RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2012 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2 \end{cases}$

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

1) La suite (V_n) définie par : $V_n = U_n - 1$ est une suite

A : géométrique	B : arithmétique	C : ni géométrique et ni arithmétique

2) La suite (T_n) définie par : $T_n = ln(V_n)$ est une suite

A : géométrique	B : arithmétique	C : bornée

3) La suite (W_n) définie par : $W_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite

A : croissante	B : décroissante	C : non monotone

4) le terme général de la suite (U_n) est

A : $U_n = 1 + 3^n$	B : $U_n = 2 \times 3^n$	C : $U_n = 2n + 1$

5) La somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ est égal à

A : $S_n = \frac{1+3^{n+1}}{2}$	B : $S_n = n + \frac{1}{2} + \frac{3^{n+1}}{2}$	C : $S_n = \frac{1-3^n}{2}$

6) La limite de la suite (U_n) est

A : $-\infty$	B : 0	C : $+\infty$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$

2) Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq -3 - 2i$ on pose : $f(z) = \frac{z-2-i}{z+3+2i}$

Écrire sous forme algébrique le nombre $P = f(1 - 2i)$

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O ;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = -3 - 2i$ et $z_C = 1 + 2i$

a) Placer les points A, B et C

b) Écrire le nombre $q = f(z_C)$ sous forme trigonométrique en déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer et construire dans lé même repère les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

* Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$
* Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur
* Γ_3 tels que $[f(z) - 1] = 2\sqrt{34}$

Exercice 3 (6points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 - 2\ln x$.

1. Calculer, $\lim\limits_{n\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$ et interpréter graphiquement. (1pt)

2. Calculer f'(x) et dresser le tableau de variation de f.
(1pt)
3. Donner l'équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse $x_0 = 1$. (0,75pt)
4. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions α et β et que $0.4 < \alpha < 0.5$; $5.3 < \beta < 5.4$. Démontrer que $\alpha^2 e^{\beta} = \beta^2 e^{\alpha}$. (0,5pt)
5. Soit g la restriction de f sur J =]0;2[.
a) Montrer que g réalisé une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5pt)
b) Calculer $(g^{-1})'(-1)$ (On pourra utiliser la question 3) (0,5pt)
6. a)Tracer les courbes (C)et (C') respectivement des fonctions f et g^{-1} dans un repère orthonormé (O; i, j). (0,5pt)
b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation 2x - 2 - m - 2 ln x = 0. (0,5pt)
7. a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_1^2 \ln x dx$. (0,25pt)
b) Calculer l'aire du domine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. (0,25pt)

Exercice 4 (6points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 1$

1a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g

2a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution , Vérifier que : $0.5 < \alpha < 0.6$

b) Justifier que si : $x \le \alpha$ alors $g(x) \le 0$ et si $x \ge \alpha$ $g(x) \ge 0$

3) Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - x}{x+1}$

a) Justifier et interpréter les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

c) dresser le tableau de variation de f

d) Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^2+\alpha}$ et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} prés

4) Tracer la courbe (C) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Corrigé baccalauréat 2012 session Complémentaire

Exercice 1

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	A	A	B	C

Exercice 2:

1° Résolution de : $z^2-2z+5=0$. $\Delta'=(-1)^2-1\times5=-4=(2i)^2$; $z_1=1+2i$ et $z_2=1-2i$.

2° $p=f(1-2i)=\dfrac{1-2i-2-i}{1-2i+3+2i}=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}i$.

