Appui aux olympiades et compétitions de Mathématiques

Séminaire de formation des professeurs du 04 au 11 janvier 2023

GEOMETRIE

Horma Hamoud **Mahfoudh Mohamed Ammou**

Sommaire

Sommaire......2
I- Trigonométrie 4
1. **Loi des sinus** 4
2. **Formule d'Al-Kashi**......4
3. **Formules d'addition :** 4

II- Géométrie du triangle 5
4. **Pythagore**......5
5. **Thalès**......5
6. **Angle inscrit** 5
7. **Tangente** 5
8. **Pôle Sud** 5
9. **Symétriques de l'orthocentre** 6
10. **Pieds de bissectrice** 6
11. **Droite d'Euler** 6
12. **Cercle d'Euler** 6
13. **Droite de Simson et droite de Steiner** 6
14. **Points de contact d'un cercle inscrit avec les côtés** 7
15. **Cercle exinscrit** 7
16. **Théorème de Ménélaus**......8
17. **Théorème de Céva** 8
18. **Théorème de Céva trigonométrique** 8
19. **Quadrilatère circonscriptible** 8
20. **Diagonales perpendiculaires**......9
21. **Puissance d'un point**......9
22. **Axe radical**......9
23. **Théorème de Miquel**......10

III- Exercices corrigés 11
Quelques conseils pour rédiger la résolution d'un problème de géométrie......11
Exercice 1 (Premier Théorème de Miquel.) 12
Exercice2 (Second Théorème de Miquel) 12
Exercice 3 13
Exercice 4 13
Exercice 5 (Point de Miquel) 15
Exercice 6 (Théorème du cube)......16
Exercice 7 (Symétriques de l'orthocentre.) 17
Exercice 8 17
Exercice 9 (Lemme d'Euclide.) 18
Exercice 10 (Théorème du pôle sud.) 18

IV- Activités 20
1. **Exercices tirés de TD proposé lors du stage olympique de Valbonne 2022 (France)** 20
   a) **TD1**......20
   b) **TD2**......20
2. **Exercices tirés des Olympiades nationales** 21
   a) **Niveau 4AS**......21
      Exercice 1 (T2-2022-4AS) 21
      Exercice 2: (T2-2021-4AS) 21
      Exercice 3: (T1-2021-4AS) 21

Exercice 4: (T3-2021-4AS) ... 21
Exercice 5 (T2-2020-4AS) ... 22
b) Niveau 7C ... 22
Exercice 6 (T2-2022-7C) ... 22
Exercice 7: (T2-2021-7C) ... 22
Exercice 8: (T1-2021-7C) ... 22
Exercice 9: (T3-2021-7C) ... 23
Exercice 10 (T1-2020-7C) ... 23
V- Corrigé des activités ... 24
1. TD1 ... 24
2. TD2 ... 26
2. Exercices des olympiades ... 29
a) Niveau 4AS ... 29
Exercice 1 (T2-2022) ... 29
Exercice 2 (T2 2021) ... 29
Exercice 3: (T1-2021-4AS) ... 30
Exercice 4 (T3 2021): ... 31
Exercice 5 (T2- 2020) ... 32
b) Niveau 7C ... 33
Exercice 6 (T2-2022-7C) ... 33
Exercice 7 (T2 - 2021-7C) ... 34
Exercice 8 (T1-2021-7C) ... 35
Exercice 9 (T3 – 2021-7C): ... 36
Exercice 10 (T1 – 2020 – 7C) ... 37

GEOMETRIE
Notions essentielles

Le contenu de ce module est fortement tiré des travaux de :
1. **Thomas Budzinski** : *Lemmes utiles en géométrie*
2**. Cécile Gachet** : *Pour débuter en géométrie : chasse aux angles et éléments de géométrie du triangle*

I- Trigonométrie

1. Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R=\frac{abc}{2A_{ABC}}$$

2. Formule d'Al-Kashi

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\alpha$$

3. Formules d'addition :

Pour tous angles α et β :

- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$
- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$
- $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$
- $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$
- $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

II- Géométrie du triangle

Dans ce module, ABC est un triangle, a, b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA et AB. Les points G, H, I et O sont respectivement le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

