RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 201 4 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte 8 questions indépendantes. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule correcte. Un élève répond au hasard à chaque question du QCM. On note X le nombre de réponses correctes qu'il a données. On considère les événements suivants :

A : L'élève a toutes les réponses correctes.
B : L'élève n'a aucune réponse correcte.
C : L'élève a au moins une réponse correcte.
D : L'élève a exactement deux réponses correctes.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble de valeurs de X est :	$\{0,1,2,...,8\}$	$\{0,1,...,4\}$	$\{1,2,...,8\}$
2	La probabilité de l'événement A est :	$\frac{1}{4}\times 8$	$\left(\frac{1}{4}\right)^8$	$\left(\frac{1}{8}\right)^8$
3	La probabilité de l'événement B est :	$1-\left(\frac{1}{4}\right)^8$	$\left(\frac{3}{4}\right)^8$	$1-\left(\frac{7}{8}\right)^8$
4	La probabilité de l'événement C est :	$1-\left(\frac{1}{4}\right)^8$	$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^7$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^8$
5	La probabilité de l'événement D est :	$C_8^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^6$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^6$
6	Le nombre de réponses correctes de l'élève, que l'on peut espérer est :	8	6	2

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère les nombres : $z_1=\frac{-1+7i}{3+4i}$, $z_2=(1+i)^2$ **et** $z_3=\frac{4-8i}{1+3i}$.

a) Donner la forme algébrique de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

b) Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

2.a) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+i$, $z_B=2i$ et $z_C=-2-2i$.

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

c) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z tel que : $\left|\frac{z+2+2i}{z-2i}\right|=1$.

d) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Placer D.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+2z+10=0$.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2+2x+1)e^x$

Soit C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que la courbe C admet deux tangentes horizontales que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variation f.

3) Déterminer l'intersection de C avec les axes des coordonnées puis construire C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 et calculer $(g^{-1})'(1)$.

5.a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$.

Exercice 4 (7 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2-x-\ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $1,55\le\alpha\le1,56$

c) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(1-\frac{1}{x})(1-\ln x)$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2.a) Calculer la dérivée $f'(x)$. Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ **et donner une valeur approchée de** $f(\alpha)$ **à** 10^{-1} **près.**

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Tracer (C).

4.a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $I=\int_1^x \ln t\,dt$ **.**

b) En remarquant que $f(x)=1-\ln x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\ln x$ **, donner une primitive F de f sur** $[1;+\infty[$ **.**

c) Calculer l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ **et** $x=e$ **.**

Fin

Corrigé baccalauréat 2014 session complémentaire

Exercice 1 :

Question N°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	B	C	A	C

Exercice 2 :

1° a) $z_1=\dfrac{-1+7i}{3+4i}=\dfrac{(-1+7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{25+25i}{25}=1+i$.

$z_2=(1+i)^2=1+2i-1=2i$.

