بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SERVICE DES EXAMENS

Honneur – Fraternité – Justice

Séries: C & TMGM
Sujet: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

BACCALAUREAT 2001

Session Normale

Exercice1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout réel $\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$ on définit l'application f_θ du plan complexe dans lui même; qui a tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 - i\cos\theta)z - \cos\theta$.

1. Montrer que f_θ est une similitude directe dont on précisera le rapport, en fonction de θ et le centre. **(1,5pt)**

2. Soit Ω le point d'affixe i et soit α la mesure de l'angle de la similitude f_θ tel que $-\pi < \alpha \leq \pi$

a) Démontrer que si M est un point distinct de Ω, alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle et de sens indirect. **(0,5pt)**

b) Prouver que si M est un point distinct de Ω, alors $\frac{\Omega M}{\Omega M'} > \frac{1}{\sqrt{2}}$;

en déduire que : $-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0$. **(0,5pt)**

3. Soit A un point du plan distinct de Ω. Déterminer les ensembles de points suivants quand θ décrit $]0;\frac{\pi}{2}[$:

a) Γ_1 : l'ensemble des points M tels que $f_\theta(A) = M$ (Γ_1 l'ensemble des images de A). **(0,5pt)**

b) Γ_2 :l'ensemble des points M tels que $f_\theta(M) = A$ (Γ_2 l'ensemble des antécédents de A). **(0,5pt)**

4. Construire sur la même figure les ensembles Γ_1 et Γ_2 dans le cas particulier $A(1;1)$. **(0,5pt)**

Exercice2 (5points)

Dans le plan orienté, on considère un losange $ABCD$ direct de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et soient les points I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$; soit le point $P \in [OA]$ tel que le triangle PBD soit rectangle en P.
On considère les transformations suivantes:

r_1 : la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$; r_2 : la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

s_1 : la réflexion d'axe (BD) ; s_2 : la réflexion d'axe (BC) et $g = r_1 o s_2$.

1.a) Placer les données précédantes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure. (Pour une meilleure construction, prendre (AC) horizontale et $AB > 5cm$). **(0,75pt)**

b) Déterminer les images des deux points B et C par : r_1, r_2 et s_1. **(0,75pt)**

2.a) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$. **(0,5pt)**

b) Déterminer la nature de g puis donner sa forme réduite. **(0,5pt)**

3. Soit *(E)* l'ellipse de foyers **B** et **C** et passant par le point **O**, et soit $2a$, $(a > 0)$ la longueur du grand axe de *(E)*.

a) Montrer que $K \in (E)$ et que $CP = 2a$. **(0,5pt)**

b) En déduire une construction géométrique (à justifier) des deux sommets de l'axe focal de *(E)*; puis de ses deux autres sommets, construire *(E)* sur la figure précédente. **(1pt)**

4. On pose $r_1(E) = E_1$; $r_2(E) = E_2$; $s_1(E) = E_3$; $g(E) = E_4$.

a) En utilisant les questions précédantes déterminer (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4) ; quelle remarque peut-on tirer concernant ces quatre courbes? **(0,5pt)**

b) Construire E_1 sur la figure précedente; puis les points : $(K_i)_{1\le i\le 4}$ tels que :

$$r_1(K) = K_1 ; r_2(K) = K_2 ; s_1(K) = K_3 ; g(K) = K_4.$$

Quelle remarque peut-on en tirer? Interpreter. **(0,5pt)**

Problème (11 points)

On se propose dans ce problème d'étudier une famille de fonctions, et de quelques propriétés de leurs graphes.

Partie A : fonction auxiliaire

Soit g_m le trinôme défini pour tout **x** réel par : $g_m(x) = x^2 + 2x - 2m$ où **m** est un paramètre réel non nul.

