Baccalauréat 2011
Session Complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z) = z^3 - (6-2i)z^2 + (10-8i)z - 4 + 8i$.

1.a) Calculer $P(2)$. (0,5)

b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. (1)

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$. Placer les points A, B et C. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle et que le quadrilatère OACB est un parallélogramme. (1)

3) Soit s la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = \frac{1+i}{2}z - i$.

a) Justifier que s est une similitude directe du plan. (0,5)

b) Déterminer les éléments caractéristiques de s. (0,5)

c) Vérifier que $s(C) = B$. (0,5)

Exercice 2 (4 points)

1) On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$.

a) Dresser le tableau de variations de g. (0,75)

b) Montrer que g réalise une bijection de IR sur IR. (0,5)

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une unique solution α telle que $0,6 \leq \alpha \leq 0,7$. (0,5)

2) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$.

a) Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$ (0,5)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,75)

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1cm, \|\vec{j}\| = 5cm$. (0,25)

3) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $U_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

On ne cherche pas à calculer l'intégrale U_n

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq U_n \leq (1 - \frac{1}{e})e^{-n}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$. (0,5)

b) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq U_n \leq 10^{-5}$. (0,25)

Exercice 3 (5.5 points)

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de sens direct, de centre O.

Les points E, F, G et H sont les milieux respectifs des segments : [AB], [BC], [CD] et [DA].

1 Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure (on prendra (AB) horizontale) (0,5)

a) Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(D) = H$ et $r(H) = O$. (0,5)

b) Déterminer le centre I et un angle de la rotation r. (0,5)

c) Montrer que $r(A) = F$ puis construire les points B' et C' images respectives de B et de C par r. (0,5)

3) Soit $\mathbf{h}$ l'homothétie de centre $\mathbf{D}$ et de rapport $\mathbf{k}=\frac{1}{2}$. On pose $\mathbf{s}=\mathbf{r}\circ\mathbf{h}$.

a) Justifier que $\mathbf{s}$ est une similitude directe. Déterminer le rapport et l'angle de $\mathbf{s}$. (0,75)

b) Déterminer l'image du carré $\mathbf{ABCD}$ par la similitude $\mathbf{s}$. (0,75)

4) Soit Ω le centre de la similitude $\mathbf{s}$.

a) Montrer que le point Ω appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AO]$, $[BG]$, $[CD]$ et $[DH]$. (0,5)

b) On considère les cercles Γ et Γ' passant par Ω et de centres respectifs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{O}$. Soit $\mathbf{T}$ l'intersection de Γ et Γ' autre que Ω. Démontrer que $s(\Gamma)=\Gamma'$. En déduire que les points Ω, $\mathbf{A}$, $\mathbf{O}$ et $\mathbf{T}$ sont cocycliques. (0,5)

c) Soit $\mathbf{M}$ un point de Γ distinct de Ω et de $\mathbf{T}$. On pose $s(M)=M'$. Démontrer que les points $\mathbf{M}$, $\mathbf{M'}$ et $\mathbf{T}$ sont alignés. (0,5)

d) Soit $\mathbf{A'}$ et $\mathbf{O'}$ les points diamétralement opposés à Ω respectivement sur les cercles Γ et Γ'.

$\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ les milieux respectifs des segments $[MM']$ et $[OO']$.

Déterminer la nature du triangle ΩJK. En déduire le lieu géométrique du point $\mathbf{J}$ lorsque $\mathbf{M}$ décrit Γ privé de Ω et de $\mathbf{T}$. (0,5)

Exercice 4 (6.5 points)

Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x+1)$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. (0,75)

b) Montrer que la fonction $\mathbf{f}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1,0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$. (0,75)

c) Dresser le tableau de variations de $\mathbf{f}$ et construire la courbe (C). (0,5)

2. a) Déterminer trois réels $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ tels que, pour tout $x\neq-1$, $\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$. (0,5)

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ (0,5)

3) Pour tout entier $n\geq1$, on pose : $U_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n). (0,5)

b) Calculer U_1 et en donner une interprétation graphique. (0,5)

c) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. La suite (U_n) converge-t-elle ? Justifier. (0,5)

d) Démontrer que pour tout entier $n\geq1$, $0\leq U_n\leq\frac{\ln 2}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (U_n). (0,5)

4) Pour tout entier $n\geq1$, on pose : $V_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx$

a) Vérifier que : $U_n=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{1}{n+1}V_n$. (0,5)

b) Démontrer que : $\frac{1}{2(n+2)}\leq V_n\leq\frac{1}{n+2}$. En déduire la limite de la suite (V_n). (0,5)

c) Démontrer que pour tout entier $n\geq1$, $V_n=(-1)^n(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^n}{n+1}-\ln 2)$.

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1})=\ln 2$. (0,5)

Fin.