République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2013

Session Complémentaire

رمضان 1434 هـ

Séries : Science de la Nature Epreuve: Mathématiques Durée: 4 heures Coefficient: 6

Exercice 1(3 points)

On considère la suite arithmétique (U_n) de raison $r=3$ et de premier terme $U_0=15$.
Pour chaque question, parmi les réponses proposées, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	Le terme général de la suite (U_n) est :	$U_n=3+15n$	$U_n=15+3n$	$U_n=3n+12$	(0,5pt)
2	La valeur de U_{10} est :	$U_{10}=153$	$U_{10}=13$	$U_{10}=45$	(0,5pt)
3	Si $U_0+U_1+\cdots$ 204 alors :	$n=204$	$n=30$	$n=7$	(0,5pt)
4	La suite (V_n) de terme général $V_n=\dfrac{1}{U_n}$ est:	convergente	croissante	géométrique	(0,5pt)
5	La suite (T_n) de terme général $T_n=e^{U_n}$ est :	arithmétique	géométrique	majorée	(0,5pt)
6	Si (W_n) est une suite numérique telle que pour tout n : $V_n \le W_n \le U_n$, alors (W_n) est :	minorée	décroissante	divergente	(0,5pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.
Aucune justification n'est demandée.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2(5 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-6z+18=0$. (1 pt)

2) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$. (1 pt)

3) Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle chacun des nombres :

$$u=3+3i \text{ et } v=\sqrt{3}-i.$$ (1 pt)

4) On pose $w=(3+3i)(\sqrt{3}-i)$.

a) Ecrire w sous forme algébrique. (0,75 pt)

b) En utilisant 3) écrire w sous forme trigonométrique et exponentielle. (0,75 pt)

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. (0,5 pt)

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1;+\infty[$ par:

$$f(x) = x - 2 + 1\ln(x+1).$$

1.a) Montrer que: $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. **(0,75 pt)**

b) Calculer $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - x\right)$. Interpréter graphiquement. **(0,75 pt)**

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. **(0,75 pt)**

3.a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. **(0,75 pt)**

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution α. Vérifier que : $1,2 < \alpha < 1,3$ **(0,75 pt)**

c) Construire la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(0,5 pt)**

4) Pour tout $x > -1$; on pose $u(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

a) Calculer $u'(x)$ et montrer que pour tout $x > -1$ on a $f(x) = u'(x) + x - 3$. **(0,5 pt)**

b) En déduire la primitive F de la fonction f sur $]-1;+\infty[$ qui vérifie $F(0) = 0$. **(0,25 pt)**

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. **(0,25 pt)**

5) Soit f^{-1} la réciproque de f. (C') sa courbe représentative dans le repère précédent.

a) Déduire de ce qui précède les limites : $\lim_{x\to -\infty} f^{-1}(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$. **(0, 5 pt)**

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(-2)$ et donner l'équation de la tangente à la courbe (C') au point d'abscisse $x_0 = -2$ **(0,25 pt)**

Exercice 4 (6 points)

1) On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = (2x+3)e^{x+1} + 1$

a) Justifier que $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 1$. **(0,5 pt)**

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g. **(0,75 pt)**

c) En déduire que pour tout réel x ; $g(x) > 0$. **(0,25 pt)**

2) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x - 3 + (2x+1)e^{x+1}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. **(0,5 pt)**

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. **(0,5 pt)**

c) Montre que la droite D d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$ puis déterminer leurs positions relatives. **(0,5 pt)**

3.a) Ecrire $f'(x)$ en fonction de g(x). **(0,5 pt)**

b) Dresser le tableau de variation de f. **(0,5 pt)**

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. **(0,5 pt)**

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α puis vérifier que $0 < \alpha < 0,1$. **(0,5 pt)**

c) Montrer que la solution α vérifie l'égalité $\ln\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}\right) - \alpha = 1$ **(0,25 pt)**

5.a) Montrer qu'il existe un unique point A auquel la tangente T à (C) est parallèle à l'asymptote oblique d'équation $y = x - 3$. Donner une équation de T. **(0,25 pt)**

b) Construire la courbe (C), la tangente T et l'asymptote D. **(0,25 pt)**

c) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation $(2x+1)e^{x+1} - m - 3 = 0$. **(0,25 pt)**

Fin.

