République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif
Direction des Examens et des Concours

**BACCALAUREAT 2023**
**Session Normale**
**Epreuve : MATHEMATIQUES**

Série : C & TMGM
Coefficient : 9 & 6
Durée : 4h

**Exercice 1 (3 points)**

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;-2;3)$, $B(4;1;0)$, $C(3;0;-2)$ et $D(2;1;-2)$

1. a) Calculer les produits scalaires suivants $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$. — 0.75pt
b) Justifier que B est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD). — 0.5pt
c) En déduire le volume du tétraèdre ABCD. — 0.5pt
2. a) Donner une équation cartésienne du plan (ACD). — 0.5pt
b) Calculer la distance du point B par rapport au plan (ACD) et en déduire l'aire du triangle ACD. — 0.75pt

**Exercice 2 (4 points)**

Soit ABD un triangle rectangle en B tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On définit les points : O le milieu de $[AD]$, C le symétrique de O par rapport à $(BD)$, E et F les symétriques par rapport à O des points B et C respectivement. On note également G, H, I, J et K les milieux respectifs des segments $[OB]$, $[OC]$, $[OD]$, $[OE]$ et $[OF]$.

1. Faire une figure soignée. — 1pt
2. Caractériser l'homothétie h définie par $h(A)=I$ et $h(B)=J$ — 0.5pt
3. Montrer qu'il existe une seule rotation r qui transforme A en B et G en H à caractériser — 0.75pt
4. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en F et O en E. — 0.25pt
b) Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. — 0.5pt
5. a) Montrer que $S=h\circ r$ est une similitude directe d'angle $\frac{-2\pi}{3}$. — 0.5pt
Préciser son centre et son rapport.
b) On note $S^2=S\circ S$, $S^3=S\circ S\circ S$ et $S^{n+1}=S\circ S^n$, pour tout entier $n\geq 2$.
Caractériser $S^3$ et montrer que $S^{20062023}$ est une homothétie de rapport positif — 0.5pt

**Exercice 3 (4 points)**

I. Soit m un nombre complexe non nul. Pour tout nombre complexe z, on note
$P(z)=2z^3-(4-2i+2m)z^2+(m^2+(3-i)m+2-3i)z-(m+1)(m-i)$

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2-2(1-i+m)z+(m+1)(m-i)=0$. — 0.5pt
2. Calculer $P(1)$ et en déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z)=0$ — 0.75pt

II. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A, B, C, M, $M_1$ et $M_2$ d'affixes respectives
$z_A=1$, $z_B=-i$, $z_C=1-i$, $z_M=m$, $z_{M_1}=z_1=\frac{(1-i)(1+m)}{2}$ et $z_{M_2}=z_2=\frac{(1-i)(1+im)}{2}$.

1. Préciser les transformations f et g telles que, pour tout $m\in\mathbb{C}^*$, $f(M)=M_1$ et $g(M)=M_2$ — 0.5pt
2. Montrer que $z_2=iz_1-i$ et en déduire que $M_2=R(M_1)$ où R est une rotation à préciser. — 0.5pt
3. On suppose, dans cette question, que M décrit le cercle de diamètre $[AB]$ privé de O.
a) Déterminer le lieu géométrique du point $M_1$. — 0.25pt
b) Justifier que, si $m\neq -i$ alors $\frac{z_2-m}{z_1-m}=-i\frac{m-1}{i+m}$ puis en déduire que les points M, $M_1$ et $M_2$ sont alignés. — 0.5pt

4. On considère la parabole P de directrice $(OB)$ et de foyer A.

a) Déterminer le paramètre p et le sommet S de P. **0.5pt**

b) Justifier que l'équation réduite de P s'écrit $y^2 = 2x - 1$ puis construire P. **0.25pt**

c) Donner une équation de la tangente à P au point C. **0.25pt**

<u>Exercice 4</u> (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(2x+2)}{2(x+1)}$.

On note $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm .

1. Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **0.5pt**

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f **0.75pt**

3. a) Montrer que la courbe $(C)$ admet un point d'inflexion A à préciser. **0.25pt**

b) Justifier que la tangente T, à $(C)$ en A, a pour équation $y = -\dfrac{1}{e}x - \dfrac{1}{e} + \dfrac{2}{\sqrt{e}}$ **0.25pt**

4. Déterminer l'intersection de $(C)$ avec les axes de coordonnées **0.5pt**

5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$. Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser. On note $g^{-1}$ sa réciproque. **0.25pt**

6. Construire T, $(C)$ et $(C')$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ($(C')$ étant la courbe de $g^{-1}$). **0.75pt**

7. a) Montrer que, sur l'intervalle I, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ et que $0.6 < \alpha < 0.7$ **0.5pt**

b) Calculer l'aire en $cm^2$ du domaine plan D délimité par les axes de coordonnées et les courbes $(C)$ et $(C')$ **0.25pt**

<u>Exercice 5</u> (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ et on note $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. **1pt**

b) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f **0.75pt**

2. a) Calculer $f(x) + f(-x)$. En déduire que le point $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie pour $\Gamma$ **0.5pt**

b) Montrer que I est un point d'inflexion pour $\Gamma$ et déterminer une équation de la tangente T à $\Gamma$ en I. **0.5pt**

c) Construire $\Gamma$ et sa tangente T en I dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. **0.5pt**

3. On considère la suite $(I_n)$ définie par : $I_0 = \int_0^1 f(x)dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \dfrac{e^{-nx}}{1+e^x}dx$

a) Calculer $I_0$ et montrer que $(I_n)$ est décroissante et convergente. **0.75pt**

b) Calculer $I_n + I_{n+1}$. **0.5pt**

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1-e^{-n-1}}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{2n}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (nI_n)$ **0.5pt**

**Fin.**