7²

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
SERVICE DES EXAMENS

Baccalauréat 2018

Session Complémentaire

Honneur – Fraternité – Justice

Série : Sciences de la Nature
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

Exercice 1 (3 points)

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 2 \end{cases}$ et $v_n = u_n - 2n$.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est correcte.

1° (v_n) est une suite

A : arithmétique	B : géométrique	C : ni arithmétique et ni géométrique	(0,5pt)

2° L'expression de v_n en fonction de n est

A : $v_n = 2^n + 2n$	B : $v_n = 2 + \frac{1}{2}n$	C : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	(0,5pt)

3° Si (w_n) est la suite définie par $w_n = \ln(v_n)$ alors

A : $w_n = -(\ln 2)^n$	B : $w_n = -n\ln 2$	C : $w_n = 1 - 2\ln n$	(0,5pt)

4° La suite (w_n) est

A : bornée	B : convergente	C : divergente	(0,5pt)

5° La somme $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$ est égale à

A : $\frac{-(n^2+n)\ln 2}{2}$	B : $\frac{(n+1)(1-2\ln n)}{2}$	C : $\frac{1-(\ln 2)^{n+1}}{1-\ln 2}$	(0,5pt)

6° Le produit $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times ... \times v_n$ est égal à

A : $e^{\frac{-(n^2+n)\ln 2}{2}}$	B : $e^{\frac{(n+1)(1-2\ln n)}{2}}$	C : $e^{\frac{1-(\ln 2)^{n+1}}{1-\ln 2}}$	(0,5pt)

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1° a) Calculer $(4-2i)^2$. (0,5pt)

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 + (2-4i)z - 6 = 0$. (0,75pt)

2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1+i$, $z_B = -3+3i$ et $z_C = \frac{(z_B)^3}{(z_A)^5}$. (0,75pt)

a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres z_A, z_B puis en déduire celle de z_C.

b) Placer les points A et B dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. (0,5pt)

c) Ecrire sous forme algébrique le nombre $\frac{z_B}{z_A}$ puis interpréter géométriquement. (0,5pt)

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 1+i$; on pose : $f(z) = \frac{z+3-3i}{z-1-i}$.

a) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = i$. Interpréter géométriquement. (0,5pt)

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$. (0,5pt)

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur ou nul. (0,5pt)

d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{5}$. (0,5pt)

73 BCAABCC

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+2-e^{x}$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. (0,75pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)$. En déduire que Γ admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation. (0,75pt)

c) Etudier la position relative entre Γ et D. (0,25pt)

2° a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. (0,5pt)

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β, $(\alpha<\beta)$, et que $-1.9<\alpha<-1.8$; $1.1<\beta<1.2$. (0,5pt)

c) Montrer que : $\alpha+f'(\alpha)=\beta+f'(\beta)$. (0,25pt)

3° Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=\left]-\infty;0\right]$.

a) Montrer que h admet une réciproque, notée h^{-1}. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}. (0,25pt)

c) Montrer que $\left(h^{-1}\right)'(0)=\frac{-1}{1+\alpha}$. (0,25pt)

4° a) Déterminer le point A de la courbe Γ auquel la tangente T est perpendiculaire à D. Donner une équation de T. (0,5pt)

b) Tracer D, T, Γ et Γ' dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, où Γ' est la courbe de h^{-1} dans ce repère. (0,5pt)

Exercice 4 (7 points)

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $g(x)=-x+3-2\ln x$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. (0,5pt)

b) Calculer $g'(x)$ où g' est la dérivée de g, puis dresser le tableau de variation de g. (0,5pt)

2° a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5pt)

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution λ et que $1.8\le\lambda\le1.9$. (0,5pt)

c) En déduire le signe de g sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$. (0,5pt)

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $I=\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{x-1+\ln x}{x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et interpréter graphiquement. (0,5pt)

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter graphiquement. (0,5pt)

2°a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de I on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$. (0,5pt)

b) Montrer que $f(\lambda)=\frac{\lambda+1}{2\lambda^2}$ et donner une valeur approchée de $f(\lambda)$ à 10^{-1} près. (0,5pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,5pt)

3° a) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse $x_0=1$ (0,5pt)

b) Tracer (C) et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,5pt)

c) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $\ln x=1-x+2x^3+mx^2$. (0,5pt)

4° a) A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $J=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$. (0,25pt)

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. (0,25pt)

Fin.

