RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2011 session Normale

Exercice 1 (3points)

Un groupe d'élèves est composé de 3 garçons et de 4filles. Les noms de ces sept élèves sont inscrits sur des jetons indiscernables au touché et placés dans une enveloppe.
A chaque cours de mathématiques, le professeur tire au hasard un jeton et interroge l'élève concerné .Durant une semaine, il y'a 6cours de mathématiques. On appelle X la variable aléatoire définie par « X est égale au nombre de fois où le professeur interroge une fille durant cette semaine». On considère les événements :
A : Le professeur interroge exactement cinq garçons.
B : Une fille au moins est interrogée durant la semaine.
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogé soit un garçon est :	$\frac{3}{7}$	C_7^3	A_7^3
2	La probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogée soit une fille est :	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{7}$
3	L'ensemble des valeurs de X est :	$\{0, 1, 2, \dots\dots, 7\}$	$\{0, 1, 2, \dots., 6\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$
4	La probabilité de l'événement A est :	$\left(\frac{3}{7}\right)^5$	$C_6^5\left(\frac{3}{7}\right)^5\left(\frac{4}{7}\right)$	$\left(\frac{4}{7}\right)^5\left(\frac{3}{7}\right)$
5	La probabilité de l'événement B est :	$1-\left(\frac{3}{7}\right)^6$	$1-\left(\frac{4}{7}\right)^5$	$\frac{4}{7}$
6	Le nombre de filles interrogées durant la semaine, que l'on peut espérer est :	2	*3*	*4*

Recopie sur la feuille et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice (5points)

1. On pose $(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$.
a) Calculer $p(1)$
b) Déterminer a et b tels que : tels que pour tout z on a $p(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $p(z) = 0$
2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$
Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1 = 1$, $z_2 = 2+2i$ et $z_3 = 2-2i$
a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1 , z_2 et z_3
b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$
3a) Écrire le nombre $\frac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique .En déduire la nature du triangle OBC.
b) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1$

Exercice (5points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par :$f(x) = (x+2)e^x$
Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i},\vec{j}$) unité 1cm.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

2. Calculer $f'(x)$et dresser le tableau de variation de f.

3. Déterminer les points d'intersections de C avec l'axe des coordonnées puis construire (C) dans le repère (O ;$\vec{i},\vec{j}$).

4a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = f(x) + e^x$.
En déduire une primitive de f sur
b) Calculer l'aire S du domaine plan délimité par la courbe (C) et les axes des coordonnées.

5. On définit une suite numérique (U_n)par son terme général : $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$;$n \geq 1$
a) CalculerU_1 et U_2 .
Montrer que (U_n) est décroissante (on pourra utiliser les variations de f).
b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 4 (7points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :$f(x) = x - 1 + \frac{1+lnx}{x}$
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i},\vec{j}$) unité 1cm.
1a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et interpréter graphiquement.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
Montrer que la droite Δd'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C).

c) Étudier la position relative de (C) et Δ
2) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$:$g(x) = x^2 - lnx$
a)vérifier que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+ln2}{2}$
b) Calculer $g'(x)$
c) Étudier les variations de g et montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$:$g(x) > 0$
3a) Calculer $f'(x)$et vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$on a :$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f
4a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.vérifier que$\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$.
5a) Préciser les points de la courbe (C) en lesquels la tangente (T) est parallèle àΔ.
b) Représenter la courbe (C) et les droites Δ et (T) dans (O ;$\vec{i},\vec{j}$).
c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation $(m+1)x - 1 - lnx = 0$
6) Soit n un entier naturel, $n \geq 1$ .On note U_n l'aire du domaine plan délimitée par la courbe (C) l'asymptote oblique Δ et les droites d'équations respectives $x = n$ et $x = n+1$
a) ExprimerU_n en fonction de n
b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Fin

Corrigé baccalauréat 2011 session Normale

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	C	B	B	A	B

Exercice 2

$P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8.$

1 a) $p(1) = 1 - 5 + 12 - 8$

$= 13 - 13$

$p(1) = 0$

b) $p(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$

$= z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b$

$= z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$

$$\begin{cases} a - 1 = -5 \Rightarrow a = -4 \\ b - a = 12 \\ -b = -8 \Rightarrow b = 8 \end{cases}$$