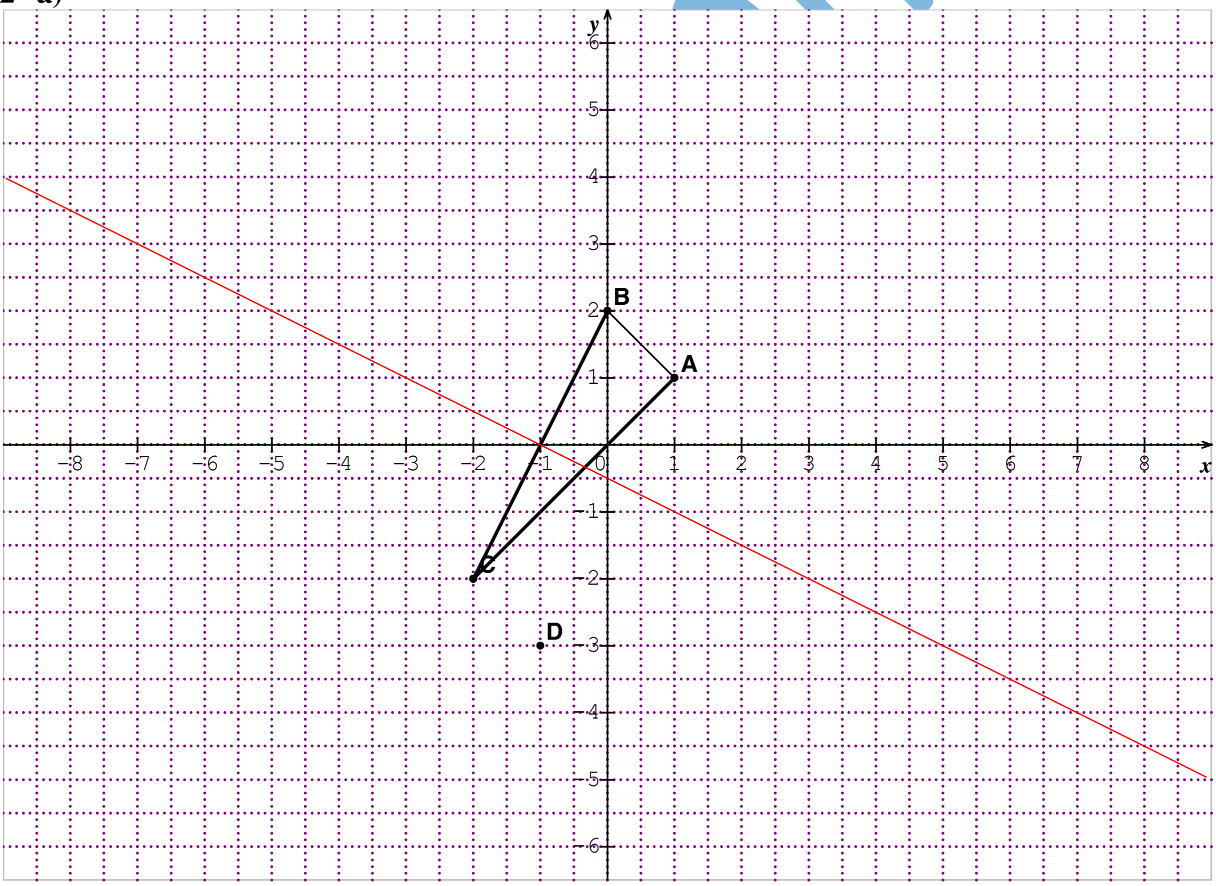
$z_3=\dfrac{4-8i}{1+3i}=\dfrac{(4-8i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{-20-20i}{10}=-2-2i$.

b) $z_1=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$z_2=2(0+i)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

$z_3=2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$.

2° a)



b) On a : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2i-1-i}{-2-2i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{-2(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{-4} = -\frac{1}{2}i$;

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle ABC est rectangle en A .

c) $M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{|z-(-2-2i)|}{|z-2i|} = \frac{MC}{MB} = 1$. L'ensemble est la médiatrice du segment $[BC]$.

d) ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$
$z_D = -2-2i-2i+1+i = -1-3i$.

3° 1° Résolution de : $z^2+2z+10=0$. $\Delta' = (1)^2 - 1\times 10 = -9 = (3i)^2$; $z_1 = -1+3i$ et $z_2 = -1-3i$.

Exercice 3 :

La fonction f est définie sur ℝ par : $f(x) = (x^2+2x+1)e^x$.

1° a) Écrivons $f(x) = x^2e^x + 2xe^x + e^x$. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (Limites remarquables).

On peut écrire $x^2e^x = \left(xe^{\frac{x}{2}}\right)^2$. En posant $t = \frac{x}{2}$, on trouve $x^2e^x = (2te^t)^2$ ($x\to-\infty \Leftrightarrow t\to-\infty$). Il vient : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \left(2\lim\limits_{t\to-\infty} te^t\right)^2 = 0$; soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La droi te d'équation : $y=0$ est une asymptote horizontale à (C), en $-\infty$.

b) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On peut écrire $\frac{f(x)}{x} = \left(x+2+\frac{1}{x}\right)e^x$ et
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. On en déduit que la branche infinie en $+\infty$ est de direction (Oy).

2° a) $f'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x+1)e^x = (x^2+4x+3)e^x$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$
$x^2+4x+3 = 0 \Leftrightarrow (x=-3 \text{ ou } x=-1)$

(C) admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses $x=-3$ et $x=-1$ d'équations respectives : $y = \frac{4}{e^3}$ et $y=0$.

