

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) a- Soit a un nombre réel, résoudre dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue z :
 $(1+i)z^2 - 2(a+1)z - (-1+i)(a^2+1) = 0$ (1 pt)

b- Soient f et g les transformations données par leurs expressions complexes $f: z \rightarrow z' = 1 - iz$ et $g: z \rightarrow z'' = z - i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations f et g . (0,5 pt)

Dans le reste de l'exercice on considère les points I , M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 1 - ia$ et $z_2 = a - i$ où $a = e^{i\alpha}$, $\alpha \in]0, 2\pi[$

2) a- Montrer que le triangle IM_1M_2 est rectangle en I , isocèle et direct. (0,5 pt)

b- Préciser les lieux géométriques de chacun des points M_1 et M_2 lors que α décrit l'intervalle $]0, \pi[$ (0,5 pt)

c- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle pour α appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. (0,5 pt)

3) Soit M_3 le point d'affixe $z_3 = i \sin \alpha + ia$ et soit G l'isobarycentre des points M_1 , M_2 et M_3

a- Vérifier que $z_G = \frac{1 + \cos \alpha}{3} + i \frac{(-1 + 2 \sin \alpha)}{3}$ puis montrer que, pour $\alpha \in]0, \pi[$, le point G appartient à une ellipse Γ dont on donnera une équation. (0,5 pt)

b- Préciser les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent. (0,5 pt)

Exercice 2 (6 points)

ABC est un triangle équilatéral direct de côté 4 cm, et de cercle circonscrit Γ , les points I , J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On pose $A' = s_B(A)$.

1) a- Faire une figure illustrant les données que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale. (0,75 pt)

b- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g vérifiant $g(B) = A$ et $g(A') = B$. Vérifier que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. (0,75 pt)

c- Soit r la rotation qui transforme C en B et J en K . Déterminer un angle et le centre de r . (0,5 pt)

2) Soit s la similitude directe qui transforme A en B et C en I , et on pose $h = s \circ r$

a- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de s . (0,5 pt)

b- Soit Ω le centre de s . Montrer que $\Omega \in \Gamma$ et que les points Ω , A et I sont alignés. Placer alors Ω . (0,5 pt)

c- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h . (0,5 pt)

3) Soit M un point de Γ distinct de Ω , on pose $M' = s(M)$ et $M_1 = r(M)$

a- Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle. (0,5 pt)

b- Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,5 pt)

c- Montrer que les points M_1 , M et M' sont alignés. (0,25 pt)

4) On pose $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = s(M_n)$

a- Déterminer M_1 et construire M_2 .

b) Vérifier que $M_{2017} \in (\Omega B)$

b- Pour tout entier naturel n , on pose $L_n = M_n M_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n L_k$ exprimer S_n en fonction de n , puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. (0,25 pt)

(0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer. (0,5 pt)

2) a- Dresser le tableau de variation de f_0 . (0,5 pt)

b- On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées de A, milieu de $[MN]$, que représente A pour (C_0) ? (0,5 pt)

3) a- Montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. (0,25 pt)

b- Dédurre le tableau de variation de f_1 (0,25 pt)

c- Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère. (0,5 pt)

4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.

a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter. (0,75 pt)

b- Calculer f'_n et dresser le tableau de variation de f_n . (0,5 pt)

5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$

a- Justifier l'existence de (u_n) puis vérifier que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ (0,5 pt)

b- Vérifier que $u_0 + u_1 = 1$ et que $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ puis déduire u_1 et u_2 (0,5 pt)

c- Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite. (0,25 pt)

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1) a- Dresser le tableau de variation de f .

b- Dédurre que pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n (0,75 pt)

c- Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge. (0,25 pt)

2) a- Montrer que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$ (0,5 pt)

b- Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$, $n \geq 2$. (0,5 pt)

3) Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on pose : $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2}$

a- Montrer que $S_n - \frac{\ln(2)}{(2)^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{(n)^2}$ (0,5 pt)

b- En déduire que : $\frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{n + (n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2 + 3\ln 2}{4} - \frac{1 + \ln(n)}{n}$ (0,25 pt)

4) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$ En déduire la limite de I_n (0,5 pt)

b- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$ (0,5 pt)

c- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$ (0,25 pt)

d- Exprimer (u_n) en fonction de I_n . En déduire la limite de (u_n) . (0,5 pt)

Fin.