$p(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 8)$

c) $p(z) = 0 \Rightarrow (z-1)(z^2 - 4z + 8) = 0$

$\Rightarrow z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$

Ou $z^2 - 4z + 8 = 0$

$\Delta = 16 - 32 = -16 = 16i^2$

$z_2 = \dfrac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$

$z_3 = \dfrac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i$

$S = \{1, 2 + 2i, 2 - 2i\}$

2 a) $z_1 = z_A = 1$

$z_2 = z_B = 2 + 2i$

$z_3 = z_C = 2 - 2i$

$|z_1| = 1$, $\arg z_1 = \arg 1 = 0[2\pi]$

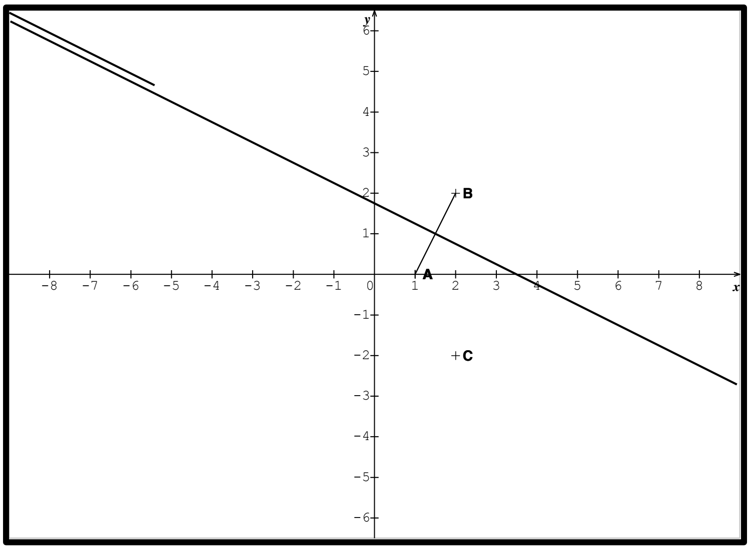
$|z_2| = |2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg z_2 = \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}$

$|z_3| = |2 - 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg z_3 = \arg(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4}$

b)



3a) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{2+2i}{2-2i}$

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{1+i+i-1}{2}$$

$$= \frac{2i}{2}$$

$$\frac{z_2}{z_3} = i \Rightarrow \left|\frac{z_2}{z_3}\right| = |i| = 1$$

$\frac{z_2}{z_3} = i \Rightarrow$ $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = arg\, i = \frac{\pi}{2}$

$\left|\frac{z_2}{z_3}\right| = \left|\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right| = \frac{OB}{OC} = 1 \Rightarrow$ OB=OC

$\arg\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = arg\, i = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$

donc le triangle OBC est isocèle rectangle en O

b) $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right| = 1$

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = 1$$

$$\Rightarrow AM = BM$$

Γ est la médiatrice du $[AB]$

Exercice 3

$f(x) = (x+2)e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

1 − $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x + 2e^x) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ **est une asymptote horizontale au voisinage de -∞**

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x+2)e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x+2)}{x} \times e^x = +\infty$

La courbe (C) admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de +∞

2) $f'(x) = e^x + e^x(x+2)$

$$= e^x(1 + x + 2)$$

$f'(x) = (x+3)e^x$

$e^x > 0 \Rightarrow$ Le signe de $f'(x)$ est celui de $x+3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$

TV de f

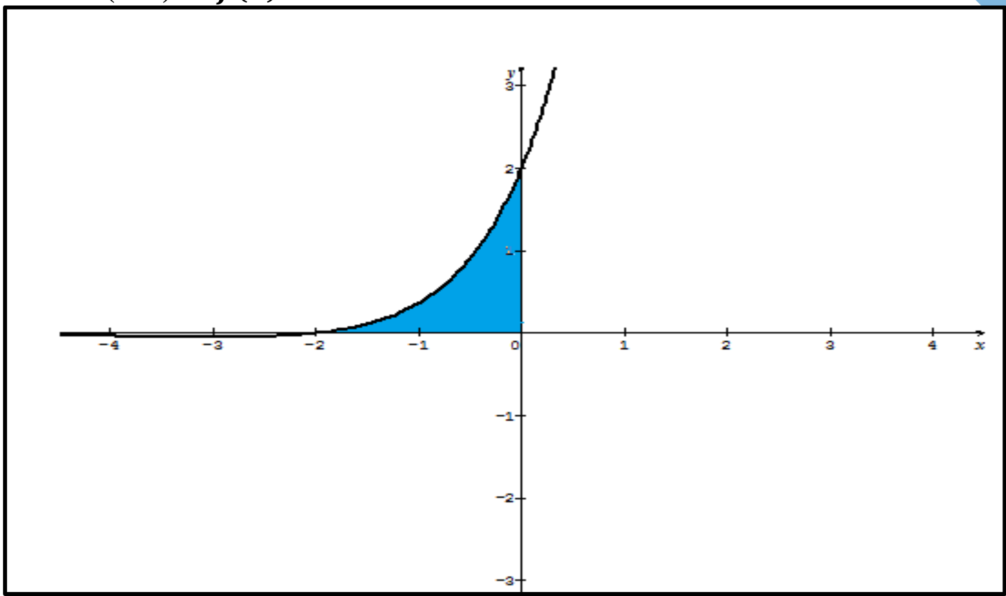
x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	0	$\searrow$	$-e^{-3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-3) = -e^{-3}$

