RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2013 session Normale

Exercice 1 (3points)

Une urne contient 4boules blanches et 2boules noires indiscernables au toucher.
On effectue au hasard un tirage de 2 boules simultanément de l'urne.
On note A_0l'événement « on a obtenu aucune boule noire »
On note A_1l'événement « on a obtenu une seule boule noire »
On note A_2l'événement « on a obtenu deux boules noires »
Soit x la variable aléatoire qui, associe le nombre de boules noires tirées.
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le nombre de tirages possibles est :	C_6^2	A_6^2	6^2
2	La probabilité p (A_0)est :	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{15}$	$\left(\frac{4}{6}\right)^2$
3	La probabilité p (A_1)est :	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
4	La probabilité p (A_2)est :	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$
5	L'espérance mathématique de X est :	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{15}$	4

Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.
Aucune justification n'est demandée :

Question	1	2	3	4	5
Réponse					

Exercice2 (5points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{u},\vec{v})$.
1.a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_1) $z^2+2z+10=0$
On notez$z_1$et $z_2$ses solutions avec $I_m(z_2)\leq 0$
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_2) $z^2-4z+20=0$
On notez$z_3$et $z_4$ses solutions avec $I_m(z_4)\leq 0$
2) on considère les points A, B, K, L et E d'affixes respectives :
$z_A=z_1$; $z_B=z_2$, $z_K=z_3$, $z_L=z_4$et $z_E=z_3-2i$
a) Placer les points A, B, K, L et E dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
b) Écrire $z_E=z_3-2i$ sous forme algébrique et trigonométrique.
c) Déterminer la nature du quadrilatère ABLE et du triangle AKE.
3) Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq -1+3i$ on pose : $f(z)=\frac{z-2-4i}{z+1-3i}$
Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :
* Γ_1 tel que $|f(z)|=1$
* Γ_2 tel que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$

Exercice3 (4points)

On considère la suite numérique (u_n)définie par $u_0=6$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$U_{n+1}=3U_n+10n-13$
1a) Calculer u_1, $u_2$et vérifier que $U_3=43$
b) Justifier que la suite numérique(u_n)n'est ni géométrique ni arithmétique.
2) On définit la suite numérique(v_n) par : pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $V_n=U_n+5n-4$
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.Exprimer v_n en fonction de n.
b) A partir de quel terme a-t-on $V_n\geq 2013$
c) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=2\times 3^n-5n+4$
3) Pour tout entier naturel n, on pose$S_n=U_0+U_1+\cdots\ldots+U_n$.
Déterminer l'expression de$S_n$en fonction de n.

Exercice 4 (8points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 3 + 2\ln x$

1a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

Vérifier que $1,34 \leq \alpha \leq 1,35$.

c) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle$]0,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1-\ln x}{x^2}$

On note Γ sa courbe représentative dans le plan, muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$orthonormé

1a) Démontre que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - (x-2)) = 0$

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes

c) Étudier le signe de $d(x) = f(x) - (x-2)$, Résumer dans un tableau et interpréter graphiquement.

2a) Calculer $f'(x)$et justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3\alpha^3-4\alpha^2-1}{2\alpha^2}$ et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1}prés

c) En déduire le tableau de variation de f

3a) Donner l'équation de la tangente T à Γ au point A d'abscisse $x_0 = 1$

b) Montrer que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un deuxième point autre que A d'abscisse β telle que $1,9 \leq \beta \leq 2$

c) Tracer l'allure de la courbe dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