Corrigé

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) a- Soit a un nombre réel, résolvons dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue

$$z : (1+i)z^2 - 2(a+1)z - (-1+i)(a^2+1) = 0$$

$$\Delta = (-2(a+1))^2 - 4(1+i)(1-i)(a^2+1) = -4a^2 + 8a - 4 = -4(a^2 - 2a + 1) \quad \Delta = (2(a-1)i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions:

$$z_1 = \frac{2(a+1) + 2(a-1)i}{2(1+i)} = \frac{a+ai+1-i}{1+i} = a-i$$

$$z_2 = \frac{2(a+1) - 2(a-1)i}{2(1+i)} = \frac{a-ai+1+i}{1+i} = 1-ai$$

$$S = \{a-i, 1-ia\}$$

b- Soient f et g les transformations données par leurs expressions complexes $f: z \mapsto z' = 1 - iz$ et $g: z \mapsto z'' = z - i$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations f et g .

$$f(z) = -iz + 1 \quad \text{comme } |-i| = 1 \text{ et } -i \notin \mathbb{R}$$

Alors f est une rotation d'angle $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et de centre le point Ω d'affixe

$$\frac{1}{1-(-i)} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i. \text{ Donc } \Omega \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

$$g(z) = z - i$$

g est la translation de vecteur d'affixe $(-i)$. C'est à dire le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) Les points I , M_1 et M_2 sont d'affixes respectives $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 1 - ia$ et $z_2 = a - i$ où

$$a = e^{i\alpha}, \quad \alpha \in]0, 2\pi[$$

$$a) \text{ On a } \frac{z_1 - z_{M_2}}{z_1 - z_{M_1}} = \frac{1-i-a+i}{1-i-1+ia} = \frac{1-a}{i(-1+a)} = -\frac{1}{i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{IM_2} \text{ et } (\overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{IM_2}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Alors le triangle IM_1M_2 est rectangle en I , isocèle et direct.

b) Pour déterminer le lieu géométrique du point M_1 lorsque α décrit l'intervalle $]0, \pi[$ on constate

$$\text{que } z_1 = 1 - ia \Rightarrow z_1 - 1 = -ie^{i\alpha} = e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} |z_1 - 1| = 1 \\ \arg(z_1 - 1) = \alpha - \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\text{Soit } A \text{ le point d'affixe } z_A = 1. \text{ Alors } \begin{cases} AM_1 = 1 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{AM_1}) = \alpha - \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Donc M_1 appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

$$\text{En plus } 0 < \alpha < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}, \text{ alors } -\frac{\pi}{2} < (\vec{u}, \overrightarrow{AM_1}) < \frac{\pi}{2}$$

Donc lorsque α décrit l'intervalle $]0, \pi[$, M_1 décrit le demi-cercle (C_1) de centre A et de rayon 1, situé à droite de la droite d'équation $x = 1$ d'extrémités exclues.

Pour le point M_2 :

$$z_2 = a - i \Leftrightarrow z_2 + i = a \Leftrightarrow z_2 + i = e^{i\alpha} \quad . \text{ Alors } \begin{cases} |z_2 + i| = 1 \\ \arg(z_2 + i) = \alpha \end{cases} .$$

