**BACCALAUREAT 2025**
**Session Normale**
**Epreuve de MATHEMATIQUES**

Série : M & TMGM
Coefficient : 9 & 6
Durée : 4h

## Exercice 1 (3 points)

1. On considère l'équation (E): $62x-5y=2025$ où x et y sont des entiers.

a) Justifier que le couple $(35,29)$ est solution de l'équation (E) puis en déduire l'ensemble de solutions de cette équation. — 1 pt

b) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors x est un multiple de 5. — 0,5 pt

2. Soit (F) l'équation : $62x^{10}-5y^{10}=2025$, où x et y sont des entiers.

a) Montrer que pour tout entier a, on a : $a^{10}\equiv 1[11]$ ou $a^{10}\equiv 0[11]$. — 0,5 pt

b) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (F) alors $x\wedge 11=1$ ou $y\wedge 11=1$. — 0,5 pt

c) Supposons que $(x;y)$ est une solution de (F). Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre $62x^{10}-5y^{10}$ par 11. En déduire que (F) n'a pas de solution. — 0,5 pt

## Exercice 2 (4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini pour tout $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $P(z)=z^3-(6+4i\sin\alpha)z^2+(8+16i\sin\alpha)z-16i\sin\alpha$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$, sachant qu'elle admet une solution réelle $z_0$. — 1pt

2. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, $M_1$ et $M_2$ d'affixes respectives de $z_0$, $z_1=2+2e^{i\alpha}$ et $z_2=2-2e^{-i\alpha}$.

On note $G=\operatorname{bar}\{(A;-12),(M_1;21),(M_2;3)\}$.

a) Justifier que $z_2=2-e^{-i2\alpha}(z_1-2)$ puis caractériser la rotation R qui transforme $M_1$ en $M_2$ pour tout $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. — 0,75 pt

b) Déterminer $\alpha$ pour que le triangle $AM_1M_2$ soit équilatéral. — 0,25 pt

c) Montrer que, si $\alpha$ varie, les points $M_1$ et $M_2$ restent sur un même cercle à préciser — 0,5 pt

d) Montrer que, si $\alpha$ varie, la droite $(M_1M_2)$ conserve une direction fixe. — 0,5 pt

e) Vérifier que l'affixe du point G est $z_G=2+3\cos\alpha+4i\sin\alpha$. Justifier que G reste sur une ellipse dont on donnera l'équation réduite et l'excentricité. — 1 pt

## Exercice 3 (4 points)

ABC est un triangle rectangle isocèle direct en A et soient I,J, K, L et M les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AI]$, $[AB]$, $[BI]$ et $[AC]$

1. Faire une figure soignée. — 0,5 pt

2.Montrer qu'il existe une rotation R transformant A en I et I en B. Caractériser R. — 0,75 pt

3. a) Soit g l'antidéplacement qui transforme A en I et I en B.
Montrer que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. — 1pt

b) Déterminer la droite $\Delta$ telle que $g=S_\Delta\circ R$. — 0,25 pt

4. Soit S la similitude directe qui transforme A en B et I en A.

a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S. — 0,5 pt

b) Prouver que le centre $\Omega$ de S appartient aux cercles de diamètres $[AC]$ et $[IB]$. — 0,5 pt

c) Justifier que $\Omega \in [CK]$ et que les points C, M, L et $\Omega$ sont cocycliques. | 0,5 pt

## Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln(x+1)}{x+1}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, interpréter graphiquement. | 0,75 pt

b) Montrer que pour tout x de $]-1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ | 0,5 pt

c) Dresser le tableau de variation de f. | 0,75 pt

2. Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $g(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une unique solution $a_n$ sur $[0,+\infty[$ puis vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} > a_n$. | 0,5 pt

3.a) Construire la courbe C et ses asymptotes. | 0,25 pt

b) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$. | 0,25 pt

4. Pour tout entier naturel n, non nul, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

a) Montrer que $(I_n)$ est décroissante et déduire qu'elle est convergente. | 0,5 pt

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1+\ln 2}{2}\times\dfrac{1}{n+1} \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$ puis déduire la limite de $(I_n)$. | 0,5 pt

## Exercice 5 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement. | 1 pt

b) Calculer $f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ($f'$ est la dérivée de f). Dresser le tableau de variation de f. | 1 pt

c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. | 0,5 pt

2. Soit g la fonction réciproque de f.

a) Dresser le tableau de variation de g. | 0,5 pt

b) Déterminer l'expression de g(x) sur J puis montrer que $\forall x \in J$ $g'(x)=\dfrac{-2}{x(1-x^2)}$. | 0,5 pt

3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n(t)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} t^{2k-1}$ avec $t \in ]0,1[$.

a) Montrer que $S_n(t)=\dfrac{-1}{2}.g'(t)(1-t^{2n})$. | 0,5 pt

b) Déduire que $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\times 2^{2n}}\right)\ln\dfrac{3}{8} \le \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} S_n(t)\,dt \le \left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\times 3^{2n}}\right)\ln\dfrac{3}{8}$. | 0,5 pt

c) Calculer $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} S_n(t)\,dt$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{1}{4^k}-\dfrac{1}{9^k}\right)\right]=\ln\left(\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$. | 0,5 pt

Fin.