4) Soit n un entier naturel $n \geq 3$,on considère l'aire du domaine E du plan compris entre la courbe et les droites d'équations respectives $y = x - 2$, $x = 3$ et $x = n$

a) Justifier que cette aire, exprimé encm^2, est donnée par :$I_n = \int_3^n \frac{-1+\ln x}{x^2}dx$

b) Calculer $J_0 = \int_3^n \frac{\ln x}{x^2}dx$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduireI_n en fonction de n

c) Calculer la limite de l'aire$I_n$du domaine E quand n tend vers $+\infty$

Corrigé baccalauréat 2013 session Normale

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5
Réponse	A	B	A	C	A

Exercice 2

1a) $z^2 + 2z + 10 = 0$

$\Delta = 4 - 40 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$

$$z_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

$$z_2 = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i$$

$S = \{-1 + 3i; -1 + 3i\}$

b) $z^2 - 4z + 20 = 0$

$\Delta = 4 - 80 = -64 = 64i^2 = (8i)^2$

$$z_3 = \frac{4 + 8i}{2} = 2 + 4i$$

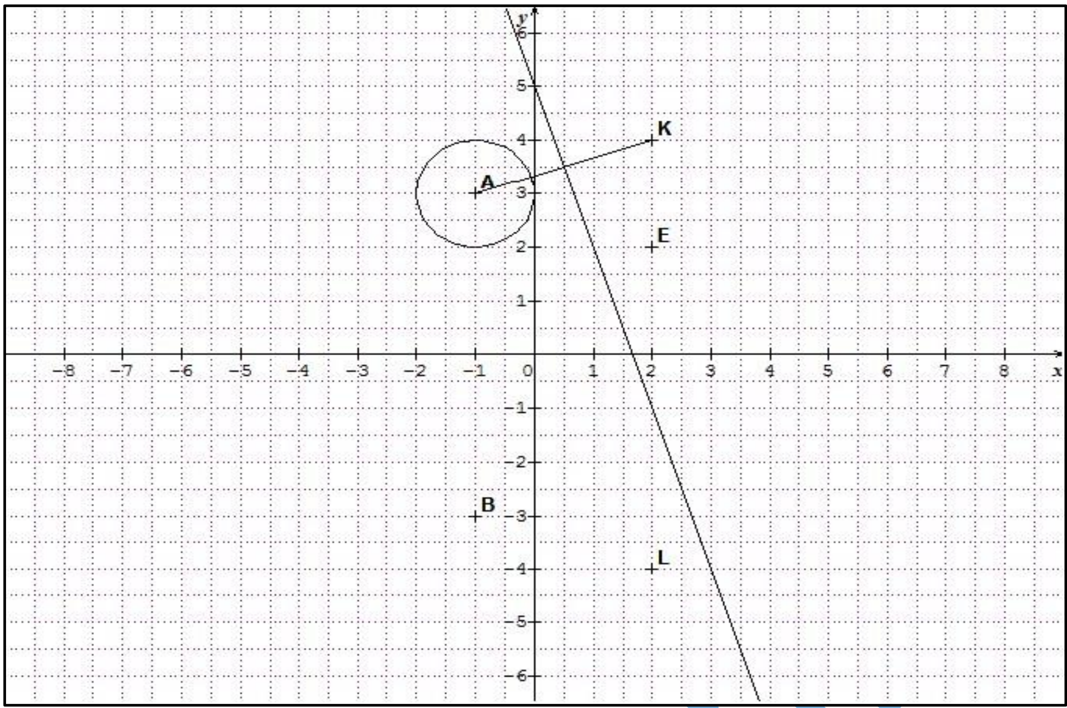
$$z_4 = \frac{4 - 8i}{2} = 2 - 4i$$

$\Rightarrow$ S=$\{2 + 4i; 2 - 4i\}$

2) $z_A = z_1 = -1 + 3i$; $z_B = z_2 = -1 - 3i$, $z_K = z_3 = 2 + 4i$, $z_L = z_4 = 2 - 4i$,

$z_E = z_3 - 2i = 2 + 4i - 2i = 2 + 2i$

a)



b) $|z_E| = |2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg z_E = arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\boxed{z_E = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)}$

c)

$le\ milieu$**du segment**$[AL] = \frac{ZA+ZL}{2} = \frac{-1+3i+2-4i}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$le\ milieu$**du segment**$[BE] = \frac{ZB+ZE}{2} = \frac{-1-3i+2+2i}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Les segments$[AL]$ **et** $[BE]$ **ont le même milieu donc le quadrilatère ABLE est un parallélogramme.**

