République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et des Concours
Service des Examens

# Baccalauréat 2007

Session Complémentaire

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiqu
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

## Exercice 1 (4 points)

Dans le plan orienté P, on considère le carré direct ABCD de centre O et de coté a $(a>0)$. On note E le symétrique de C par rapport à D.

1.a) Construire le carré puis déterminer l'ensemble des points M du plan P dans chacun des cas suivants : *(1,5 pt)*

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=a$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MA^2-MB^2+MC^2=a^2$$

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}).(2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$$

$$M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{ME}\right\|=\left\|\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

b) Quel constat peut on faire à propos de ces quatre ensembles. *(0,25 pt)*

2. Pour tout réel k, on définit l'application $f_k$ du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+(1-k)\overrightarrow{MC}$.

a) Pour quelles valeurs de k, l'application $f_k$ est une translation? Déterminer alors son vecteur. *(0,5 pt)*

b) On suppose que $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. Montrer que $f_k$ admet un unique point invariant $\Omega_k$. Reconnaître alors $f_k$ et donner ces éléments caractéristiques. *(0,75 pt)*

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points $\Omega_k$ lorsque k décrit $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. *(0,5 pt)*

d) Pour $k=\frac{1}{2}$ ; déterminer et construire le lieu géométrique du point G centre de gravité du triangle DMM' lorsque M décrit le cercle $\Gamma$ de diamètre $[CE]$. *(0,5 pt)*

## Exercice 2 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O et de coté a $(a>0)$. I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1.a) Faire une figure (On pourra prendre (AB) horizontale). *(0,25 pt)*

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en O et I en K. *(0,25 pt)*

c) Déterminer l'angle et le centre de cette rotation. *(0,5 pt)*

2.a) Vérifier que $r=S_{(OJ)}\circ S_{(LI)}=S_{(DA)}\circ S_{(LK)}$. *(0,5 pt)*

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g telle que : $g=S_{(OJ)}\circ S_{(LI)}\circ S_{(LK)}$. *(0,5 pt)*

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe $s_1$ qui transforme O en I et C en B *(0,25 pt)*

b) Déterminer le rapport et l'angle de $s_1$. *(0,5 pt)*

c) Vérifier que : $s_1(A)=A$. *(0,25 pt)*

4. Soit $s_2$ la similitude directe qui transforme A en O et B en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de $s_2$. *(0.5 pt)*

b) Montrer que le centre $\mathbf{T}$ de $s_2$, appartient au cercle $(C_1)$ de centre $\mathbf{C}$ et de rayon $\mathbf{CD}$ et au cercle $(C_2)$ de diamètre $[\mathbf{AB}]$. Placer $\mathbf{T}$. *(0,5 pt)*

5. On pose $h = s_2 \circ s_1^{-1}$ ; pour tout point $\mathbf{M}$ du plan on pose $s_1(M) = M'$ et $s_2(M) = M''$.

a) En utilisant $h$, montrer que le milieu $\mathbf{F}$ du segment $[M'M'']$ est un point fixe que l'on déterminera. En déduire que le quadrilatère $AM'OM''$ est un parallélogramme. *(0,5 pt)*

b) Montrer que $s_2(O) = L$. *(0,25 pt)*

c) En déduire que les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{L}$ sont cocycliques. *(0,25 pt)*

6.a) Déterminer la position des points $M'$ et $M''$ dans chacun des cas suivants:
$M = A$, $M = F$, $M = T$ et $M = L$. *(0,5 pt)*

b) On suppose que $\mathbf{M}$ est distinct des points $\mathbf{A}, \mathbf{L}, \mathbf{F}$ et $\mathbf{T}$.

Montrer que $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MF}) = \dfrac{-\pi}{4} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MF})[\pi]$. *(0,25 pt)*

c) En déduire l'ensemble $\Gamma$ des points $\mathbf{M}$ du plan tels que les points $M$, $M'$ et $M''$ soient alignés. Tracer $\Gamma$. *(0,25 pt)*

## Problème (10 points)

### Partie A (5 points)

Pour tout entier naturel $\mathbf{n}$ on définit la fonction $f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x - n\ln x$.

