

Exercice 1 : (3 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{n}{2n^2+n} \text{ et } v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \text{ Pour tout entier naturel } n \geq 1 \text{ on donne } x_n = \frac{1}{u_n} \text{ et } y_n = \ln(v_n).$$

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de x_5 est	6	11	16	(0.5 pt)
2	La limite de la suite (u_n) est	0	$\frac{1}{2}$	1	(0.5 pt)
3	La suite (v_n) est une suite	Croissante	Décroissante	Non monotone	(0.5 pt)
4	La suite (x_n) est une suite	Arithmétique	Géométrique	Convergente	(0.5 pt)
5	Le terme général de la suite (y_n) est	$y_n = \frac{1}{3} \ln n$	$y_n = -n \ln 3$	$y_n = n \ln 3$	(0.5 pt)
6	La somme $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ est égale à	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right)$	(0.5 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 : (6 points)

1° Pour tout complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (7+7i)z^2 + (-2+30i)z + 32 - 16i$

a) Calculer $P(2i)$ 0.5pt

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout z , on a : 0.5pt

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$ 0.5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère

les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = 3+i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 4+4i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ 1pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC 0.5pt

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Placer D . 0.5pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 3+i$; on pose : $f(z) = \frac{z-2i}{z-4-4i}$.

a) Vérifier que $f(z_D) = -i$ et interpréter graphiquement. 0.5pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ 0.5pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)-1| = \sqrt{2}$ 0.5pt

4° On pose $z_0 = f(6)$ et pour tout entier naturel n on note $z_n = z_0^n$

a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. 0.5pt

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $ z_n \geq 2020$.	0.25pt
c) Vérifier que le point d'affixe z_{2020} appartient à l'axe des abscisses.	0.25pt

Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.	
1° a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$	0.5 pt
b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) puis étudier leur position relative.	0.75 pt
2° a) Montrer que $f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$ et que $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}$	0.5 pt
b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement	0.75 pt
3° Justifier que $f'(x) = 1 - e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f .	0.5 pt
4° a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\beta < \alpha$ puis vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$.	0.5 pt
b) Justifier que $f'(\alpha) = \alpha - 1$	0.25 pt
5° Construire la courbe (C) et son asymptote (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.	0.25 pt

Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x \ln x & \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$	
et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .	
1° a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue en 0^+ .	0.75pt
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter graphiquement.	0.5pt
c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement.	1 pt
2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .	1 pt
3° a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses.	1pt
b) Donner une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse e .	0.5pt
4° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$.	
a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.	0.5pt
b) Montrer que $(g^{-1})'(0) = -1$ où g^{-1} est la réciproque de g .	0.5pt
c) Construire (T) , (Γ) et (Γ') dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , (Γ') étant la courbe représentative de g^{-1} .	0.5pt
d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $2x - x \ln x = m$	0.25pt
5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $A = \int_1^e x \ln x dx$.	0.25pt
b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.	0.25pt

Fin

Exercice 1 (3 points)

N° Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	A	B	A	B	B
Note	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt

Exercice 2 (6 points)

1. $P(Z) = Z^3 - (7+7i)Z^2 + (-2+30i)Z + 32 - 16i$

a) $P(2i) = (2i)^3 - (7+7i)(2i)^2 + (-2+30i)(2i) + 32 - 16i$
 $= -8i + 28i + 28i - 4i - 60 + 32 - 16i = 60 - 60 + 28i - 28i$
 $\boxed{P(2i) = 0}$ [0,5]

b) $P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + aZ + b)$

1^{ère} Méthode: Tableau HÖRNER

	1	-7 - 7i	-2 + 30i	-32 - 16i
2i	j	2i	10 - 14i	-32 + 16i
	1	-7 - 5i	8 + 16i	0
	a	b		

$\boxed{P(Zi) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i)}$ [0,5]

2^{ème} Méthode: Identification

$P(Zi) = (Z-2i)(Z^2 + aZ + b)$
 $= Z^3 + (a-2i)Z^2 + (b-2ai)Z - 2bi$
 $= Z^3 - 10Z^2 + 33Z - 34$

Par identification on a :

$a-2i = 7-7i \Leftrightarrow a = -7-5i$

$b-2ai = -2+30i$

$-2bi = -32-16i \Leftrightarrow b = 8+16i$

$\boxed{P(Zi) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i)}$

c) $\boxed{P(Zi) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i) = 0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z-2i=0 \Leftrightarrow Z=2i \\ \text{ou} \\ Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = [-(7+5i)]^2 - 4(1)(8+16i) = 49+70i-25-32-64i$$

$$\Delta = -8+6i$$

On pose $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$

$|\Delta| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = \sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow |\Delta| = 10$

$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = |\Delta|^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) = -8 \end{array} \right. \quad (1)$

$2xy = Im(\Delta) = 6 \quad (3)$

(1) + (2) $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

(1) - (2) $2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$

De (3) on a $2xy = 6 \Leftrightarrow xy = 3 > 0$

donc x et y sont de même signe d'où

$Z_1 = 1+3i$ et $Z_2 = -1-3i$

$Z_1 = \frac{7+5i-1-3i}{2} \Leftrightarrow Z_1 = \frac{6+2i}{2} \Leftrightarrow \boxed{Z_1 = 3+i}$

