République Islamique de Mauritanie Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle Direction des Examens et des Concours	**BACCALAUREAT 2019** Session Complémentaire Epreuve : MATHEMATIQUES	Série : Sciences de la Nature Coefficient : 6 Durée : 4h

Exercice 1 (3 points)

Soit f une fonction numérique dérivable sur son domaine de définition et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On donne, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$-$	||	$+$	
f	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || -3	$\nearrow$	2

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	L'ensemble de définition de f est	$]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$	$]-\infty,3[\cup[3,+\infty[$	$]-\infty,+\infty[$	0.5 pt
2	La fonction f est	paire	impaire	ni paire, ni impaire	0.5 pt
3	La courbe (C) coupe (Ox) en	3 points	2 points	1 seul point	0.5 pt
4	Le nombre d'asymptotes de la courbe (C) est	une seule	deux	trois	0.5 pt
5	Le nombre de tangentes horizontales de (C) est	1	2	3	0.5 pt
6	Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-2$ est	1	2	3	0.5 pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse	A	C	A	C	B	C

Exercice 2 (5 points)

1° Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^3-(4-i)z^2+7z-4+7i$.

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-12-16i$ — 0.25pt

b) Calculer $P(-i)$ — 0.5pt

c) Déterminer les réels a et b tels que, $\forall z\in\mathbb{C}$, on a : $P(z)=(z+i)(z^2+az+b)$. — 0.5pt

d) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. — 0.5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1+2i$, $z_B=-i$ et $z_C=3-2i$.

a) Placer les points A, B et C. — 0.5pt

b) Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Justifier que $z_D=4+i$ — 0.25pt

c) Ecrire sous forme algébrique $\dfrac{z_D-z_C}{z_D-z_A}$ et en déduire la nature du triangle ACD. — 0.5pt

3° Pour tout nombre complexe $z\neq 1+2i$; on pose : $f(z)=\dfrac{z-3+2i}{z-1-2i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$. — 0.5pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{20}$. — 0.5pt

4° On pose $\alpha=\dfrac{z_A+z_B}{2\sqrt{2}}$ et pour tout entier naturel n, on note $u_n=|\alpha^n|$.

a) Ecrire α sous forme algébrique et vérifier que $u_n=\dfrac{1}{2^n}$; — 0.5pt

b) En déduire que (u_n) est une suite géométrique et montrer que $u_0+u_1+\dots+u_{2019}=2-\dfrac{1}{2^{2019}}$. — 0.5pt

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(-1)=0$ et $\forall x>-1$, $f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)-(x+1)$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Vérifier que $\forall x>-1$, $f(x)=(x+1)\left[(x+1)\ln(x+1)-1\right]$. 0.5 pt

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)}{x+1}=-1$ (on donne la limite suivante : $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)\ln(x+1)=0$). 0.5 pt

c) En déduire que f est continue et dérivable à droite de -1. 0.5 pt

d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement. 0.5 pt

2° a) Montrer que $\forall x>-1$, $f'(x)=2(x+1)\ln(x+1)+x$, (f' étant la dérivée de f). 0.5 pt

b) En remarquant que $\forall x>-1$, le signe de $2(x+1)\ln(x+1)$ est celui de x, montrer que f' est négative sur $]-1,0[$ et positive sur $]0,+\infty[$. 0.5 pt

c) Dresser le tableau de variation de f. 0.25

3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J, à déterminer. 0.25

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α, avec $0.7\le\alpha\le0.8$. 0.5

c) Justifier que $g'(\alpha)=\alpha+2$ et en déduire la valeur de $(g^{-1})'(0)$, où g^{-1} est la réciproque de g. 0.5

4° Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C') ; ((C') étant la courbe de g^{-1}). 0.5

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=(2x-2)(1+e^x)$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement. 1pt

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(2x-2)\right)$. 0.5

c) En déduire que la droite D d'équation $y=2x-2$ est une asymptote oblique pour Γ. Etudier la position relative entre Γ et D. 0.7

2° a) Calculer $f'(x)$ et justifier que $f''(x)=(2x+2)e^x$ 0.

b) Etudier les variations de f' et en déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)>0$. 0

c) Dresser le tableau de variation de f. 0

3° a) Déterminer le point d'intersection de Γ avec (Ox). 0

b) Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 de Γ.

c) Tracer D, T et Γ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

d) Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(2x-2)e^x=2+m$.

