République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
et de la Réforme du Système Educatif
Direction des Examens et des Concours

BACCALAUREAT 2022
Session Complémentaire
Epreuve de MATHEMATIQUES

Série : Mathématiques
(Classes Expérimentales)
Coefficient : 9 Durée : 4h

Exercice 1 (3 points)

Deux frères travaillent dans deux régions différentes, loin de leur maison. Le premier a quitté la maison le Dimanche 06 Mars 2022 et il retourne à la maison tous les 8 jours. Le deuxième a quitté la maison le 22 Mars 2022 (16 jours après le premier) et il retourne à la maison tous les 12 jours. A chaque retour, ils restent une matinée à la maison avant de repartir.

1.a) Déterminer la plus proche date où les deux frères vont se retrouver ensemble à la maison. **0,5pt**

b) Vérifier que c'est un vendredi. **0,25pt**

2° On considère l'équation (E) : $2x-3y=4$ où x et y sont des entiers naturels.

a) Vérifier que le couple $(5;2)$ est une solution particulière de (E). **0,5pt**

b) Résoudre (E). **1 pt**

3° Déduire le nombre de rencontres des deux frères à la maison dans la période du 3 Mars 2022 au 3 Mars 2023. Parmi ces rencontres, combien auront lieu en vendredi ? **0,75pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}(2;2;1)$, $\vec{v}(1;2;-1)$ et $\vec{n}(-3;2;2)$ et les points $A(0;0;1)$ et $B(0;1;-1)$.

1.a) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ **1pt**

b) Montrer que $-4x+3y+2z-1=0$ est une équation du plan Q passant par B et dont $(\vec{u},\vec{v})$ est une base. **0,5pt**

2° On considère les matrices $M=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ -4 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Montrer que $M\times N=I_3$ **1pt**

b) En déduire l'ensemble de solution du système $\begin{cases}-3x+2y+2z=2\\ -4x+3y+2z=1\\ 2x-y-z=-3\end{cases}$ **0,5pt**

Exercice 3 (4 points)

ABCD est un losange tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$, E et F sont les symétriques de A, respectivement, par rapport à B et D.

1.a) Faire une figure illustrant les données de l'exercice. **0.5 pt**

b) Montrer que le triangle AEF est équilatéral direct. **0.5 pt**

2° Soit f une isométrie qui transforme D en B et F en E.

a) On suppose que f est un antidéplacement. Déterminer sa nature et le caractériser. **0.5 pt**

b) On suppose que f est un déplacement. Montrer que f est une rotation (qu'on notera par la suite r) et préciser ses éléments caractéristiques. **0.5 pt**

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme A en E et F en C. **0.25pt**

b) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de s. **0.5pt**

c) Montrer que le centre I de s appartient au cercle circonscrit au triangle AEF. **0.5 pt**

d) Montrer que I appartient à la droite (AC). Placer le point I. **0.25pt**

4° Soit $h=s\circ r$ où r est la rotation définie dans la question 2°b).

a) Montrer que h est une homothétie et déterminer son rapport. **0.25pt**

b) Déduire que le centre Ω de h est le barycentre du système $\{(A,1);(E,-2)\}$. Placer Ω. **0.25pt**

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, interpréter graphiquement cette limite.	0,5pt
b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement ce résultat.	0,75pt
2.a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.	0,75pt
b) Montrer que f admet une fonction réciproque, notée f^{-1}, définie sur un intervalle à préciser.	0,25pt
c) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.	0,25pt
3.a) Montrer que la courbe (C) admet deux points d'inflexion à préciser.	0,5pt
b) Déterminer une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.	0,5pt
c) Construire T, (C) et (C'), ((C') étant la courbe représentative de f^{-1}).	0,5pt
4.a) Soit $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$. Déterminer a, b et c tels que F soit une primitive de f.	0,5pt
b) Montrer que la suite de terme général $u_n=\int_0^n f(x)dx$ est croissante puis exprimer u_n en fonction de n.	0,5pt

Exercice 5 (5 points)

1° Soit f la fonction définie sur $I=\left]0;1\right]$ par $f(x)=(1-x)^2\ln x$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.	0,5pt
b) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 et interpréter graphiquement.	0,5pt
c) Montrer que $\forall x\in I,\ f'(x)\geq 0$ puis dresser le tableau de variation de f.	0,75pt
d) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.	0,5pt
e) Tracer, dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les courbes Γ et Γ', (Γ' étant la courbe représentative de f^{-1})	0,5pt

2° Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $I=\left]0;1\right]$ par

$f_n(x)=(1-x)^n\ln x$. On pose $F_n(x)=\int_x^1 f_n(t)dt$, $x\in I$

a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de I, on a : $$F_n(x)=\frac{(1-x)^{n+1}\ln x}{n+1}+\frac{1}{n+1}\int_x^1\frac{(1-t)^{n+1}}{t}dt$$	0,75pt
b) Vérifier que $\forall t\in\left]0;1\right]$, $1+(1-t)+(1-t)^2+(1-t)^3+...+(1-t)^n=\dfrac{1-(1-t)^{n+1}}{t}$	0,5pt
c) Déduire que pour tout x de I, $\displaystyle\int_x^1\frac{(1-t)^{n+1}}{t}dt=-\ln x-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}(1-x)^{k+1}$	0,5pt
d) Déduire que pour tout x de I, $\displaystyle(n+1)F_n(x)=\left(-1+(1-x)^{n+1}\right)\ln x-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(1-x)^k}{k}$	0,5pt

Fin.