Soit $C_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1. Dans cette question on suppose que $n = 1$, et pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+^*$ on a : $f_1(x) = x - \ln x$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f_1(x)$. Donner une interprétation graphique. *(0,75 pt)*

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} (f_1(x) - x)$. Donner une interprétation graphique. *(0,75 pt)*

c) Dresser le tableau de variation de $f_1$. *(0,75 pt)*

d) Tracer $C_1$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. *(0,25 pt)*

2. Dans cette question, on suppose que $n \geq 1$.

a) Dresser le tableau de variation de $f_n$. *(0,5 pt)*

b) Déterminer les points communs à toutes les courbes $C_n$ ; puis étudier les positions relatives de $C_n$ et $C_{n+1}$. *(0,5 pt)*

c) Montrer que les tangentes aux courbes $C_n$ aux points d'abscisses $x_n = e$ passent par un point commun que l'on déterminera. *(0,25 pt)*

3. On considère les points $M_0$, $M_1$ et $M_n$, de même abscisse $x$, et appartenant respectivement aux courbes $C_0$, $C_1$ et $C_n$.

a) Vérifier que pour tout $x > 0$ on a : $f_n(x) - f_0(x) = n(f_1(x) - f_0(x))$. *(0,5 pt)*

b) En déduire que : $\overrightarrow{M_0M_n} = n\overrightarrow{M_0M_1}$. *(0,25 pt)*

c) Tracer $C_0$ dans le repère précédent et donner une méthode géométrique simple pour la construction de $C_n$, point par point, à partir de $C_0$ et $C_1$. Construire alors la courbe $C_2$ dans ce repère. *(0,5 pt)*

## Partie B (5 points)

Soit $g$ la fonction de variable réelle $x$ définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f_0(x)}{f_1(x)} = \dfrac{x}{x - \ln x}; & x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $\Gamma$ la courbe de $g$ dans un nouveau repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1.a) Déduire de A.1.c) que le domaine de définition de $g$ est $D_g = [0, +\infty[$. *(0,5 pt)*

b) Montrer que la fonction $g$ est continue sur $D_g$. *(0,5 pt)*

2.a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. Donner une interprétation graphique. *(0,25 pt)*

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique. *(0,5 pt)*

3.a) Calculer $g'(x)$ pour $x > 0$. *(0,5 pt)*

b) Dresser le tableau de variation de $g$ puis construire sa courbe $\Gamma$. *(0,5 pt)*

4. A partir d'un encadrement de $g(x)$ sur l'intervalle $[1; e]$ ; démontrer que : $\forall x \in [1; e]$ on a $0 \le \dfrac{\ln x}{x} \le \dfrac{1}{e}$. *(0,25 pt)*

5. Pour tout entier naturel $n$, on définit la suite numérique $(U_n)$ par :

$$U_n = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx \text{ pour } n > 0 \text{ ; } \quad \text{et } U_0 = \int_1^e dx$$

a) Calculer $U_0$ et $U_1$. *(0,25 pt)*

b) Montrer que $(U_n)$ est positive et décroissante. Que peut on en conclure? *(0,25 pt)*

c) Montrer que pour tout entier naturel $n > 1$ on a, $0 \le U_n \le \dfrac{e-1}{e^n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. *(0,25 pt)*

6) On pose $I = \int_1^e g(x)dx = \int_1^e \dfrac{x}{x - \ln x} dx$ et pour tout entier naturel $n$ : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

a) Montrer que : $S_n = \displaystyle\int_1^e \frac{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)} dx$. *(0,25 pt)*

b) Montrer que : $I - S_n = \displaystyle\int_1^e \frac{x}{x - \ln x} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1} dx$. *(0,25 pt)*

c) En utilisant B.4), montrer que : $0 \le I - S_n \le \dfrac{1}{e^{n-1}}$. En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = I$. *(0,25 pt)*

d) Montrer que : $S_n \le I \le S_n + \dfrac{1}{e^{n-1}}$ *(0,25 pt)*

e) Pour quelles valeurs de $n$ ; $S_n$ est une valeur approchée de $I$ à $10^{-2}$ ? *(0,25 pt)*

Fin.