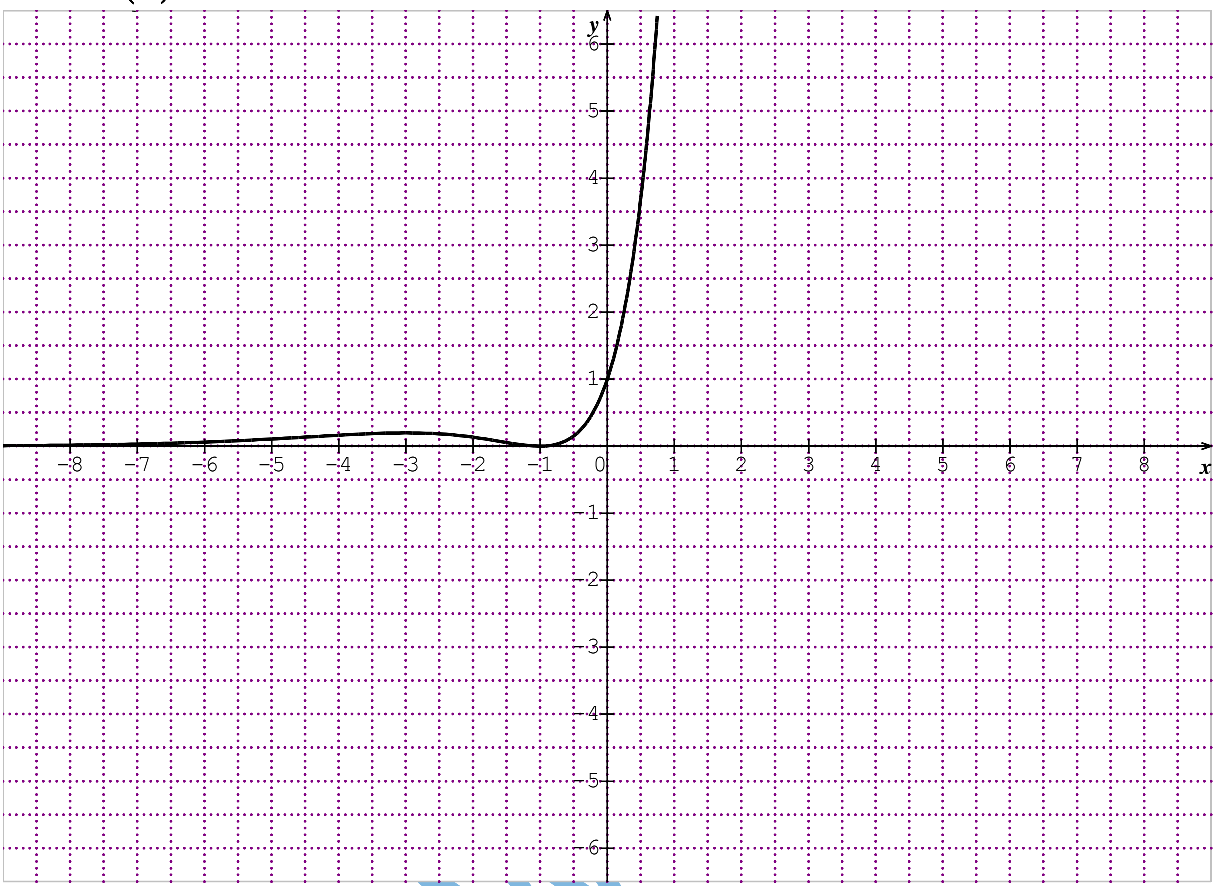
b) Tableau de variation de f .

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↗	$\frac{4}{e^3}$	↘	0	↗	$+\infty$

3°) $f(0)=1$ donc $(C)\cap(y'Oy)=\{A(0,1)\}$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ donc $(C)\cap(x'Ox)=\{B(-1,0)\}$.

Tracé de (C).



4° a) La fonction g est continue et strictement croissante de $I=[0,+\infty[$ sur $J=[1,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de I sur J.

b) On a : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=3x+1$; $g(0)=1 \Leftrightarrow g^{-1}(1)=0$ donc $(g^{-1})'(1)=\dfrac{1}{g'(0)}=\dfrac{1}{3}$.

