Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Art, Culture, Lecture Les Editions du KANGOUROU

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2002

Brochure APMEP n° 146

N° ISBN : 2-912846-22-6

Co-éditeur 1ère édition : ACL - Les éditions du Kangourou

SOMMAIRE

ANNEXES : SUJETS CHOISIS DU CLUB FRANCE D'ANIMATH

LE BONHEUR EST DANS L'OLYMPE !

Henri Bareil
Responsable éditorial de la brochure.

Voici donc la seconde année des ces olympiades, lancée avec un lourd handicap : celui d'épreuves 2001 unanimement jugées trop difficiles, peu adéquates aux intentions affichées, déprimantes...

De là, sans doute une participation générale en recul (pas partout cependant) alors qu'il eût fallu une progression sensible...

Pourtant, dans notre brochure des épreuves de 2001, le Président des Olympiades prenait acte de l'erreur de tir et s'engageait à la rectifier.
Ce qui a été fait, et bien fait !

2002 est, de l'avis général, une réussite : les critiques de l'an dernier les plus sévères ne tarissent pas d'éloges cette année et félicitent une épreuve « *dynamisante pour développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche* » : « *merci et bravo au comité national organisateur* ».

La régionale APMEP de Lorraine, en son « Petit Vert », « *se félicite de la nature des problèmes choisis, qui ne sont pas du tout rébarbatifs, motivent les candidats, et ne sont cependant pas "triviaux"* » (Pour ce dernier point, j'ajoute : « sauf exception »).

Effectivement, tout en évitant les micro-ascenseurs incorporés, nombre de problèmes débutent par des questions accessibles, bon échauffement pour aborder la suite. D'autres ont un énoncé apparemment abrupt, mais la situation proposée se prête à des expérimentations, ou bien il y a tant de voies de résolution que leur exploration est rapidement féconde.

Certes, tous les candidats n'ont pas pour autant excellé dans les divers exercices. Parfois aucun pour tel ou tel sujet... Mais il semble que tous les candidats s'y sont impliqués, que peu ont désespéré, et que ceux qui n'ont rien « trouvé » le prennent même avec humour et sourire tant la recherche leur a quand même plu. L'immense majorité des candidats s'en trouve plus " fraternelle " avec les mathématiques...

Un satisfecit général va aux sujets nationaux.

Je cite Michel Regnault :
« ... si l'on compare les sujets des deux olympiades, en particulier pour les deux derniers sujets nationaux, on ne peut que constater un réel, et sans doute salutaire changement de cap : la place importante laissée à la construction d'exemples favorisants la compréhension du problème, les textes décomposés en questions de difficulté graduée dont la résolution exige plus un effort de raisonnement, de l'imagination, qu'un recours à des théorèmes plus ou moins en marge d'un programme dont l'avan-

cement en cours d'année est loin d'être uniforme sur l'ensemble des classes de premières, l'originalité des situations proposées à la fois concrètes et ludiques, ont fait que davantage de concurrents se sont pris au jeu, ont mis à profit tout le temps qui leur était donné et n'ont pas ensuite manifesté un sentiment de découragement devant l'insurmontable. De bons arguments pour élargir le champ de recrutement des participants, ne pas le confiner aux « bons élèves » de 1ère S, et pour rappeler que ces olympiades s'adressent à tous les élèves de première qui aiment chercher, analyser, construire... »

On pourrait en dire autant de la plupart des sujets académiques. *Mais quelques exceptions pourraient induire les décideurs nationaux à mettre en sourdine le projet initial du passage de un à deux des sujets académiques*. Cette réaction ne serait-elle pas trop rapide ?
Les recadrages de cette année ne peuvent qu'aider aux orientations et aux choix des cellules académiques. **D'autant qu'on peut déjà apprécier** :

- *de très beaux sujets*, qui ont parfois induit de remarquables résolutions,
- le souci de *diversification* et de *complémentarité* par rapport aux sujets nationaux,
- *l'enthousiasme de ces équipes* devant la réorientation réussie de ces Olympiades,
- *d'heureuses initiatives*, comme celle de Versailles [et, déjà, Nantes dès 2001] quant au retour aux candidats de leurs copies avec notice d'évaluation.

Tout cela va bien dans le sens préconisé par l'APMEP.

Certes les Olympiades de première peuvent servir à dégager une pépinière de jeunes talents capables de bien représenter la France aux Olympiades internationales de Mathématiques (cf. nos bulletins Verts pour celles-ci, en la rubrique « problèmes »).

Mais là ne sont, pour l' APMEP, ni leurs objectifs les plus féconds, ni leurs mérites essentiels.

Nous attendons bien plus d'elles : qu'elles soient un levain dans la pâte pour contribuer à faire évoluer l'enseignement des mathématiques à l'opposé de ce qu'induisent les pratiques actuelles de nos examens (le baccalauréat d'abord). Cf. à ce sujet nos plaquettes, articles ou brochures, sur « Prospective bac » ou les « Problématiques », et le rappel en la page 43 de la plaquette « Visages 2002-2003 de l'APMEP », de la position du comité national sur le baccalauréat (Cf. Bulletin APMEP de Novembre-Décembre 2002).

Il est bon que des « officiels » nous y rejoignent.

Ainsi lorsque Madame Bellobet-Frier, rectrice de l'Académie de Toulouse, lors de la remise des prix académiques des Olympiades, **exalte des objectifs proposés par Emile Borel en 1922** : « ...développer l'esprit, le rendre plus solide et plus sûr, le mieux adapter aux fonctions multiples qu'auront à remplir les élèves devenus hommes, éveiller le goût de la science et de la recherche personnelle.. » ...A partir du noyau d'élèves et d'enseignants impliqués, ces Olympiades -comme les rallyes- devraient inciter à aborder, ou à faire aborder, loin de chemins tout tracés, exercices et problèmes de manière ouverte, à se comporter en chercheur, à essayer, bricoler, voire errer, sans se rebuter..., à apprivoiser la difficulté.

A propos de l'évolution analogue souhaitée pour le Baccalauréat, l'APMEP marque qu'il faut du temps pour s'y préparer...Les Olympiades peuvent y concourir si elles gagnent en effectifs, dans le maintien de l'esprit des épreuves de 2002.

Cela revient à inscrire dans les faits, à une échelle sans cesse plus grande, un enseignement conforme aux « *huit moments d'une formation scientifique* » que l'APMEP ne cesse -en même temps que les programmes officiels jusqu'à une date récente !- de mettre en avant : « *savoir poser un problème, expérimenter, prendre des exemples, conjecturer, bâtir une démonstration mettre en œuvre des outils, communiquer son travail, évaluer la pertinence des résultats eu égard au problème,...* »

Mais, comme le dit Philippe Lombard, dans un article sur la géométrie à paraître dans un prochain Bulletin Vert de l'APMEP, *une recherche ne peut être mise en route et féconde que si l'on dispose déjà d'un solide faisceau de connaissances* qui permet de se référer à d'autres problèmes, d'envisager telle ou telle méthode, de prendre plaisir à les évoquer tout en testant leur pertinence pour la situation en cause, ...

Il importe également que les essais des élèves, les pistes qu'ils ouvrent, leurs réorientations motivées,... soient pris en compte dans l'évaluation. Nous avons, là-dessus, beaucoup à apprendre de la pratique des « **narrations de recherche** » (cf. brochure n° 659 co-diffusée par l'APMEP, et **brochure APMEP n° 151, co-éditée par l'APMEP avec l'IREM de Montpellier** [parution fin décembre 2002 ; 168 pages, **prix adhérent APMEP :** 9 €]), et même des Olympiades Internationales de mathématiques !

Je souhaite vivement que les copies d'Olympiades de 1ère soient ainsi appréciées et que cela soit communiqué aux candidats, à l'instar de l'académie de Versailles cette année, pour le retour des copies annotées, et de celle de Nantes qui, en 2002 comme en 2001, envoie à chaque candidat son bilan.

J'évoquais plus haut la nécessité, si l'on veut que les Olympiades de 1ère concourent à l'évolution espérée, d'un accroissement considérable du nombre de candidats. **La réussite de cette année doit être valorisée**. Il faut insister sur « le niveau raisonnable des exercices », le fait que « tous les élèves ont pu s'y investir sans découragement », que beaucoup y ont pris plaisir, que cela a stimulé et relancé leur activité en maths...

Les enseignants de mathématiques de première sont ainsi invités, avec de bons arguments, à faire participer nombre de leurs élèves (et pas seulement leurs cracks...). Il restera alors, comme le fait déjà Kangourou, à diversifier les prix, qu'ils ne portent pas que sur les résultats globaux, mais qu'il y en ait pour l'ampleur des recherches, pour telle idée ou solution « géniale » pour tels ou tels aperçus, ... et **que chaque candidat sache qu'il a été considéré**... Pourrait-on aussi envisager un système de points par élève dont le cumul irait à des équipes de classes ? (Avec prix à l'appui).

Il reste qu'il ne faut pas attendre des Olympiades (ou des rallyes, clubs, ateliers,…) **que soient ainsi résolues les difficultés fondamentales de l'enseignement actuel des mathématiques** : des formations mathématiques de base satisfaisantes exigent certainement des proggrammes en rapport, mais alors nos horaires d'enseignement - sans cesse réduits ces dernières années - sont totalement insufffisants surtout avec les actuels publics d'élèves et les méthodes d'enseignement à juste titre préconisées.

Il serait dès lors désastreux de faire des Olympiades, ou clubs, … un alibi pour une inaction sur des revendications fondamentales (horaires en premier, style des examens, option sciences,…) pleinement affirmés par l'A.P.M.E.P.

Je ne saurais terminer sans remercier vivement, en tant que responsable de la brochure :

- *les responsables de cellules académiques* qui ont transmis à Dominique Roux des dossiers complets (énoncé, solutions, commentaires,...), ou, à moi-même, divers renseignements ;

- *les divers correspondants*, responsables ou non, qui m'ont fourni des commentaires et d'autres solutions que les « officielles » ;

- *tous ceux qui ont participé à notre moisson et l'ont enrichie*, avec, éventuellement, des autorisations de reproduire. En citant ceux qui nous ont adressé plusieurs contributions, merci, notamment, à Michel Regnault, Claude Baisnée, François Lo Jacomo, Jean Bichara et ses collègues de la Guadeloupe. Mais au fil des pages, on trouvera d'autres noms de collègues auteurs de remarquables contributions, eux aussi chaleureusement remerciés.

- *les animateurs de sites académiques* qui nous ont autorisés à utiliser leurs travaux : Animath, Claude Baisnée (Caen), Richard Breheret (Versailles), et « Math-Express » ;

- *Paul-Louis Hennequin*, auteur de la grille synthétique des corrigés, de nombreuses solutions, qui s'est aussi beaucoup préoccupé de l'ensemble de la brochure et a tout relu, avec grand soin ;

- *Jean Barbier*, qui a saisi les manuscrits, intégré les textes reçus par mèl ou disquette, et maquetté l'ensemble, avec sa gentillesse, sa disponibilité et sa générosité habituelles, son sourire et sa bonne humeur, alors que, depuis mars, il consacre bénévolement des milliers d'heures de travail à des brochures APMEP (celle-ci est la huitième) et qu'il lui en reste encore deux...urgentes ! En prime Jean nous livre de jolies brochures ! Comment le remercier assez ?

BROCHURE APMEP N°146

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES - 2002

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Art, Culture, Lecture Les Editions du KANGOUROU

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2002

Brochure APMEP n° 146

A.P.M.E.P.

l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

26, rue Duméril - 75013 Paris

Tél. 01 43 31 34 05 • fax : 01 42 17 08 77 • mel : apmep@apmep.asso.fr

http://www.apmep.asso.fr

Fondée en 1909, toujours dynamique, l'APMEP, c'est :

- **Une réflexion collective** sur le métier d'enseignant de mathématiques et les conditions de son exercice, de la maternelle à l'université, notamment en collèges et lycées ;
- **des interventions suivies** sur l'actualité et les projets à moyen terme ;
- **des textes de base** (chartes, problématiques, prospective bac …) pour des objectifs à long terme ;
- **un observatoire** (EVAPM) de l'impact des programmes du second degré.
- **des publications de référence** pour apprendre, enseigner, apprendre à enseigner les mathématiques (Bulletin vert, brochures,…);
- (dès janvier 2003) une **revue pour "débutants" PLOT**;
- **une information rapide** des adhérents : le BGV, un serveur internet, Publimath, …
- **des instances élues** définissant ses positions ;
- **une organisation décentralisée** en « Régionales » qui ont leurs activités propres et sont les relais entre l'organisation nationale et les adhérents de tous horizons.

L'APMEP agit :

- en réunissant commissions et groupes de travail, sur des thèmes variés, permettant aux adhérents de mettre en commun leur expérience et d'élaborer critiques et propositions ;
- en adoptant sa ligne d'action en accord avec ses adhérents ;
- en la défendant auprès de toutes les instances concernées.

L'APMEP propose ainsi :

- ses choix et des pistes d'action ;
- des outils pour renforcer l'efficacité de l'enseignement de cette discipline.

L'APMEP organise des :

- journées nationales, chaque année sur un site et un thème différents :
  - 1999 : Gérardmer, *Maths grandeur nature,*
  - 2000 : Nice, *Maths en Méditerranée.*
  - 2001 : Lille, *Maths au carrefour de l'Europe*
  - 2002 : Rennes, *Images des maths, Maths des images.*
  - 2003 : Pau, *Mathématiques de la Terre aux Etoiles*
- rencontres régionales ;
- séminaires et des "universités d'été"

En adhérant à l'APMEP, vous pourrez :

- participer à la vie de l'association et à la définition des positions qu'elle défend ;
- contribuer à ses productions, les soutenir par la cotisation et toute implication plus poussée ;
- recevoir chez vous les informations d'actualité sur les mathématiques et leur enseignement ;
- bénéficier de réductions importantes sur toutes les brochures qu'elle propose..

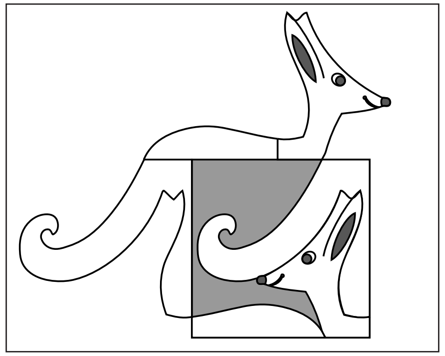
ACL - les éditions du Kangourou

Créée en 1986, **ACL - les éditions du Kangourou** a pour ambition de diffuser la culture mathématique, par des textes historiques tout d'abord, des revues ensuite et des livres élaborés en particulier autour du jeu-concours le « Kangourou des mathématiques ».

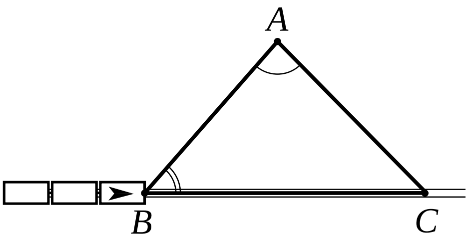
En 2002, le **Kangourou** a réuni plus de deux millions et demi de jeunes dans 32 pays. Le jeu a traditionnellement lieu le 3ème jeudi du mois de mars, il se présente sous la forme de questions à choix multiples, ce qui le rend à la fois, simple et ludique, tout en donnant des résultats, au lycée, très corrélés avec ceux des Olympiades Académiques en première ou du Concours Général en terminale.

Appuyée par son succès auprès des professeurs et des élèves, l'équipe du Kangourou a lancé quelques initiatives en direction des jeunes qui aiment les mathématiques et qui voudraient en faire plus :

- **Le Club Olympique Kangourou** regroupe ainsi tous les élèves qui aiment chercher et résoudre des problèmes de mathématiques. Une nouvelle publication, **la gazette du COK junior** (cadet pour les collégiens), leur donne des savoirs et méthodes, des aperçus historiques, des exercices corrigés et d'autres à chercher sur des thèmes comme : les aires, la divisibilité, les inégalités, le raisonnement, la récurrence, …
- Un lien de plus entre les jeunes, le site internet www.mathkang.org propose un groupe de discussion, des animations, des infos, des jeux, …(plus de 1 000 pages et 50 000 visites par mois).
- Sur le plan international des séjours d'échanges européens sont organisés pendant les vacances d'été : s'y retrouvent les lauréats de dizaines de pays d'Europe. Depuis maintenant 12 ans, le Kangourou est en fait devenu une référence dans tous les pays européens, où il est soutenu et patronné par de prestigieuses ou importantes institutions (université, sociétés mathématiques, académies, …). En France, en 2003 le parrainage de Madame Claudie Haigneré, Ministre de la recherche, et celui de Monsieur Hubert Curien, président de l'Académie des Sciences témoignent de cette image positive du Kangourou.



solution :



Appelons A la position de notre personnage, B celle de la tête de train, et C le point où la trajectoire rectiligne du personnage coupe la voie ferrée, elle aussi rectiligne. Nous avons là un beau triangle ; à sa vitesse v, le personnage ira de A à C en un temps : $\frac{AC}{v}$,

et à sa vitesse w, le train ira de B vers C en un temps $\frac{BC}{w}$.

Pour que notre personnage ait le plus de chances d'arriver à ses fins, il faut que $\frac{AC}{v}$

soit le plus petit possible par rapport à $\frac{BC}{w}$, donc que $\frac{AC}{BC}$ soit minimum.

Or, $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}}$. Comme l'angle $\widehat{ABC}$ est donné, l'angle $\widehat{BAC}$ doit avoir un

sinus maximal, à savoir 1 : $\widehat{ABC}$ doit être un angle droit.

dossier 7 : exercice 1 :

Montrer que pour tout entier n positif ou nul, la partie entière de $\sqrt{n} + \sqrt{(4n+2)}$ est la même que celle de $\sqrt{(9n+1)}$.

solution :

Lequel de ces deux nombres est le plus grand ? Elevons au carré.

$$\left(\sqrt{n} + \sqrt{(4n+2)}\right)^2 = n + (4n+2) + 2\sqrt{(n(4n+2))} = 5n + 2 + \sqrt{((4n+1)^2 - 1)}$$

Donc $9n + 2 \leqslant \left(\sqrt{n} + \sqrt{(4n+2)}\right)^2 < 9n + 3$.

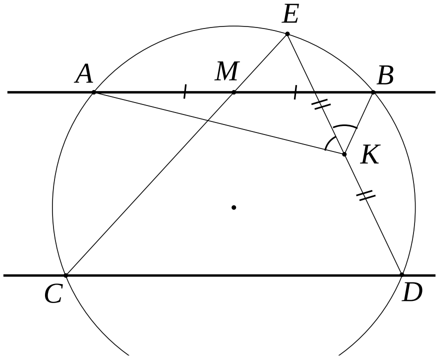
Il en résulte que $\sqrt{n} + \sqrt{(4n+2)} > \sqrt{(9n+1)}$.

Pour que la partie entière $m = \mathrm{E}(\sqrt{n} + \sqrt{(4n+2)})$ ne soit pas la même que la partie entière $\mathrm{E}(\sqrt{(9n+1)})$, il faudrait que : $\sqrt{(9n+1)} < m \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{(4n+2)}$, donc, en élevant au carré : $9n + 1 < m^2 \leqslant \left(\sqrt{n} + \sqrt{(4n+2)}\right)^2$. Comme m^2 est entier et $\left(\sqrt{n} + \sqrt{(4n+2)}\right)^2 < 9n + 3$, m^2 devrait être égal à $9n + 2$, ce qui est impossible : si m est multiple de 3, m^2 est multiple de 9, et si m n'est pas multiple de 3, m s'écrit soit $3k + 1$, soit $3k - 1$ ne peut jamais s'écrire $9n + 2$.

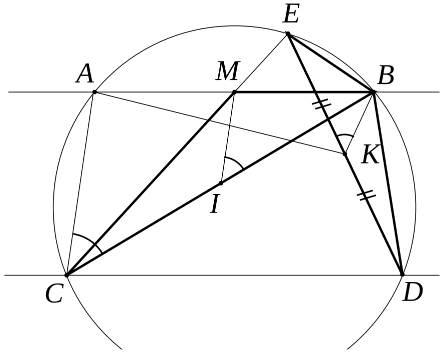
Donc $\sqrt{n} + \sqrt{(4n+2)}$ et $\sqrt{(9n+1)}$ on toujours la même partie entière.

dossier 7, exercice 5 :

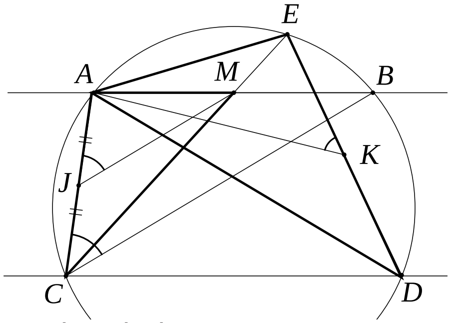
Deux droites parallèles coupent un cercle l'une en A et B, l'autre en C et D. La droite joignant C au milieu de $[AB]$ recoupe le cercle en E. Soit K le milieu de $[DE]$. Montrer que (KE) est bissectrice de l'angle AKB.



solution :



Notons M le milieu de $[AB]$ et <u>I le milieu de $[BC]$</u>(cf. figure ci-contre). Remarquons tout d'abord que les angles $\widehat{ECB}$ et $\widehat{EDB}$ interceptent le même arc, ils sont donc égaux. En outre, l'angle $\widehat{ABC}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AC}$ et l'angle $\widehat{DEB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{DB}$: le parallélisme de (AB) et (CD) prouve que ces deux arcs sont égaux, donc que $\widehat{ABC} = \widehat{DEB}$. Il en résulte que les triangles CMB et DBE sont semblables : il existe une similitude* transformant C en D, M en B et B en E. Celle-ci transforme I, milieu de $[BC]$, en K, milieu de $[ED]$, donc les angles $\widehat{BKE}$ et $\widehat{MIB}$ sont égaux. Or (MI) est la droite des milieux de ABC : les droites (MI) et (AC) étant parallèles, $\widehat{ACB} = \widehat{MIB} = \widehat{BKE}$.



En permutant A et B dans le raisonnement ci-dessus, on prouve que les triangles CMA et DAE sont semblables, donc, si l'on appelle J le milieu de $[AC]$,

---

* Variante : plus élémentairement, chaque triangle étant “à l'échelle” de l'autre, les angles homologues sont égaux : $\widehat{BKE}$ et $\widehat{MIB}$ sont égaux.

que $\widehat{AKE} = \widehat{MJA} = \widehat{BCA}$. Il en résulte que $\widehat{EKA} = \widehat{BKE}$,, donc que (EK) est bissectrice de $\widehat{AKB}$. On remarquera que rien ne dit, dans l'énoncé, si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dans le même sens ou en sens contraire : c'est sans importance, dans la mesure où, pour passer de la première à la deuxième partie de la démonstration, on permute A et B.

« La descente infinie »

Dans le cours d'Animath sur « la descente infinie », outil « redoutable » en arithmétique - introduit par Fermat -, H. B. a sélectionné l'article suivant qui en montre le principe :

exercice

Résoudre en nombres entiers l'équation $x^3 + 2y^3 = 4z^3$. (1)

solution :

Ecartons la solution triviale : $x = y = z = 0$, et supposons que l'équation (1) admette au moins une autre solution (x, y, z). Alors $x^3 = 4z^3 - 2y^3$ est divisible par 2, donc x est pair : on peut poser $x = 2x'$ avec x' entier. L'équation s'écrit donc : $8x'^3 + 2y^3 = 4z^3$, soit : $4x'^3 + y^3 = 2z^3$, ce qui entraîne que y à son tour est pair : $y = 2y'$; d'où $2x'^3 + 4y'^3 = z^3$, et z est lui aussi pair : $z = 2z'$: $x'^3 + 2y'^3 = 4z'^3$; donc (x', y', z') est solution de l'équation (1). En d'autres termes, à toute solution non triviale (x, y, z) de (1), on peut associer une autre solution strictement plus petite (x', y', z') de la même équation (1), avec $x' = \frac{x}{2}$, $y' = \frac{y}{2}$ et $z' = \frac{z}{2}$, x', y' et z' étant encore entiers. Ceci peut-il être recommencé indéfiniment ? Non, car on ne peut pas diviser indéfiniment x par 2 en obtenant toujours un entier. Or s'il existait, ne fût-ce qu'une solution hormis (0, 0, 0), on pourrait lui appliquer indéfiniment le raisonnement ci-dessus. Donc l'équation n'admet aucune solution non triviale.

Olympiade Internationale 2002, énoncé 2 :

Soit $[BC]$ un diamètre du cercle Γ de centre O. Soit A un point de Γ tel que $0° < \widehat{AOB} < 120°$. Soit D le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas le point C. La droite passant par O parallèle à la droite (DA) rencontre la droite (AC) en J. La médiatrice du segment $[OA]$ rencontre Γ en E et F. Montrer que J est le centre du cercle inscrit au triangle CEF.

solution :

Il s'agit de démontrer que J est l'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle CEF. Or deux choses se dégagent de la figure 1 :

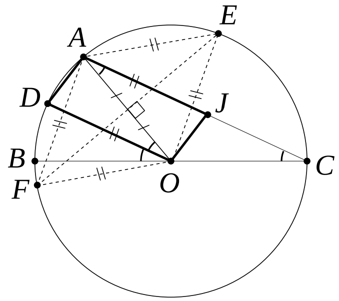


figure 1

- Premièrement, E et F étant sur la médiatrice de $[AO]$, $EA = EO = R$, rayon du cercle (Γ), et $FA = FO = R$. AOF et AOE sont donc deux triangles équilatéraux.

- Deuxièmement, D étant le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, l'angle $\widehat{BOD}$ est la moitié de l'angle $\widehat{BOA}$, tout comme l'angle inscrit $\widehat{BCA}$ vaut la moitié de l'angle au centre $\widehat{BOA}$, donc (OD) et (CA) sont parallèles : (OJ) étant parallèle à (DA) par hypothèse, $OJAD$ est un parallélogramme, ce qui implique notamment $AJ = OD = R$.

Oublions désormais les points B, O, D et concentrons-nous sur les relations $AE = AF = AJ = R$ (figure 2). D'une part, A est le milieu de l'arc EF, donc (CJ) est bien bissectrice de $\widehat{ECF}$. D'autre part, E, F et J appartiennent au cercle (Γ_A) de centre A et de rayon R, et dans ce cercle (Γ_A), l'angle inscrit $\widehat{JEF}$ vaut la moitié de l'angle au centre $\widehat{JAF}$, alors que dans le cercle initial (Γ), $\widehat{JAF} = \widehat{CAF}$ intercepte le même arc que $\widehat{CEF}$.

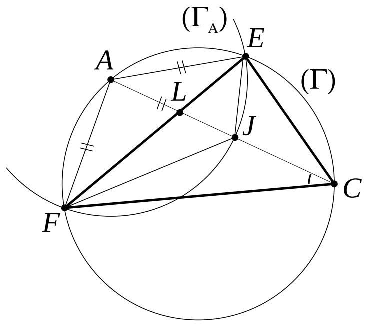


figure 2

En définitive, $\widehat{JEF}$ vaut la moitié de l'angle $\widehat{CEF}$, et on prouverait de même que $\widehat{JFE}$ vaut la moitié de $\widehat{CFE}$: J appartient bien aux trois bissectrices.

Mais ceci n'achève pas la démonstration ! Il reste une hypothèse que nous n'avons pas utilisée (le fait que $\widehat{AOB} < 120°$) et une conclusion que nous n'avons pas clairement montrée, le fait que J est le centre du cercle *inscrit*, donc l'intersection des trois bissectrices *intérieures*. Ceux qui n'ont pas vu cette difficulté ont perdu un point sur 7. Car c'est là que se manifestent tous les problèmes liés à la notion d'angle : l'angle au centre interceptant un arc est défini modulo 2π (360°), mais l'angle inscrit interceptant ce même arc vaut la moitié de l'angle au centre, il est donc défini modulo π (180°). C'est pourquoi on introduit la notion d'angle de droites, défini modulo π et indépendamment de l'orientation des droites, qui permet d'énoncer de manière très générale : quatre points A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si les angles des droites (AC, AD) et (BC, BD) sont égaux. Maintenant, si je divise par deux des angles inscrits, ces moitiés sont, elles, définies modulo $\pi/2$. En conséquence, la démonstration ci-dessus permet juste de prouver que, modulo $\pi/2$, (EF, EJ) est la moitié de (EF, EC), mais cela ne permet pas de dire si (EJ) est une bissectrice intérieure ou extérieure de $\widehat{FEC}$: dans certains cas, J sera le centre d'un cercle exinscrit, dans d'autres, le centre du cercle inscrit, ce qui, à vrai dire, n'est pas très important dans la mesure où un cercle exinscrit et un cercle inscrit, c'est « presque » la même chose. Sauf si les auteurs de l'énoncé tiennent à ce que ce soit un cercle inscrit, auquel cas il faut prendre en compte l'hypothèse $0° < \widehat{AOB} < 120°$ pour en déduire que J est bien intérieur au triangle.

Le fait que $\widehat{AOC} > 60°$ entraîne d'une part que $AC > R = AJ$, donc J est situé entre A et C, d'autre part que A et C sont situés de part et d'autre de (EF), car $\widehat{AOE} = \widehat{AOF} = 60°$.. Les cordes $[AC]$ et $[EF]$ se coupent en un point L qui, comme tout point de $[EF]$, est intérieur au cercle (Γ_A), donc $AL < R = AJ < AC$, ce qui suffit pour affirmer que, sous cette hypothèse $0° < \widehat{AOB} < 120°$, J est *intérieur* au triangle CEF, c'est donc bien le centre du cercle *inscrit*. Par contre, si $\widehat{AOB} > 120°$, $AC < R = AJ$, J est extérieur au centre (Γ) donc au triangle CEF, c'est le centre d'un cercle exinscrit.

LOUIS - JEAN

avenue d'Embrun, 05003 GAP cedex

Tél. : 04.92.53.17.00

Dépôt légal : 812 – Décembre 2002

Imprimé en France

L'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

François LO JACOMO

« Une autre approche des mathématiques », c'est ce qu'Animath s'efforce de promouvoir depuis sa fondation en 1998 : clubs et compétitions sont les deux pôles de notre action, et notre préparation aux compétitions ne se limite pas aux Olympiades Internationales de Mathématiques, même si l'amélioration des performances françaises dans cette épreuve est un de nos objectifs importants, en bonne partie atteints en 2002.

Aujourd'hui, nous distinguons l'activité "Olympiade française de mathématiques", qui prépare un nombre réduit d'élèves à une participation éventuelle aux olympiades internationales, du "tutorat Animath".
L'Olympiade française de mathématiques, indépendante d'Animath, est sous la responsabilité de Claude DESCHAMPS et fonctionne dans le cadre d'un partenariat entre l'Ecole Normale Supérieure, le ministère de l'Éducation Nationale et Thomson Multimedia. Elle réunit une quarantaine d'élèves de première et terminale, qui reçoivent chaque mois un dossier d'exercices à résoudre.
Le tutorat Animath propose à des élèves plus jeunes (Seconde, éventuellement 3eme) un tuteur mathématique qui, d'une part leur donne un large aperçu des mathématiques existantes de manière distrayante, d'autre part les prépare à une entrée éventuelle a l'Olympiade francaise de mathematiques.

Les deux structures fonctionnent en collaboration étroite. Par ailleurs, chaque année depuis 1998, un ou des stages olympiques réunissent, dans un cadre détendu, des élèves de l'Olympiade française de mathématiques (notamment les lauréats de l'Olympiade académique) et du tutorat Animath.

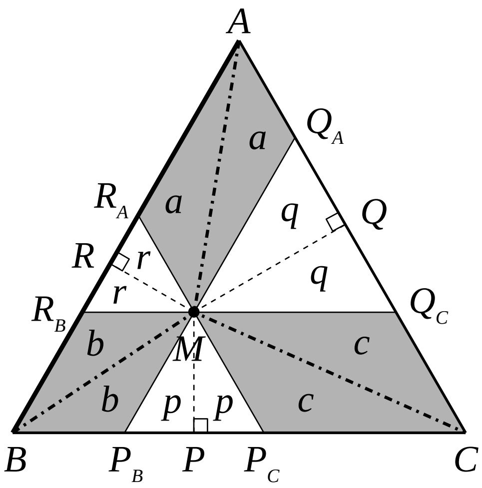
Les élèves sont recrutés d'après leur motivation et leurs capacités sur la base restreinte des informations disponibles : concours Kangourou, championnats de la FFJM*, Olympiades académiques, tournoi du Limousin, rallye d'Alsace, … ainsi que quelques candidatures spontanées suscitées par notre site web www.animath.fr. Nous serions heureux également, que les enseignants nous signalent ceux de leurs élèves susceptibles de tirer profit de nos activités. Animath pourra les mettre en contact direct avec d'autres élèves ayant les mêmes centres d'intérêt.

Pour la présente brochure, Henri BAREIL a sélectionné, en privilégiant la géométrie sur l'arithmétique et d'autres domaines difficilement abordables en Première, onze exercices des dossiers du club France 2001/2002 et un de l'Olympiade Internationale 2002 qui ne nécessite que des connaissances élémentaires.

* FFJM : Fédération Française des Jeux Mathématiques

Dossier 1, exercice 3

Soit M un point intérieur à un triangle équilatéral ABC et soient P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Démontrer que la somme des aires des triangles MAQ, MBR et MCP est égale à la somme des aires des triangles MAR, MBP et MCQ.



solution :

Par M, menons la parallèle à (BC) (resp. (CA), (AB)) qui recoupe les deux autres côtés $[AB]$ et $[AC]$ (resp. $[BC]$ et $[BA]$, $[CA]$ et $[CB]$) en R_B et Q_C (resp. P_B et Q_A, P_C et R_A). On divise ainsi le triangle ABC en trois parallélogrammes MR_BBP_B, MP_CCQ_C, MQ_AAR_A et trois triangles équuilatéraux MP_BP_C, MQ_CQ_A et MR_AR_B. La hauteur (MP) du triangle équilatéral MP_BP_C le partage en deux triangles de même aire p, et la diagonale (MB) du parallélogramme MR_BBP_B le partage en deux triangles superposables, donc de même aire b. En définissant pareillement :

$c = \text{aire}(MCP_C) = \text{aire}(MCQ_C)$, $\quad a = \text{aire}(MAQ_A) = \text{aire}(MAR_A)$,

$q = \text{aire}(MQ_CQ) = \text{aire}(MQQ_A)$ et $\quad r = \text{aire}(MR_AR) = \text{aire}(MRR_B)$

on voit que $\quad \text{aire}(MAQ) + \text{aire}(MBR) + \text{aire}(MCP) = (a + q) + (b + r) + (c + p)$

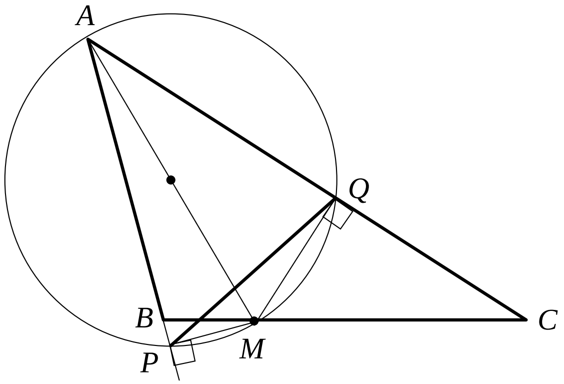
et $\quad \text{aire}(MAR) + \text{aire}(MBP) + \text{aire}(MCQ) = (a + r) + (b + p) + (c + q)$,

ces deux sommes sont manifestement égales.

dossier 1, exercice 5 :

Soit ABC un triangle. Pour tout point M du segment $[BC]$, on note P et Q les projetés orthogonaux de M sur les droites (AB) et (AC). Déterminer les points M pour lesquels la longueur PQ est minimale.

solution :



Le cercle de diamètre $[AM]$ passe par P et Q, puisque les angles $\widehat{APM}$ et $\widehat{AQM}$ sont droits. Dans ce cercle, circonscrit au triangle APQ, $PQ = 2R \sin \widehat{A}$, $\widehat{A}$ étant l'angle en A du triangle APQ, donc du triangle ABC, et R, le rayon du cercle, donc la moitié de AM. L'angle $\widehat{A}$ étant indépendant du choix de M, PQ est minimal lorsque R, donc AM est minimal, c'est-à-dire lorque M est la projection orthogonale de A sur (BC), si celle-ci appartient bien au segment $[BC]$. Si l'angle $\widehat{B}$ est obtus, M étant supposé sur le segment $[BC]$, AM (donc PQ) est minimal lorsque M est en B, et si l'angle $\widehat{C}$ est obtus, PQ est minimal lorsque M est en C.

dossier 4, exercice 1 :

Soit $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs telle que a_1 ne soit pas divisible par 5 et $a_{n+1} = a_n + b_n$ où b_n est le dernier chiffre de a_n. Montrer que cette suite comprend une infinité de puissances entières de 2.

solution :

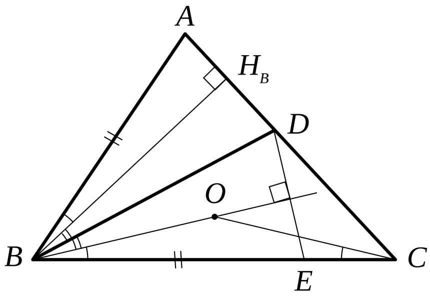
<u>Quelques remarques</u> : si a_n est pair, a_{n+1} aussi, et s'il est impair, a_{n+1} est encore pair : ainsi tous les a_n sont pairs pour $n \geqslant 2$. Puisque a_1 n'est pas divisible par 5, aucun des a_n ne l'est, et donc $b_n \in \{2, 4, 6, 8\}$. Pour la suite b_n ($n \geqslant 2$), on a alors le cycle : $2 \to 4 \to 8 \to 6 \to 124$ (c'est-à-dire : si $b_n = 2$, alors $b_{n+1} = 4, \dots, b_{n+4} = 2$). Pendant un cycle, a_n augmente donc de : $a_{n+4} - a_n = 2 + 4 + 8 + 6 = 20$.

