Exercice 1 (3 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_n = 3^n + n - 1$. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = \ln\left(\frac{-1+v_n}{2}\right)$.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La suite (u_n) est :	arithmétique	géométrique	ni arithmétique, ni géométrique	0.5 pt
2	La suite (u_n) est	convergente	divergente	bornée	0.5 pt
3	Si $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. alors la valeur de S_n est	$\frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$	$\frac{1-3^{n+1}}{-2} + \frac{(n+1)(n-1)}{2}$	$\frac{1-3^{n+1}}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$	0.5 pt
4	Le terme général de la suite (v_n) est :	$v_n = 2\times 3^n + 1$	$v_n = 2\times 3^n + 2n + 1$	$v_n = 3^n + 1$	0.5 pt
5	Le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq 2019$ est :	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	0.5 pt
6	Si $T_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$, alors la valeur de T_n est	$\frac{(n+1)^2}{2}\ln 3$	$\ln\left(\frac{3^{n+1}-1}{2}\right)$	$\frac{n^2+n}{2}\ln 3$	0.5 pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1° a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-3+4i$	0.5 pt
b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 + (3-6i)z - 6 - 10i = 0$.	0.5 pt
2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2+2i$; $z_B = i$ et $z_C = -1+4i$.	
a) Placer les points A, B et C .	0.5 pt
b) Déterminer la nature du triangle ABC.	0.5 pt
c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.	0.25 pt
3° Pour tout nombre complexe $z \neq i$; on pose : $f(z) = \frac{z+1-4i}{z-i}$.	
a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $\lvert f(z)\rvert = 1$.	0.75 pt
b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.	0.75 pt
c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan d'affixe z tel que $\lvert f(z)-1\rvert = \sqrt{2}$.	0.75 pt
4° On pose, pour tout entier $n \geq 1$; $z_n = (z_A)^n$.	
a) Ecrire z_n sous forme trigonométrique.	0.25 pt
b) Déterminer la longueur du segment OM_{2019}, où M_{2019} est le point d'affixe z_{2019}.	0.25 pt

Exercice 3 (6 points)

A. 1° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4y = 0$.	0.5 pt
2° Soit h la solution de (E) qui vérifie $h(0) = -1$ et $h'(0) = -1$. Montrer que $h(x) = (x-1)e^{2x}$.	0.5 pt

B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=h(x)+2x-2=(x-1)(2+e^{2x})$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.	1 pt
b) Montrer que la droite D d'équation $y=2x-2$ est asymptote à (C) et étudier leurs positions relatives.	0.75 pt
2° a) Montrer que $f'(x)=2+(2x-1)e^{2x}$ et en déduire l'expression de $f''(x)$. (f' et f'' étant respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f).	0.5 pt
b) Montrer que le point $A(0;-3)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C).	0.5 pt
c) Etudier les variations de f' et en déduire qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.	0.5 pt
d) Dresser le tableau de variation de f.	0.5 pt
3° a) Déterminer le point B de (C) où la tangente T est parallèle à la droite D. Ecrire une équation de T.	0.5 pt
b) Tracer D ,T et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.	0.5 pt
c) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $x-1=me^{-2x}$.	0.25 pt

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)(1-\ln x)$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.	0.5 pt
b) Calculer la dérivée $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.	0.5 pt
c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $]0;+\infty[$ une unique solution α telle que $1,7<\alpha<1,8$.	0.5 pt
d) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.	0.25 pt
2° a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.	1 pt
b) Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=g(x)$, où f' est la dérivée de f.	0.5 pt
c) Dresser le tableau de variation de f.	0.5 pt
3°a) Montrer que $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ où α est le réel trouvé dans la question 1°c).	0.25 pt
b) Déterminer les points d'intersection de la courbe Γ avec l'axe (Ox).	0.25 pt
4° Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=[\alpha;+\infty[$.	
a) Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J=]-\infty;f(\alpha)]$.	0.25pt
b) Calculer $(h^{-1})'(0)$.	0.25 pt
c) Construire Γ et Γ' dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ où Γ' est la courbe de h^{-1}.	0.5 pt
5° a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (x-1)\ln x\,dx=\frac{e^2-3}{4}$.	0.25pt
b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$	0.5 pt

Fin

CORRECTION DU BAC D 2019
Session Normale

Série : SN
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

DATE: Vendredi 14/06/2019

Exercice 1 (3 points)

N °Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	C	B	A	A	B	C
Note	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

Exercice 2 (5 points)

1. a) On pose $Z = x + iy$ et $u = -3 + 4i$

$|u| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow \boxed{|u| = 5}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |u| = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = Re(u) = -3 & (2) \\ 2xy = Im(u) = 4 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \quad 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$(1) - (2) \quad 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

De (3) on a $2xy = 4 \Leftrightarrow xy = 2 > 0$

donc x et y sont de même signe d'où

$\boxed{Z_1 = 1 + 2i}$ et $\boxed{Z_2 = -1 - 2i}$ $\boxed{0,5}$

b)

$Z^2 + (3 - 6i)Z - 6 - 10i = 0$

$\Delta = (3 - 6i)^2 - 4(-6 - 10i) = 9 - 36i - 36 + 24 + 40i$

$\Delta = -3 + 4i = (1 + 2i)^2 \Longrightarrow \delta = 1 + 2i$

$Z_1 = \frac{-b-\delta}{2} = \frac{-3+6i-1-2i}{2} = \frac{-4+4i}{2} \Leftrightarrow \boxed{Z_1 = -2 + 2i}$

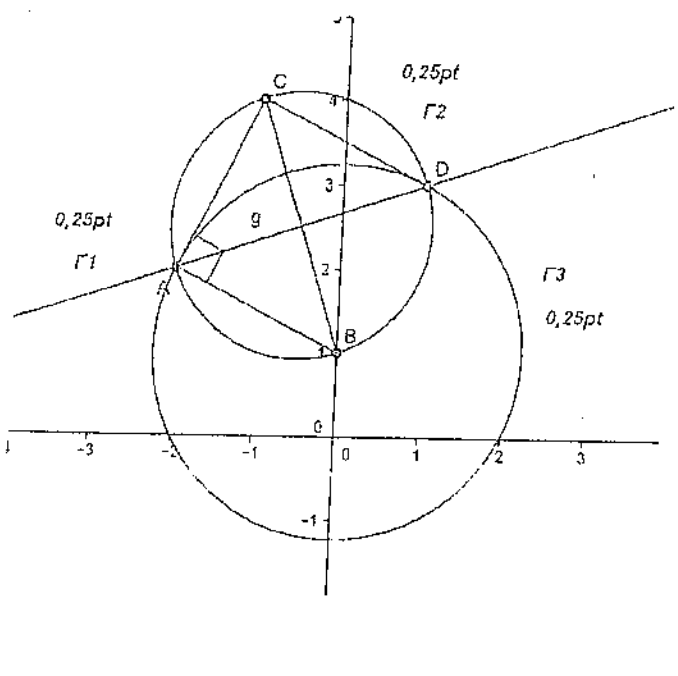
$Z_2 = \frac{-b+\delta}{2} = \frac{-3+6i+1+2i}{2} = \frac{-2+8i}{2} \Leftrightarrow \boxed{Z_2 = -1 + 4i}$ $\boxed{0,5}$

