RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2011 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte

1) Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x, réel $f(4-x)+f(x)=8$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$, soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé .

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La courbe (C) admet	Un centre de symétrie $\Omega(-2,4)$	Un centre de symétrie $\Omega(2,4)$	Un axe de symétrie d'équation x=2
2	La courbe (C) admet une asymptote d'équation	$x=5$	$Y=5$	$Y=5x$
3	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ égale	-5	3	$-\infty$
4	Si f est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$,alors elle est	Croissante sur $\mathbb{R}$	Décroissante sur$]-\infty,2]$	Non monotone sur $\mathbb{R}$

2)Une usine produit des bouteilles de 75 cl d'eau minérale . Soit X la variable aléatoire ayant pour valeurs les quantités possibles d'eau dans une bouteille expérimentée en centilitre. On note p_i la probabilité que la quantité d'eau dans une bouteille soit x_i centilitres. On donne le tableau suivant :

x_i	74,8	74,9	75	75,1	75,2
p_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Si on choisit au hasard une bouteuille ,la probabilité qu'elle soit au moins 75 cl est :	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
2	L'espérance mathématique de la variable X est étale à	$75,001$	75	$74,99$

Recopie sur la feuille et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose $f(z)=z^2-2z$

1a) Calculer $f(a)$ et $f(b)$

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$,des équations $z^2-2z+2=0$ et $z^2-2z+4=0$

2. On pose $c=ab=(1+i)(1+i\sqrt{3})$

a) Écrire a et b sous forme trigonométrique et exponentielle.

b) Écrire a et b sous forme algébrique et exponentielle

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 3 (4 points)

On définit une suite (U_n) pour tout entier naturel non nul n par : $U_n=\frac{n^2}{2^n}$

1.a) Calculer les termes : U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5

b) Montrer que (U_n) est positive, non monotone et quelle est ni arithmétique, ni géométrique.

2.a)Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

b) Prouver, pour tout entier naturel $n\geq 5$, on a : $0<\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{3}{4}$

3.a) Déterminer le sens de variation de la suite (U_n) à partir du rang 5

b) Que peut –on en déduire pour la suite ?

4.a) Montrer que pour tout naturel $n\geq 5$, on a : $0<U_n<\frac{25}{32}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

.Exercice 3 (9 points)

Soit fla fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=2x-1+\ln x$

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$d'unité 1cm

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

2.a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

b) Démontrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera .

c) Dresser le tableau de variation de f^{-1} réciproque de f

3. Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α .Vérifier que $0,6<\alpha<0,7$

4a) Préciser les points de (C) en lequel s la tangente est parallèle à la droite d'équation y=3x

b) construire la courbe (C) .

5a) En utilisant une intégration par parties , calculer $\int_\alpha^1 \ln t\,dt$

b) En déduire, en fonction de α , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation x = α et x = 1

6.On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x-1+2e^x$. Soit Γ sa courbe représentative dans le repère précédant

a) En utilisant le tableau de variation de f, dresser le tableau de variation de g.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-(x-1)\right)$ et interpréter graphiquement.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

d) Déterminer en fonction de α l'abscisse du point d'intersection de la courbe Γ de g avec l'axe des abscisses

e) Construire Γ

d) Déterminer en fonction de α l'abscisse du point d'intersection de la courbe Γ de g avec l'axe des abscisses

e) Construire Γ

Fin

Corrigé baccalauréat 2011session Complémentaire

Exercice 1 :

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse exacte	B	A	B	C	C	A

Exercice 2 :

1° a) On a ; $f(z)=z^2-2z$; $f(a)=(1+i)^2-2(1+i)=2i-2-2i=-2$.

$f(b)=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-2\left(1+i\sqrt{3}\right)=1+2i\sqrt{3}-3-2-2i\sqrt{3}=-4$

b) On a : $z^2-2z+2=0 \Leftrightarrow f(z)=z^2-2z=-2=f(a)$. Les solutions sont donc $a=1+i$ et $\bar{a}=1-i$. On a : $z^2-2z+4=0 \Leftrightarrow f(z)=z^2-2z=-4=f(b)$. Les solutions sont donc $b=1+i\sqrt{3}$ et $\bar{b}=1-i\sqrt{3}$.

