Baccalauréat 2014
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3+(1-2i)z^2+(1-2i)z-2i$.

1) Calculer $P(2i)$ est déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z)=0$ sachant que $\operatorname{Im} z_0 \geq \operatorname{Im} z_1 \geq \operatorname{Im} z_2$. **(1,5 pt)**

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. On pose $z'=f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1}$. On note M et M' les points d'affixes respectives z et z'.

a) Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (BC) est $2x+1=0$ **(0, 5 pt)**

b) Démontrer que si M décrit la droite (BC) privée de B et C, alors M' est situé sur l'axe des abscisses (On pourra remarquer que $z^2+z+1=\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$). **(0,25 pt)**

3.a) Démontrer que si $|z|=1$, alors $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$. **(0,25 pt)**

b) Vérifier que si $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in[-\pi;\pi]\setminus\left\{\dfrac{-2\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right\}$, alors $f(z)=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$. **(0,25 pt)**

4.a) Démontrer que si M décrit le cercle d'unité privé de A et C, alors M' est situé sur la courbe Γ d'équation cartésienne $x^2+y^2=(2x-1)^2$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. **(0,5 pt)**

b) Démontrer que Γ est une hyperbole. Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de Γ. Construire Γ dans le repère précédent. **(0,75 pt)**

Exercice 2 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Dresser le tableau de variation de f. **(1,5 pt)**

b) Tracer la courbe (C). **(0,5 pt)**

c)Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$. **(0,5 pt)**

d) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. **(0,5 pt)**

2) On considère la suite numérique (I_n) définie pour tout entier naturel $n\geq 1$ par $I_n=(-1)^n\displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Montrer que $I_1=-1$ **(0,5 pt)**

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $\dfrac{1}{n+1}\leq|I_n|\leq\dfrac{e}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. **(0,5 pt)**

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n\geq 1$: **(0,5 pt)**

$$I_{n+1}=(-1)^{n+1}e+(n+1)I_n.$$

d) En déduire le calcul de l'intégrale $J=\displaystyle\int_0^1\frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1}dx$. Donner la valeur de J sous la forme $ae+b$ où a et b sont des entiers relatifs. **(0,5 pt)**

Exercice 3 (5 points)

1) On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right), & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue à droite de zéro (On pourra écrire $f(x)=x\ln(x+1)-x\ln x$). **(0,5 pt)**

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique. **(0,5 pt)**

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ (On pourra poser $t=\frac{1}{x}$). Interpréter graphiquement. (0, 5 pt)

2.a) Vérifier que $f''(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$. (0, 5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0, 5 pt)

c) Construire la courbe de f. (0, 5 pt)

3) Pour tout entier naturel $n\geq 1$; on pose: $\begin{cases} f_n(x)=x^n\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right), & x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$ et $A_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (A_n). (0,25 pt)

b) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, on a $0\leq x^{n-1}f(x)\leq x^{n-1}$ où f est la fonction définie dans la question 1). (0,25 pt)

c) Justifier que $0\leq A_n\leq\dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$. (0,5 pt)

4) On pose $I_n(\alpha)=\int_\alpha^1 x^n\ln x dx$, $I_n=\lim\limits_{\alpha\to0^+} I_n(\alpha)$ et $J_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de α et de n. (0, 5 pt)

b) Montrer que $\lim\limits_{\alpha\to0^+} I_n(\alpha)=\dfrac{-1}{(n+1)^2}$. (0,25 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $J_{n+1}=\dfrac{2\ln2}{n+2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}-\dfrac{n+1}{n+2}J_n$. (0,25 pt)

Exercice 4 (6 points) (Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment).

Partie A

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O et de coté a, $(a>0)$. Soient K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[DA]$.

1) Faire une figure illustrant les données précédentes. (0,5 pt)

2) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L. Préciser le centre et un angle de r. (1 pt)

3.a) Prouver qu'il existe une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O. Déterminer le rapport et un angle de f_1. (0,75 pt)

b) Soit P le centre de la similitude f_1. Vérifier que le point P est commun aux cercles de diamètres $[AB]$ et $[OD]$ puis le préciser. Vérifier que P est aussi le point d'intersection des deux droites (BL) et (AK). (0,5 pt)

4.a) Soit f_2 la similitude directe qui transforme B en D et O en L. Préciser son angle et son rapport. (0,5 pt)

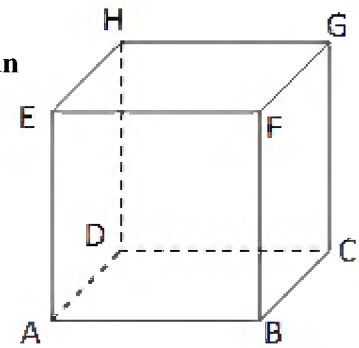
b) Montrer que le centre de la similitude f_2 est le point P : même centre de f_1. (0,5 pt)

5.a) Soit $h=f_1\circ f_2$. Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre est le rapport. En déduire deux réels β et γ tels que $P=\text{bar}\{(B,\beta);(L,\gamma)\}$. (0,5 pt)

b) Déterminer deux réels α et λ tels que $P=\text{bar}\{(A,\alpha);(K,\lambda)\}$. (0,25 pt)

Partie B

On se place maintenant dans l'espace et on construit sur le carrée précédent un cube ABCDEFGH. On note : s_1 la réflexion de plan (ABCD) ; s_2 la réflexion de plan (AEHD) ; s_3 la réflexion de plan (ABFE) et s_4 la réflexion de plan (DCGH). Soit $f=s_1\circ s_2\circ s_3\circ s_4$, $r=s_1\circ s_2$ et $t=s_3\circ s_4$.



On ne demande pas de reproduire la figure.

1) Montrer que r est un demi-tour dont on précisera l'axe. (0, 5 pt)

2) Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur. (0, 5 pt)

3) Reconnaitre et caractériser f. (0, 5 pt)

Fin.