République Islamique de Mauritanie Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif Direction des Examens et des Concours	BACCALAUREAT 2023 Session Normale Epreuve : MATHEMATIQUES	Séries : Sciences Naturelles & TSGE Coefficient : 6& 4 Durée : 4h

Exercice 1 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = e^{\frac{n}{2}+1}$ et soit $v_n = \ln\left[(u_n)^2\right]$.

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de u_2 est égale à	e	$e^{\frac{3}{2}}$	e^2	0,5pt
2	La suite (u_n) est	géométrique	arithmétique	Convergente	0,5pt
3	Le terme général de (v_n) est	$v_n = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$	$v_n = n+2$	$v_n = \frac{n}{2}+1+\ln 2$	0,5pt
4	La suite (u_n) est	Croissante	Décroissante	Non monotone	0,5pt
5	La somme $v_0 + v_1 + \cdots + v_n =$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{(n+1)(n+4)}{2}$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	0,5pt
6	Le produit $u_{2021} \times u_{2022} \times u_{2023} =$	e^{2023}	$e^{\frac{6069}{2}}$	e^{3036}	0,5pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (3 points)

Selon des statistiques publiées en 2013 par l'ONS 48% de la population mauritanienne se trouve dans le milieu urbain et 52% dans le milieu rural. D'autre part selon l'Enquête Démographique et de Santé en Mauritanie (EDSM) 2019-2021 publié en février 2022 par l'ANSADE (en collaboration avec le Ministère de la santé), le pourcentage de possession de moustiquaires imprégnées d'insecticides est 41 % dans le milieu rural contre 23 % dans le milieu urbain.

NB : l'ONS est l'office national des statistiques, il s'appelle actuellement ANSAD (Agence Nationale de la Statistique et de l'Analyse Démographique et Economique)

On choisit, au hasard, un mauritanien. On suppose que le taux d'urbanisation n'a pas évolué. On note A l'évènement « l'individu choisi est du milieu urbain » et B l'évènement « l'individu choisi possède une moustiquaire imprégnée d'insecticide ».

On désigne par $P_A(B)$ la probabilité de réaliser B sachant que A est réalisé.

1° Calculer $P(A)$ et vérifier que $P_A(B) = 0{,}23$. 1,5pt

2° En déduire les valeurs de $P(A \cap B)$ et $P(B)$ puis calculer $P_B(A)$ 1,5pt

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x - 1)e^{-x} + 1$.

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement. 0,75pt

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire que Γ admet en $+\infty$ une asymptote (Δ) à préciser. 0,75pt

c) Déterminer le signe de $(x^2 - x - 1)$ sur $\mathbb{R}$. En déduire la position relative de (Δ) et Γ. 0,5pt

2° a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x(3-x)e^{-x}$ puis dresser le tableau de variations de f. 0,75pt

b) Construire (Δ) et Γ dans le repère précédent. 0,5pt

3° a) Montrer que la fonction f vérifie l'équation différentielle E : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x} + 1$ 0,25pt

b) En déduire une primitive de f puis calculer l'aire A du domaine délimité par la courbe Γ, l'asymptote (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. 0,5pt

Exercice 4 : (5 points)

1° On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par : $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + 7z - 4 - 7i$.

a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(2+4i)^2$. 0,5pt

b) Calculer $P(i)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$. 0,5pt

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. 0,5pt

2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1-2i$, $z_B = i$ et $z_C = 3+2i$. 0,75p

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. 0,25p

c) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre $\dfrac{z_C - i}{z_A - i}$. En déduire la nature de ABC. 0,5pt

3° a) Calculer l'affixe z_I du point I milieu de $[AB]$ et l'écrire sous forme exponentielle. 0,5pt

b) Déterminer le plus petit entier n, tel que $2023 \times |z_I^n| \leq 1$. 0,25p

4° a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M, d'affixe z, tels que $|z-1+2i| = |z-3-2i|$. 0,5pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M, d'affixe z, tels que $\arg\left(\dfrac{z-3-2i}{z-1+2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. 0,5pt

c) Vérifier que le point D appartient à chacun des deux ensembles Γ_1 et Γ_2. 0,25p

Exercice 5 : (5 points)

I. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 4 + 3\ln x$.

