جمعية أصدقاء الرياضيات

ASSOCIATION DES AMIS DE MATHEMATIQUES

Bac Blanc **Epreuve de Maths**

Niveau : 7C	*Durée :4h*	*Proposée le 24 décembre 2019 de 8h à 12h*

Exercice 1 : (5 pts)

On considère les matrices : $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

1) Calculer $M^2=M\times M$. On donne $M^3=\begin{pmatrix}20&10&11\\12&2&9\\42&20&21\end{pmatrix}$

2. a) Vérifier que : $M^3=M^2+8M+6I$

b) Exprimer M^4 sous la forme : $M^4=\alpha M^2+\beta M+\gamma I$ où α,β et γ sont des entiers naturels à déterminer.

3) En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

4) On cherche à déterminer trois entiers a, b et c tels que la courbe de la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ passe par les points $A(1,1), B(-1,-1)$ et $C(2,5)$.

a) Montrer que ça revient à trouver les entiers a, b et c tels que : $M\times\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$.

b) Déterminer alors ces entiers.

Exercice 2 (4 pts)

On donne dans $\mathbb{C}$ le polynôme $p(z)=z^3+(1+3ie^{i\theta})z^2+(1+i+3ie^{i\theta})z+(3i-3)e^{i\theta}$.

1. a) Montrer que $z_0=-3ie^{i\theta}$ est une solution l'équation $P(z)=0$.

b) Donner une factorisation de $P(z)$ de la forme $P(z)=(z+3ie^{i\theta})(z^2+az+b)$

c) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et M d'affixes respectives $z_A=-i$, $z_B=-1+i$ et $z=-3ie^{i\theta}$.

a) Déterminer le lieu géométrique de M lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$.

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABM. Déterminer l'affixe G.

c) Trouver une transformation simple, que l'on caractérisera, qui envoie M en G.

d) Déterminer alors le lieu géométrique de G lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$.

3) On pose $\theta=\frac{\pi}{10}$. Donner la forme algébrique du nombre $w=z^5+z_A{}^5+z_B{}^5$.

Exercice 3 (5 points)

1. a) Vérifier que l'entier 101 est premier.
b) Justifier que l'équation $(1): 67x+100y=1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
c) Résoudre cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.
2) Soit (D) la droite passant par les points $A(3,-2)$ et $B(103,-69)$.
a) Les couples de coordonnées de A et B sont-ils solutions de (1) ?
b) Existe-t-il un point de (D) dont les coordonnées sont des entiers naturels?
3) On considère dans $\mathbb{N}$, l'équation (2) : $x^{67} \equiv 5\ [101]$.
a) Soit x une solution de (2). Prouver que x et 101 sont premiers entre eux et que $x^{100} \equiv 1\ [101]$.
b) Montrer alors que : $x \equiv 5^3\ [101]$.
c) Montrer que si : $x \equiv 5^3\ [101]$ alors x est solution de (2).
d) Montrer que l'ensemble des solutions de (2) est l'ensemble des entiers naturels de la forme $x = 24+101k$ où k est un entier naturel.
e) Soit x une solution de (2). Prouver que $49+x^{2019}$ est un multiple de 101.

Exercice 4 (6 points)
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
1) Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z)=z^3-(2+6i)z^2-11z-8+6i$
a) Calculer $P(2i)$.
b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$
c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E): P(z)=0$.
d) En déduire les solutions de l'équation (E'): $z^6-(2+6i)z^4-11z^2-8+6i=0$ dans $\mathbb{C}$.
2) Soient A , B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.
a) Placer les points A , B et C.
b) On considère l'application s d'expression complexe: $z'=az+b$.
Déterminer a et b sachant que $s(A)=A$ et $s(C)=B$.
c) Déterminer le module de a .
d) Soit θ un argument de a . Montrer que $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ et que $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
3) Soit l'application f qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe z' tels que $z'=\dfrac{3+i}{8}z+\dfrac{-5+i}{8}$. Soit le point $M_0(3,4)$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose $M_{n+1}=f(M_n)$. Soit z_n l'affixe du point M_n.
a) Vérifier, en utilisant l'expression de f , que l'affixe du point $M_1=f(M_0)$ est $2i$.
b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $z_n=-1+\left(\dfrac{3+i}{8}\right)^n(4+4i)$.
c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=M_0M_1+M_1M_2+\ldots+M_{n-1}M_n$.
Exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Fin.