4. Pythagore

Théorème : Dans un triangle rectangle, le **carré de la longueur de l'hypoténuse** est égal à la **somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**.
Réciproque : Si le carré de la longueur du plus long côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.
Contraposé : Si le carré de la longueur du plus long côté d'un triangle est différente de la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle

5. Thalès

Théorème : Soient $(\mathbf{MB})$ et $(\mathbf{NC})$ deux droites sécantes en un point A. Si les droites $(\mathbf{MN})$ et $(\mathbf{BC})$ sont parallèles, alors $\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}}=\frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AC}}=\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{BC}}$.
Réciproque : Soient $(\mathbf{MB})$ et $(\mathbf{NC})$ deux droites sécantes en un points A. Si :

- Les quotients $\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}}$ **et** $\frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AC}}$ sont égaux
- Les points A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre

Alors les droites $(\mathbf{MN})$ **et** $(\mathbf{BC})$ sont parallèles.

6. Angle inscrit

Pour tout point M de (C), distinct de A et B on a : $2\widehat{\mathbf{AMB}}=\widehat{\mathbf{AOB}}$

⇨ Si M et O sont du même côté de (AB) alors $\widehat{\mathbf{AMB}}=\frac{1}{2}\widehat{\mathbf{AOB}}$

⇨ S'ils sont de part et d'autre de (AB) alors on a : $\widehat{\mathbf{AMB}}=\frac{1}{2}\widehat{\mathbf{AOB}}+180°$

7. Tangente

Pour tout point T de la tangente à (C) en A, on a : $2\widehat{\mathbf{TAB}}=\widehat{\mathbf{AOB}}$

⇨ Si T et O sont de part et d'autre de (AB) alors $\widehat{\mathbf{TAB}}=\frac{1}{2}\widehat{\mathbf{AOB}}$

⇨ S'ils sont du même coté de (AB) alors on a : $\widehat{\mathbf{TAB}}=\frac{1}{2}\widehat{\mathbf{AOB}}+180°$

8. Pôle Sud

Soit S le point où la bissectrice (AI) de $\widehat{\mathbf{CAB}}$ recoupe le cercle circonscrit à ABC. Alors S est le milieu de l'arc $\widehat{\mathbf{BC}}$ qui ne contient pas A. De plus, S est le centre du cercle circonscrit à BCI. S est généralement appelé pôle Sud du triangle ABC.

Idée de la démonstration : Chasse aux angles : on vérifie que SBC et SBI sont isocèles en S.

9. Symétriques de l'orthocentre

Les symétriques de H par rapport à (AB), (BC) et (CA) sont sur (C).

Idée de la démonstration : Chasse aux angles.

10. Pieds de bissectrice

Soit D le point où la bissectrice (AI) coupe [BC]. On a $\frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{CD}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}}$

11. Droite d'Euler

Les points O, G, et H sont alignés dans cet ordre et GH = 2 OG. La droite qui contient ces trois points est appelée droite d'Euler de ABC.

Idée de la démonstration.

On note A', B' et C' les milieux de [BC], [CA] et [AB]. L'homothétie h de centre G et de rapport $\frac{1}{2}$ envoie ABC sur $A'B'C'$. On vérifie que O est l'orthocentre de $A'B'C'$, donc h(H) = O.

12. Cercle d'Euler

On note A', B' et C' les milieux des côtés de ABC, H_A, H_B et H_C les pieds de ses hauteurs et M_A, M_B et M_C les milieux de [AH], [BH] et [CH]. Alors les neuf points A', B', C', H_A, H_B, H_C, M_A, M_B et M_C sont cocycliques sur un cercle appelé cercle d'Euler de ABC. De plus, le centre du cercle d'Euler est le milieu de [OH] et son rayon vaut $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2}}$

Idée de la démonstration.

L'homothétie h de la preuve précédente envoie O sur le milieu $\mathbf{\Omega}$ de [OH], donc le cercle circonscrit à ABC', noté C', est le cercle de centre $\mathbf{\Omega}$ et de rayon $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2}}$

Une chasse aux angles montre que H_A, H_B et H_C sont sur ce cercle. Enfin, $\mathbf{\Omega}$ et M_A sont les milieux de [HO] et [HA] donc $\mathbf{\Omega M_A} = \frac{\mathbf{OA}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2}}$ donc M_A est aussi sur ce cercle, de même que M_B et M_C.