$AE = |Z_E - Z_A| = |2+2i+1-3i| = |3-i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$AK = |Z_K - Z_A| = |2+4i+1-3i| = |3+i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$AE = AK = \sqrt{10} \Rightarrow$ **Le triangle AKE est isocèle en A**

3) $f(z) = \frac{z-2-4i}{z+1-3i}$

$* \ |f(z)| = 1 \Rightarrow$

$$\left|\frac{z-2-4i}{z+1-3i}\right| = 1$$

$$\left|\frac{z-(2+4i)}{z-(-1+3i)}\right| = 1$$

$$\left|\frac{Z_M - Z_K}{Z_M - Z_A}\right| = 1$$

$$\frac{KM}{AM} = 1$$

$KM = AM$

$\Rightarrow \Gamma_1$ Est la médiatrice du segment$[AK]$.

$* \ |f(z) - 1| = \sqrt{10} \ \Rightarrow$

$\left|\frac{z-2-4i}{z+1-3i} - 1\right| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\left|\frac{z-2-4i-z-1+3i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\left|\frac{-3-i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{10}}{|z+1-3i|} = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\sqrt{10}|z + 1 - 3i| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$|z + 1 - 3i| = 1 \Rightarrow$

$|Z_M - (-1 + 3i)| = 1 \Rightarrow$

$|Z_M - Z_A| = 1 \Rightarrow$

$AM = 1$

Γ_2 est le cercle de centre A et de rayon $r = 1$

Corrigé l'Exercice 3

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = 3U_n + 10n - 13 \end{cases}$$

1a) $U_1 = 3U_0 - 13 = 3 \times 6 - 13 = 18 - 13 = 5$

$U_2 = 3U_1 + 10 - 13 = 3 \times 5 + 10 - 13 = 15 + 10 - 13 = 12$

$U_3 = 3U_2 + 10 \times 2 - 13 = 3 \times 12 + 20 - 13 = 36 + 20 - 13 = 43$

b)

$\begin{cases} U_1 - U_0 = 5 - 6 = -1 \\ U_2 - U_1 = 12 - 5 = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{U_1 - U_0 \neq}$

$\boxed{U_2 - U_1} \Rightarrow (U_n) n'est\ pas\ une\ suite\ arithmétique$

$\begin{cases} \frac{U_1}{U_0} = \frac{5}{6} \\ \frac{U_2}{U_1} = \frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1} \Rightarrow} (U_n)\ n'est\ pas\ une\ suite\ géométique$

2°a) $V_n = U_n + 5n - 4$

$V_{n+1} = U_{n+1} + 5(n + 1) - 4$

$= 3U_n + 10n - 13 + 5n + 5 - 4$

$= 3U_n + 15n - 12$

$= 3(U_n + 5n - 4)$

$V_{n+1} = 3V_n$

(V_n) *est une suite géométique* de *raison* $q = 3$ et de premier terme

$v_0 = U_0 - 4 = 6 - 4 = 2$

$V_n = V_0 q^n = 2 \times 3^n$

b) $V_n \geq 2013 \Rightarrow \ 2 \times 3^n \geq 2013$

$\Rightarrow 3^n \geq \frac{2013}{2}$

$\Rightarrow nln3 \geq \ln\left(\frac{2013}{2}\right)$

$\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{2013}{2}\right)}{ln3}$

$v_n \geq 2013 \;\; \Rightarrow n \geq \frac{6{,}914234245}{1{,}098612289} = 6,29360723$

$V_n \geq 2013$ *à partir de* V_7

c) $V_n = U_n + 5n - 4 \Rightarrow U_n = V_n - 5n + 4$

$\Rightarrow U_n = 2 \times 3^n - 5n + 4$

3) $S_n = U_0 + U_1 + \cdots \ldots + U_n$

(S_n) *est* la somme de la suite géométrique (V_n) et la suite arithmétique (w_n) définie par $w_n = -5n + 4$