PROPPOSTION DU CORRIGE

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	C	B	C	A	A

Exercice 2

1° a) Calcul de $(4-2i)^2$

$(4-2i)^2 = 16-16i-4 = 12-16i$

b) Résolution de l'équation $z^2+(2-4i)z-6=0$:

$\Delta = (2-4i)^2 - 4\times1\times(-6) = 12-16i$

$= (4-2i)^2$

D'où les solutions de l'équation sont:

$z' = \dfrac{-(2-4i)+(4-2i)}{2\times1} = 1+i$

$z'' = \dfrac{-(2-4i)-(4-2i)}{2\times1} = -3+3i.$

Donc l'ensemble de solutions est $\{1+i;-3+3i\}$

2) a) Ecriture trigonométrique des nombres z_A, z_B et z_C

$z_A = 1+i \Rightarrow |z_A| = \sqrt{2}$

Si $\arg(z_A)=\theta_A$ alors $\begin{cases}\cos(\theta_A)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\theta_A)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ d'où $\theta_A = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

Alors $\boxed{z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$z_B = -3+3i \Rightarrow |z_B| = 3\sqrt{2}$

$\arg(z_B)=\theta_B \Rightarrow \begin{cases}\cos(\theta_B)=\dfrac{-3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\theta_B)=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \theta_B = \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

Alors $\boxed{z_B = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$

Comme $z_C = \dfrac{(z_B)^3}{(z_A)^5}$ alors :

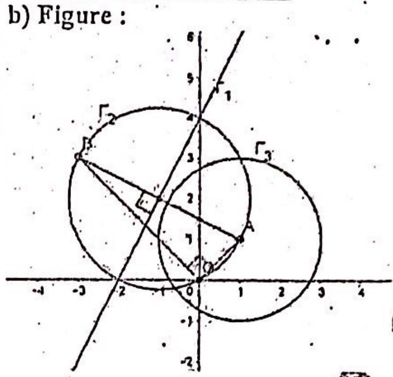
$|z_C| = \dfrac{|z_B|^3}{|z_A|^5} = \dfrac{(3\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}^5} = \dfrac{27}{2}$

$\arg(z_C) = \arg\dfrac{(z_B)^3}{(z_A)^5} = 3\arg(z_B)-5\arg(z_A) = 3\dfrac{\pi}{4}-5\dfrac{3\pi}{4}$

$= \pi[2\pi]$

Alors : $\boxed{z_C = \dfrac{27}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)}$

b) Figure :



c) La forme algébrique de $\dfrac{z_B}{z_A}$

$\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{-3+3i}{1+i} = \dfrac{3i(i+1)}{1+i} = 3i$

Interprétation géométrique :

$\dfrac{z_B}{z_A} = 3i \Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = 3i$

Donc le triangle OAB est rectangle en O.

3° Pour tout $z \neq 1+i$: $f(z) = \dfrac{z+3-3i}{z-1-i}$.

a) Résolution de l'équation $f(z)=i$

$\dfrac{z+3-3i}{z-1-i} = i \Leftrightarrow z+3-3i = iz-i+1 \Leftrightarrow (1-i)z = -2+2i$

Alors $z = \dfrac{-2+2i}{1-i} = \dfrac{-2(1-i)}{1-i} = -2.$

Si E est le point d'affixe $z_E=-2$ alors $f(z_E)=i$ donc le triangle ABE est rectangle isocèle en E.

b) Détermination et construction de Γ_1

$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)|=1$. Or $\forall z\neq 1+i$

$|f(z)|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z+3-3i}{z-1-i}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-(-3+3i)}{z-(1+i)}\right|=1$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right|=1 \Leftrightarrow |z-z_B|=|z-z_A| \Leftrightarrow MB=MA$

