être égal à $n-4$ ou à l'une des valeurs précédentes non prises par $a_n$, soit encore quatre possibilités ;
… … … … … … … … ;
$a_5$ peut être égal à $1$, ou à l'un des nombres non encore utilisés parmi $2$, $3$, $4$ ou $5$.
Il ne reste donc plus que les cas de $a_4$, $a_3$, $a_2$ et $a_1$ :
Pour $a_4$, il y a $3$ choix,
Pour $a_3$, il y a $2$ choix.
Dès lors que tous ces choix sont connus, $a_2$ et $a_1$ sont alors déterminés.
Il y a donc $4^{n-4} \times 3 \times 2$ possibilités, d'où la probabilité demandée :

$$\frac{4^{n-4} \times 3 \times 2}{n!}$$

## Bosse 100

**Deux joueurs A et B choisissent à tour de rôle un des 9 coefficients $a_i$ du polynôme**

$$P(x) = x^{10} + \left(\sum_{i=1}^{9} a_i x^i\right) + 1$$

**Jusqu'à que tous les $a_i$ soient connus. Le premier joueur A gagne si le polynôme obtenu n'a aucune racine réelle. Le second joueur B gagne si le polynôme a au moins une racine réelle. L'un des deux joueurs peut s'arranger pour être toujours gagnant, quoi que fasse son adversaire. De quel joueur s'agit-il?**

## Dégraissage

Parmi les 9 coefficients à choisir, il y en a 5 correspondants à des monômes de degrés impairs et 4 à des monômes de degrés pairs. A un coefficient de monôme de degré pair, on attribue n'importe quelle valeur.

Si le premier choix de A correspond à un coefficient de monôme de degré pair, alors B choisit un coefficient de monôme de degré impair et lui attribue n'importe quelle valeur.
- Le joueur B procède de même pour ses deuxièmes et troisièmes choix à des monômes de degrés impairs.
Et A choisit. Il reste donc deux coefficients, disons $a_p$ et $a_q$, avec $p$ impair mais pas forcément $q$.

On pose $P(x) = Q(x) + a_p x^p + a_q x^q$, où $Q(x)$ est la partie de $P(x)$ déjà déterminée par les choix faits.

- Si $q$ est pair alors $P(1) + P(-1) = Q(1) + Q(-1) + 2a_q$. Par suite, si B choisit :
$a_q = -(Q(1) + Q(-1))/2$, il est assuré que, quel que soit le choix de A pour $a_q$, d'avoir $P(1) + P(-1) = 0$. Ainsi, soit $P(-1)$ et $P(1)$ sont tous les deux nuls, auquel cas B a clairement gagné. Soit $P(-1)$ et $P(1)$ sont de signes contraires. Or, comme P est évidemment continu sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que $P$ a au moins une racine réelle, et donc que B gagne.

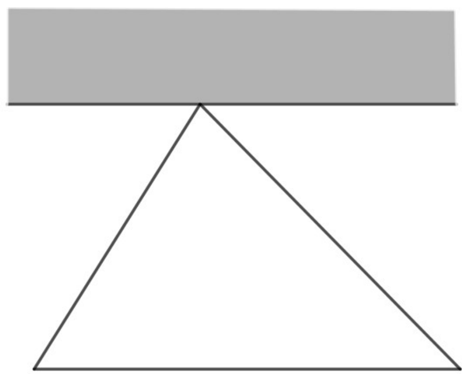
Alors $2^q P(-1) + P(2) = 2^q Q(-1) + Q(2) + (2^p - 2^q)a_p$ et donc, en choisissant cette fois $a_p = [2^q Q(-1) + Q(2)]/[2^q - 2^p]$, le joueur B assure que $2^q P(-1) + P(2) = 0$. Comme ci-dessus, c'est alors que $P(-1)$ et $P(2)$ sont tous les deux nuls, ou qu'ils sont de signes contraires. Dans les deux cas, B gagne.
Finalement, dans tous les cas, selon cette procédure, le joueur B est sûr de gagner.

## Bosse 101

**On se donne $n$ points du plan. On suppose que chaque triplet de points forme un triangle d'aire inférieure ou égale à $1$. Montrer que les $n$ points sont tous à l'intérieur d'un triangle d'aire inférieure ou égale à $4$.**

### Dégraissage

On considère trois points $A$, $B$, $C$ formant un triangle d'aire maximale. On trace la droite parallèle à un des cotés et passant par le troisième sommet.



On sait qu'il n'y a pas de point dans la zone grise.

En effet, un tel point formerait avec les deux autres points un triangle d'aire plus grande que le triangle $ABC$ (il aurait une hauteur plus grande que celle de $\mathrm{ABC}$ et la même base), ce qui contredirait la maximalité supposée de l'aire du triangle $\mathrm{ABC}$. Un raisonnement analogue avec les deux autres côtés définit une zone autorisée de forme triangulaire, formée de quatre triangles semblables au triangle $ABC$, et donc d'aire inférieure ou égale à $4$.

## Bosse 102

**Soit $n > 0$ un entier naturel et $S(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale de $n$.**

**Déterminer un entier $n$ tel que $\begin{cases} S(n) = 2020 \\ S(n^2) = 2020^2 \end{cases}$.**

### Dégraissage

Soit la propriété $P_m$:

$$«\forall m \geq 2, \quad \left(\sum_{s=1}^{s=m} a_s\right)^2 = \sum_{s=1}^{s=m} a_s^2 + 2\left(\sum_{1\leq s<t\leq m} a_s a_t\right) \quad (*)»$$

Démontrons-la par récurrence sur $m$.

- Initialisation :
  Pour $m = 2$, on a : $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$ et donc $\mathrm{P}_2$ est vraie.
- On suppose qu'il existe un rang m pour lequel $P_m$ est vraie.
  Montrons que $P_{m+1}$ est vraie.
  On a :

$$\left(\sum_{s=1}^{s=m+1} a_s\right)^2 = \left[\left(\sum_{s=1}^{s=m} a_s\right) + a_{m+1}\right]^2$$

$$\left(\sum_{s=1}^{s=m+1} a_s\right)^2 = \left(\sum_{s=1}^{s=m} a_s\right)^2 + a_{m+1}^2 + 2a_{m+1}\left(\sum_{s=1}^{s=m} a_s\right)$$

Or selon l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\left(\sum_{s=1}^{s=m} \mathrm{a_s}\right)^2 = \sum_{s=1}^{s=m} \mathrm{a_s^2} + 2\left(\sum_{1\leq s<t\leq m} \mathrm{a_s a_t}\right)$$

Et l'on sait que :

$$\sum_{s=1}^{s=m} a_s^2 + a_{m+1}^2 = \sum_{s=1}^{s=m+1} a_s^2$$

$$2\left(\sum_{1\leq s<t\leq m} a_s a_t\right) + 2a_{m+1}\left(\sum_{s=1}^{s=m} a_s\right) = 2\left(\sum_{1\leq s<t\leq m+1} a_s a_t\right)$$

D'où finalement :

$$\left(\sum_{s=1}^{s=m+1} a_s\right)^2 = \sum_{s=1}^{s=m+1} a_s^2 + 2\left(\sum_{1\leq s<t\leq m+1} a_s a_t\right)$$

La propriété est donc vraie pour $m+1$.

Conclusion : $\forall m \geq 2,\ P_m$ est vraie.

Déterminons le nombre de couples $(s,t)$ d'entiers naturels tels que $1 \leq \mathrm{s} < t \leq m$. Pour cela, il suffit de fixer à chaque fois la valeur de t et déterminer les couples correspondants.

| Valeur fixée de t | Valeurs possibles de s | Nombre de couples |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 1, 2 | 2 |
| 4 | 1, 2, 3 | 3 |
| … | … | … |
| $m$ | 1, 2, …, $m-1$ | $m-1$ |

Il y a donc au total $1+2+3+\cdots+(m-1) = \frac{m(m-1)}{2}$ couples $(s,t)$ d'entiers naturels tels que $1 \leq \mathrm{s} < t \leq m$.

Donc le nombre donné $n = \sum_{i=1}^{i=2} \quad 10^{2^{2i}}$ est la somme de 2020 puissances de 10, distinctes deux à deux, et donc $S(n) = 2020$.
D'autre part, selon la propriété $(*)$, on a :

$$\mathrm{n}^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=20} 10^{2^{2\mathrm{i}+1}} + 2\left(\sum_{1\leq \mathrm{i}<j\leq 2020} 10^{2^{2\mathrm{i}}+2^{2\mathrm{j}}}\right)$$

Les puissances $10^{2^{2\mathrm{i}+1}}$ et $10^{2^{2\mathrm{i}}+2^{2\mathrm{j}}}$ sont distinctes deux à deux et de ce fait l'écriture de $\mathrm{n}^2$ comporte 2020 chiffres $1$, $\frac{2020\times2019}{2}$ chiffres $2$ et tous les autres chiffres des $0$.
Donc :

$$S(n^2) = 2020 + 2 \times \frac{2020 \times 2019}{2} = 2020^2$$

## Bosse 103________________________________

**Soit un point $\boldsymbol{M}$ intérieur à un triangle $\boldsymbol{ABC}$ et $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ les projetés orthogonaux de $\boldsymbol{M}$ sur les côtés de $\boldsymbol{ABC}$.**
**Montrer que : $\boldsymbol{MA} + \boldsymbol{MB} + \boldsymbol{MC} \geq \mathbf{2}(\boldsymbol{MP} + \boldsymbol{MQ} + \boldsymbol{MR})$.**

### Dégraissage

Soit $O$ le centre du cercle $(O)$ circonscrit à $ABC$. On choisit pour unité de longueur le diamètre de $(O)$.
Les droites $(MA)$, $(MB)$, $(MC)$ recoupent le cercle $(O)$ en $A'$, $B'$, $C'$. Soit $A''$ le point diamétralement opposé à $A'$ sur $(O)$. L'angle $\widehat{BAC}$ intercepte dans $(O)$ l'arc d'extrémités $B$ et $C$ qui ne contient pas $A$, le point $M$ est à l'intérieur de $ABC$ et par suite $A$ et $A'$ sont de part et d'autre de $(BC)$ comme $B$ et $C$ sont de part et d'autre de $A$ et $A'$. Donc le quadrilatère $ABA'C$ est convexe et en y appliquant le théorème de Ptolémée on trouve :

$$A'C \times AB + BA' \times AC = AA' \times BC.$$

Les points $A$, $A'$, $A''$, $C$ sont situés sur un même cercle donc :

$$(AA', AC) = (A''A', A''C\ ) = \beta\ [\pi].$$

Dans le triangle rectangle $AQM$, on a $\sin\beta = \frac{MQ}{AM}$ et dans le triangle rectangle $A'CA''$, on a aussi $\sin\beta = A^{'}C/A'A'' = A'C$ car $A^{'}A'' = 1$ (diamètre pris comme unité de longueur).

Donc $MQ = AM \times A'C$ de même $MR = AM \times A'B$.

D'où en réécrivant l'égalité $A'C \times AB + BA' \times AC = AA' \times BC$, on trouve :

$$\frac{MQ}{AM} \times AB + \frac{MR}{AM} \times AC = AA' \times BC$$

Soit en multipliant par $AM/BC$ :

$$MQ \times \frac{BA}{BC} + MR \times \frac{CA}{CB} = AA' \times AM \quad ①$$

On établit de manière analogue que :

$$MP \times \frac{AB}{AC} + MR \times \frac{CB}{CA} = BB' \times BM \quad ②$$

$$MP \times \frac{AC}{AB} + MQ \times \frac{BC}{BA} = CC' \times CM \quad ③$$

En additionnant membre à membre les égalités ①, ②, ③ on obtient :

$$AA' \times AM + BB' \times BM + CC' \times CM$$
$$= MP\left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right) + MQ\left(\frac{BA}{BC} + \frac{BC}{BA}\right) + MR\left(\frac{CA}{CB} + \frac{CB}{CA}\right)$$

$AA'$, $BB'$, $CC'$ sont des cordes dans le cercle $(O)$ et donc elles sont toutes inférieures ou égales à $1$ (au diamètre). D'où :

$$MP\left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right) + MQ\left(\frac{BA}{BC} + \frac{BC}{BA}\right) + MR\left(\frac{CA}{CB} + \frac{CB}{CA}\right)$$
$$\leq AM + BM + CM.$$

D'autre part les quantités $\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}$, $\frac{BA}{BC} + \frac{BC}{BA}$, $\frac{CA}{CB} + \frac{CB}{CA}$ sont de la forme $x + \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. Or on sait que la quantité $x + \frac{1}{x}$ est minimale pour $x = 1$ et son minimum vaut $2$.