Soit B le point d'affixe $z_B = -i$. Alors

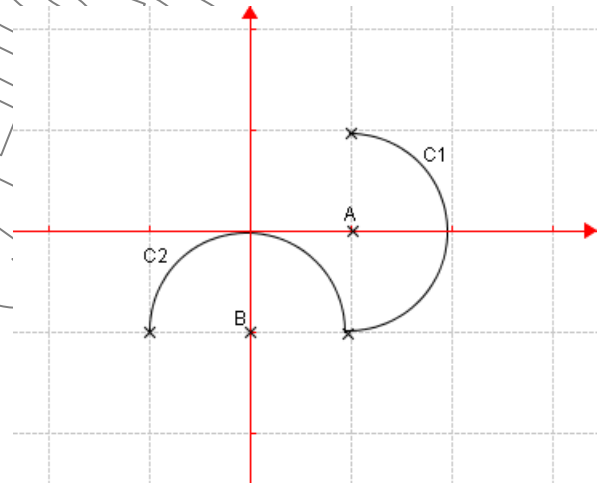
$$\begin{cases} BM_2 = 1 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{BM_2}) = \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

M_2 appartient au cercle de centre B et de rayon.

D'autre part, lorsque α décrit l'intervalle $]0, \pi[$,

on a $0 < (\vec{u}, \overrightarrow{BM_2}) < \pi \quad [2\pi]$.

Alors M_2 décrit le demi-cercle (C_2) de centre B et de rayon 1, situé au dessus de la droite d'équation $y = -1$ d'extrémités exclues.



c) Pour écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle, on procède à des modifications d'écriture :

Pour α appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ $z_1 = 1 - ia \Rightarrow z_1 = 1 - ie^{i\alpha} = e^{i0} + e^{i(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2})} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

Le module de z_1 est $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. Son argument dépend du signe de $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$:

Lorsque α décrit l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a alors $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ et

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} < 0 \quad . \text{ D'où } \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\text{Donc } |z_1| = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \text{ et } \arg z_1 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

D'où la forme exponentielle de z_1 est : $z_1 = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

$$z_2 = -i + a = e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Le module de z_2 est $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Son argument dépend du signe de $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$:

Lorsque α décrit l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a alors $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ et

$$\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \quad . \text{ D'où } \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

Donc $|z_2| = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\arg z_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} [2\pi]$

D'où la forme exponentielle de z_2 est : $z_2 = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

3) Soit M_3 le point d'affixe $z_3 = i \sin \alpha + ia$

a) Le point G est l'isobarycentre des points M_1, M_2 et M_3 . On a alors :

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \\ z_G &= \frac{1 - ia + a - i + i \sin \alpha + ia}{3} \\ z_G &= \frac{1 + a - i + i \sin \alpha}{3} \\ z_G &= \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha - i + i \sin \alpha}{3} \\ z_G &= \frac{1 + \cos \alpha}{3} + i \frac{(-1 + 2 \sin \alpha)}{3} \end{aligned}$$

En posant $z_G = x + iy$ on a alors :

$$\begin{aligned} G(x, y) \Rightarrow x + iy &= \frac{1 + \cos \alpha}{3} + i \frac{(-1 + 2 \sin \alpha)}{3} \\ \Rightarrow \begin{cases} x &= \frac{1 + \cos \alpha}{3} \\ y &= \frac{-1 + 2 \sin \alpha}{3} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} \cos \alpha \\ y + \frac{1}{3} &= \frac{2}{3} \sin \alpha \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} &= \cos \alpha \\ y + \frac{1}{3} &= \sin \alpha \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} &= \cos^2 \alpha \\ \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} &= \sin^2 \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$$

Alors G appartient à l'ellipse d'équation $\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Le centre de Γ est le point $\Omega\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$:

L'équation réduite de l'ellipse Γ est $\frac{X^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$; avec $\begin{cases} X = x - \frac{1}{3} \\ Y = y + \frac{1}{3} \end{cases}$

Les sommets de Γ sont : $A\left(\frac{1}{3}; 0\right), A'\left(-\frac{1}{3}; 0\right), B\left(0; \frac{2}{3}\right), B'\left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