Donc Γ_1 est l'ensemble des points équidistants de B et A ; c'est donc la médiatrice du segment $[AB]$ (voir la figure)

c) Détermination et construction de de Γ_2

$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow f(z)\in i\mathbb{R}$ or : $\forall z\neq 1+i$

$f(z)\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\arg\left(\dfrac{z+3-3i}{z-1-i}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi]\\ \text{ou } \dfrac{z+3-3i}{z-1-i}=0\end{cases}$

3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arg\left(\dfrac{z-(-3+3i)}{z-(1+i)}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \\ \text{ou } z+3-3i=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\overline{MA},\overline{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \\ \text{ou } z = z_B \end{cases}$$

Alors l'ensemble Γ_2 est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A (voir la figure).

d) Détermination et construction de Γ_3 :

$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow |f(z)-1| = \sqrt{5}$ or : $\forall z \neq 1+i$

$$|f(z)-1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\frac{z+3-3i}{z-1-i} - 1\right| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z+3-3i-z+1+i}{z-1-i}\right| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{4-2i}{z-(1+i)}\right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{AM} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}$$

Donc l'ensemble Γ_3 est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$ (voir la figure)

<u>Exercice 3 :</u>

f est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+2-e^x$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Calcul de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+2-e^x) = +\infty+2-(+\infty) \text{ F.I.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right)\right) = +\infty(1+0-\infty) = -\infty$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right) = 1+0-\infty = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$$

<u>*Interprétation graphique*</u>

La courbe Γ admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $(+\infty)$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+2-e^x) = -\infty+2-0 = -\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2)\right) = \lim_{x\to-\infty}(e^x) = 0$. On en déduit que Γ admet une asymptote oblique D d'équation : $y = x+2$ au voisinage de $-\infty$.

c) Pour étudier la position relative de Γ et D on étudie le signe de $f(x)-y$:

$f(x)-y = -e^x < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ alors la droite D est en dessous de la courbe Γ

2) a) Les variations de f :

$f(x) = x+2-e^x \Rightarrow \boxed{f'(x) = 1-e^x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Les variations de f :

X	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

b) La fonction f est continue sur $]-\infty;0]$ avec $f(]-\infty;0]) =]-\infty,1]$ et comme $0 \in]-\infty;1]$ alors d'après le T. V. I. l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty;0]$ de plus $f(-1.9) \approx -0.05$ et $f(-1.8) \approx 0.03$ et $f(-1.9)\times f(-1.8) < 0$ donc $-1.9 < \alpha < -1.8$

De même, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[0;+\infty[$ et comme $f(1.1) \approx 0.09$ et $f(1.2) \approx -0.12$ et $f(1.1)\times f(1.2) < 0$ donc $1.1 < \beta < 1.2$

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, $(\alpha < \beta)$

c) Démonstration de l'égalité : $\alpha + f'(\alpha) = \beta + f'(\beta)$

Nous savons que $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha+2-e^\alpha = 0 \Rightarrow e^\alpha = \alpha+2$

Alors $1-e^\alpha = -\alpha-1 \Rightarrow f'(\alpha) = -\alpha-1$

D'où $\boxed{\alpha + f'(\alpha) = -1}$

D'une manière analogue on montre que $\boxed{\beta + f'(\beta) = -1}$

Alors $\boxed{\alpha + f'(\alpha) = \beta + f'(\beta)}$

3° h est la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty;0]$

a) Existence de la réciproque de h, notée h^{-1} :

Voici le tableau de variations de h :

X	$-\infty$		0
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	↗	1

Puisque h est continue et strictement croissante de I sur $J =]-\infty;1]$, elle réalise donc une bijection de I sur J, et par conséquent h admet une réciproque, notée h^{-1} définie de J sur I.

b) Tableau de variation de h^{-1} :

X	$-\infty$	1

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3° a) D'après l'étude et les variations de f : f est continue, strictement monotone et change de signe, alors la courbe (C) coupe l'axe (Ox) en un seul point d'abscisse α

