Baccalauréat 2012
Session Normale

Séries : Science de la Nature
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 6

Exercice 1(3 points)

Pour éclairer une salle, on utilise deux lampes différentes.
On note **F** l'événement : « la première lampe est défaillante » et **G** l'événement: « la deuxième lampe est défaillante ». Des études ont montré que : $p(F)=0,2$; $p(G)=0,3$; $p(F\cap G)=0,1$.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

1) La probabilité de l'événement : « les deux lampes sont défaillantes » est : **(0,5 pt)**

A : 0,1	B : 0,5	C : 0,6

2) La probabilité de l'événement : « au moins une des deux lampes est défaillante » est : **(0,5 pt)**

A : 0,9	B : 0,4	C : 0,6

3) La probabilité de l'événement : « les deux lampes fonctionnent » est : **(0,5 pt)**

A : 0,8	B : 0,6	C : 0,5

4) La probabilité de l'événement : « exactement une des deux lampes est défaillante » est : **(0,5 pt)**

A : 0,3	B : 0,4	C : 0,6

5) Sachant que la deuxième lampe est défaillante, la probabilité que la première lampe fonctionne est : **(0,5 pt)**

A : $\frac{1}{2}$	B : $\frac{2}{3}$	C : $\frac{1}{3}$

6) On définit une variable aléatoire **X** égale au nombre de lampes défaillantes dans la salle.
L'espérance mathématique de **X** est : **(0,5 pt)**

A : 0,8	B : 0,6	C : 0,5

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2(4 points)

1.a) Résoudre dans l'ensemble des nombre complexe, l'équation : $z^2-4z+5=0$ et soient z_1 et z_2 ses solutions telles que $\text{Im}(z_1)>0$. **(1 pt)**

b) Ecrire le nombre $z_3=i+z_1$ sous forme trigonométrique. **(0,5 pt)**

2) Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points **A** et **B** d'affixes respectives $z_A=z_1$ et $z_B=-1-i+z_2$.

a) Placer les points **A** et **B**. Déterminer la nature du triangle **OAB**. **(0,5 pt)**

b) Déterminer l'affixe du point **C** tel que le quadrilatère **OACB** soit un parallélogramme. Placer **C**. **(0,5 pt)**

3) Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq 1-2i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-2-i}{z-1+2i}$

a) Ecrire sous forme algébrique le nombre $\omega=f(3-i)$. Interpréter géométriquement. **(0,75 pt)**

b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_1 des points **M** du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$. **(0,25 pt)**

c) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_2 des points **M** du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur. **(0,25 pt)**

d)Déterminer puis construire l'ensemble Γ_3 des points **M** du plan d'affixe z tels que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$. **(0,25 pt)**

<u>Exercice 3</u> (6 points)

Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathbf{f(x)=e^{-2x-1}+3x-1}$.

Soit $\mathbf{(C)}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathbf{(O;\vec{i},\vec{j})}$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{\left(f(x)-(3x-1)\right)}$ et interpréter graphiquement. **(0,75 pt)**

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)=+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{\dfrac{f(x)}{x}=-\infty}$ interpréter graphiquement. **(0,75 pt)**

2.a) Calculer la dérivée $\mathbf{f'(x)}$ et étudier son signe. **(0,5 pt)**

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. **(0,5 pt)**

3.a) Montrer que l'équation $\mathbf{f(x)=0}$ admet exactement deux solutions α et β. Vérifier que

$$\mathbf{-1,3<\alpha<-1,2} \text{ et } \mathbf{0,2<\beta<0,3}.$$ **(0,5 pt)**

b) Représenter la courbe $\mathbf{(C)}$. **(0,5 pt)**

4) On définit les suites $\mathbf{(U_n)}$ et $\mathbf{(V_n)}$ pour tout entier naturel $\mathbf{n}$ par : $\mathbf{U_n=e^{-2n-1}}$, $\mathbf{V_n=3n-1}$.

a) Démontrer que la suite $\mathbf{(U_n)}$ est géométrique décroissante. **(0,5 pt)**

b) Démontrer que la suite $\mathbf{(V_n)}$ est arithmétique croissante. **(0,5 pt)**

c) Les suites $\mathbf{(U_n)}$ et $\mathbf{(V_n)}$ sont elles adjacentes ? Justifier. **(0,5 pt)**

5) Pour tout entier naturel $\mathbf{n}$ on pose : $\mathbf{S_n=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n)}$.

a) Calculer $\mathbf{S_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$. **(0,5 pt)**

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{S_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{\dfrac{S_n}{n^2}}$. **(0,5 pt)**

<u>Exercice 4</u> (7 points)

Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur $\mathbf{]-1,+\infty[}$ par : $\mathbf{f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}-\ln(x+1)}$.