Donc on a bien : $2 \times MP + 2 \times MQ + 2 \times MR \leq AM + BM + CM$.

L'égalité $2 \times MP + 2 \times MQ + 2 \times MR = AM + BM + CM$ est vérifiée si et seulement si on a $AB = BC = CA$ et $AA' = BB' = CC' =$ diamètre de $(O)$ c'est-à-dire si $ABC$ est équilatéral et $M$ son centre.

## Bosse 104

**Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, le nombre $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ est divisible par 1989.**

### Dégraissage

Tout d'abord, on a : $1989 = 3^2 \times 13 \times 17$. Pour montrer que $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ est divisible par 1989, il suffit de montrer que $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ est divisible par chacun des nombres 9, 13 et 17 car ils sont premiers entre eux deux à deux. Posons $a = n^{n^n}$ et $b = n^n$.

- **Divisibilité par 13 :** il s'agit de montrer que $n^a \equiv n^b\ [13]$.
  On sait, d'après le petit théorème de Fermat, que pour tout entier $m$ non multiple de 13, on a : $m^{12} \equiv 1\ [13]$. Donc pour avoir $n^a \equiv n^b\ [13]$, il suffit d'avoir $a \equiv b\ [12]$.
  Comme $12 = 3 \times 4$ avec $PGCD(3,4) = 1$ alors :
  $$a \equiv b\ [12] \iff \begin{cases} a \equiv b\ [3] \\ a \equiv b\ [4] \end{cases}$$
  On a bien $a \equiv b\ [3]$, en effet comme 3 est premier et il suffit de remarquer que $n^n$ et $n$ sont de même parité(donc congrus modulo 2).
  Pour établir que $a \equiv b\ [4]$, on peut envisager deux cas :
  - Si $n$ est pair alors $a$ et $b$ sont des multiples de 4 et le résultat s'en déduit.
  - Si $n$ est impair alors $n-1$ et $n+1$ sont pairs et par suite $(n-1)(n+1) \equiv 0\ [4]$, c'est-à-dire que $n^2 \equiv 1\ [4]$ et donc le résultat s'en déduit.

- **Divisibilité par 9 :** il s'agit de montrer que $n^a \equiv n^b\ [9]$.
  Là également, on envisage deux cas :
  - Si $n$ est un multiple de $3$ alors $n^a - n^b$ est un multiple de $9$ car $n^a$ et $n^b$ le sont.
  - Si $n$ n'est pas divisible par $3$ (donc premier avec $3$) alors il suffit d'établir que $a \equiv b\ [6]$ car pour $x$ premier avec $3$, on a :
  $$x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1 = (x^2-1)(x^4+x^2+1) \equiv 0\ [9]$$
  $$[\ \ x^2 - 1 \equiv 0\ [3],\quad x^4 + x^2 + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0\ [3]\ \ ]$$
  Ce qui revient à avoir $a \equiv b\ [2]$ et $a \equiv b\ [3]$. Ce qui a été déjà obtenu.
- **Divisibilité par 17 :** il s'agit de montrer que $n^a \equiv n^b\ [17]$.
  Cela revient à comparer $a$ et $b$ modulo $16$, et la difficulté consiste dans le fait que $16$ n'est pas premier.
  - Si $n$ est pair alors $a$ et $b$ sont divisibles par $16$ (car $n \geq 3$).
  - Si $n$ est impair, on est amené à comparer $n$ et $n^n$ modulo $4$ car on sait que pour tout $x$ impair, on a $x^4 \equiv 1\ [16]$. Ce qui achève la démonstration.

**Conclusion :**

Pour tout entier $n \geq 3$, le nombre $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ est divisible par $9 \times 13 \times 17 = 1989$.

## Bosse 105______________________________

**Montrer que $A = 2^{3^{2019}} + 3^{3^{2019}}$ admet au moins 2020 diviseurs premiers distincts.**

### Dégraissage

Soit la suite de terme général $u_n = 2^{3^n} + 3^{3^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et la propriété $\wp(\mathrm{n})$: «$\forall n \geq 1, u_n$ possède $n+1$ diviseurs premiers».
Démontrons $\wp(\mathrm{n})$ par récurrence :

- On a : $u_1 = 2^3 + 3^3 = 35$, qui possède 2 diviseurs premiers distincts à savoir 5 et 7, donc $\wp(1)$ est vraie.
- Supposons que $\wp(\mathrm{n})$ soit vraie pour un certain rang $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$.

  On a :$u_{n+1} = 2^{3^{n+1}} + 3^{3^{n+1}} = \left(2^{3^n}\right)^3 + \left(3^{3^n}\right)^3 = X^3 + Y^3$.

  Or, on sait que :
  $$X^3 + Y^3 = (X+Y)(X^2 - XY + Y^2) \; et \; X + Y = u_n,$$
  d'où : $u_{n+1} = (X^2 - XY + Y^2)u_n$.

Comme $X^2 - XY + Y^2$ est un entier alors $u_n$ divise $u_{n+1}$ et par suite tout diviseur premier de $u_n$ est également diviseur premier de $u_{n+1}$. Donc en vertu de l'hypothèse de récurrence, on peut déduire que $u_{n+1}$ admet au moins $n+1$ diviseurs premiers distincts.

Maintenant, montrons que $X^2 - XY + Y^2$ admet au moins un diviseur premier $p$. Pour cela, il suffit de s'assurer que $X^2 - XY + Y^2 \geq 2$.

On a : $X^2 - XY + Y^2 = (X-Y)^2 + XY \geq 2$ car :
$$XY = 2^{3^n} \times 3^{3^n} \geq 2 \;\; \text{si}\, n \geq 1.$$
Donc $X^2 - XY + Y^2$ étant un entier supérieur à 2, il admet au moins un diviseur premier $p$.

Montrons que $p$ ne divise pas $u_n = X + Y$.

On a : $p$ divise $X + Y$ et $p$ divise $X^2 - XY + Y^2$ implique que $p$ divise toute combinaison linéaire de $X + Y$ et $X^2 - XY + Y^2$.

On remarque que $X^2 - XY + Y^2 = (X+Y)^2 - 3XY$ c'est-à-dire :
$$(X^2 - XY + Y^2) - (X+Y)^2 = -3XY$$
Donc $p$ divise $3XY = 2^{3^n} \times 3^{3^n+1}$ et donc $p = 2$ ou $p = 3$ en vertu de l'unicité de la décomposition d'un entier supérieur à 2 en produit de facteurs premiers. Ce qui est impossible car si 2 ou si 3 diviserait $u_n = 2^{3^n} + 3^{3^n}$ alors 2 divise $3^{3^n}$ ou 3 divise $2^{3^n}$ ; ce qui est vachement faux.

Donc $p$ ne divise pas $u_n$ et par conséquent $u_{n+1}$ possède au moins $(n+1) + 1 = n + 2$ diviseurs premiers distincts.

Conclusion : La propriété $\wp(\mathrm{n})$ est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de cette valeur, donc pour $n \geq 1$, $\wp(n)$ est vraie.
Ainsi le nombre $A = 2^{3^{2019}} + 3^{3^{2019}}$ possède au moins 2020 diviseurs premiers distincts.

## Bosse 106

**Pour $x$ et $y$ dans $\mathbb{N}$, on pose :**

$$\boldsymbol{B = x(y+1) - (y! + 1)}$$

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{y-1}{2}\left(|B^2 - 1| - (B^2 - 1)\right) + 2}$$

**Montrer que, lorsque $x$ et $y$ décrivent $\mathbb{N}$, la fonction $f$ décrit exactement l'ensemble des nombres premiers, et que chaque nombre premier impair est atteint une seule fois.**

### Dégraissage

Le nombre $|B^2 - 1| - (B^2 - 1)$ est non nul si, et seulement si $B^2 - 1 < 0$, c'est-à-dire puisque $B^2$ est un entier naturel si, et seulement si $B = 0$. Ainsi si $B \neq 0$, on a toujours $f(x,y) = 2$ qui est premier.

- Si $B = 0$, on a $|B^2 - 1| - (B^2 - 1) = 2$ et $f(x,y) = y + 1$. Le fait que $B$ soit nul implique $y! + 1 = x(y+1)$, soit encore $y! \equiv -1\ [mod. y + 1]$, ce qui assure, d'après le théorème de Wilson, que $y + 1 = f(x,y)$ est premier. Ainsi la fonction $f$ ne prend que des valeurs qui sont des nombres premiers.
- Considérons à présent $p$ un nombre premier impair. D'après ce qui précède, s'il s'écrit $f(x,y)$, c'est que $y = p - 1$ et que $y! + 1 = x(y+1)$, soit :

$$x = \frac{[(p-1)! + 1]}{p}$$

On remarque bien, d'après le théorème de Wilson, que $x$ est un entier. Donc le nombre premier $p$ ne peut être atteint qu'une seule fois.

## Bosse 107

**Soient $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $p$, $q$ des réels tels que :**

$$\mathbf{0 < p \leq a, b, c, d, e \leq q}.$$

**Démontrer que :**

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \leq 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

## Dégraissage

La fonction :

$(a, b, c, d, e \longrightarrow (a+b+c+d+e)(1/a+1/b+1/c+1/d+1/d)$

est convexe en chacune des variables $a, b, c, d, e$ sur l'intervalle $[p, q]$. Donc elle atteint son maximum en un quintuplet $(a, b, c, d, e)$ où $a, b, c, d, e$ prennent les deux valeurs $p$, $q$.

Soit $n$ $(0 \leq n \leq 5)$ le nombres de variables, parmi $a, b, c, d, e$, égales à $p$, et donc $5-n$ le nombres de celles égales à $q$.

Il s'agit donc de déterminer la valeur maximale de la fonction :

$$f(n) = [np+(5-n)q]\left(\frac{n}{p}+\frac{5-n}{q}\right)$$

Or, tous calculs faits, on trouve :

$$f(n) = n^2+(5-n)^2+n(5-n)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)$$

$$f(n) = n^2+(5-n)^2+2n(5-n)+n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

$$f(n) = 25 + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

D’où $f(n)$ est maximale si, seulement, si $n(5-n)$ est maximale.
On sait que la forme canonique de $n(5-n)$ est :

$$n(5-n) = \frac{25}{4} - \left(n - \frac{5}{2}\right)^2$$

D’où, $n$ étant entier, $n(5-n)$ est maximal si, et seulement, si $n = 2$ ou $n = 3$. Ainsi, le maximum cherché est :

$$25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

ce qui achève la démonstration.

## Bosse 108

**Les solutions de l’équation du 3ème degré $x^3 + 4x^2$ $= 0$ sont aussi des solutions de l’équation du 4ème degré :**

$$x^4 - x^3 - 19x^2 \qquad = 0$$

**Malheureusement des taches masquent une partie des équations mais on sait que ces solutions sont des entiers relatifs. Résoudre l’équation du 3ème degré, puis déterminer la 4ème solution de l’équation du 4ème degré.**

## Dégraissage

Dans les deux équations, la tache a masqué un binôme du 1er degré. Pour cela, on suppose que les équations sont de la forme :

$(E)$: $x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$ et $(F)$: $x^4 - x^3 - 19x^2 + Ax + B = 0$

Notons $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ les racines de l’équation $(F)$ ($x_1$, $x_2$, $x_3$ sont également racines de $(E)$ selon les hypothèses).