Alors dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les sommets de Γ ont pour coordonnées :

$$A\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right), A'\left(0; -\frac{1}{3}\right), B\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), B'\left(\frac{1}{3}; -1\right).$$

Pour calculer l'excentricité on a $e = \frac{c}{b}$ avec $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$.

$$\text{Donc } c = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ D'où } e = \frac{c}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 2

1.a) Figure

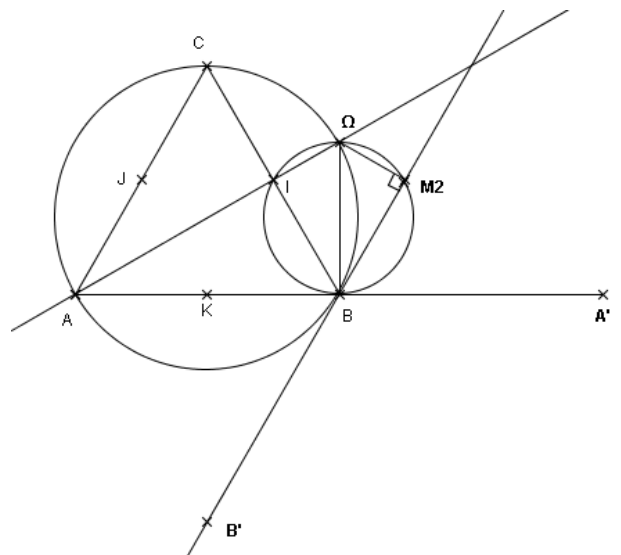
ABC est un triangle équilatéral direct de côté 4 cm, et de cercle circonscrit Γ , les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

$A' = s_B(A)$.

b) Comme $A' = s_B(A)$, B est le milieu de $[AA']$. Donc $BA' = AB \neq 0$. Alors il existe un unique antidéplacement g vérifiant $g(B) = A$ et $g(A') = B$.

Les médiatrices des segments $[BA]$ et $[A'B]$ sont différentes. Alors l'antidéplacement g est une symétrie glissante.

On peut aussi remarquer que $g \circ g(A') = A \neq A'$ ce qui montre que g n'est pas une réflexion. Donc g est une symétrie glissante.



Pour la forme réduite de g :

L'axe passe par les milieux des segments $[BA]$ et $[A'B]$ car $g(B) = A$ et $g(A') = B$. Alors c'est la droite (AB) .

Le vecteur \vec{u} vérifie $2\vec{u} = \overrightarrow{A'A}$ car $g \circ g(A') = A$. Alors $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$. D'où la forme réduite de g :

$$g = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{AB} = S_{AB} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$$

c) La rotation r est telle que :

$$\begin{array}{l} C \rightarrow B \\ J \rightarrow K \end{array} \text{ Alors}$$

Une mesure de l'angle de r est : $\theta = (\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{BK}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

Le centre de r est le point A intersection des droites (CJ) et (BK) car les médiatrices des segments $[CB]$ et $[JK]$ sont confondues.

2) La similitude directe s est telle que :

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow I \end{array}$$

a) Le rapport de s est : $\lambda = \frac{BI}{AC} = \frac{1}{2}$

Une mesure de l'angle de s est $\theta = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

b) Soit Ω le centre de s . Pour montrer que $\Omega \in \Gamma$ on a : $s(A) = B \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

Comme $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$ alors $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad [2\pi]$ ce qui montre que les points Ω, A, B et

C sont cocycliques. Alors $\Omega \in \Gamma$.

Pour montrer que les points Ω, A, I sont alignés on a :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) &= (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) + (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega I}) \quad [2\pi] \\ &= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega I}) \quad [2\pi] \text{ car } \Omega, A, B, C \text{ sont cocycliques} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0 \quad [2\pi] \text{ car } s(C) = I \end{aligned}$$

Donc les points Ω, A et I sont alignés.

c) La somme des angles de s et r est nulle $\left(\frac{\pi}{3} \text{ et } -\frac{\pi}{3}\right)$. Donc la composée $h = s \circ r$ est une homothétie

de rapport $\frac{1}{2}$, (même rapport de s).