Les puissances de 2 (pour $n \geqslant 2$) sont congrues cycliquement à 4, 8, 16 12 modulo 20, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme : $20k + 4$, $20k + 8$, $20k + 16$ ou $20k + 12$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que pour un certain n, a_n est lui aussi de la forme $20k + r$, avec $r \in \{4, 8, 16, 12\}$, car alors $a_{n+4q} = 20(k + q) + r$, et toutes les puissances de 2 supérieures à a_n et congrues à r modulo 20 seront atteintes.

Si $a_2 = 2 \bmod 20$, $a_3 = 4 \bmod 20$; si $a_2 = 6 \bmod 20$, $a_3 = 12 \bmod 20$; si $a_2 = 14 \bmod 20$, $a_5 = 12 \bmod 20$; et si $a_2 = 18 \bmod 20$, $a_4 = 12 \bmod 20$. Les autres cas sont éliminés par les remarques du début : on a vérifié la condition dans tous les cas, ce qui achève la démonstration.

dossier 4, exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que $BC \geqslant AB$. On choisit D et E sur $[AC]$ et $[BC]$ respectivement de sorte que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ et $BE = AB$. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC. Montrer que (DE) et (BO) sont perpendiculaires.



solution :

La symétrie par rapport à (BD), bissectrice de $\widehat{ABE}$, transforme E en A, vu que $BE = BA$. Elle transforme donc (DE) en (DA). Or elle transforme la droite (BO) en la hauteur (BH_B) du triangle ABC : c'est un résultat classique, il suffit d'étudier les angles du triangle isocèle OBC (ou OAB) et du triangle rectangle H_BBA (ou H_BBC) pour s'en convaincre. La hauteur (PH_B) étant perpendiculaire à (DA), sa symétrique (BO) est perpendiculaire à (DE), symétrique de (DA).

dossier 4, exercice 6

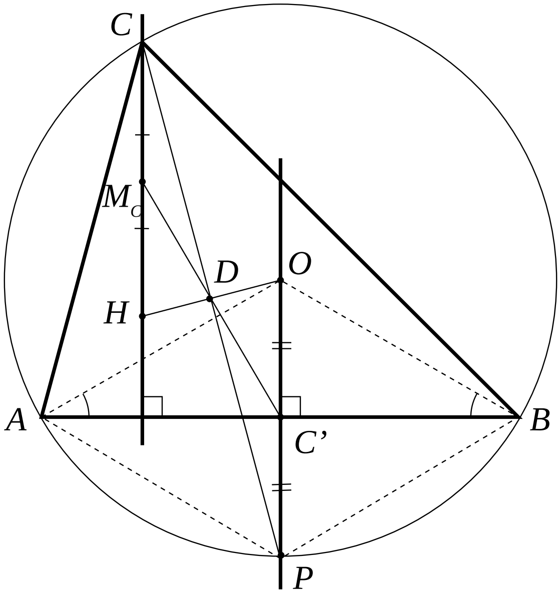
Soit H l'orthocentre du triangle ABC, supposé non isocèle en C. Soit D le point d'intersection de la droite des milieux de $[AB]$ et $[HC]$ avec la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ACB}$. On suppose que O (centre du cercle circonscrit à ABC) est sur (HD). Calculer la valeur de l'angle $\widehat{ACB}$.

solution :

Appelons C' le milieu de $[AB]$ et M_C le milieu de $[HC]$: l'hypothèse revient à dire que $(C'M_C)$ et (HO) se coupent en un point D de la bissectrice intérieure de $\widehat{ACB}$.
Or, l'intersection de $(C'M_C)$ et (HO) est un point remarquable du triangle, ce qui suggère plusieurs solutions.

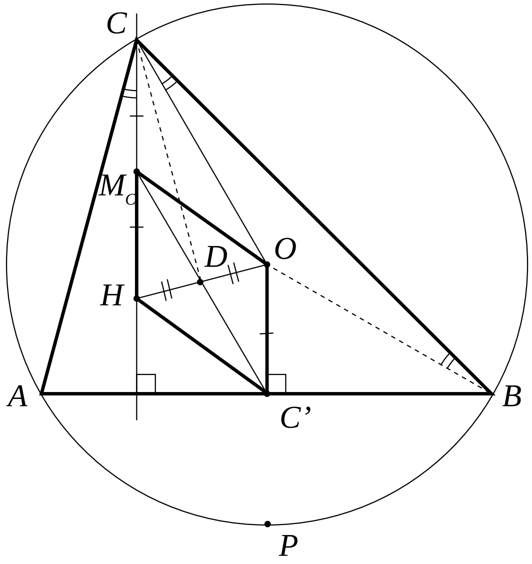
Trois solutions d'élèves méritent d'être citées :

Tout d'abord, celle de Pierre PETIT :



(HM_C) et (OC'), toutes deux perpendiculaires à (AB), sont parallèles. D est donc le centre d'une homothétie transformant H en O, M_C en C', et tout point de (HM_C) (notamment C) en un point de (OC'). Or (CD), bissectrice de $\widehat{ACB}$, passe par le milieu P de l'arc $\widehat{AB}$, tout comme (OC'), médiatrice de $[AB]$. L'homothétie envoie donc nécessairement C en P. Comme une homothétie conserve les milieux, C' est milieu de $[OP]$ puisque M_C est milieu de $[HC]$. Dès lors (BC') est médiatrice de $[OP]$, ce qui entraîne : $BP = BO = R$ rayon du cercle : le triangle BPO est donc équilatéral, l'angle $\widehat{ABO}$ vaut $\dfrac{\pi}{6}$, $\widehat{AOB} = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{3}$. On voit par cette méthode que **le résultat se conserve si *H* est un point quelconque de la hauteur issue de *C*, et pas obligatoirement l'orthocentre**.

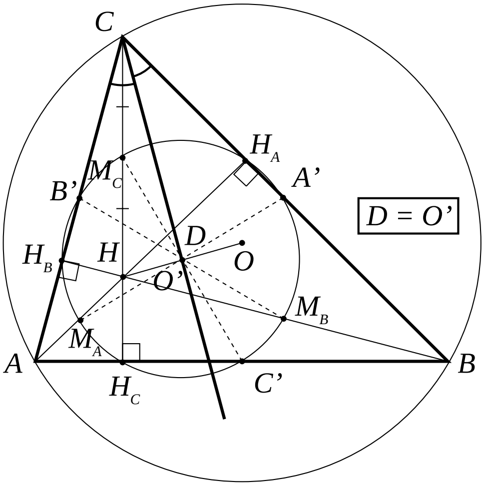
La seconde solution est de Rémi OUDOMPHENG :



elle fait intervenir une propriété de l'orthocentre, à savoir que $OC'HM_C$ est un parallélogramme. C'est un résultat classique : l'homothétie de centre G (isobarycentre de ABC) et de rapport –1/2 transforme C en C' et H, orthocentre de ABC en O, orthocentre du triangle des milieux, donc le vecteur $\overrightarrow{C'O} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{HM_C}$. Les diagonales de ce parallélogramme se coupent en leur milieu commun : or, par hypothèse, elles se coupent en D. (CD) est donc médiane du triangle COH, mais également bissectrice, car les angles $\widehat{HCA}$ et $\widehat{OCB}$ étant tous deux égaux à $\frac{\pi}{2} - \widehat{A}$, $\widehat{HCO}$ et $\widehat{ACB}$ ont même bissectrice. Il en résulte que $CH = CO = R$, rayon du cercle, d'où $OC' = \frac{R}{2}$, $\widehat{ABO} = \frac{\pi}{6}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$.

La troisième solution, de Maxime ZAVIDOVIQUE, utilise le cercle d'Euler :

Rappelons que le **cercle d'Euler** (ou « cercle des neuf points du triangle »), centré en O' milieu de [OH], passe par les milieux des côtés du triangle, les pieds des hauteurs, les milieux des segments joignant l'orthocentre H aux sommets. Les démonstrations sont du niveau collège.
Dans le cas présent, O', intersection de [$C'M_C$] et [OH] est par hypothèse le point D. Si ce point appartient à la bissectrice de $\widehat{ACB}$, la symétrie par rapport à (CD), qui transforme (CA) en (CB), transforme le cercle d'Euler en lui-même. Donc A',



l'une des intersections de ce cercle avec (CB), est transformé soit en B' soit en$H_{B'}$, B' et H_B étant tous les deux intersections de ce cercle avec (CA). Si A' est transformé en B', $CB = CA$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc A' est transformé en H_B, $CH_B = CA' = CB/2$, ce qui signifie que l'angle $\widehat{ACB}$ vaut $\pi/3$.

Cette dernière méthode met en évidence l'utilité d'exclure le cas où le triangle ABC est isocèle en C : dans ce cas, la droite des milieux ($C'M_C$) et la bissectrice intérieure de $\widehat{ACB}$ étant confondues avec l'axe de symétrie du triangle, D n'est pas défini. Mais il serait bon d'exclure également le cas où le triangle ABC est rectangle en C : H et D sont alors confondus en C et l'hypothèse « O est sur $[HD]$ » n'a pas de sens.

dossier 5, exercice 3 :

22 arbres sont mis en rond : sur chaque arbre se pose un corbeau. Toutes les minutes, deux corbeaux se déplacent, chacun sur un arbre voisin du leur. Est-il possible pour les corbeaux, après un certain nombre de minutes, de se rassembler tous sur le même arbre ?

solution : (telle que l'a rédigée l'élève Rémy Peyre)

Quand un corbeau situé sur un arbre A_i se déplace, il arrive sur un arbre A_j tel que i et j sont de parités contraires. Supposons que l'arbre sur lequel tous les corbeaux se retrouvent soit l'arbre 0. Alors, les 11 corbeaux situés initialement sur un arbre pair doivent effectuer un nombre pair de déplacements, et les 11 autres corbeaux doivent faire un nombre impair de déplacements. Le nombre total de déplacements effectués par les corbeaux est donc impair. Or les déplacements se réalisent deux par deux : contradiction. La situation envisagée est donc impossible.

dossier 5, exercice 5 :

Soit n une puissance de 2.
On considère les parties A de l'ensemble E = $\{1, 2, \ldots, n\}$ possédant la propriété suivante : si x appartient à A, alors $2x$ n'appartient pas à A. Déterminer le nombre maximal d'éléments d'une telle partie.

solution :

Pour commencer, essayons de construire un tel ensemble à la main : on commence par mettre 1 dedans, donc on doit barrer 2 ; puis on peut mettre 3, mais on barre 6, on peut ensuite mettre 4 et 5 en barrant 8 et 10, etc. On obtient ainsi l'ensemble :

$$\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, \ldots\}.$$

Par construction, cet ensemble est *maximal*, c'est-à-dire qu'on ne peut pas lui rajouter un élément sans perdre la propriété cherchée. Cela ne veut pas forcément dire que son nombre d'éléments est maximum pour cette propriété ! Il se pourrait qu'une construction complètement différente donne un autre ensemble satisfaisant la propriété, avec plus d'éléments.

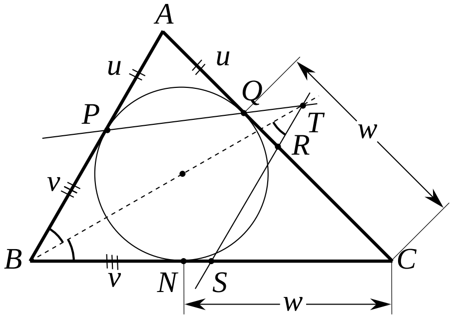
Appelons $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, \ldots\}$ l'ensemble infini des entiers obtenus par la méthode du crible ci-dessus, et A_0 l'intersection $B \cap$ E. On veut montrer que si A inclus dans E vérifie la propriété, alors A n'a pas plus d'éléments que A_0. Soit x un élément de A qui ne soit pas dans A_0 : d'après la construction de A_0, x est pair et $x/2$ appartient à A_0 (sinon on aurait pris x dans A_0), alors que $x/2$ n'appartient pas à A, par hypothèse. Si, dans A, on remplace tous les éléments qui ne sont pas dans A_0 par leur moitié, on obtient donc une partie de A_0. Comme ce remplacement ne modifie pas le nombre d'éléments de A, A n'a pas plus d'éléments que A_0.

Il faut désormais compter le nombre d'éléments de A_0. Posons $n = 2^m$. A_0 contient tous les nombres impairs, soit $n/2 = 2^{m-1}$ éléments. Il ne contient aucun double de nombre impair, par contre il contient tous les quadruples de nombres impairs, soit 2^{m-3} éléments. Plus généralemment, si x s'écrit $2^p.q$, avec q impair, x appartient à A_0 si et seulement p est pair. Or pour $p < m$, il y a 2^{m-1-p} entiers $\leqslant 2^m$ de la forme $2^p.q$, avec q impair. Pour $p = m$ tout comme pour $p = m - 1$, il y en a un. A_0 contient donc : $S_m = 2^{m-1} + 2^{m-3} + \ldots + 1$ éléments. Si $m = 2k + 1$, $S_{2k+1} = 2^{2k} + 2^{2k-2} + \ldots + 4 + 1 = (2^{2k+2} - 1)/(4 - 1) = (2n - 1)/3$, et si $m = 2k$, $S_{2k} = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \ldots + 2 + 1 = (S_{2k+1}/2) + 1/2 = (2^{2k+1} + 1)/3 = (2n + 1)/3$.

dossier 5, exercice 6 :

Le cercle inscrit dans le triangle ABC touche les côtés $[AB]$ et $[AC]$ aux points P et Q respectivement. R et S sont les milieux respectifs des côtés $[AC]$ et $[BC]$. T est le point d'intersection des droites (PQ) et (RS). Montrer que T se trouve sur la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$ du triangle.

solution :



Ce qui frappe tout d'abord, c'est le parallélisme de (AB) et (RS), droite des milieux.

Pour que (BT) soit bissectrice de l'angle $\widehat{B}$, il faut et il suffit que $\widehat{ABT} = \widehat{SBT}$, soit $\widehat{BTS} = \widehat{SBT}$, soit encore : $SB = ST$. Or nous avons déjà deux triangles isocèles : APQ et RTQ, homothétiques du fait de ce parallélisme. En nommant N le troisième point de contact du cercle inscrit, les triangles BPN et CNQ sont eux aussi isocèles, et si l'on pose classiquement : $u = AP = AQ$, $v = BP = BN$ et $w = CN = CQ$, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et $a + b + c = 2p$, des relations : $a = v + w$, $b = w + u$, $c = u + v$ découlent immédiatement : $p = u + v + w$, $u = p - a$, $v = p - b$, $w = p - c$.

Si Q est entre A et R, donc T extérieur au triangle,

$$RT = RQ = AR - AQ = \frac{b}{2} - \frac{-a+b+c}{2} = \frac{a-c}{2} ,$$

donc $ST = SR + RT = \dfrac{a}{2} = SB$.

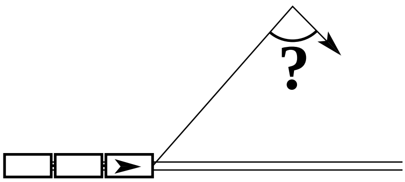
Si R est entre Q et A, donc T entre R et S,

$$RT = RQ = AQ - AR = \frac{c-a}{2}$$

ce qui achève la démonstration.

dossier 6, exercice 1 :

Un amateur de sensations fortes se trouvant à une certaine distance de la voie ferrée rectiligne voit arriver un train. Il veut traverser la voie ferrée avant le train, sachant qu'il court moins vite que ce dernier (les deux vitesses sont supposées constantes). Dans quelle direction doit-il courir pour avoir le plus de chances d'y arriver ? Donner l'angle entre cette direction et celle où se trouve la tête du train.



ACADÉMIE de VERSAILLES

ÉNONCÉ

On considère un carré $ABCD$ de côté a.
Soit E un point fixe de $]BC[$.

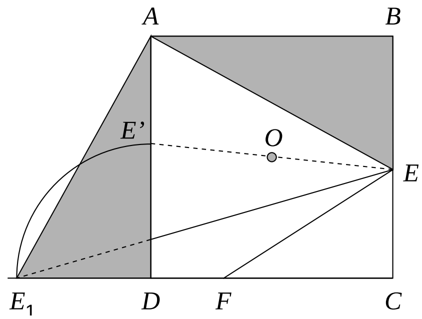
1 - Montrer qu'il existe un point F de $]CD[$ tel que le périmètre du triangle CFE soit égal à $2a$.

2 - Quel est alors la mesure de l'angle $\widehat{EAF}$?

SOLUTION 1

Elément de solution
(fourni par l'équipe académique)

« Le périmètre du triangle CFE se trouve être le demi-périmètre du carré. La figure ci-dessous indique comment on peut tenir compte, par une symétrie adaptée, de cette particularité. »



Développement possible - par Henri BAREIL - :

Effectivement la symétrie par rapport à O puis le rabattement de $[DE']$ en $[DE_1]$ fournissent :
- d'une part : $CE + CE_1 = 2a$ (1)
- d'autre part : la correspondance des triangles grisés dans une rotation (A, 90°) (2).

On peut, d'ailleurs, remplacer l'utilisation de cette rotation par celle de l'égalité des triangles grisés (2ème cas d'égalité, …)

On déduit de la conjugaison de (1) et de (2), que $CE + CE_1 = 2a$,
donc $FE = FE_1$
ce qui, compte tenu de $AE = AE_1$, équivaut à « (AF) est la médiatrice de $[EE_1]$ ».

La rotation (2) (ou, à défaut, l'exploitation de l'égalité des triangles grisés et de leur position) implique aussi que EAE_1 est un triangle rectangle isocèle.

(FA) est donc la bissectrice de $\widehat{BAE_1}$ et de $\widehat{EAD}$.

De là : d'une part l'appartenance de F à $]CD[$, et, d'autre part, $\widehat{EAF} = 45^c$.

D'où la construction, et l'unicité, de F, soit avec la médiatrice de $[EE_1]$, soit avec $\widehat{EAF}$.

SOLUTION 2

par Henri Bareil

(Cette solution n'est pas meilleure que la solution 1 !)

Centrons notre attention sur le triangle CFE, de périmètre $2a$.
Nous allons exploiter des considérations de géométrie élémentaire, relatives aux cercles ex-inscrits dans un triangle dans un triangle, qui permettent l'intervention du demi-périmètre de CFE.

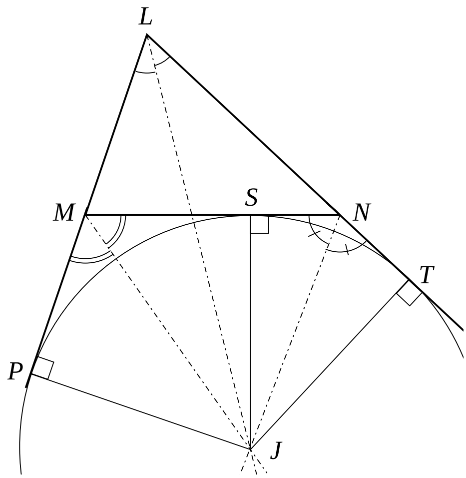
Rappelons-les :
Soit un triangle LMN (figure ci-contre) et le centre J du cercle ex-inscrit dans l'angle A.

$MS = MP$, $NS = NT$,
$LF = LT$
(propriétés des tangentes)

Donc $LP = LT$ = demi-périmètre de LMN.

D'autre part :

$$\widehat{MJN} = \frac{1}{2}\widehat{PJT}$$



Exploitons-les pour CFE *:*

Comme $CD = CB$ = demi-périmètre de CFE, D et B sont les points de contact des demi-droites $[CF)$ et $[CE)$ avec le cercle ex-inscrit dans $\widehat{C}$.

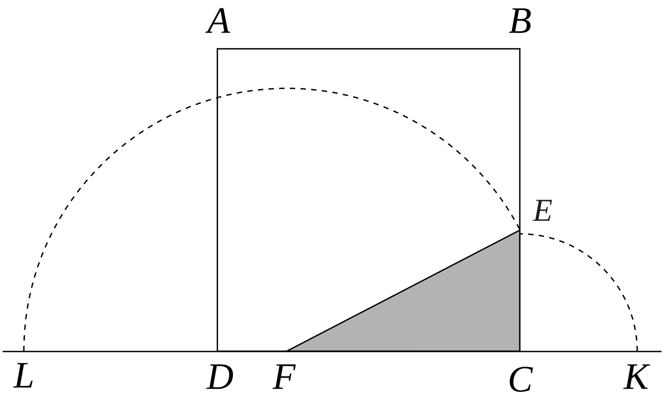
Le centre de ce cercle est donc A. Il s'ensuit que ce cercle (A, AB) est tangent à (EF) et que $\widehat{EAF} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$.

La construction et l'unicité de F s'en déduisent : tracer, de E, la tangente - autre que (EB) - au cercle (A, AB).

On peut aussi utiliser le fait que (EF) et (EB) sont symétriques par rapport à (AE).

SOLUTION 3

par Henri Bareil



Utilisons le classique déploiement du périmètre du triangle CEF, ici sur (CD), autour de [CF] :
Soit K tel que $CK = CE$, K extérieur à [CD) et L sur [CD) tel que $FL = FE$.
Alors $LK = 2a$.
Or, **la connaissance de *E* induit celle de *K*.** Et L est donc, également, connu.
Comme $FE = FL$, ***F* est l'intersection de (*CD*) et de la médiatrice de [*EL*]**.

De plus, $DL + CK = a$
donc $DL < a$.

Or $DE > a$, donc $DE > DL$.
Il s'ensuit que la médiatrice de [EL] coupe bien]DC[.

Remarques :

1 - Le point L de cette « Solution 3 » n'est autre que le point E_1 de la « Solution 1 ».

2 - Le déploiement du périmètre de CEF sur (EC), autour de [CE], n'était pas, semble-t-il, intéressant : aucune des extrémités du périmètre déployé n'est connue.

SOLUTION 4

par Henri Bareil

Essayons une solution algébrique.

On pose, par exemple, $CE = m$, avec $0 < m < a$ et on se propose de déterminer CF (= x) tel que $m + x + \sqrt{x^2 + m^2} = 2a$

Soit $\sqrt{x^2 + m^2} = 2a - m - x$

équation équivalente, sous la condition $x < 2a - m$, à $x = \dfrac{2a(a-m)}{2a-m}$, qui remplit bien la condition de départ, et, de plus, $0 < x < a$.

D'où F, unique, sur $]CD[$.

• La recherche de l'angle $\widehat{EAF}$ apparaît plus compliquée. Elle peut se faire par la formule d'Al-Kashi, ce qui impose :

$$x^2 + m^2 = [a^2 + (a-x)^2] + [a^2 + (a-m)^2] - 2\sqrt{[a^2 + (a-x)^2] + [a^2 + (a-m)^2]}\cos\widehat{EAF}$$

soit encore, après calculs, dont l'utilisation de la valeur de x :

$$2\sqrt{\frac{2a^2\,(2a^2 - 2am + m^2)^2}{(2a-m)^2}}\cos\widehat{EAF} = 2a\,\frac{2a^2 - 2am + m^2}{2a-m}$$

d'où l'on peut déduire $\cos\widehat{EAF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ce qui donne $\widehat{EAF} = 45°$.

Ouf !

• Cette méthode de résolution est, pour ce problème-là, plutôt fastidieuse. De plus, elle ne permet une construction simple de F que quand on dispose de la mesure de $\widehat{EAF}$.

Mais elle peut dépanner les élèves à court de méthodes « géométriques » et sûrs en calcul algébrique.

SOLUTION 5

par Paul-Louis HENNEQUIN

Posons $BE = b$ et $DF = x$.

Par Pythagore $\quad EF = \sqrt{(a-b)^2 + (a-x)^2} = 2a - FC - EC$

$$= (a - FC) + (a - EC) = x + b.$$

d'où $\quad (a-b)^2 + (a-x)^2 = x^2 + 2bx + b^2$

ou $\quad 2a^2 - 2ab = 2x(a+b)$

ou $\quad x = \dfrac{a\,(a-b)}{a+b}$

D'où $\quad \tan\widehat{DAF} = \dfrac{x}{a} = \dfrac{a-b}{a+b}$ et $\tan\widehat{EAB} = \dfrac{b}{a}$

Alors

$$\tan(\widehat{DAF} + \widehat{EAB}) = \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}\right) \Big/ 1 - \frac{(a-b)b}{a(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

d'où $\widehat{DAF} + \widehat{EAB} = 45°$

et $\widehat{EAF} = 45°$.

COMMENTAIRES

par l'équipe de rédaction de la brochure

1 - *On devrait accepter une preuve de l'existence de F sur*]DC[*par un raisonnement de type suivant :*

Soit F en D :
Alors $DE > a$ et le périmètre du triangle CFE est strictement supérieur à $2a$.

Soit F en C :
Alors le périmètre du triangle CFE, égal à $2CE$ est strictement inférieur à $2a$.

Si l'on déplace F sur]DC[, de D vers C par exemple, le périmètre de CFE est une fonction continue décroissante de CF.
Il existe donc, sur]DC[, une position de F et une seule, telle que le périmètre de ECF soit égal à $2a$.

2 - *Une telle discussion initiale facilite une rédaction rigoureuse des solutions.*

3 - *On peut regretter la notation*]DC[qui, semble-t-il, n'est plus aux programmes des Collèges, ni de Seconde et Première. Elle aura pu gêner des candidats, voire induire des contre-sens.

4 - Cela étant, il s'agit *d'un joli problème de géométrie*, accessible de diverses façons, le « Solution 3 » étant peut-être la plus classique… et la plus courte !

PALMARÈS

863 candidats, de 81 lycées étaient inscrits. 604, de 78 lycées, ont composé.
Voici leur répartition :
427 garçons et 156 jeunes filles de Première S
7 garçons et 1 jeune fille de Première S.T.I.
13 candidats « mal identifiés ».

L'équipe académique a décerné :
- deux premiers prix, deux deuxièmes prix, trois troisièmes prix et quinze accessits.

UNE INNOVATION

Avec leur **copie corrigée**, les candidats ont reçu, dûment garnie, la fiche de correction reproduite ci-après.
On ne saurait trop louer une telle initiative, qui correspondait à une prise en charge « moyenne » de 21 élèves par correcteur. Transmise par l'intermédiaire des professeurs des candidats *cette fiche permet aussi aux collègues de savoir comment leurs élèves ont été jugés*.

ACADÉMIE DE VERSAILLES

Olympiades académiques de mathématiques

Appréciations du correcteur

Numéro d'anonymat : ....

Nous vous remercions de votre participation aux Olympiades, et nous espérons que vous avez passé un bon moment à chercher ces exercices.

Bilan du travail effectué	**Exercice 1**	**Exercice 2**	**Exercice 3**	**Exercice 4**
Quelques initiatives				
Résultats partiels				
Résultats substantiels				
Travail abouti				
Appréciations particulières du correcteur				

☐ Vous avez tenté quelques démarches qui n'ont pas souvent abouti

☐ Vous avez obtenu des résultats significatifs.

☐ Votre performance est très bonne.

ACADÉMIE de TOULOUSE

ÉNONCÉ

Les nombres entiers de 1 à 2002 sont écrits au tableau. Parmi eux, on choisit deux nombres, on les efface et, à la place de l'un d'eux, on écrit leur différence (le plus grand moins le plus petit), l'autre nombre restant effacé.
On recommence … jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre écrit au tableau.
Ce dernier nombre est-il pair ou impair ?

SOLUTION 1
de l'équipe académique

Soit s la somme des 2002 nombres écrits au départ. Quand on remplace les nombres choisis a et b de la liste par $a - b$ (ou $b - a$), la somme $a + b$ a même parité que $a - b$.
Donc la nouvelle somme s' a même patité que s. Et ainsi à chaque fois.

Donc le dernier nombre écrit qui n'est autre que la dernière somme obtenue a même parité que s.
La somme initiale est impaire, donc le dernier nombre écrit est impair.

SOLUTION 2
(géniale !) d'un élève

Remplaçant pair et impair par positif et négatif, et différence par produit, cet élève a mis en évidence un bel isomorphisme qui lui a permis de remplacer le problème proposé par le problème équivalent du signe d'un produit de 1001 facteurs positifs et 1001 facteurs négatifs … signe que l'on sait négatif.
Le résultat des différences successives sera donc impair.

UNE AUTRE SOLUTION D'ÉLÈVE

Cet élève « remonte » à partir de conjectures sur le résultat final :
Supposons, par exemple, celui-ci pair.
En étudiant les parités des deux parents éventuels, puis celles des quatre grands-parents, et en remontant ainsi les générations, on constate que le nombre d'impairs, aléatoire en lui-même, est toujours pair : chaque impair existant provient d'un impair (associé à un pair) et chaque pair provient de deux impairs ou d'aucun.
La conjoncture initiale exige ainsi qu'il y ait, au départ des 2002 naturels, un nombre pair d'impairs.
Or il y en a 1001 : un raisonnement par contraposée donne la solution du problème.
On aurait pu, aussi, supposer le résultat final impair. En remontant les générations, on aura toujours un nombre impair d'impairs… ce qui correspond aux 1001 naturels impairs de la liste initiale.

COMMENTAIRE

Un joli exercice - à preuve les solutions trouvées par des élèves ! - mais le jury académique signale que « la plupart des candidats ont retranché les nombres dans l'ordre qui leur convenait, par exemple, deux nombres consécutifs, sans comprendre que le raisonnement devait se faire quel que soit le choix des nombres. »
Il conviendrait donc de préciser l'énoncé.

CANDIDATS ET LAURÉATS

Les candidats :
206 candidats : 142 garçons, 64 filles.
344 élèves étaient inscrits, on constate donc de très nombreux absents (est-ce dû à des activités concurrentes ?)
Les candidats sont répartis sur les huit départements : Ariège (4), Aveyron (41), Haute-Garonne (75), Gers (7), Lot (5), Hautes-Pyrénées (13), Tarn (53), Tarn-et-Garonne (8).

Les lauréats :
39 leuréats sont retenus eu égard aux productions. Ils proviennent de 21 lycées (sur les 112 de l'académie). Ils ont donné lieu à :

- 15 prix de « première valeur »,
- 24 prix au titre de la parrticipation.

Tous les lauréats sont de série S, sauf le 16ème (série STI-GM).

Voici les trois premiers :

1er prix :	*Camille MOUCAUD*	lycée Clément Marot, Cahors
2ème prix :	*Amic FROUVELLE*	lycée Rascol, Albi
3ème prix :	*Vincent DEMERY*	lycée Victor Hugo, Colomiers

N.D.L.R. Nous félicitons notre précieux ami Roger DESQ, Président de la Régionale APMEP de Toulouse de 1971 à 1974, Directeur de l'IREM de 1976 à 1978, **toujours sur la brèche pour rendre service, avec efficacité et gentillesse, à l'A.P.M.E.P.,** … en tant que grand-père du lauréat *Amic FROUVELLE* … (sans oublier les parents, professeurs de mathématiques à Albi, et le lauréat lui-même !).

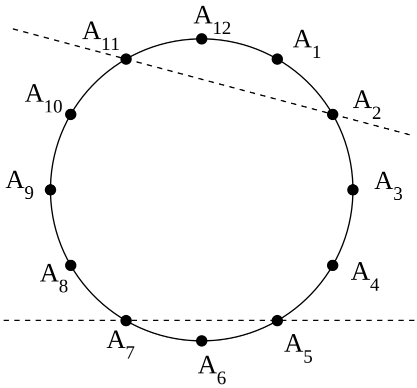
ACADÉMIE de STRASBOURG

ÉNONCÉ

Sur le cadran d'une montre à aiguilles sont placés les points A_1 à A_{12}, associés aux heures correspondantes.

1. Déterminer l'angle géométrique aigu formé par les deux droites (A_2A_{11}) et (A_5A_7).

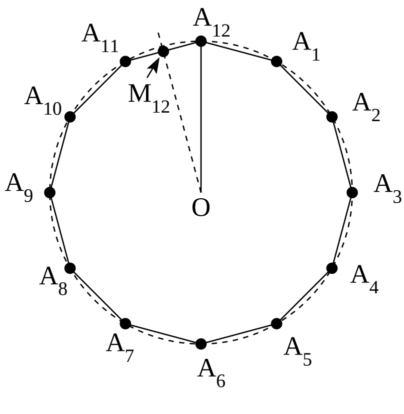
2. Parmi toutes les droites passant chacune par deux des points A_1 et A_{12}, combien de paires donnent le même angle que précédemment ?



SOLUTION

Question 1

La droite (A_5A_7) est parallèle à la droite $(A_{11}A_1)$. Les droites $(A_{11}A_1)$ et $(A_{11}A_2)$ constituent un angle inscrit de sommet A_{11} interceptant l'arc de cercle d'extrémités A_1 et A_2. Sa mesure est donc la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc. Pour le dodécagone, l'angle au centre a une mesure de 30°. Celle de l'angle demandé est donc de 15°.



Question 2 :

Une clé : exploiter quand c'est possible les symétries d'une situation. Ici, pour éviter les risques d'oublier des paires de droites et de compter une même paire plusieurs fois, le plus sûr est de **se ramener au centre *O* du cadran**, qui est centre de symétrie de la figure.
Une droite joignant deux sommets du dodécagone est parallèle soit à une droite joignant O à un sommet du dodécagone, soit à une médiatrice d'un coté du dodécagone. Compte tenu de la symétrie par rapport à O, on peut même n'envisager que les demi-droites d'origine O, comme $[OA_{12})$ et $[OM_{12})$, et se limiter à considérer un demi-cercle (entre A_{12} et A_6 par exemple).
La réponse est 360 (Cf. plus bas).

COMMENTAIRES

1 - Du jury académique

« La première question a été résolue correctement par presque tous les candidats. Il était intéressant de constater la diversité des méthodes utilisées pour calculer l'angle demandé. Le théorème de l'angle inscrit est bien maîtrisé par les élèves.
Le dénombrement de la deuxième question a posé plus de problèmes. Malgré de bonnes idées (dénombrement de droites parallèles, de symétries ou de rotations), les élèves ont de la difficulté à voir s'ils ont tout compté et à s'assurer qu'ils n'ont rien compté plusieurs fois. »

2 - De deux pseudo-élèves

a) Il n'y a pas que “ les élèves ” à éprouver, pour le dénombrement demandé à la deuxième question, les difficultés signalées !
Je me hasarde :
- je prends les demi-droites $[OA_{12})$ et $[OM_{12})$, d'angle imposé.

Il y a 5 droites du type A_iA_j parallèles à (OA_{12})
et 6 droites du type A_iA_j parallèles à (OM_{12}).

Cela ferait donc trente paires de droites faisant l'angle imposé.

- il y a 12 paires de demi-droites telles que $\{[OA_{12}), [OM_{12})\}$ proposant des directions distinctes (j'utilise aussi la symétrie du cercle par rapport à O).

Cela ferait donc $30 \times 12 = 360$ paires de droites A_iA_j faisant entre elles l'angle imposé.

b) Voici le raisonnement de F.L.J., fort voisin :

Il y a 12 couples de droites du type $[(OA_n),(OM_n)]$ formant le même angle 15°, M_n étant le milieu de l'une des arêtes issues de A_n.
A toute paire de droites solution $\{(A_iA_j),(A_kA_l)\}$, j'associe les perpendiculaires à ces deux droites, soit un et seul des 12 couples ci-dessus.

Réciproquement, chaque droite (OM_n) est perpendiculaire à 6 cordes et chaque droite (OA_n) est perpendiculaire à 5 cordes. Donc chaque couple de droites $[(OA_n),(OM_n)]$ définit 30 solutions distinctes, il y a donc $12 \times 30 = 360$ possibilités au total.

PALMARÈS

- 17 lauréats-

Premiers prix :

Ileana JELESCU	lycée des Pontonniers, Strasbourg
Marie CASTERAN	lycée Bartholdi, Colmar

Deuxièmes prix :

François MAILLOT	lycée Scheurer Kestner, Thann
Pierre BEAUREPAIRE	lycée Kléber, Strasbourg
Anne-Catherine SUBLON	lycée Marie Curie, Strasbourg
Antoine FENECH	collège Saint-Etienne, Strasbourg

ACADÉMIE de ROUEN

ÉNONCÉ

Un nombre palindrome est un nombre égal au nombre que l'on obtient en le lisant de droite à gauche ; par exemple : 0, 7, 33, 121, 2002, sont des nombres palindromes.
On les range par ordre croissant à partir de zéro : 0, 1, 2, 3,……, 11, 22,…, 101,….
Quel est le 2002$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?

SOLUTION

Il y a 10 nombres palindromes à 1 chiffre (0, 1,…, 9).
Il y a 9 nombres palindromes à 2 chiffres (11, 22,…, 99).
Il y a 90 nombres palindromes à 3 chiffres (9×10).
Il y a 90 nombres palindromes à 4 chiffres (9×10).
Il y a 900 nombres palindromes à 5 chiffres ($9 \times 10 \times 10$).
Il y a 900 nombres palindromes à 6 chiffres ($9 \times 10 \times 10$).
Au total il y a 1999 nombres inférieurs à 1 000 000.
Le 2000$^{\text{ème}}$ palindrome est 1 000 001. Le 2001$^{\text{ème}}$ palindrome est 1 001 001.
Le 2002$^{\text{ème}}$ palindrome est 1 002 001.