On sait que :

$$x^3 + 4x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + Ax + B = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$
Exploitons les relations liant les racines aux coefficients :
Le coefficient de $x^2$ dans $(E)$ est : $-x_1 - x_2 - x_3 = 4$, soit :
$$x_1 + x_2 + x_3 = -4.$$
Le coefficient de $x^3$ dans $(F)$ est : $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1$, soit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
D'où : $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - (x_1 + x_2 + x_3) = 1 - (-4) = 5$, c'est la 4ème racine de $(F)$.
Le coefficient de $x^2$ dans $(F)$ est :
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -19.$$
D'autre part, on peut écrire :
$$\begin{aligned} -19 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4(x_1 + x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Soit : $-19 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5 \times (-4)$
Donc : $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -19 + 20 = 1.$
On sait encore que :
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= 16 - 2 = 14. \end{aligned}$$
Les racines $x_1$, $x_2$, $x_3$ sont entières et la seule décomposition de 14 en somme de 3 carrées est, aux signes près :
$$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2.$$
En affectant aux valeurs 1, 2, 3 les signes $+$ ou $-$, et en tenant compte de l'égalité $x_1 + x_2 + x_3 = -4$, on déduit que les racines de l'équation $(E)$ sont : $1, -2, -3$.
Ainsi, les équations deviennent :
$(E)$: $(x - 1)(x + 2)(x + 3) = 0$, soit :
$$(E):\ x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$
$(F)$: $(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x - 5) = 0$, soit :
$$(F):\ x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x + 30 = 0.$$

## Bosse 108

**On note $(\boldsymbol{E})$ l'équation : $\boldsymbol{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_n = 0}$, où les coefficients $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_1}$, …, $\boldsymbol{a_n}$ sont des nombres réels tels que $\boldsymbol{a_0 \times a_n \neq 0}$.Montrer que toutes les solutions de (E), si elles existent, sont dans l'intervalle ouvert $\boldsymbol{]-1-M, 1+M[}$ avec $\boldsymbol{M = sup(|a_1/a_0|, |a_2/a_0|, \dots, |a_n/a_0|)}$.**

## Dégraissage

On a : $P(0) = a_n \neq 0$, donc $0$ n'est pas une solution de l'équation $P(x) = 0$. Par conséquent, on a les équivalences suivantes :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{P(x)}{a_0x^n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0x^n} = -1.$$

Posons :

$$g(x) = \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0x^n}$$

On a déjà vu que : $P(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = -1$.

Pour tout réel $x$ tel que $|x| \geq 1 + M$ :

$$|g(x)| = \left|\frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right|$$

$$\begin{aligned}|g(x)| &\leq \left|\frac{a_1}{a_0}\right| \times \frac{1}{|x|} + \left|\frac{a_2}{a_0}\right| \times \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \left|\frac{a_n}{a_0}\right| \times \frac{1}{|x|^n}\\ &\leq M\left(\frac{1}{1+M} + \frac{1}{(1+M)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+M)^n}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{(1+M)^n} < 1.\end{aligned}$$

Au final, on voit que si $|x| \geq 1 + M$ alors $|g(x)| < 1$ et le réel $x$ n'est donc pas solution de l'équation $g(x) = -1$ et donc non plus de l'équation $P(x) = 0$.

En conclusion, si l'équation $P(x) = 0$ admet des solutions, elles sont nécessairement dans l'intervalle $]-1-M, 1+M[$.

## Bosse 109

**Soient $x$ et $y$ deux réels strictement positifs vérifiant :**

$$\boldsymbol{x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2} = 4}$$

**Montrer que $x^2y \leq 4$**

## Dégraissage 1

En appliquant l'inégalité de la moyenne, on obtient :

$$x + y = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y \geq \frac{3}{4^{1/3}}(x^2y)^{1/3}$$

Nous avons bien fait apparaître $x^2y$. On tâchera de faire la même chose pour la racine carrée. On suppose avoir décomposé $2x^2$ en $i$ termes tous égaux à $2x^2/i$, $2xy$ en $j$ termes tous égaux à $2xy/j$ et $3y^2$ en $k$ termes tous égaux à $3y^2/k$. En plus, on aimerait avoir :

$$2i + j = 2(j + 2k),\quad \frac{2i + j}{2(i + j + k)} = \frac{2}{3}.$$

Une solution possible est $i = 8,\ j = 4,\ k = 3$.

Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2xy + 3y^2 &\geq 15\left(\frac{2}{8}\right)^{8/15}\left(\frac{2}{4}\right)^{4/15}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/15}(x^2y)^{2/3} \\ &= 15\left(\frac{1}{4}\right)^{2/3}(x^2y)^{2/3} \end{aligned}$$

D'où :

$$4 = x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2} \geq \left(\frac{3}{4^{1/3}} + \frac{\sqrt{15}}{4^{1/3}}\right)(x^2y)^{1/3}$$

Soit encore :

$$x^2y \leq 4\left(\frac{4}{3 + \sqrt{15}}\right)^3 \leq 4.$$

# Dégraissage 2

On a :

$2x^2 + 2xy + 3y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$

c'est-à-dire : $2x^2 + 2xy + 3y^2 \geq (\mathrm{x} + \mathrm{y})^2$, d'où :

$$4 = x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2} \geq \mathrm{x} + \mathrm{y} + \sqrt{(\mathrm{x} + \mathrm{y})^2} = 2(\mathrm{x} + \mathrm{y})$$

Donc : $x + y \leq 2$ et par suite $y \leq 2 - x$ et donc $x^2 y \leq x^2(2 - x)$.

On pose $f(x) = x^2(2 - x)$ avec $0 \leq x \leq 2$.

La fonction $f$ est dérivable et :

$$f'(x) = x(4 - 3x) \begin{cases} \leq 0 & si \;\; x \geq 4/3 \\ \geq 0 & si \;\; 0 \leq x \leq 4/3 \end{cases}$$

Donc la fonction f présente un maximum en $4/3$ et ce maximum vaut :

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9} \times \frac{2}{3} = 4 \times \frac{8}{27} \leq 4.$$

En conclusion, on obtient :

$$x^2 y \leq 4.$$

## Bosse 110

**Le nombre $5 \times 7^{34}$ a beaucoup de chiffres dans son développement décimal. Sans calculer tout ce développement, démontrez qu'un chiffre y apparait au moins quatre fois.**

# Dégraissage

Si on calcule $\log(5 \times 7^{34})$, on obtient:

$$\begin{aligned} \log(5 \times 7^{34}) &= \log(5) + 34 \times \log(7) = 0{,}698\ldots + 34 \times 0{,}845\ldots \\ &= 29{,}423\ldots \end{aligned}$$

Ce qui est important, c'est que ce logarithme est plus grand que $29$ (et plus petit que $30$). Le nombre $5 \times 7^{34}$ est donc plus grand que $10^{29}$ car le logarithme est une fonction croissante.
Or $10^{29}$ commence par le chiffre $1$ et est suivi de $29$ chiffres zéros. Donc $5 \times 7^{34}$ est composé d'exactement $30$ chiffres. (Il ne peut pas être composé de plus de $30$ chiffres, sinon le logarithme serait plus grand que $30$).

Comme il n'y a que dix chiffres à disposition, nous avons deux possibilités :
Soit tous les chiffres apparaissent exactement $3$ fois, ou alors au moins un chiffre apparaît $4$ fois.

Supposons que tous les chiffres apparaissent exactement $3$ fois. La somme des chiffres est donc un multiple de $3$, ce qui est un critère de divisibilité par $3$ bien connu. Le nombre $5 \times 7^{34}$ serait divisible par $3$. Mais ceci est évidemment impossible puisqu'il nous est donné par sa décomposition en nombres premiers qui ne contient aucun facteur $3$. (La décomposition en nombres premiers est évidemment unique à l'ordre des facteurs près).

Nous devons donc exclure la possibilité que tous les chiffres apparaissent exactement $3$ fois, il y a alors obligatoirement au moins un chiffre qui apparaît $4$ fois.

## Bosse 111

**On considère la fonction $f$ définie sur $]3/4, +\infty[$ par :**

$$f(x) = \frac{5x - 4}{4x - 3}.$$

**On pose $f^1 = f$ et pour tout $n \geq 2$, $f^n = f^{n-1} \circ f$.**
**Calculer $\lim_{n \to +\infty} f^n(2019^{2020})$.**

## Dégraissage

On a :

$$f^2(x) = f[f(x)] = \frac{5f(x) - 4}{4f(x) - 3} = \frac{5\left(\frac{5x-4}{4x-3}\right) - 4}{4\left(\frac{5x-4}{4x-3}\right) - 3} = \frac{9x - 8}{8x - 7}$$

Si à la fonction homographique $f$, on peut associer la matrice de ses coefficients :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

alors à la fonction $f^2$, on peut associer logiquement la matrice $A^2 = A \times A$. En effet ; on a :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$$

c'est exactement la matrice des coefficients de $f^2$.

Pour tout entier $n \geq 1$, posons :

$$f^n(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$$

Les matrices associées respectivement aux fonctions $f^n(x)$ et $f^{n+1}(x)$ sont :

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}$$

avec bien sûr :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a_n + 4b_n & -4a_n - 3b_n \\ 5c_n + 4d_n & -4c_n - 3d_n \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = -4a_n - 3b_n \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = 4a_n + 4b_n &= 4(5a_{n-1} + 4b_{n-1}) + 4(-4a_{n-1} - 3b_{n-1}) \\ &= 4a_{n-1} + 4b_{n-1} \end{aligned}$$

Et de proche en proche, on trouve :

$$a_{n+1} - a_n = 4a_1 + 4b_1 = 4 \times 5 + 4 \times (-4) = 4$$
Donc la suite $(a_n)$ est arithmétique de raison $r_a = 4$ et de 1er terme $a_1 = 5$.
La suite $(b_n)$ vérifie $b_{n+1} - b_n = -4a_n - 4b_n$ et donc c'est une suite arithmétique de raison $r_b = -4$ et de 1er terme $b_1 = -4$.
Les deux suites $(c_n)$ et $(d_n)$ suivent la même logique avec $c_1 = 4$ et $d_1 = -3$.
D'où :
$$\begin{aligned} a_n &= 5 + 4(n-1) = 4n + 1 \\ b_n &= -4 - 4(n-1) = -4n \\ c_n &= 4 + 4(n-1) = 4n \\ d_n &= -3 - 4(n-1) = 1 - 4n \end{aligned}$$

Enfin, pour tout réel $x$ convenable :
$$f^n(x) = \frac{(4n+1)x - 4n}{4nx + 1 - 4n}$$

Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} f^n(2019^{2020}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(4n+1) \times 2019^{2020} - 4n}{4n \times 2019^{2020} + 1 - 4n} = 1.$$

## Bosse 112

**On considère la fonction $f$ définie sur $]-3/2, +\infty[$ par :**
$$f(x) = \frac{6x-1}{2x+3}.$$
**On pose $f^1 = f$ et pour tout $n \geq 2$, $f^n = f^{n-1} \circ f$.**
**Déterminer l'expression de $f^{2020}(x)$ en fonction de $x$.**

### Dégraissage

La matrice des coefficients de la fonction $f$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si, pour tour tout $n \geq 2$, on note :

$$f^1(x) = f(x) = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} \text{ et } f^n(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$$

alors nous aurons :

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

D'où la nécessité de calculer $A^{n-1}$, et pour cela nous commencerons par diagonaliser la matrice $A$.

Autrement dit, montrons qu'il existe deux droites non parallèles du plan telles que sur chacune d'elles la transformation du plan dont la matrice est A, par rapport à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ donnée, est restreinte à une homothétie vectorielle.

$\vec{u}(x, y)$ est un vecteur du plan, cherchons les réels $\lambda$ tels que le système admet une infinité de solutions :

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$$

Ce qui donne deux valeurs $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 5$.

Pour la valeur $\lambda_1 = 4$, on a la droite $x - y = 0$ dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ ;

Pour la valeur $\lambda_2 = 5$, on a la droite $2x - y = 0$ dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v_2} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

Donc la matrice de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Enfin, on a :

$$A = P \times \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

Et on établit par récurrence que pour tout $n \geq 1$ :

$$A^n = P \times \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n \times P^{-1} = P \times \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

La matrice inverse de $P$ est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 \times 5^n - 4^n & -5^n + 4^n \\ 2 \times 5^n - 2 \times 4^n & -5^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$f^n(x) = \frac{(2 \times 5^n - 4^n)x + (-5^n + 4^n)}{(2 \times 5^n - 2 \times 4^n)x + (-5^n + 2 \times 4^n)}.$$

## Bosse 113

**Démontrer dans l'ensemble des nombres réels l'implication :**

$$\begin{cases} \boldsymbol{a + 2b \leq 3} \\ \boldsymbol{b + 3c \leq 4} \\ \boldsymbol{c + 4a \leq 5} \end{cases} \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a + b + c \leq 3}.$$

## Dégraissage 1

Cherchons par identification à obtenir :

$$x(a + 2b) + y(b + 3c) + z(c + 4a) = a + b + c \quad ①$$

c'est-à-dire résolvons le système : $\begin{cases} x + 4z = 1 \\ 2x + y = 1 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$

On obtient : $x = 9/25, \ y = 7/25, \ z = 4/25.$

En remplaçant dans ① les lettres $x$, $y$, $z$ par leurs valeurs, on obtient :

$$a + b + c = \frac{9}{25}(a + 2b) + \frac{7}{25}(b + 3c) + \frac{4}{25}(c + 4a)$$
$$\leq \frac{9}{25} \times 3 + \frac{7}{25} \times 4 + \frac{4}{25} \times 5 = 3$$

## Dégraissage 2

En remplaçant $a$, $b$, $c$ par $A = a - 1$, $B = b - 1$, $C = c - 1$, le système proposé devient :

$$\begin{cases} A + 2B \leq 0 \\ B + 3C \leq 0 \\ C + 4A \leq 0 \end{cases}$$

Et on doit prouver que $S = A + B + C \leq 0$.
Par addition des trois inégalités on obtient :

$$3S + 2A + C \leq 0 \quad \text{soit} \quad 4S + A - B \leq 0.$$

Si on a $A - B \geq 0$, le résultat est évident, la somme $S$ ne peut être que négative ou nulle.
Considérons le cas $A - B < 0$.
La première inégalité du système proposé exige que le plus petit de $A$ et de $B$, donc $A$, soit strictement négatif.
Par addition licite des première et deuxième inégalités on obtient $A + 3B + 3C \leq 0$, et donc $3S - 2A \leq 0$ qui n'est possible que si $S \leq 0$.