Pour déterminer le centre de h , on a $h(A) = s \circ r(A) = s(A) = B$

et $\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'A}$ ce qui prouve que A' est le centre de h

Donc h est l'homothétie de centre A' et de rapport $\frac{1}{2}$.

3) Soit M un point de Γ distinct de Ω , on pose $M' = s(M)$ et $M_1 = r(M)$

a) Pour montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle :

Méthode 1 : On a

$$s(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = \frac{1}{2} \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases} \quad \text{et} \quad \cos(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\Omega M'}{\Omega M}$$

Par conséquent le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M' .

Autre méthode :

On peut appliquer la relation d'Alkashi dans le triangle $\Omega MM'$:

$$\begin{aligned} MM'^2 &= \Omega M^2 + \Omega M'^2 - 2\Omega M \times \Omega M' \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \Omega M^2 + \frac{1}{4}\Omega M^2 - 2\Omega M \times \frac{1}{2}\Omega M \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\Omega M^2 \end{aligned}$$

$$\text{Alors } MM'^2 + \Omega M'^2 = \frac{3}{4}\Omega M^2 + \frac{1}{4}\Omega M^2 = \Omega M^2$$

Donc d'après le réciproque du théorème de Pythagore le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M' .

b) Pour montrer que la droite (MM') passe par un point fixe :

On constate que $s(C) = I$ et $s(A) = B$. Alors si la droite (MM') passe par un point fixe, ce point doit appartenir aux droites (CI) et (AB) qui se coupent en B .

Vérifions alors que pour tout point $M \in \Gamma$, (différent de B et Ω) la droite (MM') passe par B :

$$\text{On a } (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MM'}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{M\Omega}) + (\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) \quad [2\pi]$$

$$\text{Or } (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{M\Omega}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}) = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \text{ car les points } \Omega, M, A, B \text{ sont cocycliques}$$

$$\text{De plus, le triangle } \Omega MM' \text{ rectangle en } M' \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \text{ d'où}$$

$$(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MM'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}) + (\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) \quad [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0 \quad [2\pi]$$

Donc, pour tout point $M \in \Gamma$, la droite (MM') passe par B .

c- Montrons que les points M_1 , M et M' sont alignés

$$\begin{aligned} \text{On a } (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM'}) &= (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) \quad [\pi] \\ &= (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad [\pi] \text{ car } B \in (MM') \\ &= (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad [\pi] \\ &= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 0 \quad [\pi] \end{aligned}$$

Donc les points M_1 , M et M' sont alignés.

4.a) On pose $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = s(M_n)$

On a $M_1 = s(M_0) = s(A) = B$ alors $M_1 = B$

- $M_2 = s(M_1) = s(B)$.

Pour construire M_2 on a :

$$\begin{array}{c} s \\ A \rightarrow B \\ B \rightarrow M_2 \\ C \rightarrow I \end{array}$$

Par conservation de configuration, le triangle BM_2I est équilatéral direct (semblable à ABC). Ce qui permet de construire M_2 . On remarque aussi que le triangle ΩBM_2 est rectangle en M_2 . donc M_2 appartient au cercle de diamètre $[\Omega B]$ avec $(\vec{\Omega B}, \vec{\Omega M_2}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

b) Vérifions que $M_{2017} \in (\Omega B)$

On sait que $M_{2017} = s^{2017}(M_0) = s^{2017}(A) = s^{2016}(s(A))$
 $M_{2017} = s^{2016}(B)$.