Soit $\mathbf{(C)}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathbf{(O;\vec{i},\vec{j})}$ d'unité **1cm**.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{\dfrac{f(x)}{x}}$ et interpréter graphiquement. **(0,5 pt)**

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+}\mathbf{f(x)=-\infty}$ et interpréter graphiquement. **(0,5 pt)**

2.a) Calculer $\mathbf{f'(x)}$ et vérifier que la courbe $\mathbf{(C)}$ admet au point d'abscisse **0** une tangente horizontale dont on donnera une équation. **(0,5 pt)**

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. **(0,5 pt)**

3.a) Calculer $\mathbf{f''(x)}$ et vérifier que la courbe $\mathbf{(C)}$ admet un point d'inflexion **A** d'abscisse **1**. **(0,5 pt)**

b) Ecrire une équation de la tangente **(T)** à la courbe $\mathbf{(C)}$ au point **A**. **(0,5 pt)**

4.a) Montrer que la restriction **g** de **f** sur $\mathbf{I=[0,+\infty[}$ réalise une bijection de **I** sur un intervalle **J** que l'on déterminera. **(0,5 pt)**

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{g^{-1}}$. **(0,5 pt)**

c) Calculer $\mathbf{\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{3-2\ln 2}{2}\right)}$ **(0,25 pt)**

5.a) Montrer que l'équation $\mathbf{f(x)=0}$ admet exactement deux solutions α et β. Vérifier que $\mathbf{-0,7<\alpha<-0,6}$ et $\mathbf{5,3<\beta<5,4}$. **(0,5 pt)**

b) Placer, sur le repère $\mathbf{(O;\vec{i},\vec{j})}$, les points d'intersections la courbe $\mathbf{(C)}$ avec les axes, son point d'inflexion, les tangentes précédentes puis représenter la courbe $\mathbf{(C)}$. **(0,5 pt)**

c) Représenter la courbe $\mathbf{(C')}$ de $\mathbf{g^{-1}}$ dans le repère précédent. **(0,25 pt)**

6.a) Montrer que la fonction **f** admet des primitives sur $\mathbf{]-1,+\infty[}$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer les réels **a** et **b** tels que la fonction $\mathbf{F(x)=ax-(x+b)\ln(x+1)}$ soit une primitive de **f** sur $\mathbf{]-1,+\infty[}$. **(0,5 pt)**

c) Calculer, en fonction de β, l'aire du domaine plan délimité par la courbe $\mathbf{(C)}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation respectives $\mathbf{x=0}$ et $\mathbf{x=\beta}$. Donner une valeur approchée de cette aire à $\mathbf{10^{-2}}$ près. **(0,5 pt)**

Fin.

Corrigé baccalauréat 2012 session Normale

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	B	B	A	C

Exercice 2

1a) $z^2 - 4z + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$

$z_1 = \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i$

$z_2 = \dfrac{4-2i}{2} = 2 - i$

b) $z_3 = i + z_1$

$= i + 2 + i$

$z_3 = 2 + 2i$

$|z_3| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$

$\arg z_3 = arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}$

$z_3 = 2\sqrt{2}(cos\dfrac{\pi}{4} + isin\dfrac{\pi}{4})$

2) $z_A = z_1 = 2 + i$

$z_B = -1 - i + z_2$

$= -1 - i + 2 - i$

$Z_B = 1 - 2i$

a) $A(2,1)$; $B(1,-2)$ Voir la représentation graphique

Démontrons que le triangle OAB est isocèle rectangle en O

On pose: K= $\frac{Z_A - Z_O}{Z_B - Z_O}$

$K = \dfrac{2+i}{1-2i}$

$= \dfrac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$= \dfrac{2+4i+i-2}{5}$