$Z_2 = \frac{7+5i+1+3i}{2} \Leftrightarrow Z_2 = \frac{8+8i}{2} \Leftrightarrow \boxed{Z_2 = 4+4i}$

$S = \{2i, 3+i, 4+i\}$

[0,5]

2.a) $Z_A = 3+i \Leftrightarrow A(3,1)$

$Z_B = 2i \Leftrightarrow B(0,2)$

$Z_C = 4+i \Leftrightarrow C(4,4)$

Voir figure

$$\frac{|Z_A - Z_B|}{|Z_A - Z_C|} = \frac{|3+i-2i|}{|3+i-4-i|} = \frac{|3-i|}{|-1-3i|} = \frac{-3+i}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{-3+9i}{10} = \frac{-3+9i\sqrt{10}}{10}$$

$\frac{|Z_A - Z_B|}{|Z_A - Z_C|} = i$

$\left| \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C} \right| = 1$

$\text{Arg}\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_C}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A [0,5]

c) $ABDC$ est un parallélogramme ssi

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow Z_D - Z_C = Z_B - Z_A$

$\Leftrightarrow Z_D - Z_B = Z_A - Z_C \Leftrightarrow Z_D = 2i - 3 - i + 4 + 4i$

$\Leftrightarrow Z_D = 1+5i \Leftrightarrow \boxed{D(1,5)}$ [0,25]

$f(Z) = \frac{Z-2i}{Z-4-4i} \Leftrightarrow f(Z) = \frac{Z-Z_B}{Z-Z_C}$

$Z \neq 4+i \Leftrightarrow Z \neq Z_C \Leftrightarrow M \neq C$

a) $f(Z_D) = \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C} \Leftrightarrow f(Z_D) = \frac{1+5i-2i}{1+5i-4-4i} = \frac{1+3i}{-3+i} = \frac{-3-i}{-3+i} = \frac{1+3i\sqrt{10}}{-3+i\sqrt{10}}$

$f(Z_D) = \frac{10}{10} \Leftrightarrow \boxed{f(Z_D) = +i}$ [0,5]

$\left| \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{DB}{DC} \right| = 1 \Leftrightarrow CA = CB$

$\text{Arg}\left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_C}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB} \right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Donc BCD est un triangle rectangle et isocèle en D [0,5]

b) $|f(Z)| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{Z-Z_B}{Z-Z_C} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 1 \Leftrightarrow MB = MC$

L'ensemble Γ_1 des points M est la médiatrice de $[BC]$. [0,25]

c) $|f(Z) - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{Z-2i}{Z-4-4i} - 1 \right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left| \frac{Z-2i-Z+4+4i}{Z-4-4i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{4+2i}{Z-4-4i} \right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|4+2i|}{|Z-2i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{20}}{|Z-2i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z-2i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{20}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{|Z-2i|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |Z-2i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow CM = \sqrt{10}$.

Donc l'ensemble (Γ_3) des points M est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{10}$. [0,25]

4.a) $Z_0 = f(6) = \frac{6-2i}{6-4-4i} = \frac{6-2i}{2-4i} = \frac{3-i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+6i-1-2i}{5} = \frac{5+5i}{5} = \boxed{z_0 = 1+i}$

$\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1+i = z_0$

Donc $\boxed{z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}$ [0,5]

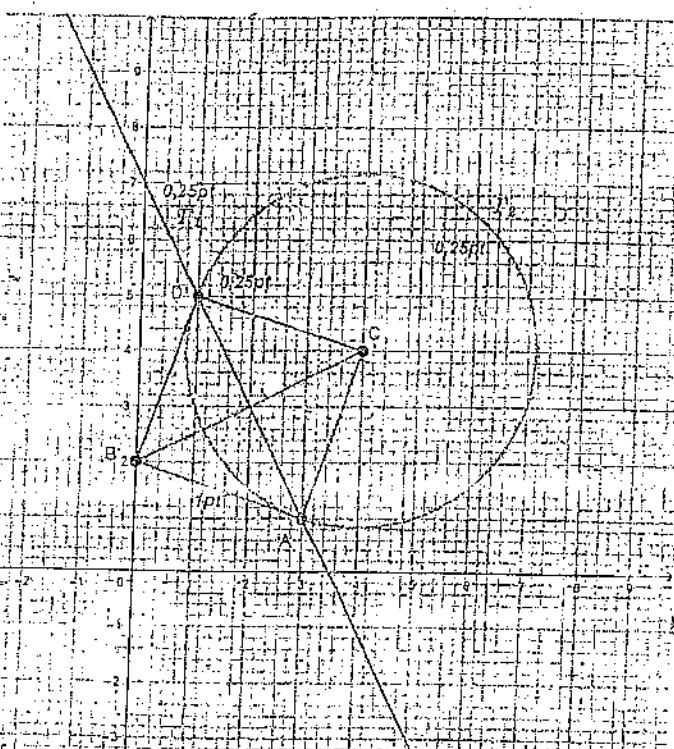
b) $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = z_0^n$ et $M_n(Z_n)$
 $|Z_n| \geq 2020 \Leftrightarrow |z_0^n| \geq 2020 \Leftrightarrow |z_0|^n \geq 2020$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \geq 2020 \Leftrightarrow \ln((\sqrt{2})^n) \geq \ln(2020)$
 $\Leftrightarrow n \ln(\sqrt{2}) \geq \ln(2020) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2020)}{\ln(\sqrt{2})} \Leftrightarrow n \geq 21,96$