13. Droite de Simson et droite de Steiner

- Soit P un point du plan et P_A, P_B, P_C ses projetés orthogonaux sur (BC), (CA) et (AB). Alors P_A, P_B et P_C sont alignés si et seulement si $\mathbf{P \in (C)}$. La droite passant par ces trois points est alors appelée droite de Simson de P.
- Soient S_A, S_B et S_C les symétriques de P par rapport à (BC), (CA) et (AB). Alors S_A, S_B et S_C sont alignés si et seulement si $\mathbf{P \in (C)}$. La droite passant par ces trois points est alors appelée droite

de Steiner de P.

Idée de la démonstration.

- Chasse aux angles (comme il y a beaucoup de positions possibles des points les uns par rapport aux autres, il est recommandé d'utiliser des angles orientés).
- S_A, S_B et S_C sont les images de P_A, P_B et P_C par l'homothétie de centre P et de rapport 2, donc les trois premiers sont alignés ssi les trois derniers le sont.

14.Points de contact d'un cercle inscrit avec les côtés

Soient D, E et F les points où le cercle inscrit touche [BC], [CA] et [AB].

On a : $\mathbf{AE = AF = \frac{b+c-a}{2}}$; $\mathbf{BF = BD = \frac{a+c-b}{2}}$ et $\mathbf{CD = CE = \frac{a+b-c}{2}}$

Idée de la démonstration.

On note x = AE = AF, y = BF = BD et z = CD = CE : on a x + y = c, y + z = a et z + x = b, et on résout le système...

Définition.

La bissectrice extérieure de $\widehat{\mathbf{CAB}}$ est la perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{\mathbf{CAB}}$ passant par A. C'est en quelque sorte la "deuxième bissectrice" formée par les droites (AB) et (AC). On définit de même les bissectrices extérieures $\widehat{\mathbf{ABC}}$ et $\widehat{\mathbf{BCA}}$

15.Cercle exinscrit

a) Il existe un unique cercle tangent au segment [BC], à la demi-droite [AB) au-delà de B et à la demi-droite [AC) au-delà de C. Ce cercle est appelé cercle A-exinscrit à ABC.

b) Le centre I_A du cercle A-exinscrit est l'intersection de la bissectrice intérieure de $\widehat{\mathbf{CAB}}$ des bissectrices extérieures de $\widehat{\mathbf{ABC}}$ et $\widehat{\mathbf{BCA}}$.

c) I_A est sur le cercle centré au pôle Sud S passant par B, C et I. En plus S est le milieu de $[I_AI]$.
Soit $\mathbf{D', E'}$ **et** $\mathbf{F'}$ les point où le cercle A-exinscrit touche respectivement [BC], [AC) et [AB).

On a $\mathbf{AE' = AF' = \frac{a+b+c}{2}}$; $\mathbf{BD' = BF' = \frac{a+b-c}{2} = CD}$ et $\mathbf{CD' = CE' = \frac{a+b-c}{2} = BE}$

Idée de la démonstration.

Similaire à la preuve correspondante pour le cercle inscrit : les trois bissectrices sont concourrantes en un point équidistant de (AB), (BC) et (CA).

Pour c) les triangles I_AIB et I_AIC sont rectangles en B et C. La démonstration est similaire à la preuve pour les points de contact du cercle inscrit.

16.Théorème de Ménélaus

Soient $\mathbf{A'} \in \mathbf{(BC)}$, $\mathbf{B'} \in \mathbf{(CA)}$ **et** $\mathbf{C'} \in \mathbf{(AB)}$. Alors $\mathbf{A', B'}$ **et** $\mathbf{C'}$ sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{\mathbf{BA'}}}{\overline{\mathbf{CA'}}} \times \frac{\overline{\mathbf{CB'}}}{\overline{\mathbf{AB'}}} \times \frac{\overline{\mathbf{AC'}}}{\overline{\mathbf{BC'}}} = \mathbf{1}$$

17.Théorème de Céva

Soient $\mathbf{A'} \in \mathbf{(BC)}$, $\mathbf{B'} \in \mathbf{(CA)}$ **et** $\mathbf{C'} \in \mathbf{(AB)}$. Alors $\mathbf{(AA'),(BB')}$ **et** $\mathbf{(CC')}$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\frac{\overline{\mathbf{BA'}}}{\overline{\mathbf{CA'}}} \times \frac{\overline{\mathbf{CB'}}}{\overline{\mathbf{AB'}}} \times \frac{\overline{\mathbf{AC'}}}{\overline{\mathbf{BC'}}} = \mathbf{-1}$

