بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE — **Honneur–Fraternité - Justice**

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

SERVICE DES EXAMENS

BACCALAUREAT 2003

Session Normale

Séries : C & TMGM
Sujet : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficients : 9&6

Exercice1(4 points)

On considère la fonction $\mathbf{f}$ définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par : $\mathbf{f(x) = \frac{1}{\ln x}}$ et soit $\mathbf{g_n}$ la fonction définie pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 2}$, par : $\mathbf{g_n(x) = \int_x^{nx} f(t)dt}$; $\mathbf{x > 1}$ et soit $\mathbf{(C_n)}$ la courbe représentative de $\mathbf{g_n}$ dans un repère orthonormé $\mathbf{(O;\vec{i},\vec{j})}$.

1. Dresser le tableau de variations de $\mathbf{f}$. **(1pt)**

2.a) Démontrer que : $\mathbf{\forall t > 1;\ 0 < \ln t < t - 1}$ en déduire que $\mathbf{g_2(x) \geq \ln \frac{2x-1}{x-1}}$. **(0,5pt)**

b) Démontrer que : $\mathbf{\forall n \geq 2;\ g_n(x) \geq g_2(x)}$ en déduire que $\mathbf{\lim\limits_{x \to 1^+} g_n(x) = +\infty}$. **(0,5pt)**

3.a) Démontrer que pour tout $\mathbf{x > 1}$ on a: $\mathbf{\frac{(n-1)x}{\ln(nx)} \leq g_n(x) \leq \frac{(n-1)x}{\ln(x)}}$. **(0,5pt)**

b) Calculer les limites suivantes : $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)}$ et $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g_n(x)}{x}}$. **(0,5pt)**

4.a) Montrer que pour tout $\mathbf{x > 1}$ on a : $\mathbf{g_n'(x) = \frac{n\ln(x) - \ln(nx)}{\ln(x)\ln(nx)}}$ et dresser le tableau de variations de la fonction $\mathbf{g_n}$. **(0,5pt)**

b) Construire l'allure de la courbe représentative $\mathbf{(C_2)}$ de $\mathbf{g_2}$, on donnera un encadrement de l'ordonnée du point $\mathbf{\Omega_2}$ en lequel la tangente à $\mathbf{(C_2)}$ est parallèle à l'axe des abscisses. **(0,5pt)**

Exercice2(5 points)

On définie la suite numérique $\mathbf{(U_n)}$ pour tout $\mathbf{n \in IN^*}$ par : $\mathbf{U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}dx}$ et on pose $\mathbf{S_n = \sum_{p=1}^{n} U_p}$.

Le but de cet exercice est le calcul des limites suivantes : $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n}$, $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} nU_n}$ et $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n}$.

1. Pour tout $\mathbf{n \in IN^*}$ on pose $\mathbf{W_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$.

a) Démontrer que : $\mathbf{\forall p \in IN^*;\ \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}}$ **(1)**.

(on pourra utiliser le fait que la fonction $\mathbf{x \mapsto \frac{1}{x}}$ est décroissante sur l'intervalle $\mathbf{[p; p+1]}$). **(0,75pt)**

b) En utilisant la relation **(1)** démontrer que: $\mathbf{\forall n \in IN^*;\ \ln(n+1) \leq W_n \leq 1 + \ln(n+1)}$ **(2)** en déduire $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} W_n}$. **(1pt)**

2. Soit $\mathbf{(V_n)}$ la suite définie pour tout entier $\mathbf{n \in IN^*}$ par : $\mathbf{V_n = \frac{1-e^{-n}}{n}}$ et on pose $\mathbf{T_n = \sum_{p=1}^{n} V_p}$.

a) Prouver que $\mathbf{\forall x \in [0;1]}$; $\mathbf{\frac{e^{-x}}{2} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}}$ **(3)**. **(0,75pt)**

b) Prouver que : $V_n = \int_0^1 e^{-nx}dx$, en déduire que : $\frac{1}{2}V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2}V_n$. **(0,5pt)**

c) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$. **(0,5pt)**

3.a) En remarquer que : $\forall p > 0;\quad \frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$, montrer que : $0 \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$. **(0,75pt)**

b) En utilisant **(2)** montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{T_n}{\ln(n)}$. **(0,5pt)**

c) Que peut –on en déduire pour $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. **(0,25pt)**

Problème(11 points)

On considère un triangle **ABC** de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles **ACQ**, **BAR** et **CBP** rectangle et isocèle respectivement en **A**, **B** et **C**.
Soient **P'**, **Q'** et **R'** les milieux respectifs des segments **[BP]**, **[CQ]** et **[AR]**.