## Bosse 114

**Démontrer que si pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de l'intervalle $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ on a $|\boldsymbol{ax^2 + bx + c}| \leq \mathbf{1}$ alors $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}| \leq \mathbf{17}$.**

## Dégraissage

Si dans $|ax^2 + bx + c| \leq 1$, on fait successivement $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 1$, on obtient le système :

$$\begin{cases} |c| \leq 1 \\ |a + 2b + 4c| \leq 4 \\ |a + b + c| \leq 1 \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$|a| = |2a + 2b + 2c - (a + 2b + 4c) + 2c|$$
$$\leq 2|a + b + c| + |a + 2b + 4c| + 2|c| \leq 2 + 4 + 2 = 8$$
$$|b| = |a + 2b + 4c - (a + b + c) - 3c|$$

$\leq |a+2b+4c|+|a+b+c|+3|c| \leq 4+1+3=8$
$|c| \leq 1$
D'où par addition : $|a|+|b|+|c| \leq 17$.

## Bosse 115

**Ma montre avance d'une minute toutes les 44 minutes. Elle est à l'heure à midi. A quelle heure (exacte) les deux aiguilles seront-elles de nouveau en coïncidence ?**

### Dégraissage

En ce qui concerne les heures (fausses) indiquées par la montre, dans une heure, la grande aiguille sera sur $12$ et la petite sur $5$. Il y a « $5$ minutes » à rattraper pour avoir la prochaine coïncidence, la vitesse de la grande aiguille par rapport à la petite étant de « $55$ minutes » par heure. La prochaine coïncidence aura lieu dans $60+5 \div 55/60 = 720/11$ minutes (de la montre). Mais 44 minutes réelles correspondent à 45 minutes de la montre. Le délai réel avant la coïncidence sera donc de $720/11 \times 44/45 = 64$ minutes (réelles). Il sera donc exactement $1$ heure $04$.

## Bosse 116

**Démontrer graphiquement que :**

$$\boldsymbol{tan^{-1}(1)+tan^{-1}(2)+tan^{-1}(3)=\pi}$$

### Dégraissage

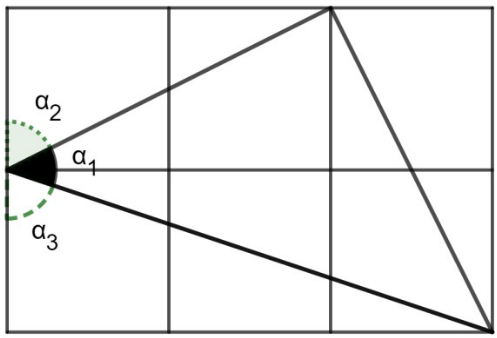
Sur la figure suivante, on a :

$\alpha_1 = \pi/4$ (à cause du triangle rectangle isocèle), donc :

$$\tan(\alpha_1)=1, \text{ et par suite } tan^{-1}(1)=\alpha_1.$$

Idem :

$$\tan(\alpha_2) = 2, \text{ et par suite } tan^{-1}(2) = \alpha_2.$$
$$\tan(\alpha_3) = 3, \text{ et par suite } tan^{-1}(3) = \alpha_3.$$




## Bosse 117

**Trouver des entiers positifs impairs distincts $a_1$ ; $a_2$ ; $a_3$ ; … ; $a_n$ tels que :**

$$2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

## Dégraissage

Supposons le problème résolu. Si on note $A$ le $PPCM$ des $a_i$, $A$ est impair comme tous les $a_i$. Après multiplication par $A$, on obtient $2A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$. Les $A_i$ sont des diviseurs distincts de $A$. L'idée est donc de chercher un entier impair $A$ ayant suffisamment de diviseurs pour qu'on puisse espérer en trouver une partie dont la somme soit égale à $2A$. Il faut chercher parmi les nombres dits abondants, c'est à dire dont la somme des diviseurs dépasse le double du nombre.

Divers essais nous ont conduit à $A = 3^4 \times 5^2 \times 7 = 14\,175$. Les $5 \times 3 \times 2 = 30$ diviseurs de $A$ forment l'ensemble $D$ qui s'obtient rappelons-le en développant :

$$(1 + 3 + 9 + 27 + 81)\,(1 + 5 + 125)\,(1 + 7)$$

D = {1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 25, 27, 35, 45, 63, 75, 81, 105, 135, 175, 189, 225, 315, 405, 525, 567, 675, 945, 1575, 2025, 2835, 4725, 14175};

On trouve après quelques essais :

$$\begin{aligned} 2 \times 14175 \ &= 14175 + 4725 + 2835 + 2025 + 1575 + 945 + 675 \\ &\quad +567 + 525 + 225 + 75 + 3. \end{aligned}$$

D'où, en divisant par $14175$ :

$$2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{63} + \frac{1}{189} + \frac{1}{4725}.$$

## Bosse 118

**Quel est le plus petit entier naturel strictement positif $n$ tel que : $2n = a^2$, $3n = b^3$, $5n = c^5$ où $a$, $b$, $c$ sont des entiers naturels ?**

### Dégraissage

D'après les hypothèses:

$a$ est pair, donc $n$ aussi.

$b$ est multiple de $3$, donc $b^3$ est multiple de $27$, donc $n$ est multiple de $9$.

$c$ est multiple de $5$, donc $c^5$ est multiple de $5^5$, donc $n$ est multiple de $5^4$.

Ainsi on commence à avoir une petite idée de $n$ : il est de la forme $n = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times A$ avec $\alpha \geq 1$ ; $\beta \geq 2$ ; $\gamma \geq 4$.

On peut supposer $A$ premier avec $2$, $3$ et $5$.
$2n = a^2$ implique $2n = 2^{\alpha+1} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma} \times A = a^2$. Donc $\alpha$ est impair ; $\beta$ et $\gamma$ sont pairs. (N'oublions pas qu'on cherche le plus petit $n$ tel que…).
De même : $3n = b^3$ implique $3n = 2^{\alpha} \times 3^{\beta+1} \times 5^{\gamma} \times A = b^3$. Donc $\alpha$ et $\gamma$ sont multiples de 3 et $\beta + 1$ est multiple de $3$.
$5n = c^5$ implique $5n = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma+1} \times A = c^5$ . Donc $\alpha$ et $\beta$ sont multiples de $5$ et $\gamma + 1$ est multiple de $5$. Il est facile de constater, même mentalement, que les plus petits nombres $\alpha$ ; $\beta$ ; $\gamma$ qui vérifient les conditions ci-dessus sont $\alpha = 15$ ; $\beta = 20$ et $\gamma = 24$. Finalement $n = 2^{15} \times 3^{20} \times 5^{24} \times A$.
Avec $A = 1$, si on veut minimiser $n$, et on vérifie (bien que ce ne soit pas indispensable) que :
$n = 2^{15} \times 3^{20} \times 5^{24}$ implique :

$$2n = 2^{16} \times 3^{20} \times 5^{24} = (2^8 \times 3^{10} \times 5^{12})^2$$
$$3n = 2^{15} \times 3^{21} \times 5^{24} = (2^5 \times 3^7 \times 5^8)^3$$
$$5n = 2^{15} \times 3^{20} \times 5^{25} = (2^3 \times 3^4 \times 5^5)^5.$$

Le plus petit entier naturel strictement positif $n$ vérifiant les hypothèses est donc bien :

$$\begin{aligned} n &= 2^{15} \times 3^{20} \times 5^{24} = 3^{20} \times 5^9 \times 10^{15} \\ &= 68101257832031250000000000000. \end{aligned}$$

## Bosse 119

**Démontrer que dans $\mathbb{R}^3$ , si $M$ et $M'$ sont deux points à coordonnées rationnelles alors la distance de $M$ à $M'$ est différente de $\sqrt{7}$ .**

### Dégraissage

Soient $(x/p,\ y/p,\ z/p)$ et $(x'/q,\ y'/q,\ z'/q)$ les coordonnées de $M$ et $M'$. Si la distance de $M$ à $M'$ était égale à $\sqrt{7}$, en calculant $MM'^2$, on arriverait après multiplication par $p^2q^2$ à une égalité de la forme :

❶ $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$ avec $a$, $b$, $c$, $d$ entiers et où $d = pq$ n'est pas nul.
On va montrer par l'absurde que ceci est impossible :
Si $a$, $b$, $c$ étaient tous pairs, $d$ le serait également, et on pourrait dans ❶ diviser $a$, $b$, $c$, et $d$ par $2$. On va donc supposer dans la suite que $a$, $b$, $c$ ne sont pas tous pairs.
Posons $d = 2^e\delta$ avec $\delta = 2i + 1$ impair.
❶ devient $a^2 + b^2 + c^2 = 7 \times 4^e\delta^2$ ❷
Or $\delta^2 = (2i + 1)^2 = 4i^2 + 4i + 1 = 4i(i + 1) + 1$.
L'entier $i(i + 1)$ est nécessairement pair, donc $\delta^2$ est congru à $1$ modulo $8$. $7\delta^2$ est donc congru à $7$ modulo $8$ et ❷ pourrait s'écrire :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4^e \times (8k + 7),\ k \text{ entier} \quad ❸$$

Mais, modulo $8$, un carré ne peut être que : $0$, $1$ ou $4$.
L'examen des $33$ possibilités de $a^2 + b^2 + c^2$ modulo $8$ montre que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est jamais congru à $7$ modulo $8$.

Pour terminer, distinguons trois cas dans ❸ :
Si $e = 0$, ❸ devient $a^2 + b^2 + c^2 = (8k + 7)$ quantité congrue à $7$ modulo $8$, on vient de voir que c'est impossible.
Si $e = 1$, ❸ devient $a^2 + b^2 + c^2 = (8k + 7)$ quantité congrue à $4$ modulo $8$.
Si $e \geq 2$, $4^e$ est multiple de $8$, et alors $a^2 + b^2 + c^2$ serait congrue à $0$ modulo $8$. Dans ces deux derniers cas, $a^2 + b^2 + c^2$ serait pair, mais ceci n'est possible que si $a$, $b$, $c$ sont tous les trois pairs (puisque le seul résidu impair modulo $8$ est $1$). C'est justement la situation qu'on a exclue au début.
Donc ❶ est impossible, et par suite, si $M$ et $M'$ sont deux points à coordonnées rationnelles dans $\mathbb{R}^3$ alors leur distance est différente de $\sqrt{7}$.

## Bosse 120

**Quel est le plus petit entier naturel qui augmente de 50% lorsqu'on transfère le chiffre de gauche à droite ?**

### Dégraissage

Soit $N = a \times 10^n + b$ l'entier en question où $b$ est un entier qui possède $n$ chiffres. Après transfert du chiffre $a$ à droite, $N$ devient $N' = 10b + a$.

Par hypothèse $N' = (3/2)N$, et donc :

$$10b + a = \frac{3}{2}(a \times 10^n + b).$$

Cette équation se met sous la forme :

$$17b = a(3 \times 10^n - 2) \quad (1)$$

Il est donc nécessaire que $10^n$ soit congru à $2$ modulo $17$. Un petit calcul montre que le plus petit $n$ qui convient est $n = 15$.