18.Théorème de Céva trigonométrique

Soient (Ax), (By) et (Cz) trois droites passant par A, B et C. Ces trois droites sont concourantes si et seulement si : $\frac{\sin \widehat{\mathbf{BAx}}}{\sin \widehat{\mathbf{CAx}}} \cdot \frac{\sin \widehat{\mathbf{CBy}}}{\sin \widehat{\mathbf{ABy}}} \cdot \frac{\sin \widehat{\mathbf{ACz}}}{\sin \widehat{\mathbf{BCz}}} = \mathbf{1}$

Remarque.

Un sens reste vrai avec plus de trois points : si on a un polygone à n sommets

avec une droite partant de chaque sommet et si les n droites sont concourantes, alors on a une formule du même type. En revanche, la formule ne suffit pas à assurer que les n droites sont concourantes.

19.Quadrilatère circonscriptible

Soit ABCD un quadrilatère. ABCD est circonscriptible (c'est-à-dire qu'il existe un cercle tangent à ses quatre côtés) si et seulement si AB + CD = AD + BC.

Idée de la démonstration.

Si ABCD est circonscriptible, on fait une "chasse aux tangentes" : on décompose chaque côté en deux en coupant au point de contact du cercle, et on utilise le fait que A est équidistant des points de tangence à [AB] et [AD]...

Pour la réciproque, supposons quitte à changer les noms des points que [AD) et [BC) se recoupent en X, et soit ω le cercle inscrit à ABX : il touche [AB] en U, [AX] en V et [BX] en W.

La condition $AB + CD = AD + BC$ donne $CD = DV + CW$. On a ainsi

2

$\mathbf{XV} = \dfrac{\mathbf{XV} + \mathbf{VW}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{XD} + \mathbf{XC} + \mathbf{VD} + \mathbf{CW}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{XD} + \mathbf{XC} + \mathbf{CD}}{\mathbf{2}}$, donc ω est le cercle X-exinscrit à XCD, donc il est tangent à`[CD], et on savait déjà qu'il est tangent aux trois autres côtés.

20. Diagonales perpendiculaires

Soit ABCD un quadrilatère. Alors (AC) et (BD) sont perpendiculaires si et seulement si : $\mathbf{AB}^2 + \mathbf{CD}^2 = \mathbf{AD}^2 + \mathbf{BC}^2$

Idée de la démonstration.

Si les diagonales sont perpendiculaires, on obtient la formule en appliquant plusieurs fois le Théorème de Pythagore. Pour la réciproque, on put utiliser la trigonométrie mais le plus simple est d'utiliser le produit scalaire pour montrer : $\mathbf{AB}^2 + \mathbf{CD}^2 - \mathbf{AD}^2 - \mathbf{BC}^2 = 2\overrightarrow{\mathbf{BD}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{CA}}$

21.Puissance d'un point

Soit Γ un cercle et P un point. On considère une droite (d) passant par P qui coupe Γ en A et B. Alors $\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PB}}$ ne dépend pas de la droite (d), et est appelé puissance de P par rapport à Γ.

De plus, si on note O le centre de Γ et r son rayon, la puissance de P par rapport à Γ vaut $OP^2 - r^2$

Idée de la démonstration.

Si deux droites (d) et (d') coupent Γ en A, B et $\mathbf{A', B'}$, montrer que $\mathbf{PAA'}$ et $\mathbf{PB'B}$ sont semblables.

22.Axe radical

a) Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 différents. L'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2 est une droite perpendiculaire à (O_1O_2), appelé axe radical de Γ_1 et Γ_2. De plus, si Γ_1 et Γ_2 se coupent en A et B, il s'agit de la droite (AB).

Idée de la démonstration.

On note r_1 et r_2 les rayons des deux cercles. Soit X un point qui a la même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2 (on admet qu'il existe) : on a $\mathbf{O_1X^2 - r_1{}^2 = O_2X^2 - r_2{}^2}$. Si Y est un point quelconque, les deux puissances de Y sont les mêmes ssi $\mathbf{O_1Y^2 - O_2Y^2 = r_1{}^2 - r_2{}^2 = O_1X^2 - O_2X^2}$ ssi (O_1O_2) et (XY) sont perpendiculaires d'après le lemme précédent, donc l'axe radical est la perpendiculaire à (O_1O_2) passant par X.