La transformation s^{2016} est une composée de similitudes directes de centre Ω . C'est une similitude directe d'angle $2016 \times \frac{\pi}{3}$. C'est-à-dire zéro ($672\pi = 0 [2\pi]$). Alors c'est une homothétie de centre Ω qui transforme B en $M_{2017} \in (\Omega B)$. Ce qui montre que $M_{2017} \in (\Omega B)$.

c) Pour tout entier naturel n , on a $L_n = M_n M_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n L_k$

Comme le rapport de s est $\frac{1}{2}$ et :

$$\begin{array}{c} s \\ M_n \rightarrow M_{n+1} \\ M_{n+1} \rightarrow M_{n+2} \end{array}$$

Donc $M_{n+1}M_{n+2} = \frac{1}{2}M_nM_{n+1}$ et $L_{n+1} = \frac{1}{2}L_n$.

Donc (L_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $L_0 = M_0M_1 = AB = 4$

$$\text{Alors } S_n = L_0 + L_1 + \dots + L_n = L_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \times 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = 8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 8$

Exercice 3

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe :

Si un point M d'abscisse x est commun à toutes les courbes alors $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ pour tout n .

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} &= \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \\ e^{-(n+1)x} &= e^{-nx} \\ -(n+1)x &= -nx \end{aligned}$$

D'où $x = 0$

Or $f_n(0) = \frac{1}{2}$ donc toutes les courbes (C_n) passent par le point de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

2.a) Tableau de variation de f_0 :

On a $f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$

$f_0'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$		+
$f_0(x)$	0	1

b) On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisses respectives x et $-x$.
Déterminons les coordonnées de A, milieu de $[MN]$,

Comme $M(x; f_0(x))$ et $N(-x; f_0(-x))$ alors si $A(x_A; y_A)$ est le milieu de $[MN]$ alors

$$\begin{cases} x_A = \frac{x + (-x)}{2} = 0 \\ y_A = \frac{f_0(x) + f_0(-x)}{2} = \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x}}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alors $A(0; \frac{1}{2})$

Comme $y_A = \frac{f_0(x) + f_0(-x)}{2} = \frac{1}{2}$ alors $f_0(x) + f_0(-x) = 2 \times \frac{1}{2}$ donc A représente le centre de symétrie de (C_0)

3.a) Pour montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

on remarque que $f_1(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^x} = f_0(-x)$

D'où si le point $M_1(x; y)$ appartient à (C_1) alors le point $M_0(-x; y)$ appartient à (C_0)

Donc les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

b) Le tableau de variation de f_1

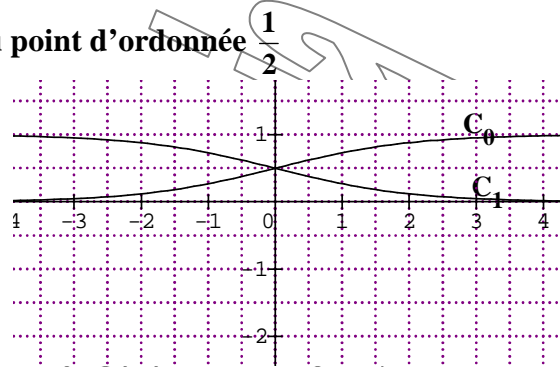
Nous savons que $f_1(x) = f_0(-x)$. Donc $f_1'(x) = -f_0'(-x) < 0$

Donc f_1 est décroissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	-	
$f_1(x)$	1	0

c- Construction de (C_0) et (C_1) dans le même repère

Chacune des courbes (C_0) et (C_1) admet deux asymptotes horizontales d'équations $y=0$ et $y=1$. Elles coupent (Oy) au point d'ordonnée $\frac{1}{2}$.