L'équation (1) donne :

$$b = \frac{3 \times 10^{15} - 2}{17} \times a = 176470588235294 \times a.$$

D'où :

$$N = a \times (10^{15} + 176470588235294).$$

Donc $N$ est minimal pour $a = 1$ et vaut :

$$N = 10^{15} + 176470588235294 = 1176470588235294.$$

## Bosse 121

**Trouver une progression arithmétique infinie d'entiers naturels, de raison non nulle et qui ne contient aucune puissance $n^k$ [avec $n \geq 2$ et $k \geq 2$].**

## Dégraissage

Considérons la progression de raison 4 : (2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, … ) dont le terme général est $4n + 2$.
Si on avait $4n + 2 = m^k$ avec $m \geq 2$ et $k \geq 2$ alors $m$ serait pair c'est-à-dire $m = 2p$.

On aurait $4n + 2 = m^k = 2^k p^k$ donc $2n + 1 = 2^{k-1}p^k$ ce qui est impossible car $2n + 1$ est impair et $2^{k-1}$ pair puisque $k - 1 \geq 1$).

Donc la progression (2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, … ) ne contient aucune puissance.

## Bosse 122

**Démontrer que tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ s'écrit de manière unique sous l'une des formes :**

**$\boldsymbol{n = a + \lfloor a\pi \rfloor}$ avec $\boldsymbol{a}$ entier ou $\boldsymbol{n = b + \lfloor b/\pi \rfloor}$ avec $\boldsymbol{b}$ entier où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $\boldsymbol{x}$.**

## Dégraissage

Si $n$ ne s'écrit pas $a + \lfloor a\pi \rfloor$ avec $a$ entier, alors il y existe un entier $a$ tel que :

$$a + \lfloor a\pi \rfloor \; < \; n \; < \; a + 1 + \lfloor (a+1)\pi \rfloor \quad (1)$$

Soit $b = n - a$. Prouvons que $n = \; b + \lfloor \pi/b \rfloor$ .
D'après (1)

$$a + 1 + \lfloor a\pi \rfloor \; \leq \; n \; \leq \; a + \lfloor (a+1)\pi \rfloor$$

Retranchons $a$ : $1 + \lfloor a\pi \rfloor \; \leq \; b \; \leq \; \lfloor (a+1)\pi \rfloor \qquad (2)$
Comme par définition dans $\mathbb{R}$ :

$$\lfloor x \rfloor \; \leq \; x \; < \; 1 \; + \; \lfloor x \rfloor$$

alors (2) implique :

$$a\pi \; \leq \; 1 + \lfloor a\pi \rfloor \; \leq \; b \; \leq \; \lfloor (a+1)\pi \rfloor \; \leq \; (a+1)\pi \qquad (3)$$

Mais $b = n - a$ ne s'écrit pas $\lfloor a\pi \rfloor$ par hypothèse, donc de ③ on déduit :

$$a\pi \ \leq \ b \ < \ (a+1)\pi$$

d'où :

$$a \leq \frac{b}{\pi} < a+1$$

ce qui prouve :

$$\left\lfloor \frac{b}{\pi} \right\rfloor = a = n - b$$

ou encore

$$n = b + \left\lfloor \frac{b}{\pi} \right\rfloor$$

avec $b$ entier.

Résumons : Si $n$ ne s'écrit pas $a + \lfloor a\pi \rfloor$ avec $a$ entier, alors $n$ s'écrit $b + \lfloor b/\pi \rfloor$ avec $b$ entier. C'est bien ce qu'il fallait démontrer.

L'unicité est évidente du fait de la croissance des fonctions qui à $x$ associent $x + \lfloor x\pi \rfloor$ et $x + \lfloor x/\pi \rfloor$.

## Bosse 123

**Démontrer que si $\boldsymbol{p}$ est un nombre premier, alors la partie entière de $(\boldsymbol{p}-\mathbf{1})!/\boldsymbol{p}$ est paire.**

### Dégraissage

D'après le théorème de Wilson :

$$(p-1)! \equiv -1 \ [p]$$

Cela signifie que :

$$k = \frac{(p-1)!+1}{p}$$

est un entier.

Si $p = 2$, $k = 1$.

Si $p > 2$, $p$ est impair alors que $(p-1)!$ est pair. Donc $k$ est encore impair comme son numérateur.
Et pour finir, en notant $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$, la relation :

$$k = \frac{(p-1)!+1}{p}$$

peut s'écrire $(p-1)! = kp - 1$, donc :

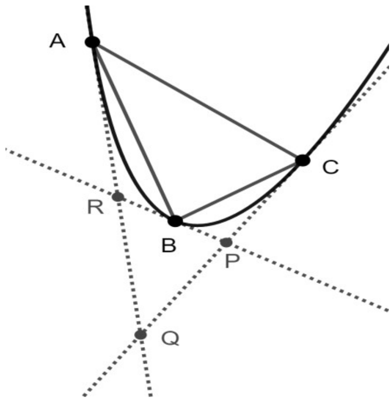
$$\left\lfloor \frac{(p-1)!}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kp-1}{p} \right\rfloor = \left\lfloor k - \frac{1}{p} \right\rfloor = k - 1$$

qui est pair. CQFD.

## Bosse 124

**Dans un repère orthogonal, on considère une parabole $\mathcal{P}$ et trois points $A$, $B$, $C$ distincts deux à deux de cette parabole. Les trois tangentes $T_A$, $T_B$, $T_C$ se coupent mutuellement en $P$, $Q$, $R$.**

**Démontrer que :**
$\boldsymbol{Aire(ABC) = 2 \times Aire(PQR)}$.




### Dégraissage

En changeant de repère et d'unités, on peut toujours supposer que la parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = x^2$. On a alors les coordonnées $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$.

La tangente $T_A$ en $A$ a pour équation : $y = a^2 + 2a(x - a)$.
La tangente $T_B$ en $B$ a pour équation : $y = b^2 + 2b(x - b)$.
L'intersection de $T_A$ et $T_B$ est $P\big((a+b)/2, ab\big)$. De même, on a :

$$Q\left(\frac{a+c}{2}, ac\right), \quad R\left(\frac{b+c}{2}, bc\right).$$

L'aire du triangle $PQR$ est :

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\right\| = \frac{1}{4}|(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

L'aire du triangle $ABC$ est :

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}|(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

D'où le résultat.

## Bosse 125

**Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :**

$$\begin{cases} \sqrt{\boldsymbol{a}} + \sqrt{\boldsymbol{b}} = \mathbf{40} \\ \sqrt[3]{\boldsymbol{a}} + \sqrt[3]{\boldsymbol{b}} = \mathbf{12} \end{cases}$$

### Dégraissage

On pose $a^{1/6} = x$ et $b^{1/6} = y$. Le système devient :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 40 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$$

Comme il est symétrique en $x$, $y$ alors on pose $x + y = s$ et $x.y = p$.

On a alors :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = s^3 - 3p.s = 40 & \text{❶} \\ x^2 + y^2 = s^2 - 2p = 12 & \text{❷} \end{cases}$$

On tire $p$ de ❷ qu'on injecte dans ❶ pour obtenir :

$$p = \frac{s^2 - 12}{2}, \qquad s^3 - 3\frac{s^2 - 12}{2}.s = 40 \quad \text{❸}$$

La seconde équation en $s$ s'écrit : $2s^3 - 3s^3 + 36s = 80$

soit : $s^3 - 36s + 80 = 0$ ou encore $(s-4)(s^2 + 4s - 20) = 0$.

1$^{\text{er}}$ cas : si $s = 4$ alors d'après ❸, $p = 2$ et on tire facilement :

$$x = 2 - \sqrt{2}, \quad y = 2 + \sqrt{2}$$

On remonte enfin aux inconnues $a$ et $b$ :

$$a = x^6 = 792 - 560\sqrt{2}, \quad b = y^6 = 792 + 560\sqrt{2}$$

2ème cas : si $s^2 + 4s - 20 = 0$ alors $s = x + y = a^{1/6} + b^{1/6} > 0$, donc $s = -2 + 2\sqrt{6}$. D'où $p = (s^2 - 12)/2 \approx -1{,}8 < 0$, ce qui est impossible puisque :

$$p = x.y = a^{1/6} \times b^{1/6} > 0.$$

Donc, dans $\mathbb{R}$, il existe une seule solution à l'ordre près :

$$a = 792 - 560\sqrt{2}, \quad b = 792 + 560\sqrt{2}.$$

## Bosse 126

**Quelle est la somme de tous les entiers dont le produit des chiffres est égal à 2000 ? (Le chiffre 1 étant exclu).**

### Dégraissage

Les entiers dont le produit des chiffres est $2000$ ne peuvent avoir dans leur écriture que les chiffres $2$ ; $4$ ; $8$ ; $5$ puisque $2000 = 2^4 \times 5^3$.

Il y a 4 cas à l'ordre près :

- Les chiffres sont $2 - 2 - 2 - 2 - 5 - 5 - 5$.
  Il y a $C_7^3 = 35$ entiers dont $C_6^2 = 15$ se terminent par 5 et $C_6^3 = 20$ se terminent par 2. Quand on ajoute ces 35 entiers, dans la colonne des unités, on a :
  $$15 \times 5 + 20 \times 2 = 115.$$
  Il en est de même par symétrie dans les 7 colonnes de l'addition. Donc la somme de ces 35 entiers est :
  $$115 \times 1111111 = 127777765.$$
- Les chiffres sont $2 - 2 - 4 - 5 - 5 - 5$.

Il y a $6 \times C_5^2 = 60$ entiers dont 10 se terminent par 4, 20 se terminent par 2 et 30 se terminent par 5. Dans les 6 colonnes de l'addition, on a donc :

$$10 \times 4 + 20 \times 2 + 30 \times 5 = 230.$$

Donc la somme de ces 60 entiers est :

$$230 \times 111111 = 25555530.$$

- Les chiffres sont $2 - 5 - 5 - 5 - 8$.

  Il y a $2 \times C_5^2 = 20$ entiers dont 4 se terminent par $2$, $12$ se terminent par 5 et 4 se terminent par 8. Dans les $5$ colonnes de l'addition, on a donc :

$$4 \times 2 + 12 \times 5 + 4 \times 8 = 100.$$

  Donc la somme de ces 20 entiers est :

$$100 \times 11111 = 1111100.$$

- Les chiffres sont $4 - 4 - 5 - 5 - 5$.

  Il y a $C_5^2 = 10$ entiers dont 4 se terminent par 4, 6 se terminent par 5. Dans les $5$ colonnes de l'addition, on a donc :

$$4 \times 4 + 6 \times 5 = 46.$$

  Donc la somme de ces 10 entiers est :

$$46 \times 11111 = 511106.$$

Ce qui donne un total de :

$$127777765 + 25555530 + 1111100 + 511106 = \mathbf{154955501}.$$

## Bosse 127

**Calculer les entiers $p$ et $q$ sachant que la partie entière de $p^2/q$ vaut 702 et que la partie entière de $q^2/p$ vaut 45.**

### Dégraissage

Par hypothèse, on a :

$$702q \leq p^2 < 703q \quad (1)$$

$$45p \leq q^2 < 46p \qquad ②$$

On en déduit :

$$\frac{q^2}{46} < p < \sqrt{703q} \quad ③$$

$$\sqrt{702q} \leq p \leq \frac{q^2}{45} \quad ④$$

De ③ et ④, on tire :

$$q^2 < 46\sqrt{702q} \quad \Longrightarrow \quad q^3 < 46^2 \times 703 \qquad ⑤$$

$$45\sqrt{702q} \leq q^2 \quad \Longrightarrow \quad 45^2 \times 702 \leq q^3 \qquad ⑥$$

De ⑤ et ⑥, on tire $112{,}4 \leq q \leq 114{,}2$, donc :

$$q = 113 \quad \text{ou} \quad q = 114$$

Mais si $q = 113$ alors ③ et ④ impliquent :

$$\sqrt{702q} \leq p \leq \sqrt{703q}$$

soit $281{,}6 < p < 281{,}9$, ce qui est impossible.

Donc $q = 114$, ③ et ④ impliquent :

$$282{,}8 < p < 283{,}1$$

Donc $p = 283$.

La solution cherchée est donc $(p, q) = (114, 283)$.

## Bosse 128

**Peut-on piper deux dés en sorte qu'en les jetant simultanément, tous les totaux de 2 à 12 soient équiprobables ?**

### Dégraissage

Soit $p_i$ la probabilité qu'on peut attribuer à la sortie de la face $i$ après avoir pipé le premier dé ($i = 1, 2, \dots, 6$) et de même $p_i'$ celle que l'on peut attribuer à la sortie de la face $i$ sur le deuxième dé.