Inspiration : *Jeux Mathématiques 1991* (année palindrome !).

COMMENTAIRE

Voici celui du jury académique, communiqué par André BERROU :

« Cette année, nous avons eu beaucoup moins de participants aux Olympiades car les sujets de la première année avaient été jugés trop difficiles par les élèves (41 participants en 2002 contre 127 en 2001).
Sur les 41 copies corrigées, il y avait 5 très bonnes copies dans lesquelles les 4 exercices avaient été abordés. En ce qui concerne plus précisément le sujet académique sur les nombres palindromes, une bonne dizaine d'élèves a essayé de le résoudre à l'aide des suites arithmétiques alors qu'il suffisait d'un peu de bon sens et d'organisation. Plusieurs élèves ont aussi raté de peu le 2002$^{\text{ème}}$ palindrome (problème de décalage). »

PALMARÈS

1$^{\text{er}}$ prix : *Sébastien FELIX* lycée du Canada, Evreux
2$^{\text{ème}}$ prix : *Chaddaï FOUCHE* lycée François 1$^{\text{er}}$, Le Havre
3$^{\text{ème}}$ prix : *Alexandre LAURENT* lycée Guillaume le Conquérant, Lillebonne

ACADÉMIE de La RÉUNION

ÉNONCÉ

Une cagnotte contient autant de pièces de 1 euro et de 2 euros que nécessaire.

On prélève dans cette cagnotte une somme de 5 euros : cela peut se faire en utilisant cinq pièces de 1 euro et deux pièces de 2 euros.

Les cinq pièces de 1 euro, alignées sur la table, donnent le nombre 11111 ; les trois pièces de 1 euro et la pièce de 2 euros donnent les nombres 1112, 1121, 1211, 2111 ; enfin, la pièce de 1 euro et les deux pièces de 2 euros donnent les nombres 122, 212, 221. Au total, on obtient donc huit nombres différents.

Pour résumer la situation, on dira que la somme de 5 euros génère huit nombres différents, ce que l'on note : $S_5 = 8$.

Que vaut alors S_{11} ?

SOLUTION

Pour une somme n ($n > 2$), les nombres obtenus se terminant tous par 1 ou 2, on peut donc les regrouper en deux sous-ensembles qui forment une partition de l'ensemble à dénombrer. Or, il y a autant de nombres se terminant par 1 que de nombres obtenus par une somme $n - 1$, à savoir S_{n-1} et il y a autant de nombres se terminant par 2 que de nombres obtenus par une somme $n - 2$, à savoir S_{n-2} . Donc $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ (on reconnaît la suite de Fibonacci). En calculant S_1 et S_2, les élèves devraient arriver, de proche en proche, à S_{11}.

Remarque : la relation $S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$ valable pour tout $n \geqslant 1$ ($S_0 = 1$, puisqu'avec 0 euro, on obtient un nombre : 0) et qui s'obtient en passant par l'équation caractéristique fournie par la relation de récurrence et en tenant compte des valeurs initiales, est inaccessible aux élèves !

COMMENTAIRE

La loi de formation des nombres ne prédispose pas à s'intéresser particulièrement au seul dernier chiffre de S_n.

Peut-être pourrait-on aussi remarquer que l'on obtient S_n avec adjonction d'un euro à partir de S_{n-1} et de deux euros à partir de S_{n-2}. Donc on devrait retrouver S_{n-1} et S_{n-2} dans S_n en supprimant 1 ou (exclusif) 2 dans chaque nombre. pour faire jouer l'exclusivité, on supprime 1 ou 2 **au même emplacement**, que ce soit le dernier chiffre, ou l'avant-dernier, ou …

Tout cela ne semble pas s'imposer d'emblée.
L'exercice relève alors de la bonne démarche scientifique : expérimentons, essayons !
Laissons S_0 fort artificiel, mais formons les S_1, S_2, S_3, S_4,…(nous avons déjà le S_5).
La suite de Fibonacci apparaît alors naturellement, d'autant que cette suite devrait bien faire partie de la culture d'un élève de Première…

Une question : que dire d'une copie où, des exemples initiaux, on induit sans autre explication $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ pour en déduire S_{11} ?

ACADEMIE de RENNES

ÉNONCÉ

Le mathématicien italien Rafael Bombelli (1526-1572) a proposé dans un traité d'algèbre publié en 1572 une méthode permettant de calculer les racines carrées.

Description de la méthode par Bombelli.

« Admettons d'abord que, si nous voulons trouver une racine approximative de 13, celle-ci sera 3 et le reste 4. Ce reste doit être divisé par 6 (le double du 3 donné avant) ce qui donne 2/3. C'est la première fraction qui doit être ajoutée au 3, faisant 3 2/3 qui est la racine approchée de 13. Comme le carré de ce nombre est 13 4/9, c'est trop grand de 4/9.
Si quelqu'un veut une meilleure approximation, le 6, qui est le double du 3, doit être ajouté à la fraction 2/3 donnant 6 2/3. Avec ce nombre on doit diviser 4, qui est la différence entre 9 et 13. Le résultat est 3/5 qui, ajouté à 3 fait 3 3/5. C'est une meilleure approximation de la racine carrée de 13 parce que son carré est 12 24/25, qui est plus proche que celui de 3 2/3. Mais si je veux une meilleure approximation, j'ajoute cette fraction au 6 faisant 6 3/5, divisant 4 par cela et obtenant 20/33. Ceci doit être ajouté au 3 comme précédemment, faisant 3 20/33. C'est une meilleure approximation parce que son carré est 13 4/1089 qui est trop grand de 4/1089. »

Explication de la méthode par Bombelli.

« Etant donné que, si on a à trouver la racine la plus proche de 13, le carré de l'entier le plus proche est 9 et la racine est 3, alors je pose que la racine la plus proche de 13 est 13 + 1 inconnue *et que son carré est 9 + 6* inconnue + *1 carré de l'*inconnue. *Et ils ont seulement égalé 6* inconnue *à 4, de sorte que l'inconnue vaudrait 2/3 et on fait que l'approximation vaudrait 3 2/3, parce que la supposition 3 + 1 inconnue vient à être 3 2/3.*

Mais voulant encore tenir compte du carré de l'inconnue, l'inconnue, valant 2/3, le carré de l'inconnue vaudra 2/3 de l'inconnue qui étant ajouté au 6 inconnue du début, donnera : 6 2/3 de l'inconnue égale à 4, que je résous. L'inconnue vaudra 3/5 et parce qu'il a été posé 3 + 1 inconnue, on aura 3 3/5 ; et l'inconnue valant 3/5, le carré de l'inconnue vaudra 3/5 de l'inconnue et on aura 6 3/5 de l'inconnue égale à 4. C'est ainsi que l'on voit d'où naissent les règles vues ci-dessus. »

Questions :

1) Seriez-vous capable de poursuivre le procédé ?
De l'appliquer à un autre nombre ?

2) Quelles questions mathématiques pertinentes peut-on se poser sur la méthode ?
On ne vous demande pas nécessairement de répondre aux questions que vous vous posez et on privilégiera la pertinence mathématique des questions à leur nombre.

SOLUTION

L'idée réécrite de la méthode est de constater que la racine de 13 est de la forme $(3 + \alpha)$, α étant à chercher par une succession d'opérations.

On écrit $(3 + \alpha)^2 = 13$
et dans le développement de la parenthèse : $9 + 6\alpha + \alpha^2 = 13$.

On néglige α^2 d'où une première égalité : $9 + 6\alpha = 13$,

et on obtient $\alpha_1 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

On réintroduit la valeur trouvée dans l'égalité $6\alpha + \alpha^2 = 4$,

mais pour partie « seulement » en écrivant : $\left(6 + \dfrac{2}{3}\right)\alpha = 4$

d'où une valeur $\alpha_2 = \dfrac{3}{5}$

et ainsi de suite, on obtient la suite des nombres du texte, la valeur demandée dans le texte étant $\alpha_4 = \dfrac{66}{109}$.

- On passera ici l'application à un autre nombre…
- Les questions auxquelles on pouvait penser étaient liées, bien entendu, à l'approximation, à la convergence des suites, éventuellement à la vitesse de convergence… A dire vrai il y a eu peu de questions !

COMMENTAIRE
de François Lo Jacomo

Je trouve intéressant de confronter les élèves à un texte mathématique ancien, montrant à quel point les notations algébriques peuvent clarifier l'expression.

Parmi les questions possibles, outre bien évidemment la notion de suite et de convergence géométrique (chaque terme est au moins deux fois plus près de la racine carrée que le précédent, alternativement supérieur et inférieur à la racine carrée), le procédé est-il utilisable tel quel, quel que soit le nombre de départ ? Si le nombre

n de départ est un entier, les approximations ainsi obtenues sont-elles les meilleures approximations rationnelles de n ?

Car enfin, même si cela dépasse le niveau de Première, il me semble possible de remarquer que cette méthode introduit implicitement le développement d'une fonction en fraction continuée.

En effet, la première approximation proposée $(a^2 + x)$ est $a + \dfrac{x}{2a}$,

la seconde : $$a + \cfrac{x}{2a + \cfrac{x}{2a}},$$

la troisième :

$$a + \cfrac{x}{2a + \cfrac{x}{2a + \cfrac{x}{2a}}}$$

et ainsi de suite …

Une des questions à laquelle on pouvait aussi penser était : existe-t-il d'autres fonctions de la racine carrée qui se développent simplement en fraction continuée ? … ou en fraction du type :

$$x/(1 - x^2/(3 - x^2/(5 - x^2/(7 - x^2/\ \ldots\ ))))) = \tan x.$$

ACADÉMIE de REIMS

ÉNONCÉ

On considère le nombre décimal $N = 0,\underbrace{9999\ldots\ldots9}_{\text{mille fois le chiffre 9}}$

Quels sont les deux mille premiers chiffres après la virgule de l'écriture décimale du nombre $\sqrt{N}$?

SOLUTION 1

Paul-Louis HENNEQUIN

Posons : $N = 1 - 10^{-1000} = X^2$ avec $X > 0$, puis $X = 1 - \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$.
Alors : $X^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2$ et $2\alpha - \alpha^2 = 10^{-1000}$ ou $\alpha(2 - \alpha) = 10^{-1000}$.

$2 - \alpha > 1$ implique $\alpha = \dfrac{10^{-1000}}{2-\alpha} < 10^{-1000}$

donc $\dfrac{\alpha^2}{2} < \dfrac{10^{-2000}}{2}$

de $\alpha = \dfrac{\alpha^2}{2} + \dfrac{10^{-1000}}{2}$ on déduit $\dfrac{10^{-1000}}{2} < \alpha < \dfrac{10^{-1000}}{2} + \dfrac{10^{-2000}}{2}$

d'où $0,\underbrace{9\ldots\ldots9}_{\substack{1000\\\text{neufs}}}4\underbrace{9\ldots\ldots9}_{\substack{999\\\text{neufs}}}5 = 1 - 5\times10^{-1001} - 5\times10^{-2001} < X < 1 - 5\times10^{-1001}$

$= \underbrace{9,9\ldots\ldots9}_{\substack{1000\\\text{neufs}}}5$

X a donc pour 2 000 premières décimales : $\underbrace{9\ldots\ldots9}_{1000}\ 4\ \underbrace{9\ldots\ldots9}_{999}$

SOLUTION 2

par Daniel REISZ

(*Dans le texte ci-après, le N de l'énoncé est remplacé par n*)

Etude expérimentale et émission d'une conjecture

Avec une calculatrice, si on considère les nombres n de la forme 0.99…9 avec k décimales, on obtient :

$$
\begin{array}{llll}
\sqrt{0.9} & = 0.948\ldots & \approx & 0.95 \\
\sqrt{0.99} & = 0.99498\ldots & \approx & 0.9950 \\
\sqrt{0.999} & = 0.9994998\ldots & \approx & 0.999500 \\
\sqrt{0.9999} & = 0.999949998\ldots & \approx & 0.99995000 \\
\sqrt{0.999999} & = 0.9999949998\ldots & \approx & 0.9999950000
\end{array}
$$

où la première colonne de résultats représente les $2k$ premières décimales et la seconde, l'approximation à 10^{-2k} près.

On peut donc raisonnablement émettre la conjecture suivante :

- les 2000 premières décimales de $\sqrt{n}$ sont : 1000 chiffres 9, suivis d'un 4, suivi de 999 chiffres 9 ;
- l'approximation à 10^{-2000} près de $\sqrt{n}$ est le nombre 0.999…95000…0, c'est-à-dire 1000 chiffres 9, un 5, suivi de 999 chiffres 0.

Une démonstration

L'idée de base consiste à écrire $n = 0.999\ldots9$ (1000 décimales) sous la forme :

$$n = 1 - 10^{-1000} = 1 - \varepsilon \qquad \text{avec} \quad \varepsilon = 10^{-1000}$$

Alors $\sqrt{n} = \sqrt{1-\varepsilon} = 1 - \alpha$ où α est « petit »

Observons alors que $(1-\alpha)^2 = 1 - \varepsilon$ fournit $1 - 2\alpha + \alpha^2 = 1 - \varepsilon$

soit encore $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2} + \alpha^2$ (R)

Comme α est « petit », α^2 est « petit au carré » et on peut donc raisonnablement poser : $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2}$

On retrouve ainsi l'approximation classique, mais non connue d'un élève de première,

$$\sqrt{1-\varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } \varepsilon \text{ petit}$$

et $1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$

fournit l'approximation : $\sqrt{n} \approx 0.999\ldots95$ avec 1000 chiffres 9 suivis d'un 5.

Cherchons maintenant à préciser la qualité de cette approximation et, ainsi, à justifier les conjectures émises plus haut. La relation (R) montre que l'approximation de $\sqrt{1-\varepsilon}$ par $1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ est une approximation par excès.

Essayons donc de majorer $\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) - \sqrt{1-\varepsilon}$

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\sqrt{1-\varepsilon}=\frac{\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\sqrt{1-\varepsilon}\right]\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\sqrt{1-\varepsilon}\right]}{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\sqrt{1-\varepsilon}}$$

$$=\frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\sqrt{1-\varepsilon}}\leqslant\frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{2\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}=\frac{\varepsilon^2}{8\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\leqslant\frac{\varepsilon^2}{7}\leqslant 10^{-2000}$$

Cela permet d'abord d'affirmer que *l'approximation* trouvée à l'aide de $1-\frac{\varepsilon}{2}$ est une approximation à 10^{-2000} près. Mais l'étude expérimentale initiale, à l'aide de la calculatrice, nous met la puce à l'oreille : les 2000 premières décimales de $\sqrt{n}$ ne sont pas 1000 chiffres « 9 », un « 5 » et 999 chiffres « 0 », mais devraient être 1000 chiffres « 9 », suivis d'un « 4 », suivi de 999 chiffres « 9 » :

0,999…994999…999

Ceci est par ailleurs justifié au plan théorique par le fait que l'approximation de $\sqrt{n}$ par $1-\frac{\varepsilon}{2}$ est une approximation par excès.

COMMENTAIRE GÉNÉRAL

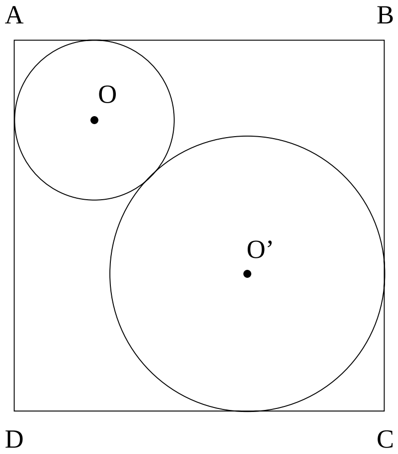
Le sujet est joli mais le travail sur des approximations toujours délicat.

Il aurait été intéressant de connaître le corrigé proposé par le jury académique et, plus encore, les réactions des candidats et leurs prestations.

ACADÉMIE de POITIERS

ÉNONCÉ

Soit un carré *ABCD* de coté *a*. Un cercle Γ intérieur au carré est tangent à (*AB*) et (*AD*). Un second cercle Γ', intérieur au carré, est tangent extérieurement à Γ ainsi qu'aux droites (*CB*) et (*CD*).
Soit *S* la somme des aires des cercles Γ et Γ' : qu'elles sont les valeurs maximale et minimale de *S* ?



SOLUTION 1

Les centres *O* et *O'* des cercles étant à égale distance des côtés *AB* et *AD* pour l'un et des côté *CB* et *CD* pour l'autre, les centres des deux cercles sont situés sur la diagonale *AC* et les rayons *r* et *r'* des cercles vérifient

$$OA + r + r' + OC = a\sqrt{2}$$

$$(r + r')(1 + \sqrt{2}) = a\sqrt{2}$$

c'est-à-dire :

$$r + r' = a(2 - \sqrt{2})$$

Les cercles étant situés à l'intérieur d'un carré de coté *a*, leurs rayons restent inférieurs à $\frac{a}{2}$. On en déduit que chaque rayon appartient à l'intervalle

$$\left[a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right), \frac{a}{2}\right].$$

La somme des aires des deux cercles est

$$\begin{aligned} S &= \pi\,(r^2 + r'^2) \\ &= \frac{\pi}{2}\left[(r + r')^2 + (r - r')^2\right] \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\left(6 - 4\sqrt{2}\right)a^2 + (r - r')^2\right] \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que cette aire est minimale quand $r = r' = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

et vaut alors $S_{\min} = \pi(3 - 2\sqrt{2})a^2$.

Et qu'elle est maximale quand r est maximal et r' minimal (ou inversement) c'est-à-dire quand $r = \frac{a}{2}$ et $r' = a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$.

On obtient alors

$$\begin{aligned} S_{\max} &= \frac{\pi}{2}\left[\left(6 - 4\sqrt{2}\right)a^2 + \left(-1 + \sqrt{2}\right)^2 a^2\right] \\ &= \pi\left[\frac{9}{2} - 3\sqrt{2}\right]a^2 \end{aligned}$$

SOLUTION 2

on peut calculer S en fonction du rayon r et étudier les variations de S quand r décrit l'intervalle $\left[a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right), \frac{a}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} S(r) &= \pi\left(r^2 + r'^2\right) = \pi\left(r^2 + \left[\left(2 - \sqrt{2}\right)a - r\right]^2\right) \\ &= \pi\left(2r^2 - \left(4 - 2\sqrt{2}\right)ar + \left(6 - 4\sqrt{2}\right)a^2\right) \\ S'(r) &= \pi\left(4r - \left(4 - 2\sqrt{2}\right)a\right) \end{aligned}$$

La dérivée S' s'annule pour $r = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La fonction S est donc décroissante sur l'intervalle $\left[a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right), a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{a}{2}\right]$.

La fonction S atteint son minimum en $a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et

$$S_{\min} = \pi\left[a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$
$$= \pi a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

La fonction S atteint son maximum pour $r = a\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$ ou pour $r = a/2$ et, en raison des rôles symétriques joués par les deux cercles, les valeurs atteintes pour $r = a\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$ et pour $r = a/2$ sont les mêmes et valent

$$S_{\max} = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \left[\left(2-\sqrt{2}\right)a - \frac{a}{2}\right]^2\right)$$
$$= \pi\left(\frac{9}{2} - 3\sqrt{2}\right)a^2$$

SOLUTION 3 (variante de la 1)

par Henri Bareil

La première méthode est évidemment la plus simple. Elle repose sur le constat fondamental de l'invariance de la somme $r + r'$, propriété qui conduit à faire intervenir $(r + r')$ dans $r^2 + r'^2$.
La démarche alors choisie par la méthode 1 est **excellente**.

En voici une autre, proche parente, moins du domaine des programmes, mais de portée peut-être plus générale.

$S = \pi[(r + r')^2 - 2rr']$.
Etudier la variation de S revient à étudier celle de rr', donc du *produit de deux nombres dont la somme est constannte*.

Cela relève d'un théorème (qui n'est à aucun programme, me semble-t-il, de collège ou lycées). Mais ce théorème est si simple, si facile à démontrer, d'intervention si fréquente, et si facilement mémorisable, qu'il est fort regrettable de ne pas le faire pratiquer.
S'il est connu, la conclusion est immédiate quant au maximum et au minimum de S.

Sinon, démontrons-le :
Lorsque $x + y = 2m$, constante, divers essais, géométriques, avec x et y positifs, numériques dans tous les cas, laissent présager que, par exemple, xy est maximum quand $x = y = m$.
Posons donc $x = m - d$ et $y = m + d$.
Alors : $xy = m^2 - d^2$.
De là, deux théorèmes :

Théorème : Deux nombres de somme constante ont leur produit maximum quand ils sont égaux ou qu'ils se rapprochent le plus possible de l'égalité.

Corollaire : Deux nombres de même signe et de somme constante ont leur produit minimum quand l'un d'eux vaut zéro (ce qui est évident) ou qu'il s'en rapproche le plus possible.

D'où, immédiatement, les conclusions pour notre problème d'Olympiades.

Remarques :

1 - Les théorèmes ci-dessus énoncés se démontrent d'autres façons (ainsi à partir de l'équation du second degré ou à partir d'aires de rectangles comparées à l'aire du « carré-champion » - possible dès la sixième-). La méthode ci-dessus est pratiquable dès que l'on sait que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ et, à partir d'exemples, conjecturer … (ce qui ne doit pas attendre la Quatrième) !).

2 - Dans notre problème d'Olympiades, il fallait faire attention au fait qu'on ne peut pas avoir $r = 0$. Cela justifie, pour sa fin, l'énoncé du corollaire).

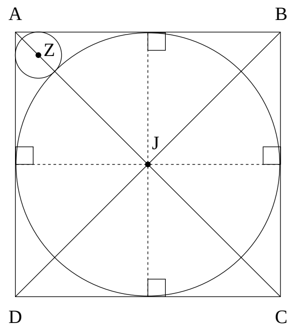
3 - Le théorème a des interprétations fort classiques :
« Des deux rectangles de même périmètre, celui qui a l'aire la plus grande est celui qui se rapproche le plus de la forme carrée ». Etc.
Il peut se généraliser à des polygones… et, de là, à un disque qu'il fait prévaloir comme, à périmètre égal, la surface d'aire maximale…

SOLUTION 4
par Henri Bareil

Soit $r \leqslant r'$ (supposition qui n'entame pas la généralité des cas)
Si r augmente (ou diminue) de d,
r' diminue (ou, respectivement, augmente) de d.

Etudier S revient à comparer les aires des deux couronnes circulaires induites par ces variations.

Or une couronne circulaire dont les frontières sont des cercles de rayons R et $R \pm d$, possède une aire égale à $\pi(d^2 \pm 2Rd)$.
De deux couronnes circulaires d'égale « épaisseur », celle dont l'aire est la plus grande est celle qui met en jeu les plus grands cercles.
Avec $r \leqslant r'$ on en déduit que, quand r augmente, et, donc, que r' diminue d'autant, toujours avec « nouvel $r \leqslant$ nouvel r' »,
S perd plus qu'elle ne gagne.

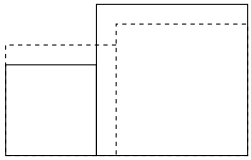


S est donc minimale quand $r = r'$ et S est maximale quand r' est le plus grand possible, ce qui correspond à la figure ci-contre où le cercle C' est inscrit dans le carré.

Alors $r' = a/2$. Etc.

Remarque

La somme des aires des deux disques est $\pi(r^2 + r'^2)$.



Elle varie comme $r^2 + r'^2$, qui peut figurer la somme des aires de deux carrés, par exemple disposés comme dans la figure ci-contre où les pointillés indiquent ce que perd le grand carré et ce que gagne le petit avec une variation x de valeur algébrique opposée à celle de r'. La comparaison est immédiate ! … et remplace avantageusement le travail sur les couronnes circulaires…

COMMENTAIRE GÉNÉRAL SUR LES DIVERSES MÉTHODES

La « Solution 2 », par la dérivée, fait un peu grosse artillerie. Elle n'en a pas moins son intérêt, notamment par la réduction initiale à une fonction d'une variable.

Les autres méthodes sont praticables dès le Collège. Elles permettent de réinvestir des propriétés élémentaires concernant un carré, et sa diagonale, les tangentes à un cercle, et celles issues d'un même point, l'aire d'un disque, éventuellement celle d'un carré.

Elles montrent l'intérêt des relations entre $a^2 + b^2$, $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, éventuellement celui de $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Elles soulignent que, quand la traduction (ici, numérique) *de la situation aboutit à un résultat simple,* en exergue de façon inattendue, (ici $r + r'$ = constante), *il s'agit de l'exploiter* !

Voilà donc un problème élémentaire fort agréable, à divers niveaux, par les associations de pensée fondamentales mises en jeu… Un bon problème pour « apprendre », si l'on se donne la peine de dégager ce qui pilote les calculs, donc de les « penser » avant de s'y livrer…

REMARQUES DU JURY ACADÉMIQUE

1 - Sur l'ensemble de l'épreuve

« Cette année, le niveau des exercices présentés est beaucoup plus raisonnable que l'année précédente et cela s'est manifesté déjà le jour de l'épreuve où les candidats sont restés jusqu'à la fin des quatre heures.
A la correction, on constate également une meilleure adéquation entre le niveau des épreuves et celui des candidats : toutes les questions, à l'exception de la dernière question du dernier exercice, ont été abordées avec succès par plusieurs candidats ».

1 - Sur l'exercice de l'Académie

« Le point de départ de la résolution consistait à remarquer la relation algébrique simple liant les rayons des deux cercles et la longueur de la diagonale des carrés. Cette relation n'a été établie que par les meilleurs candidats.
La suite consistait alors à étudier les variations d'un polynôme du second degré sur

un intervalle convenable, à déterminer avec précision, ce qui n'a été fait que dans les meilleures copies ».

PROLONGEMENTS OU VARIANTES DE L'ÉNONCÉ

par Henri Bareil

1 - Dans l'énoncé des Olympiades, on peut remplacer la condition « cercles tangents extérieurement » par « cercles dont les centres sont à une distance donnée ».

2 - On peut remplacer les cercles par d'autres figures. Par exemple : des losanges avec une diagonale portée par [*AC*], un sommet commun *T* sur [*AC*] pour l'un des losances, un sommet sur [*BC*] pour l'autre.
Quelle condition, nécessaire et suffisante, remplissent ces losanges pour que la somme de leurs diagonales selon [*AC*] soit cconstante ?
[*Réponse* : il faut et il suffit qu'ils soient semblables - avec les mêmes angles pour leurs sommets respectivement sur [*AB*] et [*BC*]].
Cela étant, on peut étudier la somme de leurs aires, comme dans l'énoncé des Olympiades.

3 - On pourrait partir des cercles, construire le carré associé et s'interroger sur son aire, selon le choix des cercles, lorsque $r + r'$ est constant…(cette aire ne varie pas), puis s'interroger sur l'aire du carré non couverte par les disques…

PASSATION DE L'ÉPREUVE

Statistiques :

Centre d'épreuve	**Inscrits**	**Présents**
Angoulème	15	11
Rochefort	19	17
Niort	7	3
Poitiers	40	35
Total	**81**	**66**

Il faut noter une forte diminution du nombre de participants à cette session 2002. La difficulté des sujets de 2001 a sans doute été dissuasive, mais surtout, il semble difficile de motiver des élèves de Première pour des exercices de réflexion totalement différents de ceux qu'ils rencontrent lors de leur scolarité « classique » et cette motivation ne peut être obtenue que par leur enseignant, si celui-ci l'est déjà suffisamment.
D'autre part, si, en général, le nombre de participants est voisin du nombre des inscrits, il faut tout de même noter l'importance du nombre d'absents en Deux-Sèvres (4 absents sur 7 inscrits) due en particulier au fait que les candidats de Bressuire ne se sont pas déplacés à Niort.»

PRIX

Les 8 copies jugées les meilleures ont été classées. Voici les trois premiers lauréats :

1er prix :	*Nicolas MERCADIER*	lycée Aliénor d'Aquitaine, Poitiers
2ème prix :	*Benoît CHAUMET*	lycée M. Berthelot, Chatellerault
3ème prix :	*Laetitia BROTTIER*	lycée Camille Guérin, Poitiers

ACADÉMIE de PARIS

ÉNONCÉ

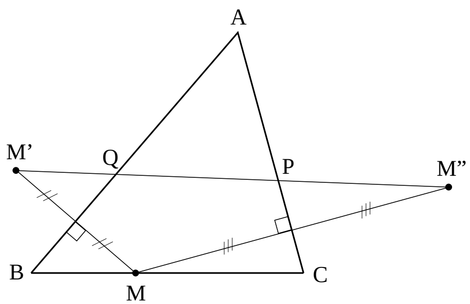
Un terrain de sport a la forme d'un triangle quelconque à angles aigus et l'épreuve de course de vitesse est la suivante :
Le coureur part d'un point de son choix sur l'un des côtés du triangle et se dirige vers un point de son choix sur un autre côté. De là il fait de même pour le troisième côté et revient enfin à son point de départ où son temps est relevé…
Bien que courant moins vite que les autres, le dénommé Jules-César FAGNANO (*) a remporté l'épreuve car il est le plus malin : il a trouvé le chemin le plus court. Quel est ce chemin ?

(*) Giulio-Cesare FAGNANO, mathématicien italien (1682-1766).

SOLUTION

Ce problème peut se résoudre par des symétries axiales.

Soit M' le symétrique de M par rapport à (AB) et M'' le symétrique de M par rapport à (AC).



On a alors : $MP + PQ + QM = M''P + PQ + QM'$ et ce trajet est minimal si et seulement si M', P, Q et M'' sont alignés.

Le triangle $AM'M''$ est isocèle ($AM = AM' = AM''$) et l'angle $\widehat{M'AM''}$ est constant (égal au double de l'angle $\widehat{BAC}$).
$M'M''$ est donc minimal si et seulement si AM' l'est, ce qui est équivalent à AM minimal donc à M pied de la hauteur issue de A.
De la même façon, P et Q sont les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement.
En conclusion, le trajet est minimal si et seulement si M, P et Q sont les pieds des

trois hauteurs du triangle *ABC*.

COMMENTAIRES

1. La méthode proposée n'est évidemment pas la seule : cf. par exemple, celle indiquée par Brigitte SÉNÉCHAL dans son livre « *Groupes et géométries* »*
mais cette méthode semble, et de loin, la plus simple. Sa méthode de base : déployer le triangle *MPQ*, en ses côtés, selon un seul segment. Il s'agit vraiment d'une « méthode » ! S'en souvenir !

2. Le triangle *MPQ* de périmètre minimal reçoit l'appellation de « triangle orthique » de *ABC*.
On démontre aisément que l'orthocentre de *ABC* est le centre du cercle inscrit dans le triangle orthique (ou d'un cercle ex-inscrit, si *ABC* a un angle obtus).

3. L'énoncé indique clairement qu'il s'agit d'un « problème de FAGNANO », résolu par ce mathématicien.
Ce problème était, naguère, ultra-classique : il commençait la généralisation du célèbre problème, souvent « habillé » : *A* et *B* sont dans un même demi-plan de frontière Δ. Où choisir *M*, sur Δ, pour que $MA + MB$ soit minimale ?
Le choix d'un problème classique, pour les Olympiades, a des inconvénients : des candidats le connaissent …, est-ce encore, pour eux, un « problème »?
Il a aussi des avantages si (et seulement si ?) l'on regarde d'autres concours, tels les Olympiades Internationales : il incite les candidats à cultiver des « classiques », ce qui leur donne un capital de base d'autant plus intéressant qu'ils sauront appréhender des méthodes…
Au comité de pilotage des Olympiades de Première d'en débattre !

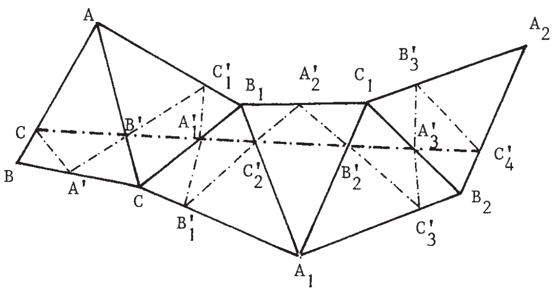
Mais peut-être ce débat n'a-t-il pas lieu d'être : le jury académique de Paris signale que « très peu de copies ont abordé cet exercice »…

---

* N.D.L.R. : Brigitte Sénéchal : « *Groupes et géométries* »
Ed. Hermann - 1979 - pages 40-41.

Sa méthode utilise - Cf. figure ci-après - une succession de rabattements et l'égalité qui s'ensuit : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_2A_2}$.

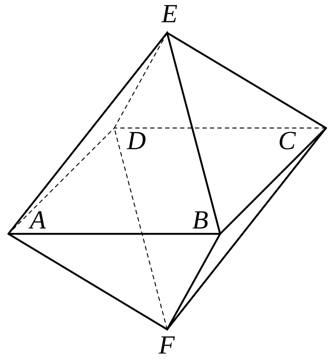
D'où la figure finale :



ACADÉMIE d'ORLÉANS-TOURS

ÉNONCÉ

Deux pyramides de même base carrée $ABCD$, de sommets respectifs E et F distincts, sont accolées par leur base et forment un octaèdre régulier, c'est-à-dire un solide formé de huit faces identiques qui sont des triangles équilatéraux. On suppose que $AB = 1$.
Montrer que les faces ABE et CDF sont parallèles et déterminer leur distance, c'est-à-dire la plus courte distance d'un point du plan ABE à un point du plan CDF.



CORRIGÉ

En notant I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$, les segments $[EI]$, $[EJ]$, $[FI]$ et $[FJ]$ sont alors des hauteurs d'un triangle équilatéral de côté 1 : ils mesurent tous $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Par suite, $EIFJ$ est un losange.

Il en résulte que les droites sécantes (AB) et (EI) du plan (ABE) sont respectivement parallèles aux droites (CD) et (FJ) du plan (CDF) : ces deux plans sont donc parallèles.

Puisque le losange $EIFJ$ est dans le plan médiateur des segments $[AB]$ et $[CD]$, la distance entre les deux plans (ABE) et (CDF) est aussi la hauteur h du losange.

Or les diagonales du losange $EIFJ$ mesurent $IJ = 1$ et $EF = \sqrt{2}$ (c'est la diagonale du carré $AECF$) :

il a donc pour aire $\mathcal{A} = \frac{1}{2} EF \times IJ = EI \times h$, ce qui donne $h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

COMMENTAIRES

Encore un heureux exercice de géométrie dans l'espace, à partir d'un solide simple, et à questions progressives.

PASSATION DE L'ÉPREUVE

Les candidats inscrits, issus de 23 lycés publics ou privés de l'académie, étaient au nombre de 130.
Seuls 98 ont composé le 27 mars 2002, dans 9 centres avec le souci d'offrir une bonne proximité.

Voici les premiers lauréats, sur 21 primés :

1er prix :(ex æquo)	*Jean-Baptiste ROFFET*	lycée Ste Marie - Blois
	Tancrède ARGUILLERE	lycée Notre Dame des Aydes - Blois
2ème prix :	*Manuel COLLONGUES*	lycée en Forêt - Montargis.

ACADÉMIE de NICE

ÉNONCÉ

Un ensemble $\mathbb{E}$ de nombres entiers positifs ou nuls possède les deux propriétés suivantes :
a) Chaque fois qu'un nombre x appartient à $\mathbb{E}$, on est sûr que $2x^3 + 2$ appartient à E.
b) Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{E}$, leur différence, si elle est positive ou nulle, est aussi un élément de $\mathbb{E}$.

1) Dans cette question, on suppose que 2 est un élément de $\mathbb{E}$:
- montrer que 18 appartient à $\mathbb{E}$,
- montrer que 0 appartient à $\mathbb{E}$,
- est-ce que 2002 appartient à $\mathbb{E}$?

2) Dans cette question, on suppose que $\mathbb{E}$ contient au moins un élément (que l'on ne précise pas). Est-ce que 2002 appartient à $\mathbb{E}$?

SOLUTION

1) • L'application de la propriété a) donne $18 \in \mathbb{E}$.
• L'application de la propriété b) donne $2 - 2 = 0$, donc $0 \in \mathbb{E}$.
• Peut-on atteindre rapidement 2002 par $2x^3 + 2$?
Oui pour $x = 10$.
Reste donc à savoir si $10 \in \mathbb{E}$.
Comme $18 \in \mathbb{E}$ et $2 \in \mathbb{E}$, par b) : $18 - 2 \in E$, soit $16 \in \mathbb{E}$.
De même $16 - 2$, $14 - 2$, $12 - 2$, et voilà : $10 \in \mathbb{E}$.
Donc $2002 \in \mathbb{E}$.
2) Soit p un élément de $\mathbb{E}$.
L'application de b) donne $p - p = 0$, $0 \in \mathbb{E}$.
En appliquant a) à 0, on obtient $2 \in \mathbb{E}$, ce qui ramène à la question 1.

COMMENTAIRES

1) L'ensemble énoncé-solution nous a été aimablement communiqué par Abderrahim OUARDINI qui précise ceci :
« J'avais soumis ce problème au comité d'Olympiade sous la version originale :
« Soit $\mathbb{E}$ une partie non vide de l'ensemble des entiers naturels qui vérifie les propriétés suivantes :
i) Si $x \in \mathbb{E}$, alors $2x^3 + 2 \in \mathbb{E}$.
ii) Si $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$ avec $x \geqslant y$, alors $x - y \in \mathbb{E}$.
A-t-on $2002 \in \mathbb{E}$? Justifiez votre réponse. »

Une intéressante discussion a montré que les candidats pourraient se heurter à la difficulté, $\mathbb{E}$ étant non vide, de nommer un élément de $\mathbb{E}$, et d'utiliser la condition ii) pour un choix adéquat de x et y ; ce qui permet de montrer que 0 appartient à $\mathbb{E}$…».