$= \dfrac{5i}{5}$

$K = i$

$$\begin{cases} |K| = 1 \Rightarrow \dfrac{OA}{OB} = 1 \\ argK = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{le triangle OAB est isocèle rectangle en 0} \end{cases}$$

b) Le quadrilatère OACB est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow z_C - z_B = z_A$

$$\Leftrightarrow z_C = z_A + z_B$$
$$\Leftrightarrow z_C = 2 + i + 1 - 2i$$
$$\Leftrightarrow z_C = 3 - i$$

3)

$$f(z) = \frac{z - 2 - i}{z - 1 + 2i}$$

a) $w = f(3 - i)$

$$= \frac{3 - i - 2 - i}{3 - i - 1 + 2i}$$
$$= \frac{(1 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$$
$$= \frac{2 - i - 4i - 2}{5}$$
$$= \frac{-5i}{5}$$

$w = -i$

$$w = f(z_C) = f(3 - i)$$
$$= \frac{3 - i - 2 - i}{3 - i - 1 + 2i}$$
$$= \frac{3 - i - (2 + i)}{3 - i - (1 - 2i)}$$
$$w = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$$

$$\begin{cases} |w| = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{AC}{BC} \\ arg w = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$ **donc le triangle ABC est isocèle rectangle en C**

b) Γ_1 $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2-i}{z-1+2i}\right| = 1$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right| = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 1$$
$$\Leftrightarrow AM = BM$$

$\Gamma_1$est la médiatrice du $[AB]$

c) Γ_2 *f(z)* est imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \\ arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} \\ (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $[\pi]$

Γ_2 est le cercle de diamètre $[AB]$privé du point B

d) $[f(z) - 1] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{z-2-i}{z-1+2i} - 1\right] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$
$$\left[\frac{z-2-i-z+1-2i}{z-1+2i}\right] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{-1-3i}{z-1+2i}\right] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\sqrt{10}}{|z-1+2i|} = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

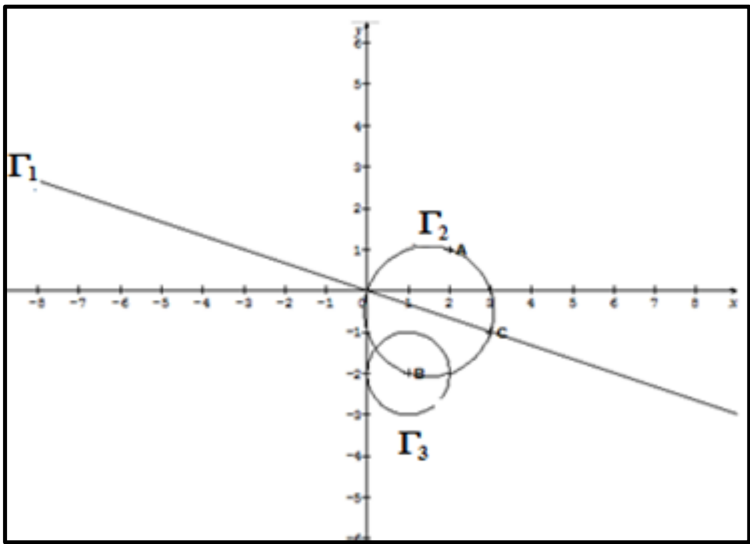
$$\sqrt{10}|z - 1 + 2i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$|z - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow$$

$$|Z_M - Z_B| = 1 \Leftrightarrow$$

$$BM = 1$$

Γ_3Le cercle de centre B et de rayon 1



Corrigé l'Exercice3

$f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$

1a- $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 = 0 - \infty - 1 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (3x-1)) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 - 3x + 1$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x-1} = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (3x-1)) = 0$

(C) **admet une asymptote oblique d'équation** $y = 3x - 1$**au voisinage de** $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 = +\infty - \infty - 1\ F.I$

$$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{e^{2x+1}} + 3x - 1\right)$$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{xe^{2x+1}} + 3 - \frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{xe^{2x}e} + 3 - \frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(2e^{-1} \times \frac{1}{2xe^{2x}} + 3 - \frac{1}{x}\right)$