Ex$_1$: Q.C.M :

Question	1	2	3	4	5	6
Reponse	B	C	C	A	B	A

Ex$_2$:

1) $z^2 - 6z + 18 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 18$

$= 36 - 72 = -36 = (6i)^2$

$z_1 = \frac{6-6i}{2} = 3-3i$

$z_2 = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$

2) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4$

$= 12 - 16 = -4 = (2i)^2$

$z_1 = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3}-i$

$z_2 = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i$

3) • $u = 3+3i$

$|u| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\arg u = \alpha$ avec

$\cos\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\Rightarrow u = 3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$= 3\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

• $v = \sqrt{3}-i$

$|v| = \sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\arg v = \alpha$ avec

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\alpha = \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{6}\ [2\pi]$

$\Rightarrow v = 2(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6})$

$= 2e^{-i\pi/6}$

4) $w = (3+3i)(\sqrt{3}-i)$

a) $w = 3\sqrt{3} - 3i + 3i\sqrt{3} + 3$

$= 3\sqrt{3}+3 + i(3\sqrt{3}-3)$

b) $|w| = |u| \times |v| = 6\sqrt{2}$

$\arg w = \arg u + \arg v$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$w = 6\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

$= 6\sqrt{2}\, e^{i\pi/12}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{Re(w)}{|w|} = \frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{Im(w)}{|w|} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Ex3 : $f(x) = x - 2 + \ln(x+1)$

1) a) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -3 + \ln(0^+) = -3 - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \ln(x+1) = +\infty + +\infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - 2 + \ln(x+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x}$

$= 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} -2 + \ln(x+1) = +\infty$

(Branche parabolique dirigée par $y = x$)

2) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x+1} > 0$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) f est strictement croissante (monotone) continue de $]-1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, Elle réalise une bijection de I sur $J = \mathbb{R}$

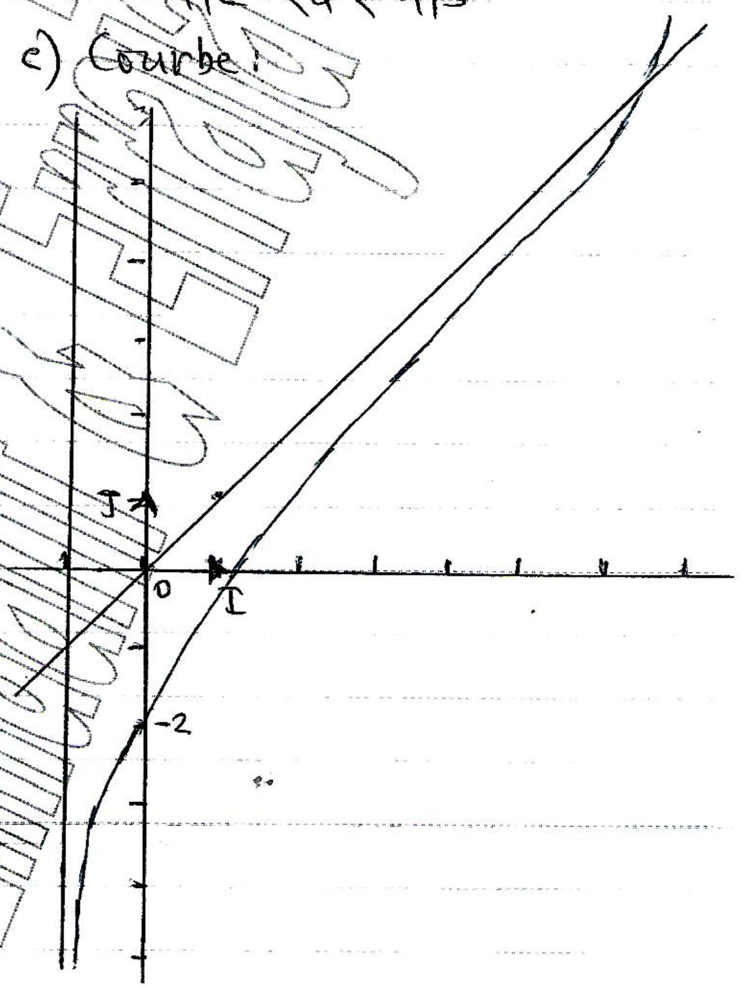
b) f change de signe une seule fois sur I, et on a

$f(1{,}2) = -0{,}8 + \ln(2{,}2) < 0$

$f(1{,}3) = -0{,}7 + \ln(2{,}3) > 0$

$1{,}2 < \alpha < 1{,}3$

c) Courbe :