Le plus petit entier naturel est $n_0 = 22$ [0,25]

$$\begin{aligned} \text{Arg}(Z_{2020}) &= \text{Arg}(z_0^{2020}) = 2020 \text{ Arg}(z_0) = 2020 \frac{\pi}{4} = 505\pi \\ \text{Arg}(Z_{2020}) &= \pi[2\pi] \Leftrightarrow Z_{2020} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow M_{2020} \in (Ox) \end{aligned}$$

[0,25]

Représentation graphique



Exercice 3 (4 points)

$$f(x) = x - 2 + e^{-x}$$

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 + e^{-x}) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

[0,25]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 + e^{-x} - (x - 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$$

[0,25]

b) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$ alors la droite

$\Delta: y = x - 2$ est une A.O à (C) au voisinage de $+\infty$ [0,25]
 Position relative de (C) et Δ :

On étudie le signe de $(f(x) - y) = e^{-x} > 0$. Donc C est toujours au dessus de Δ [0,5]

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$		+

Position relative de (C) par rapport à (Δ)

C/Δ

2. a) $f(x) = x - 2 + e^{-x} = x - 2 + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$$

[0,25]

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{xe^x} = \frac{xe^x - 2e^x}{xe^x} + \frac{1}{xe^x} \\ &\Leftrightarrow f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x} \end{aligned}$$

[0,25]

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

[0,25]

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

[0,25]

Donc (C) admet une B.P de disjonction (Oy) au voisinage de $-\infty$

[0,25]

3. $f'(x) = x - 2 + e^{-x}$
 $(e^{-x})' = -e^{-x}$

$$f'(x) = 1 - 0 \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 - e^{-x}$$

[0,25]

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

c) Ié T.V de f

[0,25]

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+ \infty$	0	$+ \infty$
$f(x)$	$+ \infty$	-1	$+ \infty$

$$f(0) = 0 - 2 + e^0 = -2 + 1 = -1 \Leftrightarrow f(0) = -1$$

4.a) D'après le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ elle est continue et strictement décroissante de $]-\infty, 0]$ vers $[-1, +\infty[$ donc elle est bijective.

Comme $0 \in [-1, +\infty[$ alors $\exists! \beta \in]-\infty, 0]/f(\beta) = 0$.
 Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ f est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$ donc elle est bijective.
 Comme $0 \in [-1, +\infty[$

alors $\exists! \alpha \in [0, +\infty[/ f(\alpha) = 0$.

$[1, 8; 1, 9] \subset [0, +\infty[$. Alors f est aussi bijective sur $[1, 8; 1, 9]$.

De plus $f(1, 8) = -0,03 < 0$ et $f(1, 9) = 0,04 > 0$
 donc $f(1, 8) \times f(1, 9) < 0$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire (V.I)

$$\exists! \alpha \in]1, 8; 1, 9[/ f(\alpha) = 0$$

[0,5]

$$b) f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 2 - \alpha$$

$$f(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} = 1 - (2 - \alpha) = -1 + \alpha$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha - 1$$

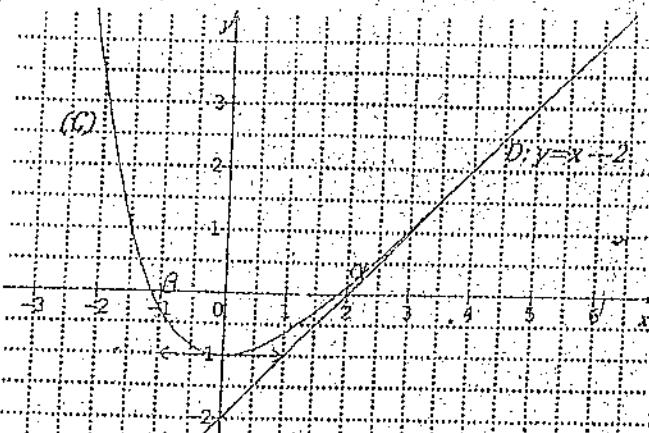
[0,25]

5. Représentation graphique

$$D: y = x - 2$$

[0,25]

x	0	2
y	-2	0



Exercice 4 (7 points)

$$\begin{cases} f(x) = x - x \ln x & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{x \ln x}{x} \right) = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)} \quad [0,5]$

Donc f est continue à droite de $x_0 = 0$ [0,25]

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - x \ln x - 0}{x - 0} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \ln x \right) \underset{(-\infty)}{\longrightarrow} +\infty$$
 $\Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty} \quad [0,25]$

Donc f n'est pas dérivable à droite de $x_0 = 0$ et sa courbe (Γ) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. [0,25]

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x \ln x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} \ln x \right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty} \quad [0,5]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \ln x \right) \underset{(+\infty)}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty} \quad [0,25]$$

Donc (Γ) admet une P de direction $(0y)$ au voisinage de $+\infty$ [0,25]

2. $\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = x - x \ln x$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = 1 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \ln x - 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) = -\ln x} \quad [0,5]$$

$$-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

b) Tableau de variations de f [0,5]

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	-
$f(x)$	0	1	$-\infty$

$$f(1) = 1 - 1 \ln(1) = 1$$

3.a) $\Gamma \cap (Ox) \Leftrightarrow f(x) = 0$

Comme $f(0) = 0$ alors $x = 0$ est solution de l'équation $f(x) = 0$ d'où $0(0,0) \in \Gamma \cap (Ox)$

Si $x \neq 0$ alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$ donc $A(e, 0) \in \Gamma \cap (Ox)$.