2.

a) $Z_A = -2 + 2i \Leftrightarrow A(-2, 2)$

$Z_B = i \Leftrightarrow B(0, 1)$

$Z_C = -1 + 4i \Leftrightarrow C(-1, 4)$ Voir figure $\boxed{0,5}$



b) $\frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B} = \frac{-2+2i+1-4i}{-2+2-i} = \frac{-1-2i}{-2+i} = i \Leftrightarrow \boxed{\frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B} = i}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B}\right| = 1 \\ et \\ Arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow BA = BC \\ et \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

Donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A $\boxed{0,5}$

d) $ABDC$ est un paralèllogramme ssi

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_D - z_C = z_B - z_A$

$\Leftrightarrow z_D = z_B - z_A + z_C \Leftrightarrow z_D = i + 2 - 2i - 1 + 4i$

$\Leftrightarrow \boxed{z_D = 1 + 3i} \Leftrightarrow D(1, 3)$ $\boxed{0,25}$

(Le point D et sa représention graphique ne sont pas demandé)

3. $f(z) = \frac{Z+1-4i}{Z-i} \Leftrightarrow f(z) = \frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}$

$Z \neq i \Leftrightarrow Z \neq Z_B \Leftrightarrow M \neq B$

a) $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{MC}{MB} = 1 \Leftrightarrow MB = MC$

Donc l'ensemble (Γ_1) des points M est la médiatrice du segment $[BC]$. $\boxed{0,5}$

b)

$f(Z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(Z) = 0 \\ ou \\ \text{Arg} f(Z) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z - Z_C = 0 \Leftrightarrow Z = Z_C \\ ou \\ \text{Arg}\left(\frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M = C \\ ou \\ (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$$ Donc l'ensemble Γ_2 des points M est le cercle de diamètre $[BC]$ privé de B. $\boxed{0,5}$

c) $|f(Z) - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{Z+1-4i}{Z-i} - 1\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{Z+1-4i-Z+i}{Z-i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1-3i}{Z-i}\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|1-3i|}{|Z-Z_B|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{|Z-Z_B|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z-Z_B|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{|Z-Z_B|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |Z - Z_B| = \sqrt{5} \Leftrightarrow BM = \sqrt{5}.$

Donc l'ensemble (Γ_3) des points M est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{5}$. $\boxed{0,5}$

4. $\forall n \geq 1 \quad Z_n = (Z_A)^n \quad M_n(Z_n)$

a) $Z_A = -2 + 2i$

$|Z_A| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{Arg}(Z_A) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

$|Z_n| = |Z_A|^n = (2\sqrt{2})^n$

$\text{Arg}(Z_n) = \text{Arg}((Z_A)^n) = n\,\text{Arg}(Z_A) = \frac{3n\pi}{4}[2\pi]$

$\boxed{Z_n = (2\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)}$ $\boxed{0,25}$

c) $OM_{2019} = |Z_{2019}| = |Z_A|^{2019} = (2\sqrt{2})^{2019}$

$\boxed{OM_{2019} = (2\sqrt{2})^{2019}}$ $\boxed{0,25}$

215

Exercice $\boxed{3}$ (5 points)

PARTIE A

1. (E) $y'' - 4y' + 4y = 0$

On pose l'équation caractéristique :

$r^2 - 4r + 4 = 0 \qquad \Delta = 16 - 16 = 0 \qquad r_1 = r_2 = r = \frac{4}{2} = 2$

Donc $h(x) = (Ax + B)e^{2x}$

2. $h(x) = (Ax + B)e^{2x}$

$(uv)' = u'v + v'u$

$h'(x) = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x}$

$\Leftrightarrow h'(x) = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$

$$\begin{cases} h(0) = -1 \\ h'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A(0) + B)e^0 = -1 \\ (2A(0) + A + 2B)e^0 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A + 2B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \boxed{h(x) = (x-1)e^{2x}}$$

PARTIE B

1. $f(x) = (x-1)e^{2x} + 2x - 2 = (x-1)(2 + e^{2x})$

a) $$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty}\left(\underbrace{(x-1)}_{\searrow -\infty}\underbrace{\left(2 + \overbrace{e^{2x}}^{0}\right)}_{\searrow 2}\right) = -\infty$$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{-\infty} f(x) = -\infty}$ $\boxed{0,25}$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty}\left(\underbrace{(x-1)}_{\searrow +\infty}\underbrace{(2 + e^{2x})}_{\searrow +\infty}\right) = +\infty$$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} f(x) = +\infty}$ $\boxed{0,25}$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty}\left(\frac{(x-1)(2+e^{2x})}{x}\right)$$

$$= \lim_{+\infty}\left(\underbrace{\left(1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{0}\right)}_{\searrow 1}\underbrace{(2 + e^{2x})}_{\searrow +\infty}\right) = +\infty$$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$ $\boxed{0,25}$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique(BP) de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$ $\boxed{0,25}$

b) On pose $D: y = 2x - 2$

$f(x) - y = f(x) - (2x - 2) = (x-1)e^{2x}$

$\lim_{-\infty}(f(x) - y) = \lim_{-\infty}(x-1)e^{2x})$

$$= \lim_{-\infty}\left(\frac{1}{2}\underbrace{(2x)e^{2x}}_{0} - \underbrace{e^{2x}}_{0}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{-\infty}(f(x) - y) = 0}$ $\boxed{0,25}$

Donc la droite: $D: y = 2x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ $\boxed{0,25}$

Position relative de (C) et (D)

On étudie le signe de $f(x) - y = (x-1)e^{2x}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{2x} > 0$ alors le signe de $f(x) - y$ est celui $x - 1$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\boxed{0,25}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$
Position relative de (C) pa rapport à (D)	$C/_D$	$C \cap D = \{\Omega\}$	$D/_C$

$D: y = 2x - 2 \qquad x = 1 \Leftrightarrow y = 0 \quad$ donc $\Omega(1, 0)$

2.a) $f(x) = (x-1)(2 + e^{2x})$

$(uv)' = u'v + v'u$

$f'(x) = 2 + e^{2x} + 2(x-1)e^{2x}$

$\quad = 2 + (1 + 2x - 2)e^{2x}$

$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) = 2 + (2x - 1)e^{2x}}$ $\boxed{0,25}$

$f''(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = (2 + 4x - 2)e^{2x}$

$\Leftrightarrow \boxed{f''(x) = 4xe^{2x}}$ $\boxed{0,25}$

b) Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{2x} > 0$ alors le signe de $f''(x)$ est celui de $4x$

Signe de $f''(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$f(0) = (0-1)(2 + e^0) = -3$ Donc le point $A(0, -3)$ est un point d'inflexion à la courbe (C) $\boxed{0,5}$

c) Tableau de variations (TV) de f'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$\boxed{0,25}$

$\boxed{f'(0) = 2 + (2(0) - 1)e^0 = 1}$

D'après le T.V de f' elle admet une valeur minimale absolue qui est $f'(0) = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \geq 1 > 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$ $\boxed{0,25}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	

d) T.V de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{0,5}$

3.a) $D: y = 2x - 2$ son coefficient directeur est $\alpha = 2$

$T // D \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow 2 + (2x-1)e^{2x} = 2$