Si Γ_1 et Γ_2 se coupent en A et B, A et B ont une puissance nulle par rapport aux deux cercles, donc sont sur l'axe radical.

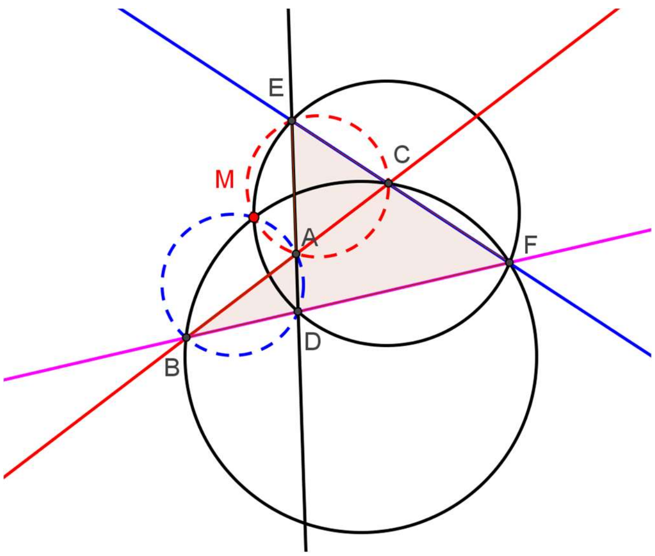
b) Soient Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles de centres deux à deux distincts. On note (d_1) l'axe radical de Γ_2 et Γ_3, (d_2) celui de Γ_3 et Γ_1 et (d_1) celui de Γ_1 et Γ_2. Alors (d_1), (d_2) et (d_3) sont parallèles ou concourantes.

Idée de la démonstration.

Le point d'intersection de (d_1) et (d_2) a même puissance par rapport aux trois cercles donc est sur (d_3).

23.Théorème de Miquel

Soient quatre droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4). Ces quatre droites définissent quatre triangles, un pour chaque choix de 3 droites parmi les 4 (une telle figure est appelée quadrilatère complet). Alors les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles ont un point commun, appelé point de Miquel du quadrilatère complet.



Idée de la démonstration.

Donner des noms à tous les points d'intersection et faire une chasse aux angles.

Remarque. Le point de Miquel est également le centre de nombreuses similitudes directes impliquant les points d'intersection des quatre droites (cf. cours sur les transformations).

III- Exercices corrigés

Quelques conseils pour rédiger la résolution d'un problème de géométrie

Résoudre un problème de géométrie est une vaste entreprise : il y a tant de départs possibles ! Voici quelques conseils de méthode pour bien débuter, et tirer le meilleur profit de ce que vous aurez appris dans la pratique :

- commencez par lire l'énoncé en faisant une grande figure à main levée, dans le cas général : s'il est question d'un triangle ABC quelconque, il faut montrer le résultat quel que soit le triangle. Il ne faut donc pas le tracer isocèle, ni rectangle...
- rajoutez sur votre figure les informations qui vous semblent importantes (si on mentionne le centre du cercle circonscrit, tracez ce cercle : peut-être voyez-vous des points cocycliques ? ; s'il est question du cercle inscrit, pensez aux bissectrices du triangle, rajoutez ses points de tangence aux côtés du triangle ;...)
- si nécessaire, n'hésitez pas à faire une figure propre pour voir ce qui se passe : si vous faites des conjectures intéressantes, vous aurez ensuite une meilleure idée des étapes intermédiaires de votre démonstration.
- au moment de rédiger, pensez à votre lecteur : faites une figure lisible, et reportez-y les points et les angles (en couleur si possible) que vous avez introduit (donnez leur des noms !). Ne recopiez pas l'énoncé, mais définissez bien en une phrase les objets que vous introduisez (soit C le cercle de diamètre $[AB]$) ; (soit M le projeté orthogonal de P sur la bissectrice de A...).
- annoncez les étapes de votre raisonnement si elles ne s'enchaînent pas immédiatement ($<<$ on commence par une chasse aux angles" ; $<<$ montrons maintenant que les triangles ABC et MOH sont semblables"...)
- enfin, n'oubliez pas que c'est à force d'entraînement et d'exercices qu'on apprend à résoudre des problèmes de plus en plus complexes !
-