D'autre part : $f(0.2) \approx -0.27$ et $f(0.3) \approx 0.04$

$f(0.2) \times f(0.3) < 0$ Alors $0.2 < \alpha < 0.3$

b) Pour que à (C) en un point d'abscisse x soit parallèle à l'asymptote D d'équation $y = 2x - 1$ il faut et il suffit que: $f'(x) = 2$

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 2 + (2-2x)e^{-x} = 2$

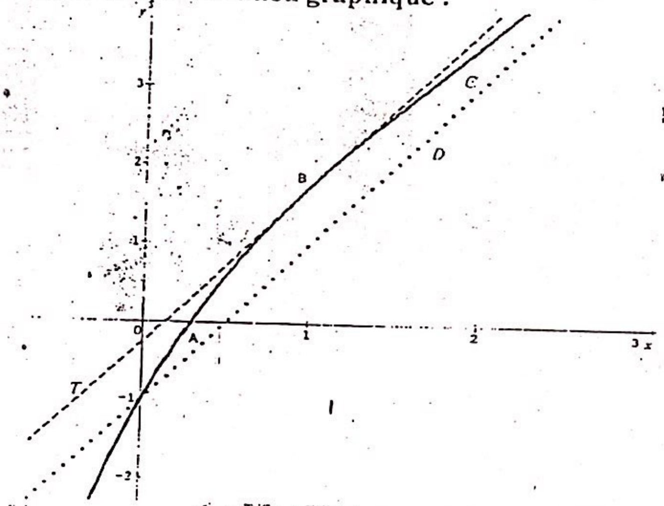
$\Leftrightarrow (2-2x)e^{-x} = 0$ or $e^{-x} > 0$

Donc $2 - 2x = 0$ et $\boxed{x=1}$ et comme $f(1) = 1 + 2e^{-1}$ alors le point auquel la tangente est parallèle à D est $\boxed{B(1; 1+2e^{-1})}$

Equation de la tangente en B : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 1 + 2e^{-1} \end{cases}$ donc $\boxed{T : y = 2x - 1 + 2e^{-1}}$

c) La Représentation graphique :



d) Discussion graphique, du nombre de solutions de l'équation : $-m - 1 + 2xe^{-x} = 0$

$-m - 1 + 2xe^{-1} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2xe^{-1} = m$

$\Leftrightarrow 2x - 1 + 2xe^{-1} = 2x + m \Leftrightarrow f(x) = 2x + m$

Les solutions de l'équation $f(x) = 2x + m$ sont les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec la droite D_m d'équation $y = 2x + m$ parallèle à D et à T. Alors

Si $m \leq -1$: il y a une seule solution

Si $-1 < m < -1 + 2e^{-1}$: il y a 2 solutions

Si $m = -1 + 2e^{-1}$: il y a une seule solution

Si $m > -1 + 2e^{-1}$: il n' y a pas de solution

Exercice 4 :

1) f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$f(x) = \dfrac{x + 2 + x\ln x}{x}$

a) On a : $\lim_{x \to 0^+} (x + 2 + x\ln x) = 2$

Alors $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x + 2 + x\ln x}{x} = +\infty$

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$ (c'est l'axe des ordonnées)

b) $f(x) = \dfrac{x + 2 + x\ln x}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{x\ln x}{x} = 1 + \dfrac{2}{x} + \ln x$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} + \ln x\right) = 1 + 0 + (+\infty)$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$, $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0}$

Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $(+\infty)$

2) a) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1 + \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2 + x}{x^2}$

Tableau de variation de f

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Equations de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1 :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T : y = -x + 4}$

3) g est la restriction de f sur $I =]0;2]$

a) Tableau de variation de g :

x	0		2
$g'(x)$		$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2+\ln 2$

D'après l'étude et le t. v. de g : g est continue et strictement croissante de $I =]0;2]$ sur $J = [2 + \ln 2; +\infty[$ donc g réalise une bijection de I sur J