2) Voilà un sujet original, simple, astucieux…

3) Abderrahim Ouardini nous a également envoyé les deux textes ci-après (nous l'en remercions vivement).

COMPORTEMENT DES CANDIDATS

C'était le problème le plus abordé et le mieux réussi avec 44,2% (éventuellement quelques copies comportant parfois des défauts mineurs) et qui a permis à plusieurs élèves de mettre en évidence des qualités de raisonnement (recherche, tâtonnement, …). Certains ont résolu l'équation $2x^3 + 2 = 2002$ pour, enfin, découvrir l'écriture $2002 = 2 \times 10^3 + 2$. D'autres ont montré que $11\,666 \in \mathbb{E}$ pour conclure que tous les nombres pairs compris entre 0 et 11 666 appartiennent à $\mathbb{E}$.

Un candidat, pour la question 2) a raisonné de la manière suivante : « On nomme A un élément (non précisé) de $\mathbb{E}$. On a : $2A^3 + 2 \in \mathbb{E}$, donc :

$$2A^3 + 2 - A \in \mathbb{E},\ (2A^3 + 2 - A) - A \in \mathbb{E},\ \dots,\ 2A^3 + 2 - nA \in \mathbb{E},$$

pour tout entier naturel n vérifiant $2A^3 + 2 \geqslant nA$, ainsi pour $n = 2A^2$, on obtient :

$$2A^3 + 2 - 2A^3 \in \mathbb{E}\dots$$ ».

Mais l'important, c'est de chercher !

PROLONGEMENTS

Plus loin (cf. 3), on va montrer que les seules parties qui vérifient les conditions du problème sont $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$.

Les conditions i) et ii) sont bien indépendantes. On peut en effet trouver une infinité d'ensembles $\mathbb{E}$ satisfaisant à l'une des conditions et non à la deuxième.

1) *Ensembles vérifiant ii) et non i)*

Soit a un entier supérieur ou égal à 3, posons $\mathbb{E} = a\mathbb{N}$ (ensemble des multiples de a). Il est clair que la condition ii) est vérifiée.
Soit $x \in \mathbb{E}$, x est de la forme $x = ak$ ($k \in \mathbb{N}$), on a $2x^2 + 21 = a(2a^2k^3) + 2$, ce qui n'appartient pas à $a\mathbb{N}$, donc la condition i) n'est pas vérifiée.

2) *Ensembles vérifiant i) et non ii)*

Soit a un entier naturel. Définissons par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $x_0 = a$, et pour tout entier naturel n : $x_{n+1} = 2x_n^3 + 2$
Posons $\mathbb{E}_a = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (ensemble des valeurs de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
• $\mathbb{E}_a$ vérifie i). En effet :

Soit $y \in \mathbb{E}_a$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $y = x_p$, donc $2y^3 = 2x_p^3 + 2 = x_{p+1} \in \mathbb{E}_a$

• $\mathbb{E}_a$ ne vérifie pas ii), en effet :

soit k un entier naturel non nul fixé, on a $x_{k+1} = 2x_k^3 + 2 > 2x_k^3 \geqslant 2x_k$, comme $x_k > 0$ alors $x_k < x_{k+1} - x_k < x_{k+1}$, et par suite l'entier $x_{k+1} - x_k$ ne peut pas appartenir à $\mathbb{E}_a$.

3) *Une caractérisation de l'ensemble* $\mathbb{E}$

Définissons par récurrence la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $p_0 = 0$ et,

pour tout entier naturel n : $p_{n+1} = 2p_n^3 + 2$.

Remarquons que l'ensemble $\mathbb{E}$ contient tous les termes de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On va envisager deux cas :

• Premier cas : $1 \in \mathbb{E}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $p_n \geqslant n$ ($(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite strictement croisssante d'entiers naturels), alors par la condition ii), $p_n - 1 \in \mathbb{E}$ et après $p_n - n$ étapes (à chaque fois on retranche 1), on aboutit à $n \in \mathbb{E}$. Donc $\mathbb{E} = \mathbb{N}$.

• Deuxième cas : $1 \notin \mathbb{E}$.

Montrons l'inclusion $\mathbb{E} \subset 2\mathbb{N}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un entier naturel impair $2k + 1 \in \mathbb{E}$; comme $2 \in \mathbb{E}$, alors par la condition ii), $2k + 1 - 2 = 2k - 1 \in \mathbb{E}$ et par récursivité (au bout de k étapes), on arrive à $1 \in \mathbb{E}$, ce qui contredit notre hypothèse de départ. Donc $\mathbb{E} \subset 2\mathbb{N}$.

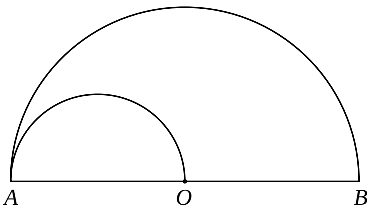
Pour finir, il reste à montrer l'inclusion $2\mathbb{N} \subset \mathbb{E}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier n tel que $p_n \geqslant 2k$ (puisque $p_n \geqslant n$, il suffit de prendre n supérieur ou égal à $2k$). D'après la condition ii), on a $p_n - 2 \in E$ et après, $\dfrac{p_n - 2k}{2}$ étapes (à chaque fois on retranche 2), on aboutit à $2k \in \mathbb{E}$. Donc $\mathbb{E} = 2\mathbb{N}$.

ACADÉMIE de NANTES

ÉNONCÉ

On se place dans la configuration ci-contre formée de deux demi-cercles où O est le milieu du segment $[AB]$.
Il existe un cercle Γ de rayon non nul tangent à la fois aux deux demi-cercles et à la droite (AB).
On pose $OA = r$
Calculer le rayon du cercle Γ en fonction de r.



SOLUTION

La solution “ officielle ” est donnée sous un titre que voici :

***Existence et construction du cercle tangent à la fois : au demi cercle** (C_1) **de diamètre** $[AB]$**, au demi cercle** (C_2) **de diamètre** $[AO]$ **et à la droite** (AB).*
Analyse du problème.

N.D.L.R.

- On voit aussitôt qu'il y a changement par rapport à l'énoncé : celui-ci postule l'existence du cercle « tri-tangent », alors que, dans le corrigé actuel, on s'interroge aussi sur l'existence, ce qui rend le problème à la fois plus logique et plus ardu. Nous verrons notamment que, en incorporant un problème d'existence, on s'interdit une simplification d'exposé.

- Il nous est agréable de publier cette solution : en effet, les problèmes de construction d'une figure ou de détermination d'un nombre, plus généralement d'un objet mathématique, peuvent se poser sans que l'on soit assuré de l'existence ou non d'une solution. De tels problèmes avaient été appelés « spéculatifs » par R. DONTOT.
  Leur mode de traitement est depuis longtemps codifié :
  1) S'il existe une solution, au moins une, à quelles conditions doit-elle **nécessairement** se plier ? C'est la partie dite « Analyse ».
  2) Ces conditions nécesssaires sont-elles **suffisantes** ? C'est la partie dite « Synthèse ».
  C'est après cela, et après seulement, que l'on saura s'il y a des solutions.

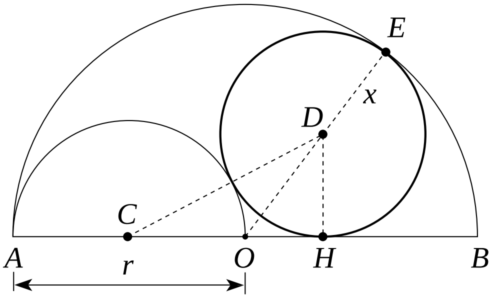
- **Au collège**, depuis le programme de 1985, on évite, au moins en géométrie, les problèmes d'existence par des subterfuges. Ainsi : « On avait telle figure, mais une partie au moins a été effacée et on voudrait la retrouver, en sachant qu'elle

obéissait à telle ou telle condition… »
En algèbre, les équations sont des « problèmes spéculatifs », mais souvent on sait, d'après le contexte de création des « inconnues », qu'il y a des solutions. On travaille alors non pas sur des « équations », mais sur des « égalités ».

Cela dit, revenons au corrigé (fin de la N.D.L.R.).

Analyse du problème

On suppose que D est le centre d'un cercle solution. On note x le rayon de ce cercle et H son point de contact avec (AB).



On a nécessairement : $DC = \frac{r}{2} + x$; $OD = r - x$; $DH = x$.

Les triangles DCH et DOH, tous deux rectangles en H, permettent d'écrire :

$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{r}{2} + OH\right)^2$ et. $(r - x)^2 = OH^2 + x^2$. On déduit successivement :

$$rx = r \times OH + OH^2 \text{ et } r^2 - 2rx = OH^2$$
$$rx = r \times OH + OH^2 \text{ et } 3 \times OH^2 + 2r \times OH - r^2 = 0.$$

L'équation $3t^2 + 2rt - r^2 = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, deux solutions : $-r$ et $\frac{r}{3}$.

On a nécessairement : $\boldsymbol{OH} = \frac{r}{3}$ et $\boldsymbol{x} = \frac{4r}{9}$

Synthèse

Soit K le point du segment $[OB]$ tel que $OK = \frac{r}{3}$ et I le point du demi-disque de bord (C_1) tel que OKI soit rectangle en K et que $KI = \frac{4r}{9}$. Le cercle (Γ) de centre I qui passe par K est tangent en K à (AB).

Le calcul de OI prouve que : $OI = r - \frac{4r}{9}$: (Γ) est tangent intérieurement à (C_1).

Le calcul de CI prouve que $CI = \frac{r}{2} + \frac{4r}{9}$: (Γ) et (C_2) sont tangents extérieurement.

(Γ) est le cercle satisfaisant aux contraintes imposées.
Les points K et I sont constructibles à la règle et au compas.

COMMENTAIRES

I - • L'exercice est intéressant : il allie des configurations élémentaires à un calcul algébrique.

• Le corrigé ci-dessus est *exemplaire*, en sa recherche de conditions nécessaires, suivie d'une étude pour savoir si elles suffisent.

• Mais revenons au problème tel qu'il était posé :
Comme la recherche de conditions nécessaires ne laisse subsister qu'une possibilité, celle-ci est automatiquement réalisée, donc suffisante, dès lors que l'on est préalablement assuré - ici par l'énoncé ! - de l'existence d'une solution.
Le corrigé est donc adapté, son titre l'explicite bien, à un autre énoncé que celui proposé, énoncé qui dirait, par exemple : « Existe-t-il un cercle Γ … S'il existe, calculer son rayon en fonction de x .»
Avec cette formulation interrogative, on pourrait, certes, répondre d'emblée intuitivement (avec des schémas mentaux de positionnement du cercle cherché) par l'affirmative, mais sans rigueur d'affirmation…
Il reste qu'on ne saurait négliger cette intuition… qui, par exemple, ne saurait accepter qu'une solution…

• En toute rigueur l'énoncé proposé exige :
1- La recherche de conditions nécessaires (« Analyse »)
2- ou bien la « Synthèse » (ici « qui peut le plus peut le moins » !) ou bien - ce qui va tellement plus vite ! - le constat : « Il faut que $\boldsymbol{OH} = \frac{r}{3}$ et je suis sûr - Cf. énoncé - que la figure existe. Donc $\boldsymbol{OH} = \frac{r}{3}$ est solution, est « la solution »…

II - Remarques du jury académique
« Deux ou trois candidats seulement ont traité correctement l'énoncé académique ».

PALMARÈS

Six lauréats :

1er prix : *Cédric BIRON* lycée De Lattre de Tassigny , Vendée

2ème prix : *Pierre GALVIN* lycée La Colinière, Loire Atlantique

3ème prix : *Jean-Benoît BOURGEON* Immaculée Conception, Mayenne

Comme l'an passé, un bilan individuel a été dressé pour chaque copie et a été envoyé à chaque candidat.

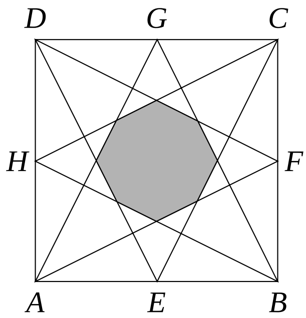
MÉDIATISATION

Des articles relatant l'épreuve sont parus dans la presse régionale (Dans le Courrier de l'Ouest, l'article donnait l'énoncé complet de l'exercice sur les fourmis et était accompagné d'une photo montrant les candidats dans une salle).

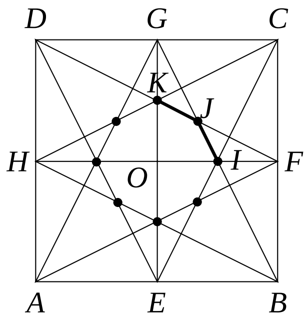
ACADÉMIE de NANCY-METZ

ÉNONCÉ

ABCD est un carré de côté 1. *E*, *F*, *G* et *H* sont les milieux des côtés du carré.
1) Montrer que l'octogone grisé a 8 côté égaux. Est-il régulier ?
2) Calculer l'aire de cet octogone.



SOLUTION



1) Pour des raisons de symétrie évidentes, il suffit de prouver que $IJ = JK$ pour établir le fait que les côtés de l'octogone sont égaux. J est le centre de gravité du triangle OFG, de plus, $GI = FK$, on a donc :

$$IJ = \frac{1}{3}\,GI = \frac{1}{3}\,FK = JK$$

L'octogone a donc 8 côtés de même longueur. De plus :

$$OJ = \frac{2}{3} \times \frac{OC}{2} = \frac{OC}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6} \qquad ; \qquad OI = OK = \frac{1}{4}.$$

Comme $\frac{\sqrt{2}}{6} \neq \frac{1}{4}$, l'octogone n'est pas inscriptible, il n'est donc pas régulier.

2) Comme J est le centre de gravité du triangle OGF, on a :

$$\text{Aire }(OGJ) = \frac{1}{3}\text{ Aire }(OGF)$$

et

$$\text{Aire }(OKJ) = \frac{1}{2}\text{ Aire }(OGJ) = \frac{1}{6}\text{ Aire }(OGF) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{8}\text{ Aire }(ABCD).$$

L'aire de l'octogone est donc égale à $\frac{1}{6}$.

N.D.L.R. (et de François LO JACOMO)

Au 1°), l'intervention du centre de gravité de OFG permettra de calculer OJ, mais elle ne s'impose pas d'emblée pour établir l'égalité des côtés de l'octogone.
Les quatre axes de symétrie du carré le sont aussi pour toute la figure et l'octogone coloré a donc 8 côtés égaux.

COMMENTAIRES

a) La définition d'un polygone « régulier » gagne à être bien assimilée dès les débuts du collège (voire avant !) : pourquoi un rectangle et un losange non carré ne sont-ils pas « réguliers » ?

Cela étant, l'épreuve de Nancy-Metz est un exercice de géométrie agréable.

Mais la cellule académique a fait part de sa déception : « la notion de polygone régulier ne semble pas bien assimilée ». Par ailleurs, « beaucoup de candidats ont tenté une résolution analytique et ont abandonné face à des expressions inextricables ».

De quoi inciter à revaloriser … diverses définitions de figures-clés susceptibles de valeur générale : ainsi un carré, un triangle équilatéral sont des polygones invariants dans des rotations respectives de $k.90°$ ou de $k.120°$. Cela induit ausitôt de multiples propriétés et se généralise… Est-il indispensable pour faire intervenir ces rotations d'une étude « théorique » de la rotation ?… certes pas… Donnons-nous un peu d'air…

b) Il s'est trouvé des solutions par l'analytique, avec recherche des équations des côtés, des coordonnées des sommets (d'où l'égalité des côtés de l'octogone), puis pour le 2°, d'une recherche d'existence d'un cercle circonscrit (les médiatrices des côtés sont-elles concourantes ?). Mais cela est très long …

ACADÉMIE de MONTPELLIER

ÉNONCÉ

On considère sept points d'un disque de rayon 1 dont les distances mutuelles sont toutes supérieures ou égales à 1. Prouver que l'un de ces points est au centre du disque.

SOLUTION 1

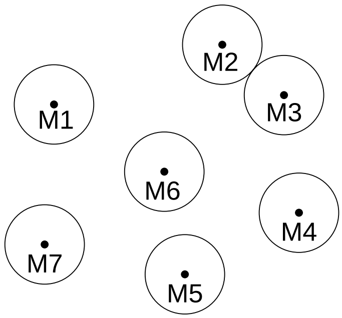
Une solution « évidente » est la configuration hexagone régulier dans laquelle un point est au centre du disque et les six autres répartis comme les sommets d'un hexagone régulier sur la circonférence du disque. Cette solution définit six régions dans le disque, une des régions devra contenir au moins deux points. A l'intérieur de chaque région si on veut placer ailleurs qu'au centre du disque deux points à une distance supérieure ou égale à 1 ; il faut les placer confondus avec les sommets de l'hexagone à la frontière avec les régions adjacentes. Nous ne pourrons placer de cette façon là que 6 points, ces six points étant sur la circonférence la seule façon de placer le septième est de le mettre au centre du disque.

Variante de présentation, par Pierre Andrieu :

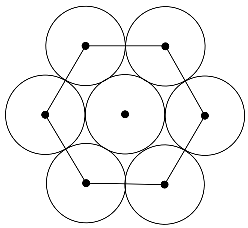
Soient donc 7 points du plan $M_1, \dots , M_7$.

J'en fais les centres de 7 disques de rayon $\frac{1}{2}$.

La conclusion « distances mutuelles supérieures ou égales à 1 » se traduit par une configuration où les disques sont, soit extérieurs, soit tangents extérieurement. Par exemple :

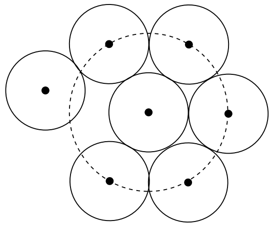


Il est clair que, dans le cas de la première figure, les centres $M_1, \dots , M_7$ ne peuvent être enfermés dans un disque de rayon 1. Il faudrait que la configuration soit plus condensée. Or, la forme la plus condensée est la suivante :



Les 7 disques sont tangents. Dans ce cas, six centres sont les sommets d'un hexagone régulier, sur la frontière d'un disque de rayon 1, le septième point est le centre de ce disque.

Il n'y a que cette solution. En effet, si on détache l'un des disques de façon à ce qu'il devienne extérieur à ses proches voisins, par exemple : il est clair que son centre sort du disque de rayon 1 sur la frontière du disque où se trouvent les cinq autres.



La seule solution est celle où six points sont les sommets d'un hexagone régulier, le septième étant le centre du disque.

Remarque (de P. Andrieu) :

« Avez-vous été convaincus ?
Des collègues cherchant ce problème, partaient tous de la façon suivante : on choisit un point à l'intérieur (strictement) d'un disque de rayon 1 et on essaie de démontrer qu'on ne peut pas disposer 6 autres points dans le disque. Mais ce n'est pas facile car cette démarche achoppe sur le fait qu'elle dépend du choix du premier point, et des suivants.

Sur un tel problème il n'est pas facile de produire une démonstration convaincante. En tout cas, c'est l'impression que j'ai. Mais peut-être les élèves peuvent-ils avoir des idées originales sur la question et je crois que cet exercice est bien adapté à des Olympiades de mathématiques de première ».

Autre variante, par François Lo Jacomo

Soit O le centre du disque et A, B, C, D, E, F les sommets d'un hexagone régulier de côté 1 inscrit dans le cercle de centre O et de rayon I. Le disque fermé est la réunion de sept domaines disjoints :

• le centre O,

• six secteurs angulaires semi-ouverts : AOB privé du segment $[OA]$ mais incluant $]OB]$, BOC privé de $[OB]$, mais incluant $]OC]$, … FOA privé de $[OF]$, … , mais incluant $]OA]$.

Soient M et N deux points d'un même secteur angulaire, par exemple AOB. M et N sont distincts de O, et l'angle MON est strictement inférieur à $\widehat{AOB}$, soit $\frac{\pi}{3}$. On en déduit que $MN < 1$: plusieurs démonstrations sont possibles, par exemple :

- calculatoire, en utilisant la relation d'Al Kashi :

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM.ON.\cos\widehat{MON} < OM^2 + ON^2 - OM.ON$$

or, si $ON \leqslant OM$, $ON^2 \leqslant OM.ON$, donc $MN^2 < OM^2$. D'où $MN^2 < 1$.

- de manière plus naturelle, mais en faisant appel à un théorème tombé aux oubliettes (bien que très utile) : dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle. Comme $\widehat{MON} < \frac{\pi}{3}$ et que la somme des trois angles vaut π, MN n'est pas le plus grand côté du triangle MON, or, $OM \leqslant 1$ et $ON \leqslant 1$.

Il en résulte que chacun des six secteurs semi-ouverts ne peut contenir qu'un seul

des sept points dont les distances mutuelles sont toutes supérieures ou égales à 1 : le septième point est donc obligatoirement O.
Réciproquement, les sept points O, A, B, C, D, E, F vérifient bien la condition de l'énoncé, ce qui prouve qu'une telle configuration est possible.

Autre variante (de la cellule académique) :

Supposons que les sept points soient distincts du centre O du disque. L'un au moins des angles géométriques $\widehat{MON}$ sera strictement inférieur à 60 degrés. Dans le triangle MON on peut supposer $1 \geqslant OM \geqslant ON$ et on a

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM.ON \cos \widehat{O}.$$

Or $\cos \widehat{O}$ est supérieur strictement à $\frac{1}{2}$. Donc $MN^2 < OM^2 + ON^2 - OM.ON$.

D'où $MN^2 < OM^2(1 + t^2 - t)$ en posant $t = \frac{ON}{OM}$, t est compris entre 0 et 1.

L'étude du trinôme montre que $1 + t^2 - t$ est inférieur ou égal à 1 sur cet intervalle ce qui, ajouté au fait que OM est inférieur ou égal à 1, est contradictoire avec $MN^2 \geqslant 1$.

COMMENTAIRE

- Les diverses variantes d'une même solution sont intéressantes à deux titres au moins :
  - Elles montrent que nous avons, nous enseignants, des conceptions largement … subjectives de la « rigueur »,
  - corrélativement, elles laissent le champ libre aux élèves pour hasarder une rédaction … Et, si les grandes lignes sont correctes, celle-ci ne sera pas méprisée …

- Cela étant, comme le souligne Pierre Andrieu, l'exercice est un bon sujet d'une épreuve telle que nos Olympiades…

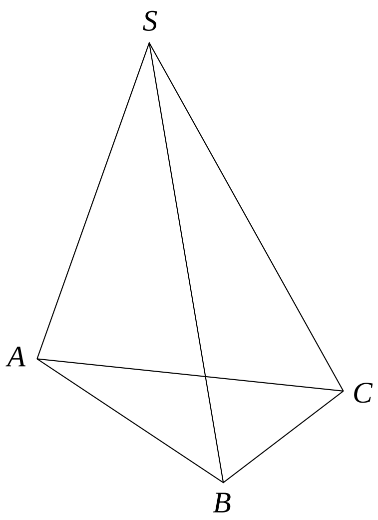
PALMARÈS

1er Prix :	*Joël CLÉMENT*	lycée Joffre, Montpellier
2ème Prix :	*Raphaël DAUZEL-PONTET*	lycée Jean Monnet, Montpellier
3èmePrix :	*Jean FIGUEROLA*	lycée Arago, Perpignan

ACADÉMIE de LYON

ÉNONCÉ

On considère un tétraèdre $SABC$.



1) Soit $\mathcal{P}$ un plan quelconque non parallèle aux faces (SAB), (SBC) et (SAC) du tétraèdre et les coupant respectivement suivant les droites ($A'B'$), ($B'C'$) et ($A'C'$).
On désigne par v le volume du tétraèdre $SABC$ et par v' celui du tétraèdre $SA'B'C'$.
Etablir la relation :

$$\frac{v'}{v} = \frac{SA' \times SB' \times SC'}{SA \times SB \times SC}$$

(On pourra étudier le cas où $C = C'$)

2) Soit M un point de [SA] et I le milieu de [SC]. Le plan $\mathcal{R}$ parallèle au plan (ABC) mené par M coupe (SB) en N et (SC) en Q.
On désigne par P le symétrique de Q par rapport à I.

a) On suppose que M est le milieu de [SA]. Exprimer le volume de $SMNP$ en fonction de celui de $SABC$.
b) Ya t il d'autres façons de choisir le point M sur [SA] pour que le volume de $SMNP$ soit le même ?

SOLUTION (abrégée)

Question 1

Commençons par étudier le cas où $C' = C$.
Dans ce cas les deux tétraèdres ont la même hauteur issue de C, donc leurs volumes sont proportionnels aux aires de leurs bases respectives SAB et $SA'B'$, donc à $\frac{1}{2} SA \times SB \sin \widehat{ABC}$ et, $\frac{1}{2} SA' \times SB' \sin \widehat{ABC}$ donc à $SA \times SB$ et $SA' \times SB'$, donc à $SA \times SB \times SC$ et $SA' \times SB' \times SC'$ puisque $SC' = SC$.

Lorsque $C' \neq C$, menons par C' le plan r' parallèle à (ABC). r' coupe les arêtes du tétraèdre $SABC$ en A'', B'' et C''.
Les volumes v'' de $SA''B''C''$ et v'de $SA'B'C'$sont tels que

$$\frac{v'}{v''} = \frac{SA' \times SB' \times SC'}{SA'' \times SB'' \times SC''}$$ d'après le premier cas.

Les volumes v de $SABC$ et v'' de $SA''B''C''$ sont tels que

$$\frac{v''}{v} = \frac{SA'' \times SB'' \times SC''}{SA \times SB \times SC} \text{ (homothétie de centre } S\text{).}$$

Il en résulte que $\dfrac{v'}{v} = \dfrac{SA' \times SB' \times SC'}{SA \times SB \times SC}$.

Question 2

a) On a alors $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SQ}{SC} = \dfrac{1}{2}$ et, $I = Q = P$, d'où $v' = \dfrac{1}{8} v$.

b) Posons $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $SM = x$, $SN = y$ et $SP = z$.

Alors $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{c - z}{c}$ et $xyz = \dfrac{1}{8} abc$.

On obtient $y = \dfrac{b}{a} x$, $z = \dfrac{c\,(a - x)}{a}$.

En remplaçant dans $xyz = \dfrac{1}{8} abc$, on obtient $x^2(a - x) = \dfrac{1}{8} a^3$ et par conséquent $8x^3 - 8ax + a^3 = 0$.

D'après a) $x = \dfrac{a}{2}$ est racine. Ce que l'on vérifie. On obtient alors l'équation suivante :

$$8\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x^2 - \frac{a}{2}x - \frac{1}{4}a^2\right) = 0,$$

dont les racines sont $\dfrac{a}{4}(1 - \sqrt{5})$, $\dfrac{a}{4}(1 + \sqrt{5})$ et $\dfrac{a}{2}$.

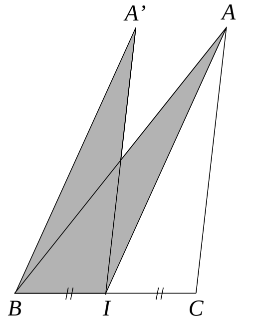
Seules les deux dernières racines conviennent.

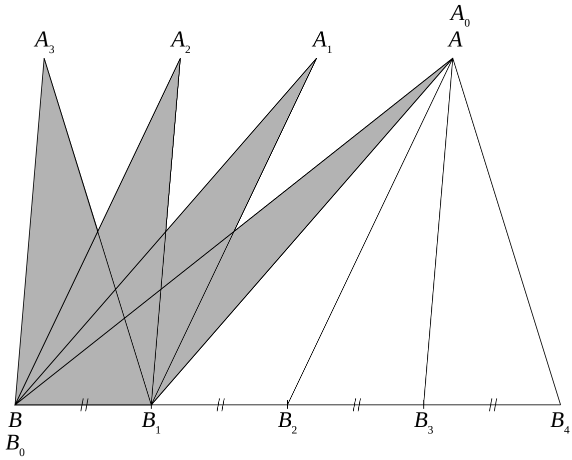
Ainsi deux points M de $[SA]$ donnent un volume de $SMNP$ égal à $\dfrac{1}{8} abc$.

ACADÉMIE de LIMOGES

ÉNONCÉ

1) ABC est un triangle, I est le milieu de $[BC]$. On fait glisser le triangle AIC pour amener le segment $[IC]$ sur le segment $[BI]$. A est alors translaté en A'.
Exprimer, en fonction de l'aire S du triangle ABC, laire de la partie du plan recouverte par les triangles ABI et $A'BI$ (surface grisée).





2) On découpe maintenant $[BC]$ en n segments de même longueur : $[B_0B_1]$, $[B_1B_2]$, …, $[B_{n-1}B_n]$ avec $B_0 = B$ et $B_n = C$.
Pour chaque valeur de i ($0 \leqslant i \leqslant n-1$), on translate le triangle AB_iB_{i+1} de manière à amener le segment $[B_iB_{i+1}]$ sur le segment $[BB_1]$. Le translaté de A est noté A_i.
Exprimer en fonction de n et de S la partie du plan recouverte par tous les triangles A_iBB_1 (surface grisée)

A partir d'un article de « LA RECHERCHE », n° 346, octobre 2001, page 31.

SOLUTION

1) Les triangles ABI, ACI, $A'BI$, $A'IA$ ont tous la même aire égale à $\frac{S}{2}$ (même base, même hauteur). D'autre part, $A'BIA$ est un parallélogramme ; ses diagonales se coupent en leur milieu et le partagent en 4 triangles de même aire égale à $\frac{S}{4}$.

2) Les triangles A_iBB_1 $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ ont pour aire $\dfrac{S}{n}$ car le segment $[BC]$ a été découpé en n segments de même longueur. Les parallélogrammes $A_{i-1}A_iBB_1$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ sont partagés en 4 triangles d'aire $\dfrac{S}{2n}$ par leurs diagonales qui se coupent en J_i.

Le trapèze $AA_{n-1}BB_1$ est la réunion des $(n-1)$ triangles $A_{i-1}A_iB_1$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ et du triangle $A_{n-1}BB_1$, ces trriangles ne se chevauchent pas et ont chacun pour aire $\dfrac{S}{n}$, l'aire du trapèze est donc égale à S.

Pour avoir l'aire de la partie grisée, on soustrait les aires des $(n-1)$ triangles $A_{i-1}A_iJ_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, c'est-à-dire : $\dfrac{(n-1)S}{2n}$.

L'aire demandée est donc : $S - \dfrac{(n-1)S}{2n} = \dfrac{(n+1)S}{2n}$

VARIANTES pour le 2)

- Pour l'aire du trapèze $AA_{n-1}BB_1$, on peut la décomposer en $AA_{n-1}B_1 + BA_{n-1}B_1$ c'est-à-dire $AB_1C + ABB_1$.
  Elle est égale à S.
- On peut calculer l'aire grisée autrement :
  Elle est constituée de $(n-1)$ triangles $J_1A_0B_1$, $j_2A_1B_1$, … , $J_{n-1}A_{n-2}B_1$, chacun d'aire $\dfrac{S}{2n}$ et du triangle $A_{n-1}BB_1$ d'aire $\dfrac{S}{n}$
  D'où son aire $\dfrac{(n-1)S}{2n} + \dfrac{S}{n} = \dfrac{(n+1)S}{2n}$.

COMMENTAIRE

Exercice de géométrie original demandant très peu de connaissances (aires des triangles de même hauteur et de bases égales ; partage de l'aire d'un parallélogramme par ses diagonales) et progressif.

Le plus difficile était la compréhension de la situation générale du 2) et des notations indiciaires … Ce dernier point suppose un esprit délié joint à quelque accoutumance …

Le jury académique considère le sujet comme « relativement facile avec un peu d'astuce de lecture de la figure ». Il précise qu'une partie importante des candidats a eu une démarche correcte sur le sujet, qui pouvait se traiter de plusieurs manières.

23 concurrents (sur 47) ont résolu correctement la deuxième question (dont les deux premiers).

PASSATION DE L'ÉPREUVE

66 candidats (60 en 2001), 47 présents (46 en 2001), pour seulement 3 centres d'épreuves ouverts (4 en 2001), « ce qui explique les nombreux absents ».

DEUX PRIX

Tous deux pour des élèves de 1ère S du lycée Gay-Lussac (Limoges), nés en 1985 :

Pierre-Henri REILHAC
Xavier DUCOUX.

Pas davantage de lauréats « compte tenu - dit le jury académique - de l'insuffisante qualité des copies rendues », alors qu'en 2001, « Limoges avait eu le vainqueur national ».

ACADÉMIE de LILLE

ÉNONCÉ

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x+\pi} - \cos x$, pour $x \geqslant 0$.

1) Montrer que la fonction f s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0 ; \pi]$; on note x_0 la solution de l'équation $f(x) = 0$, $\quad 0 \leqslant x_0 \leqslant \pi$..

2) Sur la Terre supposée sphérique, un voyageur quitte un point de l'équateur, parcourt Rx_0 km vers le nord, puis Rx_0 km vers l'est, ensuite Rx_0 km vers le sud et enfin Rx_0 km vers l'ouest, où R est le rayon de la Terre exprimé en km. On rappelle que lorsque le voyageur regarde le nord, l'ouest est à sa gauche.
Situer son point d'arrivée par rapport à son point de départ.

ÉLÉMENTS DE SOLUTION

1) La fonction est strictement croissante sur $[0 ; \pi]$ et varie dans $\left[-1 ; \dfrac{3}{2}\right]$.

2) Le premier parcours se fait sur un méridien.

Le suivant sur un parallèle de rayon $R \cos x_0 = \dfrac{Rx_0}{x_0 + \pi}$ (d'après la définition du 1° pour x_0).

Il a pour longueur Rx_0 soit un arc de mesure $x_0 + \pi$.
Le troisième parcours se fait sur un méridien et ramène à l'équateur.
Enfin, sur l'équateur, le voyageur se dirige vers l'ouest et parcourt un arc de mesure x_0. Il se retrouve donc sur l'équateur au point diamétralement opposé à son point de départ.

QUELQUES PRÉCISIONS (N.D.L.R.)

QUESTION 2 :
La formule de base est élémentaire :
Pour un cercle de rayon R et un angle au centre de mesure α, en radians, l'arc intercepté mesure $R\alpha$.
(cf. proportionnalité entre les mesures des angles au centre et celles des arcs interceptés, et référence au demi-cercle).

- Quand le voyageur se « déplace vers l'est », il le fait selon un arc de « parallèle » (cercle section de la Terre par un plan parallèle à celui de l'équateur).
Une coupe selon un méridien donne bien $x = R\cos x_0$ comme rayon de ce parallèle. D'où l'angle au centre correspondant au trajet parcouru. Cet angle est celui des deux plans méridiens correspondant aux deux extrémités de l'arc décrit. D'où un « report » sur le cercle équatorial quand le voyageur y est revenu.

- Faire des dessins !

COMMENTAIRE

Voilà, nous semble-t-il, un très bon sujet, varié en ses domaines d'intervention, qui mobilise intelligemment des compétences de base à relier avec méthode, et qui, cela étant, est très accessible.

Notons aussi, avec intérêt, son insertion dans une compréhension de la géométrie dans l'espace et d'un repérage sur la sphère terrestre.

DÉROULEMENT DES ÉPREUVES

- Renseignement fournis par M. COLLET, I.A - IPR de Mathématiques.

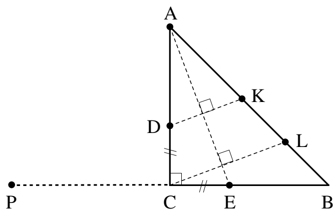
Dans l'Académie de Lille, les épreuves ont eu lieu dans treize centres différents. 350 candidats étaient prévus. 249 ont composé.
Chaque exercice a été noté sur 25.

ACADÉMIE de la GUADELOUPE

ÉNONCÉ

Soit ABC un triangle rectangle en C et isocèle.
$D \in [AC]$ et $E \in [BC]$ sont tels que $CD = CE$.
Les perpendiculaires à (AE) passant par D et C recoupent (AB) en K et L.
Montrer que $KL = LB$.

SOLUTION 1



$(AC) \perp (CB)$
$AC = CB = a$
CD $= CE = b$
$D \in [AC]$
$E \in [CB]$
soit P tel que C milieu de $[PB]$.

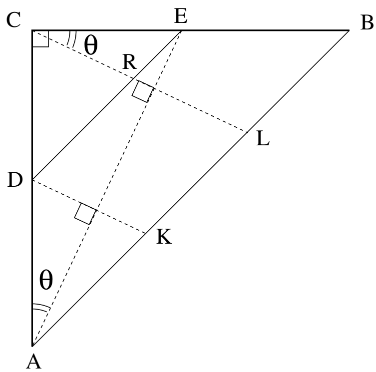
Montrons que $(PD) \perp (AE)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AE} &= (\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED}).(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}) \\
&= \overrightarrow{PE}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PE}.\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CE} \\
&= 0 + PE \times CE \cos 0 + (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}).\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}).\overrightarrow{CE} \\
&= (a + b)\, b + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CE}\text{ , (car } \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} = 0 \text{ et } \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{AC} = 0) \\
&= ab + b^2 + (-1)\, ba + (-1)\, bb
\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC} = CD.AC \cos \pi = b.a\,(-1)$ et $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CE} = EC.CE \cos \pi = b.b\,(-1)$

donc $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AE} = ab + b^2 - ba - b^2 = 0$.