On pose $t = 2x$ **si** $x \to -\infty; t \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{t}{2}\left(2e^{-1} \times \frac{1}{te^t} + 3 - \frac{2}{t}\right)$ **On sait que** $\lim\limits_{x\to-\infty} te^t = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{te^t} = -\infty$

$$= -\infty(-\infty + 3 - 0) = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x-1}+3x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{2x+1}}+3-\frac{1}{x}$$

$$=-\infty$$

(C) admet une branche infinie de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$

2a)

$$f'(x)=-2e^{-2x-1}+3$$

$$=\frac{-2}{e^{2x+1}}+3$$

$$f'(x)=\frac{3e^{2x+1}-2}{e^{2x+1}}$$

$e^{2x+1}>0\Rightarrow$ **Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur**

$$f'(x)=0\Rightarrow 3e^{2x+1}-2=0$$

$$\Rightarrow\ 3e^{2x+1}-2=0$$

$$\Rightarrow\ 3e^{2x+1}=2$$

$$\Rightarrow e^{2x+1}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2x+1=ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2x=-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$x=\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\cong-0,7$$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{-1+\ln(\frac{2}{3})}{2}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	

b) TV de f

x	$-\infty$		$\frac{-1+\ln(\frac{2}{3})}{2}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$-1+\frac{3}{2}\ln(\frac{2}{3})$	↗	$+\infty$

$$f\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right)=e^{-2\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right)-1}+3\times\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}-1$$

$$=e^{1-ln\left(\frac{2}{3}\right)-1}+\frac{-3+3ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}-1$$

$$=e^{-ln\left(\frac{2}{3}\right)}+\frac{-3+3ln\left(\frac{2}{3}\right)-2}{2}$$

$$= e^{ln\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{-5+3ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}$$

$= \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}ln(\frac{2}{3})$

$f\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right) = -1 + \frac{3}{2}ln(\frac{2}{3})$

$f\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right) \approx 1,6$

3a) f **est continue et décroissante de** $\left]-\infty, \frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right]$ **vers** $\left[-1+\frac{3}{2}ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$ **et** f **change de signe une seule fois donc il existe un unique réel** $\alpha \in]0;1[$ **tel que** $f(\alpha) = 0$

$f(-1,3) > 0$,$f(-1,2) < 0 \Rightarrow f(-1,3) \times f(-1,2) < 0$

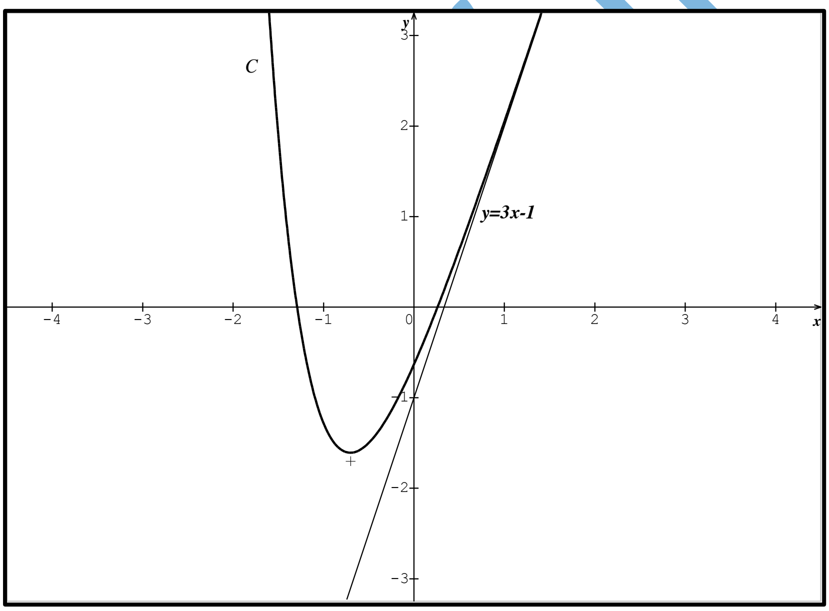
$$\Rightarrow \ -1,3 < \alpha < -1,2$$

f **est continue et croissante de** $\left[\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}; +\infty\right[$ **vers** $\left[-1+\frac{3}{2}ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$ **et** f **change de signe une seule fois donc il existe un unique réel** $\beta \in \left[\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}; +\infty\right[$ **tel que** $f(\beta) = 0$