D'où $\boxed{\Gamma \cap (Ox) = \{0, A\}} \quad [1]$

b) Equation de la tangente (T) à (Γ) au point A :

$$T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$x_0 = e \quad f(e) = 0$$

$$f'(e) = -\ln(e) = -1 \Leftrightarrow \boxed{f'(e) = -1}$$

$$T: y = f'(e)(x - e) + f(e) \Leftrightarrow y = -(x - e) + 0$$

$$\boxed{T: y = -x + e} \quad [0,5]$$

$$4. I = [1, +\infty[$$

D'après ce T.V f T.V de g est

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	0	-
$g(x)$	1	$-\infty$

D'après ce T.V g est continue et strictement décroissante de $I = [1, +\infty[$ vers $J = [1, +\infty[$, donc elle est bijective. [0,5]

b) Calcul de $(g^{-1})'(0)$

$$\text{On a } g(e) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = e$$

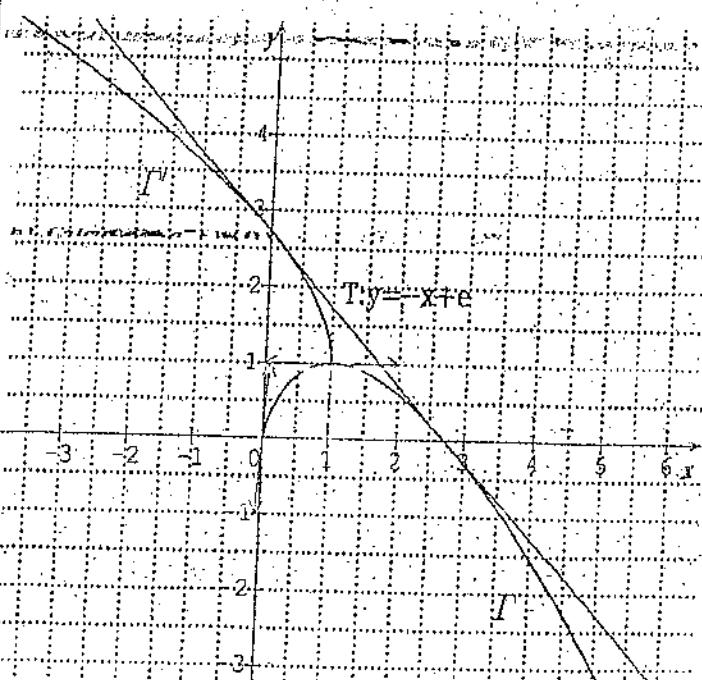
$$\text{On a aussi } g'(e) = -1$$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{1}{g'(e)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\boxed{(g^{-1})'(0) = -1} \quad [0,5]$$

c) Représentation graphique [0,5]



d) $2x - x \ln x = m \Leftrightarrow x + x - x \ln x = m$
 $\Leftrightarrow x - x \ln x = -x + m \Leftrightarrow f(x) = -x + m$
 Donc le nombre de solutions de l'équation paramétrique
 revient au nombre de points d'intersections de la courbe
 (Γ) avec la droite T_m : $y = -x + m$ qui est parallèle à T

m	Nombre de solutions
$m < 0$	1
$0 \leq m < e$	2
$m = e$	1
$m > e$	0

$$5.a) A = \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u = \ln x \\ v' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^e$$

$$= \left[\frac{2x^2 \ln x - x^2}{4} \right]_1^e = \frac{2e^2 \ln e - e^2}{4} - \frac{2(1) \cdot 1 - 1^2}{4}$$

$$A = \frac{2e^2 - e^2}{4} - \frac{0 - 1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{e^2 + 1}{4} \quad [0,25pt]$$

$$b) S = \int_1^e j(x) dx = \int_1^e (x - x \ln x) dx$$

$$S = \int_1^e x dx - \int_1^e x \ln x dx \Leftrightarrow S = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^e - A$$

$$S = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{2e^2 - 2 - e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}$$

$$S = \frac{e^2 - 3}{4} = 1,1 \quad [0,25pt]$$

CETTE PARTIE N'EST PAS DEMANDEE

JUSTIFICATION DE L'EXERCICE [1]

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$X_n = \frac{1}{U_n} \quad \text{et} \quad Y_n = \ln(V_n)$$

$$1. \quad X_n = \frac{1}{U_n} \Leftrightarrow X_n = 2n + 1$$

$$\text{Donc } X_5 = 2 \times 5 + 1 = 11 \Leftrightarrow X_5 = 11 \quad \text{Réponse B}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \quad \text{Réponse A}$$

$$3. \forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$$

$$\text{Et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} < 1$$

Donc (V_n) est décroissante

$$4. \forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = 2n + 1$$

$$X_{n+1} - X_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2$$

$$X_{n+1} - X_n = 2 \quad \text{Donc } (X_n) \text{ est S.A. de raison 2.}$$

Réponse A

$$5. Y_n = \ln(V_n) = \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = n \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -n \ln 3$$