Donc $(PD) \perp ((AE)$ et P, D, K alignés.
Conséquence : $(PK) \parallel (CL)$.
Théorème des milieux : **L milieu de [BK].**



SOLUTION 2

Soit R l'intersection de (DE) et (CL).

Posons $\theta = \widehat{BCL} = \widehat{CAE}$ (angles à côtés perpendiculaires).
Posons $a = CA$
$\alpha = CD = CE$.

Dans le triangle BCL, la loi des sinus s'écrit :

$$\frac{BL}{\sin\theta}=\frac{BC}{\sin\widehat{BLC}}$$

comme $\widehat{BLC}=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

$=\frac{3\pi}{4}-\theta$

et que $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,

$$BL=\frac{a\sin\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$KDRL$ étant un parallélogramme, il suffit de montrer que $DR = BL$.
Dans le triangle CDR, la loi des sinus s'écrit :

$$\frac{DR}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{CD}{\sin\widehat{CRD}} \text{ d'où } DR=\frac{\alpha\cos\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Le rapport $\frac{BL}{DR}$ vaut $\frac{a\sin\theta}{\alpha\cos\theta}=\frac{a}{\alpha}\tan\theta$

Or, dans le triangle rectangle CAE, on a :

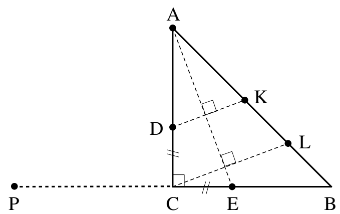
$$\tan\theta=\frac{\alpha}{a} \text{ donc } \frac{BL}{DR}=1,$$

ceci achève la preuve.
N.B. J'utilise, entre autres :

- la somme des angles d'un triangle qui vaut π et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
- les droites (AB) et (DE) parallèles et des angles égaux à $\frac{\pi}{4}$: $\widehat{CBL}$ et $\widehat{CDR}$.

SOLUTION 3

$(AC)\perp(CB)$
$CA = CB$
$D\in[AC]$
$E\in[CB]$



Dans la rotation directe de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$

- E a pour image D
- A a pour image le point P symétrique de B par rapport à C
- La droite (AE) a pour image la droite (PD).
- Les droites (AE) et (PD) sont des perpendiculaires.
- Les droites (PD) et (DK) sont confondues (elles ont (D) en commun et elles sont

toutes deux perpendiculaires à (*AE*)).

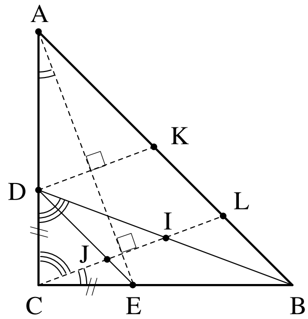
Dans le triangle *BPK* :
- (*CL*)//(*PK*) car (CL) $\perp$ (*AE*) et (PK) $\perp$ (AE)
- *C* milieu de [*PB*],

Alors *L* est le milieu de [*KB*] (Théorème des milieux).

SOLUTION 4

On a les égalités d'angles :

$\widehat{CBD} = \widehat{CAE}$, angles symétriques par rapport à la médiatrice de [*AB*].



$\widehat{CAE} = \widehat{LCB}$, angles à côtés perpendiculaires ((*LC*) $\perp$ (*AE*) et (*CB*) $\perp$ (*AC*)).

Il vient : $\widehat{CBD} = \widehat{LCB}$.
Soit *I* le point d'intersection des droites (*LC*) et (*BD*).
De l'égalité d'angles précédente, on déduit que le triangle *CBI* est isocèle en *I*.
Dans le triangle rectangle *DCB* :

$\widehat{CDB}$ est le complémentaire de $\widehat{CBD}$
$\widehat{DCI}$ est le complémentaire de $\widehat{ICB}$

on en déduit que les angles $\widehat{CDB}$ et $\widehat{DCI}$ sont égaux et donc que le triangle *DCI* est isocèle en *I* (deux angles égaux).
On obtient alors : $ID = IC = IB$ et *I* est le milieu de [*BD*] (1).
Or, en notant *J* le point d'intersection des droites (*DE*) et (*CL*), les triangles *DJI* et *ILB* sont semblables (égalité d'angles alternes-internes d'une part et d'angles opposés par le sommet d'autre part).
De ce qui précède on déduit que, de plus, les triangles sont isométriques et alors *I* est le milieu de [*DB*] et [*JL*].
D'où : *DLJB* est un parallélogramme.
Par ailleurs, le quadrilatère *DKIJ* est aussi un parallélogramme car (*DE*)//(*KL*) et (*DK*)//(*LC*).
L'égalité en longueur des côtés opposés d'un parallélogramme permet de conclure que $KL = DJ = LB$.

Variante, par H.B.

Dès que l'on a la propriété (1) - *I* milieu de [*BD*] -, il suffit d'appliquer le « théorème des milieux » au triangle *BDK*, puisque (*CL*)//(*DK*).

SOLUTION 5

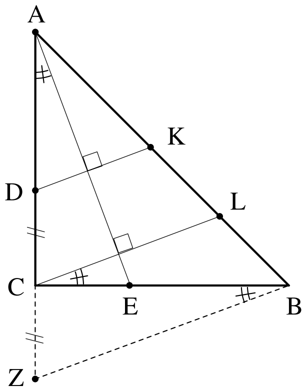
J'appelle Z le symétrique de D par rapport à la droite (CB).

$\widehat{CAE} = \widehat{LCB}$ (angles aigus à côtés perpendiculaires)

$\widehat{CBZ} = \widehat{CAE}$ (isométrie des triangles CBZ et ACE)

donc $\widehat{LCB} = \widehat{CBZ}$. Or, ils sont alternes-internes, donc $(ZB)//(LC)$. (CL) est donc l'axe médian. cqfd.

Ou encore, les trois parallèles déterminant sur une sécante des segments égaux, elles déterminent sur toute autre sécante des segments égaux.



N.D.L.R. *Précision pour la ligne 2*

On peut aussi déduire l'égalité $\widehat{CBZ} = \widehat{CAE}$ de la considération des tangentes de ces angles.

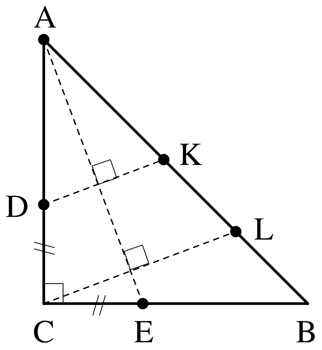
SOLUTION 6

Dans le repère $(C\,;\,\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, A (1 ; 0), B (0 ; 1) et D (m ; 0)

Comme $CD = CE$, E (0 ; m)

$\overrightarrow{EA}$ (1 ; $-m$), donc un vecteur normal à (EA) est $\vec{u}$ (m ; 1)

(CL) est la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$ donc de coefficient directeur $\dfrac{1}{m}$. Par conséquent, $(CL) : y = \dfrac{1}{m}x$.



(DK) est la parallèle à (CL) passant par D, donc $(DK) : y = \dfrac{1}{m}x - 1$.

L est le point d'intersection de (CL) et (AB)

Or (AB) a pour équation : $y = -x + 1$

Donc les coordonnées de L sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = \dfrac{1}{m}x \end{cases}$$

Après calculs :

$$L\left(\frac{m}{1+m}\ ;\ \frac{1}{1+m}\right)$$

K est le point d'intersection de (DK) et (AB)
Donc les coordonnées de K sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = \dfrac{1}{m}x - 1 \end{cases}$$

Après calculs :

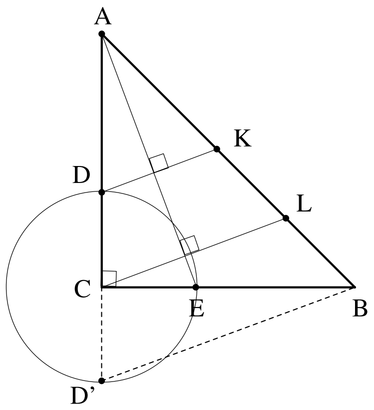
$$K\left(\frac{2m}{1+m}\ ;\ \frac{1-m}{1+m}\right)$$

$$BL^2 = (x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2 = \frac{2m^2}{(1+m)^2}$$

$$KL^2 = (x_L - x_K)^2 + (y_L - y_K)^2 = \frac{2m^2}{(1+m)^2}$$

d'où $\boldsymbol{BL = LK}$.

SOLUTION 7



Traçons le cercle de centre C et de rayon CD.
Ce cercle recoupe (AC) en D'.

<u>*ANALYSE :*</u> si on parvient à démontrer que les droites $(D'B)$, (CL) et (DK) sont parallèles, alors C qui est le milieu de $[DD']$ a son image L, par la projection de direction (DK) sur (AB), qui est le milieu de $[KB]$ image de $[DD']$.

1°) $(D'E)$ est perpendiculaire à (DE).
En effet, le triangle $(CD'E)$ est inscrit dans le cercle de diamètre $[DD']$ donc il est rectangle en E.

2°) $(D'E)$ est perpendiculaire à (AB).
En effet, par la réciproque de Thalès appliquée aux triangles (CDE) et (CAB), on montre que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.
Comme $(D'E)$ est perpendiculaire à (DE), alors $(D'E)$ est perpendiculaire à (AB).

3°) Le point E est l'orthocentre du triangle $(D'AB)$.
On vient de prouver que $(D'E)$ est perpendiculaire à (AB). De plus, (BC) est perpendiculaire à $(D'A)$.

Donc $(D'E)$ et (BC) sont des hauteurs du triangle $(D'AB)$. Elles se coupent en E. Donc E est l'orthocentre du triangle $(D'AB)$.

4°) $(D'B)$, (CL) et (DK) sont parallèles.
Puisque E est l'orthocentre du triangle $(D'AB)$ alors (AE) est la troisième hauteur donc $(D'B)$ et (AE) sont perpendiculaires.
Les droites $(D'B)$, (CL) et (DK) sont toutes perpendiculaires à (AE). Elles sont donc parallèles.

Variante, par François Lo Jacomo

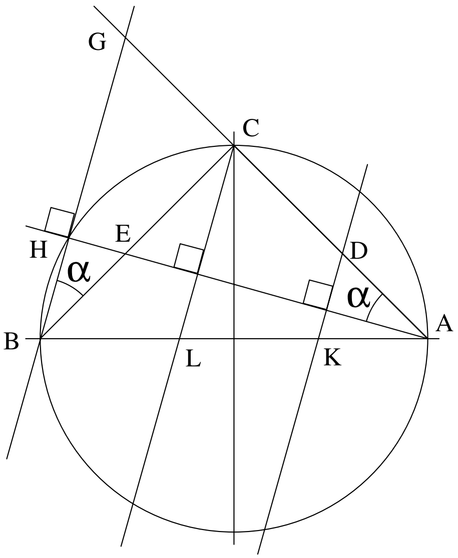
La méthode est la même, mais, au départ, au lieu du cercle, F.L.J. parle de symétrie, par rapport à (CB), de D, puis du triangle isocèle CDE.

D'où $\widehat{DED'}$ droit.

Au 2°), au lieu de Thalès, F.L.J. parle d'homothétie des triangles CDE et CAB. D'où $(DE)//(AB)$.

La suite est sans changement.

SOLUTION 8



Segments égaux ? Je pense à Thalès.

De B traçons la droite perpendiculaire à (AE). Elle coupe (AE) en H, donc sur le cercle circonscrit au triangle ABC, et elle coupe la droite (AC) en G.

Démontrons que C est le milieu de $[DG]$:

$\widehat{HBE} = \widehat{EAC} = \alpha$ comme angles interceptant le même arc CH.
Dans le triangle BCG,

$\tan \alpha = CG/CB$.

Or, dans le triangle EAC,

$\tan \alpha = EC/AC$

Or, $AC = BC$ donc $CG = EC$.
Comme $EC = CD$ par hypothèse, il vient : $CD = CG$ et C est le milieu de $[GD]$.

Les points D, C et G se projettent en K, L et B suivant une direction perpendiculaire à (AE).

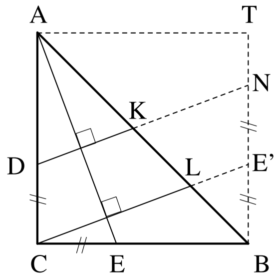
Donc $KL = LB$ (théorème des milieux).

Variante (par H.B.), pour un passage :

Le début est le même jusqu'à l'introduction de tan α. En lieu et place de cette introduction, comparons les triangles *AEC* et *CBG*. Ils ont « un côté égal » ($AE = BC$) « compris entre deux angles respectivement égaux ». Ils sont donc « égaux ».
D'où $CG = EC$.

Même suite que ci-dessus.

SOLUTION 9 (par H. B.)



- *Les solutions 1 et 3 utilisent* implicitement *le transfert d'une figure sur une figure « double » :* le triangle rectangle *CAB* est une « moitié » du triangle isocèle *ABP*.
- *Les solutions 5 et 7*, bien que ce soit moins apparent, *sont liées au « doublement » de CAB* par symétrie par rapport à (*CB*).
- *Mais il y a une autre façon de « doubler » CAB* :

Faisons-le selon le carré *ACBT* de centre *O* (cf. figure ci-dessus) et envisageons la rotation $(O, \frac{\pi}{2})$ qui envoie *C* sur *B*. Alors :

$E \to E'$, sur [*BT*], tel que $BE' = CE$
et $(AE) \to (CE')$ cependant que, d'autre part, $(AE) \perp (CL)$.
D'où *C, L, E'* alignés.
Le parallélogramme *DCE'N* implique $NE' = CD$.
Voilà donc *E'* milieu de [*BN*].
Le théorème des milieux, appliqué au triangle *BKN*, implique que *L* est le milieu de [*BK*].

COMMENTAIRES

- Le grand nombre de solutions accessibles fait de cet exercice un bon « problème ouvert » permettant de dégager des méthodes de résolution généralisables.
- A la lecture des solutions, on aura observé combien ce problème est aussi de mise au collège ! … et en seconde.

NOMBRE D'INSCRITS ET PRIX

Sur 139 inscrits, seuls 44 (28 filles et 16 garçons) ont composé (ces candidats provenaient de 9 lycées sur 10).

L'épreuve se déroulalit pendant les vacances de Pâques : cela a freiné la participation des élèves !

8 élèves ont été primés (2 garçons et 6 filles).

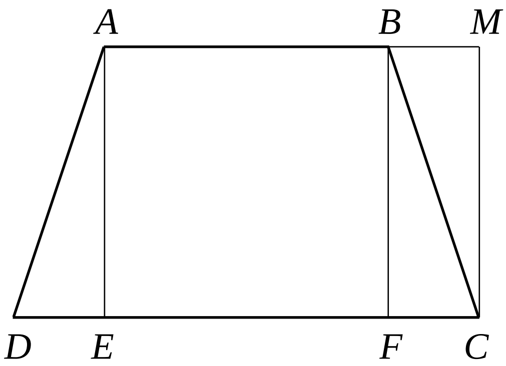
ACADÉMIE de GRENOBLE

ÉNONCÉ

ABCD désigne un trapèze ; [*AB*] est parallèle à [*CD*], *AB* = *BC* = *AD* = 5 cm et *CD* > *AB*.
Pour quelle longueur *CD* l'aire du trapèze *ABCD* est-elle maximale ?

On rappelle que l'aire $\mathcal{A}$ d'un trapèze est donnée par la formule $\mathcal{A} = \dfrac{(L + l)h}{2}$ où *L* est la longueur de la grande base, *l* la longueur de la petite base et *h* la hauteur du trapèze.

SOLUTION 1



L'aire du trapèze *ABCD* est égale à l'aire du rectangle AECM où M désigne la projection orthogonale de *C* sur la droite (*AB*) et *E* le projeté orthogonal de *A* sur (*CD*).
Or *BC* = 5, donc le point *C* est situé sur un quart de cercle de centre *B* et de rayon 5.
Le problème revient donc à déterminer pour quelle position de *C* l'aire du rectangle *AECM* est maximale.

En posant $\alpha = \widehat{FBC}$, avec $\alpha \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, l'aire $S(\alpha)$ du rectangle *AECM* est donnée (*F* désignant le projeté orthogonal de *B* sur (*CD*)) par :

$$S(\alpha) = EC \times CM = EC \times BF \text{ avec : } EC = EF + FC$$

Or dans le triangle rectangle *FBC*, on a :

$$FC = BC\sin\alpha = 5\sin\alpha$$
$$BF = BC\cos\alpha = 5\cos\alpha$$

D'où $S(\alpha) = (5 + 5 \sin \alpha) \times 5 \cos \alpha$, qui s'écrit :
$S(\alpha) = 25(1+\sin \alpha) \cos \alpha$

L'aire du rectangle sera maximale pour le maximum de la fonction S sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction S est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$S'(\alpha) = 25[\cos \alpha . \cos \alpha + (1 + \sin \alpha)(- \sin \alpha)]$$
$$S'(\alpha) = 25[\cos^2 \alpha - \sin \alpha - \sin^2 \alpha]$$
$$S'(\alpha) = 25[(1 - \sin^2 \alpha) - \sin \alpha - \sin^2 \alpha]$$
$$S'(\alpha) = 25[- 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1]$$

L'équation $-2x^2 - x + 1 = 0$ a pour racines -1 et $\frac{1}{2}$, donc $S'(\alpha)$ s'écrit :

$$S'(\alpha) = 25\left[-2(\sin \alpha + 1)\left(\sin \alpha - \frac{1}{2}\right)\right] = -50(\sin \alpha + 1)\left(\sin \alpha - \frac{1}{2}\right)$$

Etude du signe de $S'(\alpha)$ sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$:

$\sin \alpha + 1$ est positif sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\sin \alpha - \frac{1}{2}$ est négatif sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{6}\right]$ et est positif sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$

Le signe de $S'(\alpha)$ sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ est donné par :

α	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$\sin\alpha + 1$		+		+	
$\sin\alpha - 1/2$		–	0	+	
$S'(\alpha)$		+	0	–	

La fonction S est donc croissante sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{6}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right]$, elle admet donc un maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$, la longueur DC est $EF + 2FC = 5 + 2 \times 5 \sin \frac{\pi}{6} = 10$.

L'aire du trapèze isocèle $ABCD$ sera maximale lorsque la longueur CD sera égale à 10 cm.

SOLUTION 2

L'aire du trapèze isocèle *ABCD* est donnée par :

$$\frac{(AB + DC) \times AE}{2}$$

Or $DC = EF + 2DE$, d'où l'aire du trapèze est donnée par :

$$\frac{(2AB + 2DE) \times AE}{2} = (AB + DE) \times AE.$$

En posant $DE = x$, $0 < x < 5$, nous avons dans le triangle rectangle *ADE* :

$$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{25 - x^2}$$

L'aire $S(x)$ du trapèze *ABCD* est donnée par :

$$S(x) = (5 + x) \times \sqrt{25 - x^2}.$$

L'aire du trapèze sera maximale pour le maximum de la fonction S.

* Si le candidat connaît la formule « $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ », (*pas au programme de première*), il peut continuer :

La fonction S est dérivable sur]0 ; 5[comme produit de fonctions dérivables et :

$$S'(x) = \sqrt{25 - x^2} + (5 + x)\ \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}$$

$$S'(x) = \frac{25 - x^2 - 5x - x^2}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$S'(x) = \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$S'(x)$ est du signe de $-2x^2 - 5x + 25$ qui s'annule pour -5 et $\frac{5}{2}$.

$S'(x)$ est positif sur $\left]0\ ;\ \frac{5}{2}\right]$ et est négatif sur $\left[\frac{5}{2} ; 5\right[$. La fonction S est croissante sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{5}{2}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{5}{2} ; 5\right[$. Elle admet donc un maximum en $\frac{5}{2}$

L'aire du trapèze sera maximale pour $x = \frac{5}{2}$, ce qui correspond à $CD = 10$ cm.

* Si le candidat ne connaît pas la formule « $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ », il se trouvera dans une impasse mais pourra quand même, en utilisant sa calculatrice, savoir pour quelle valeur x de la fonction S est maximale.

Remarque :
Le maximum de l'aire de *ABCD* correspond à celui de l'hexagone *ABCDLKD* obtenu en « doublant » *ABCD* par une symétrie autour de (*DC*).
On observera que cet hexagone ayant ses côtés de même longueur imposée, il est d'aire maximale quand il est régulier (et inscrit dans le cercle de diamètre [*CD*]).

COMMENTAIRES

120 candidats inscrits, la moitié de 2001 ; 65 effectifs (regroupés dans 6 établissements de l'Académie) … De petits nombres … « peut-être liés au choix des exercices proposés en 2001 ».

Et la cellule académique demande « de faire connaître le niveau raisonnable des exercices proposés en 2002 ».

PALMARÈS

Les membres du jury ont décidé des critères suivants :

A : exercice résolu avec une argumentation complète et correcte ;
B : exercice résolu, mais l'argumentation n'est pas complète ;
C : de bonnes idées, mais exercice inachevé ;
D : autres cas.

Il en est ressorti onze copies, que le jury a décidé de classer en trois groupes.
Le premier a traité les quatre exercices mais, dans les exercices 2 et 4, l'argumentation n'est pas parfaite.

Il s'agit de : *Francelin TOURTET* lycée Champollion, Grenoble

Les deux suivants ont traité complètement les deux premiers exercices et abordé avec un relatif succès les autres exercices.

Il s'agit de : *Nicolas HONORAT* lycée Berthollet, Annecy
Marie COUSSEDIERE lycée Champollion, Grenoble.

Huit candidats suivants ont été retenus parce qu'ils ont, pour sept d'entre eux, traité complètement un exercice et produit, dans au moins deux autres exercices, un travail qui ressort du lot grâce au sérieux ou à l'originalité des solutions mises en œuvre mais inachevées ; le dernier nommé l'a été pour sa régularité dans le travail produit, mais les argumentations ne sont malheureusement jamais complètes.

(N.B. : Le premier lauréat - inscrit en 1ère L - suit par correspondance les enseignements de série S dans les disciplines scientifiques).

ACADÉMIE de DIJON

ÉNONCÉ

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux cercles de centres distincts O_1 et O_2 et de rayons distincts R_1 et R_2 tangents extérieurement en un point A. On appelle B le point de $\mathcal{C}_1$, diamétralement opposé à A.

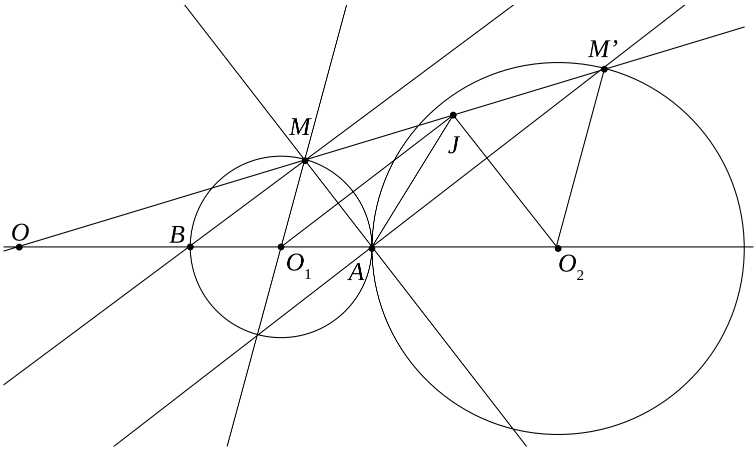
A tout point M de $\mathcal{C}_1$, distinct de A et de B, on associe le point M' de $\mathcal{C}_2$ tel que le triangle MAM' soit rectangle en A.

1) Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}_1$ privé de A et de B

2) On appelle J le milieu du segment $[MM']$. Déterminer le lieu de J lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}_1$ privé de A et de B.

3) Quelle doit être la position de M pour que l'aire du triangle MAM' soit maximale ?

SOLUTION



1) $[BA]$ étant un diamètre de $\mathcal{C}_1$, le triangle BMA est rectangle en M. Les droites (BM) et (AM') sont donc parallèles. $\mathcal{C}_2$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par deux homothéties. L'une, de rapport négatif a pour centre A et l'autre, de rapport positif, envoie B sur A. Notons $\mathcal{H}$ cette seconde homothétie. $\mathcal{H}(M)$ est un point N de $\mathcal{C}_2$ tel que (BM) et (AN) soient parallèles. On a donc bien $N = M'$ puisque par hypothèse, les points A, M, M' sont distincts. (MM') passe donc par le centre O de l'homothétie $\mathcal{H}$; c'est un point fixe de la droite (O_1O_2).

2) (O_1J) est la médiatrice de $[AM]$, (O_2J) est la médiatrice de $[AM']$. Le triangle O_1JO_2 est rectangle en J. J appartient donc au cercle de diamètre $[O_1O_2]$.

Réciproquement, soit J un point du cercle de diamètre $[O_1O_2]$. Lorsque J est distinct de O_1 et de O_2, les perpendiculaires issues de A à (O_1J) et à (O_2J) recoupent $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en M et M'. Comme $O_1M = O_1A$ et que $O_2M' = O_2A$, (O_1J) et (O_2J) sont les médiatrices respectives des segments $[AM]$ et $[AM']$. Le triangle MAM' est bien rectangle en A. L'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[O_1O_2]$ privé des points O_1 et O_2.

3) Posons $x = \widehat{AO_1M}$. $AM = 2R_1 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $AM' = 2R_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 2R_2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

L'aire du triangle MAM' est donc $\mathcal{A}(x) = 2R_1R_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = R_1R_2 \sin x$.

Cette expression est maximale lorsque $x = \frac{\pi}{2}$.

Remarques :

- La question 1) peut-être résolue par le théorème de Thalès mais il faut montrer au préalable que (MM') coupe la droite (O_1O_2).
- La question 2) peut-être résolue en considérant l'homothétie qui transforme M en J. Il faut alors montrer qu'elle transforme B en O_1.
- La question 3) peut-être résolue sans connaître la formule de duplication du sinus en étudiant la fonction A.
  Mais on peut aussi déduire l'aire du triangle AMM' de celle du trapèze $O_1MM'O_2$ $\left(\frac{1}{2}(R_1 + R_2)(R_1 + R_2)\sin x\right)$ en ôtant les aires $\left(\frac{1}{2}R_1^2 \sin x \text{ et } \frac{1}{2}R_2^2 \sin x\right)$ des triangles O_1AM et O_2AM'. On obtient bien $R_1R_2 \sin x$.
- *Surtout, voici une autre solution* (par H.B.) :
  2 Aire triangle $(AMM') = AM \times AM'$
  Utilisons l'homothétie $\mathcal{H}$ (cf. 1°) : $AM' = BM \times \frac{R_2}{R_1}$. Donc
  $2\text{aire}(AMM') = AM \times BM \times \frac{R_2}{R_1}$ et l'aire est maximale avec $AM \times BM$ maximal.
  Or $AM \times BM$ est le double de l'aire du triangle ABM. Et celle-ci est maximale lorsque la hauteur MH relative à AB est maximale, c'est-à-dire MH $= R_1$, donc $(MO_1) \perp (O_1O_2)$.

COMMENTAIRES

a) Même remarque, à propos d'essais éventuels, que pour Créteil.

b) Ici aussi, le problème est assez aisé si et seulement si on songe à utiliser le point

B fourni par l'énoncé alors que cela ne s'imposait pas, donc en aide discrète ...

c) La figure est intéressante : la transformation proposée pour passer de M à M' est la composée, dans cet ordre, de la symétrie de centre O_1 suivie de l'homothétie de centre A qui transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$ ou de cette homothétie suivie de la symétrie de centre O_2. Et l'exercice établit que ces composées-là sont l'homothétie $\mathcal{H}$.

D'autre part, en associant à A le point B' diamétralement opposé sur $\mathcal{C}_2$, l'intersection T de (BM) et $(B'M')$ termine le rectangle $MAM'T$. Le lieu de T et celui de J sont associés dans une homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ ou 2 (selon l'ordre d'association choisi).

d) Le jury académique apporte les précisions suivantes :

« En 2002, dans l'Académie de Dijon, 279 élèves issus de 27 lycées publics et 5 lycées privés, se sont inscrits pour participer à ces secondes Olympiades. Ce nombre dépasse de très loin ce qui pouvait être espéré, compte tenu du « *poids* » de l'Académie, puisqu'environ 5000 candidats se sont inscrits en France. 203 élèves ont composé, les 203 copies ont été corrigées par les 10 professeurs et les deux inspecteurs pédagogiques régionaux, membres de la cellule académique..

L'année passée, les élèves étaient sortis de l'épreuve très décontenancés en raison du caractère inhabituel des exercices proposés et de leur trop grande difficulté liée, notamment, à des énoncés brefs et concis d'où ne sourdait aucune indication susceptible d'amorcer une solution. Il en a été tout autrement cette année. Tous les élèves ont pu aborder chacun des exercices avec parfois beaucoup de pertinence et d'imagination. Les copies ont été plus consistantes et les dix-huit élèves récompensés se détachent nettement de l'ensemble. Il est enfin essentiel de noter que le caractère plus accessible des exercices proposés aussi bien par la cellule nationale que par la cellule académique n'a pas altéré leur profond intérêt mathématique et donc la substance même du concours. »

Par ailleurs, Monsieur Daniel DETILLEUX, I.A - IPR, qui transmet cet avis, souligne que « les deux premiers objectifs de ces Olympiades sont en parfaite cohérence avec ceux des Travaux Personnels Encadrés :

1 - Développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche.

2 - Favoriser l'émergence d'une nouvelle culture visant à préparer les élèves à développer leur autonomie. »

PALMARÈS

Dix-huit lauréats. Voici les trois premiers :

1er prix :	*Elsa JOUSSEAU*	lycée Lamartine, Mâcon
2ème prix (ex æquo) :	*Xavier DELAMOTTE*	lycée Louis Davier, Joigny
	Cyril MORY	lycée Louis Davier, Joigny

(P.S. *Elsa JOUSSEAU* figure au palmarès national - 4ème accessit-).

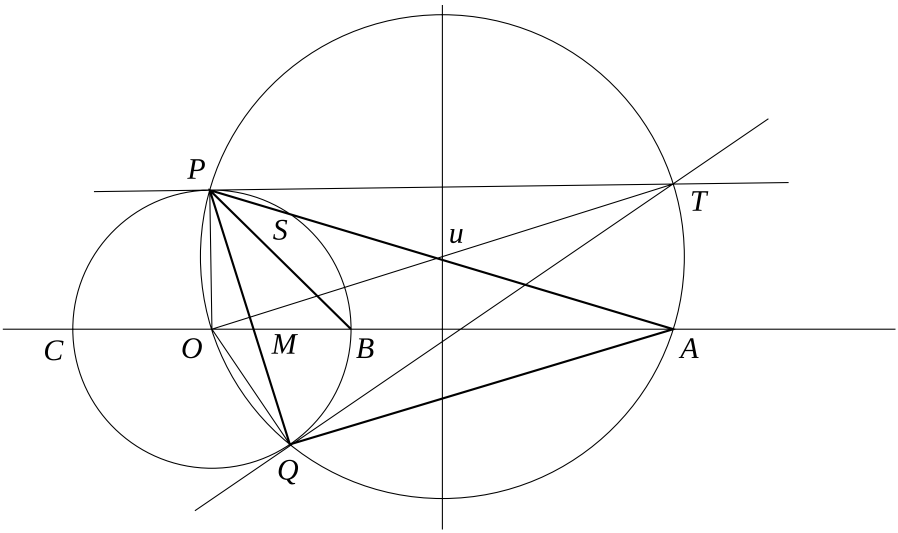
ACADÉMIE de CRÉTEIL

ENONCÉ

On considère trois points A, B et C alignés dans cet ordre sur une droite (D).
Soit O le milieu du segment $[BC]$. On appelle (C) le cercle de diamètre $[BC]$.
Un cercle variable (Γ) passant par les points O et A recoupe le cercle (C) en P et Q.

1) Les tangentes en P et Q au cercle (C) se coupent en T. Quel est l'ensemble des points T ?
2) Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle APQ. Quel est l'ensemble des points I ?

SOLUTION



1 - • Les tangentes en P et Q sont perpendiculaires aux rayons $[OP]$ et $[OQ]$. Les triangles OPT et OQT sont rectangles. Donc $[OT]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ces triangles, qui n'est autre que le cercle (Γ) .
Le triangle OAT est donc lui aussi rectangle. Donc la droite (AT) est perpendiculaire à (D).
T appartient à la perpendiculaire en A à (D).

• *Réciproquement*, si T est un point de cette perpendiculaire, le cercle de diamètre $[OT]$ est un cercle (Γ) passant par O et A. Il coupe (C) en P et Q tels que OPT et OQT sont rectangles. Donc les droites (PT) et (QT) sont tangentes à (C).

• *Donc l'ensemble des points T est la droite perpendiculaire en A à (D).*

2 - Les arcs OP et OQ (sous-tendus par les rayons [OP] et [OQ]) sont égaux. Donc, dans le cercle (Γ) , les angles inscrits $\widehat{OAP}$ et $\widehat{OAQ}$ sont égaux.

Donc (OA) est une bissectrice du triangle APQ. Elle est axe de symétrie de $\widehat{PAQ}$: les arcs $\widehat{BS}$ et $\widehat{BQ}$ sont égaux.

Donc, dans le cercle (C), les angles inscrits $\widehat{BPQ}$ et $\widehat{BPS}$ sont égaux.

Donc (PB) est une bissectrice du triangle APQ.

Donc le centre du cercle inscrit dans le triangle APQ est l'intersection de (PB) et (OA), c'est-à-dire B.

COMMENTAIRES

Deux jolis exercices de « lieux », le 1er simple d'accès à partir de figures-clés élémentaires (tangente à un cercle, et triangles rectangles inscriptibles dans...).

La formulation du 2ème n'est pas courante : elle est à encourager pour laisser le problème plus ouvert.

Les plus anciens d'entre nous, profs de maths, retrouveront là des éléments d'une partie jadis classique en géométrie du lycée : « *Division et faisceau harmoniques* ».
Ainsi, avec M intersection de (PQ) et (OA),
H intersection de (PQ) et (OT),
on peut d'abord démontrer (niveau collège) que :

$$\overline{OM} \times \overline{OA} = \overline{OH} \times \overline{OT} = OP^2$$

D'où, avec O milieu de [BC], $OB^2 = \overline{OM} \times \overline{OA}$.
Cela caractérise la « division » C, B, M, A comme « harmonique ».

Le « faisceau » des droites (PC), (PB), (PM), (PA) est donc « harmonique ».
Or, deux de ses « rayons conjugués », (PC) et (PB) sont perpendiculaires. Ils sont donc les bissectrices des angles formés par (PM) et (PA)...
Cela ne va pas plus vite qu'avec la solution donnée, conforme aux programmes actuels, mais d'une part, cela met à nu la structure interne de la figure et en dévoile des ressorts, d'autre part une petite « balade chez les Dames du Temps jadis » garde quelque charme pour ceux qui les ont fréquentées...
Notons, en prime, que la division C, B, M, A étant harmonique avec trois points fixes, le quatrième, M, l'est aussi.

3) La recherche méthodique d'un lieu, à partir des hypothèses, des propriétés des figures-clés intervenantes, n'exclut pas, si l'on est bredouille, de procéder par essais.
Avec papier-crayon, cela peut déjà aider et conduire à des conjectures,... ce qui met souvent sur la voie.
A plus forte raison avec un logiciel de géométrie... !

4) **La cellule académique signale que** « la sujet académique n'a été que très peu abordé, et fort peu réussi. » (et « qu'elle en tient compte pour élaborer le sujet 2003 »).

PALMARÈS

Parmi les 442 inscrits dans l'académie de Créteil, 292 candidats ont participé à la session 2002.
La correction des copies préalablement anonymées a permis de distinguer et de classer les 33 meilleures d'entre elles.

Les trois premiers prix attribués sont les suivants :

1er prix :	*Arnaud LE GUILCHER*	lycée H. Moissan, Meaux
2ème prix :	*Romain SCIARDIS*	lycée F. Mistral, Fresnes
3ème prix :	*Kai CHU*	lycée A. de Mun, Nogent s/ Marne

Arnaud LEGUILCHER a obtenu un premier accessit au niveau national.

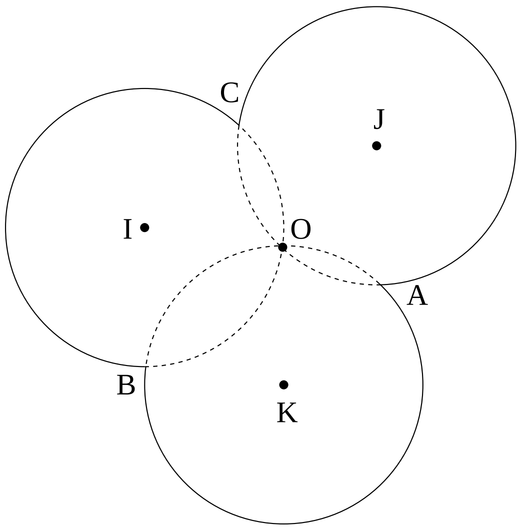
ACADÉMIE de CORSE

ÉNONCÉ

Soient trois cercles de rayon r, de centres respectifs I, J, K, et ayant un point commun O.
On appelle A, B et C les trois autres points d'intersection de ces cercles.
Déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
Que représente le point O pour le triangle ABC ?

Calculer la somme des longueurs des trois arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$ ne contenant pas le point O, en fonction du rayon r.