La probabilité d'obtenir un total égal à 2 est :

$$p_1 \times p_1' = \frac{1}{11}.$$

La probabilité d'obtenir un total égal à 12 est :

$$p_6 \times p'_6 = \frac{1}{11}.$$

La probabilité d'obtenir un total égal à 7 surpasse la somme :

$$p_1 p'_6 + p_6 p'_1 = p_1 p'_1 \left(\frac{p'_6}{p'_1}\right) + p_6 p'_6 \left(\frac{p'_1}{p'_6}\right) = \frac{1}{11}\left(\frac{p'_6}{p'_1} + \frac{p'_1}{p'_6}\right)$$

Or, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

d'où :

$$\frac{p'_6}{p'_1} + \frac{p'_1}{p'_6} \geq 2$$

et par suite :

$$p(total\ \text{égal à}\ 7) = p_1 p'_6 + p_6 p'_1 \geq \frac{2}{11}.$$

L'inégalité $p(total\ \text{égal à}\ 7) = p_1 p'_6 + p_6 p'_1 \geq 2/11$ étant contraire à l'équiprobabilité supposée, il est donc impossible de piper deux dés de sorte que tous les totaux soient équiprobables.

## Bosse 129

**Trouver la valeur maximale de l'expression :**

$$\boldsymbol{A(x,y) = \frac{3x^2 + 16xy + 15y^2}{x^2 + y^2}}$$

**où $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ sont des réels tels que $\boldsymbol{x^2 + y^2 \neq 0}$.**

### Dégraissage 1

On a :

$$\begin{aligned} 3x^2 + 16xy + 15y^2 &= 19x^2 - 16x^2 + 19y^2 - 4y^2 + 16xy \\ &= 19(x^2 + y^2) - 16x^2 - 4y^2 + 16xy \\ &= 19(x^2 + y^2) - 4(y^2 + 4x^2 - 4xy) \\ &= 19(x^2 + y^2) - 4(y - 2x)^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$A(x,y) = \frac{3x^2+16xy+15y^2}{x^2+y^2} = \frac{19(x^2+y^2)-4(y-2x)^2}{x^2+y^2}$$
$$= 19 - 4\frac{(y-2x)^2}{x^2+y^2} \leq 19$$

L'égalité ayant lieu si $y = 2x$.
Donc le maximum de l'expression $A(x,y)$ vaut $19$.

## Dégraissage 2

On remarque que pour $x = 0$ et $y \neq 0$, on a :

$$A(0,y) = 15.$$

Le nombre $A(0,y) = 15$ n'est pas le maximum de $A(x,y)$ puisque pour $x = y \neq 0$, $A(x,y) = 17 > 15$.
Pour $x \neq 0$, on peut écrire :

$$A(x,y) = \frac{3x^2+16xy+15y^2}{x^2+y^2} = \frac{3+16\left(\frac{y}{x}\right)+15\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

On pose $t = y/x$, et on définit la fonction $f$ par :

$$f(t) = \frac{3+16t+15t^2}{1+t^2}.$$

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $t$ :

$$f'(t) = \frac{8(2+3t-2t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

$$f'(t) = 0 \iff 2+3t-2t^2 = 0 \iff t = 2 \text{ ou } t = -\frac{1}{2}.$$

D'où le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1/2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $15$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $19$ | $\searrow$ | $15$ |

Il ressort du tableau de variation que la fonction $f$ admet un maximum égal à $19$ atteint pour $t = 2$ (ce qui correspond à $y = 2x$).
En conclusion, l'expression $A(x, y)$ est maximale lorsque $y = 2x$ et son maximum vaut $19$.

## Dégraissage 3

On pose :

$$\frac{3x^2 + 16xy + 15y^2}{x^2 + y^2} = m, \qquad \text{avec} \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

Ce qui équivaut à l'équation du second degré en $x$ :

$$(3 - m)x^2 + 16xy + (15 - m)y^2 = 0 \quad (1)$$

Si $m = 3$ alors $16xy + 12y^2 = 0$, c'est-à-dire :

$$x = 0 \ \text{ ou } \ y = \frac{-4}{3}\,x.$$

Si $m \neq 3$ alors (1) s'écrit :

$$Ax^2 - 2Bx + C = 0 \ \text{ avec } \begin{cases} A = 3 - m \\ B = -8y \\ C = (5 - m)y^2 \end{cases}$$

Le discriminant réduit de cette équation vaut :

$$\begin{aligned} \Delta' &= B^2 - AC = 64y^2 - (3 - m)(15 - m)y^2 \\ &= -y^2(1 + m)(m - 19) \end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\Delta' \geq 0 \iff -1 \leq m \leq 19$$

D'autre part, si $m = 19$ alors $\Delta' = 0$ et donc l'équation (1) admet une unique solution :

$$x = -\frac{B}{A} = \frac{8y}{16} = \frac{y}{2}.$$

Si $y = 2x$ alors $A(x, y) = A(x, 2x) = 19$, ainsi le maximum cherché vaut 19.

## Bosse 130

**Soient $a$, $b$ et $c$ des réels strictement positifs. Déterminer la valeur minimale de l'expression :**

$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}.$$

### Dégraissage

Posons :

$$\begin{cases} x = a+2b+c \\ y = a+b+2c \\ z = a+b+3c \end{cases}$$

Il est facile de voir que $z-y=c$ et $x-y=b-c=b-(z-y)$, donc $b=x+z-2y$. On remarque que $a+3c=2y-x$.

Par l'inégalité arithmético-géométrique, il s'ensuit que :

$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

$$=\frac{2y-x}{x}+\frac{4(x+z-2y)}{y}-\frac{8(z-y)}{z}$$

$$=-17+2\frac{x}{y}+4\frac{y}{x}+4\frac{z}{y}+8\frac{y}{z}$$

$$\geq -17+2\sqrt{8}+2\sqrt{32}=-17+12\sqrt{2}$$

L'égalité est vérifiée si, et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{x}=\dfrac{4x}{y} \\ \dfrac{4z}{y}=\dfrac{8y}{z} \end{cases}$$

soit encore : $4x^2=2y^2=z^2$

Donc l'égalité est vérifiée si, et seulement si :

$$\begin{cases} a+b+2c=\sqrt{2}(a+2b+c) \\ a+b+3c=2(a+2b+c) \end{cases}$$

Le réel $a$ étant pris comme paramètre non nul, ce système a pour solution :

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}^* \\ b = \left(1+\sqrt{2}\right)a \\ c = \left(4+3\sqrt{2}\right)a \end{cases}$$

On conclut que

$$\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}$$

atteint sa valeur minimale $12\sqrt{2}-17$ si, et seulement, si :

$$(a,b,c) = \left(a, \left(1+\sqrt{2}\right)a, \left(4+3\sqrt{2}\right)a\right) \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*.$$

## Bosse 131

**Déterminer la plus grande constante $\boldsymbol{\delta}$ telle que :**

$$\boldsymbol{u+v+w \geq \delta}$$

**où $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sont des réels positifs vérifiant :**

$$\boldsymbol{u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1}.$$

### Dégraissage

En appliquant l'IAG, nous obtenons :

$$u \times \frac{v+w}{2} + v \times \frac{w+u}{2} + w \times \frac{u+v}{2}$$
$$\geq u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$$

Ce qui donne :

$$uv + vw + wu \geq 1.$$

D'autre part, on sait que :

$$(u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2 \geq 0$$
$$u^2 + v^2 + w^2 \geq uv + vw + wu \geq 1.$$

Il en résulte que :

$$(u+v+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu) \geq 3$$

soit encore $u + v + w \geq \sqrt{3}$.

L'égalité aura lieu dans le seul cas où $u = v = w = \sqrt{3}/3$.

## Bosse 132

**Prouver que parmi cinq entiers consécutifs, il en est toujours un qui est premier avec chacun des autres.**

### Dégraissage

Désignons par $S$ une suite de cinq entiers consécutifs.
Si un nombre premier divise deux des entiers de $S$, il divise leur différence, et donc ne peut être égal qu'à $2$ ou $3$.
Un nombre de S premier avec tous les autres ne peut évidemment pas être pair. On peut donc réduire l'examen à une suite $S'$ de la forme :
$2n+1,\ 2n+3,\ 2n+5$ si $S$ commence par un nombre impair.
$2n+1,\ 2n+3$ si $S$ commence par un nombre pair.
Dans un cas comme dans l'autre, il n'est pas possible que deux de ces nombres soient divisibles par $3$ (sinon leur différence le serait, et ces différences valent $2$ ou $4$).

## Bosse 133

**On donne des nombres réels tels que :**

$$\boldsymbol{a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0}.$$

**Prouver que toutes les racines du polynôme :**

$$\boldsymbol{P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}$$

**ont un module supérieur ou égal à 1.**

### Dégraissage

On a :
$(1-z)P(z) = a_0 + (a_1 - a_0)z + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n + a_n z^{n+1}$. D'où :
$|a_0| = |(1-z)P(z) - [(a_1 - a_0)z + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n + a_n z^{n+1}]|$
$|a_0| \leq |(1-z)P(z)| + |(a_1 - a_0)z + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n + a_n z^{n+1}|$
$|a_0| \leq |(1-z)P(z)| + |(a_1 - a_0)z| + \cdots + |(a_n - a_{n-1})z^n| + |a_n z^{n+1}|$
$|a_0| \leq |(1-z)P(z)| + (a_0 - a_1)|z| + \cdots + (a_{n-1} - a_n)|z|^n + a_n|z|^{n+1}$

Les fonctions $x \longmapsto x^k$ sont strictement croissantes sur $]0, +\infty[$ et les coefficients $a_k - a_{k+1}$, $a_{n+1}$ sont positifs, la fonction $f$ est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
Soit $z$ un nombre complexe tel que $0 < |z| < 1$ . Comme $f$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on a :

$$f(|z|) > f(1) = a_0 - [(a_0 - a_1) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + a_n] = 0$$

D'où l'équation $P(z) = 0$ n'admet aucune solution $z$ vérifiant :

$$0 < |z| < 1.$$

## Bosse 134

**Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :**

$$\boldsymbol{z^5 + z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 3z + 1 = 0}$$

### Dégraissage

Posons : $z = s + s^{-1}$ et $A(z) = z^5 + z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 3z + 1$.
Donc, on peut écrire :

$$z^5 = s^5 + 5s^4s^{-1} + 10s^3s^{-2} + 10s^2s^{-3} + 5ss^{-4} + s^{-5}$$
$$= s^5 + 5s^3 + 10s + 10s^{-1} + 5s^{-3} + s^{-5}$$
$$z^4 = s^4 + 4s^3s^{-1} + 6s^2s^{-2} + 4ss^{-3} + s^{-4}$$
$$= s^4 + 4s^2 + 6 + 4s^{-2} + s^{-4}$$
$$z^3 = s^3 + 3s^2s^{-1} + 3ss^{-2} + s^{-3} = s^3 + 3s + 3s^{-1} + s^{-3}$$
$$z^2 = s^2 + 2 + s^{-2}$$

Donc après réduction, nous obtenons :

$$A(z) = s^5 + s^3 + s + s^{-3} + s^{-5} + s^4 + s^2 + s^{-2} + s^{-4} + s^{-1} + 1$$

On remarque qu'en multipliant par $s^5$ puis par $s - 1$, on obtient :

$$s^{11} - 1 = 0.$$

Donc $s$ est une racine onzième de l'unité autre que 1 et par suite les racines de l'équation $A(z) = 0$ sont :

$$2\cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

## Bosse 135________________________________

**On définit la suite de Fibonacci par :**

$$\begin{cases} \boldsymbol{F_0 = F_1 = 1} \\ \boldsymbol{F_{n+2} = F_{n+1} + F_n} \end{cases}.$$

**Soit $\boldsymbol{N}$ un entier naturel. Combien de termes de la suite de Fibonacci sont inférieurs à $\boldsymbol{N}$ ?**

## Dégraissage

Cherchons les suites géométriques vérifiant la relation de récurrence de Fibonacci. Si une telle suite a pour raison $r$ alors :

$$r^{n+2} = r^{n+1} + r^n.$$

Écartant le cas $r = 0$, on obtient l'équation :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

qui admet deux racines, dont l'une est :

$$r = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

l'autre est donc $r' = 1 - r = -1/r$.

Les suites $(r^n)$ et $r'^n$ vérifient la relation de récurrence, et il en est de même des suites $(ar^n + br'^n)$, quels que soient les réels $a$ et $b$.