$\Leftrightarrow (2x-1)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(2 + e^{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \Leftrightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2+e}{2} = -2,35}$

$B\left(\frac{1}{2}, -\frac{2+e}{2}\right) \approx (0,5; -2,35)$ $\boxed{0,25}$

Equation de la tangente (T) à (C) au point A :

$T: y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow T: y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{2+e}{2}$

$\boxed{T: y = 2x - \frac{4+e}{2}}$ $\boxed{T: y = 2x - 2 - \frac{e}{2}}$ $\boxed{0,25}$

c) $x - 1 = me^{-2x}$

$\Leftrightarrow (x-1)e^{2x} = m$

$\Leftrightarrow (x-1)e^{2x} + 2x - 2 = 2x - 2 + m$ $\boxed{0,25}$

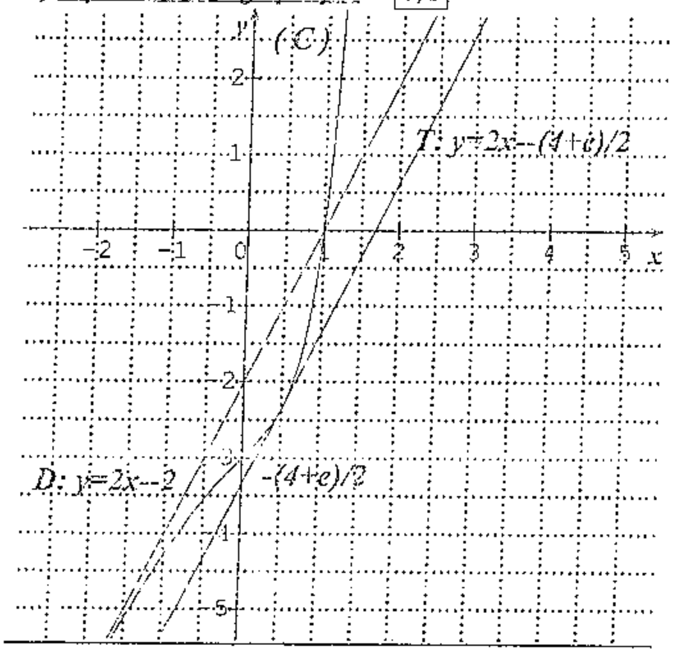
$\Leftrightarrow f(x) = 2x - 2 + m$

$\Leftrightarrow f(x) = 2x + m'$ avec $m' = -2 + m$

Donc le nombre de solutions de l'équation paramétrique revient au nombre de points d'intersections de la courbe (C) avec la droite $D_m: y = 2x - 2 + m$ ou $D'_m: y = 2x + m'$ avec $m' = -2 + m$ qui est parallèle à D et T.

m'		Nombre de solutions
$m' < -\frac{4+e}{2}$	$m < -\frac{e}{2}$	0
$m' = -\frac{4+e}{2}$	$m = -\frac{e}{2}$	1
$-\frac{4+e}{2} < m' < -2$	$-\frac{e}{2} < m < 0$	2
$m' \geq -2$	$m \geq 0$	1

b) Représentation graphique $\boxed{0,5}$



Exercice $\boxed{4}$ *(7 points)*

1. $\forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

a) $\lim_{0^+} g(x) = \lim_{0^+}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\searrow +\infty} - \underbrace{\ln(x)}_{\searrow -\infty}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{0^+} g(x) = +\infty}$ $\boxed{0,25}$

$\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\searrow 0} - \underbrace{\ln(x)}_{\searrow +\infty}\right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} g(x) = -\infty}$ $\boxed{0,25}$

b) $g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$

$\Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2} < 0}$ $\boxed{0,25}$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	0 $\boxed{0,25}$	$-\infty$

c) D'après le T.V de g elle est continue et change de signe une fois sur $[0, +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$ $\boxed{0,25}$

g est continue sur $[1,7; 1,8]$.

De plus

$g(1,7) = 0,05 > 0$ et $g(1,8) = -0,03 < 0$

$\Leftrightarrow \boxed{g(1,7) \times g(1,8) < 0}$

D'après le théorème de la valeur intermédiaire (V.I)

$\exists! \alpha \in]1,7; 1,8[/ g(\alpha) = 0$ $\boxed{0,25}$

b) Donc d'après le T.V de g son signe est

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

$\boxed{0,25}$

2.a) $f(x) = (x-1)(1-\ln x)$

$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+}\left(\left(\underbrace{x-1}_{-1}\right)\left(\underbrace{1-\overbrace{\ln x}^{-\infty}}_{+\infty}\right)\right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{0^+} f(x) = -\infty}$ $\boxed{0,25}$

Donc $x = 0$ est A.V à la courbe(Γ). $\boxed{0,25}$

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty}\left(\left(\underbrace{x-1}_{+\infty}\right)\left(\underbrace{1-\ln x}_{-\infty}\right)\right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} f(x) = -\infty}$ $\boxed{0,25}$

$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty}\left(\frac{(x-1)(1-\ln x)}{x}\right)$

$= \lim_{+\infty}\left(\underbrace{1-\overbrace{\frac{1}{x}}^{0}}_{1}\right)\left(\underbrace{1-\ln x}_{-\infty}\right) = -\infty \Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$

Donc la courbe (Γ) admet une B.P de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$. $\boxed{0,25}$

b) $f(x) = (x-1)(1-\ln x)$

$(uv)' = u'v + v'u$

$f'(x) = (1-\ln x) + (x-1)\left(-\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = g(x)}$ $\boxed{0,5}$

c) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$ $\boxed{0,5}$	$-\infty$

3.a) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln\alpha = \frac{1}{\alpha}}$

$f(\alpha) = (\alpha-1)(1-\ln\alpha) = (\alpha-1)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$

$f(\alpha) = (\alpha-1)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}}$ $\boxed{0,25}$

b) L'intersection de (Γ) avec (Ox) :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(1-\ln x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 1 = 0$ ou $1 - \ln x$

$\Leftrightarrow \quad x = 1$ ou $x = e \Leftrightarrow (1,0)$ et $(e,0)$

$\Gamma \cap (Ox) = \{(1,0), (e,0)\}$ $\boxed{0,25}$

a) D'après le T.V de f sur l'intervalle $I = [\alpha, +\infty[$ h est continue et continue et strictement décroissante de $I = [\alpha, +\infty[$ vers $J =]-\infty, f(\alpha)]$

donc h réalise une bijection $\boxed{0,25}$

217

b) <u>Calcul de $(h^{-1})'(0)$</u>

On a $h(e) = 0 \Leftrightarrow h^{-1}(0) = e$

On a aussi $h'(e) = \frac{1}{e} - \ln e \Rightarrow h'(e) = \frac{1}{e} - 1$

$h'(e) = \frac{1-e}{e}$

$(h^{-1})'(x_0) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x_0))}$

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{h'(e)} = \frac{1}{\frac{1-e}{e}} = \frac{e}{1-e}$$