1°a) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$. 0,5pt

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g. 0,5pt

2°a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,6 < \alpha < 1,7$. 0,25p

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$. 0,25p

II. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{1-3\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat. 0,5pt

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - x + 2)$. En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$. 0,75p

c) Etudier la position relative de (C) et (D). 0,25p

2° a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où g est la fonction définie dans la partie I. 0,5pt

b) Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2 - 2\alpha - 3}{\alpha}$ puis dresser le tableau de variation de f. 0,25p

3° Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]0,\alpha]$.

a) Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. 0,5pt

b) Dresser le tableau de variation de la réciproque h^{-1} de h. 0,25p

4° Construire (C) et (C') et (D) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, ((C') étant la courbe de h^{-1}). 0,5pt

Fin.

CORRIGE MODELE

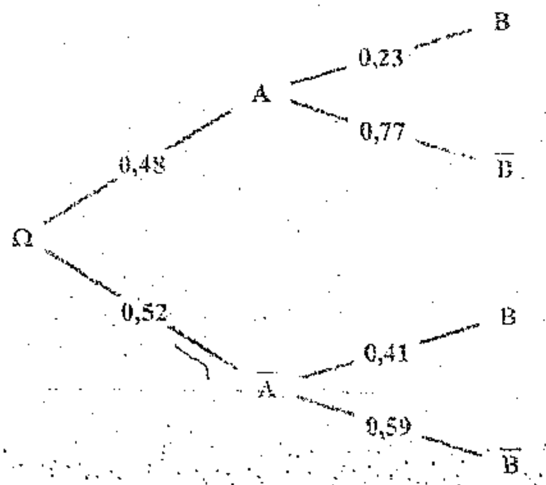
Exercice 1 (3 points)

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	C	A	B	A	B	C

$\boxed{0,5\times 6}$

Exercice 2(3 points)

On peut représenter la situation par l'arbre ci-dessous :



1° Selon l'étude, 48% de la population se trouve dans le milieu urbain donc $P(A)=\dfrac{48}{100}=0,48$

Et 23 % de la population du milieu urbain possède une M.I.I. donc $P_A(B)=\dfrac{23}{100}=0,23$. $\boxed{1,5\text{ pt}}$

2° On a

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=0,48\times 0,23=0,1104$

De plus d'après la formule de probabilités totales, on a : $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})$

$P(B\cap\overline{A})=P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=0,52\times 0,41=0,2132$

$=0,2132$

Donc $P(B)=0,1104+0,2132=0,3236$

En fin, on a : $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,1104}{0,3236}=0,3411$.

$\boxed{1,5\text{ pt}}$

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-x-1)e^{-x}+1$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement.

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty\end{cases}$ alors Par produit

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x^2-x-1)e^{-x}+1\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2-x-1)e^{-x}+1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1-\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{1}{e^x}$

, or $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty,\ et\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\end{cases}$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interprétation graphique: la courbe Γ admet une BP de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$ $\boxed{0,75\text{ pt}}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. En déduire que Γ admet en $+\infty$ une asymptote (Δ) à préciser.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x-1)e^{-x}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x-1}{e^x}\right)+1$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)+1=0-0-0+1=1$

Donc la courbe Γ admet une A.H (Δ) d'équation $y=1$, au voisinage de $+\infty$. $\boxed{0,75\text{ pt}}$

c) Déterminer le signe de (x^2-x-1) sur $\mathbb{R}$. En déduire la position relative de (Δ) et Γ.

Les solutions de l'équation $x^2-x-1=0$ sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-x-1		+	0	−	0	+	

Position relative de Γ et (Δ) : on a $f(x)-y=\left(x^2-x-1\right)e^{-x}$, or $\forall x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0$ on en déduit le tableau de P.R suivant : $\boxed{0,5\text{ pt}}$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f(x)-y$		+	0	−	0	+	
P. R.		$\Gamma/(\Delta)$	$\cap$	$(\Delta)/\Gamma$	$\cap$	$\Gamma/(\Delta)$	