1. Discuter suivant les valeurs de **m** le nombre de solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $g_m(x) = 0$. **(1pt)**

2. Dans le cas où l'équation $g_m(x) = 0$, admet deux solutions réelles distinctes x' et x'' telles que $x' < x''$; montrer que si $m < 0$, alors $-2 < x' < x'' < 0$; et que si $m > 0$, alors $x' < -2 < 0 < x''$. **(1pt)**

NB : Dans la suite du problème, on suppose que $m > 0$,

et on considère le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ***unité 1cm.***

Partie B : Etude d'une famille de fonctions

Soit la fonction numérique f_m définie par: $f_m(x) = x + m\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right|$; où **ln** désigne la fonction logarithme néperien, et soit (C_m) sa courbe representative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f_m puis calculer les limites de f_m à ses bornes. **(0,75pt)**

b) Etudier, suivant les valeurs du paramètre réel strictement positif **m**, les variations de f_m. **(0,75pt)**

2. a) Prouver que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe **I** dont on déterminera les coordonnées, et que ce point représente un centre de symétrie de toute courbe (C_m). **(0,5pt)**

b) Déterminer les asymptotes à (C_m) puis étudier la position relative de (C_m) par rapport à son asymptote oblique (Δ). **(0,75pt)**

c) Tracer la courbe (C_1) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (les points d'inflexions, et d'intersections avec les axes de coordonnées ne sont pas demandés). **(0,25pt)**

Partie C : Construction d'une courbe (C_m) à partir de (C_1)

Soit φ_m l'application du plan dans lui même qui à tout point $M(x;y)$ d'affixe z associe le point $M'(x';y')$ d'affixe z' tel que :

$z'=\frac{1}{2}[(1+m)+(1-m)i]z+\frac{1}{2}[(1-m)+(1-m)i]\bar{z}$ où $m \in IR_+^* \setminus \{1\}$ et $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

1. a) Ecrire x' et y' en fonction de x, y et du paramètre m. (0,5pt)

b) Démontrer que l'ensemble des points invariants par φ_m est la droite (Δ) d'équation $y = x$. (0,5pt)

c) Démontrer que si M n'est pas un point de (Δ) alors la droite (MM') est parallèle à une droite fixe (Δ') dont-on donnera un vecteur directeur. (0,25pt)

d) Soit M_0 le projeté de M sur (Δ) parallèlement à (Δ') ;

exprimer $\overrightarrow{M_0M'}$ en fonction de $\overrightarrow{M_0M}$. (0,5pt)

2.a) Démontrer que $\varphi_m(C_1)=(C_m)$; en déduire une construction géometrique simple de (C_m) point par point , à partir de (C_1). (1pt)

b) construire alors (C_2) dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,25pt)

Partie D: Etude de la convergence d'une suite

Soit λ un réel tel que $0< \lambda <1$ et $A(\lambda)$ l'aire du domaine délimité par (C_m); (C_{m+1}) et les droites d'équations respectives $x=\lambda$ et $x=1$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. En utilisant une intégration par partie calculer $A(\lambda)$ puis déterminer $\lim\limits_{\lambda\to 0} A(\lambda)$. (1pt)

2. On considère la fonction h définie pour tout réel stictement positif par: $h(x)=\ln(1+\frac{2}{x})$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ on considère la suite $(S_n)_{n\in IN^*}$ de terme général: $S_n=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} h(\frac{p}{n})$.

a) Détérminer le sens de variation de h sur $]0;1]$ puis prouver que pour tout entier naturel p verifiant $1\leq p\leq n-1$ on a : $\frac{1}{n}h(\frac{p+1}{n}) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x)dx \leq \frac{1}{n}h(\frac{p}{n})$. (1pt)

b) En déduire que: $S_n-\frac{1}{n}h(\frac{1}{n})\leq A(\frac{1}{n})\leq S_n$ (0.5pt)

et que: $A(\frac{1}{n})\leq S_n \leq A(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}h(\frac{1}{n})$. (0.25pt)

c) Déduire de D.1) que: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\ln(\frac{27}{4})$. (0.25pt)

Fin.