4° a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $I=\int_0^1(2x-2)e^x\,dx$

b) En déduire l'aire A de la partie du plan délimitée par Γ, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Fin

Solution

Exercice 1

Soit f une fonction numérique dérivable sur son domaine de définition et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	‖	
$f(x)$	$-2 \nearrow$	3	$\searrow -1 \searrow$	$-\infty$ ‖ -3	$\nearrow 2$

Compléter le tableau :

1. Domaine de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$.
2. La fonction f est ni paire, ni impaire.
3. La courbe (C) coupe (Ox) en 3 points.
4. Le nombre d'asymptote de la courbe (C) est trois telles que $x=3$, $y=-2$ en $-\infty$ et $y=2$ en $+\infty$.
5. Le nombre de tangentes horizontale de (C) est 2 car la dérivée s'annule en deux points d'abscisses respectives $x=-3$ et $x=0$.
6. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$ est 2.

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	C	A	C	B	B

Exercice 2

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - (4 - i)z^2 + 7z - 4 + 7i$.

a. Déterminer les racines carrés de $-12-16i$:

Déterminons alors les nombres complexes z tels que $z^2 = -12-16i$.

Posons $z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -12 & (1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{144 + 256} & (2) \\ 2xy = -16 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -12 & (1) \\ x^2 + y^2 = 20 & (2) \\ 2xy = -16 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

(3) $2xy = -16 \Rightarrow y = \frac{-8}{x}$. Si $x = 2$ alors $y = \frac{-8}{2} = 4$ et si $x = -2$ alors $y = \frac{-8}{-2} = 4$.

D'où les racines carrées de $-12 - 16i$ sont $2-4i$ et $-2+4i$.

b. Calculer $P(-i)$:

$P(z) = (-i)^3 - (4 - i)(-i)^2 + 7(-i) - 4 + 7i = i + 4 - i - 7i - 4 + 7i = 0$

Préparé par : Ahmed Eljeilani Med Youmbabe
22056962-41813182-33318689

c. Déterminer les réels a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}$, on a : $P(z) = (z+i)(z^2+az+b)$:

Tableau d'Hôrner :

	1	$-4+i$	7	$-4+7i$
$-i$		$-i$	$4i$	$4-7i$
	1	-4	$7+4i$	0

$\Rightarrow a = -4$ et $b = 7+4i$.

D'où $P(z) = (z+i)(z^2-4z+7+4i)$.

d. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(x) = 0$:

$P(z) = 0 \Rightarrow (z+i)(z^2-4z+7+4i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z+i=0 \\ z^2-4z+7+4i=0 \end{cases}$

•$z+i=0 \Rightarrow z_0 = -i$.

•$z^2-4z+7+4i=0$:

$\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times(7+4i) = 16-28-16i = -12-16i$

Les racines carrées de Δ sont $\Delta_1 = 2-4i$ et $\Delta_2 = -\Delta_1 = -2+4i$

$z_1 = \frac{-b+\Delta_1}{2a} = \frac{4+2-4i}{2} = 3-2i$ et $z_2 = \frac{-b-\Delta_1}{2a} = \frac{4-2+4i}{2} = 1+2i$.

Donc $S = \{-i\,;\,3-2i\,;\,1+2i\}$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = -i$ et $z_C = 3-2i$.

a. Placer les points A, B et C :(voir la figure).

b. Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Justifier que $z_D = 4+i$:

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A = 3-2i+i+1+2i = 4+i$.

c. Ecrire sous forme algébrique $\frac{z_D-z_C}{z_D-z_A}$ et en déduire la nature du triangle ACD :

$\frac{z_D-z_C}{z_D-z_A} = \frac{4+i-3+2i}{4+i-1-2i} = \frac{1+3i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i+9i-3}{9+1} = \frac{10i}{10} = i$.

Comme $\frac{z_D-z_C}{z_D-z_A} = i$ alors le triangle ACD est rectangle, isocèle en D.