Réponse B

$$6. \text{On pose } S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Comme (V_n) est S.G alors

$$S_n = V_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{3} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Réponse B

FIN

Exercice 1 : (3 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{n}{2n^2 + n} \text{ et } v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \text{ Pour tout entier naturel } n \geq 1 \text{ on donne } x_n = \frac{1}{u_n} \text{ et } y_n = \ln(v_n).$$

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de x_5 est	6	11	16	(0,5 pt)
2	La limite de la suite (u_n) est	0	$\frac{1}{2}$	1	(0,5 pt)
3	La suite (v_n) est une suite	Croissante	Décroissante	Non monotone	(0,5 pt)
4	La suite (x_n) est une suite	Arithmétique	Géométrique	Convergente	(0,5 pt)
5	Le terme général de la suite (y_n) est.	$y_n = \frac{1}{3} \ln n$	$y_n = -n \ln 3$	$y_n = n \ln 3$	(0,5 pt)
6	La somme $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ est égale à	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \right)$	(0,5 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée:

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 : (6 points)

1° Pour tout complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (7+7i)z^2 + (-2+30i)z + 32 - 16i$

a) Calculer $P(2i)$

0,5pt

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout z , on a :

0,5pt

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$

0,5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = 3+i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 4+4i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$

1pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC

0,5pt

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Placer D .

0,5pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 3+i$; on pose : $f(z) = \frac{z-2i}{z-4-4i}$

a) Vérifier que $f(z_D) = -i$ et interpréter graphiquement.

0,5pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$

0,5pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$

0,5pt

4° On pose $z_0 = f(6)$ et pour tout entier naturel n on note $z_n = z_0^n$

a) Écrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

0,5pt

- b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $|z_n| \geq 2020$. 0.25pt
 c) Vérifier que le point d'affixe z_{2020} appartient à l'axe des abscisses. 0.25pt

Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1° a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$ 0.5 pt
 b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) puis étudier leur position relative. 0.75 pt
 2° a) Montrer que $f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$ et que $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}$ 0.5 pt
 b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement 0.75 pt
 3° Justifier que $f'(x) = 1 - e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f . 0.5 pt
 4° a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\beta < \alpha$ puis vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$. 0.5 pt
 b) Justifier que $f'(\alpha) = \alpha - 1$ 0.25 pt
 5° Construire la courbe (C) et son asymptote (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 0.25 pt

Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty]$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x - x \ln x & \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1° a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue en 0^+ . 0.75pt
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter graphiquement. 0.5pt
 c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, puis interpréter graphiquement. 1 pt
 2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f . 1 pt
 3° a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses. 1pt
 b) Donner une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse e . 0.5pt
 4° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty]$.
 a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. 0.5pt
 b) Montrer que $(g^{-1})'(0) = -1$ où g^{-1} est la réciproque de g . 0.5pt
 c) Construire (T) , (Γ) et (Γ') dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (Γ') étant la courbe représentative de g^{-1} . 0.5pt
 d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $2x - x \ln x = m$ 0.25pt
 5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $A = \int_1^e x \ln x dx$. 0.25pt
 b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. 0.25pt

Fin

222

Exercice 1 (3 points)

N° Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	A	B	A	B	B
Note	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt	0,5pt

Exercice 2 (6 points)

1. $P(Z) = Z^3 - (7+7i)Z^2 + (-2+30i)Z + 32 - 16i$

a) $P(2i) = (2i)^3 - (7+7i)(2i)^2 + (-2+30i)(2i) + 32 - 16i$
 $= -8i + 28i + 28i - 4i - 60 + 32 - 16i = 60 - 60 + 28i - 28i$
 $\boxed{P(2i) = 0}$ [0,5]

b) $P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + aZ + b)$

1^{ère} Méthode: Tableau HÖRNER

	1	-7 - 7i	-2 + 30i	-32 - 16i
2i	j	2i	10 - 14i	-32 + 16i
	1	-7 - 5i	8 + 16i	0
	a	b		

$\boxed{P(Zi) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i)}$ [0,5]

2^{ème} Méthode: Identification

$P(Zi) = (Z-2i)(Z^2 + aZ + b)$
 $= Z^3 + (a-2i)Z^2 + (b-2ai)Z - 2bi$
 $= Z^3 - 10Z^2 + 33Z - 34$

Par identification on a :

$a-2i = 7-7i \Leftrightarrow a = -7-5i$

$b-2ai = -2+30i$

$-2bi = -32-16i \Leftrightarrow b = 8+16i$

$\boxed{P(Zi) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i)}$

c) $\boxed{P(Zi) = (Z-2i)(Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i) = 0}$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z-2i=0 \Leftrightarrow Z=2i \\ \text{ou} \end{array} \right.$

$Z^2 - (7+5i)Z + 8+16i = 0$

$\Delta = [-(7+5i)]^2 - 4(1)(8+16i) = 49+70i-25-32 = 64i$

$\Delta = -8+6i$

On pose $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$

$|\Delta| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = \sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow |\Delta| = 10$

$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = |\Delta|^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) = -8 \end{array} \right. \quad (1)$

$2xy = Im(\Delta) = 6 \quad (2)$

$(1) + (2) \quad 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$(1) - (2) \quad 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$