Remarques :

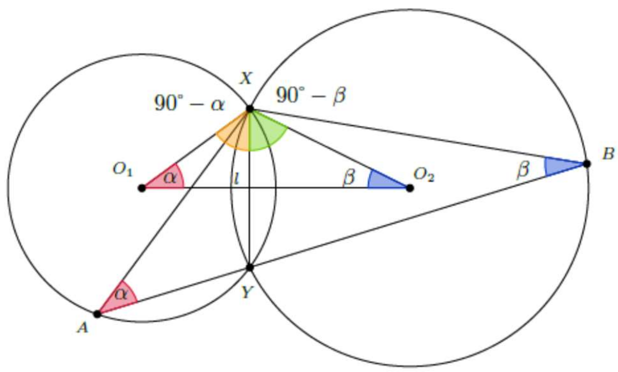
- Chaque fois que je vois des droites parallèles dans un problème d'angles, je pense aux angles correspondants et alternes-internes sur toutes les sécantes !
- Chaque fois que je veux calculer l'angle entre deux droites, je pense à la relation de Chasles !
- Chaque fois que je vois un triangle, je pense que la somme de ses angles vaut 180°!
- Chaque fois que je vois des égalités de longueurs qui font penser au diamètre d'un cercle, je pense à un triangle rectangle !

Exercice 1 (Premier Théorème de Miquel.)

Soient C_1, C_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2 s'intersectant en X et Y . Soit A un point de C_1 et B l'intersection de AY et C_2.

Montrer que XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Solution



On effectue une chasse aux angles : en posant $\widehat{XAY} = \alpha$, on trouve $\widehat{XO_1Y} = 2\alpha$ grâce au théorème de l'angle au centre. Or, la figure étant symétrique par rapport à l'axe (O_1O_2), on en déduit que $\widehat{XO_1O_2} = \alpha$.

De même, on montre que $\widehat{XBY} = \widehat{XO_2O_1}$, ce qui conclut.

En outre, on remarque au passage que, pour deux cercles de centres O_1 et O_2 s'intersectant en deux points X et Y, les droites O_1O_2 et XY sont perpendiculaires.

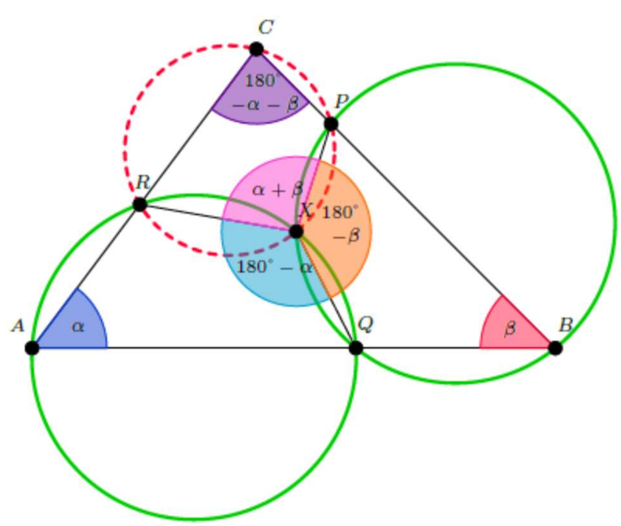
Exercice2 (Second Théorème de Miquel)

Soit ABC un triangle, P un point de [BC], Q un point de [BA], R un point de [CA].

Les cercles circonscrits à AQR et à BQP ont pour second point d'intersection X.

Montrer que X est aussi sur le cercle circonscrit à CPR.

Solution



On pose $\alpha = \widehat{BAC}$ et $\beta = \widehat{CBA}$. La cocyclicité des points A, Q, R et X donne $\widehat{QXR} = 180° - \alpha$ et celle des points B, P, X, Q donne $\widehat{PXQ} = 180° - \beta$. Donc $\widehat{RXP} = \alpha + \beta = 180° - \widehat{PCR}$ (car $\widehat{PCR} = 180° - \left(\widehat{BAC} + \widehat{CBA}\right) = 180° - (\alpha + \beta)$. Donc les points C, P, R et X sont cocycliques.