D'où $S_n = \frac{V_0}{1-q}(1 - q^{n+1}) + \frac{(n+1)(w_0+w_n)}{2}$

$$S_n = \frac{2}{1-3}(1 - 3^{n+1}) + \frac{(n+1)(4 - 5n + 4)}{2}$$

$$S_n = -(1 - 3^{n+1}) + \frac{(n+1)(8 - 5n)}{2}$$

$$S_n = -1 + 3^{n+1} + \frac{8n - 5n^2 + 8 - 5n}{2}$$

$$S_n = -1 + 3^{n+1} + \frac{3n - 5n^2 + 8}{2}$$

$$S_n = -1 + 3^{n+1} + \frac{3}{2}n - \frac{5}{2}n^2 + 4$$

$$S_n = 3 + 3^{n+1} + \frac{3}{2}n - \frac{5}{2}n^2$$

Exercice 4

Partie A

$g(x) = x^3 - 3 + 2lnx$

1a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 - 3 + 2lnx) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - 3 + 2lnx) = +\infty - 3 + \infty = +\infty$

b) $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$

TV de g

x	0		$+\infty$
g'(x)	||	+	
g(x)	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2a) g est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers J=$\mathbb{R}$ donc g réalise une bijection.

b) g réalise une bijection et change de signe une seule fois donc il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$

$g(1,34) < 0$ et $g(1,35) > 0 \Rightarrow \; g(1,34) \times g(1,35) < 0$ donc $1,34 < \alpha < 1{,}35$

Signe de g(x)

c) $\begin{cases} \text{Si } x \in \,]0, \alpha] \Rightarrow g(x) \leq 0 \\ \text{Si } x \in [\alpha, +\infty[\Rightarrow g(x) \geq 0 \end{cases}$

Partie B

1a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - 2 + \frac{1-lnx}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0^+} x - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}$$
$$= 0 - 2 + \infty + \infty$$
$$= +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} x - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}$$
$$= +\infty - 2 + 0 - 0$$
$$= +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{n\to+\infty} x - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2} - x + 2$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0$$

b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \Gamma$ *admet* une asymptote verticale $d'équation\ x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0 \Rightarrow \Gamma$ *admet* une asymptote oblique $d'équation\ y = x - 2$

c) $d(x) = f(x) - (x-2)$

$$d(x) = \frac{1 - lnx}{x^2}$$

$x^2 > 0 \Rightarrow$ le signe de $d(x)$ est celui de $1 - lnx$

$$d(x) = 0 \Rightarrow 1 - lnx = 0$$
$$\Rightarrow lnx = 1$$
$$\Rightarrow x = e$$

x	$-\infty$	e	$+\infty$
Signe d(x)	+	0	-
P.R	Γ/D	O	D/Γ

2a)

$$f'(x) = 1 + \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 - lnx)}{x^4}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-x - 2x + 2xlnx}{x^4}$$
$$= 1 + \frac{-3x + 2xlnx}{x^4}$$
$$= \frac{x^4 - 3x + 2xlnx}{x^4}$$
$$= \frac{x(x^3 - 3 + 2lnx)}{x^4}$$
$$= \frac{x^3 - 3 + 2lnx}{x^3}$$
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

$x \in]0, +\infty[\Rightarrow x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

b)

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{1 - ln\alpha}{\alpha^2}$$

on a $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3 + 2ln\alpha = 0$

$\Rightarrow 2ln\alpha = 3 - \alpha^3$

$\Rightarrow \ln\alpha = \frac{3-\alpha^3}{2}$

On remplace $ln\alpha$ dans l'expression de $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{1 - \frac{(3-\alpha^3)}{2}}{\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{\frac{2 - 3 + \alpha^3}{2}}{\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{-1 + \alpha^3}{2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 - 4\alpha^2 - 1 + \alpha^3}{2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha^3 - 4\alpha^2 - 1}{2\alpha^2}$$