$f(0,3) > 0$,$f(0,2) < 0 \Rightarrow f(0,3) \times f(0,2) < 0$

$$\Rightarrow \ 0,2 < \beta < 0,3$$

b)



4) $u_n = e^{-2n-1}$

a) $u_{n+1} = e^{-2(n+1)-1}$

$= e^{-2n-2-1}$

$= e^{-2} \times e^{-2n-1}$

$u_{n+1} = e^{-2} \times u_n$

La suite (u_n) **est une suite géométrique de raison** $q = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$

$u_n = e^{-2n-1} > 0$

Le premier terme de cette suite est positif et sa raison $q = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$, nous pouvons en déduire qu'elle est décroissante

b) $v_n = 3n - 1$

$v_{n+1} = 3(n+1) - 1$

$= 3n + 3 - 1$

$= 3n - 1 + 3$

$v_{n+1} = v_n + 3$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3 > 0$

La raison de la suite arithmétique est positif nous pouvons en déduire qu'elle est croissante.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2n-1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e^{2n+1}} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 3n + 1 = +\infty$

les suites (u_n) et v_n ne sont pas adjacentes puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

$5a) f(n) = e^{-2n-1} + 3n - 1 = u_n + v_n$

$S_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

$S_n = u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + \cdots .. + u_n + v_n$

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots .. + u_n + v_0 + v_1 + v_2 + \cdots .. + v_n$

S_n est la somme de deux suites l'une arithmétique el l'autre géométrique

$$S_n = \frac{u_0}{1-q}\left(1 - q^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(-1 + 3n - 1)}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n - 2)}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 - 2n + 3n - 2}{2}$$

$$S_n = \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 + n - 2}{2}$$

b)

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 + n - 2}{2} = \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}} + \infty = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{3n^2 + n - 2}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

Exercice 4

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}-ln(x+1)$$

1a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+1}-ln(x+1)$
$=2-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ =-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+1}{x+1}-ln(x+1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}-\frac{(x+1)}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}$$

$On\ pose\ \ t=x+1\Rightarrow x=t-1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2(t-1)+1}{(t-1)^2+t-1}-\frac{t}{t-1}\times\frac{\ln t}{t}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2t-1}{t^2-2t+1+t-1}-\frac{t}{t-1}\times\frac{\ln t}{t}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2t-1}{t^2-t}-\frac{t}{t-1}\times\frac{\ln t}{t}\right)=0$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$ $\Rightarrow$ la courbe (C) de f admet une branche infinie de direction (OX) au voisinage de $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty+\infty\ F.I$

On pose $t=x+1\Rightarrow x=t-1$ $\begin{cases} si\ x\to(-1)^+\\ \quad t\to0^+\end{cases}$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{2(t-1)+1}{t}-\ln t\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{2t-1-t\ln t}{t}\right)$$ On a $\lim\limits_{t\to0^+} t\ln t=-\infty$

$$=-\infty$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)\ =-\infty}$ $\Rightarrow$ La courbe (C) de f admet une asymptote verticale d'équation $x=\ -1$

2a) $f'(x)=\frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}$

$$=\frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2}-\frac{x+1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1-x-1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

La dérivée s'annule en $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ La courbe (C) admet une tangente horizontale en $x_0 = 0$ d'équation $y = f(0) = 1$

b) TV de f

x	−1		0		+∞
f'(x)	‖	+	0	−	
f(x)	‖ −∞	↗	1	↘	−∞

3a)

$$f''(x) = \frac{-(x+1)^2 - 2(x+1)(-x)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)(-x-1+2x)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$\Rightarrow$ La courbe (C) admet un point d'inflexion A d'abscisse 1

b) Équation de la tangente (T) à la courbe (C) en A

$f'(1) = \frac{-1}{4}$, $f(1) = \frac{3}{2} - ln2 = \frac{3-2ln2}{4}$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = -\frac{1}{4}(x-1) + \frac{3}{2} - ln2$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - ln2$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4} - ln2$$