3- Intersection avec les axes

avec (OY) $\Rightarrow f(0) = 2$

avec (OX)$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$ x+2=0$\Rightarrow x = -2$



4-a) $f'(x) = e^x + e^x(x+2)$

$f'(x) = e^x + f(x)$

$\Rightarrow f(x) = e^x + F(x)$

$\Rightarrow F(x) = f(x) - e^x$

$F(x) = e^x(x+2) - e^x$

$=(x+2-1)e^x$

$F(x) = (x+1)e^x$

b) $S = \int_{-2}^{0} f(x)dx \times u.a$

S= $[F(x)]_{-2}^{0} \times cm^2$

S=F (0)−F (-2)

$S = (1+e^{-2})cm^2$

5 a) $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$;$n \geq 1$

$U_1 = f(1) = 3e$

$U_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{e}$

sur$[0, +\infty[$ f est croissante

$n \geq 1$; on sait que :$n+1 > n \Rightarrow$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{1}{n+1}\right) < f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$

$\Rightarrow (U_n)$ **est décroissante**

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) = 2$

Exercice 4

$$f(x) = x - 1 + \frac{1+lnx}{x}$$

1a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - 1 + \frac{1+lnx}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} x - 1 + \frac{1}{x}(1 + lnx)$

$= 0 - 1 + (+\infty)(1 - \infty)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{f(x)} = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ **est une asymptote verticale**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x} = +\infty$ **puisque** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0 \end{cases}$

Démontrons que la droite Δ **d'équation** $y = x - 1$ **est une asymptote oblique au voisinage de** $+\infty$

$$f(x) - y = x - 1 + \frac{1+lnx}{x} - x + 1$$

$$f(x) - y = \frac{1+lnx}{x}$$

$$f(x) - y = \frac{1+lnx}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}\right) = 0 \Rightarrow$ **Que la droite** Δ**d'équation** $y = x - 1$ **est une asymptote oblique au voisinage de** $+\infty$

c) $f(x) - y = 0 \Rightarrow 1 + lnx = 0$

$\Rightarrow lnx = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1}$

X	0		e^{-1}		$+\infty$
f(x)-y		-	0	+	
Position relative		Δ/C		C/Δ	

2) $g(x) = x^2 - lnx$

a)

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$= \frac{1}{2} + ln\sqrt{2}$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln2$

b) $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

c) $x > 0$ **Le signe de** $g'(x)$ **est celui du numérateur**

$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **Ou** $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)		↘	$\frac{1+\ln 2}{2}$	↗	

g admet un minimum positif donc g est positif

3a)

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + lnx)}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - 1 - lnx}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{lnx}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - lnx}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x} > 0$$

b) TV de f

x	0		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

4a) **f est continue et strictement croissante de** $]0, +\infty[$ **vers J=** $]-\infty, +\infty[$ **donc f réalise une bijection**

b) f est bijective de$]0, +\infty[$ **vers J et 0**$\in$ **J donc l'équation** $f(x) = 0$ **admet une unique solution α**

$f\left(\frac{1}{e}\right) \cong -0,63 < 0$ *et* $f\left(\frac{1}{2}\right) \cong 0,11 > 0$