$f(\alpha) \cong -0,2$

c) TV de f

x	0		α		+∞
f '(x)			0		
f(x)	+∞	↘	f(α)	↗	+∞

3a) $f(x_0) = f(1) = 0$

$f'(x_0) = f'(1) = -2$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

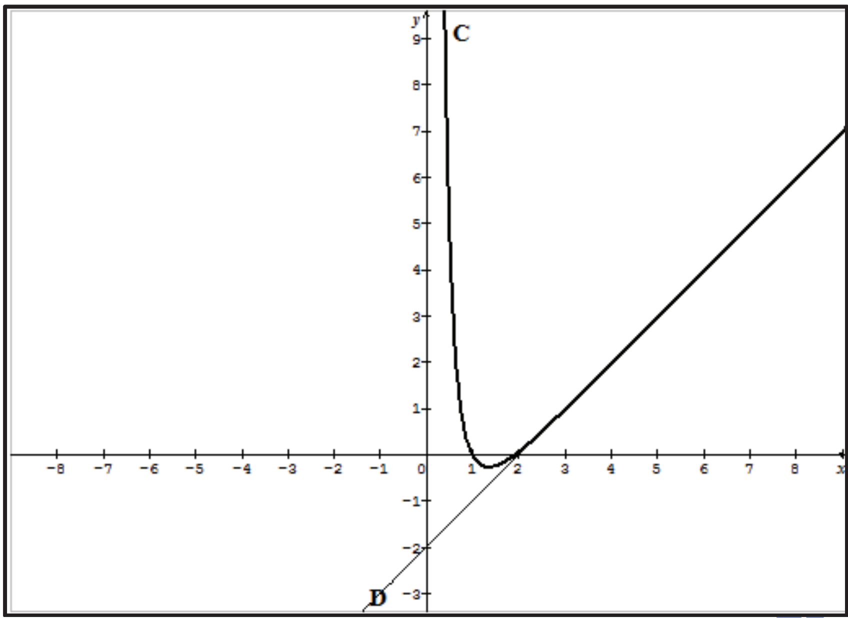
$y = -2(x-1)$

$y = -2x + 2$

b) $f(1) = 0 \Rightarrow$ **la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un premier A point d'abscisse 1**
Puisque f change de signe 2fois sur $]0,+\infty[$ donc il existe un deuxième point autre que A d'abscisse $\beta \in [\alpha,+\infty[$

$$\begin{cases} f(1,9) = -0,006 < 0 \\ f(2) = 0,076 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(1,9) \times f(2) < 0 \Rightarrow 1,9 < \beta < 2$$

c)



4) Sur $[\beta,+\infty[$ on a $d(x)<0 \Rightarrow I_n = -\int_3^n d(x)dx$

$$\Rightarrow\ I_n = -\int_3^n \frac{1-lnx}{x^2}dx$$

$$\Rightarrow\ I_n = \int_3^n \frac{-1+lnx}{x^2}dx$$

b) $J_n = \int_3^n \frac{lnx}{x^2}dx$

on pose $\begin{cases} u = lnx \rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} \rightarrow v = \frac{-1}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$J_n = \left[\frac{-lnx}{x}\right]_3^n + \int_3^n \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow$$

$$J_n = \frac{-lnn}{n} + \frac{ln3}{3} + \left[\frac{-1}{x}\right]_3^n$$

d'où

$$\boxed{J_n = \frac{-lnn}{n} + \frac{ln3}{3}}$$

$$I_n = \int_3^n \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{lnx}{x^2}\right)dx$$

$$I_n = \int_3^n -\frac{1}{x^2}dx + \int_3^n \frac{lnx}{x^2}dx$$

$$I_n = \int_3^n -\frac{1}{x^2}dx + J_n$$

$$I_n = \left[\frac{1}{x}\right]_3^n + \frac{-lnn}{n} + \frac{ln3}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3}$$

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{lnn}{n} + \frac{ln3}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3}$$

$$I_n = \frac{ln3}{3} - \frac{lnn}{n}$$

c)

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{ln3}{3} - \frac{lnn}{n} = \frac{ln3}{3}$$