3. Pour tout nombre complexe $z \neq 1+2i$; on pose $f(z) = \frac{z-3+2i}{z-1-2i}$.

a. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$:

$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3+2i}{z-1-2i}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_C}{z-z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-z_C|}{|z-z_A|} = 1 \Leftrightarrow \frac{MC}{MA} = 1 \Leftrightarrow MA=MC$.

Donc $\Gamma_1 = \text{Med}([AC]) = (BD)$.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1| = \sqrt{20}$:

$f(z)-1 \Rightarrow \frac{z-3+2i}{z-1-2i} - 1 = \frac{z-3+2i-z+1+2i}{z-1-i} = \frac{-2+4i}{z-1-2i}$

$|f(z)-1| = \sqrt{20} \Rightarrow \left|\frac{-2+4i}{z-1-2i}\right| = \sqrt{20} \Rightarrow \frac{|-2+4i|}{|z-z_A|} = \sqrt{20} \Rightarrow \frac{\sqrt{20}}{|z-z_A|} = \sqrt{20} \Rightarrow |z-z_A| = 1 \Rightarrow MA = 1$.

D'où $\Gamma_2 = C_{(A\,;\,1)}$.

4. On pose $\alpha = \frac{z_A+z_B}{2\sqrt{2}}$ et pour tout entier naturel n, on note $u_n = |\alpha^n|$.

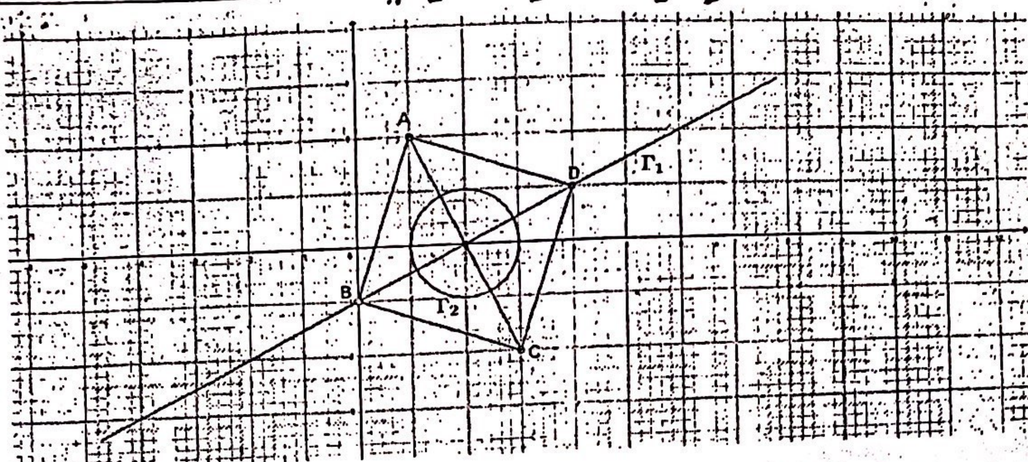
a. Ecrire α sous forme algébrique et vérifier que $u_n = \frac{1}{2^n}$:

$\alpha = \frac{z_A+z_B}{2\sqrt{2}} = \frac{1+2i-i}{2\sqrt{2}} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \Rightarrow u_n = |\alpha^n| = u_n = \left|\left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\right)^n\right| = \left|\frac{(1+i)^n}{(2\sqrt{2})^n}\right| = \frac{|(1+i)^n|}{|(2\sqrt{2})^n|} = \frac{(\sqrt{2})^n}{(2\sqrt{2})^n} = \frac{(\sqrt{2})^n}{2^n\times(\sqrt{2})^n} = \frac{1}{2^n}$

b. En déduire que (u_n) est une suite géométrique et montrer que $u_0+u_1+\dots+u_{2019} = 2 - \frac{1}{2^{2019}}$:

On a $u_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$u_0+u_1+\dots+u_{2019} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2019} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}\right) = 2 - \frac{1}{2^{2019}}$$



Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(-1)=0$ et $\forall x>-1$, $f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)-(x+1)$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Vérifier que $\forall x>-1$, $f(x)=(x+1)[(x+1)\ln(x+1)-1]$.

b. Monter que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)}{x+1}=-1$ $\Big($on donne la limite suivante $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)\ln(x+1)=0\Big)$.