$\Leftrightarrow \boxed{(h^{-1})'(0) = \frac{e}{1-e}}$ $\boxed{0,25}$

5.a) Montrons que $\int_1^e (x-1)\ln x\, dx = \frac{e^2-3}{4}$

On pose $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{2}x^2 - x \end{cases}$

$\int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v$

$\int_1^e (x-1)\ln x\, dx = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) dx$

$= \left[\left(\frac{1}{2}e^2 - e\right)\ln e - \cancel{\left(\frac{1}{2}(1)^2 - 1\right)\ln 1}\right] - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x - 1\right) dx$

$= \frac{1}{2}e^2 - e - \left[\frac{1}{4}x^2 - x\right]_1^e$

$= \frac{1}{2}e^2 - e - \left[\left(\frac{1}{4}e^2 - e\right) - \left(\frac{1}{4}(1)^2 - 1\right)\right]$

$\frac{1}{2}e^2 - \cancel{e} - \frac{1}{4}e^2 + \cancel{e} - \frac{3}{4} = \frac{2e^2 - e^2 - 3}{4} = \frac{e^2-3}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{\int_1^e (x-1)\ln x\, dx = \frac{e^2-3}{4}}$ $\boxed{0,25}$

b) $\mathcal{A} = \int_1^e f(x)\, dx = \int_1^e (x-1)(1-\ln x)\, dx$

$= \int_1^e [x - 1 - (x-1)\ln x]\, dx$

$= \int_1^e (x-1)\, dx - \int_1^e (x-1)\ln x\, dx$

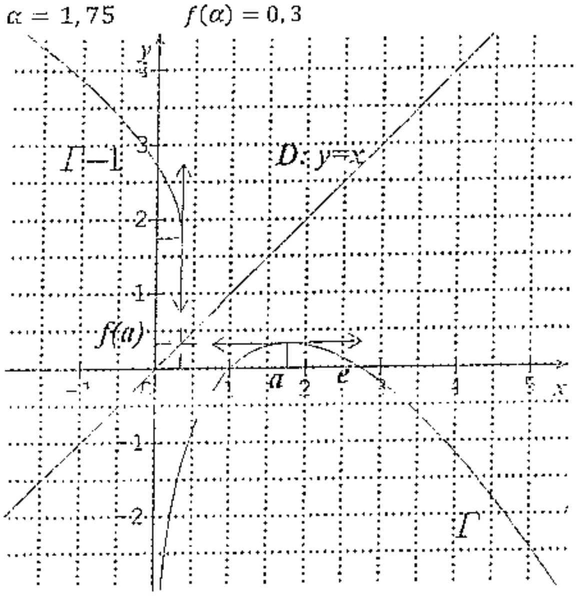
$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^e - \frac{e^2-3}{4}$

$= \left(\frac{1}{2}e^2 - e\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 - 1\right) - \frac{e^2-3}{4} = \frac{2e^2 - 4e + 2 - e^2 + 3}{4} =$

$\frac{e^2+4e+5}{4}$ $\boxed{\mathcal{A} = \int_1^e f(x)\, dx = \frac{e^2-4e+5}{4} = 2,23}$ $\boxed{0,5}$

c) <u>Représentation graphique</u> $\boxed{0,5}$

$\alpha = 1,75$ $f(\alpha) = 0,3$



JUSTIFICATION DE L'EXERCICE $\boxed{1}$

<u>Cette partie n'est pas demandée dans l'exercice</u>

$U_n = 3^n + n - 1$; $V_n = U_{n+1} - U_n$ et $W_n = \ln\left(\frac{-1+V_n}{2}\right)$

1. $U_1 = 3^1 + 1 - 1 \Leftrightarrow U_1 = 3$

$U_2 = 3^2 + 2 - 1 \Leftrightarrow U_2 = 10$

$U_3 = 3^3 + 3 - 1 \Leftrightarrow U_3 = 29$

$U_2 - U_1 = 10 - 3 = 7 \Leftrightarrow \boxed{U_2 - U_1 = 7}$

$U_3 - U_2 = 29 - 10 = 19 \Leftrightarrow \boxed{U_3 - U_2 = 19}$

$\boxed{U_3 - U_2 \neq U_2 - U_1}$ Donc (U_n) n'est pas S.A

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{10}{7}$ et $\frac{U_3}{U_2} = \frac{29}{10}$

$\boxed{\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}}$ Donc (U_n) n'est pas S.G

Donc (U_n) n'est ni S.A ni S.G $\boxed{\text{Réponse C}}$

2. $\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty}\left(\underbrace{3^n}_{+\infty} + \underbrace{n-1}_{+\infty}\right) = +\infty$

Donc (U_n) est divergente $\boxed{\text{Réponse B}}$

3. On pose :

$a_n = 3^n$ c'est une S.G de raison $q = 3$ et de premier terme

$a_0 = 1$

$b_n = n - 1$ c'est une S.A de raison $r = 1$ et de premier terme

$b_0 = -1$

$A_n = a_0 + a_1 + \cdots a_n$

$$\Leftrightarrow A_n = a_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1\,\frac{3^{n+1}-1}{3-1} \Leftrightarrow \boxed{A_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}}$$

$B_n = b_0 + b_1 + \cdots b_n$

$B_n = \frac{n+1}{2}(b_0 + b_n) = \frac{n+1}{2}(-1 + n - 1)$

$\Leftrightarrow \boxed{B_n = \frac{(n+1)(n-2)}{2}}$

$U_n = 3^n + n - 1 \Leftrightarrow U_n = a_n + b_n$

On a $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$$+\begin{cases} U_0 = a_0 + b_0 \\ U_1 = a_1 + b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ U_n = a_n + b_n \end{cases}$$

$S_n = A_n + B_n \Leftrightarrow \boxed{S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}}$

$\boxed{\text{Réponse A}}$

4.

$V_n = U_{n+1} - U_n = 3^{n+1} + (n+1) - 1 - (3^n + n - 1)$

$= 3 \times 3^n + \cancel{n} + \cancel{1} - \cancel{1} - 3^n - \cancel{n} + 1 = (3-1) \times 3^n + 1$

$\boxed{V_n = 2 \times 3^n + 1}$ $\boxed{\text{Réponse A}}$

5. $V_n \geq 2019 \Leftrightarrow 2 \times 3^n + 1 \geq 2019 \Leftrightarrow 3^n \geq 1009$

$\Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln(1009) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1009)}{\ln(3)} = 6,29 \Leftrightarrow n \geq 7$

Le plus petit entier est $\boxed{n_0 = 7}$ $\boxed{\text{Réponse B}}$

$W_n = \ln\left(\frac{-1+V_n}{2}\right) = \ln\left(\frac{-1+2\times 3^n+1}{2}\right) = \ln(3^n)$

$\Leftrightarrow W_n = n\ln(3)$ c'est une S.A de raison $r = \ln 3$ et de premier $W_0 = 0$ donc $T_n = W_0 + W_1 + \cdots W_n$