D'autre part, les relations $\begin{cases} a + b = F_0 = 1 \\ ar + br' = F_1 = 1 \end{cases}$ permettent de calculer $a$ et $b$. Ainsi :

$$a = \frac{r}{r - r'} = \frac{r}{\sqrt{5}}, \quad b = \frac{r'}{r' - r} = -\frac{r'}{\sqrt{5}}.$$

La suite de Fibonacci a donc pour terme général :

$$F_n = \frac{r^n - (1 - r)^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}[r^n - (1 - r)^n].$$

Maintenant, du moment qu'on a déterminé l'expression de $F_n$ en fonction de $n$, on s'attaque à la question de la bosse qui consiste à déterminer le nombre de termes de la suite $(F_n)$ inférieurs à l'entier donné $N$.

On observe que le terme $(1-r)^n/\sqrt{5}$ est, en valeur absolue, inférieur à $1/2$. En effet, $r-1 \approx 0{,}6$ et donc la suite de terme général $|1-r|^n/\sqrt{5}$ est décroissante et de premier terme inférieur à $1/2$.

Donc $F_n$ est l'entier le plus proche de $r^n/\sqrt{5}$, et par suite on a l'équivalence suivante :

$$F_n \leq N \iff \frac{1}{\sqrt{5}} r^n \leq N + \frac{1}{2}.$$

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} r^n \leq N + \frac{1}{2} \iff n < \ln\left(N + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln 5 - \ln\left(1+\sqrt{5}\right) + \ln 2.$$

Donc le nombre cherché est la partie entière du second membre de cette dernière inégalité.

## Bosse 136

**De combien de façons peut-on choisir l'une des $2^n$ parties de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ en sorte qu'elle contienne au moins une paire d'entiers consécutifs ?**

### Dégraissage

Il est plus facile de chercher d'abord le nombre de parties ne contenant pas de paire d'entiers consécutifs. Notons $p_n$ ce nombre.

Une telle paire contient ou non l'entier $n$ : il en existe $p_{n-1}$ ne contenant pas $n$ ; et si la partie contient $n$, elle ne contiendra pas $n-1$ et il existe donc $p_{n-2}$ telles parties.

Ainsi, on comprend que $p_n$ est donné par :

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Donc le nombre de parties cherché est $2^n - p_n$.

## Bosse 137

**Étant données deux entiers naturels $n$ et $p$ avec $p$ premier, on suppose que $n$ divise $p-1$ et $p$ divise $n^3-1$. Montrer que $4p-3$ est un carré parfait.**

## Dégraissage

On a :

$$\begin{aligned} n/(p-1) \ &\Longrightarrow \ p-1 = kn, \ \ k \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow \ p = kn+1 \end{aligned}$$

Cette valeur de p vérifie la condition $n/(p-1)$. Regardons maintenant la 2ème condition $p/(n^3-1)$.

Comme $p = kn+1$ alors $p \geq n-1$, et $p$ étant premier on a $pgcd(p, n-1) = 1$ :

$$\begin{aligned} p/(n^3-1) = (n-1)(n^2+n+1) &\Rightarrow p = kn+1/(n^2+n+1) \\ &\Rightarrow kn+1 \leq n^2+n+1 \\ &\Rightarrow k \leq n+1 \end{aligned}$$

De $n^2+n+1/k(n^2+n+1)$, on tire :

$$p = kn+1/(kn^2+kn+k)$$

D'où :

$$kn+1/(kn^2+kn+k) - n(kn+1) = kn+k-n$$

Donc : $kn+1 \leq kn+k-n$, soit : $k \geq n+1$. Enfin $k = n+1$.

On a donc :

$$p = (n+1)n+1 = n^2+n+1$$

et par suite :

$$4p-3 = 4n^2+4n+4-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2.$$

## Bosse 138

**Trouver toutes les valeurs du paramètre $a$, pour lesquelles l'équation :**

$$\mathbf{16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0}$$

**admet exactement quatre racines réelles distinctes qui forment une progression géométrique.**

## Dégraissage

Posons :

$$P(x) = 16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0.$$

On suppose que $P$ admet 4 racines distinctes en progression géométrique.

L'équation donnée est du 4ème degré à coefficients symétriques. Donc si $x$ est une racine alors $1/x$ en est une autre.

Notons $x$, $qx$, $q^2x$, $q^3x$ les 4 racines de $P$. Le fait que les racines distinctes 2 à 2 implique que $x \neq 0$, $q \neq 0$, $q \neq \mp 1$.

On peut supposer que $|q| > 1$, d'où $|x| < |qx| < |q^2x| < |q^3x|$ car $1/x$, $1/qx$, $1/q^2x$, $1/q^3x$ sont aussi des racines.

Dans cet ordre, on peut dire que $\frac{1}{x} = q^3x$.

$$1/x = q^3x \implies q^3 = x^{-2}, \text{ soit } q = x^{-2/3}.$$

Donc les racines du polynôme sont :

$$x, \qquad qx = x^{1/3}, \qquad q^2x = x^{-1/3}, \qquad q^3x = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Les formules de Viète reliant les racines aux coefficients du polynôme nous donnent :

$$x + x^{1/3} + x^{-1/3} + \frac{1}{x} = \frac{a}{16} \quad (\text{coeff. de } X)$$

$$x^{4/3} + x^{2/3} + 1 + 1 + x^{-2/3} + x^{-4/3} = \frac{2a + 17}{16} \quad (\text{coeff. de } X^2)$$

Posons $t = x^{1/3} + x^{-1/3}$. On a :

$$t^2 = \left(x^{1/3} + x^{-1/3}\right)^2 = x^{2/3} + x^{-2/3} + 2$$

$$t^3 = \left(x^{1/3} + x^{-1/3}\right)^3 = x + \frac{1}{x} + 3x^{1/3} + 3x^{-1/3}$$

D'où :

$$t^4 = \left(x^{2/3} + x^{-2/3} + 2\right)^2 = x^{4/3} + x^{-4/3} + 4 + 2 + 4x^{2/3} + 4x^{-2/3}$$

$$t^4 = \left(x^{4/3} + x^{-4/3} + 2 + x^{2/3} + x^{-2/3}\right) + 3\left(x^{2/3} + x^{-2/3} + 2\right) - 2$$

$$t^4 = \frac{2a + 17}{16} + 3t^2 - 2 = \frac{2a - 15}{16} + 3t^2$$

Donc :

$$t^4 - 3t^2 = \frac{2a - 15}{16} = 2 \times \frac{a}{16} - \frac{15}{16} = 2(t^3 - 2t^2) - \frac{15}{16}$$

D'où l'équation :

$$t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t + \frac{15}{16} = 0.$$

L'application Photomath sur android nous donne 4 solutions pour cette dernière équation :

$$t_1 = -\frac{3}{2}, \qquad t_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \qquad t_3 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad t_4 = \frac{5}{2}.$$

Or on sait que $t = x^{1/3} + x^{-1/3}$ et pour tout réel $s \neq 0$, on a :

$$\left|s + \frac{1}{s}\right| \geq 2$$

donc la seule valeur de $t$ qui convient est $t_4 = 5/2$ puisque toutes les autres valeurs ont une valeur absolue inférieure à 2.

On a donc :

$$t^3 - 2t = \frac{a}{16}$$

Soit finalement :

$$a = 16\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{5}{2}\right] = 170.$$

# Bosse 139

**Constituer une « boîte de poids » contenant un nombre donné $n$ de masses marquées, permettant de mesurer à l'aide d'une balance de Roberval toutes les masses entières de 1 à $p$ grammes, $p$ étant le plus grand possible. Les masses peuvent être mises sur les deux plateaux.**

## Dégraissage

Si on a $n$ masses marquées $m_1$, $m_2$, …, $m_n$, alors toute masse $M$ qui s'écrit :

$$M = \sum_{i=1}^{n} \mu_i m_i$$

est réalisable.

- $\mu_i = 1$ si la masse $m_i$ est mise dans le plateau ne contenant pas l'objet à peser.
- $\mu_i = 0$ si la masse $m_i$ n'est pas utilisée.
- $\mu_i = -1$ si la masse $m_i$ est mise dans le plateau contenant l'objet à peser.

L'expression $\sum_{i=1}^{n} \mu_i m_i$ ($\mu_i \in \{-1,0,1\}$) donne au plus $3^n$ valeurs (c'est le nombre de n-uplets $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ dont il faut retirer le n-uplet nul et toutes les valeurs négatives). Comme $1$ et $-1$ jouent le même rôle, alors il y a autant de valeurs positives que négatives.
Finalement, il y a au plus $(3^n - 1)/2$ valeurs que $M$ pourrait prendre.

On en déduit que si $n$ masses permettent de mesurer toutes les masses entières de $1$ à $p$, alors $p \leq (3^n - 1)/2$.

Montrons ensuite qu'il existe $n$ masses marquées permettant d'obtenir toutes les masses entières de $1$ à $(3^n - 1)/2$.
En donnant à n quelques petites valeurs $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ et en remarquant que $\frac{(3^n-1)}{2} = 1 + 3 + \cdots + 3^{n-1}$ on peut conjecturer que les n masses $1,\ 3,\ \ldots,\ 3^{n-1}$ répondent à cette question.

Démonstration par récurrence :

- Pour $n = 1$, on peut obtenir la masse $1 = (3^1 - 1)/2$.
- Supposons qu'à l'aide des masses $1,\ 3,\ \ldots,\ 3^{n-1}$ on peut obtenir toutes les masses entières de 1 à $(3^n - 1)/2$ et montrons que les masses $1,\ 3,\ \ldots,\ 3^{n-1},\ 3^n$ permettent d'obtenir toutes les masses entières de 1 à $(3^{n+1} - 1)/2$.

Avec les masses $1,\ 3,\ \ldots,\ 3^{n-1},\ 3^n$ on peut obtenir toutes les masses de 1 à $(3^n - 1)/2$, ainsi que toutes les masses de la forme $3^n + x$ et $3^n - x$ où $x$ est un entier entre 1 et $(3^n - 1)/2$.
Comme :

$$3^n - \frac{3^n - 1}{2} = \frac{3^n + 1}{2}, \quad 3^n + \frac{3^n - 1}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

on en déduit qu'avec les masses $1,\ 3,\ \ldots,\ 3^{n-1},\ 3^n$ on peut obtenir toutes les masses de 1 à $(3^{n+1} - 1)/2$.

## Bosse 140

**Soit $P$ un polynôme de degré 2019 tel que $P(k) = 1/k$, pour tout $k$ de $\{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$. Calculer $P(0)$.**

### Dégraissage

$P$ est un polynôme de degré $2019$ avec :

$$\forall k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2020\},\ P(k) = 1/k.$$

Soit $Q(X) = XP(X) - 1$. $Q$ est un polynôme de degré $2020$ et : $\forall k \in \{1,2,3,\dots,2020\},\ Q(k) = 0$, donc $1,2,3,\dots,2020$ sont les 2020 racines de $Q$. Ainsi, $Q(X)$ peut être factorisé sous la forme suivante où $a \in \mathbb{R}$ :

$$Q(X) = a(X-1)(X-2)\dots(X-2020) = a\prod_{k=1}^{2020}(X-k).$$

Donc, il s'ensuit que :

$$Q(0) = a\prod_{k=1}^{2020}(-k) = a \times 2020!$$

D'autre part, $Q(0) = -1$ à partir de l'égalité $Q(X) = XP(X) - 1$.
D'où par comparaison des deux valeurs de $Q(0)$ :

$$a = \frac{-1}{2020!}.$$

**Calcul de $\boldsymbol{P(0)}$ :**

**Méthode 1 :** On a : $Q'(X) = P(X) + XP'(X) \Rightarrow P(0) = Q'(0)$.

$$Q'(X) = a\sum_{i=1}^{2020}\prod_{k\neq i,k=1}^{2020}(X-k) \Rightarrow Q'(0) = a\sum_{i=1}^{2020}\prod_{k\neq i,k=1}^{2020}(-k)$$

$$Q'(0) = a\sum_{i=1}^{2020}\frac{2020!}{i} = -\sum_{i=}^{2020}\frac{1}{i!}.$$

Finalement :

$$P(0) = -\sum_{i=}^{2020}\frac{1}{i!}.$$

**Méthode 2 :** $Q$ est un polynôme de degré 2020, donc il existe 2021 réels $a_0$, $a_1$, $a_2$, …, $a_{2020}$ tels que :

$$Q(X) = a_{2020}X^{2020} + a_{2019}X^{2019} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