(Les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$ sont en trait plein sur la figure).



SOLUTION

1) Compte tenu des hypothèses, les quadrilatères $OICJ$, $OIBK$, $IJAK$, ayant leurs quatre côtés de même longueur r sont des losanges.
On construit le parallélogramme $CIB\Omega$, qui est aussi un losange, donc $\Omega B = \Omega C = r$.
D'autre part, les droites (IB) et (JA) sont parallèles, car elles sont parallèles toutes les deux à la droite (OK). Donc (ΩC) qui est parallèle à (IB), est aussi parallèle à (JA). Comme en outre $\Omega C = JA$ $(= r)$, on en déduit que le quadrilatère convexe

$CJA\Omega$ est un parallélogramme, puis un losange car $JC = JA = r$.
En conséquence, $\Omega A = \Omega C$, d'où $\Omega B = \Omega C = \Omega A = r$.
Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, dont le rayon est r.

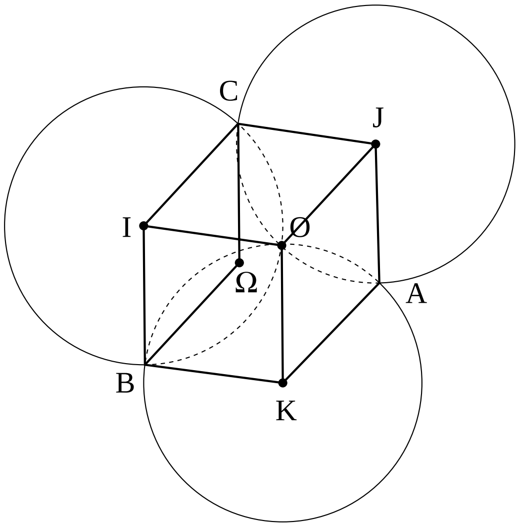
2) Les droites (IB) et (JA) sont parallèles et $IB = JA$ donc le quadrilatère convexe $IBAJ$ est un parallélogramme. Or la droite (IJ) est la médiatrice du segment $[CO]$, donc (CO) est perpendiculaire à (IJ) donc à (AB) qui est parallèle à (IJ). (CO) est donc une hauteur du triangle ABC.
O est donc l'orthocentre du triangle ABC.

3) Soit α une mesure en radians de l'angle $\widehat{BOC}$ inscrit dans le cercle de centre I et rayon r. La mesure en radians de l'angle au centre correspondant est $2\,\alpha$, donc la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas le point O, est $2\alpha r$.

De même en appelant β et γ les mesures des angles $\widehat{COA}$ et $\widehat{AOB}$, on obtient la longueur L recherchée : $L = 2\pi(\alpha + \beta + \gamma)r$.
En remarquant que $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, on déduit que $L = 4\pi r$.

REMARQUES (N.D.L.R)

I - Le 1° conduit au « *théorème de Johnson* ».
Dans la brochure n° 503 (page 11 de la plaquette annuelle APMEP), co-éditée par ACL-Editions et l'A.P.M.E.P. : « *La Jubilation en mathématiques* », André DELEDICQ démontre la structure qui conduit à ce théorème et à la propriété du 2°.
« Un cube est caché là-dedans ! »



Caché ? Pas tant que cela ! Ses sommets sont C, I, O, J pour une face, Ω , B, K, A pour la face opposée.

II - François Lo Jacomo intègre, lui, la figure du problème non pas dans une vision d'espace, mais dans une autre figure du plan :
Il construit un triangle I'J'K' dont ABC est le triangle des milieux.
Pour cela, soit I', J', K' les symétriques de O par rapport à I, J, K respectivement.

$\widehat{OCI'}$ est droit et $(I'C)//(IJ)$, avec $\overrightarrow{CI'} = \overrightarrow{JI}$.

De même $\overrightarrow{CJ'} = \overrightarrow{IJ}$.
C est donc le milieu de $[I'J']$. De même pour A et B vis-à-vis de $[J'K']$ et $[I'K']$.
Dès l'immersion de ABC dans I'J'K' on retrouve des résultats classiques :
Le cercle ABC est le cercle d'Euler du triangle $I'J'K'$. Or O est le centre du cercle circonscrit à $I'J'K'$ ($OI' = OJ' = OK' = 2r$). Donc le cercle ABC a bien pour rayon r, et O est l'orthocentre de ABC.

III - Les deux immersions de la figure donnée proposées respectivement par André Deledicq et François Lo Jacomo sont fort différentes !
Leur conjonction « inscrit le cube dans un nouveau solide... » dont l'étude se révèlerait généreuse...
La pluralité des points de vue possibles est un bel attrait de la géométrie..., leur conjonction aussi !

COMMENTAIRES

1) Voilà donc un exercice en lui-même simple et « reposant » ce qui n'est pas péjoratif, mais qui relève de belles interprétations mettant en jeu des figures clés de l'espace ou du plan.
Merci à André Deledicq. et François Lo Jacomo. de nous y avoir conduits !

2) Jacques Caron précise, pour le jury académique :
« Nous n'avons pas trouvé de copies susceptibles de mériter un prix, même académique (alors qu'en 2001 nous avions eu le 10ème lauréat national).

Notre sujet avait été choisi en pensant qu'il pouvait être fait par certains candidats, mais ils se sont tous mis sur de fausses pistes en plaçant de façon intuitive, et erronée, le centre du cercle ».

Il y avait 8 présents pour 23 inscrits.

ACADÉMIE de CLERMONT

ÉNONCÉ

1) Soit ABC un triangle. On appelle G son centre de gravité.
Montrer que : Aire (GAB)=Aire (GAC).
2) Montrer que G est le seul point M, intérieur au triangle ABC tel que :
$$\text{Aire}(MAB) = \text{Aire}(MBC) = \text{Aire}(MAC).$$
3) On suppose que ABC est un triangle acutangle (ses trois angles sont aigus ; ainsi le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est intérieur au triangle). En s'inspirant des questions précédentes, trouver une propriété, faisant intervenir les aires des triangles MAB, MBC, MAC, que seul le point O (centre du cercle circonscrit) vérifie.

SOLUTION

1) Montrons que l'on a bien :
Aire (GAB) = Aire (GBC) = Aire (GAC).
Soit I le milieu de $[BC]$. Dans le triangle ABC, appelons H le pied de la hauteur issue de A, et dans le triangle BGC, K le pied de la hauteur issue de G.

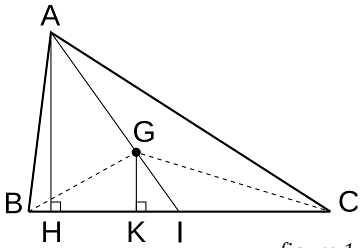


figure 1

On sait que $GI = \frac{1}{3}\ IA$

Montrons que Aire (GBC) = $\frac{1}{3}$ aire(ABC).

Si ABC est isocèle en A, alors on a $H = K = I$ et, dans ce cas :
$$\text{Aire }(BGC) = \frac{1}{2}\ GI.BC = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}IA\right).\ BC = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}IA\ .\ BC\right) = \frac{1}{3}\text{ Aire }(ABC).$$

Si ABC n'est pas isocèle, H est distinct de I, et dans le triangle AHI, en appliquant Thalès, on a : $\frac{GK}{AH} = \frac{GI}{AI} = \frac{1}{3}$. D'où $GK = \frac{1}{3}\ AH.$

On a alors :
$$\text{Aire }(BGC) = \frac{1}{2}\ GK.BC = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\ AH\right).BC = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ AH.BC\right) = \frac{1}{3}\text{ Aire }(ABC).$$

De la même façon, on montrerait que Aire (BAG)= $\frac{1}{3}$ Aire (ABC)

et que Aire (GAC)= $\frac{1}{3}$ Aire (ABC).

(on pourrait aussi évoquer que l'on vient de montrer qu'un triangle ABC étant donné, G son centre de gravité, l'aire d'un triangle ayant comme sommets G et deux des sommets de ABC, vaut un tiers de l'aire de ABC)

Ainsi, on a bien le résultat annoncé.

2) Soit M intérieur au triangle et vérifiant Aire (MAB) = Aire (MBC) = Aire (MAC).

On a Aire (MAB)= $\frac{1}{3}$ Aire (ABC) = Aire (GAB)

MAB et GAB ont même aire et une base commune, [AB] : M est donc sur la parallèle à (AB) passant par G (car les deux triangles ont même hauteur).
De même on montrerait que M est sur la parallèle à (BC) passant par G. On a donc $M = G$.
G est le seul point M intérieur au triangle ABC vérifiant la relation :

Aire (MAB) = Aire (MBC) = Aire (MAC).

3) Soit ABC acutangle et O le centre du cercle du cercle circonscrit.
Rappelons la formule, vue en classe de première comme « formule de l'aire » : *étant donné un triangle ABC, son aire S, avec les notations habituelles (a = BC, b = AC et c = AC) est donné par* :

$$S = \frac{1}{2}\, bc.\sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ac.\sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab.\sin \widehat{C}$$

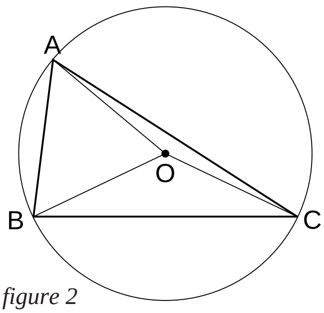


figure 2

On peut appliquer cette formule aux triangles AOB, AOC, BOC en remarquant que $OA = OB = OC = R$ (en notant R le rayon du cercle circonscrit) et, en utilisant le fait « que l'angle au centre est le double de l'angle inscrit », on obtient :

$$\text{Aire }(OAB) = \frac{1}{2} R^2 \sin (2\widehat{C})\ ;\ \ \text{Aire }(OBC) = \frac{1}{2} R^2 \sin (2\widehat{A})\ ;$$

$$\text{Aire }(OAC) = \frac{1}{2} R^2 \sin (2\widehat{B})\ .$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{\text{Aire }(OBC)}{\sin (2\widehat{A})} = \frac{\text{Aire }(OAB)}{\sin (2\widehat{C})} = \frac{\text{Aire }(OAC)}{\sin (2\widehat{B})}$$

Montrons que le point O est le seul point M intérieur au triangle ABC vérifiant la relation :

$$\frac{\text{Aire }(MBC)}{\sin (2\widehat{A})} = \frac{\text{Aire }(MAB)}{\sin (2\widehat{C})} = \frac{\text{Aire }(MAC)}{\sin (2\widehat{B})} \qquad (1)$$

Soit M un point vérifiant (1). Posons $k = \dfrac{\text{Aire }(MBC)}{\sin (2\widehat{A})}$

On a alors :
Aire (MAB) + Aire (MBC) + Aire (MAC) = Aire (ABC) d'une part,

Aire (MAB) + Aire (MBC) + Aire (MAC) = $k(\sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) + \sin(2\widehat{C}))$

d'autre part.

Or Aire(OAB) + Aire(OBC) + Aire(OAC) = Aire(ABC)

$$= \frac{1}{2} R^2 (\sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) + \sin(2\widehat{C}))$$

D'où $k = \frac{1}{2} R^2$

Ainsi $\frac{\text{Aire }(MBC)}{\sin(2\widehat{A})} = \frac{\text{Aire }(OBC)}{\sin(2\widehat{A})} = \frac{1}{2} R^2$

et en conséquence Aire (MBC) = Aire (OBC).
On en déduit que M est sur la parallèle à (BC) passant par O.
De la même façon M est sur la parallèle à (AB) passant par O, d'où nécessairement $M = O$, cqfd.

Remarques :

1) L'exercice donne deux cas particuliers du théorème qui énonce qu'étant donnés trois points A, B et C non alignés, tout point M intérieur au triangle ABC est le barycentre des points A, B et C affectés de masses proportionnelles aux aires de MBC, MAC et MAB. Ce théorème peut se démontrer élémentairement utilisant Thalès, les élèves de premières n'ayant plus à leur disposition ni produit vectoriel, ni déterminants.

2) Si on introduit les aires algébriques Aire $(ABC) = \frac{AB.AC.\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{2}$ le résultat s'étend à tous les points du plan.

VARIANTES

QUESTION 1 :

Variante 1 : cf. figure déjà tracée.

Aire (ABI) = Aire (ACI) (« bases » IB et IC égales, même hauteur AH)
Aire (GBI)=Aire (GCI) (Idem, avec GK)

Par soustraction membre à membre :

Aire (ABG) = Aire (ACG)

G jouant le même rôle pour les trois côtés, on a aussi : ... = Aire (GBC)
(En conclusion chacune des trois aires est le tiers de celle de ABC)

Variante 2 :
Comparons les aires des triangles GAB et GAC en utilisant leur côté commun AG, et les hauteurs correspondantes BT et CT'

I milieu de $[BC]$, donc aussi de $[TT']$, projeté de $[BC]$ sur (AI).

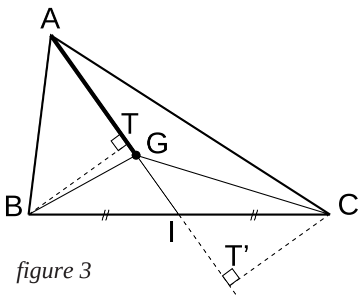


figure 3

BTCT' est donc un parallélogramme et $BT = CT'$.
D'où ...
(Pour établir que I est le milieu de [TT'], on peut aussi utiliser le fait qu'il est centre de symétrie de [BC], donc aussi des parallèles (BT) et (CT'), etc. On pourrait aussi utiliser un « cas d'isométrie » des triangles rectangles *BTI* et *CT'I*).

QUESTION 2 :

Variante 1 :

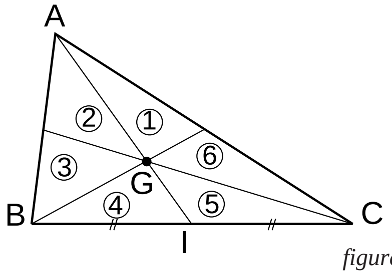


figure 4

Soit $M \neq G$, avec la même propriété.
M appartient alors à l'une des régions triangulaires numérotées ci-contre 1, 2,..., bords possibles, sauf G.
Supposons par exemple M dans 5.
Alors G est intérieur au triangle *MAB*.

Donc Aire(MAB) > $\frac{1}{3}$ Aire (ABC), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Même type de raisonnement pour les diverses régions.
Donc $M = G$.

Variante 2 :

Reprenons la figure 3 en ne supposant plus G centre de gravité (appelons-le M) et en gardant I comme intersection de (AM) et (BC)
Au départ, ici, on ignore si $IB = IC$.
Mais l'égalité des aires de *ABM* et *ACM* induit *BTCT'* est un parallélogramme, donc que I est le milieu de [BC].
Etc. : M est sur la médiane issue de A, donc aussi sur celle issue de B,... et M est le centre de gravité.

QUESTION 3

Etude directe :

La méthode indiquée dans la solution initiale semble, de loin, la plus « évidente » et la meilleure.
Mais, avec quelque pénibilité en plus, la *variante 2* de la *QUESTION 1* conduit aussi au résultat. Ainsi :

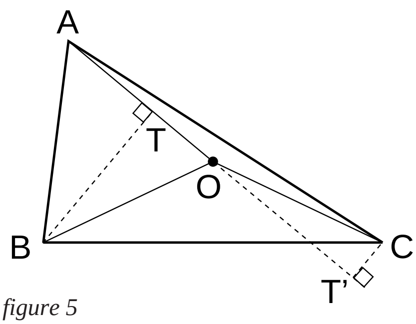


figure 5

Aire (OAB) = $\frac{1}{2} OA \times BT$.

Or, en utilisant le triangle rectangle *OBT* :

$$BT = R \sin \widehat{BOT} \quad = R \sin \widehat{AOB}$$

D'où

$$\text{Aire } (OAB) = \frac{1}{2} R^2 \sin \widehat{AOB}$$
$$= \frac{1}{2} R^2 \sin (2\widehat{C}) \quad \text{etc.}$$

Quant à l'unicité de *O* pour la proportionnalité trouvée, celle-ci pouvant s'écrire, le triangle *ABC* étant acutangle :

$$\frac{\text{Aire }(OBC)}{\sin(2\widehat{A})} = \frac{\text{Aire }(OAB)}{\sin(2\widehat{C})} = \frac{\text{Aire }(OAC)}{\sin(2\widehat{B})} = \frac{\text{Aire }(ABC)}{\sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) + \sin(2\widehat{C})}$$

pour tout *O'* vérifiant la relation, aire (*O'AB*) = aire (*OAB*).
Comme dans « *la variante 1* » de la *QUESTION 2*, une démonstration par l'absurde donne immédiatement *O'* = *O*.

COMMENTAIRES

Il s'agit d'un « bon » problème :

- 1° très facile, niveau Collège, et avec plusieurs voies d'accès,
- 2° déjà moins facile mais toujours accessible par plusieurs chemins,
- un 3° de transfert qui remplace l'égalité par une proportionnalité avec, à travers un zeste de trigonométrie, toujours à peu près les même méthodes...

Un problème « gratifiant »...

ACADÉMIE de CAEN

ÉNONCÉ

5 candidats se présentent à trois épreuves : Anne, Bertrand, Claude, Damien et Esthelle, en Sciences et Vie de la Terre, en Physique et en Mathématiques.
Attribuer à chaque candidat la note obtenue en Mathématiques.

- En SVT les notes vont de 1 en 1 de 11 à 15, en Physique de 2 en 2 de 6 à 14, en Mathématiques de 2 en 2 de 8 à 16. (*propriété 0*)
- C'est une fille qui a eu la meilleure note en mathématiques. (*propriété1*)
- Esthelle n'a pas eu 11 ni 13 en SVT. Elle a obtenu 2 points de moins en Physique qu'en Maths. (*propriété 2*)
- Claude a ramené des notes identiques en SVT et en Maths de 2 points supérieures à celle de Physique. (*propriété 4*)
- Anne qui a eu 8 en Physique, a obtenu en SVT un point de moins que l'élève ayant eu 8 en math mais un point de plus que l'élève noté 14 en maths. (*propriété 4*)
- Bertrand, en physique, a eu 2 points de plus que l'élève qui a eu 12 en SVT mais 2 points de moins que l'élève ayant eu 14 en Maths. (*propriété 5*)

N.D.L.R. Le numérotage des propriétés destiné à faciliter la rédaction du corrigé n'était pas le fait de l'énoncé de l'épreuve.

SOLUTION

Les notes en maths sont des nombres pairs, les notes en SVT sont des nombres de 1 en 1 de 11 à 15. Or Claude a eu, en maths et en SVT, la même note (*propriété 3*) donc n'a pu avoir que 12 ou 14, à la fois en maths et en SVT. Il existe donc deux possibilités pour Claude :

1) 14 en maths, 14 en SVT et 12 en physique

ou 2) 12 en maths, 12 en SVT et 10 en physique

Examinons la première possibilité.
D'après la *propriété 5*, Bertrand a eu, en physique, 2 points de moins que l'élève ayant eu 14 en maths, c'est-à-dire Claude. Bertrand a donc eu 10 en Physique.
Toujours d'après cette *propriété 5*, un autre élève a eu 12 en SVT et donc 8 en physique. Cet élève est Anne d'après la *propriété 4*.
Alors, d'après cette même propriété, un autre élève a eu 11 en SVT et 14 en physique. Cet élève ne peut être Esthelle qui a 15. Le seul couple de notes physique-maths (qui doivent différer de 2 points) possible pour Esthelle est 6-8.
Mais alors, la *propriété 4* ne peut être satisfaite : Anne n'aurait pas, dans ce cas, 1 point de moins en SVT que l'élève ayant eu 8 en maths.
Il ne reste plus, pour Claude, qu'une possibilité : 12 en Maths, 12 en SVT et 10 en physique.
Alors, d'après la *propriété 5*, Bertrand a eu 12 en physique.

D’après cette même propriété, un autre élève (*) a eu 14 en maths et 14 en physique.
D’après la *propriété 4*, les notes en SVT de l'élève qui a eu 14 en physique, d'Anne et de l'élève qui a eu 8 en maths sont des nombres consécutifs, croissants dans cet ordre. Esthelle ayant eu 12 en SVT, les trois notes précédentes sont 13, 14 et 15.
L'élève qui a eu 14 en physique a eu 13 en SVT (ce ne peut être Esthelle), Anne a eu 14 en SVT, et donc Esthelle a eu 15 en SVT.
Esthelle est donc l' élève qui a eu 8 en maths.
Il ne reste donc que Bertrand ou Anne pour avoir eu 16 en maths ; d’après la *propriété 1*, ce doit être une fille. C'est donc Anne.
On peut maintenant dire que l'autre élève (*) est Damien.

	SVT	**SVTMaths**	**Physique**
Anne	14	16	8
Bertrand	11	10	12
Claude	12	12	10
Damien	13	14	14
Esthelle	15	8	6

Remarques :

Dans le classement décroissant de la réussite des quatre exercices, celui-ci a été le deuxième, à peine moins bien que l'exercice sur « la table ronde » : moyenne de 3,55 pour l'un et de 3,60 pour l'autre.
6 candidats l'ont bien résolu avec une rédaction à peu près correcte, c'est d'ailleurs cet élément qui a souvent manqué : il est vrai qu'on peut penser qu'il était difficile de trouver dans le temps imparti une rédaction correcte et succincte.
Plusieurs candidats se sont contentés de donner une réponse brute.
22 candidats n'ont rien fait.

COMMENTAIRES, de Michel REGNAULT :

Une analyse logique : La plupart des concurrents ont abordé le problème ; plusieurs, de façon pleinement satisfaisante, en exposant une démarche déductive rigoureuse, d'autres, plus nombreux, ont donné une répartition correcte des notes dans un tableau qui, à lui seul, ne constituait pas une preuve suffisante ; la situation n'étant pas encore trop complexe, des tâtonnements plus ou moins bien maîtrisés permettaient d'aboutir au résultat.
Les amateurs retrouveront ce genre de problèmes dans des revues de jeux logiques - disponibles dans de nombreux points de vente de presse -. Une méthode systématique de résolution, en utilisant un jeu de six grilles à double entrée, y est généralement proposée.

PALMARÈS

1er Prix :	*Eric DUPUIS*	lycée Victor Grignard, Cherbourg
2ème prix (ex æquo)	*Mathieu BUNOUX*	lycée Ste-Marie, Caen
	Pierre FERRAND	lycée Dumont-d'Urville, Caen
	Simon PÉPIN LE HALLEUR	lycée Victor Hugo, Caen

ACADÉMIE de BORDEAUX

ÉNONCÉ

Les abeilles ont à déposer leur miel dans des alvéoles disposées sur une surface plane donnée. Elles vont paver cette surface au moyen de polygones réguliers juxtaposés, tous identiques.

a) Quelles sont les trois formes qu'elles peuvent choisir pour réaliser ce pavage ? (on ne justifiera pas la réponse).

La construction de ces alvéoles doit être la plus économique possible.

b) A aire égale, quel est, parmi les trois polygones réguliers possibles, celui qui a le plus petit périmètre ?

SOLUTION 1

a) Les trois formes sont : le carré, le triangle équilatéral et l'hexagone.
La démonstration, qui n'était pas demandée, part du principe que si on accole p formes identiques en un sommet A, l'angle de la forme en ce sommet étant a, on a $p \times a = 2\pi$ et d'autre part, puisque c'est un polygone régulier, si n est le nombre de côtés, on a : $a = \pi \times \dfrac{(n-2)}{n}$.

d'où $p \times (n-2)$, soit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2}$ avec p et n entiers naturels supérieurs à 2.

Seuls les couples (3 ; 6), (4 ; 4), (6 ; 3) conviennent d'où le résultat.

b) Parmi ces figures qui réalisent un pavage du plan par des polygones réguliers, c'est l'hexagone régulier qui a le plus petit périmètre. En effet :
• pour le carré : si a est le rayon du cercle circonscrit,

le périmètre est $p_4 = 4a\sqrt{2}$

et l'aire est $A_4 = 2a^2$.

• pour le triangle équilatéral : si b est le rayon du cercle circonscrit,

le périmètre est $p_3 = 3b\sqrt{3}$

et l'aire est $A_3 = \dfrac{3\sqrt{3}\,b^2}{4}$

• pour l'hexagone régulier : si c est le rayon du cercle circonscrit,

le périmètre est $p_6 = 6c$

et l'aire est $A_6 = \dfrac{3\sqrt{3}\,c^2}{4}$

Les aires doivent être égales, d'où : $2a^2 = \dfrac{3\sqrt{3}\,b^2}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}\,c^2}{2}$.

On compare p_4 et p_3 et on obtient $\left(\dfrac{p_4}{p_3}\right)^2 = \dfrac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}769$.

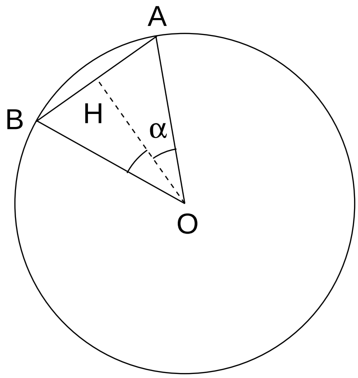
Puis on compare p_4 et p_6 et on obtient : $\left(\dfrac{p_4}{p_6}\right)^2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15$.

Donc $p_3 > p_4 > p_6$.

On peut aussi, partant d'une aire égale à 1, comparer les périmètres, après avoir exprimé le côté en fonction de l'aire.

Pour le carré, le périmètre est 4, pour le triangle équilatéral, le périmètre est $\sqrt{12\sqrt{3}}$ et pour l'hexagone, le périmètre est $\sqrt{8\sqrt{3}}$. Il est alors facile de comparer les trois périmètres pour conclure.

SOLUTION 2, pour b)



Soit un polygone régulier convexe de n côtés AB, et R le rayon du cercle circonscrit.

Recherchons une relation générale entre l'aire S et le périmètre p.

$$\alpha = \frac{\pi}{n}$$

$$S = nR^2 \cos\frac{\pi}{n}\ \sin\frac{\pi}{n}$$

$$p = 2nR \sin\frac{\pi}{n}$$

D'où $\quad p^2 = 4nS \tan\dfrac{\pi}{n}$

Pour $n = 3$, $\quad \tan\dfrac{\pi}{n} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ et $p_3^2 = 12S\sqrt{3}$

Pour $n = 4$, $\quad \tan\dfrac{\pi}{n} = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ et $p_4^2 = 16S$

Pour $n = 6$, $\quad \tan\dfrac{\pi}{6} = \text{cotan}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $p_6^2 = 24\dfrac{S}{\sqrt{3}} = 8S\sqrt{3}$

De là...

COMMENTAIRES

1) Sur les trois cas particuliers traités, on peut remarquer, qu'à aire égale, le polygone régulier a un périmètre d'autant plus petit qu'il est « voisin » du cercle.
Corrélativement, à périmètre égal, l'aire sera alors d'autant plus grande. Ce qui correspond aux villes « en rond » des temps jadis où, à longueur de remparts égale, mieux valait avoir l'aire la plus grande.
A comparer avec les rectangles de même aire, ... quand ils prennent la forme carrée ...

2) Le cas général ci-dessus esquissé exigerait l'étude de la variation de $n \tan \frac{\pi}{n}$.

3) **La cellule académique signale que :**
« Un élève a prouvé qu'il n'y a que trois polygones pouvant paver le plan, ce qui n'était pas demandé, mais cela lui a rapporté un *bonus*.
Pour la question suivante, la difficulté, pour beaucoup, a été de trouver l'aire de l'hexagone. On peut signaler *la méthode d'un élève* qui a enlevé trois triangles équilatéraux de côté a, d'un triangle de côté $3a$ et qui a prouvé qu'on obtient bien un hexagone régulier.
Pour comparer les périmètres, deux élèves sur 120 ont pensé à prendre une aire commune ».

PALMARÈS

12 élèves (sur 120) ont été primés.

1er prix :	*Alexandre BORITCHEV*	lycée Magendie, Bordeaux
2ème prix :	*Gheorghe DIMKA*	lycée Magendie, Bordeaux
3ème prix :	*Artem CHILIAKOV*	lycée Louis Barthou, Pau

P.S. On retrouve les deux premiers dans le palmarès national.

ACADÉMIE de BESANÇON

ÉNONCÉ

Victor est un écrivain très prolifique. Chaque année, il écrit un nouveau recueil de poèmes qui a la particularité de posséder un poème de plus que le recueil de l'année précédente. En 2002, après la publication de son dernier ouvrage, son éditeur lui fait remarquer que le nombre total des poèmes qu'il a écrit depuis son premier recueil est exactement égal à 2002.

Pouvez-vous dire en quelle année Victor écrivit son premier recueil de poèmes et combien de poèmes celui-ci comprenait ? (Il y a peut-être plusieurs solutions).

SOLUTION

Notons p le nombre de poèmes du premier recueil et n le nombre de recueils publiés.
On a donc :

$$p + (p + 1) + \ldots + (p + n + 1) = 2002 \quad \Leftrightarrow \quad np + 1 + 2 + \ldots + n - 1 = 2002$$

$$\Leftrightarrow \quad np + \frac{n(n-1)}{2} = 2002$$

$$\Leftrightarrow \quad n(2p + n - 1) = 4004 \qquad [1]$$

ce qui montre que n est diviseur de 4004.

Or $4004 = 2^2 \times 7 \times 11 \times 13$.

Cela fait beaucoup de diviseurs de 4004 ! (On démontre qu'il y en a $3 \times 2 \times 2 \times 2$ soit 24, ce que l'on peut expliquer, en Première, par exemple avec un « arbre »).

Peut on réduire le nombre de diviseurs envisageables ?

Remarque 1 :

On peut remarquer que n et $2p + n - 1$ sont deux diviseurs de 4004 de parité différente puisque leur différence $(2p + n - 1) - n = 2p - 1$ est impaire. Donc si n est pair, $2p + n - 1$ est impair.

Mais si n est pair, on peut écrire $n = 2q$ et [**1**] devient :

$$2q(2p + n - 1) = 4004 \text{ soit } q(2p + n - 1) = 2002.$$

Comme 2002 est pair et $2p + n - 1$ impair, il est nécessaire que q soit lui-même pair. Et donc, si n est pair, il est aussi nécessairement un multiple de 4.

[N.DL.R. : Un élève de TS irait évidemment plus vite, puisqu'il saurait que 4, divisant $n(2p + n - 1)$ et étant premier avec $(2p + n - 1)$ lorsque n est pair, doit diviser n].

Remarque 2 :

$p \geqslant 1$ donc $2p - 1 > 0$ et donc $2p + n - 1 > n$, c'est-à-dire : $\dfrac{4004}{n} > n$.

Mais, $\dfrac{4004}{n} > n \Leftrightarrow n^2 < 4004 \Leftrightarrow n < \sqrt{4004}$ car n est positif.

Comme $\sqrt{4004} \approx 63{,}28$, on peut en déduire que n est diviseur de 4004 inférieur ou égal à 63.

De là les diviseurs envisageables :

$n \in \{1, 4, 7, 11, 13, 28, 44, 52\}$.

En remplaçant dans [**1**], on vérifie facilement que toutes les valeurs précédentes fournissent bien une solution :

n	1	4	7	11	13	28	44	52
p	2002	499	283	177	148	58	24	13

Enfin, si, en 2002, on publie le n[ème] recueil de poèmes, le premier recueil a été publié en $2002 - n + 1$.
D'où le tableau de résultats suivants :

Année	2002	1999	1996	1992	1990	1975	1959	1951
p	2002	499	283	177	148	58	24	13

COMMENTAIRE

Faute de se mouvoir aisément dans cet exercice d'arithmétique, il était possible de trouver au moins les premières solutions en essayant les millésimes...

Si l'on prend à la lettre la question « Pouvez-vous dire ... comprenait-il ? », dès que l'on trouve au moins deux possibilités la réponse est « Non ! ». La remarque en italique : (il y a peut-être plusieurs solutions) invitait à interpréter la question avec moins de « mauvais esprit » !

Une certaine limitation du nombre de diviseurs de 2004 envisageables aurait pu être soufflée par l'espérance de vie humaine ! (...pas de diviseur supérieure à 100). Si l'on ne veut pas de mathématiques trop désincarnées cela ne peut être refusé !

NOMBRE DE CANDIDATS, ..., PRIX

Sur les 36 lycées de l'Académie, 13 ont envoyé des candidats « ce qui semble insuffisant au vu de l'intérêt porté cette année par les candidats ».

106 candidats étaient inscrits, 77 ont participé (de nombreux candidats inscrits se sont excusés de ne pouvoir participer à cause de manifestations sportives ou culturelles) : la participation est en légère progression par rapport à 2001.

Parmi les 77 copies, le jury en a retenu 22 de grande qualité, qui ont été classées.

Voici les 3 premiers :

1er prix :	*Mikaël MAYER*	lycée Condorcet (Belfort)
2ème prix :	*Jérémie BETTINELLI*	lycée Ledoux (Besançon)
3ème prix :	*Gilles BULTHE*	lycée Victor Hugo, (Besançon)

« Merci à tous les participants d'être venus ! Ceux qui ne sont pas classés n'ont pas pour autant démérité ! »

ACADÉMIE d'AMIENS

ÉNONCÉ

Comparer les entiers 5^{2002} et $3^{2002} + 4^{2002}$.

SOLUTION

Comme $5^2 = 3^2 + 4^2$, on a $5^{2002} = (3^2 + 4^2)^{1001}$.

Or, pour $a > 0$ et $b > 0$,

$$(a + b)^{1001} = (a + b)\dots(a + b) > a^{1001} + b^{1001}$$

Donc $5^{2002} > 3^{2002} + 4^{2002}$.

VARIANTE

(due à François Lo Jacomo)

Comme $5^2 = 3^2 + 4^2$, on a

$$\begin{aligned} 5^{2002} &= 5^2 \times 5^{2000} \\ &= (3^2 + 4^2) \times 5^{2000} \\ &= 3^2 \times 5^{2000} + 4^2 \times 5^{2000} \end{aligned}$$

Donc $5^{2002} > 3^2 \times 3^{2000} + 4^2 \times 4^{2000}$

Soit $5^{2002} > 3^{2002} + 4^{2002}$

REMARQUES DE L'ÉQUIPE ACADÉMIQUE

« Indépendamment du clin d'œil à l'année 2002, … , l'équipe pensait (à tort !) avoir choisi un exercice abordable par de nombreux participants ».

Michel Tixier ajoute :
« Les résultats furent décevants, à l'exception des deux premiers candidats. Le triplet pythagoricien (3 ; 4 ; 5) n'est pas du tout dans la tête des élèves.
Quant au fait que $a, b > 0$ entraînent $(a + b)^n > a^n + b^n$, seul le premier lauréat imagine cette inégalité et la démontre parfaitement.

COMMENTAIRE

L'idée de base du problème est, pour chacune des solutions proposées, l'introduction de $5^2 = 3^2 + 4^2$, égalité célèbre dite « du triangle (3 ; 4 ; 5) » et qui donc, peut venir spontanément à l'esprit.

Sinon, pourquoi ne pas essayer d'abord avec les exposants 1, 2, 3, 4, … pour comparer 5 à 3 + 4, 5^2 à $3^2 + 4^2$, 5^3 à $3^3 + 4^3$, etc. s'il le faut … ? La conjecture apparaît vite et l'ancrage sur $5^2 = 3^2 + 4^2$ peut s'insinuer…

A défaut, les essais peuvent induire la démarche suivante :
Dès l'exposant 3, $5^3 > 3^3 + 4^3$.

Chaque augmentation de 1 de l'exposant fait multiplier le premier membre par 5 et le second par un nombre inférieur à 4 (puisque le premier de la somme ne l'est que par 3). Donc l'inégalité ne peut que s'accroître …

L'utilisation de $5^2 = 3^2 + 4^2$ ne s'impose donc pas, ce qui rend l'exercice plus ouvert.

PALMARÈS ACADÉMIQUE

1er prix :	*Mathieu MANGION*	lycée Michelis, Amiens
2ème prix :	*Robin FISK*	lycée Marie Curie, Nogent
3ème prix :	*Mylvaganam MAYVRATHAN*	lycée Marie Curie, Nogent

(N.B. le premier prix a été 4ème accessit au palmarès national).

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2002

SUJETS ACADÉMIQUES

• L'A.P.M.E.P. vous propose ses récentes brochures, Lycées ou au-delà, parues d'Octobre à Décembre 2002 :

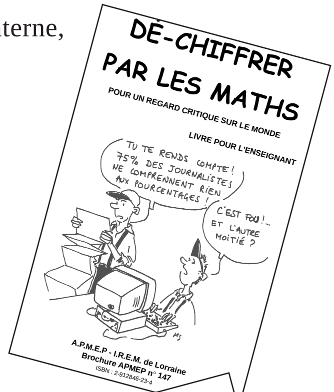
N° 140 *EVAPM TERMINALES*. Fascicule de résultats

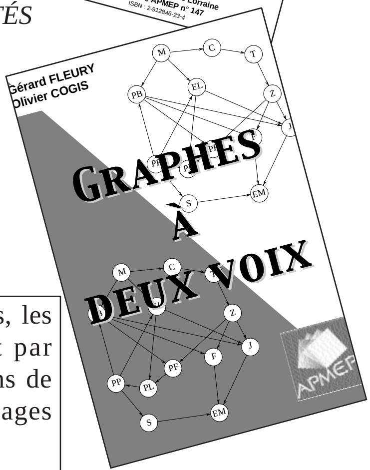
N° 145 *CINQ CONCOURS 2002* (Agrégation Interne, Capes et Caplp2 externes et internes)

N° 147 *DÉ-CHIFFRER PAR LES MATHS*

N° 148 *LES GRAPHES … À DEUX VOIX*

N° 151 *LES NARRATIONS DE RECHERCHE, de l'élémentaire au lycée.*





• *En janvier paraîtra :*

N° 143 *L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS EN LYCÉE*

• *En février - mars :*

N° 150 *« PROBLÉMATIQUES » lycée* (cf. page 14).