$f\left(\frac{1}{e}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$

$5a)$ (T) *est parallèle à D* $\Leftrightarrow f'(x) = 1$

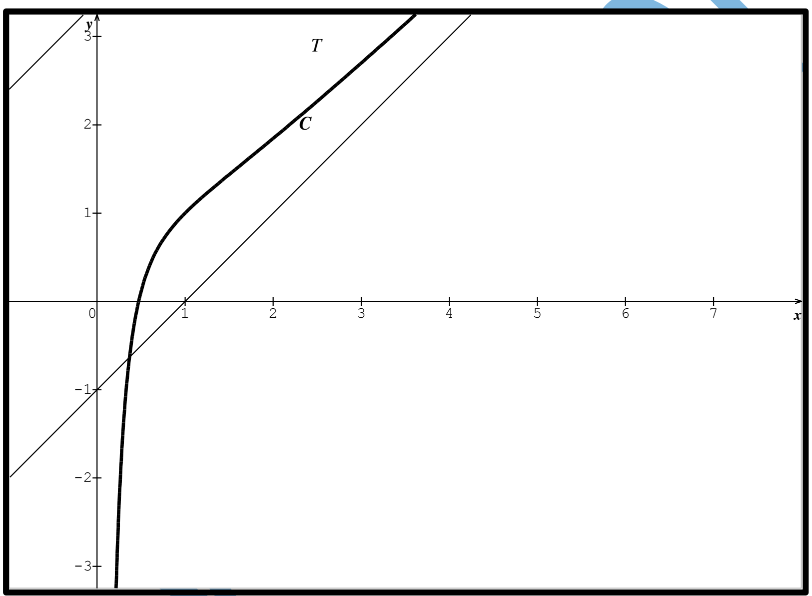
$\Leftrightarrow \frac{x^2 - lnx}{x^2} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - lnx = x^2$

$$\Leftrightarrow \ lnx = 0$$
$$\Leftrightarrow \ x = 1$$
La tangente est parallèle à D en $x_0 = 1$

c) $(m+1)x - 1 - lnx = 0$
$\Rightarrow mx + x - 1 - lnx = 0$
$\Rightarrow \ mx = -x+1+ln$
$\Rightarrow \ m = \frac{-x+1+lnx}{x}$
$\Rightarrow \ m = -1 + \frac{1+lnx}{x}$
$\Rightarrow x + \ m = x - 1 + \frac{1+lnx}{x}$
$\Rightarrow f(x) = x + m$
Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + m$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe C de f et la droite(D_m) d'équation $y = x + m$
$$\begin{cases} Si\ m \in]-\infty, -1] & l'équation\ admet\ une\ seule\ solution \\ si\ m \in]-1, 0[& l'équation\ admet\ 2 solutions \\ si\ m = 0 & l'équation\ admet\ 1 solution \\ Si\ m \in]0, +\infty[& l'équation\ n'admet\ aucune solution \end{cases}$$

b)



6 **a) sur** $]1, +\infty[$**la courbe C est situé en dessus de l'asymptote oblique**

$$U_n = \int_n^{n+1} (f(x) - y)dx$$
$$= \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \times (1 + lnx)dx$$
$$= \left[\frac{(1 + lnx)^2}{2}\right]_n^{n+1}$$

$$= \frac{(1+ln(n+1))^2}{2} - \frac{(1+lnn)^2}{2}$$
$$= \frac{(1+ln(n+1)-1-lnn)(1+ln(n+1)+1+lnn)}{2}$$
$$= \frac{(ln(n+1)-lnn)(2+ln(n+1)+lnn)}{2}$$
$$U_n = \frac{ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(2+ln(n^2+n))}{2}$$
$$\boxed{U_n = \frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(2+ln(n^2+n))}{2}}$$

$$b)\ U_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \times \frac{2+ln(n^2+n)}{n} \right)$$
$$U_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \times \frac{2+ln(n^2+n)}{n} \right)$$
$$U_n = \frac{1}{2} \times \left(\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}} \right) \times \left(\frac{2}{n} + \frac{lnn}{n} + \frac{ln(n+1)}{n} \right) \right)$$

On pose $X = \frac{1}{n}$ *si* $n \to +\infty \Rightarrow X \to 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{ln\,n}{n} = 0;\ \lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n+1)}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \Rightarrow = \frac{1}{2} \times \left(\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right) \left(\frac{2}{n} + \frac{lnn}{n} + \frac{ln(n+1)}{n} \right) \right) = 0$$

Si n→ +∞ cette aire est nulle parceque la courbe C coincide avec l'asymptote oblique Δ