$T_n = \frac{n+1}{2}(W_0 + W_n) = \frac{n+1}{2}(0 + n\ln)$

$\Leftrightarrow \boxed{T_n = \frac{n^2+n}{2}\ln 3}$ $\boxed{\text{Réponse C}}$

918

République Islamique de Mauritanie Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle Direction des Examens et des Concours	BACCALAUREAT 2019 Session Normale Epreuve de MATHEMATIQUES	Série : Sciences de la Nature Coefficient : 6 Durée : 4h

Exercice 1 (3 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_n = 3^n + n - 1$. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = \ln\left(\frac{-1+v_n}{2}\right)$.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La suite (u_n) est :	arithmétique	géométrique	ni arithmétique, ni géométrique	0.5 pt
2	La suite (u_n) est	convergente	divergente	bornée	0.5 pt
3	Si $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, alors la valeur de S_n est	$\frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$	$\frac{1-3^{n+1}}{-2} + \frac{(n+1)(n-1)}{2}$	$\frac{1-3^{n+1}}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$	0.5 pt
4	Le terme général de la suite (v_n) est :	$v_n = 2\times 3^n + 1$	$v_n = 2\times 3^n + 2n + 1$	$v_n = 3^n + 1$	0.5 pt
5	Le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geq 2019$ est :	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	0.5 pt
6	Si $T_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$, alors la valeur de T_n est	$\frac{(n+1)^2}{2}\ln 3$	$\ln\left(\frac{3^{n+1}-1}{2}\right)$	$\frac{n^2+n}{2}\ln 3$	0.5 pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1° a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-3+4i$ — 0.5 pt

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 + (3-6i)z - 6 - 10i = 0$. — 0.5 pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2+2i$; $z_B = i$ et $z_C = -1+4i$.

a) Placer les points A, B et C. — 0.5 pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC. — 0.5 pt

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. — 0.25 pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq i$; on pose : $f(z) = \frac{z+1-4i}{z-i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$. — 0.75 pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. — 0.75 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1| = \sqrt{2}$. — 0.75 pt

4° On pose, pour tout entier $n \geq 1$; $z_n = (z_A)^n$.

a) Ecrire z_n sous forme trigonométrique. — 0.25 pt

b) Déterminer la longueur du segment OM_{2019}, où M_{2019} est le point d'affixe z_{2019}. — 0.25 pt

Exercice 3 (6 points)

A. 1° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4y = 0$. — 0.5 pt

B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = h(x) + 2x - 2 = (x-1)(2+e^{2x})$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement. — 1 pt

b) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à (C) et étudier leurs positions relatives. — 0.75 pt

2° a) Montrer que $f'(x) = 2 + (2x-1)e^{2x}$ et en déduire l'expression de $f''(x)$. (f' et f'' étant respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f). — 0.5 pt

b) Montrer que le point $A(0;-3)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C). — 0.5 pt

c) Etudier les variations de f' et en déduire qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. — 0.5 pt

d) Dresser le tableau de variation de f. — 0.5 pt

3° a) Déterminer le point B de (C) où la tangente T est parallèle à la droite D. Ecrire une équation de T. — 0.5 pt

b) Tracer D, T et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. — 0.5 pt

c) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $x - 1 = me^{-2x}$. — 0.25 pt

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)(1-\ln x)$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. — 0.5 pt

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g. — 0.5 pt

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]0;+\infty[$ une unique solution α telle que $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$. — 0.5 pt

d) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$. — 0.25 pt

2° a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. — 1 pt

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x)$, où f' est la dérivée de f. — 0.5 pt

c) Dresser le tableau de variation de f. — 0.5 pt

3°a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ où α est le réel trouvé dans la question 1°c). — 0.25 pt

b) Déterminer les points d'intersection de la courbe Γ avec l'axe (Ox). — 0.25 pt

4° Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [\alpha;+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J =]-\infty; f(\alpha)]$. — 0.25 pt

b) Calculer $(h^{-1})'(0)$. — 0.25 pt

c) Construire Γ et Γ' dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ où Γ' est la courbe de h^{-1}. — 0.5 pt

5° a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \frac{e^2-3}{4}$. — 0.25 pt

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$ — 0.5 pt

Fin

CORRECTION DU BAC D 2019
Session Normale

Série : SN
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

DATE: Vendredi 14/06/2019

Exercice $\boxed{1}$ *(3 points)*

N°Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	C	B	A	A	B	C
Note	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

Exercice $\boxed{2}$ *(5 points)*

1\. a) On pose $Z = x + iy$ et $u = -3 + 4i$

$|u| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow \boxed{|u| = 5}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = |u| = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = Re(u) = -3 & (2) \\ 2xy = Im(u) = 4 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2) \quad 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$(1) - (2) \quad 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

De (3) on a $2xy = 4 \Leftrightarrow xy = 2 > 0$

donc x et y sont de même signe d'où

$\boxed{Z_1 = 1 + 2i}$ et $\boxed{Z_2 = -1 - 2i}$ $\boxed{0,5}$

b)

$Z^2 + (3 - 6i)Z - 6 - 10i = 0$

$\Delta = (3 - 6i)^2 - 4(-6 - 10i) = 9 - 36i - 36 + 24 + 40i$

$\Delta = -3 + 4i = (1 + 2i)^2 \implies \delta = 1 + 2i$

$Z_1 = \frac{-b-\delta}{2} = \frac{-3+6i-1-2i}{2} = \frac{-4+4i}{2} \Leftrightarrow \boxed{Z_1 = -2 + 2i}$

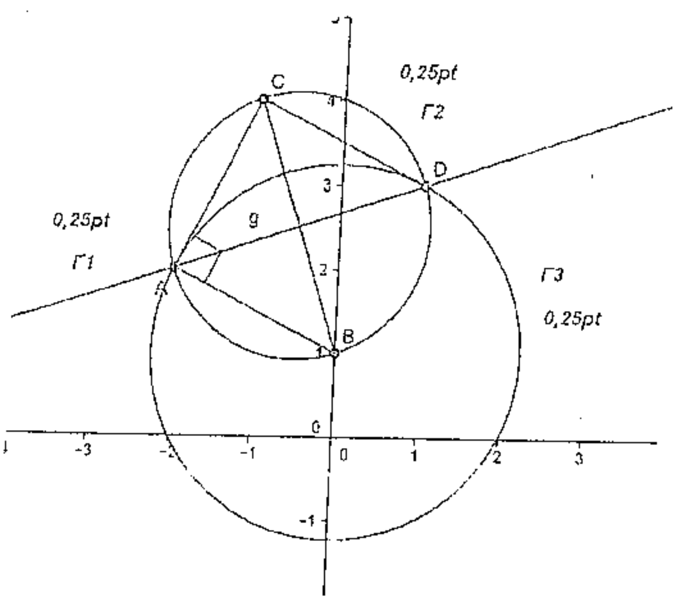
$Z_2 = \frac{-b+\delta}{2} = \frac{-3+6i+1+2i}{2} = \frac{-2+8i}{2} \Leftrightarrow \boxed{Z_2 = -1 + 4i}$ $\boxed{0,5}$

2\.