Pour tous renseignements sur ces brochures, les dizaines d'autres vendues à prix réduit par l'APMEP, les divers médias et les positions de l'APMEP, demandez la brochure de 48 pages (gratuite, franco de port)

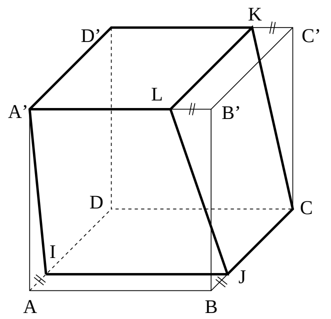
« VISAGES 2002-2003 DE L'APMEP »

Demandez-là à des collègues adhérents, ou dans les Régionales APMEP ou au secrétariat national (vous trouverez les adresses en page II de couverture).

Cette plaquette est réactualisée chaque année.

ACADÉMIE
d'AIX-MARSEILLE

ÉNONCÉ



ABCDA'B'C'D' est un cube.
Les points *I*, *J*, *K*, *L*, sont respectivement sur les arêtes [*AD*], [*BD*], [*D'C'*], [*A'B'*].
Les distances *AI*, *BJ*, *C'K* et *B'L* sont égales.
Le solide *A'LKD'IJCD* possède-t-il un axe de symétrie ?
Justifier votre réponse.

SOLUTION ABRÉGÉE

Inventaire :
Rectangle égaux *D'A'LK*, *DCJI*
Trapèzes rectangles égaux D'A'ID, DCKD'
Trapèzes égaux *LA'IJ*, *JCKL*
D'où les correspondances

I	*J*	*C*	*D*	*D'*	*A'*	*L*	*K*
K	*L*	*A'*	*D'*	*D*	*C*	*J*	*I*

S'il y a un axe (*D*) de symétrie, les couples symétriques sont :
(I,K), (J,L), (C,A'), (D,D')
Soit *M* le milieu de [*DD'*] et *O*, le centre du cube, milieu de [*CA'*].
Dans le triangle *DD'B'*, (*MO*) joint les milieux de deux côtés.
Donc $(MO) \parallel (D'B')$
De là : $(MO) \perp (DD')$, donc (*MO*) médiatrice de (*DD'*).
$(MO) \perp$ plan *A'C'CA*, donc $(MO) \perp (A'C)$ et (*MO*) est la médiatrice de [*CA'*].
Il s'ensuit, en utilisant les couples (D,D') et (C,A') que, s'il y a un axe de symétrie (*D*), il s'agit de (*MO*).

(*MO*) est-elle bien axe de symétrie ?
(*MO*) étant perpendiculaire au plan *ACC'A'* en *O*, centre du rectangle *ACC'A'* , dans la symétrie d'axe (*MO*) : $D \to D'$ $B \to B'$
$A \to C'$ $C \to A'$.
De là : $[D'C'] \to [DA]$ $K \to I$
$[A'B'] \to [CB]$ $L \to J$.
Donc le solide a bien (*MO*) comme axe de symétrie.

VARIANTE D'EXPOSITON

(due à François Lo Jacomo)

Le solide ainsi construit possède deux sommets et deux seulement, à savoir *D* et *D'*, d'où les trois arêtes sont deux à deux perpendiculaires : en effet, les angles *D'A'I* et *DCK* sont manifestement aigus, donc *D'KC* et *DIA'* obtus, et (*JL*) n'est perpendiculaire ni à la face *D'A'LK* ni à la face *DCJI*. Si la symétrie d'axe Δ transforme ce solide en lui-même, soit il laisse invariants *D* et *D'* (impossible car (*DD'*) n'est pas axe de symétrie), soit il transforme *D* en *D'*.
L'arête *DC* est alors transformée en une arête de même longueur et de sommet *D'*, donc nécessairement *D'A'*, si bien que Δ doit passer par le milieu de [*DD'*] et le milieu de [*CA'*] (le centre du cube). Il reste à vérifier que cette droite Δ est bien un axe de symétrie du solide : la symétrie par rapport à Δ transforme *DI* en *D'K* et le rectangle I*DCJ* en le rectangle *KD'A'L*, ce qui achève la démonstration.

COMMENTAIRES

Voilà un bon exercice de vision dans l'espace qui valorise la géométrie dans l'espace à partir d'un solide familier. Simple, il n'en fait pas moins appel à d'intéressantes méthodes déductives et des connaissances de base.

• **Joël Grand, responsable de la cellule académique** précise la surprise suivante des correcteurs de l'épreuve académique :

« Plusieurs élèves font un raisonnement juste en comparant les surfaces pour détecter celles qui sont égales et, donc, conclure pour les symétries.
Mais, au moment de conclure, c'est :

- soit le trou,
- soit une conclusion bizarre, sans accord avec le reste ».

PALMARÈS

Deux premiers prix, à égalité :

Rémy BONNET	Lycée E. Zola - Aix
Pierre LAFFITE	Lycée Lacordaire - Marseille.

GÉNÉRALISATION

(Extraite d'un corrigé diffusé par Animath, Poitiers, La Guadeloupe, … corrigé qui suit la méthode « Besançon », aménagé par Paul-Louis HENNEQUIN)

- On peut généraliser le problème à $n = 6k - 2$ jetons : si g est le plus grand gain, on a $2 + 3 + \ldots + n \leqslant g(n-1) / 3$ d'où $g \geqslant 9k$. On peut réaliser une telle répartition, par exemple :
  1 ; $3k$, $6k - 2$, 2 ; $3k - 1$, 4 ; … ; $2k + 1$, $5k - 1$, $2k$; puis $2k - 1$, $3k + 1$, $4k$; $2k - 3$, $3k + 2$, $4k + 1$; … 3, $4k - 1$, $5k - 2$.

- On peut montrer également que :

  - si n est pair, $g = \dfrac{3n}{2} + 3$

  - si n est impair, $g = \dfrac{3n+7}{2}$

COMMENTAIRES

Citons d'abord Michel REGNAULT.
Un problème lié aux répartitions sur un cercle des nombres de 1 à 10, … d'une simplicité trompeuse.
La demande d'un exemple, au départ, permet de bien voir le problème, mais plusieurs candidats ont paru troublés par la référence à un procédé aléatoire qui semblait à la fois donner un aspect probabiliste à la question et créer une difficulté… qu'il était, selon eux, sans doute indispensable de trouver dans ce type d'épreuves !
Pour Caen, ceux qui ont su montrer que la somme des gains des dix personnes vaut toujours 165, ont en général su conclure par l'absurde, mais on a pu remarquer quelques faiblesses dans le traitement des inégalités portant sur des entiers.
Un peu de stratégie, disperser les gros pour les entourer de plus petits, permet de donner rapidement l'exemple répondant à la troisième question.Par contre, établir l'impossibilité que tous les gains soient inférieurs ou égaux à 17, demande davantage de subtilité qu'au 2ème, et ce dernier point n'a donc été que très rarement abordé.

La plupart des commentaires vont dans ce sens.
Toulouse signalant même que : « tout le monde est loin d'avoir vu que, quelle que soit la distribution des jetons, la moyenne était constante. Beaucoup se sont contentés du cas particulier de la question 1 ».

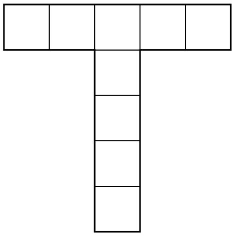
Nantes signale que « les trois premières questions ont souvent été bien faites, mais que la dernière n'a été justifiée correctement qu'une seule fois ».

EXERCICE 3

ÉNONCÉ

On dispose
• d'un damier carré formé de 10×10 petits carrés identiques ;
• d'une pièce d'un seul tenant obtenue en accolant successivement par au moins un coté 9 petits carrés identiques à ceux du damier.

Le problème consiste à poser plusieurs exemplaires identiques de cette pièce sur le damier en respectant les règles suivantes :
• chaque exemplaire peut être tourné ou retourné ;
• chaque petit carré constituant les exemplaires recouvre exactement un petit carré du damier ;
• deux exemplaires ne peuvent pas se chevaucher.



1) Dessiner l'une des solutions si on pose quatre exemplaires de la pièce représentée ci-contre :

2) Montrer que, quelle que soit la forme de la pièce de départ, il est possible de poser deux exemplaires de cette pièce en respectant les règles ci-dessus.

3) Peut-on, dans la question précédente, remplacer deux par trois, par quatre, par cinq, etc. ?

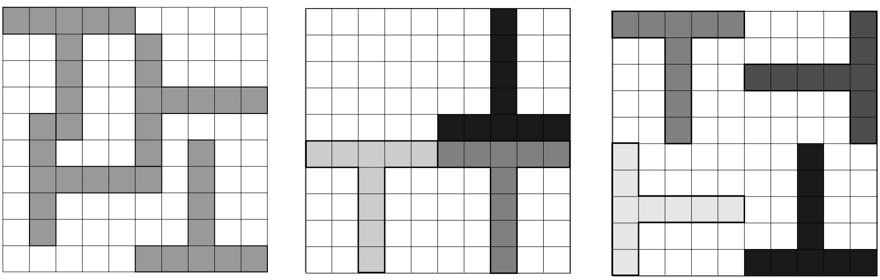
SOLUTIONS

Les diverses solutions proposées relèvent des mêmes stratégies, mais elles restent plus ou moins au niveau des questions posées.
D'où des rédactions variées proposées ci-après, dans l'ordre croissant d'explications détaillées et surtout, d'investissement théorique …

N.B. Un assemblage, par accolement d'au moins un côté, de n carrés unités s'appelle généralement « polymino d'ordre n » ou « n-omino ».

SOLUTION 1 (en majeure partie, apport de la Guadeloupe)

1 - La première question admet un grand nombre de réponses, par exemple :



2 - On peut partager le damier en deux rectangles 5×10 et remarquer que toute forme construite avec 9 carrés loge dans un de ces rectangles.
Cela introduit à la démarche essentielle qui permet de résoudre la question 3 : loger la forme donnée dans un rectangle aussi petit que possible.

3 - En observant la « longueur » et la « largeur » de chaque forme, on constate que toute forme de 9 carrés loge dans un rectangle de 1×9 ou 2×8 ou 4×6 ou 5×5.
C'est-à-dire dans un rectangle de taille $a \times (10 - a)$ pour $0 < a \leqslant 5$.

(N.D.L.R. : le troisième exemple de la question 1, proposé par Claude BAISNÉE, utilise l'invariance du carré-damier dans une rotation de $k\pi/2$ autour de son centre (k entier). Cela conduit fort bien à la figure A : il suffit de loger en coin le polymino d'ordre n et de faire tourner…)

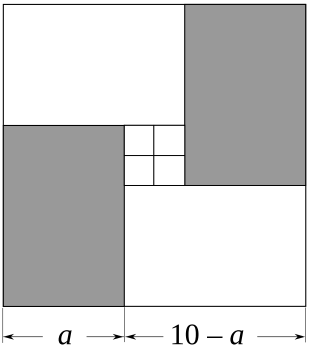
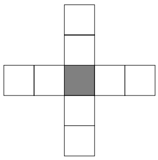


figure A

Donc, quelle que soit la forme de départ, il est possible de poser 4 exemplaires en respectant les règles.

En revanche, il n'est pas possible de poser cinq « croix ».



En effet, considérons la position du carré central (gris). Celui-ci est nécessairement à l'intérieur du carré 6×6 obtenu en retirant sur les bords du damier des bandes de largeur 2.
Diviser ce carré 6×6 en quatre carrés de taille 3×3 (figure B) que nous appellerons « carrés B ».

Comme il y a 5 carrés au centre des 5 croix, un des « carrés B » doit contenir au moins 2 des petits carrés (gris) situés au centre d'une croix, ce qui conduit à une contradiction.

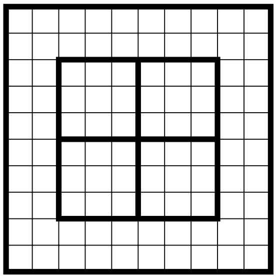
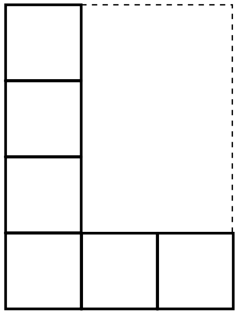


figure B

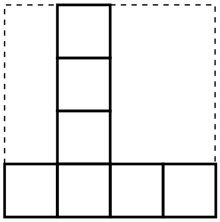
SOLUTION 2 (Due à Claude Baisnée, Caen)



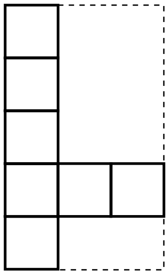
- La construction de la pièce à poser sur le damier se fait en accolant successivement neuf petits carrés. Prenons comme unité de longueur le côté d'un petit carré et examinons les dimensions de la pièce construite.

Exemple : avec six petits carrés déjà placés, on a obtenu la pièce ci-contre qui a pour dimensions 3 et 4, c'est-à-dire qu'elle peut être contenue dans un rectangle de côtés 3 et 4.

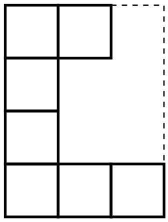
Regardons l'influence sur les dimensions de la pièce de la pose du septième petit carré.



Le carré ajouté augmente de 1 l'une des dimensions de la pièce qui, maintenant, est contenue dans un rectangle de côté 4 et 4.

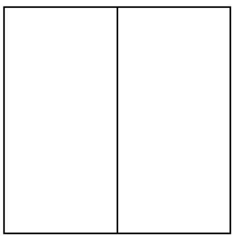


Le carré ajouté augmente de 1 l'autre dimension de la pièce qui, maintenant, est contenue dans un rectangle de côtés 3 et 5.

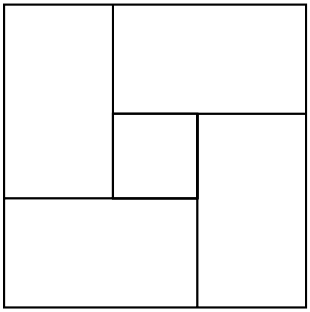


Le carré ajouté n'augmente aucune des dimensions de la pièce qui est toujours contenue dans un rectangle de côtés 3 et 4.

On peut affirmer que chaque carré ajouté augmente de 1 au plus l'une des deux dimensions de la pièce et donc de 1 au plus la somme des deux dimensions de la pièce. Le premier petit carré a pour dimensions 1 et 1 de somme 2. On ajoute 8 petits carrés, la somme des dimensions de la pièce obtenue est donc inférieure ou égale 2 + 8 soit 10.
Toute pièce formée de 9 petits carrés peut donc être contenue dans un rectangle de dimensions a et b telles que $a + b \leqslant 10$.



Partageons le damier en deux rectangles de côtés 5 et 10. Soit P une pièce quelconque pouvant être contenue dans un rectangle de côtés a et b où $a + b \leqslant 10$. L'un des nombres a et b au moins est inférieur ou égal à 5, puisque la somme est inférieure ou égale à 10. Donc la pièce P peut être contenue dans un rectangle de côté 5 et 10. On peut donc placer deux exemplaires de P sur le damier.

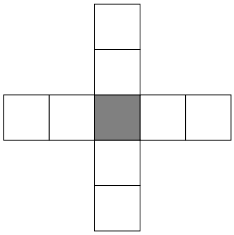


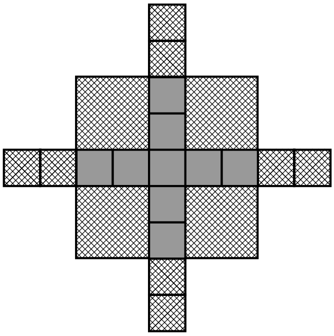
- Soit P une pièce quelconque de dimensions a et b où $a + b \leqslant 10$.

Partageons le damier selon le schéma ci-contre. Puisque $a + b \leqslant 10$, $b \leqslant 10 - a$. Un rectangle de côtés a et b est donc contenu dans un rectangle de côté a et $10 - a$.
Le damier contient 4 rectangles de côté a et $10 - a$ et peut donc recevoir 4 pièces P.
Il est donc possible, quelle que soit la pièce P, de poser quatre exemplaire de cette pièce sur le damier.

Nous allons maintenant prouver qu'il existe au moins une pièce pour laquelle on ne peut poser plus de quatre exemplaires.

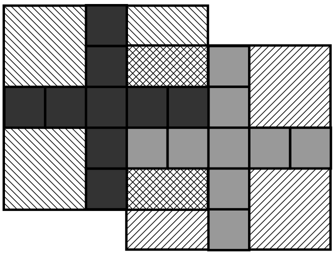
Considérons la pièce ci-contre.





Appelons zone d'influence de cette pièce la zone dans laquelle on ne peut placer le carré central d'une pièce voisine sans provoquer de chevauchement. Cette zone a la forme ci-contre. Elle est formée d'un carré de côté 5 avec des « excroissances » dont il n'est pas nécessaire de tenir compte pour la suite du raisonnement.

Les zones d'influence de deux pièces voisines peuvent se chevaucher, mais la largeur de la bande commune est inférieure ou égale à 2.
Or une pièce est en contact avec les frontières de sa zone d'influence (hors « excroissances ») qui doit donc être entièrement à l'intérieur du damier.



La longueur de la zone d'influence de deux pièces voisines placées sur le damier est donc au moins $2 \times 5 - 2$ soit 8, ce qui laisse sur le bord du damier une bande de largeur 2 au plus qui ne permet pas de placer une pièce supplémentaire.

Comme il en est de même dans la direction perpendiculaire, on ne pourra placer sur le damier plus de 2×2 soit 4 pièces.

SOLUTION 3 (Jury de Besançon)

Extraits pour les questions 2 et 3 :

Si le plus petit rectangle qui contient un n-omino a pour dimensions x_n et y_n, alors, compte tenu que les carrés unités sont attenant par un côté, si l'on rajoute un carré à ce n-omino, on obtient un $(n + 1)$-omino qui s'inscrit dans un rectangle de dimensions : $x_n \times y_n$ ou $(x_n + 1) \times y_n$ ou $x_n \times (y_n + 1)$.

En conséquence, $x_{n+1} + y_{n+1} \leqslant x_n + y_n + 1$.

Comme $x_1 = 1$ et $y_1 = 1$, alors $x_9 + y_9 \leqslant 10$ et il apparaît qu'un 9-omino est nécessairement à l'intérieur d'un rectangle de dimensions : 1×9 ou 2×8 ou 3×7 ou 4×6 ou 5×5.
[D'où la conclusion, positive, pour l'inscription de quatre 9-ominos].

Quant à l'inscription de cinq 9-ominos :

Considérons la pièce en forme de croix. Compte tenu que cette pièce est symétrique et qu'il y a dans les quatre directions deux carrés à côté du carré central, le carré central d'une croix voisine ne peut pas se trouver dans les cases marquées d'un $\times$ sur le dessin ci-dessous (fig. a).
En conséquence, dans un carré de 3 cases de côté du damier, il ne peut y avoir le carré central que d'une seule croix.
Par, ailleurs le carré central d'une croix doit se trouver à plus de 2 cases d'un bord du damier.

Les remarques précédentes et le découpage du damier ci-dessous (fig. b) montrent qu'on ne peut pas placer plus de quatre croix.

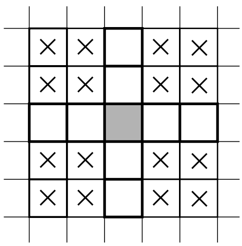


fig. a

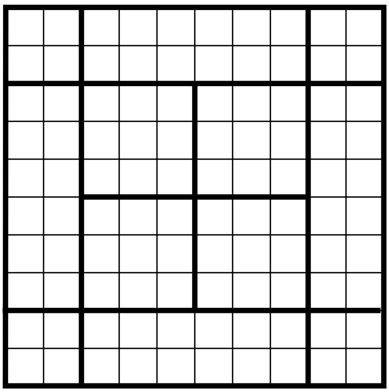


fig. b

Conclusion : On peut dans la question 2 remplacer deux uniquement par trois ou quatre.

SOLUTION 4 (Prélevée sur le site Olympiades de la Guadeloupe).

Pour résoudre l'exercice, le point clé est de démontrer qu'une pièce peut être inscrite dans un rectangle de taille $m \times n$ avec $m + n \leqslant 10$.
Montrons par récurrence qu'une pièce d'un seul tenant comportant p petits carrés peut être inscrite dans un rectangle de taille $m \times n$ où $m + n \leqslant p + 1$.
C'est vrai si $p = 1$ avec $m = n = 1$. Soit $p \geqslant 1$; on suppose l'assertion vraie pour toute pièce de p carrés. Soit P' une pièce de $p + 1$ carrés. Conformément à l'énoncé, elle est obtenue en accolant à une pièce P ayant p petits carrés un petit carré supplémentaire C ayant une arête en commun avec un carré de P. Soit R le rectangle $m \times n$ circonscrit à P ; par hypothèse de récurrence on a $m + n \leqslant p + 1$. Si C est inclus dans R on pose $R' = R$ et l'assertion est établie. Sinon, C a l'un de ses côtés en contact avec un côté K de R : dans ce cas, P' est incluse dans le rectangle R' obtenu en allongeant d'une unité les côtés perpendiculaires à K de façon que K soit intérieur à R'. Cette opération fournit un rectangle $m' \times n'$ tel que $m' + n' = m + n + 1 \leqslant p + 2$, ce qui achève la récurrence.

Deuxième façon de rédiger : le demi-périmètre du rectangle circonscrit à une p-pièce convenablement placée dans le plan Oxy est égal à la somme des longueurs des projetés de la pièce sur Ox et sur Oy. Quand on accole un petit carré supplémentaire, une de ces deux longueurs est inchangée, tandis que l'autre augmente d'au plus une unité. L'assertion en résulte par récurrence.

On raisonne désormais avec une pièce incluse dans un rectangle de taille $m \times (10 - m)$.

• On peut placer deux exemplaires dans le carré 10×10. Il suffit de remarquer que ce carré est réunion de deux rectangles 5×10 ; un exemplaire de la pièce peut être placé dans un tel rectangle car son rectangle circonscrit est de taille $m \times n$ avec $m + n \leqslant 10$; échangeant au besoin m et n, on peut supposer $m \leqslant 5$ et on a d'autre part $n \leqslant 10$.

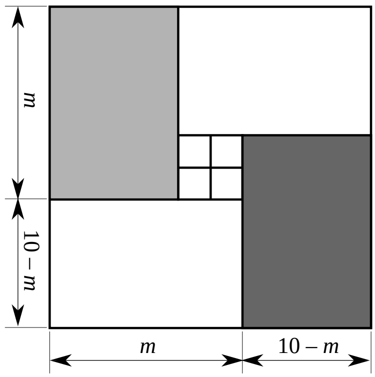


figure 2

Montrons qu'on peut placer quatre exemplaires de la pièce. On se reportera à la figure ci-dessus. On identifie le damier à la partie $E = [0,10] \times [0,10]$ du plan rapporté à un repère orthonormal. Dans E, on considère les quatre rectangles $R_1=[0,m] \times [0,10 - m]$, $R_2 = [m,10] \times [0,m]$, $R_3 = [10 - m,10] \times [m,10]$, $R_4 = [0,10 - m] \times [10 - m,10]$. Les projections sur Ox de R_1 et R_2 sont $[0,m]$ et $[m,10]$ d'intersection réduite à $\{m\}$ donc R_1 et R_2 sont d'intérieurs disjoints ; il en est de même de R_3 et R_4 (projeter encore sur Ox), de R_1 et R_4, puis R_2 et R_3 (projeter sur Oy). Enfin R_1 est dans le demi-plan d'inéquation $x + y \leqslant 10$, tandis que R_3 est dans

celui d'inéquation $x + y \geqslant 10$: cela montre que R_1 et R_3 sont d'intérieurs disjoints ; il en est de même de R_2 et R_4 en considérant les demi-plans $x - y \leqslant 0$ et $x - y \geqslant 0$.
Pour placer quatre exemplaires sur le damier, il suffit d'en placer un dans chaque rectangle R_i.

Remarque. La rédaction assez lourde qui précède est destinée ne pas dépendre d'une figure. Mais les candidats pourront se contenter de donner la figure 2 et la commenter clairement.

• Soit p la pièce en croix donnée dans la figure 3. Montrons qu'il est impossible de placer sans chevauchement cinq exemplaires de cette pièce dans un damier 10×10.
Repérons les cases du damier à l'aide des couples d'entiers (x,y) tels que $1 \leqslant x \leqslant 10$ et $1 \leqslant y \leqslant 10$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant 5$, plaçons le centre de l'exemplaire i de la pièce en position (x_i,y_i) ; les autres carrés de cet exemplaire sont alors placés en $(x_i + k,y_i)$ ou $(x_i,y_i + k)$ où k décrit $\{-2,-1,1,2\}$.
Pour que l'exemplaire i soit placé dans le damier, il faut (et il suffit) que $3 \leqslant x_i \leqslant 8$ et $3 \leqslant y_i \leqslant 8$.
Considérons le carré de taille 6×6 repéré par $F = \{3,...,8\} \times \{3,...,8\}$; les cinq couples (x_i,y_i) doivent appartenir à F.

• Partageons F en quatre carrés 3×3. Comme on a cinq couples (x_i,y_i) et quatre carrés 3×3, l'un des carrés doit contenir deux couples (x_i,y_i) et (x_j,y_j), où $i \neq j$. On aura alors $|x_i - x_j| \leqslant 2$ et $|y_i - y_j| \leqslant 2$.

Mais alors les deux exemplaires i et j se chevauchent sur la case $(x_i,y_i))$: ce chevauchement prouve l'impossibilité annoncée.

REMARQUE (extraite du corrigé d'Animath)

On peut montrer qu'il existe :

• 1285 9-minos, en choisissant, comme dans ce problème, de considérer comme égales « deux pièces qui peuvent être tournées ou retournées l'une en l'autre ».

• 2500 sortes de pièces si l'on considère comme égales deux pièces en s'autorisant à tourner mais pas à retourner.

• 9910 si l'on s'interdit de tourner et retourner.

<u>*Référence*</u> *:* GOODMAN et O'ROUKE, *Handbook and computarial geometry* - CRC Press - 1997 - p. 229.

COMMENTAIRES

Voici d'abord celui de Michel Regnault, pour Caen :

Un problème original sur le thème des polyminos dont la résolution nécessite une vraie démarche constructive.

Comme dans l'exercice précédent, si la demande d'exemple ne pose pas de réel problème, elle a le double intérêt de mettre dans le bain et d'éviter, pour certains, que le dur sentiment de n'avoir rien fait devienne du ressentiment à l'égard de la compétition.

Montrer que tout 9-minos peut être enfermé dans un rectangle 5×10 donne la clé de la deuxième question, mais beaucoup, déroutés par cette notion de forme difficile à appréhender, n'ont voulu comparer que des aires, ce qui conduisait à l'échec. Aborder la troisième question nécessitait d'avoir déjà bien compris la démarche de la deuxième.

Pour Caen, la preuve correcte que toute pièce peut être enfermée dans un rectangle $a \times (10 - a)$ a été trouvée dans deux ou trois copies, mais pour la fin, seules figuraient les prémices de l'idée qu'il existait bien une pièce suffisamment encombrante pour que cinq exemplaires ne puissent pas être posés sur le damier.

... puis quelques autres commentaires :

ceux de Toulouse :

La phrase : « chaque exemplaire peut être tourné ou retourné » a troublé certains candidats. Ils n'ont pas compris qu'il s'agissait d'une règle pour poser les pièces. Pour eux, une fois la pièce posée, il fallait avoir la place de la tourner (on se demande comment) et de la retourner.

Un seul candidat a trouvé le contre-exemple de la dernière question (pour cinq pièces).

De façon générale :

- « Les justifications (Nantes) ont été souvent confuses et incomplètes »
- La première question est pratiquement toujours résolue
- La deuxième a déjà surpris pas mal de candidats, d'autant que, corroborant le commentaire de M. Regnault, les aires sont trop souvent intervenues !
- Les candidats qui ont bien résolu la Question 2 ont généralement su répondre à la Question 3 pour placer jusqu'à quatre 9-minos.
- Les candidats qui ont su montrer qu'il n'était pas possible de poser cinq 9-ominos sont rares, de zéro à quelques-uns selon les académies.

EXERCICE n°1

ÉNONCÉ

Des fourmis se déplacent, en ligne droite, à la queue leu leu, à vitesse constante, en formant une colonne de 50 cm de long.
La dernière fourmi du groupe décide d'aller ravitailler la fourmi chef et pour cela rejoint la tête de la colonne puis, sa mission étant accomplie, retourne aussitôt à la queue de la colonne.
Sachant que, pendant cet aller-retour, la vitesse de cette fourmi est restée constante et que la colonne a parcouru 50 cm, quelle est la distance parcourue par la fourmi ravitailleuse ?

SOLUTION 1

(Rédaction Animath, Guadeloupe)

Soient : v la vitesse de la colonne en cm/s, V la vitesse de la fourmi, t_1 le temps aller de la fourmi et t_2 le temps retour.
La distance aller est $d_1 = Vt_1 = vt_1 + 50$.
La distance retour est $d_2 = Vt_2 = 50 - vt_2$.

D'où $t_1 = \dfrac{50}{V - v}$ et $t_2 = \dfrac{50}{V + v}$.

On obtient : $\dfrac{50v}{V - v} + \dfrac{50v}{V + v} = 50$.

En posant* $X = \dfrac{V}{v}$ on a alors $X^2 - 2X - 1 = 0$ d'où $V = (1 + \sqrt{2})v$.

En conclusion la distance parcourue est $50(1 + \sqrt{2})$ cm.

* N.D.L.R. : insistons sur la méthode (comme le fait l'académie de Versailles) : l'égalité précédente s'écrit, après réductions faciles, $2vV = V^2 - v^2$. Elle est **homogène** par rapport aux deux inconnues v et V. *Ce qui induit l'utilisation de leur rapport.*

SOLUTION 2

(de même type, mais la rédaction est plus détaillée)

Notons :
v_c et v_r les vitesses respectives de la colonne et de la fourmi ravitailleuse, t le temps du parcours complet c'est-à-dire le temps que met la fourmi ravitailleuse à retourner à sa place et t_1 le temps intermédiaire qui lui est nécessaire pour rejoindre la tête de la colonne.
La colonne a progressé de 50 cm donc $v_c t = 50$.

Pendant le temps t_i, la colonne a progressé de $v_c t_i$ donc, la fourmi ravitailleuse qui a rejoint la tête a parcouru $50 + v_c t_i$ .Comme elle progresse à la vitesse de v_r, on peut écrire :

$$50 + v_c t_i = v_r t_i \qquad [1]$$

Pendant le temps qu'il reste c'est-à-dire $t - t_i$, la colonne parcourt encore $50 - v_c t_i$. Donc, pour revenir se placer en queue, la fourmi refait dans l'autre sens la distance $50 - (50 - v_c t_i) = v_c t_i$ qui la sépare de la fin de la colonne. Comme elle progresse à la vitesse de v, on peut écrire :

$$v_c t_i = v_r (t_i - t) \qquad [2]$$

Avec $v_c t = 50$, l'égalité [1] s'écrit : $v_c(t + t_i) = v_r t_i$ d'où $\dfrac{v_r}{v_c} = \dfrac{t + t_i}{t_i}$.

Et, l'égalité [2] s'écrivant aussi : $\dfrac{v_r}{v_c} = \dfrac{t_i}{t - t_i}$, on en déduit $\dfrac{t + t_i}{t_i} = \dfrac{t_i}{t - t_i}$.

D'où l'on tire directement $t = \sqrt{2}\, t_i$.

En conséquence, $\dfrac{v_r}{v_c} = \dfrac{\sqrt{2}\, t_i + t_i}{t_i} = \sqrt{2} + 1$ et donc $v_r = \left(\sqrt{2} + 1\right) v_c$. .

Conclusion : La distance totale parcourue par la fourmi ravitailleuse est donc, en cm :

$$v_r t = \left(\sqrt{2} + 1\right) v_c t = 50\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

SOLUTION 3

(de même type selon une rédaction de Claude BAISNÉE,
lycée Dumont d'Urville, à Caen)

N.B. toutes les solutions de M. Claude BAISNÉE, notamment pour les quatre exercices traités à Caen, sont sur le site de l'Académie de Caen.

Claude BAISNÉE nous propose deux corrigés (ce seront nos solutions 3 et 4), avec des choix différents d'inconnues « On pourra ainsi constater - dit-il - combien ce choix influe sur la simplicité et la rapidité de la résolution ».

Voici le premier :

Soit f la vitesse de la fourmi ravitailleuse et c la vitesse de la colonne.

1ère étape : la fourmi ravitailleuse rejoint la tête de la colonne.

Soit t_1 la durée de cette étape.

Distance parcourue par la fourmi ravitailleuse : $f\, t_1$.

Distance parcourue par la colonne : $c\, t_1$.

Or la tête de la colonne et la fourmi ravitailleuse se déplacent dans le même sens et 50 cm les séparent au début. Donc la fourmi ravitailleuse a parcouru 50 cm de plus que la colonne :

$f t_1 = 50 + c t_1$ qui peut s'écrire $t_1 = \dfrac{50}{f - c}$ (relation 1).

2ème *étape* : la fourmi ravitailleuse retourne à l'arrière de la colonne.

Soit t_2 la durée de cette étape.

Distance parcourue par la fourmi ravitailleuse : $f t_2$.

Distance parcourue par la colonne : $c t_2$.

Or la fourmi ravitailleuse et la queue de la colonne se déplacent en sens inverse et 50 cm les séparent du début. Donc la somme des distances parcourues par la fourmi ravitailleuse et la colonne est égale à 50 cm :

$f t_2 + c t_2 = 50$ qui peut s'écrire $t_2 = \dfrac{50}{f + c}$ (relation 2).

La colonne, pendant le temps $t_1 + t_2$ a parcouru 50 cm d'où $c(t_1 + t_2) = 50$, soit, en utilisant les relations 1 et 2, $c\left(\dfrac{50}{f - c} + \dfrac{50}{f + c}\right) = 50$.

Par multiplication par $(f - c)(f + c)$ et division par 50, on obtient
$c(f - c) + c(f + c) = f^2 - c^2$ ou, après développement et réduction $f^2 - 2cf - c^2 = 0$.

Par division par c^2, cette égalité conduit à $\left(\dfrac{f}{c}\right)^2 - 2\,\dfrac{f}{c} - 1 = 0$.

$\dfrac{f}{c}$ est donc solution de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 8$ et les solutions sont $x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2}$ soit $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

f et c étant des nombres positifs, $\dfrac{f}{c}$ est positif. Donc $\dfrac{f}{c} = 1 + \sqrt{2}$.

D'où $f = \left(1 + \sqrt{2}\right)c$.

Alors la distance parcourue par la fourmi est égale à celle parcourue par la colonne multipliée par le même facteur soit $50\left(1 + \sqrt{2}\right)$, c'est-à-dire environ 120,7 cm (à 1 mm près par défaut).

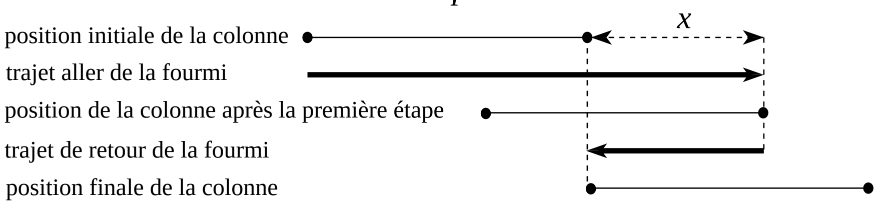
SOLUTION 4

(donc, toujours de Claude BAISNÉE ; également indiquée,
à une nuance rédactionnelle près, par l'équipe de Besançon)

Propriété : Lorsque deux mobiles de vitesses v et v' parcourent, pendant le même temps t, des distances d et d', le quotient $\dfrac{d}{d'}$ des distances parcourues est égal au quotient $\dfrac{v}{v'}$ des vitesses.

En effet $\dfrac{d}{d'} = \dfrac{vt}{v't}$ donc $\dfrac{d}{d'} = \dfrac{v}{v'}$.

Schéma du problème



Soit x la distance parcourue par la colonne pendant la première étape, c'est-à-dire pendant que la fourmi ravitailleuse rejoint la tête de la colonne. Pendant cette étape, la fourmi ravitailleuse et la colonne se déplacent dans le même sens, donc la fourmi parcourt 50 cm de plus que la colonne.

Quotient des distances parcourues et donc des vitesses : $\dfrac{x}{x+50}$.

Pendant la deuxième étape, la colonne parcourt la distance $50 - x$ puisqu'elle parcourt au total 50 cm. La fourmi ravitailleuse, pendant ce temps, parcourt la distance x (voir schéma).

Quotient des distances parcourues et donc des vitesses : $\dfrac{50-x}{x}$.