4 a) g est continue et décroissante de I= $[0,+\infty[$ vers J= $]-\infty,1]$donc g réalise une bijection

b) TV de g^{-1}

x	−∞		1
$(g^{-1}(x))'$	0	−	
$g^{-1}(x)$	+∞	↘	0

$c)\ g(1) = \frac{3-2ln2}{2} \Rightarrow g^{-1}\left(\frac{3-2ln2}{2}\right) = 1$

$$(g^{-1})'\left(\frac{3-2ln2}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{3-2ln2}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{g'(1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{-1}{4}}$$

$$(g^{-1})'\left(\frac{3-2ln2}{2}\right) = -4$$

5 a) f **est continue et croissante de** $]-1,0]$ **vers** $]-\infty;1]$ **et** f **change de signe une seule fois donc il existe un unique réel** $\alpha \in]0;1[$ **tel que** $f(\alpha) = 0$

$f(-0,7) \cong -0,97 < 0$, $f(-0,6) \cong 0,41 > 0 \Rightarrow f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$

$$\Rightarrow \ -0,7 < \alpha < -0,6$$

f **est continue et décroissante de** $[0;+\infty[$ **vers** $]-\infty;1]$ **et** f **change de signe une seule fois donc il existe un unique réel** $\beta \in [0;+\infty[$ **tel que** $f(\beta) = 0$

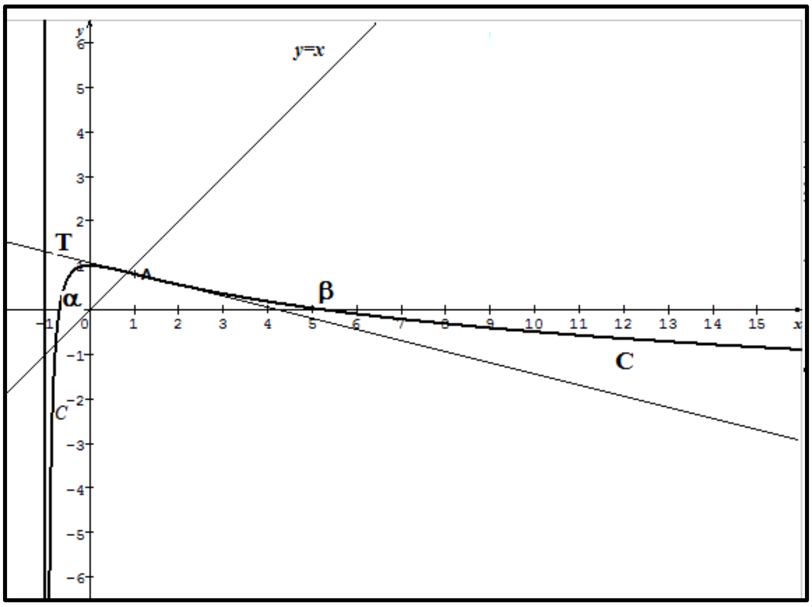
$f(5,3) \cong 7,20207873 \times 10^{-4} > 0$

$f(5,4) \cong -0,012 < 0$

$\Rightarrow f(5,3) \times f(5,4) < 0$

$\Rightarrow \ 5,3 < \beta < 5,4$

b)



6 a) f est la somme de deux fonctions dérivables sur $]-1,+\infty[$ donc f est dérivable sur$]-1,+\infty[$

b) $F(x) = ax - (x+b)ln(x+1)$

F(x) est la primitive de f si es seulement si $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = a - ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \times (x+b)$$

$$F'(x) = a - \frac{x+b}{x+1} - ln(x+1)$$

$$F'(x) = \frac{ax + a - x - b}{x+1} - ln(x+1)$$

$$F'(x) = \frac{(a-1)x + a - b}{x+1} - ln(x+1)$$

$$F'(x) = \frac{2x+1}{x+1} - ln(x+1)$$

Par identification :

$$\begin{cases} a - 1 = 2 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = a - 1 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{F(x) = 3x - (x+2)ln(x+1)}$$

c) $A(\beta) = \int_0^\beta f(x)dx$

$=[3x - (x+2)ln(x+1)]_0^\beta$

$= 3\beta - (\beta+2)ln(\beta+1)$

$A(\beta) \cong 2,46$