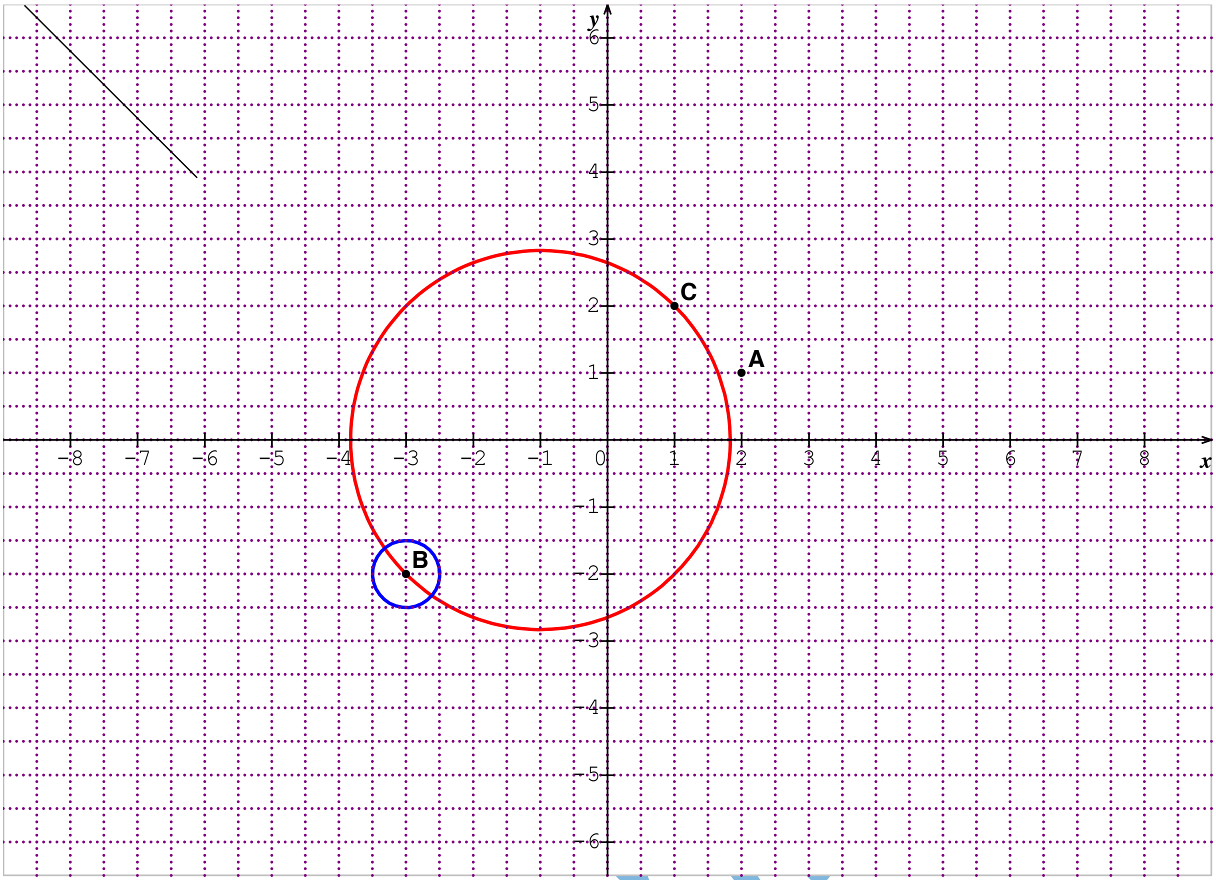
3° a) Schéma voir figure.

b) $q=f(1+2i)=\dfrac{1+2i-2-i}{1+2i+3+2i}=\dfrac{-1+i}{4+4i}=\dfrac{(-1+i)(1-i)}{4(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{8}=\dfrac{1}{4}i$. Donc $q=\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

On remarque que : $q=\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ donc $\arg q=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|q|=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{4}$. Le triangle ABC est rectangle en C .

c) Remarquons d'abord que : $f(z)=\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ donc $|f(z)|=\dfrac{MA}{MB}$ et $\arg f(z)=\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\ [2\pi]$ s'il existe.

- $M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)|=\dfrac{MA}{MB}=1$. L'ensemble est la médiatrice du segment $[BC]$.
- $M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(z)=0 \\ \text{ou} \\ \arg f(z)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M=A \\ \text{ou} \\ \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$. L'ensemble est le cercle de diamètre $[BC]$, privé du point B .
- $M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow |f(z)-1|=2\sqrt{34}$. On a $f(z)-1=\dfrac{z-2-i}{z+3+2i}-1=\dfrac{z-2-i-z-3-2i}{z+3+2i}=\dfrac{-5-3i}{z+3+2i}$ donc $|f(z)-1|=\dfrac{|-5-3i|}{|z+3+2i|}=\dfrac{\sqrt{34}}{MB}$. Alors $M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{34}}{MB}=2\sqrt{34} \Leftrightarrow MB=\dfrac{1}{2}$. L'ensemble est le cercle de centre B et de rayon $\dfrac{1}{2}$



Exercice 3:

f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x - 2 - 2\ln x$

1° On a : $\lim\limits_{x \to 0^+}(x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to 0^+} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de la courbe (C). On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ car

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = 1$. $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(-2 - 2\ln x) = -\infty$. La branche infinie de (C), en $+\infty$, a une direction parallèle à celle de la droite d'équation $y = x$.