L'objectif de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

Partie A

L'objectif de cette partie est de montrer que les triangles **ABC**, **PQR** et **P'Q'R'** sont de même centre de gravité.

On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ et soient **a**, **b**, **c**, **p**, **q**, **r**, **p'**, **q'** et **r'** les affixes respectifs des points **A**, **B**, **C**, **P**, **Q**, **R**, **P'**, **Q'** et **R'**.

1. Faire une construction illustrant les données précédentes. **(1pt)**

2. a) Montrer que $p' = \frac{b - ic}{1 - i}$ puis écrire **q'** en fonction de **a** et **c** ; **r'** en fonction de **a** et **b**. **(1pt)**

b) Calculer **p'+q'+r'** en fonction de **a**, **b** et **c** puis en déduire que les triangles **ABC** et **P'Q'R'** ont le même centre de gravité **G** d'affixe **g**. **(0,5pt)**

3. Exprimer chacun des complexes **p**, **q** et **r** en fonction de **a**, **b** et **c** puis montrer que les triangles **ABC** et **PQR** ont le même centre de gravité **G**. **(0,5pt)**

Partie B

L'objectif de cette partie est de construire le triangle **ABC** à partir du triangle **P'Q'R'**.

1. A l'aide de la configuration de la partie A.

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s_1 de centre **C** transformant **Q** en **A** et déterminer $s_1(B)$. **(0,75pt)**

b) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s_2 de centre **A** transformant **Q'** en **Q** puis déterminer $s_2(R')$. **(0,75pt)**

2.a) Quelle est la nature de la transformation $\sigma = s_1 o s_2$? **(0,25pt)**

b) En utilisant la transformation σ démontrer que : $\begin{cases} P'A = R'Q' \\ (\overrightarrow{R'Q'}, \overrightarrow{P'A}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$ **(0,5pt)**

c) Vérifier le résultat précédent en utilisant les affixes des points appropriés **(voir partie A)**. **(0 ,25pt)**

d) Quelles sont les relations semblables que l'on peut en déduire? **(0,5pt)**

3. Etant donné un triangle **P' Q' R'** direct, dont les angles sont aigus.

a) Prouver l'unicité du point **A** et le construire géométriquement. **(0,5pt)**

b) Construire les points **B** et **C** à partir des points **A**, **P'**, **Q'** et **R'** en justifiant les étapes de la construction. **(0 ,25pt)**

c) En déduire l'existence et l'unicité du triangle **ABC** solution du problème à partir du triangle **P' Q' R'** donné. **(0,25pt)**

Partie C

L'objectif de cette partie est l'étude du cas particulier où le triangle **ABC** est équilatéral.

1. Construire les triangles **ABC**, **PQR** et **P' Q' R'** dans ce cas particulier. **(0,5pt)**

2. Dans cette question, on se propose de démontrer que les triangles **PQR** et **P' Q' R'** sont équilatéraux.

Pour cela on considère la rotation $\mathbf{r(G, \frac{2\pi}{3})}$ où **G** est le centre de gravité du triangle **ABC**.

a) Déterminer **r(B)** et **r(C)** puis démontrer que $\mathbf{r(P') = Q'}$ et $\mathbf{r(Q') = R'}$. **(1pt)**

b) Justifier alors le fait que $\mathbf{r(P) = Q}$ et $\mathbf{r(Q) = R}$. **(0,25pt)**

c) Conclure. **(0,25pt)**

3. Soit **a** la longueur du côté du triangle **ABC**. On considère les similitudes directes σ_1 et σ_2 de centre **G** telles que : σ_1 transforme **(B, C, A)** en **(P', Q', R')** et σ_2 transforme **(B, C, A)** en **(P, Q, R)**.

Dans cette question, on se propose de caractériser les similitudes σ_1 et σ_2 puis de comparer les aires des triangles **ABC**, **PQR** et **P' Q' R'**.

a) Calculer **GP'** en fonction de **a** et déterminer le rapport $\mathbf{k_1}$ et l'angle θ_1 de la similitude directe σ_1. **(0,5pt)**

b) Calculer **GP** en fonction de **a** et déterminer le rapport $\mathbf{k_2}$ de la similitude directe σ_2 et donner la valeur exacte de $\cos\theta_2$ où θ_2 est l'angle de σ_2. **(0,5pt)**

c) Ecrire les aires des triangles **PQR** et **P' Q' R'** en fonction de celle du triangle **ABC**. **(0,5pt)**

4. On pose $\mathbf{f = \sigma_1 o r}$, préciser la nature et les éléments caractéristiques de **f** et déterminer les images des points **A**, **B** et **C** par **f**. Que peut-on remarquer? **(0,5pt)**

FIN.