De (3) on a $2xy = 6 \Leftrightarrow xy = 3 > 0$

donc x et y sont de même signe d'où

$Z_1 = 1+3i$ et $Z_2 = -1-3i$

$Z_1 = \frac{7+5i-1-3i}{2} \Leftrightarrow Z_1 = \frac{6+2i}{2} \Leftrightarrow \boxed{Z_1 = 3+i}$

$Z_2 = \frac{7+5i+1+3i}{2} \Leftrightarrow Z_2 = \frac{8+8i}{2} \Leftrightarrow \boxed{Z_2 = 4+4i}$

$S = \{2i, 3+i, 4+i\}$

[0,5]

2.a) $Z_A = 3+i \Leftrightarrow A(3,1)$

$Z_B = 2i \Leftrightarrow B(0,2)$

$Z_C = 4+i \Leftrightarrow C(4,4)$

Voir figure

$$\frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C} = \frac{3+i-2i}{3+i-4-i} = \frac{3-i}{-1-3i} = \frac{-3+i}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{-3+9i}{10} = \frac{9i}{10}$$

$\frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C} = i$

$\left| \frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C} \right| = 1$

$\text{Arg}\left(\frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A [0,5]

c) $ABDC$ est un parallélogramme ssi

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow Z_D - Z_C = Z_B - Z_A$

$\Leftrightarrow Z_D - Z_B = Z_A - Z_C \Leftrightarrow Z_D = 2i - 3 - i + 4 + 4i$

$\Leftrightarrow Z_D = 1+5i \Leftrightarrow \boxed{D(1,5)}$ [0,25]

$f(Z) = \frac{Z-2i}{Z-4-4i} \Leftrightarrow f(Z) = \frac{Z-Z_B}{Z-Z_C}$

$Z \neq 4+i \Leftrightarrow Z \neq Z_C \Leftrightarrow M \neq C$

a) $f(Z_D) = \frac{Z_D-Z_B}{Z_D-Z_C} \Leftrightarrow f(Z_D) = \frac{1+5i-2i}{1+5i-4-4i} = \frac{1+3i}{-3+i} = \frac{-3-i}{-3+i} = \frac{1+3i}{3-i}$

$f(Z_D) = \frac{10}{10} \Leftrightarrow \boxed{f(Z_D) = +i}$ [0,5]

$\left| \frac{Z_D-Z_B}{Z_D-Z_C} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{DB}{DC} = 1 \Leftrightarrow CA = CB$

$\text{Arg}\left(\frac{Z_D-Z_B}{Z_D-Z_C}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Donc BCD est un triangle rectangle et isocèle en D [0,5]

b) $|f(Z)| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{Z-Z_B}{Z-Z_C} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 1 \Leftrightarrow MB = MC$

L'ensemble Γ_1 des points M est la médiatrice de $[BC]$. [0,25]

c) $|f(Z) - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{Z-2i}{Z-4-4i} - 1 \right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left| \frac{Z-2i-Z+4+4i}{Z-4-4i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{4+2i}{Z-4-4i} \right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|4+2i|}{|Z-2i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{20}}{|Z-2i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z-2i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{20}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{|Z-2i|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |Z-2i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow CM = \sqrt{10}$

Donc l'ensemble (Γ_3) des points M est le cercle de centre C

et de rayon $\sqrt{10}$. [0,25]

4.a) $Z_0 = f(6) = \frac{6-2i}{6-4-4i} = \frac{6-2i}{2-4i} = \frac{3-i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i}$

$= \frac{3+6i-i+2}{5} = \frac{5+5i}{5} \Leftrightarrow \boxed{z_0 = 1+i}$

$\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1+i = z_0$

Donc $\boxed{z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}$ [0,5]

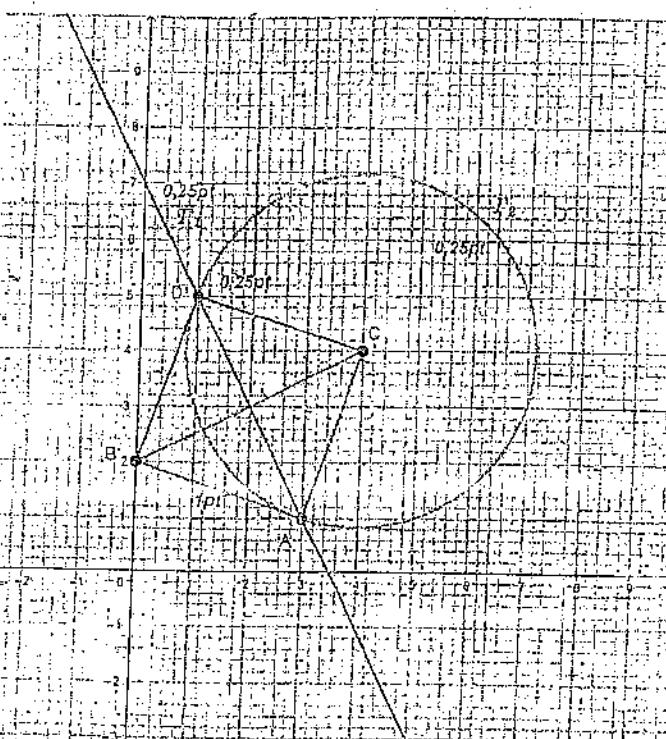
b) $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = z_0^n$ et $M_n(Z_n)$
 $|Z_n| \geq 2020 \Leftrightarrow |z_0^n| \geq 2020 \Leftrightarrow |z_0|^n \geq 2020$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \geq 2020 \Leftrightarrow \ln((\sqrt{2})^n) \geq \ln(2020)$
 $\Leftrightarrow n \ln(\sqrt{2}) \geq \ln(2020) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2020)}{\ln(\sqrt{2})} \Leftrightarrow n \geq 21,96$