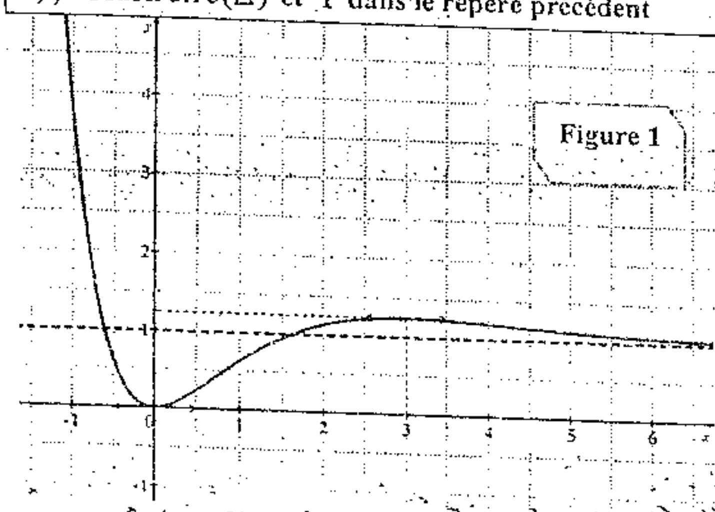
2° a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x(3-x)e^{-x}$ puis dresser le tableau de variations de f.

Calcul de la dérivée : la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (2x-1)e^{-x} - e^{-x}(x^2-x-1) + 0 = (-x^2+3x)e^{-x} = x(3-x)e^{-x}$$ $\boxed{0{,}75\text{ pt}}$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{5}{e^3}+1$	↘	1

b) Construire (Δ) et Γ dans le repère précédent



$\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

3° a) Montrer que la fonction f vérifie l'équation différentielle E : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x} + 1$

$f'(x) = (3x - x^2)e^{-x}$ et $f''(x) = (x^2 - 5x + 3)e^{-x}$ alors

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = (x^2-5x+3)e^{-x} + 2(-x^2+3x)e^{-x} + (x^2-x-1)e^{-x} + 1 = 2e^{-x} + 1$

et par conséquent la fonction f vérifie l'équation différentielle E. $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$

b) En déduire une primitive de f puis calculer l'aire A du domaine délimité par la courbe Γ, l'asymptote (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Soit F est une primitive de f. Puisque

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 2e^{-x} + 1$ alors

$f'(x) + 2f(x) + F(x) = -2e^{-x} + x$ [illegible]

$F(x) = -f'(x) - 2f(x) - 2e^{-x} + x = -(x^2+x)e^{-x} + x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Du fait que la courbe de f est située en dessous de la droite (Δ) dans l'intervalle $[0;1]$, l'aire A du domaine délimité par la courbe Γ, l'asymptote (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est :

$$A = -\int_0^1 (f(x)-1)dx = [-F(x)+x]_0^1 = \left[(x^2+x)e^{-x}\right]_0^1 = 2$$

Donc $\boxed{A = \frac{2}{e}\text{u.a}}$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

Exercice 4(5 points)

1° On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par :
$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + 7z - 4 - 7i$.
1° a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(2+4i)^2$

$(2+4i)^2 = 2^2 + 2\times2\times4i + (4i)^2 = 4 + 16i - 16 = -12 + 16$

$\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

b) Calculer $P(i)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z-i)(z^2+az+b)$.

$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + 7z - 4 - 7i$

$\Rightarrow P(z) = i^3 - (4+i)i^2 + 7i - 4 - 7i = -i + 4 + i + 7i - 4 - 7i =$

En utilisant un tableau de Horner

	1	$-4-i$	7	$-4-7i$
i		i	$-4i$	$4+7i$
	1	-4	$7-4i$	0

Alors $a = -4$ et $b = 7 - 4i$

Donc $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z-i)\left(z^2 - 4z + 7 - 4i\right)$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = i$ ou $z^2 - 4z + 7 - 4i = 0$.

Pour $z^2 - 4z + 7 - 4i = 0$ on a

$\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times(7-4i) = 16 - 28 + 16i = -12 + 16i$
$= (2+4i)^2$

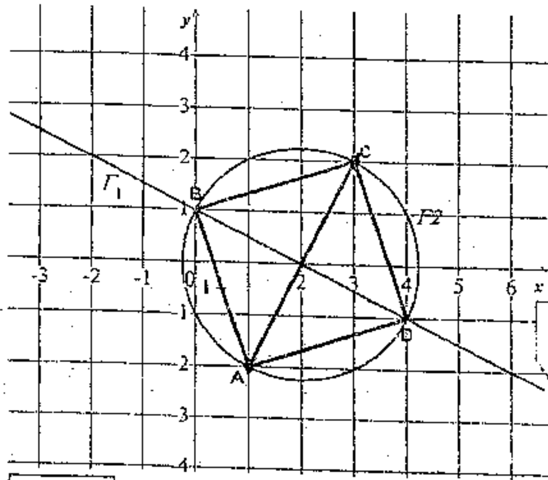
et les solutions sont :