2° f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$ car $x > 0$.

x		0		2		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$		-1	$\searrow$	$-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3° Une équation de la tangente à (C), en $x_0 = 1$, est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = -x$.

4° D'après le TV de f, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions : $0<\alpha<2<\beta$. D'autre part $f(0.4)\times f(0.5)<0$ et $f(5.3)\times f(5.4)<0$ donc $0.4<\alpha<0.5$ et $5.3<\beta<5.4$.

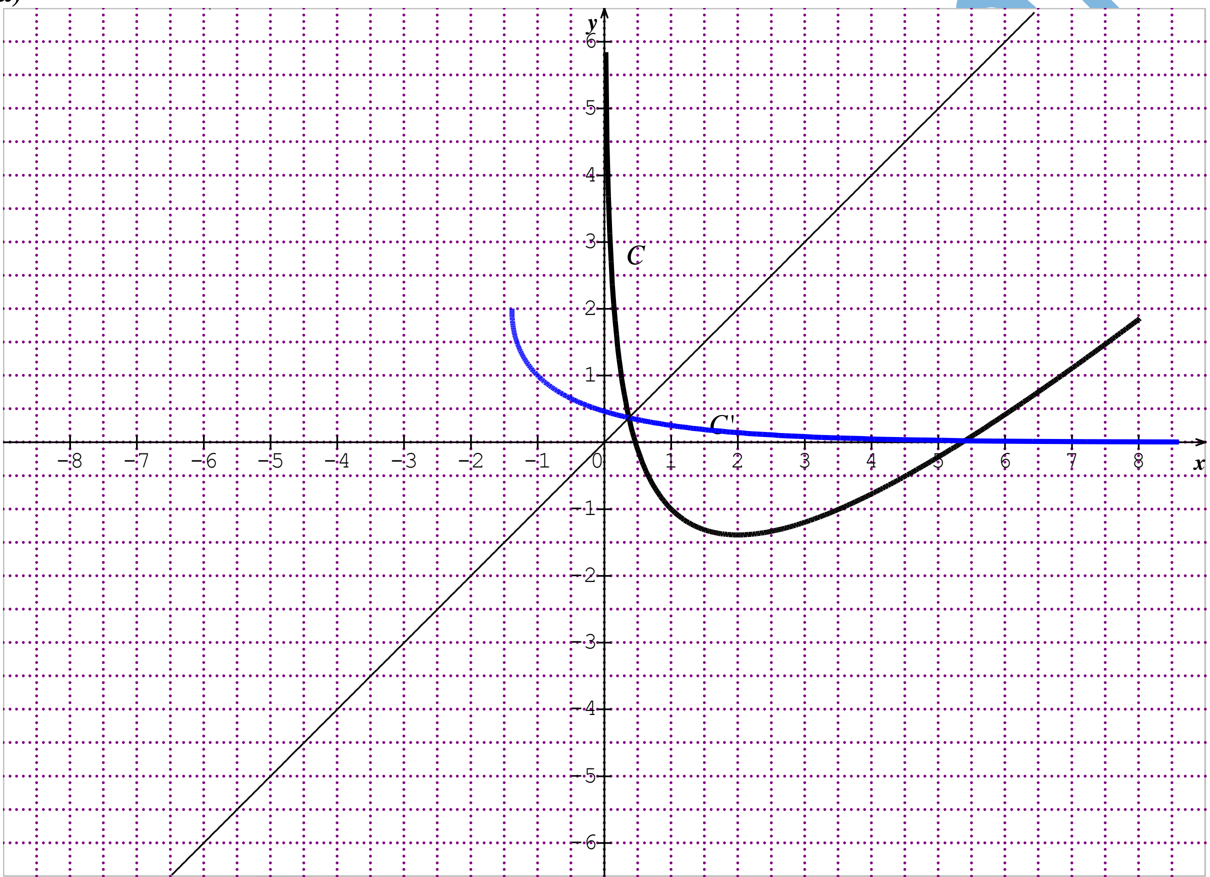
On a : $f(\alpha)=\alpha-2-2\ln\alpha=\ln e^{\alpha}-2-\ln\alpha^2$. De même $f(\beta)=\beta-2-2\ln\beta=\ln e^{\beta}-2-\ln\beta^2$. Or $f(\alpha)=f(\beta)=0$ donc $\ln e^{\alpha}-2-\ln\alpha^2=\ln e^{\beta}-2-\ln\beta^2 \Leftrightarrow \ln e^{\alpha}+\ln\beta^2=\ln e^{\beta}+\ln\alpha^2 \Leftrightarrow$ $\ln\left(e^{\alpha}\times\beta^2\right)=\ln\left(e^{\beta}\times\alpha^2\right)$. Soit encore $\beta^2e^{\alpha}=\alpha^2e^{\beta}$.