Le plus petit entier naturel est $n_0 = 22$ [0,25]

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(Z_{2020}) &= \operatorname{Arg}(z_0^{2020}) = 2020 \operatorname{Arg}(z_0) = 2020 \frac{\pi}{4} = 505\pi \\ \operatorname{Arg}(Z_{2020}) &= \pi[2\pi] \Leftrightarrow Z_{2020} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow M_{2020} \in (Ox) \end{aligned}$$

[0,25]

Représentation graphique



Exercice 3 (4 points)

$$f(x) = x - 2 + e^{-x}$$

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 + e^{-x}) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

[0,25]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$$

[0,25]

b) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$ alors la droite

$\Delta: y = x - 2$ est une A.O à (C) au voisinage de $+\infty$ [0,25]
 Position relative de (C) et Δ

On étudie le signe de $(f(x) - y) = e^{-x} > 0$. Donc C est toujours au dessus de Δ [0,5]

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$		+

Position relative de (C) par rapport à (Δ)

C/Δ

2. a) $f(x) = x - 2 + e^{-x} = x - 2 + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$$

[0,25]

$$f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = xe^x - 2e^x + \frac{1}{e^x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}$$

[0,25]

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

[0,25]

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

[0,25]

Donc (C) admet une B.P de disjonction (Oy) au voisinage de $-\infty$

[0,25]

3. $f'(x) = x - 2 + e^{-x}$

$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$f'(x) = 1 - 0 \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 - e^{-x}$$

[0,25]

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

c) Je T.V. de f

[0,25]

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

$$f(0) = 0 - 2 + e^0 = -2 + 1 = -1 \Leftrightarrow f(0) = -1$$

4.a) D'après le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ elle est continue et strictement décroissante de $]-\infty, 0]$ vers $[-1, +\infty[$ donc elle est bijective.

Comme $0 \in [-1, +\infty[$ alors $\exists! \beta \in]-\infty, 0]/f(\beta) = 0$.

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ f est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$ donc elle est bijective.

Comme $0 \in [-1, +\infty[$

alors $\exists! \alpha \in [0, +\infty[/ f(\alpha) = 0$.

$[1, 8; 1, 9] \subset [0, +\infty[$. Alors f est aussi bijective sur $[1, 8; 1, 9]$.

De plus $f(1, 8) = -0,03 < 0$ et $f(1, 9) = 0,04 > 0$
 donc $f(1, 8) \times f(1, 9) < 0$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire (V.I)

$\exists! \alpha \in]1, 8; 1, 9[/ f(\alpha) = 0$

[0,5]

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 2 - \alpha$

$f(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} = 1 - (2 - \alpha) = -1 + \alpha$

$\Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha - 1$

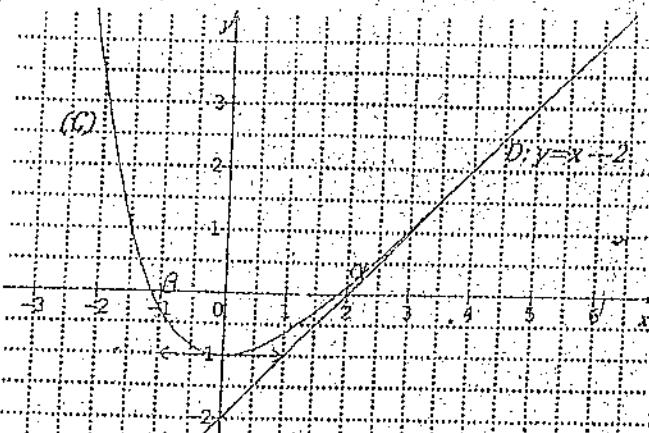
[0,25]

5. Représentation graphique

D: $y = x - 2$

[0,25]

x	0	2
y	-2	0



Exercice 4 (7 points)

$$\begin{cases} f(x) = x - x \ln x & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{x \ln x}{x} \right) = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)} \quad [0,5]$

Donc f est continue à droite de $x_0 = 0$ 0,25

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - x \ln x - 0}{x - 0} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \ln x \right) \underset{(-\infty)}{\longrightarrow} +\infty$$
 $\Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty} \quad [0,25]$

Donc f n'est pas dérivable à droite de $x_0 = 0$ et sa courbe (Γ) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. 0,25

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x \ln x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} \ln x \right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty} \quad [0,5]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \ln x \right) \underset{(+\infty)}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty} \quad [0,25]$$

Donc (Γ) admet une P de direction $(0y)$ au voisinage de $+\infty$ 0,25

2. $\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = x - x \ln x$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = 1 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \ln x - 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) = -\ln x} \quad [0,5]$$

$$-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

b) Tableau de variations de f 0,5

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	-
$f(x)$	0	1	$-\infty$

$$f(1) = 1 - 1 \ln(1) = 1$$

3.a) $\Gamma \cap (Ox) \Leftrightarrow f(x) = 0$

Comme $f(0) = 0$ alors $x = 0$ est solution de l'équation $f(x) = 0$ d'où $0(0,0) \in \Gamma \cap (Ox)$

