Baccalauréat 2010
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

1. On considère la fonction numérique $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbf{IR}$ par : $f(x)=e^x-x-1$.
 a) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. **(1)**
 b) En déduire que pour tout réel x : $e^x \geq x+1$. **(0,25)**

2.a) Montrer que pour tout réel $x>-1$: $\ln(1+x)\leq x$. **(0,25)**
 b) Montrer que pour tout réel $x<1$: $\ln(1-x)\leq -x$. **(0,25)**

3. On considère la suite numérique (S_n) définie pour tout entier naturel $n\geq 1$ par son terme général:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad \text{c'est-à-dire} \quad S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

 a) En utilisant la question **2,** montrer que pour tout $n\geq 1$: $S_n\geq \ln(n+1)$. **(0,5)**
 b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. **(0,25)**

4. Pour tout entier naturel $n\geq 1$ on pose : $U_n=S_n-\ln n$.
 a) Montrer que pour tout $n>1$: $U_n-U_{n-1}=\frac{1}{n}+\ln(1-\frac{1}{n})$. En déduire le sens de variation de la suite (U_n). **(0,25)**
 b) En déduire que la suite (U_n) est convergente vers un réel γ, puis vérifier que : $0<\gamma<1$. (γ est appelé la constante d'Euler) **(0,25)**

Exercice 2 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(6\cos\theta+i)z^2+(4+5\cos^2\theta+6i\cos\theta)z-(4+5\cos^2\theta)i$ où $\theta\in[0;2\pi]$.

1.a) Vérifier que $z_0=i$ est une solution de l'équation $P(z)=0$. Déterminer deux nombres $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-i)(z^2+az+b)$. **(1)**
 b) Déterminer les deux autre solutions z_1 et z_2 de l'équation $P(z)=0$ sachant que si $\sin\theta\geq 0$, $\operatorname{Im} z_1\geq 0$. **(0,75)**

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. Soit $\mathbf{G}$ le centre de gravité du triangle $M_0M_1M_2$.
 a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0;2\pi]$, alors l'affixe du point $\mathbf{G}$ est $z_G=2\cos\theta+\frac{1}{3}i$. **(0,5)**
 b) Déterminer puis construire le lieu géométrique Γ du point $\mathbf{G}$. **(0,25)**

3.a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0;2\pi]$, alors le lieu géométrique Γ' des points M_1 et M_2 est une ellipse dont on déterminera une équation cartésienne. **(0,5)**
 b) Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de l'ellipse Γ'. Construire Γ' dans le repère précédant. **(1)**

Exercice 3 (5 points)

1. On considère la fonction $\mathbf{u}$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x)=x-2+\ln x$.
 a) Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathbf{u}$. **(0,5)**
 b) Montrer que $\mathbf{u}$ réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera. **(0,25)**
 c) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α puis vérifier que : $1\leq\alpha\leq 2$. **(0,5)**
 d) En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0;+\infty[$. **(0,25)**

2. Soit $\mathbf{f}$ la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{-3}{4}x^2+x-\frac{1}{2}x^2\ln x, & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

a) Démontrer que f est continue à droite de $x_0 = 0$. **(0,25)**

b) Démontrer que f est dérivable à droite de $x_0 = 0$. Préciser $f'_d(0)$ et interpréter graphiquement. **(0,25)**

c) Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f'(x) = xu(\frac{1}{x})$; où u est la fonction définie à la question 1. En déduire le signe de $f'(x)$. **(0,5)**

d) Dresser le tableau de variation de f. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution β et vérifier que : $1 \le \beta \le 2$. **(0,75)**

e) Tracer la courbe (C). **(0,75)**

3. Pour tout entier naturel $n \ge 1$ on pose: $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\beta} f(x)dx$

a) Exprimer I_n en fonction de β et de n, (On pourra utiliser une intégration par parties). **(0,5)**

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et donner une interprétation géométrique de cette limite. **(0,5)**

Exercice 4 (8 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct $ABCD$ de coté a, $(a > 0)$. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Le point E est le symétrique de C par rapport à D et F celui de B par rapport à A.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes. **(0,5)**

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme D en F et C en E. Préciser son angle et son centre. **(1)**

b) Déterminer deux droites Δ_1 et Δ_2 telles que $r = s_{\Delta_1} \circ s_{AC}$ et $r = s_{AB} \circ s_{\Delta_2}$. **(0,5)**

c) Déterminer la nature de la composée $\sigma = s_{AB} \circ s_{AD} \circ s_{AC}$ puis la caractériser. **(0,5)**

3.a) Prouver qu'il existe une unique similitude s_1 qui transforme D en L et C en D. Préciser son angle et son rapport. **(1)**

b) Soit R le centre de la similitude s_1. Vérifier que le point R est commun aux cercles de diamètres $[DL]$ et $[CD]$ puis le préciser. Vérifier que R est le point d'intersection des deux droites (CL) et (DI). **(0,75)**

c) On considère l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$. Soit $f = h \circ r$. Préciser la nature de f et déterminer $f(D)$ et $f(C)$. Que peut-on remarquer ? **(0,75)**

d) Donner la forme réduite de la similitude s_1. **(0,25)**

4. On considère la similitude directe s_2 qui transforme F en B et B en C.

a) Déterminer l'angle et le rapport de s_2. **(0,5)**

b) Soit Q le centre de s_2. Vérifier que Q est le point d'intersection des deux droites (CL) et (BK). **(0,25)**

5. Soient les points : P intersection des droites (AJ) et (BK) ; S intersection de (AJ) et (DI).

a) Démontrer que : $Q = bar\{(A,-1);(B,2);(C,1);(D,3)\}$. **(0,25)**

b) Donner des expressions semblables pour les points P, R et S. **(0,5)**

c) Démontrer que $PQRS$ est un carré puis calculer son aire en fonction de a. **(0,5)**

6. Soit Γ l'ensemble des similitudes directes de centre O (centre du carré $ABCD$), et qui transforment $ABCD$ au carré $PQRS$.

a) Prouver que ces similitudes sont de même rapport puis le déterminer. **(0,25)**

b) Soit g une similitude de l'ensemble Γ dont l'angle $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Donner les valeurs exactes de chacun des nombres $\sin\theta$ et $\cos\theta$. **(0,25)**

c) Donner en fonction de θ les angles possibles des autres éléments de l'ensemble Γ. **(0,25)**

Fin.