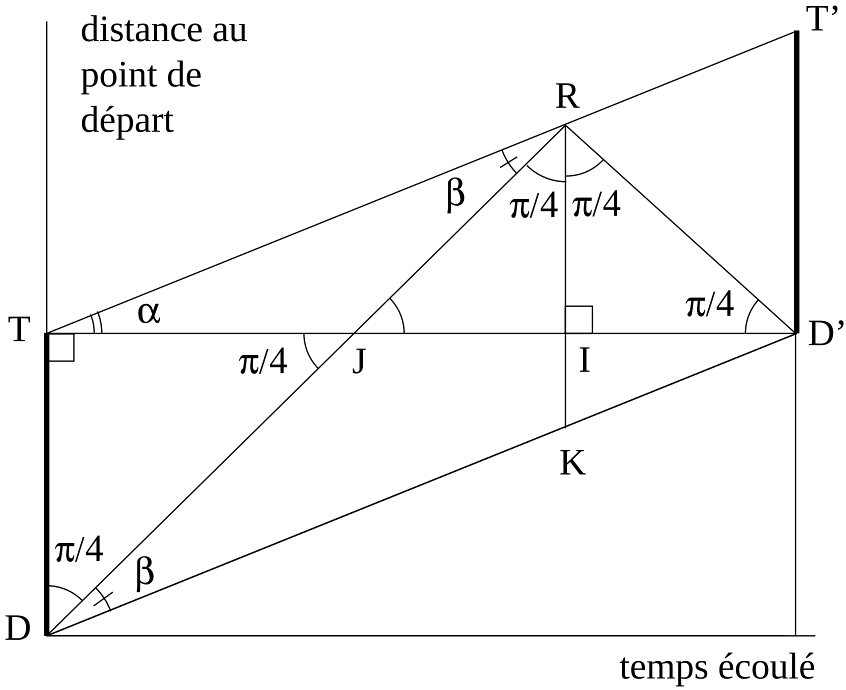
Or les vitesses sont restées constantes, donc $\dfrac{x}{x+50} = \dfrac{50-x}{x}$ qui équivaut à $x^2 = (50 - x)(50 + x)$ soit, après développement, réduction, et division par 2, $x^2 = 1250$.

Cette dernière équation a pour unique solution $x = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}$ puisque x, qui est une distance, est un nombre positif.
La fourmi ravitailleuse a donc parcouru une distance égale à $50 + 2x$ soit $50 + 50\sqrt{2}$ cm, c'est-à-dire environ 120,7 cm (à 1mm près par défaut).

SOLUTION 5

Très belle solution graphique, due à Denis HARTEMAN, professeur à Besançon, au lycée Victor Hugo, que nous remercions et félicitons chaleureusement.

On représente la distance qui sépare les fourmis de leur point de départ en fonction du temps écoulé. La vitesse étant constante, *DD'* et *TT'* sont des segments... de pente la vitesse en question.
La fourmi ravitailleuse marchant elle aussi à vitesse constante et revenant sur ses pas, les angles *DRK* et *KRD'* sont égaux.
La distance totale parcourue par cette fourmi est $50 + 2RI$.
Quitte à changer l'unité sur l'axe du temps, on peut supposer que l'angle DRD' est droit.



Les points *T* et *R* sont sur le cercle de diamètre *DD'* et donc les angles *RTD'* et *RDD'* qui interceptent le même arc sont égaux. Autrement dit, $\alpha = \beta$.
Donc le triangle *TJR* est isocèle en *J* et $JR = JT = 50$. D'où : $RI = 25\sqrt{2}$.

<u>Conclusion</u> : La distance parcourue par la fourmi ravitailleuse est $50(1 + \sqrt{2})$.

Remarque :
Une autre méthode, moins élégante (puisqu'il y a un calcul), consiste à remarquer que les triangles *TD'T'* et *D'IK* étant semblables,

$$\frac{IK}{ID'} = \frac{D'T'}{D'T} \text{ c'est-à-dire } \frac{50 - RI}{RI} = \frac{50}{50 + 2RI}$$

Cette dernière égalité donnant directement $RI = 25\sqrt{2}$ ...

COMMENTAIRES

1) Un commentaire général de Michel Regnault, lycée Napoléon. L'AIGLE. Académie de Caen.

Un grand classique revisité ! Sorti du domaine de la cinématique où cohabitent pacifiquement mathématique et physique, sa résolution demande de bien décomposer le mouvement en ses deux phases aller et retour.

Il paraît naturel d'introduire, comme inconnues, la vitesse c de la colonne, celle f de la ravitailleuse et les deux durées de parcours, mais après élimination des temps, on aboutit à une forme quadratique en f et c, dont les quelques élèves qui y sont parvenus, n'ont pas su se débrouiller...n'ayant pas vu que la détermination de f/c suffisait pour conclure.

Une deuxième méthode, ici méthode 4, basée sur la remarque que, les mouvements étant uniformes, pour un même intervalle de temps, le rapport des vitesses est égal à celui des distances parcourues, permet d'obtenir directement une équation du second degré dont la seule inconnue est la distance parcourue par la colonne durant la première phase.

Pour Caen, le pourcentage de succès est faible. Beaucoup de fautes grossières par manque d'analyse, mais plusieurs exposés corrects à partir de la deuxième méthode, parfois de façon étrangement elliptique, ce qui laisse à penser que le problème avait, pour certains, un air de déjà vu. C'est le risque pris quand on propose un classique, mais, après tout, il n'est pas interdit d'avoir un peu de culture !

Est-il utile de proposer quelques références ? (non exhaustives) : on trouvera une mouture militaro-équestre dans « les casse-tête mathématiques de Sam Loyd » par Martin Gardner (Dunod), qui contient la version simple, remontée d'une colonne, et une version plus épicée, chemin reliant les sommets d'un carré animé d'un mouvement rectiligne uniforme, un remake motocycliste dans Jeux et Stratégies (n°43), toutes reprises dans le manuel de 1ère S Collection Terracher (Hachette).

2) Partout les résultats sont mitigés :

- Cet exercice avait été proposé par l'Académie d'Amiens. Son équipe a été « surprise » par les résultats, pas bons du tout dans cette académie : « Est-ce - dit Michel Tixier - le mélange “Mathématiques - Cinématique” de la relation $d = vt$ qui a fait peur aux candidats ? »

- Exercice pas bien réussi, « contrairement aux attentes », « sauf par quelques astucieux », (par exemple à La Réunion, en Corse,...)
- Mais une Académie (Bordeaux) signale que « l'exercice a été résolu par beaucoup d'élèves ».
- Une autre (Nantes) signale qu'une quinzaine d'élèves (sur 256 présents) a réussi l'exercice, et qu'un élève a proposé une représentation graphique et utilisant des représentations de droites (N.D.L.R. : cf. solution 5. Bravo pour cet élève !).
- « De nombreux candidats ont été gênés par le fait que la vitesse de la colonne des fourmis n'était pas donnée ». elle était effectivement inutile. Et on peut réfléchir au « pourquoi ? » correspondant.
- On a noté, ici ou là, `« une solution très rapide de certains candidats qui ont pris comme inconnue la distance parcourue par la colonne jusqu'au moment du ravitaillement ».
- ...et ... « les meilleurs candidats traitent généralement bien ce premier exercice ».

EXERCICE 2

ÉNONCÉ

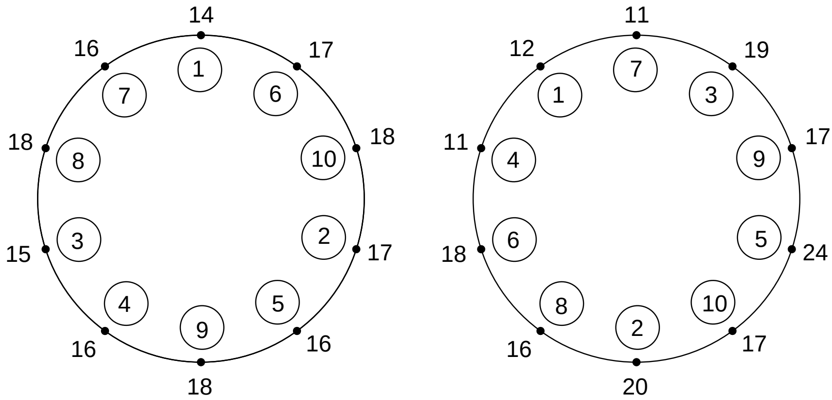
10 personnes sont assises autour d'une table ronde.
10 jetons portant les numéros de 1 à 10 sont distribués au hasard à ces 10 personnes.
Chaque personne gagne une somme égale en euros au total du numéro de son propre jeton, de celui de son voisin de gauche et de celui de son voisin de droite.

1) A l'aide d'un procédé aléatoire de votre choix, donner un exemple de répartition des jetons.
   Sur cet exemple, indiquer le gain de chaque personne et la moyenne de ces 10 gains.
2) Prouver que, quelle que soit la répartition des jetons, au moins une des dix personnes aura un gain supérieur ou égal à 17 €.
3) Donner un exemple où tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18.
4) Peut-on, dans la deuxième question, remplacer 17 par 18 ?

SOLUTIONS

Question 1 :

• En s'en tenant scrupuleusement à l'énoncé, voici des exemples de répartition, proposés par Besançon et Cl. Baisnée :



Les jetons sont à l'intérieur et les points à l'extérieur.
La moyenne des gains est 16,5.

• Certaine réponses anticipent sur la Question 2.

Question 2 :

La somme inscrite sur chaque jeton intervient trois fois : une fois directement, pour le possesseur du jeton, et une fois pour chacun de ses voisins.

De là le total des gains :

$$3 \times (1 + 2 + \ldots + 9 + 10) \quad = \quad 3 \times 55 = 165 \text{ (il est constant)}$$

et leur moyenne : 16,5 (donc constante).

Si personne ne recevait plus de 16 €, la moyenne serait inférieure ou égale à 16 €. Comme il n'en est pas ainsi, il y a au moins un gain strictement supérieur à 16 €, donc au moins égal à 17 €.

Question 3 :

Le premier exemple cité à la question 1 convient.
Divers jurys académiques et Animath proposent, en complément, une stratégie pour construire de telles répartitions :

On met à part le 1 et on répartit les 9 autres jetons par groupes de trois consécutifs. Soit α, β, γ, dans l'ordre décroissant, un tel groupement. La somme $\alpha + \beta + \gamma$ est le gain du joueur qui fait face à β. Donc, en exigeant que tous les gains soient inférieurs ou égaux à 18, cette condition se répercute sur les groupements par trois jetons.

Comme, de plus, la somme 55 des points de tous les jetons est égale à $1 + 3 \times 18$, il s'ensuit que chaque $\alpha + \beta + \gamma$ est égal à 18.

Recherchons donc les partitions de 18 en trois nombres choisis de 2 à 10.

Nous obtenons :	10 + 6 + 2 ;	10 + 5 + 3 ;	9 + 7 + 2	
	9 + 6 + 3 ;	9 + 5 + 4 ;	8 + 7 + 3	
	8 + 6 + 4 ;	7 + 6 + 5.		

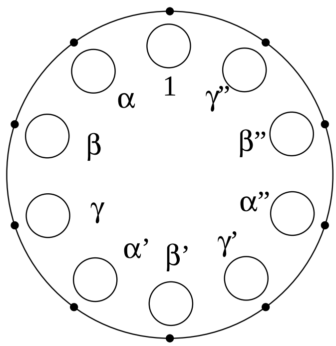
Le choix initial de 10 + 6 + 2, par exemple, entraîne les deux autres (pas de recouvrements !)
Avec {10 ; 6 ; 2}, ce sera {9 ; 5 ; 4} et {8 ; 7 ; 3}
Avec {10 ; 5 ; 3}, ce sera {9 ; 7 ; 2} et {8 ; 6 ; 4}
Tandis que {9 ; 6 ; 3} et {7 ; 6 ; 5} ne peuvent s'associer à rien.

Dans chacune des deux associations possibles, il existe plusieurs solutions :
Ainsi, avec la première, on peut avoir la suite 1 ; 10 ; 6 ; 2 ; 9 ; 5 ; 4 ; 8 ; 3 ; 7 (mais surtout pas {8 ; 7 ; 3} ou la suite du premier dessin ou « la disparition symétrique par rapport au diamètre passant par 1 »). Bien vérifier si tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18 ; *la contrainte de la partition de 18 en trois* $\{\alpha ; \beta ; \gamma\}$ *est nécessaire mais pas suffisante !* (ainsi la suite de jetons 1 ; 10 ; 6 ; 2 ; 4 ; 9 ; 5 ; 8 ; 7 ; 3 ne convient pas : en face du 5 le gain serait 22 et 20 en face du 8).

Question 4 :

Méthode 1 : qui utilise les trois groupements donnés, en complément, à la question 3 et que que nous réexpliquons :

Supposons tous le gains inférieurs ou égaux à 17.
Alors $\alpha + \beta + \gamma$, qui est le gain du joueur qui fait face à β, est inférieur ou égal à 17.
De même $\alpha' + \beta' + \gamma'$ et $\alpha'' + \beta'' + \gamma''$.
Mais alors la somme des nombres des 10 jetons serait inférieure ou égale à $1 + 17 \times 3$, c'est-à-dire 52. Or elle vaut 55 !
Il existe donc nécessairement au moins un gain supérieur ou égal à 18.
Les deux exemples de la Question 1 fournissent un cas de gain maximum, égal à 18, réalisé trois fois, et un cas où il y a un gain 18 et trois gains supérieurs (19 ; 20 ; 24).



Méthode 2 :

Elle est fondée sur deux observations :

1 - Deux voisins ont nécessairement des gains distincts : sinon, l'un gagnant $a + b + c$, et l'autre $b + c + d$, il s'ensuivrait $a = d$, ce qui est impossible. Donc il y a au maximum cinq joueurs qui ont le même gain.

2 - Le total des gains est 165. Si l'on n'envisage pas de gain strictement supérieur à 17, ce total ne peut être atteint qu'en compensant au maximum les gains strictement inférieurs à 17. *Cela conduit à cinq gains 17 et cinq gains 16, comme condition nécessaire.*

Est-elle suffisante ?
Examinons ce qui se passe sur les jetons.
Plaçons-les dans l'ordre croissant a_1, a_2, … , le jeton a_i portant le nombre i.
Compte tenu de l'alternance des 16 et des 17, nous aurons, par exemple, $a_1 + a_2 + a_3 = 16$ ou $a_1 + a_2 + a_3 = 17$, puis, dans le premier cas $a_2 + a_3 + a_4 = 17$, ce qui donne $a_4 - a_1 = 1$. Or, déjà, $a_2 - a_1 = 1$, ce qui exigerait $a_4 = a_2$, ce qui est impossible.
Idem avec le choix $a_1 + a_2 + a_3 = 17$.

Conclusion : il est impossible qu'il n'y ait pas de gain strictement supérieur à 17 €.

Variante pour l'observation (2). (Extraite d'un corrigé diffusé, entre autres, par Besançon) :

• Supposons que le gain maximum soit 17 € et notons n le nombre de personnes gagnant 17 €. Compte tenu de la remarque précédente, on a $n \leqslant 5$.
Les $10 - n$ autres personnes reçoivent en moyenne, en euros, $\dfrac{165 - 17n}{10 - n} = 17 - \dfrac{5}{10 - n}$.

Mais si $n < 5$, alors $17 - \dfrac{5}{10 - n} > 16$ ce qui n'est pas possible, ces personnes gagnant au maximum 16 € chacune, donc $n = 5$.

Enfin, quand $n = 5$, la moyenne des gains des 5 autres personnes est égale, en euros, à $17 - \dfrac{5}{10 - n} = 16$. Comme elles ne gagnent pas plus de 16 €, on en déduit qu'elles gagnent chacune exactement 16 €.

Variante pour la suite (même source)

En notant a, b, c, etc. les jetons dans l'ordre, a étant celui de quelqu'un qui gagne 16 €, on a :

$$\begin{cases} a + b + c = 17 \\ b + c + d = 16 \\ c + d + e = 17 \\ d + e + f = 16 \\ e + f + g = 17 \end{cases}$$

Les deux premières lignes et les deux dernières donnent respectivement $a - d = 1$ et $g - d = 1$. On en déduit $a = g$, ce qui est impossible.

RAPPORT
SUR LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES DE 2002

Dominique Roux,
Inspecteur Général de l'éducation Nationale,
président des Olympiades académiques de Première

1°) Principe et création

Pour le ministre et par délégation, Madame Becquelin, Doyenne de L'Inspection générale et Monsieur de Gaudemar, directeur de l'enseignement scolaire adressaient le 9 novembre 2000 une lettre aux recteurs d'académie leur annonçant la création d'olympiades académiques de mathématiques en direction des lycéens des classes de première scientifiques et technologiques dans un but de favoriser l'émergence d'une nouvelle culture scientifique et technologique. La démarche préconisée doit conduire à développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche. Elle doit permettre d'aborder les exercices et problèmes de la manière la plus ouverte. Sa dimension académique favorise les relations entre les professeurs d'une même académie et les corps d'inspection tout en permettant le repérage, au plan national, et des lauréats susceptibles de participer à des compétitions nationales et internationales.

2°) Organisation et dispositif (cf B.O. n°44 du 7 décembre 2000)

Le dispositif comprend un groupe national présidé par un inspecteur général et dans chaque académie une cellule présidée par un responsable désigné par le recteur en liaison avec l'inspection générale. L'épreuve, d'une durée de quatre heures, comprend quatre exercices : trois choisis par le groupe national plus un quatrième élaboré par chaque cellule académique. Une publicité a été faite par voie d'affiches en couleur format A3 confectionnées et envoyées en triple exemplaire dans chaque lycée par la MICOM (MIssion ministérielle à la COMmunication) accompagnées d'une lettre adressée aux proviseurs. L'épreuve s'est déroulée le mercredi 27 mars 2002 de 14h à 18h en métropole, les horaires étant décalés pour les académies lointaines de façon à empêcher la transmission des sujets par courrier électronique entre les candidats.

La correction des copies a été assurée localement, dans chaque académie, par les cellules académiques qui ont envoyé au groupe national les meilleures copies. Celles-ci ont été classées par le groupe national afin d'établir un palmarès comprenant des prix et des accessits.

3°) BILAN pour l’année 2002

Cette seconde année succède à une première qui fut marquée par des exercices jugés trop difficiles, ce qui provoqué un certain découragement chez les candidats.

Cette année, il y a eu plus de 6000 inscrits mais le nombre de copies n’a été, finalement, que d’un peu plus de 4000, car de nombreux candidats ont été sollicités par d’autres activités ou compétitions sportives.

Le jury national a tenu le plus grand compte de l’expérience de 2001 et a adapté la nature et le niveau des exercices proposés en conséquence. Sur ce plan, l’objectif semble atteint car les candidats ont exprimé beaucoup d’intérêt, principalement pour les exercices 3 et 4. Certains d’entre eux continuaient après l’épreuve à échanger des idées afin de résoudre ces questions.

Une centaine de copies sont parvenues au groupe national. Certaines sont d’un très bon niveau et les quatre exercices y sont traités. Nous avons pu décerner 3 prix et 11 accessits et nous notons la présence de 3 jeunes filles dans les 14 lauréats nationaux.

4°) Conclusion

Il convient de remercier la compétence et le dévouement déployés par les équipes académiques, par les IA-IPR et par tous ceux qui sont impliqués dans cette vaste compétition. Il y a lieu également de se réjouir de la mise en place sous la présidence de la DESCO, d'une véritable remise des prix officielle au Palais de la découverte le 21 juin 2002 avec la présence de nombreuses personnalités et la remise de cadeaux donnés par l'association ANIMATH, en particulier de stages organisés du 3 au 10 juillet à Vendôme par cette association.

Dominique ROUX
Inspecteur Général de Mathématiques
Président du Jury national

Quelques commentaires sur les sujets

Paul-Louis Hennequin

Comme je l'avais fait l'année dernière, j'ai tenté de comparer, dans un tableau synthétique, les exercices proposés.

J'ai indiqué tout d'abord à quelles branches des mathématiques chacun se rattache : la plupart se cantonnent dans une, mais certains en font intervenir trois.

Par rapport à l'année dernière, je déplore la disparition de la statistique, bien que son intervention dans les programmes soit une innovation majeure. Par contre la logique est apparue, au niveau le plus élémentaire bien sûr.

J'ai repris dans les deux dernières colonnes le nombre de questions posées dans chaque exercice et la longueur moyenne (en quart de page imprimée) d'une solution explicitant raisonnements et démonstrations. Une grande disparité (de 1 à 4) apparaît sur les deux critères : bien sûr, multiplier les questions explicite la démarche à suivre et, telle une échelle, facilite l'escalade d'un mur ; bien sûr aussi l'utilisation d'une astuce permet souvent de court-circuiter les étapes et d'abréger la solution.
Globalement les écarts de difficulté entre les sujets ont beaucoup diminué et aucun n'a arrêté d'emblée les nombreux bons candidats. Il faut se féliciter que la plupart des exercices présentaient des angles d'attaques variés et, partant, un grand nombre de solutions.
Cette année, de nouveau, ces olympiades ont mobilisé beaucoup d'énergies et de bonnes volontés et suscité l'enthousiasme des lauréats rencontrés lors des remises de prix académiques ou nationale ; réjouissons-nous en !

	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	fonctions	polynômes	géométrie plane	géométrie espace	nombre de questions	longueur de la solution
Aix-Marseille										×	1	4
Amiens	×							×			1	1
Besançon	×		×			×					2	4
Bordeaux					×				×		2	4
Caen				×							4	4
Clermont									×		3	3
Corse									×		3	3
Créteil									×		2	3
Dijon							×		×		3	3

	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	fonctions	polynômes	géométrie plane	géométrie espace	nbre de questionsd	longueur solution
Grenoble							×		×		1	3
Guadeloupe									×		1	3
Lille							×			×	2	2
Limoges						×			×		2	3
Lyon										×	3	4
Montpellier					×				×		1	3
Nancy-Metz									×		3	3
Nantes									×		1	3
Nice	×			×							4	1
Orléans-Tours										×	2	1
Paris									×		1	1
Poitiers							×		×		2	3
Reims	×	×			×						1	2
Rennes	×							×			3	3
Réunion	×					×					1	2
Rouen		×	×				×				1	2
Strasbourg			×						×		2	3
Toulouse	×					×					1	1
Versailles									×		2	3
National 1							×		×		1	3
National 2	×		×		×						4	3
National 3	×		×	×							3	4

STATISTIQUES

Nombre des présents (= des copies)

Aix-Marseille	61	Amiens	72	Besançon	106	Bordeaux	118
Caen	93	Clermont	90	Corse	8	Créteil	292
Dijon	279	Grenoble	65	Guadeloupe	44	Lille	249
Limoges	61	Lyon	209	Nancy-Metz	238	Nantes	256
Orléans-Tours	130	Paris	201	Poitiers	75	Reims	106
Rennes	113	Réunion	77	Rouen	41	Strasbourg	84
Toulouse	206	Versaille	604				

Soit un total de 4075 présents (sur plus de 6000 inscrits)

PALMARES NATIONAL

ANNEE 2002

PRIX

1[er] prix : *Olivier Benoist*, lycée Blaise Pascal, Orsay
2[ème] prix : *Alexandre Boritchev*, lycée Magendie, Bordeaux
3[ème] prix : *Pierre Simon*, cité scolaire Gerland, Lyon

1[er] accessit ex-æquo :

Joël Sébastien Clément, lycée Joffre, Montpellier
Gheorghe Dimca, lycée Magendie, Bordeaux
Arnaud Le Guilcher, lycée H. Moissan, Meaux.

4[ème] accessit ex-æquo :

Cédric Biron, Lycée De Lattre de Tassigny, La Roche-sur-Yon
Guillaume Choumet, Lycée J. d'Albret, St Germain-en-Laye
Elsa Jousseau, lycée Lamartine, Mâcon
Mathieu Mangion, lycée M. Michelis, Amiens
Mikaël Mayer, lycée Condorcet, Belfort
Jonathan Nussbaumer, lycée St Léon, Nancy
Julie Palayret, lycée Stanislas, Paris
Lydie Ribeaucourt, lycée Pierre Forest, Maubeuge.

CALENDRIER 2002-2003

• Envoi des propositions académiques (au Ministère de l'Education Nationale)
Date limite : 20 octobre 2002

• Réunion du jury pour le choix des énoncés nationaux
Mercredi 6 novembre 2002.

• Clôture des inscriptions : 15 janvier 2003.

• Date de l'épreuve : Mercredi 26 mars 2003

• Envoi des copies du M.E.N. (+ documents : énoncés, corrigés, rapports)
Date limite 10 mai 2003

• Réunion du jury pour le palmarès national
Mercredi 21 mai 2003

L'APMEP vous propose une brochure

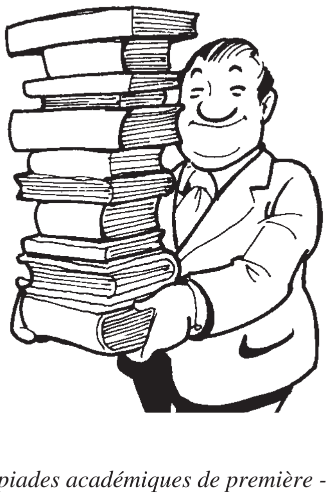
PROBLÉMATIQUE LYCÉE

N°150 : **« PROBLEMATIQUES LYCEE »** Brochure APMEP due à une équipe APMEP qui a poursuivi un travail antérieur sur le collège. Le «Supplément au Bulletin n°401», en posait les principes.

Cette brochure, fruit d'un travail commencé il y a une dizaine d'années, formule des propositions précises quant à la méthode de conception ou de lecture d'un programme qui veut se construire, de façon originale, à partir de grandes classes de problèmes : dix « problématiques » qui inscrivent objectifs, compétences et contenus plus en système qu'en une suite éclatée de chapitres du cours. Les contenus doivent apparaître comme une issue et un moyen incontournable pour résoudre des problèmes significatifs et non comme une fin en soi. Ce travail effectué par le groupe « *Problématiques lycée* » s'est renforcé des réflexions travaux et expérimentations en œuvre dans le groupe « *Prospective bac* » qui vise lui-même un renouvellement du contenu et des modalités de l'examen.

Parution prévue : février oou mars 2003.

Nombre de pages, prix et précisions diverses dans le *BGV* de mars 2003 et les *Bulletins verts* de janvier-février ou mars-avril 2003.



Outre cette brochure, l'APMEP met à votre disposition un grand nombre d'autres ouvrages (en édition propre, en co-édition ou en co-diffusion) et ce, à des prix très abordables.
Vous en trouverez la liste et le descriptif dans la plaquette « **Visages 2002-2003 de l'APMEP** » disponible gratuitement - franco de port - à :
APMEP, 26 rue Duméril, 75013 Paris

OLYMPIADES ACADÉMIQUES
DE
MATHÉMATIQUES
2002

SUJETS NATIONAUX

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Art, Culture, Lecture Les Editions du KANGOUROU

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2002

Brochure APMEP n° 146

N° ISBN : 2-912846-22-6

Co-éditeur 1ère édition : ACL - Les éditions du Kangourou

SOMMAIRE

ANNEXES : SUJETS CHOISIS DU CLUB FRANCE D'ANIMATH

LE BONHEUR EST DANS L'OLYMPE !

Henri BAREIL
Responsable éditorial de la brochure.

Voici donc la seconde année des ces olympiades, lancée avec un lourd handicap : celui d'épreuves 2001 unanimement jugées trop difficiles, peu adéquates aux intentions affichées, déprimantes...

De là, sans doute une participation générale en recul (pas partout cependant) alors qu'il eût fallu une progression sensible...

Pourtant, dans notre brochure des épreuves de 2001, le Président des Olympiades prenait acte de l'erreur de tir et s'engageait à la rectifier.
Ce qui a été fait, et bien fait !

2002 est, de l'avis général, une réussite : les critiques de l'an dernier les plus sévères ne tarissent pas d'éloges cette année et félicitent une épreuve « *dynamisante pour développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche* » : « *merci et bravo au comité national organisateur* ».

La régionale APMEP de Lorraine, en son « Petit Vert », « *se félicite de la nature des problèmes choisis, qui ne sont pas du tout rébarbatifs, motivent les candidats, et ne sont cependant pas "triviaux"* » (Pour ce dernier point, j'ajoute : « sauf exception »).

Effectivement, tout en évitant les micro-ascenseurs incorporés, nombre de problèmes débutent par des questions accessibles, bon échauffement pour aborder la suite. D'autres ont un énoncé apparemment abrupt, mais la situation proposée se prête à des expérimentations, ou bien il y a tant de voies de résolution que leur exploration est rapidement féconde.

Certes, tous les candidats n'ont pas pour autant excellé dans les divers exercices. Parfois aucun pour tel ou tel sujet... Mais il semble que tous les candidats s'y sont impliqués, que peu ont désespéré, et que ceux qui n'ont rien « trouvé » le prennent même avec humour et sourire tant la recherche leur a quand même plu. L'immense majorité des candidats s'en trouve plus " fraternelle " avec les mathématiques...

Un satisfecit général va aux sujets nationaux.

Je cite Michel Regnault :
« ... si l'on compare les sujets des deux olympiades, en particulier pour les deux derniers sujets nationaux, on ne peut que constater un réel, et sans doute salutaire changement de cap : la place importante laissée à la construction d'exemples favorisants la compréhension du problème, les textes décomposés en questions de difficulté graduée dont la résolution exige plus un effort de raisonnement, de l'imagination, qu'un recours à des théorèmes plus ou moins en marge d'un programme dont l'avan-

cement en cours d'année est loin d'être uniforme sur l'ensemble des classes de premières, l'originalité des situations proposées à la fois concrètes et ludiques, ont fait que davantage de concurrents se sont pris au jeu, ont mis à profit tout le temps qui leur était donné et n'ont pas ensuite manifesté un sentiment de découragement devant l'insurmontable. De bons arguments pour élargir le champ de recrutement des participants, ne pas le confiner aux « bons élèves » de 1ère S, et pour rappeler que ces olympiades s'adressent à tous les élèves de première qui aiment chercher, analyser, construire... »

On pourrait en dire autant de la plupart des sujets académiques. *Mais quelques exceptions pourraient induire les décideurs nationaux à mettre en sourdine le projet initial du passage de un à deux des sujets académiques*. Cette réaction ne serait-elle pas trop rapide ?
Les recadrages de cette année ne peuvent qu'aider aux orientations et aux choix des cellules académiques. **D'autant qu'on peut déjà apprécier** :
- *de très beaux sujets*, qui ont parfois induit de remarquables résolutions,
- le souci de *diversification* et de *complémentarité* par rapport aux sujets nationaux,
- *l'enthousiasme de ces équipes* devant la réorientation réussie de ces Olympiades,
- *d'heureuses initiatives*, comme celle de Versailles [et, déjà, Nantes dès 2001] quant au retour aux candidats de leurs copies avec notice d'évaluation.

Tout cela va bien dans le sens préconisé par l'APMEP.

Certes les Olympiades de première peuvent servir à dégager une pépinière de jeunes talents capables de bien représenter la France aux Olympiades internationales de Mathématiques (cf. nos bulletins Verts pour celles-ci, en la rubrique « problèmes »).

Mais là ne sont, pour l' APMEP, ni leurs objectifs les plus féconds, ni leurs mérites essentiels.

Nous attendons bien plus d'elles : qu'elles soient un levain dans la pâte pour contribuer à faire évoluer l'enseignement des mathématiques à l'opposé de ce qu'induisent les pratiques actuelles de nos examens (le baccalauréat d'abord). Cf. à ce sujet nos plaquettes, articles ou brochures, sur « Prospective bac » ou les « Problématiques », et le rappel en la page 43 de la plaquette « Visages 2002-2003 de l'APMEP », de la position du comité national sur le baccalauréat (Cf. Bulletin APMEP de Novembre-Décembre 2002).

Il est bon que des « officiels » nous y rejoignent.

Ainsi lorsque Madame Bellobet-Frier, rectrice de l'Académie de Toulouse, lors de la remise des prix académiques des Olympiades, **exalte des objectifs proposés par Emile Borel en 1922** : « ...développer l'esprit, le rendre plus solide et plus sûr, le mieux adapter aux fonctions multiples qu'auront à remplir les élèves devenus hommes, éveiller le goût de la science et de la recherche personnelle.. » ...A partir du noyau d'élèves et d'enseignants impliqués, ces Olympiades -comme les rallyes- devraient inciter à aborder, ou à faire aborder, loin de chemins tout tracés, exercices et problèmes de manière ouverte, à se comporter en chercheur, à essayer, bricoler, voire errer, sans se rebuter..., à apprivoiser la difficulté.

A propos de l'évolution analogue souhaitée pour le Baccalauréat, l'APMEP marque qu'il faut du temps pour s'y préparer...Les Olympiades peuvent y concourir si elles gagnent en effectifs, dans le maintien de l'esprit des épreuves de 2002.

Cela revient à inscrire dans les faits, à une échelle sans cesse plus grande, un enseignement conforme aux « *huit moments d'une formation scientifique* » que l'APMEP ne cesse -en même temps que les programmes officiels jusqu'à une date récente !- de mettre en avant : « *savoir poser un problème, expérimenter, prendre des exemples, conjecturer, bâtir une démonstration mettre en œuvre des outils, communiquer son travail, évaluer la pertinence des résultats eu égard au problème,...* »

Mais, comme le dit Philippe Lombard, dans un article sur la géométrie à paraître dans un prochain Bulletin Vert de l'APMEP, *une recherche ne peut être mise en route et féconde que si l'on dispose déjà d'un solide faisceau de connaissances* qui permet de se référer à d'autres problèmes, d'envisager telle ou telle méthode, de prendre plaisir à les évoquer tout en testant leur pertinence pour la situation en cause, ...

Il importe également que les essais des élèves, les pistes qu'ils ouvrent, leurs réorientations motivées,... soient pris en compte dans l'évaluation. Nous avons, là-dessus, beaucoup à apprendre de la pratique des « **narrations de recherche** » (cf. brochure n° 659 co-diffusée par l'APMEP, et **brochure APMEP n° 151, co-éditée par l'APMEP avec l'IREM de Montpellier** [parution fin décembre 2002 ; 168 pages, **prix adhérent APMEP :** 9 €]), et même des Olympiades Internationales de mathématiques !

Je souhaite vivement que les copies d'Olympiades de 1ère soient ainsi appréciées et que cela soit communiqué aux candidats, à l'instar de l'académie de Versailles cette année, pour le retour des copies annotées, et de celle de Nantes qui, en 2002 comme en 2001, envoie à chaque candidat son bilan.

J'évoquais plus haut la nécessité, si l'on veut que les Olympiades de 1ère concourent à l'évolution espérée, d'un accroissement considérable du nombre de candidats. **La réussite de cette année doit être valorisée**. Il faut insister sur « le niveau raisonnable des exercices », le fait que « tous les élèves ont pu s'y investir sans découragement », que beaucoup y ont pris plaisir, que cela a stimulé et relancé leur activité en maths...

Les enseignants de mathématiques de première sont ainsi invités, avec de bons arguments, à faire participer nombre de leurs élèves (et pas seulement leurs cracks...). Il restera alors, comme le fait déjà Kangourou, à diversifier les prix, qu'ils ne portent pas que sur les résultats globaux, mais qu'il y en ait pour l'ampleur des recherches, pour telle idée ou solution « géniale » pour tels ou tels aperçus, ... et **que chaque candidat sache qu'il a été considéré**... Pourrait-on aussi envisager un système de points par élève dont le cumul irait à des équipes de classes ? (Avec prix à l'appui).

Il reste qu'il ne faut pas attendre des Olympiades (ou des rallyes, clubs, ateliers,…) **que soient ainsi résolues les difficultés fondamentales de l'enseignement actuel des mathématiques** : des formations mathématiques de base satisfaisantes exigent certainement des proggrammes en rapport, mais alors nos horaires d'enseignement - sans cesse réduits ces dernières années - sont totalement insufffisants surtout avec les actuels publics d'élèves et les méthodes d'enseignement à juste titre préconisées.

Il serait dès lors désastreux de faire des Olympiades, ou clubs, … un alibi pour une inaction sur des revendications fondamentales (horaires en premier, style des examens, option sciences,…) pleinement affirmés par l'A.P.M.E.P.

Je ne saurais terminer sans remercier vivement, en tant que responsable de la brochure :

- *les responsables de cellules académiques* qui ont transmis à Dominique Roux des dossiers complets (énoncé, solutions, commentaires,...), ou, à moi-même, divers renseignements ;

- *les divers correspondants*, responsables ou non, qui m'ont fourni des commentaires et d'autres solutions que les « officielles » ;

- *tous ceux qui ont participé à notre moisson et l'ont enrichie*, avec, éventuellement, des autorisations de reproduire. En citant ceux qui nous ont adressé plusieurs contributions, merci, notamment, à Michel Regnault, Claude Baisnée, François Lo Jacomo, Jean Bichara et ses collègues de la Guadeloupe. Mais au fil des pages, on trouvera d'autres noms de collègues auteurs de remarquables contributions, eux aussi chaleureusement remerciés.

- *les animateurs de sites académiques* qui nous ont autorisés à utiliser leurs travaux : Animath, Claude Baisnée (Caen), Richard Breheret (Versailles), et « Math-Express » ;

- *Paul-Louis Hennequin*, auteur de la grille synthétique des corrigés, de nombreuses solutions, qui s'est aussi beaucoup préoccupé de l'ensemble de la brochure et a tout relu, avec grand soin ;

- *Jean Barbier*, qui a saisi les manuscrits, intégré les textes reçus par mèl ou disquette, et maquetté l'ensemble, avec sa gentillesse, sa disponibilité et sa générosité habituelles, son sourire et sa bonne humeur, alors que, depuis mars, il consacre bénévolement des milliers d'heures de travail à des brochures APMEP (celle-ci est la huitième) et qu'il lui en reste encore deux...urgentes ! En prime Jean nous livre de jolies brochures ! Comment le remercier assez ?