République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Baccalauréat 2009

Session normale

Exercice 1 (4 points)

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit l'équation E_θ : $z^2-2(1+i\sin\theta)z+2i\sin\theta=0$ avec $\theta\in[0;2\pi]$.

1.a) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, chacune des équations $E_{\frac{\pi}{2}}$ et E_π. (0,5)

b) Déterminer les solutions z' et z'' de l'équation E_θ sachant que $\mathrm{Re}\,z'\geq\mathrm{Re}\,z''$ si $\cos\theta\geq0$. (0,5)

2. Soient M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z''.

a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0;2\pi]$ alors le lieu géométrique Γ des points M' et M'' est un cercle à déterminer. (0,5)

b) Démontrer que si M' et M'' sont distincts alors la droite $(M'M'')$ a une direction fixe indépendante de θ. (0,5)

c) Construire le cercle Γ et placer les points M' et M'' pour $\theta=\frac{\pi}{6}$. (0,5)

3. Soit G le point défini par : $G=\mathrm{bar}\{(M';3),(M'';2)\}$.

a) Déterminer l'affixe z_G de G en fonction de θ. (0,5)

b) Démontrer que si θ décrit $[0;2\pi]$ alors le lieu géométrique Γ' de G est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne. (0,5)

c) Déterminer le centre et les sommets et calculer l'excentricité de l'ellipse Γ'. Construire Γ' dans le repère précédent. (0,5)

Exercice 2 (4 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=x^2\ln(x+1)$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1.a) Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. (0,5)

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0=0$ et étudier leur position relative. Interpréter graphiquement. (0,5)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,5)

2.a) Démontrer que f admet une fonction réciproque que l'on notera g. (0,5)

Soit (C') courbe représentative dans le repère précédent.

b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en trois points dont un seul est d'abscisse strictement négative α. Vérifier que : $-0,8<\alpha<-0,7$. (0,5)

c) Construire les courbes (C) et (C'). (0,5)

3.a) Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout réel x de $]-1;+\infty[$: $\frac{x^3}{x+1}=ax^2+bx+c+\frac{d}{x+1}$. (0,5)

b) En utilisant une intégration par parties, calculer en fonction de α, l'aire du domaine plan des points $M(x;y)$ délimité par les courbes (C) et (C') où $\alpha\leq x\leq0$. (0,5)

Exercice 3 (5 points)

A tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$ on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=x^ne^{-x}$.

Soit C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Etudier les variations de la fonction f_1 telle que $f_1(x)=xe^{-x}$ et représenter sa courbe C_1. (0,5)

b) Calculer l'aire du domaine délimité par C_1, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$. (0,5)

2.a) Démontrer que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes que l'on déterminera. (0,5)

b) Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+1} en fonction de la parité de n. (0,5)

3. Pour tout entier naturel non nul ($n \in IN^*$) on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Vérifier que : $I_1 = 1 - 2e^{-1}$. (0,5)

b) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$ (0,5)

c) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

4. Pour tout entier naturel non nul ($n \in IN^*$) on pose : $J_n = \frac{e}{n!} I_n$. (0,5)

a) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{(n+1)!}$. (0,5)

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$ on a : $J_n = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$. (0,5)

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} J_n$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$. (0,5)

Exercice 4 (7 points)

Dans le plan orienté on considère quatre points deux à deux distincts **A**, **B**, **C** et **D** tels que : $AC = BD$, $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Soient les points **M** milieu de $[AC]$, **N** milieu de $[BD]$ et **H** le point d'intersection (AC) et (BD). On considère les cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ (On pourra s'aider de la figure ci-jointe, on ne demande pas de la reproduire).

1.a) Démontrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme **A** en **B** et **C** en **D**. Préciser son angle et montrer que son centre **P** appartient aux cercles Γ_1 et Γ_3. (0,5)

b) Soit r_2 la rotation qui transforme **A** en **D** et **C** en **B**. Préciser son angle et montrer que son centre **Q** appartient aux cercles Γ_2 et Γ_4. (0,5)

c) Démontrer que le quadrilatère **PMQN** est un carré. (0,5)

2. Soient P_1 et P_2 les points diamétralement opposés à **P** respectivement sur les cercles Γ_1 et Γ_3. Soient Q_1 et Q_2 les points diamétralement opposés à **Q** respectivement sur les cercles Γ_2 et Γ_4.

a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme **A** en P_1 et **C** en P_2. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude. (0,5)

b) Déterminer $s_1(M)$ en déduire que les points P_1, P_2, **Q** et **H** sont alignés. (0,5)

3) On considère la similitude directe s_2 de centre **Q**, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer les images des points Q_1, Q_2 et **P** par s_2. (0,5)

b) En déduire que les points Q_1, Q_2, **P** et **H** sont alignés. (0,5)

4. On pose $\sigma = s_1 \circ s_2$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de σ. (0,5)

b) Démontrer que : $P_1P_2 = Q_1Q_2$ et $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{Q_1Q_2}) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ (0,5)

5. Soit r la rotation qui transforme P_1 en Q_1 et P_2 en Q_2.

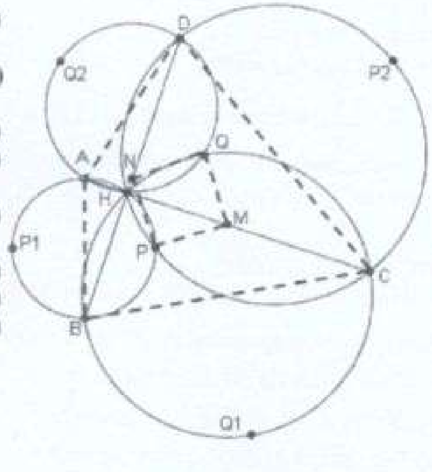
a) Reconnaître le centre de la rotation r. (0,5)

b) Démontrer la cocyclicité des points **M**, **H**, P_2 et Q_2. (0,5)

c) Quelles sont les cocyclicités semblables que l'on peut remarquer ? (0,5)

d) Démontrer que : $P_2A^2 + P_2C^2 = Q_2A^2 + Q_2C^2$. (0,5)

e) Quelles sont les relations semblables que l'on peut remarquer ? (0,5) (0,5)



Fin