4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.

c- Calcul de limites et interprétation

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^{-x}) = 1 \end{cases}$$

Interprétation : la courbe (C_n) admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(n-1)t}}{e^{-t}+1} \quad \text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty \quad \text{car} \quad n-1 > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(n-1)t} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-t}+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \times \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}} \times \frac{1}{-t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-e^{-nt}}{e^{-t}+1} \times \frac{e^t}{t} \right) = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-e^{-nt}}{e^{-t}+1} \right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{t} \right) = +\infty$$

Interprétation graphique:

La courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$

b) Pour n est strictement supérieur à 1,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \Rightarrow f'_n(x) = \frac{-ne^{-nx}(1+e^{-x}) + e^{-x} \times e^{-nx}}{(1+e^{-x})^2} \\ \Rightarrow f'_n(x) &= \frac{-ne^{-nx} - ne^{-nx} \times e^{-x} + e^{-x} \times e^{-nx}}{(1+e^{-x})^2} \\ \Rightarrow f'_n(x) &= \frac{-e^{-nx}(n + (n-1)e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} \end{aligned}$$

$f'_n(x) < 0$ car $n-1 > 0 \Rightarrow n + (n-1)e^{-x} > 0$ et $-e^{-nx} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Donc f_n est strictement décroissante sur \mathbb{R} . D'où le tableau de variation de f_n :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	
$f_n(x)$	$+\infty$	0

5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$

a) Comme f_n est continue sur $[0,1]$, f_n admet des primitives sur $[0,1]$. Alors (u_n) existe.

$$u_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln(1+e^x) \right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

b) Pour vérifier que $u_0 + u_1 = 1$; on a :

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 f_0(x) dx + \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$$

Vérifions que $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x) dx + \int_0^1 f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x} + 1)}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 e^{-nx} dx \\ &= \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 \\ &= -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$$

Déduction de u_1 et u_2

$$u_0 + u_1 = 1 \Rightarrow u_1 = 1 - u_0 \Rightarrow u_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$u_2 + u_1 = \frac{1-e^{-1}}{1} \Rightarrow u_2 = 1 - e^{-1} - u_1 \Rightarrow u_2 = 1 - e^{-1} - 1 + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = -e^{-1} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

c) Pour montrer que (u_n) est convergente :

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \geq 0$, on a $-(n+1)x \leq -nx \Rightarrow e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx} \Rightarrow 0 < \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \leq \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$

$$\text{Alors } \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \text{ d'où } 0 < u_{n+1} \leq u_n$$

La suite (u_n) est décroissante et minorée (minorée par zéro). Alors elle est convergente.

$$1+e^{-x} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+e^{-x}} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} < e^{-nx} \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^1 e^{-nx} dx$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \leq \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = -\frac{1}{n} e^{-n} + \frac{1}{n}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 4

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1.a) Tableau de variation de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \right) = 0^+ \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ car quotient de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln x}{(x^2)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Or $x^3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur :

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}$$

$$\text{On a } f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$$

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

b) Montrons que pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n :

- La restriction de f sur l'intervalle $I = [1, \sqrt{e}]$ est continue et strictement croissante et

$$f(I) = J = \left[0, \frac{1}{2e} \right].$$

- De plus $\forall n \geq 6, 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6} < \frac{1}{2e}$; ($\frac{1}{6} = 0,167 < \frac{1}{2e} = 0,184$) . Alors $\forall n \geq 6, \frac{1}{n} \in J = \left[0, \frac{1}{2e} \right]$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n

c- Montrons que la suite (a_n) est décroissante, et qu'elle converge :

On a $\forall n \geq 6, \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Or $\forall n \geq 6, \frac{1}{n} = f(a_n)$ et $\frac{1}{n+1} = f(a_{n+1})$ donc $f(a_n) > f(a_{n+1})$ et comme f est strictement croissante sur $[1, \sqrt{e}]$ alors $a_n > a_{n+1}$ et la suite (a_n) est strictement décroissante.

D'autre part $a_n \in [1, \sqrt{e}]$ donc la suite (a_n) est décroissante et minorée par 1, d'où elle converge.

