Baccalauréat 2004

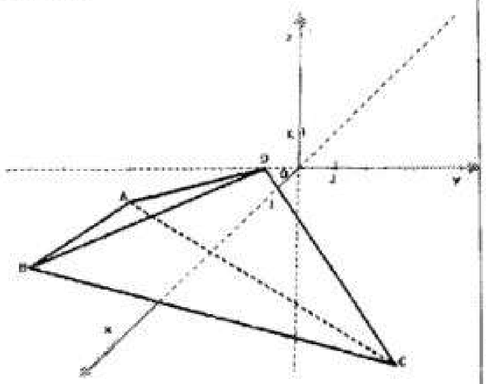
Session Complémentaire

Exercice 1 : (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthogonal $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$, on donne les points $A(2;-3;1)$, $B(3;-5;0)$, $C(2;5;-4)$, $D(3;2;3)$.

1.a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}$. **(0,75pt)**

b) Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABD). **(0,5pt)**



2. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

a) Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (CDH). **(0,5pt)**

b) déterminer une équation cartésienne du plan (CDH) et une représentation paramétrique de la droite (AB). **(0,5pt)**

c) En déduire les coordonnées du point H. **(0,5pt)**

3.a) Calculer les longueurs AB, CD et DH. En déduire le volume V du tétraèdre $ABCD$ (On rappelle que $V=\frac{1}{3}B_1\times h_1$ où B_1 est la base du tétraèdre et h_1 la hauteur correspondante). **(0,75pt)**

b) Calculer la distance du point D au plan ABC. **(0,5pt)**

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de côté a (où a est un réel strictement positif) et tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit D le barycentre du système $\{(A,-1);(B,-2);(C,2)\}$.

1.a) Construire D (Prendre $a=3cm$ et compléter cette figure au fur et à mesure) **(1pt)**

b) Montrer que les droites (BC) et (AD) sont parallèles. **(0,25pt)**

c) Montrer que le triangle ABD est rectangle en B. **(0,5pt)**

2. Pour tout point M du plan, on pose $f(M)=-MA^2-2MB^2+2MC^2$.

On désigne par (F) l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)=0$.

a) Vérifier que le point A appartient à (F). **(0,25pt)**

b) Exprimer $f(M)$ en fonction des distances MD et a. **(0,5pt)**

c) Déterminer et construire l'ensemble (F). **(0,5pt)**

3. Pour tout point M du plan, on pose $g(M)=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{DB}+a^2$.

a) Déterminer et construire l'ensemble (G) des points M du plan tels que $g(M)=a^2$. **(0,5pt)**

b) Soit E le point d'intersection autre que A des ensembles (F) et (G), donner, en le justifiant la nature du triangle ADE. **(0,25pt)**

c) Donner, en le justifiant la nature du triangle ACE. **(0,25pt)**

4. Soit s la similitude de centre A et qui transforme B en D.

a) Donner l'angle et le rapport de la similitude s. (0,5pt)

b) Déterminer, en le justifiant, l'image du triangle ABC par s. (0,25pt)

c) Soit s' la similitude réciproque de la similitude s ; déterminer et construire les images par s^{-1} des ensembles (F) et (G). (0,25pt)

Problème : (11 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité 2 cm.

Partie I

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{x-1}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Etablir le tableau de variation de f. (1pt)

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) et préciser la position de (C) et (Δ). (0,5pt)

c) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,5pt)

2.a) Déterminer les positions relatives de (C) et de la droite Δ_1 d'équation : $y = x - 3$. (0,5pt)

b) Calculer l'aire A de la partie P du plan délimitée par la courbe (C) et les droites $(\Delta_0) : x = 1$ et $(\Delta_1) : y = x - 3$. (0,5pt)

Partie II

Dans cette partie, on associe à tout point $M(x,y)$ son affixe $z = x + iy$.

Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = -\frac{1}{2}(1+i)z + 2.$$

1. Déterminer la nature de s et donner ses éléments caractéristiques. (0,5pt)
2. Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction de x' et y' celles du point M'. (0,5pt)
3. Déterminer les équations des transformées par s des droites $(\Delta_0) : x = 1$ et $(\Delta_1) : y = x - 3$. (0,5pt)
4. Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty,2[$ par $g(x) = 1 - x - \ln(4-2x)$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Si M est un point de (C) et $M' = s(M)$ montrer alors que l'abscisse x' de M' est strictement inférieure à 2 et que M' est un point de la courbe (Γ). (0,5pt)

b) Si M' est sur (Γ) montrer alors qu'il existe un point M de (C) tel que $M' = s(M)$. (0,5pt)

c) Déduire de ce qui précède que (Γ) est l'image de (C) par s. (0,5pt)

Partie III

1. Dresser le tableau de variation de la fonction g, en précisant ses limites en $-\infty$ et en 2^-. (1pt)
2. Soit h la fonction numérique définie sur $]-\infty,2[$ par :

$$h(x) = f(x) - g(x) = 2x - 1 - e^{x-1} + \ln(4-2x).$$

Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$ où h' et h'' sont la dérivée première et la dérivée seconde de h. (1pt)

3.a) Déterminer le sens de variation de h' sur $]-\infty,2[$ puis calculer $h'(1)$. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de h sur $]-\infty,2[$ et calculer $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim_{x\to 2^-} h(x)$. (0,5pt)

c) En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β sur $]-\infty,2[$ avec $\alpha < \beta$ et $-0,1 < \alpha < 0$ et $1,6 < \beta < 1,7$. (0,5pt)

d) Préciser les positions relatives des courbes (C) et (Γ). (0,5pt)

4. Tracer (Γ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,5pt)
5. Soit P' la partie du plan délimitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations respectives $y = -x + 1$ et $x = \frac{1}{2}$. On admet que la partie P est transformée en P' par s, calculer l'aire A' de la partie P'. (0,5pt)

FIN