Si $x \neq 0$ alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$ donc $A(e, 0) \in \Gamma \cap (Ox)$

D'où $\boxed{\Gamma \cap (Ox) = \{0, A\}} \quad [1]$

b) Equation de la tangente (T) à (Γ) au point A :

$$T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$x_0 = e \quad f(e) = 0$$

$$f'(e) = -\ln(e) = -1 \Leftrightarrow \boxed{f'(e) = -1} \quad [0,5]$$

$$T: y = f'(e)(x - e) + f(e) \Leftrightarrow y = -(x - e) + 0$$

$$\boxed{T: y = -x + e} \quad [0,5]$$

4. $I = [1, +\infty[$

D'après ce T.V f T.V de g est

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	0	-
$g(x)$	1	$-\infty$

D'après ce T.V g est continue et strictement décroissante de $I = [1, +\infty[$ vers $J = [1, +\infty[$, donc elle est bijective. 0,5

b) Calcul de $(g^{-1})'(0)$

$$\text{On a } g(e) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = e$$

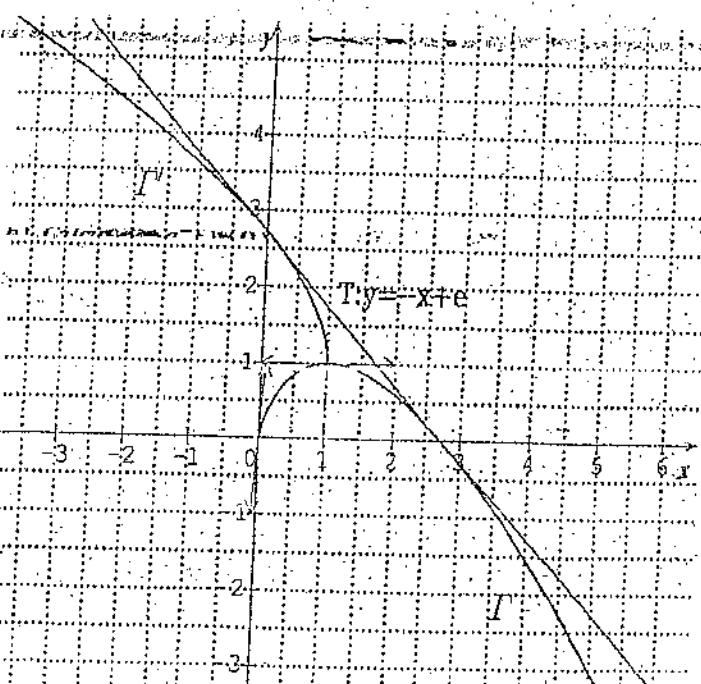
$$\text{On a aussi } g'(e) = -1$$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$$

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{1}{g'(e)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\boxed{(g^{-1})'(0) = -1} \quad [0,5]$$

c) Représentation graphique 0,5



d) $2x - x \ln x = m \Leftrightarrow x + x - x \ln x = m$
 $\Leftrightarrow x - x \ln x = -x + m \Leftrightarrow f(x) = -x + m$
 Donc le nombre de solutions de l'équation paramétrique revient au nombre de points d'intersections de la courbe (Γ) avec la droite T_m : $y = -x + m$ qui est parallèle à T

m	Nombre de solutions
$m < 0$	1
$0 \leq m < e$	2
$m = e$	1
$m > e$	0

$$5.a) A = \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u = \ln x \\ v' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^e$$

$$= \left[\frac{2x^2 \ln x - x^2}{4} \right]_1^e = \frac{2e^2 \ln e - e^2}{4} - \frac{2(1) \cdot (1-1)^2}{4}$$

$$A = \frac{2e^2 - e^2}{4} - \frac{0-1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{e^2 + 1}{4} \quad [0,25pt]$$

$$b) S = \int_1^e j(x) dx = \int_1^e (x - x \ln x) dx$$

$$S = \int_1^e x dx - \int_1^e x \ln x dx \Leftrightarrow S = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^e - A$$

$$S = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{2e^2 - 2 - e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}$$

$$S = \frac{e^2 - 3}{4} = 1,1 \quad [0,25pt]$$

CETTE PARTIE N'EST PAS DEMANDEE

JUSTIFICATION DE L'EXERCICE

1

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$X_n = \frac{1}{U_n} \quad \text{et} \quad Y_n = \ln(V_n)$$

$$1. \quad X_n = \frac{1}{U_n} \Leftrightarrow X_n = 2n+1$$

$$\text{Donc } X_5 = 2 \times 5 + 1 = 11 \Leftrightarrow X_5 = 11 \quad \text{Réponse B}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

Réponse A

$$3. \forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$$

$$\text{Et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} < 1$$

Réponse B

Donc (V_n) est décroissante

$$4. \forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = 2n+1$$

$$X_{n+1} - X_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2$$

$X_{n+1} - X_n = 2$. Donc (X_n) est S.A. de raison 2.

Réponse A

$$5. Y_n = \ln(V_n) = \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = n \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -n \ln 3$$

Réponse B

$$6. \text{On pose } S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Comme (V_n) est S.G alors

$$S_n = V_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{3} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Réponse B

FIN