5° a) Soit $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ telle que $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$. En identifiant avec l'expression de $f(x)$, on trouve : $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=2 \\ b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$. Donc $F(x)=(x^2+1)e^x$.

b) L'aire en unités d'aire est : $A=\int_{-1}^{0} f(x)dx=[F(x)]_{-1}^{0}=F(0)-F(-1)=1$.

Exercice 4 :

Partie A : g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x)=2-x-\ln x$

1° a) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}(2-x)=2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to 0^+} g(x)=+\infty$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = -1 - \frac{1}{x} < 0$

.

x		0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$		$+\infty$	$-\infty$

2° a) La fonction g est continue et strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $J = \mathbb{R}$.

b) On a $0 \in \mathbb{R}$, il existe α unique de $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $g(1{,}55) \times g(1{,}56) < 0$.

c) Le signe de $g(x)$ est :

x		0		α		$+\infty$
$g(x)$			$+$	0	$-$	

Partie B

f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(1 - \ln x)$

1° a) On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to 0^+} f(x) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = (1) \times (-\infty) = -\infty$.

On a : $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = (1) \times (0) = 0$.

b) La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale.

La branche infinie, en $+\infty$, est de direction (Ox).

2° a) $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2 - x - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) On a : $f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(1 - \ln \alpha)$; Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha$. Par suite

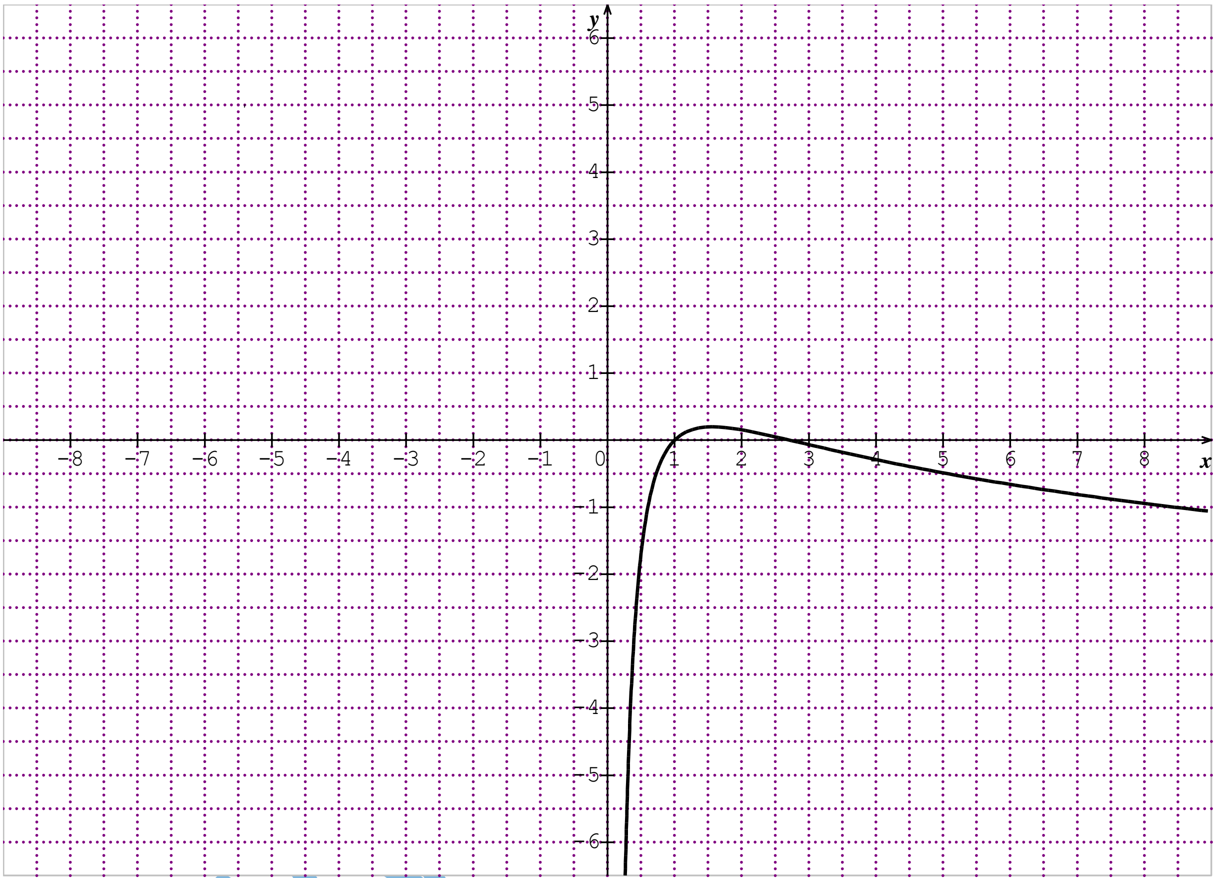
$f(\alpha) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)(1 - 2 + \alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.