On sait que $a_0 = Q(0) = -1$. Donc :

$$Q(X) = a_{2020}X^{2020} + a_{2019}X^{2019} + \cdots + a_2X^2 + a_1X - 1$$

On a :

$$P(X) = \frac{Q(X)+1}{X}$$

Et par suite : $P(X) = a_{2020}X^{2019} + a_{2019}X^{2018} + \cdots + a_2X + a_1$
D'où : $P(0) = a_1$. Autrement dit, $P(0)$ est le coefficient de X dans $Q(X)$. D'après l'expression de $Q(X)$ :
$Q(X) = (-1/2020!)(X-1)(X-2)\dots(X-2020)$, on a :

$$a_1 = -\sum_{i=}^{2020} \frac{1}{i!} = P(0).$$

## Bosse 141

**Déterminer le plus grand entier positif $n$ pour lequel il existe un polynôme à coefficients entiers tel que :**

$$\boldsymbol{P(0) = 0 \text{ et } P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = \cdots = P(x_n) = 2020.}$$

**les $x_i$ étant des entiers deux à deux distincts.**

## Dégraissage

On cherche le plus grand entier positif $n$ tel qu'il existe un polynôme $P$ à coefficients entiers tel que :
$P(0) = 0$ et $P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n) = 2020$, avec $x_i$ des entiers deux à deux distincts. Les entiers $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ sont les racines du polynômes $P(X) - 2020$. D'où :

$$P(X) - 2020 = Q(X)(X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_n)$$
$$\text{avec } Q(X) \in \mathbb{Z}[X].$$

$$P(0) = 0 \Leftrightarrow Q(0)(-x_1)(-x_2)\dots(-x_n) = 2020 = 2^2 \times 5 \times 101.$$

Ainsi $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ sont des diviseurs de $2^2 \times 5 \times 101$. Le nombre $2^2 \times 5 \times 101$ peut s'écrire comme, au plus, le produit de 6 entiers distincts deux à deux, par exemple :

$$2^2 \times 5 \times 101 = (-1) \times 1 \times (-2) \times 2 \times 5 \times 101.$$

Le polynôme suivant convient :

$$P(X) = 2020 + (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)(X-5)(X-101).$$

Le plus grand entier positif $n$ qui convient est $n = 6$.

## Bosse 142

**Ali et Baba jouent à un jeu : Baba pense à un polynôme $P$ à coefficients entiers positifs et Ali doit le deviner. A chaque tour, Ali demande la valeur de $P$ en un nombre entier, et Baba la lui donne. En combien de tours Ali pourrait-il deviner le polynôme $P$ ?**

## Dégraissage

Ali peut déterminer le polynôme avec seulement deux questions. Pour cela, remarquons que si :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{k=d} a_k X^k \text{ avec} a_k \in \mathbb{N}$$

et qu'un entier $A$est strictementplus grand que tous les $a_k$, la donnée de $P(A)$détermine le polynôme $P$ :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{k=d} a_k A^k$$

et les $a_k$ sont simplement les « chiffres » de l'écriture de $P(A)$ en base $A$. Ainsi, Ali peut poser la 1ère question :

**Question 1** : « Combien vaut $P(1)$? »

La réponse de Baba est :

$$P(1) = \sum_{k=0}^{k=d} a_k$$

qui est évidemment plus grand que les coefficients $a_k$.

Ali n'a alors plus qu'à prendre n'importe quel entier $A > P(1)$ et à poser la 2e question :

**Question 2** : « Quelle est la valeur de $P(A)$ ? »

La réponse de Baba est : $P(A) = B$.

Maintenant, il reste à Ali à écrire $B$ en base $A$ et les chiffres obtenus sont, bien entendu, les coefficients du polynôme.

## Bosse 143

**Prouver qu'il existe une infinité de couples $(a, b)$ d'entiers pour lesquels l'équation $x^{2\,020} = ax + b$ possède des solutions parmi lesquelles deux qui ont pour produit 1.**

### Dégraissage

Remarquons que l'équation $x^2 + mx + 1 = 0$ admet, dans le cas où $m$ est un entier strictement supérieur à $2$, deux solutions dont le produit est $1$.

Dans la division par $x^2 + mx + 1$, le polynôme $M(x) = x^{2\,020}$ donne un quotient $Q_m(x)$ et un reste $R_m(x) = a_m x + b_m$ (le degré du reste est strictement inférieur à celui du quotient).

$Q_m$ et $R_m$ sont des polynômes à coefficients entiers (car le diviseur est unitaire). Le polynôme $M(x) - R_m(x)$ est donc divisible par $x^2 + mx + 1$. Il possède donc, comme ce dernier, deux racines dont le produit est $1$.

Il reste à prouver que les couples $(a_m,\ b_m)$ ne sont pas en nombre fini.Pour cela, observons que les deux polynômes $x^2 + mx + 1$ et $x^2 + nx + 1$ n'ont pas de racine commune ; si c'était le cas, cette racine serait racine de leur différence $(m - n)x$, et comme elle ne peut être $0$, c'est que $m = n$.

Le polynôme $x^{2\,020} - ax - b$ possède au plus $2\,020$ racines distinctes, la division par $x^2 + mx + 1$ est exacte pour au plus $1\,010$ valeurs de $m$. Il y a donc au plus $1\,010$ valeurs de $m$ qui fournissent le même couple $(a_m,\ b_m)$. Ces couples sont donc en nombre infini.

## Bosse 144

**Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation :**

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 0.$$

# Dégraissage 1

Supposons qu'il existe un triplet solution $(x, y, z)$ avec $x$, $y$, $z \in \mathbb{Z}^*$ et multiplions l'égalité $x/y + y/z + z/x = 0$ par $xyz$ :

$$x^2z + xy^2 + yz^2 = 0.$$

Parmi les trois entiers $x^2z$, $xy^2$, $yz^2$, il y a au moins deux de même parité.

Supposons, par exemple, que $xy^2$ et $yz^2$ sont impairs. Alors :
$x^2z = -(xy^2 + yz^2)$ est pair. Or, on sait que :

$$xy^2 \text{ pair } \implies x, y \text{ impairs et } yz^2 \text{ pair } \implies y, z \text{ impairs}$$

D'où $x^2z$ est impair. Ce qui est contradictoire.

Le cas où l'un seulement des trois entiers $x^2z$, $xy^2$, $yz^2$ est impair est contredit par la relation $x^2z + xy^2 + yz^2 = 0$.

Donc si x, y, z existent alors ils sont nécessairement tous pairs.

Posons : $x = 2x'$, $y = 2y'$, $z = 2z'$.

Si $(x, y, z)$ est solution alors $(x', y', z')$ est également solution. Ainsi de suite, on trouve que le triplet $(x/2^n, y/2^n, z/2^n)$ est une solution quel que soit l'entier naturel $n$.

Ainsi, on est arrivé à construire une suite d'entiers naturels strictement décroissante $u_n = |x|/2^n$, ce qui est vraisemblablement impossible.

Donc l'équation proposée n'admet pas de solutions.

# Dégraissage 2

Supposons qu'il existe un triplet solution $(x, y, z)$ et que les quotients $x/y$, $y/z$, $z/x$ sont écrits sous forme irréductible.

En multipliant l'égalité $x/y + y/z + z/x = 0$ par $xyz$, on obtient :

$$x^2z + xy^2 + yz^2 = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} x^2z + xy^2 + yz^2 = 0 &\implies -x^2z = y(yx + z^2) \\ &\overset{\otimes xz^2}{\implies} -x^3z^3 = xyz^2(yx + z^2) \end{aligned}$$

Posons $d = PGCD(xy, z^2)$, donc :

$$\exists a, b \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} xy = ad \\ z^2 = bd \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

D'où :

$$-x^3z^3 = xyz^2(yx + z^2) \Longrightarrow (-xz)^3 = d^3ab(a+b)$$
$$\Longrightarrow ab(a+b) \text{ est un cube.}$$

Comme $a$, $b$ et $a+b$ sont premiers entre eux deux à deux alors $ab(a+b)$ ne peut être un cube que si chacun des entiers $a$, $b$, $a+b$ est un cube.
Posons $a = A^3$, $b = B^3$. Donc :

$$(-xz)^3 = d^3A^3B^3(A^3 + B^3) = (dA^3B)^3 + (dAB^2)^3$$

Donc on trouve une égalité de la forme $P^3 = M^3 + N^3$ avec $P$, $M$, $N \in \mathbb{Z}$. Ce qui est impossible selon le grand théorème de Fermat (un grand merci à Andrew Wiles qui l'a démontré en 1996 ; Sophie Germain a établi le cas $n = 3$ bien avant lui).
En conclusion, l'équation proposée n'a pas de solutions.

## Bosse 145

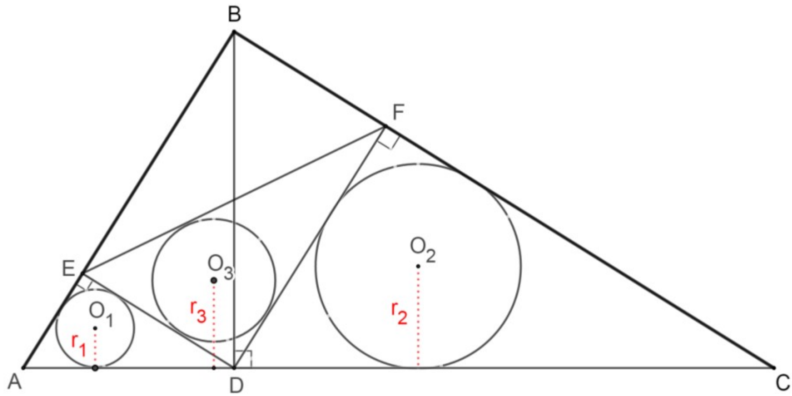
**Soit $ABC$ un triangle rectangle en $B$. Le point $D$ est le projeté orthogonal de $B$ sur $(AC)$ ; Les points $E$ et $F$ sont les projetés orthogonaux de $D$ respectivement sur $(BA)$ et $(BC)$. On désigne par $r_1$, $r_2$, $r_3$ les rayons respectifs des cercles inscrits dans $ADE$, $CDF$, $DEF$.**
**Montrer que $r_3 = \sqrt{r_1 \times r_2}$.**

### Dégraissage

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$. Donc selon les hypothèses :

$$b^2 = a^2 + c^2.$$

Le triangle $ABC$ est rectangle en $B$ donc $CA \times BD = BC \times AB$ et $AD \times AC = AB^2$, d'où : $BD = ac/b$, $AD = c^2/b$.




Le triangle $ADB$ est rectangle en $D$ donc $AB \times DE = AD \times BD$ et $AE \times AB = AD^2$, d'où :

$$DE = \frac{ac^3}{b^2c} = \frac{ac^2}{b^2} \quad , \quad AE = \frac{c^4}{b^2c} = \frac{c^3}{b^2}.$$

D'autre part, on sait que l'aire d'un triangle est égale au produit de son demi-périmètre par le rayon de son cercle inscrit, ce qui fait que dans le triangle $AED$ :

$AE \times ED = (AE + ED + DA) \times r_1$, ce qui s'écrit également :

$$\frac{c^3}{b^2} \times \frac{ac^2}{b^2} = \left(\frac{c^3}{b^2} + \frac{ac^2}{b^2} + \frac{c^2}{b}\right) \times r_1$$

D'où, en posant $p = a + b + c$ :

$$r_1 = \frac{a \times c^3}{p \times b^2}.$$

On démontre de manière analogue que :

$$r_2 = \frac{c \times a^3}{p \times b^2}.$$

D'où :

$$r_1 \times r_2 = \frac{a^4 \times c^4}{p^2 \times b^4}.$$

Calculons $r_3$ : le quadrilatère $BFDE$ étant un rectangle, on a :

$EF = BD = ac/b$ ; donc dans le triangle $DEF$ :

$$ED \times DF = (ED + DF + FE) \times r_3$$

Soit :

$$\frac{a \times c^2}{b^2} \times \frac{c \times a^2}{b^2} = \left(\frac{a \times c^2}{b^2} + \frac{c \times a^2}{b^2} + \frac{a \times c}{b}\right) \times r_3$$

Et enfin :

$$r_3 = \frac{a^2 \times c^2}{p \times b^2} = \sqrt{\left(\frac{a \times c^3}{p \times b^2}\right) \times \left(\frac{c \times a^3}{p \times b^2}\right)} = \sqrt{r_1 \times r_2}.$$

*Toutes ces bosses ont été dégraissées sous l'arbre pythagoricien.*

اللهم صل على محمد وآل محمد