b) T.V de g^{-1}

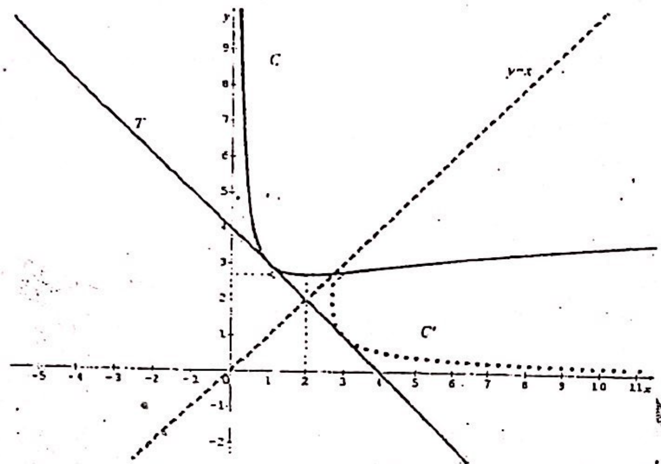
x	$2+\ln 2$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	$-$
$g^{-1}(x)$	$2 \searrow 0$

c) Calcul de $(g^{-1})'(3)$

$$(g^{-1})'(3)=\frac{1}{g'(g^{-1}(3))}=\frac{1}{g'(1)}=-1$$

En effet $\begin{cases} g^{-1}(3)=1 \\ g'(1)=-1 \end{cases}$

d) La représentation graphique de (C) et (C')



4) On considère la fonction $h(x)=f(x)-x$

a) Les variations de h :

$$h'(x)=f'(x)-1=\frac{-2+x}{x^2}-1=\frac{-x^2+x-2}{x^2}$$

Résolvons l'équation : $-x^2+x-2=0$

$\Delta=1-4\times(-1)\times(-2)=-7<0$

Donc $-x^2+x-2<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

D'après le T.V de h :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

D'après l'étude et les variations de h :

h est continue et strictement décroissante de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et comme $0\in\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α

or : $h(2)=\frac{4+2\ln 2}{2}-2\approx 0,69>0$

$h(3)=\frac{5+3\ln 3}{3}-3\approx -0,23<0$

$h(2)\times h(3)<0$ Donc $2<\alpha<3$

Comme $h(\alpha)=0$ alors $f(\alpha)-\alpha=0$ soit $f(\alpha)=\alpha$.

D'après le T .V de h :

$\forall x\geq\alpha,\ h(x)\leq 0 \Rightarrow \forall x\geq\alpha : \boxed{f(x)-x\leq 0}$

5) $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

a) Montrons par récurrence que: $U_n>\alpha,\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

<u>Initialisation :</u> $U_0=3>\alpha$

Donc c'est vrai pour le 1er terme

<u>Hérédité</u>

Supposons que $U_n>\alpha$

Comme f est croissante sur $[1;+\infty[$ alors :

$f(U_n)>f(\alpha)$. d'ou $U_{n+1}>\alpha$

<u>Conclusion :</u> $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n>\alpha$

b) Montrons que (U_n) est décroissante

D'après 4° b) on à : $\forall x\geq\alpha;\quad f(x)-x\leq 0$

Puisque $U_n\geq\alpha,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Alors $f(U_n)-U_n\leq 0$

D'où $U_{n+1}-U_n\leq 0$

Donc (U_n) est décroissante

Puisque (U_n) décroissante et minorée (par α) alors $\boxed{(U_n)\text{ est convergente}}$

6) Calcul de $K=\int_1^e \ln x\,dx$

Par une intégration par parties :

$K=\int_1^e 1\times\ln x\,dx$

On pose : $\begin{cases} u'(x)=1\rightarrow\ u(x)=x \\ v(x)=\ln x\rightarrow\ v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$

Alors :

$$K=[x\ln x]_1^e-\int_1^e\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e=[x\ln x-x]_1^e$$

$\Rightarrow K=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)\Rightarrow \boxed{K=1}$

b) l'aire du domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ est

$$A=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left(\frac{2}{x}+1+\ln x\right)dx$$

$$\Rightarrow A=\int_1^e\left(\frac{2}{x}+1\right)dx+k=[2\ln x+x]_1^e+k$$

$$A=(2\ln e+e)-(2\ln 1+1)+1\Rightarrow \boxed{A=(2+e)\text{u.a.}}$$