c) Le TV de f :

x		0 $\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha \qquad\qquad\qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$		$+ \qquad\quad 0 \qquad\quad -$
$f(x)$		$-\infty \nearrow f(\alpha) \searrow -\infty$

3° On résout l'équation $f(x)=0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)=0 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=e)$.

$(C)\cap(Ox)=\{A(1,0);B(e,0)\}$



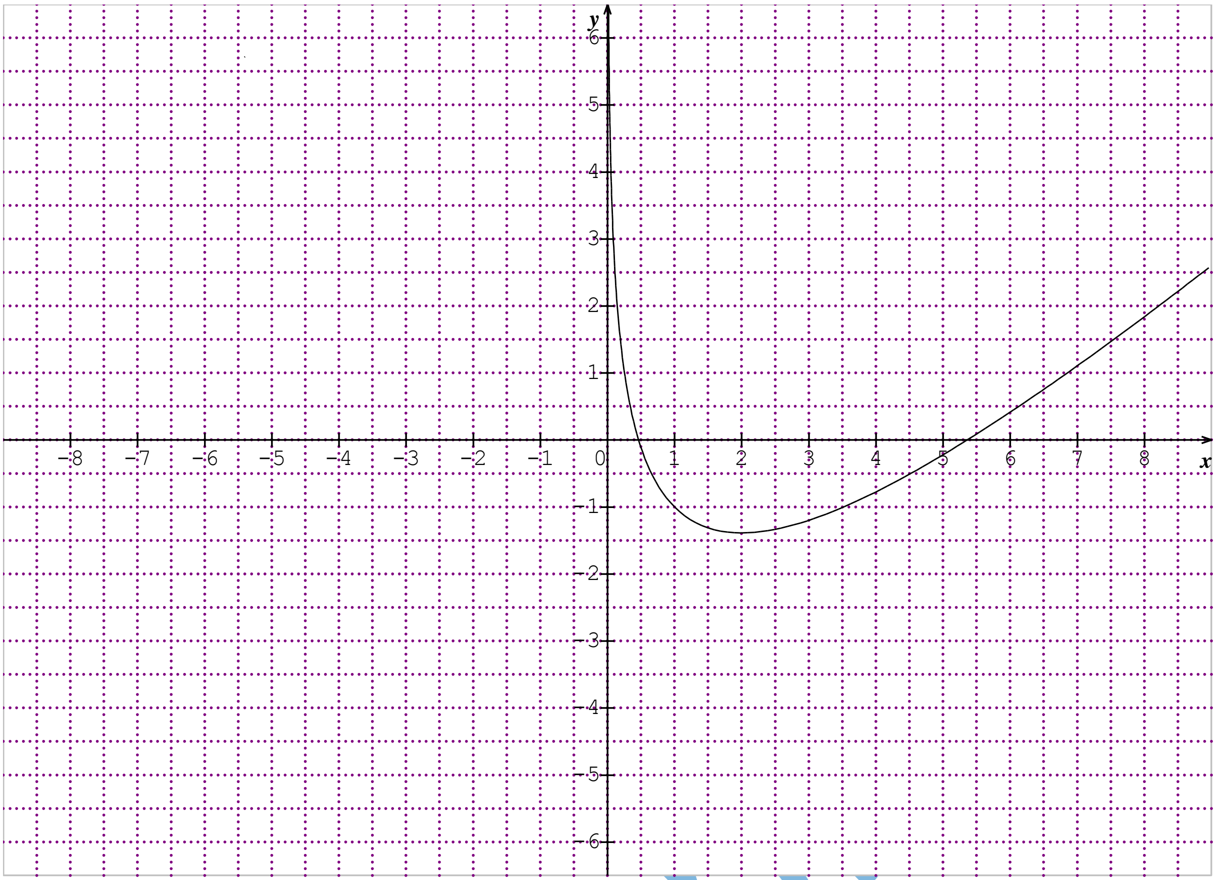
4° a) Soit $\int_1^x \ln t\,dt$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=\ln t \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\frac{1}{t} \end{cases}$. $\int_1^x \ln t\,dt=[t\ln t]_1^x-\int_1^x dt = x\ln x-[t]_1^x = x\ln x - x+1$