a) $Z_A = -2 + 2i \Leftrightarrow A(-2, 2)$

$Z_B = i \Leftrightarrow B(0, 1)$

$Z_C = -1 + 4i \Leftrightarrow C(-1, 4)$ Voir figure $\boxed{0,5}$



b) $\frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B} = \frac{-2+2i+1-4i}{-2+2-i} = \frac{-1-2i}{-2+i} = i \Leftrightarrow \boxed{\frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B} = i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B}\right| = 1 \\ et \\ Arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow BA = BC \\ et \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A $\boxed{0,5}$

d) $ABDC$ est un paralélllogramme ssi

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_D - z_C = z_B - z_A$

$\Leftrightarrow z_D = z_B - z_A + z_C \Leftrightarrow z_D = i + 2 - 2i - 1 + 4i$

$\Leftrightarrow \boxed{z_D = 1 + 3i} \Leftrightarrow D(1, 3)$ $\boxed{0,25}$

(Le point D et sa représention graphique ne sont pas demandé)

3\. $f(z) = \frac{Z+1-4i}{Z-i} \Leftrightarrow f(z) = \frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}$

$Z \neq i \Leftrightarrow Z \neq Z_B \Leftrightarrow M \neq B$

a) $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{MC}{MB} = 1 \Leftrightarrow MB = MC$

Donc l'ensemble (Γ_1) des points M est la médiatrice du segment $[BC]$. $\boxed{0,5}$

b)

$f(Z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} f(Z) = 0 \\ ou \\ \mathrm{Arg}\, f(Z) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z - Z_C = 0 \Leftrightarrow Z = Z_C \\ ou \\ \mathrm{Arg}\left(\frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} M = C \\ ou \\ (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$ Donc l'ensemble Γ_2 des points M est le cercle de diamètre $[BC]$ privé de B. $\boxed{0,5}$

c) $|f(Z) - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{Z+1-4i}{Z-i} - 1\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{Z+1-4i-Z+i}{Z-i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1-3i}{Z-i}\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|1-3i|}{|Z-Z_B|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{|Z-Z_B|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z-Z_B|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{|Z-Z_B|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |Z - Z_B| = \sqrt{5} \Leftrightarrow BM = \sqrt{5}.$

Donc l'ensemble (Γ_3) des points M est le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{5}$. $\boxed{0,5}$

4\. $\forall n \geq 1 \quad Z_n = (Z_A)^n \quad M_n(Z_n)$

a) $Z_A = -2 + 2i$

$|Z_A| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \qquad \mathrm{Arg}(Z_A) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

$|Z_n| = |Z_A|^n = (2\sqrt{2})^n$

$\mathrm{Arg}(Z_n) = \mathrm{Arg}((Z_A)^n) = n\,\mathrm{Arg}(Z_A) = \frac{3n\pi}{4}[2\pi]$

$\boxed{Z_n = (2\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)}$ $\boxed{0,25}$

c) $OM_{2019} = |Z_{2019}| = |Z_A|^{2019} = (2\sqrt{2})^{2019}$

$\boxed{OM_{2019} = (2\sqrt{2})^{2019}}$ $\boxed{0,25}$

215

Exercice $\boxed{3}$ *(5 points)*

PARTIE A

1\. $(E)\quad y'' - 4y' + 4y = 0$

On pose l'équation caractéristique :

$r^2 - 4r + 4 = 0 \qquad \Delta = 16 - 16 = 0 \qquad r_1 = r_2 = r = \frac{4}{2} = 2$

Donc $h(x) = (Ax + B)e^{2x}$

2\. $h(x) = (Ax + B)e^{2x}$

$(uv)' = u'v + v'u$

$h'(x) = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x}$

$\Leftrightarrow h'(x) = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$

$$\begin{cases} h(0) = -1 \\ h'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A(0) + B)e^0 = -1 \\ (2A(0) + A + 2B)e^0 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A + 2B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \boxed{h(x) = (x - 1)e^{2x}}$$

PARTIE B

1\. $f(x) = (x - 1)e^{2x} + 2x - 2 = (x - 1)(2 + e^{2x})$

a) $$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \left(\underbrace{(x - 1)}_{\searrow -\infty} \underbrace{\left(2 + \overbrace{e^{2x}}^{0}\right)}_{\searrow 2} \right) = -\infty$$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{-\infty} f(x) = -\infty}$ $\boxed{0,25}$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \left(\underbrace{(x - 1)}_{\searrow +\infty} \underbrace{(2 + e^{2x})}_{\searrow +\infty} \right) = +\infty$$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} f(x) = +\infty}$ $\boxed{0,25}$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \left(\frac{(x-1)(2+e^{2x})}{x} \right)$$

$$= \lim_{+\infty} \left(\underbrace{\left(1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{0}\right)}_{\searrow 1} \underbrace{(2 + e^{2x})}_{\searrow +\infty} \right) = +\infty$$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$ $\boxed{0,25}$

Donc la courbe (C) *admet une branche parabolique(BP) de direction* (Oy) *au voisinage de* $+\infty$ $\boxed{0,25}$

b) *On pose* $D: y = 2x - 2$

$f(x) - y = f(x) - (2x - 2) = (x - 1)e^{2x}$

$\lim_{-\infty}(f(x) - y) = \lim_{-\infty}(x - 1)e^{2x}$

$$= \lim_{-\infty} \left(\frac{1}{2} \underbrace{(2x)e^{2x}}_{0} - \underbrace{e^{2x}}_{0} \right) = 0$$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{-\infty}(f(x) - y) = 0}$ $\boxed{0,25}$

Donc la droite: $D: y = 2x - 2$ *est une asymptote oblique à la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$ $\boxed{0,25}$

Position relative de (C) et (D)

On étudie le signe de $f(x) - y = (x - 1)e^{2x}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{2x} > 0$ *alors le signe de* $f(x) - y$ *est celui* $x - 1$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\boxed{0,25}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$
Position relative de (C) *pa rapport à* (D)	$C/_D$	$C \cap D = \{\Omega\}$	$D/_C$

$D: y = 2x - 2 \qquad x = 1 \Leftrightarrow y = 0 \quad$ *donc* $\Omega(1, 0)$

2.a) $f(x) = (x - 1)(2 + e^{2x})$

$(uv)' = u'v + v'u$

$f'(x) = 2 + e^{2x} + 2(x - 1)e^{2x}$

$\quad = 2 + (1 + 2x - 2)e^{2x}$

$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) = 2 + (2x - 1)e^{2x}}$ $\boxed{0,25}$

$f''(x) = 2e^{2x} + 2(2x - 1)e^{2x} = (2 + 4x - 2)e^{2x}$

$\Leftrightarrow \boxed{f''(x) = 4xe^{2x}}$ $\boxed{0,25}$

b) *Comme* $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{2x} > 0$ *alors le signe de* $f''(x)$ *est celui de* $4x$

Signe de $f''(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f(0) = (0 - 1)(2 + e^0) = -3$ *Donc le point* $A(0, -3)$ *est un point d'inflexion à la courbe* (C) $\boxed{0,5}$

c) *Tableau de variations (TV) de* f'

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	$\boxed{0,25}$

$\boxed{f'(0) = 2 + (2(0) - 1)e^0 = 1}$

D'après le T.V de f' *elle admet une valeur minimale absolue qui est* $f'(0) = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \geq 1 > 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 0$ $\boxed{0,25}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	

d) *T.V de* f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $\boxed{0,5}$	$+\infty$