5° a) La fonction g est continue et strictement décroissante de $I=]0,2[$ sûr $J=]-2\ln 2,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de I sûr J.

b) On a : $g(1)=f(1)=-1 \Leftrightarrow g^{-1}(-1)=1$ donc $\left(g^{-1}\right)'(-1)=\dfrac{1}{g'(1)}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

6° Tracés des courbes :

a)



b) L'équation $2x-2-m-2\ln x=0 \Leftrightarrow x-2-2\ln x=-x+m \Leftrightarrow f(x)=-x+m$. Toute solution de l'équation est l'abscisse d'un point commun à (C) et la droite $D_m : y=-x+m$.

Valeurs de m	Nombre de solutions
$m<0$	0
$m=0$	1 une solution double
$m>0$	2

7° a) Soit $\int_1^2 \ln x dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_1^2 \ln x dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - [x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$

b) L'aire demandée est $A = -\int_1^2 f(t)dt = -\int_1^2 (t-2-2\ln t)dt \Leftrightarrow$

$A = -\left[\dfrac{1}{2}(t-2)^2\right]_1^2 + 2\int_1^2 \ln x dx = \dfrac{1}{2} + 2(2\ln 2 - 1) = -\dfrac{3}{2} + 4\ln 2$ ua.

Exercice 4:

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 1$

1° a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, limite remarquable, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$. Aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) $g'(x) = 1\times e^x + x\times e^x - 0 = (1+x)e^x$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	-1 ↘	$-1-\dfrac{1}{e}$	↗ $+\infty$

2° a) L'expression $g(x)$ est strictement négative sur $]-\infty,-1]$ tandis que g réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sûr $\left[-1-\dfrac{1}{e},+\infty\right[$, donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α. Comme $g(0.5)\times g(0.6) < 0$, alors $0.5 < \alpha < 0.6$.

b) D'après le TV de g on a : $g(]-\infty,\alpha]) = \left[-1-\dfrac{1}{e},0\right]$ donc, si $x \le \alpha$ alors $g(x) \le 0$ et $g([\alpha,+\infty[) = [0,+\infty[$ donc, si $x \ge \alpha$ alors $g(x) \ge 0$.

3° La fonction f est définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - x}{x+1}$

a) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-} (e^x - x) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0 \\ \lim\limits_{x\to-1^-} (x+1) = 0^- \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^+} (e^x - x) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0 \\ \lim\limits_{x\to-1^+} (x+1) = 0^+ \end{cases}$ doncce qui veut dire que la droite d'équation : $x=-1$ est une asymptote verticale

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{x+1} - 1 + \dfrac{1}{x+1}\right) = -1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = 0$ ce qui s'interprète par le fait que la droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote horizontale en $-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\times\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)=1$.

On peut écrire $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^x}{x^2}\times\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)$. Or $\frac{e^x}{x^2}=\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}{4\times\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2$. On pose $t=\frac{x}{2}$ alors $(x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\times\left(\frac{e^t}{t}\right)^2\times\frac{2t}{2t+1}-\frac{1}{2t+1}\right)=+\infty$. On en déduit que la branche infinie en $+\infty$ est de direction (Oy).

b) $f'(x)=\frac{(e^x-1)(x+1)-1\times(e^x-x)}{(x+1)^2}=\frac{xe^x+e^x-x-1-e^x+x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x-1}{(x+1)^2}$ ou encore $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

c) Tableau de variation de f.

d) On a : $f(\alpha)=\frac{e^\alpha-\alpha}{\alpha+1}$; Or $g(\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha e^\alpha-1=0\Leftrightarrow e^\alpha=\frac{1}{\alpha}$. Par suite $f(\alpha)=\frac{\frac{1}{\alpha}-\alpha}{\alpha+1}=\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2+\alpha}$.

4° Tracé de la courbe