b) Une primitive de f est $F(x)=\int_1^x\left(1-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\ln t\right)dt = 2x - x\ln x - \ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

c) L'aire demandée est : $S=\int_1^e f(x)dx=[F(x)]=F(e)-f(1)$.

Donc $S = 2e-e-1+\frac{1}{2}-2=e-\frac{5}{2}$ ua



b) L'équation $2x-2-m-2\ln x=0 \Leftrightarrow x-2-2\ln x=-x+m \Leftrightarrow f(x)=-x+m$. Toute solution de l'équation est l'abscisse d'un point commun à (C) et la droite $D_m : y=-x+m$.

Valeurs de m	Nombre de solutions
$m<0$	0
$m=0$	1 une solution double
$m>0$	2

7° a) Soit $\int_1^2 \ln x dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_1^2 \ln x dx=[x\ln x]_1^2-\int_1^2 dx=2\ln 2-[x]_1^2=2\ln 2-1$

b) L'aire demandée est $A=-\int_1^2 f(t)dt=-\int_1^2 (t-2-2\ln t)dt \Leftrightarrow$

$A=-\left[\dfrac{1}{2}(t-2)^2\right]_1^2+2\int_1^2 \ln x dx=\dfrac{1}{2}+2(2\ln 2-1)=-\dfrac{3}{2}+4\ln 2$ ua.

Exercice 4:

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=xe^x-1$

1° a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$, limite remarquable, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$. Aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

b) $g'(x)=1\times e^x+x\times e^x-0=(1+x)e^x$. $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

2° a) L'expression $g(x)$ est strictement négative sur $]-\infty,-1]$ tandis que g réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $\left[-1-\frac{1}{e},+\infty\right[$, donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α. Comme $g(0.5)\times g(0.6)<0$, alors $0.5<\alpha<0.6$.

b) D'après le TV de g on a : $g(]-\infty,\alpha])=\left[-1-\frac{1}{e},0\right]$ donc, si $x\le\alpha$ alors $g(x)\le 0$ et $g([\alpha,+\infty[)=[0,+\infty[$ donc, si $x\ge\alpha$ alors $g(x)\ge 0$.

3° La fonction f est définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{e^x-x}{x+1}$

a) On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-}(e^x-x)=1-\frac{1}{e}>0\\ \lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)=0^-\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$; On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+}(e^x-x)=1-\frac{1}{e}>0\\ \lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)=0^+\end{cases}$ donc

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ ce qui veut dire que la droite d'équation : $x=-1$ est une asymptote verticale

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x+1}-1+\frac{1}{x+1}\right)=-1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=0$ ce qui s'interprète par le fait que la droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote horizontale en $-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\times\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)=1$.

On peut écrire $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^x}{x^2}\times\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)$. Or $\frac{e^x}{x^2}=\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}{4\times\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2$. On pose $t=\frac{x}{2}$ alors $(x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\times\left(\frac{e^t}{t}\right)^2\times\frac{2t}{2t+1}-\frac{1}{2t+1}\right)=+\infty$.

On en déduit que la branche infinie en $+\infty$ est de direction (Oy).

b) $f'(x)=\dfrac{(e^x-1)(x+1)-1\times(e^x-x)}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x+e^x-x-1-e^x+x}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x-1}{(x+1)^2}$ ou encore $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

c) Tableau de variation de f .

d) On a : $f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha-\alpha}{\alpha+1}$; Or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha-1=0 \Leftrightarrow e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$. Par suite $f(\alpha)=\dfrac{\frac{1}{\alpha}-\alpha}{\alpha+1}=\dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^2+\alpha}$.

4° Tracé de la courbe