2.a) Montrons que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$

Soit k un entier strictement supérieur à 1 alors $k \geq 2$ et :

$x \in [k, k+1] \Rightarrow k \leq x \leq k+1$ donc $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ car f est décroissante sur $[2, +\infty[$. Alors

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} < \frac{\ln x}{x^2} < \frac{\ln k}{k^2} \text{ donc } \int_k^{k+1} \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} dx < \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx < \int_k^{k+1} \frac{\ln k}{k^2} dx$$

$$\text{Soit } \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \int_k^{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2} \int_k^{k+1} dx$$

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} [x]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2} [x]_k^{k+1}$$

Par conséquent $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$

b) Pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$, $n \geq 2$, on utilise une intégration par parties :

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_2^n + \int_2^n \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x} \right]_2^n \\ &= -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} \end{aligned}$$

3) Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on a : $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2}$.

a) D'après 2.a) on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ln 3}{3^2} \leq \int_2^3 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln 2}{2^2} \\ \frac{\ln 4}{4^2} \leq \int_3^4 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln 3}{3^2} \\ \vdots \\ \frac{\ln n}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2} \end{array} \right.$$

En additionnant membre à membre on obtient :

$$\sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln k}{k^2} \quad \text{Donc : } S_n - \frac{\ln(2)}{(2)^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{(n)^2}.$$

b) Pour montrer que : $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln n}{n}$

on a d'après la question 2.b) : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

De la question précédente on a : $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}$

- La première inégalité s'écrit : $S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$

$$\text{Donc } S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{1 + \ln n}{n}$$

- La seconde inégalité : $S_n \geq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx + \frac{\ln n}{n^2}$

$$\text{Donc } S_n \geq \frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{1 + \ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2}$$

$$\text{Alors } \frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{1 + \ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{1 + \ln n}{n}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$

$$\forall x \in [1; 2], 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq \ln 2 \Rightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq (\ln 2)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{D'autre part } \forall x \in [1; 2], 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$$

$$\text{Par produit } 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq (\ln 2)^n$$

$$\text{Par intégration de 1 à 2 : } 0 \leq \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx \leq \int_1^2 (\ln 2)^n dx$$

$$\text{et } 0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx \leq \frac{1}{n!} (\ln 2)^n \int_1^2 dx$$

$$0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx \leq \frac{1}{n!} (\ln 2)^n [x]_1^2$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$$

$$\text{Pour la limite de } I_n, \text{ comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0 \text{ car } |\ln 2| < 1$$

$$\text{Donc d'après le théorème des gendarmes } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\text{On a } I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx$$

On utilise une intégration par parties :

$$\text{On pose } \begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \text{ Alors } \begin{cases} u'(x) = (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left[-\frac{(\ln x)^{n+1}}{x} \right]_1^2 + \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx, \text{ d'où } I_{n+1} = -\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!} + I_n$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

c) Pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$

utilisons la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1 (\ln 2)^{n+1}}{2 (n+1)!}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_2 = I_1 - \frac{1 (\ln 2)^2}{2 (2)!} \\ I_3 = I_2 - \frac{1 (\ln 2)^3}{2 (3)!} \\ I_4 = I_3 - \frac{1 (\ln 2)^4}{2 (4)!} \\ \vdots \\ I_n = I_{n-1} - \frac{1 (\ln 2)^n}{2 n!} \end{array} \right.$$

Par addition et réduction on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = I_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$

Or d'après 2.b) on a : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{1 + \ln n}{n}$, donc

$$I_1 = - \int_2^1 \frac{\ln x}{x^2} dx = - \frac{1 + \ln 2}{2} + \frac{1 + \ln 1}{1} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{1!} \right)$$

On remplace I_1 par cette valeur et on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$

Remarque : on peut établir une démonstration par récurrence.

d) Exprimons (u_n) en fonction de I_n :

On sait que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right] = I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \left[\frac{1}{1!} + \frac{(\ln 2)^1}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!} \right]$$

$$\text{Donc } I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} u_n \ln 2 \text{ alors } 2I_n = 1 - u_n \ln 2 \Rightarrow u_n \ln 2 = 1 - 2I_n$$

$$\text{Alors : } u_n = \frac{1 - 2I_n}{\ln 2}$$

Pour calculer la limite de (u_n) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{\ln 2}$.