3.a) $D: y = 2x - 2$ *son coefficient directeur est* $\alpha = 2$

$T // D \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow 2 + (2x - 1)e^{2x} = 2$

$\Leftrightarrow (2x - 1)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(2 + e^{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \Leftrightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2+e}{2} = -2,35}$

$B\left(\frac{1}{2}, -\frac{2+e}{2}\right) \approx (0,5; -2,35)$ $\boxed{0,25}$

Equation de la tangente (T) à (C) au point A :

$T: y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow T: y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{2+e}{2}$

$\boxed{T: y = 2x - \frac{4+e}{2}}$ $\boxed{T: y = 2x - 2 - \frac{e}{2}}$ $\boxed{0,25}$

c) $x - 1 = me^{-2x}$

$\Leftrightarrow (x - 1)e^{2x} = m$

$\Leftrightarrow (x - 1)e^{2x} + 2x - 2 = 2x - 2 + m$ $\boxed{0,25}$

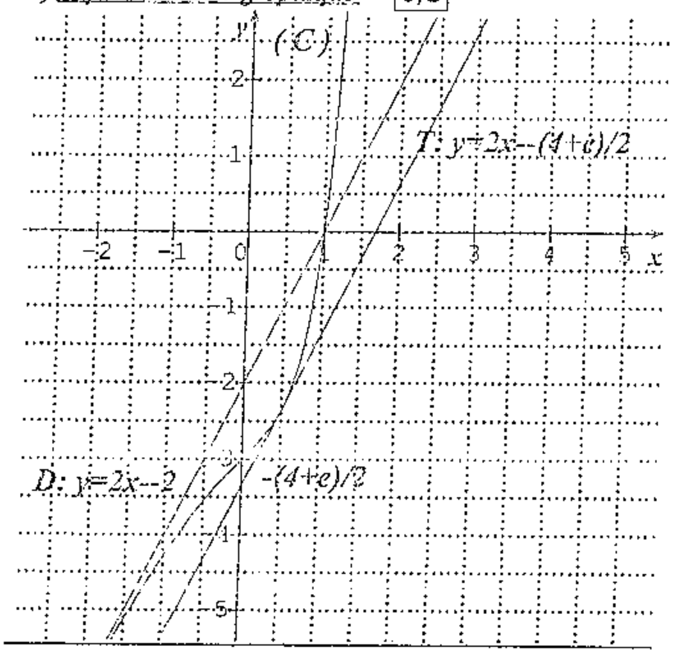
$\Leftrightarrow f(x) = 2x - 2 + m$

$\Rightarrow f(x) = 2x + m'$ avec $m' = -2 + m$

Donc le nombre de solutions de l'équation paramétrique revient au nombre de points d'intersections de la courbe (C) avec la droite $D_m : y = 2x - 2 + m$ ou $D'_m : y = 2x + m'$ avec $m' = -2 + m$ qui est parallèle à D et T.

m'		Nombre de solutions
$m' < -\frac{4+e}{2}$	$m < -\frac{e}{2}$	0
$m' = -\frac{4+e}{2}$	$m = -\frac{e}{2}$	1
$-\frac{4+e}{2} < m' < -2$	$-\frac{e}{2} < m < 0$	2
$m' \geq -2$	$m \geq 0$	1

b) <u>Représentation graphique</u> $\boxed{0,5}$



Exercice $\boxed{4}$ *(7 points)*

1. $\forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

a) $\lim_{0^+} g(x) = \lim_{0^+} \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\searrow +\infty} - \underbrace{\ln(x)}_{\searrow -\infty} \right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{0^+} g(x) = +\infty}$ $\boxed{0,25}$

$\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\searrow 0} - \underbrace{\ln(x)}_{\searrow +\infty} \right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} g(x) = -\infty}$ $\boxed{0,25}$

b) $g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$

$\Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2} < 0}$ $\boxed{0,25}$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

$\boxed{0,25}$

c) D'après le T.V de g elle est continue et change de signe une fois sur $[0, +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$ $\boxed{0,25}$

g est continue sur $[1,7; 1,8]$.

De plus

$g(1,7) = 0,05 > 0$ et $g(1,8) = -0,03 < 0$

$\Leftrightarrow \boxed{g(1,7) \times g(1,8) < 0}$

D'après le théorème de la valeur intermédiaire (V.I)

$\exists! \alpha \in]1,7; 1,8[/ g(\alpha) = 0$ $\boxed{0,25}$

b) Donc d'après le T.V de g son signe est

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

$\boxed{0,25}$

2.a) $f(x) = (x-1)(1 - \ln x)$

$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \left(\left(\underbrace{x-1}_{-1} \right) \left(\underbrace{1 - \overbrace{\ln x}^{-\infty}}_{+\infty} \right) \right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{0^+} f(x) = -\infty}$ $\boxed{0,25}$

Donc $x = 0$ est A.V à la courbe (Γ). $\boxed{0,25}$

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \left(\left(\underbrace{x-1}_{+\infty} \right) \left(\underbrace{1 - \ln x}_{-\infty} \right) \right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} f(x) = -\infty}$ $\boxed{0,25}$

$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \left(\frac{(x-1)(1-\ln x)}{x} \right)$

$= \lim_{+\infty} \left(\underbrace{1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{0}}_{1} \right) \left(\underbrace{1 - \ln x}_{-\infty} \right) = -\infty \Leftrightarrow \boxed{\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$

Donc la courbe (Γ) admet une B.P de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$. $\boxed{0,25}$

b) $f(x) = (x-1)(1 - \ln x)$

$(uv)' = u'v + v'u$

$f'(x) = (1 - \ln x) + (x-1)\left(-\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = g(x)}$ $\boxed{0,5}$

c) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$ $-\infty$

$\boxed{0,5}$

3.a) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln\alpha = \frac{1}{\alpha}}$

$f(\alpha) = (\alpha - 1)(1 - \ln\alpha) = (\alpha - 1)\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$

$f(\alpha) = (\alpha - 1)\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}}$ $\boxed{0,25}$

b) <u>L'intersection de (Γ) avec (Ox)</u> :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(1 - \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad ou \quad 1 - \ln x$

$\Leftrightarrow \quad x = 1 \quad ou \quad x = e \Leftrightarrow \quad (1,0)$ et $(e,0)$

$\Gamma \cap (Ox) = \{(1,0), (e,0)\}$ $\boxed{0,25}$

a) D'après le T.V de f sur l'intervalle $I = [\alpha, +\infty[$ h est continue et continue et strictement décroissante de $I = [\alpha, +\infty[$ vers $J =]-\infty, f(\alpha)]$

donc h réalise une bijection $\boxed{0,25}$

2017

b) Calcul de $(h^{-1})'(0)$

On a $h(e) = 0 \Leftrightarrow h^{-1}(0) = e$

On a aussi $h'(e) = \frac{1}{e} - \ln e \Rightarrow h'(e) = \frac{1}{e} - 1$

$h'(e) = \frac{1-e}{e}$

$(h^{-1})'(x_0) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x_0))}$

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(h^{-1}(0))} = \frac{1}{h'(e)} = \frac{1}{\frac{1-e}{e}} = \frac{e}{1-e}$$