4) $u(x) = (x+1)\ln(x+1)$

a) $u'(x) = x+1 \cdot \frac{1}{x+1} + 1 \times \ln(x+1)$

$= 1 + \ln(x+1)$

$\Rightarrow f(x) = x - 2 + \ln(x+1)$

$= x - 3 + 1 + \ln(x+1)$

$= x - 3 + u'(x)$

b) $F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + u(x)$

$= \frac{x^2}{2} - 3x + (x+1)\ln(x+1)$

c) $A = -\left(\int_0^{\alpha} f(x)\,dx\right)$

$= -\left[\frac{x^2}{2} - 3x + (x+1)\ln(x+1)\right]_0^{\alpha}$

$$\mathcal{A} = -\left[\frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha + (\alpha+1)\ln(\alpha+1)\right]$$

Or $f(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha - 2 + \ln(\alpha+1) = 0$

$\Rightarrow \ln(\alpha+1) = 2 - \alpha$

$$\mathcal{A} = -\left(\frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha + (\alpha+1)(2-\alpha)\right)$$

$$= -\left(\frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha + 2\alpha - \alpha^2 + 2 - \alpha\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha - 2\right) \text{ u.A}$$

5) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f^{-1}(x) = -1$

car $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

b) $(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-2))}$

$= \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

Donc T : $y = \frac{1}{2}(x+2) + f^{-1}(-2)$

$= \frac{1}{2}(x+2) + 0$

$= \frac{1}{2}x + 1$

T : $y = \frac{1}{2}x + 1$

Ex 4 : $g(x) = (2x+3)e^{x+1} + 1$

1) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 + 1 = 1$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+3)e^{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \times +\infty + 1 = +\infty$

b) $g'(x) = 2e^{x+1} + (2x+3)e^{x+1}$

$= (2x+5)e^{x+1}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{2}$

$g\left(\frac{-5}{2}\right) = -2e^{-3/2} + 1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{e^3}}$

x	$-\infty$		$-5/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1 - \frac{2}{\sqrt{e^3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) D'après le TV on a

$g(x) \geq 1 - \frac{2}{\sqrt{e^3}} > 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0$

2) $f(x) = x - 3 + (2x+1)e^{x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + +\infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-3+(2x+1)e^{x+1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{x+1} = +\infty.$

(Branche parabolique de direction (Oy))

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(x-3)] =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)e^{x+1} = 0$

$\Rightarrow y = x-3$ A.O $(-\infty)$

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
P.R	Δ / C		C / Δ

3) a) $f'(x) = 1+(2x+1)e^{x+1}+2e^{x+1}$

$= 1+(2x+3)e^{x+1} = g(x)$

b)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) f est monotone continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

b) f change de signe une seule fois sur $\mathbb{R}$, et on a :

$f(0) = -3+e < 0$

$f(0,1) = -2,9+1,2e^{1,1} > 0$

$\Rightarrow 0 < \alpha < 0,1$

c) $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha-3+(2\alpha+1)e^{\alpha+1} = 0$

$\Rightarrow (2\alpha+1)e^{\alpha+1} = 3-\alpha$

$e^{\alpha+1} = \frac{3-\alpha}{2\alpha+1}$

$\Rightarrow \alpha+1 = \ln\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}\right) - \alpha = 1.$

5) $T // D \Leftrightarrow f'(x) = 1$

$\Leftrightarrow g(x) = 1 \Leftrightarrow (2x+3)e^{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3/2$

$T : y = 1(x+3/2) + f(-3/2)$

$f(-3/2) = -9/2 - 2e^{-1/2}$

$= -9/2 - \frac{2}{\sqrt{e}}$

$T : y = x + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} - \frac{2}{\sqrt{e}}$

$\boxed{y = x - 3 - \frac{2}{\sqrt{e}}}$

b) Courbe : $0 < \alpha < 0,1$

$f(0) = -3+e \approx -0,28$

D :

x	0	3
y	-3	0

T :

x	3	0
y	$\frac{-2}{\sqrt{e}}$	$-3-\frac{2}{\sqrt{e}}$

c) $(2x+1)e^{x+1} - m - 3 = 0$

$f(x) - (x-3) = m+3$

$f(x) = x + m$

Donc :

$m = -3 - \frac{2}{\sqrt{e}}$ une seule solution

$m > -3 - \frac{2}{\sqrt{e}}$ Deux solutions

$m < -3 - \frac{2}{\sqrt{e}}$ Aucune solution