c. En déduire que f est continu et dérivable à droite de -1.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

2. a. Montrer que $\forall x>-1$, $f'(x)=2(x+1)\ln(x+1)+x$, (f' étant la dérivée de f).

b. En remarquant que $\forall x>-1$, le signe de $2(x+1)\ln(x+1)$ est celui de x, montrer que f' est négatif sur $]-1,0[$ et positif sur $]0,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J, à déterminer.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α, avec $0{,}7\le\alpha\le 0{,}8$.

c. Justifie que $g'(x)=\alpha+2$ et en déduire la valeur de $(g^{-1})(0)$, où g^{-1} est la réciproque de g).

4. Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C') ; ((C') étant la courbe de g^{-1}).

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=(2x-2)(1+e^x)$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)(1+e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)\times\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)=+\infty\times(+\infty)=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-2)(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)=+\infty\times(+\infty)=+\infty.$

Donc Γ admet BP de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-2))$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2)(1+e^x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2)\times\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^x)=-\infty\times 1=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-2))=\lim\limits_{x\to-\infty}\big((2x-2)(1+e^x)-(2x-2)\big)=\lim\limits_{x\to-\infty}\big((2x-2)(1+e^x-1)\big)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(2xe^x-2e^x)=2\times 0-2\times 0=0.$

b. En déduire que la droite D d'équation $y=2x-2$ est une asymptote pour Γ. Etudier la position relative entre Γ et D : La droite $D: y=2x-2$ est une asymptote oblique pour Γ au voisinage de $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-2))=0$.

Position relative :

$f(x) - (2x-2) = (2x-2)e^x$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - (2x-2)$	$-$	0	$+$
PR	$\frac{D}{(C)}$	$D \cap (C)$	$\frac{(C)}{D}$

2. a. Calculer $f'(x)$ et justifier que $f''(x) = (2x+2)e^x$. (f' et f'' étant les respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f) :

$f'(x) = 2(1+e^x) + e^x(2x-2) = 2 + (2 + 2x - 2)e^x = 2 + 2xe^x$.

$f''(x) = 2(xe^x + e^x) = (2x+2)e^x$.

b. Etudier les variations de f' et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$2 - \frac{2}{e}$	$\nearrow$

$f(-1) = 2 - 2e^{-1} = 2 - \frac{2}{e} > 0$.

D'après le tableau de variation de f' alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 2 - \frac{2}{e} > 0$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$.

c. Dresser le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. a. Déterminer le point d'intersection de Γ avec (Ox) :

Γ coupe (Ox) au point d'abscisse x telle que $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \; \Gamma \Rightarrow (2x-2)(1+e^x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$.

b. Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 de Γ :

$T : y = f'(0)(x-0) + f(0) \Rightarrow T : y = 2(x-0) - 4 \Rightarrow T : y = 2x - 4$.

c. Tracer D , T et Γ dan le repère$(O; \vec{i}; \vec{j})$:

d. Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solution de l'équation $(2x-2)e^x = 2 + m$:

$(2x-2)e^x = 2 + m \Leftrightarrow f(x) - (2x-2) = 2 + m \Leftrightarrow f(x) = 2 + m + 2x - 2 \Leftrightarrow f(x) = 2x + m$.

m	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
Nbre de solutions		0	1	2	1	1	

4. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^1 (2x-2)e^x\,dx$:

$\left.\begin{array}{l} u'(x) = e^x \\ v(x) = 2x-2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} u(x) = e^x \\ v'(x) = 2 \end{array}$

$\Rightarrow \int_0^1 (2x-2)e^x\,dx = [(2x-2)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = [(2x-2)e^x]_0^1 - [2e^x]_0^1 = 2 - 2e + 2 = 4 - 2e.$ **l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1**

b. En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x=e est et x=e :

L'aire A du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x=e est égala à :

$A = \int_0^1 -f(x)\,dx = \int_0^1 -(2x-2)(1+e^x)\,dx = -\int_0^1 (2x-2)\,dx - \int_0^1 (2x-2)e^x\,dx = -[x^2-2x]_0^1 - (4-2e).$

$= 1 - 4 + 2e = (2e-3)(ua).$

Fin

Bonne compréhension

et

Bonne réussite