2° $a=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

$b=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

4° $c=(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)=a\times b$

a) $c=(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)=1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}=1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

b) On a $|c|=|a|\times|b|=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$; $\arg c=\arg a+\arg b=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$. Alors : $c=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

c) Par identification des deux écritures de c on trouve :

$$\begin{cases}2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12}=1-\sqrt{3}\\ 2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}=1+\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

Exercice 3

1a) $U_n=\frac{n^2}{2^n}$

$U_2=\frac{2^2}{2^2}=1$

$U_3=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$

$U_4 = \frac{4^2}{2^4} = \frac{16}{16} = 1$

$U_5 = \frac{5^2}{2^5} = \frac{25}{32}$

b) $\begin{cases} n^2 > 0 \\ 2^n > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{n^2}{2^n} > 0 \Rightarrow U_n > 0$

$U_2 < U_3 > U_4 > U_5 \Rightarrow (U_n)$ n'est pas monotone

$(U_3)^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64}$

$u_2 \times u_4 = 1 \times 1 = 1$

$\begin{cases} (U_3)^2 = \frac{81}{64} \\ u_2 \times u_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(U_3)^2 \neq u_2 \times u_4}$

$\Rightarrow (u_n)$ n'est pas une suite géométrique

$u_2 + u_4 = 1 + 1 = 2$

$2 \times U_3 = 2 \times \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$

$\begin{cases} u_2 + u_4 = 2 \\ 2 \times U_3 = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_2 + u_4 \neq 2 \times U_3}$

$\Rightarrow$ (u_n) n'est pas une suite arithmétique

2a)

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}$

$= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2}$

$= \frac{(n+1)^2}{2 \times 2^n} \times \frac{2^n}{n^2}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$

b) $n \geq 5 \Rightarrow$

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow$

$1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{5} \Rightarrow$

$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{6}{5} \Rightarrow$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{36}{25} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \times \frac{36}{25} \Rightarrow$

$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2} \times \frac{36}{25} \Rightarrow$

$$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{18}{25} < \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{3}{4}}$$

3a) on

$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$

$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Rightarrow U_{n+1} < U_n$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$

$\Rightarrow$ (U_n) **est décroissante à partir du rang 5**

b) (U_n) **est décroissante à partir du rang 5 et minorée par zéro donc elle est convergente**

4a) $0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{3}{4}$

$\Rightarrow U_{n+1} < \frac{3}{4} U_n$

On effectue (n-5) relations à partir de $n = 5$

$$\begin{cases} U_6 < \frac{3}{4} U_5 \\ U_7 < \frac{3}{4} U_6 \\ \quad\vdots \\ U_n < \frac{3}{4} U_{n-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 < U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} U_5$

$\Rightarrow \boxed{0 < U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times \frac{25}{32}}$

b) $0 < U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times \frac{25}{32}$

$\Rightarrow 0 < \lim\limits_{n\to+\infty} U_n < \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times \frac{25}{32}$

$\Rightarrow 0 < \lim\limits_{n\to+\infty} U_n < 0$

D'après le théorème du gendarme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exercice 4 :

f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=2x-1+\ln x$

1° On a : $\lim\limits_{x\to0^+}(2x-1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$. La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale de la courbe (C). On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1+\ln x)=+\infty$. La branche infinie de (C), en $+\infty$, a une direction parallèle à celle de la droite d'équation $y=2x$.

2° a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=2+\frac{1}{x}>0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$
$f(x)$	$\|$	$-\infty \nearrow +\infty$

b) f est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J=\mathbb{R}$.