$z' = \frac{4-2-4i}{2} = 1 - 2i$ et $z'' = \frac{4+2+4i}{2} = 3 + 2i$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $S = \{i, 1-2i, 3+2i\}$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 - 2i$, $z_B = i$ et $z_C = 3 + 2i$



$\boxed{0,75\text{ pt}}$

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B$

$\Leftrightarrow z_D = z_A + z_C - z_B = 4 - i$

Soit $\boxed{z_D = 4 - i}$ $\boxed{0,25\text{ pt}}$

c) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre $\dfrac{z_C - i}{z_A - i}$

En déduire la nature de ABC.

Nous avons

$$\frac{z_C - i}{z_A - i} = \frac{3+2i-i}{1-2i-i} = \frac{3+i}{1-3i} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

Puisque $\dfrac{z_C - i}{z_A - i} = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = i$, on en déduit que le triangle ABC est rectangle isocèle en B. $\boxed{0,5\text{ pt}}$

3° a) Calculer l'affixe z_I du point I milieu de $[AB]$ et l'écrire sous forme exponentielle.

Le point I est le milieu du segment $[AB]$

Donc $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1-2i+i}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i}$

Forme exponentielle de z_I :

On a $|z_I| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{0,5\text{ pt}}$

alors

$$z_I = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z_I = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

b) Déterminer le plus petit entier n, tel que $2023 \times |z_I^n| \leq 1$.

On a

$$z_I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow |z_I| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$2023 \times |z_I^n| \leq 1 \Leftrightarrow 2023 \times \frac{1}{\sqrt{2}^n} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}^n \geq 2023$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{2}^n\right) \geq \ln 2023 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln 2 \geq \ln 2023 \Leftrightarrow n \geq 2 \times \frac{\ln 2023}{\ln 2}$$

$\simeq 21,964$

Donc le plus petit entier n, tel que $2023 \times |z_I^n| \leq 1$ est égal à 22. $\boxed{0,25\text{ pt}}$

4° a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M, d'affixe z, tels que $|z-1+2i| = |z-3-2i|$

Soit M un point quelconque du plan

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |z-1+2i| = |z-3-2i| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_C|$

$\Leftrightarrow AM = CM \Leftrightarrow$ M décrit la médiatrice de $[AC]$

Alors l'ensemble $\Gamma_1 = \text{med}[AC]$

Construction de Γ_1 (voir figure 2). $\boxed{0,5\text{ pt}}$

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M, d'affixe z, tels que

$$\arg\left(\frac{z-3-2i}{z-1+2i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Soit M un point quelconque du plan

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-3-2i}{z-1+2i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\frac{z-z_C}{z-z_A} = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow$ M décrit le cercle de diamètre $[AC]$ privé de A et C.

Construction de Γ_2 (voir figure 2). $\boxed{0,5\text{ pt}}$

c) Vérifier que le point D appartient à chacun des deux ensembles Γ_1 et Γ_2.

L'affixe du point D est $z_D = 4 - i$

D'une part $|z_D - z_A| = |4-i-1+2i| = |3+i| = \sqrt{10}$

et $|z_D - z_C| = |4-i-3-2i| = |1-3i| = \sqrt{10}$

Donc $|z_D - z_A| = |z_D - z_C| = \sqrt{10}$, d'où $D \in \Gamma_1$

D'autre part

$$\arg\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A} = \arg\frac{4-i-3-2i}{4-i-1+2i} = \arg\frac{1-3i}{3+i} = \arg(-i)$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\pi] = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Donc le point D appartient aussi à Γ_2 et par conséquent $\boxed{D \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2}$ $\boxed{0,25\text{ pt}}$

Exercice 5 (5 points)

I. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$g(x) = x^2 - 4 + 3\ln x$

1°a) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-4) = -4$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 3\ln x = -\infty$

alors $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\ln x = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ **0,5 pt**

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.

La fonction g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$g'(x) = 2x + \dfrac{3}{x} > 0$ **0,5 pt**

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2°a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,6 < \alpha < 1,7$.