$\Leftrightarrow \boxed{(h^{-1})'(0) = \frac{e}{1-e}}$ $\boxed{0,25}$

5.a) Montrons que $\int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \frac{e^2-3}{4}$

On pose $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{2}x^2 - x \end{cases}$

$\int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v$

$\int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx$

$= \left[\left(\frac{1}{2}e^2 - e\right)\ln e - \cancel{\left(\frac{1}{2}(1)^2 - 1\right)\ln 1}\right] - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x - 1\right)dx$

$= \frac{1}{2}e^2 - e - \left[\frac{1}{4}x^2 - x\right]_1^e$

$= \frac{1}{2}e^2 - e - \left[\left(\frac{1}{4}e^2 - e\right) - \left(\frac{1}{4}(1)^2 - 1\right)\right]$

$\frac{1}{2}e^2 - \cancel{e} - \frac{1}{4}e^2 + \cancel{e} - \frac{3}{4} = \frac{2e^2 - e^2 - 3}{4} = \frac{e^2-3}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{\int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \frac{e^2-3}{4}}$ $\boxed{0,25}$

b) $\mathcal{A} = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (x-1)(1-\ln x)\,dx$

$= \int_1^e [x - 1 - (x-1)\ln x]\,dx$

$= \int_1^e (x-1)\,dx - \int_1^e (x-1)\ln x\,dx$

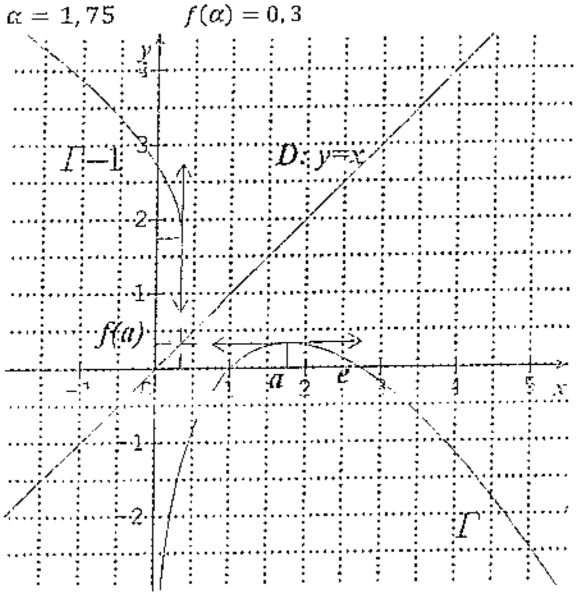
$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^e - \frac{e^2-3}{4}$

$= \left(\frac{1}{2}e^2 - e\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 - 1\right) - \frac{e^2-3}{4} = \frac{2e^2-4e+2-e^3+3}{4} =$

$\frac{e^2+4e+5}{4}$ $\boxed{\mathcal{A} = \int_1^e f(x)\,dx = \frac{e^2-4e+5}{4} = 2,23}$ $\boxed{0,5}$

c) Représentation graphique $\boxed{0,5}$

$\alpha = 1,75$ $\qquad f(\alpha) = 0,3$



JUSTIFICATION DE L'EXERCICE $\boxed{1}$

Cette partie n'est pas demandée dans l'exercice

$U_n = 3^n + n - 1$; $V_n = U_{n+1} - U_n$ et $W_n = \ln\left(\frac{-1+V_n}{2}\right)$

1. $U_1 = 3^1 + 1 - 1 \Leftrightarrow U_1 = 3$

$U_2 = 3^2 + 2 - 1 \Leftrightarrow U_2 = 10$

$U_3 = 3^3 + 3 - 1 \Leftrightarrow U_3 = 29$

$U_2 - U_1 = 10 - 3 = 7 \Leftrightarrow \boxed{U_2 - U_1 = 7}$

$U_3 - U_2 = 29 - 10 = 19 \Leftrightarrow \boxed{U_3 - U_2 = 19}$

$\boxed{U_3 - U_2 \neq U_2 - U_1}$ Donc (U_n) n'est pas S.A

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{10}{7}$ et $\frac{U_3}{U_2} = \frac{29}{10}$

$\boxed{\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}}$ Donc (U_n) n'est pas S.G

Donc (U_n) n'est ni S.A ni S.G $\boxed{\text{Réponse C}}$

2. $\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty}\left(\underbrace{3^n}_{+\infty} + \underbrace{n-1}_{+\infty}\right) = +\infty$

Donc (U_n) est divergente $\boxed{\text{Réponse B}}$

3. On pose :

$a_n = 3^n$ c'est une S.G de raison $q = 3$ et de premier terme $a_0 = 1$

$b_n = n - 1$ c'est une S.A de raison $r = 1$ et de premier terme $b_0 = -1$

$A_n = a_0 + a_1 + \cdots a_n$

$$\Leftrightarrow A_n = a_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1\,\frac{3^{n+1}-1}{3-1} \Leftrightarrow \boxed{A_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}}$$

$B_n = b_0 + b_1 + \cdots b_n$

$B_n = \frac{n+1}{2}(b_0 + b_n) = \frac{n+1}{2}(-1 + n - 1)$

$\Leftrightarrow \boxed{B_n = \frac{(n+1)(n-2)}{2}}$

$U_n = 3^n + n - 1 \Leftrightarrow U_n = a_n + b_n$

On a $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$$+\begin{cases} U_0 = a_0 + b_0 \\ U_1 = a_1 + b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ U_n = a_n + b_n \end{cases}$$

$S_n = A_n + B_n \Leftrightarrow \boxed{S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}}$

$\boxed{\text{Réponse A}}$

4.

$V_n = U_{n+1} - U_n = 3^{n+1} + (n+1) - 1 - (3^n + n - 1)$

$= 3 \times 3^n + \cancel{n} + \cancel{1} - \cancel{1} - 3^n - \cancel{n} + 1 = (3-1)\times 3^n + 1$

$\boxed{V_n = 2 \times 3^n + 1}$ $\boxed{\text{Réponse A}}$

5. $V_n \geq 2019 \Leftrightarrow 2 \times 3^n + 1 \geq 2019 \Leftrightarrow 3^n \geq 1009$

$\Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln(1009) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1009)}{\ln(3)} = 6,29 \Leftrightarrow n \geq 7$

Le plus petit entier est $\boxed{n_0 = 7}$ $\boxed{\text{Réponse B}}$

$W_n = \ln\left(\frac{-1+V_n}{2}\right) = \ln\left(\frac{-1+2\times3^n+1}{2}\right) = \ln(3^n)$

$\Leftrightarrow W_n = n\ln(3)$ c'est une S.A de raison $r = \ln 3$ et de premier $W_0 = 0$ donc $T_n = W_0 + W_1 + \cdots W_n$

$T_n = \frac{n+1}{2}(W_0 + W_n) = \frac{n+1}{2}(0 + n\ln)$

$\Leftrightarrow \boxed{T_n = \frac{n^2+n}{2}\ln 3}$ $\boxed{\text{Réponse C}}$

9-18