République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction de l'Enseignement Secondaire
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Séries: C & TMGM
Sujet: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

BACCALAUREAT 2002
Session Complémentaire

Exercice1 (4points)

Soit θ un nombre reél tel que $\theta \in [0, 2\pi]$.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation: $z^2-(8\cos\theta)z+16-7\sin^2\theta=0$ et soient z_1 et z_2 ses deux solutions. **(1pt)**
2. On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ unité 1cm.

On note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 et soit Γ l'ensemble des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit $[0, 2\pi]$.

a) Déterminer une équation cartésienne de Γ. **(0,5pt)**

b) Quelle est la nature de Γ ? Donner ses éléments caractéristiques puis construire cet ensemble dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. **(0,75pt)**

3. Soit le point $A(0;1)$ et soit M un point de Γ. On considère le point G barycentre du système de points pondérés $\{(A,-3),(M,1)\}$.

a) Démontrer que lorsque M décrit Γ alors le point G décrit une ellipse Γ' dont on précisera le centre, les sommets. **(0,75pt)**

b) En déduire une équation cartésienne de Γ' dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ puis la construire. **(0,5pt)**

c) Pour $\theta=\frac{\pi}{3}$, construire les points M_1, M_2, G_1 et G_2 sur la figure précédente. **(0,5pt)**

Exercice2 (5points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral de sens direct. Soit I le milieu du segment $[BC]$ et O le milieu du segment $[AC]$ et soit B' le symétrique de B par rapport à O.

1. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; On pose $f = t\circ r$.

a) Faire une figure illustrant les données précédentes puis placer les points $f(A)=A'$ et $f(B)=C'$. **(0,75pt)**

b) Déterminer la nature du triangle ICO puis préciser $f(C)$ **(0.5pt)**

c) Caractériser l'application f, en déduire la nature du triangle IAA'. **(0.5pt)**

2. Soit s la similitude directe telle que $s(O)=A$ et $S(C)=I$.

Montrer que $s(I)=A'$ puis déterminer l'angle et le rapport de s. **(1pt)**

3. Soit Ω le centre de s.

a) Démontrer que les points Ω, I, C et A sont cocycliques et qu'il en est de même des points Ω, A, O et B'. **(0,75pt)**

b) En déduire la position du point Ω et sa construction. **(0.25pt)**

4. a) Montrer que le quadrilatère ΩOIC est un losange. **(0,5pt)**

b) Donner un programme de construction des images du losange ΩOIC par $s^2 = s\circ s$ et par $s^3 = s\circ s\circ s$ puis les construire. **(0,5pt)**

c) Quelle est la particularité de l'application s^6 ? **(0,25pt)**

Problème (11points)

I-Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction numérique f définie pour tout réel x par: $f(x)=\frac{x}{1+x+x^2}$.

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, (Unité 1cm).

1. Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe C dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(2pt)**

Discuter, graphiquement suivants les valeurs du paramètre **m** le nombre et le signe des solutions, dans IR de l'équation: $mx^2 + (m-1)x + m = 0$. **(1pt)**

II-ETUDE DES TANGENTES A UNE COURBE

Soit g la fonction numérique définie par:

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \quad , \quad x > 0 \end{cases}$$

Et soit Γ sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité 3cm.

1. a) Démontrer que Γ admet une tangente en chacun de ses points d'abscisse $x > 0$, préciser sa tangente à l'origine. **(1pt)**
   b) Dresser le tableau de variation de g. **(1pt)**
2. Soit T_a la tangente à Γ au point d'abscisse a.
   a) Démontrer que les tangentes T_a et $T_{\frac{1}{a}}$ ($a > 0$ et $a \neq 1$) coupent (Ox) au point d'abscisse $f(a) = \dfrac{a}{1+a+a^2}$. **(0,5pt)**
   b) Démontrer que toutes les tangentes à Γ coupent le segment [OB] où B est le point de coordonnées $(\frac{1}{3};0)$. (On pourra utiliser I-1.) **(0,5pt)**
   c) Démontrer que de chaque point A(m;0), du segment [OB] privé de O, passent deux tangentes distinctes à Γ. (On pourra utiliser I-2.) **(0,5pt)**
   d) Démontrer que Γ admet un point d'inflexion puis donner une équation de la tangente T à Γ en ce point et préciser le point d'intersection de cette tangente T avec l'axe des abscisses. **(0,75pt)**
3. Soit h la fonction numérique définie par: $h(t) = 1-(1+t)e^{-t}$; $t \geq 0$.
   a) Démontrer que pour tout réel $t \geq 0$ on a: $0 \leq h'(t) \leq t$ en déduire que: $0 \leq h(t) \leq \dfrac{t^2}{2}$. **(0,5pt)**
   b) Démontrer que: $\forall x > 0$, $0 \leq x - g(x) \leq \dfrac{1}{2x}$, donner une interprétation graphique de ce résultat. **(0,5pt)**
4. Construire, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les tangentes T_0, T_1, T_2, $T_{\frac{1}{2}}$ et la courbe Γ. **(0,75pt)**

III-ETUDE D'UNE SUITE

Soit f_n la fonction numérique définie sur IR par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x+x^2}$ où n est un entier naturel strictement positif et soit $(U_n)_{n\in IN^*}$ la suite numérique définie par: $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Démontrer que $(U_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante et que $\forall n \in IN^*$ on a: $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **(0,75pt)**
2. On pose: $\varphi(x) = \dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$; $x \in [0;1]$.
   a) En utilisant une intégration par partie démontrer que:
   $$\forall n \in IN^* \quad U_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\varphi(x)dx.$$ **(0,5pt)**
   b) Démontrer que: $\forall x \in [0;1]$ $\dfrac{1}{3} \leq \varphi(x) \leq 1$. **(0,25pt)**
3. Démontrer que: $\forall n \geq 1$; $\dfrac{n+3}{3(n+1)(n+2)} \leq U_n \leq \dfrac{n+5}{3(n+1)(n+2)}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$. **(0,5pt)**

Fin.