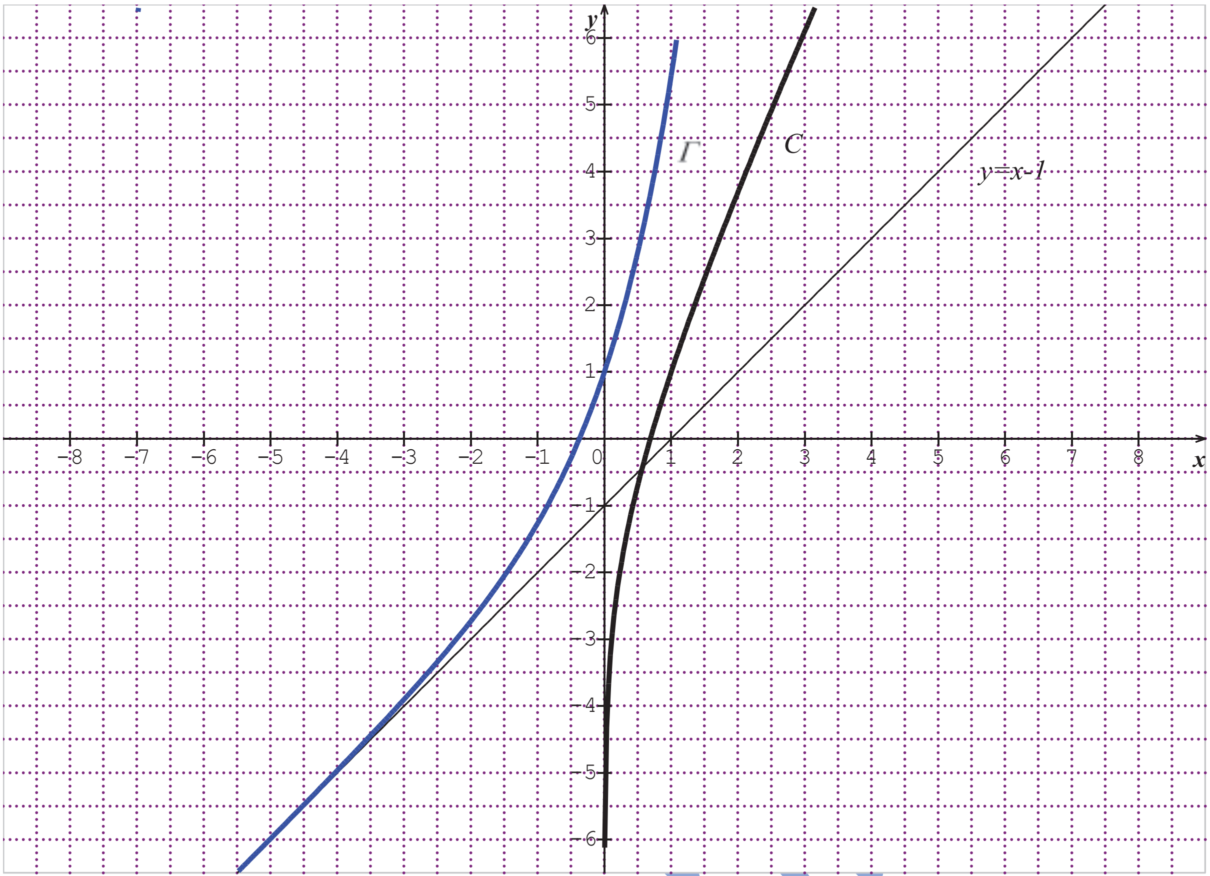
Le TV de f^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	$+$	
$f^{-1}(x)$	$0 \nearrow +\infty$	

c) f étant une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J=\mathbb{R}$ et $0\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α .On a : $f(0{,}6)\times f(0{,}7)<0$ donc $0{,}6<\alpha<0{,}7$.

4° a) Une tangente est parallèle à la droite d'équation $y=3x$ si et seulement s'il existe $x\in]0;+\infty[$ tel que : $f'(x)=3$. $f'(x)=3\Leftrightarrow 2+\frac{1}{x}=3\Leftrightarrow\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x=1$. Il existe un seul point en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=3x$, c'est le point d'abscisse 1.

b) Tracé de (C) et Γ.



5° a) Soit $\int_\alpha^1 \ln x\,dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_\alpha^1 \ln x\,dx = [x\ln x]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 dx = -\alpha\ln\alpha - [x]_\alpha^1 = -\alpha\ln\alpha - 1 + \alpha$

b) L'aire demandée est $A = \int_\alpha^1 f(t)\,dt = \int_\alpha^1 (2t-1+\ln t)\,dt \Leftrightarrow$

$A = [t^2 - t]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 \ln t\,dt = -\alpha^2 + \alpha - \alpha\ln\alpha - 1 + \alpha = -\alpha^2 + 2\alpha - \alpha\ln\alpha - 1$ ua.

6° g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - 1 + 2e^x$

a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x) \times e^x > 0$. D'autre part : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (g(x) - (x-1)) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$. La droite d'équation : $y = x - 1$ est une asymptote oblique de la courbe Γ.

c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x} + 2\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$. La branche infinie de Γ, en $+\infty$, est de direction (Ox)

d) $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(e^x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \alpha \Leftrightarrow x = \ln\alpha$