La fonction g est continue et strictement croissante $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et comme $0 \in \mathbb{R}$ (g change de signe sur $\mathbb{R}$) alors, d'après le théoréme des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α De plus

$g(1,6) \approx -0,029$, $g(1,7) \approx 0,53$ et $f(\alpha) = 0$

$g(1,6) < 0 < g(1,7)$ et g est strictement croissante alors

$1,6 < \alpha < 1,7$ **0,25 pt**

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

0,25 pt

II. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$f(x) = x - 2 + \dfrac{1-3\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat.

$\lim\limits_{x\to 0^+}(1-3\ln x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ alors

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1-3\ln x)}{x} = +\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-2) = -2$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - 2 + \dfrac{1-3\ln x}{x}\right) = +\infty$

Interprétation géométrique : la courbe (C) admet une Asymptote verticale (x=0) **0,5 pt**

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+2)$, En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-3\ln x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x} - 3\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+2) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - 2 + \dfrac{1-3\ln x}{x} - x + 2\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-3\ln x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x} - 3\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$

(C) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = x - 2$ en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+2) = 0$.

0,75 pt

c) Etudier la position relative de (C) et (D).

Pour étudier la position relative de (C) et (D), on étudie le signe de $f(x) - y$: $f(x) - y = \dfrac{1-3\ln x}{x}$; $x > 0$

et $1 - 3\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}}$

x	0		$e^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
P. R.	‖	(C)/(D)	$\cap$	(D)/(C)	

0,25 pt

2° a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où g est la fonction définie dans la partie I.

La fonction f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x de $]0;+\infty[$:

$f'(x) = 1 + \dfrac{\frac{-3}{x}\times x - 1\times(1-3\ln x)}{x^2} = 1 + \dfrac{-3-1+3\ln x}{x^2}$

$= \dfrac{x^2-4+3\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ **0,5 pt**

b) Vérifier que $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2-2\alpha-3}{\alpha}$ puis dresser le tableau de variation de f.

$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=\dfrac{4-\alpha^2}{3}$, d'autre part

$f(\alpha)=\alpha-2+\dfrac{1-3\ln\alpha}{\alpha}$, donc :

$$f(\alpha)=\alpha-2+\frac{1-3\times\dfrac{4-\alpha^2}{3}}{\alpha}=\alpha-2+\frac{1-4+\alpha^2}{\alpha}$$

$$=\frac{\alpha^2-2\alpha+1-4+\alpha^2}{\alpha}=\frac{2\alpha^2-2\alpha+3}{\alpha}$$ **0,25 pt**

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3° Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=\left]0,\alpha\right]$

a) Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

La fonction h est continue et strictement décroissante de $I=\left]0,\alpha\right]$ sur $J=h(I)=\left[f(\alpha);+\infty\right[$ alors h réalise une bijection de I sur J

x	0		α
$h'(x)$	‖	$-$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$

0,5 pt

b) Dresser le tableau de variation de la réciproque h^{-1} de h.

La fonction h et sa réciproque h^{-1} ont le même sens de variation

x	$f(\alpha)$		$+\infty$
$(h^{-1})'(x)$	‖	$-$	
$h^{-1}(x)$	α	$\searrow$	0

0,25 pt

4° Construire (C) et (C') et (D) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, ((C') étant la courbe de h^{-1}).

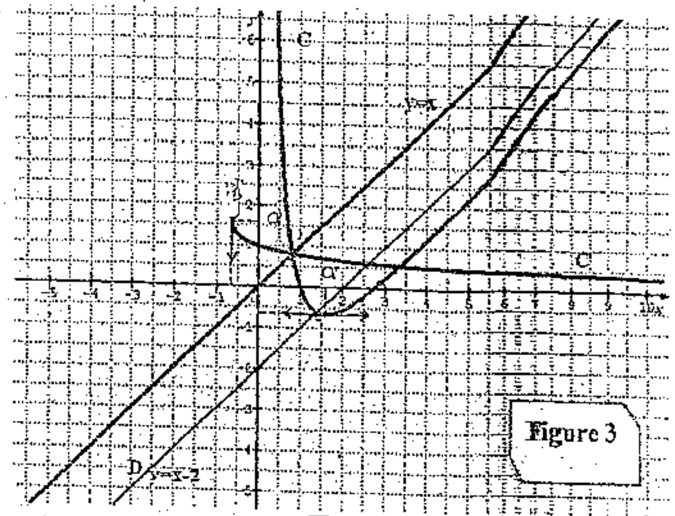


Figure 3

0,5 pt