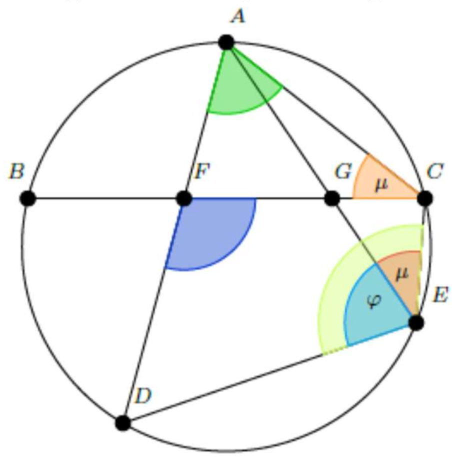
Exercice 3 (cocyclicité)

Soit (C) un cercle et BC une corde de ce cercle. Soit A le milieu de l'arc BC. On considère deux cordes de (C) passant par A, notons-les AD et AE, et F et G les points d'intersection respectifs de ces cordes avec BC.

Montrer que les points D, E, F, G sont cocycliques.

Solution

En posant $\varphi = \widehat{\mathbf{DEA}}$ et $\mu = \widehat{\mathbf{CEA}}$, on peut rédiger une chasse aux angles usuelles, en passant par les étapes indiquées sur la figures. On peut aussi rédiger cette chasse aux angles à l'aide d'angles orientés.



L'angle bleu foncé est de mesure $180^{\circ} - \varphi$, et l'angle vert est de mesure $180^{\circ} - \mu - \varphi$.

Pour montrer que les points D, E, F, G sont cocycliques, il suffit de montrer que $(ED, EG) = (FD, FG)$. Or :

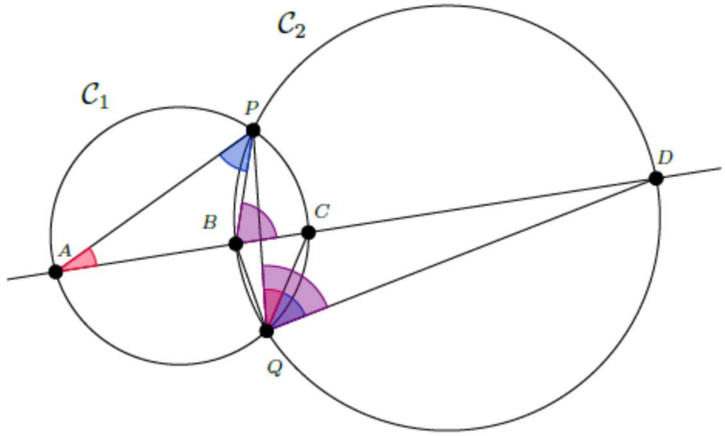
$$
\begin{aligned}
(ED, EG) &= (ED, EA), \text{ car les points } E, A, G \text{ sont alignés,}\\
&= (ED, EC) + (EC, EA), \text{ d'après la relation de Chasles,}\\
&= (AD, AC) + (EC, EA), \text{ car les points } A, C, D, E \text{ sont cocycliques,}\\
&= (AD, AC) + (AC, BC), \text{ car les arcs } AB \text{ et } AC \text{ sont de même longueur,}\\
&= (AD, BC), \text{ d'après la relation de Chasles,}\\
&= (FD, BC), \text{ car les points } A, D, F \text{ sont alignés,}\\
&= (FD, FG), \text{ car les points } B, C, F, G \text{ sont alignés.}
\end{aligned}
$$

Donc les points D, E, F, G sont cocycliques.

Exercice 4 (plusieurs solutions)

Soient C_1, C_2 deux cercles ayant deux points d'intersection P et Q. Soit d une droite coupant C_1 en A et C et C_2 en B et D, les points étant disposés dans l'ordre A, B, C, D sur la droite. Montrer que $\widehat{\mathbf{APB}} = \widehat{\mathbf{CQD}}$.

Solution1 :



Les angles bleus sont de mesure φ, les angles rouges de mesure μ, et les angles violets de mesure $\varphi + \mu$.

En chasse aux angles usuelle : on pose $\varphi := \widehat{APB}$ et $\mu := \widehat{BAP}$. Comme la somme des angles dans un triangle vaut 180°, $\widehat{PBA} = 180^\circ - \varphi - \mu$, d'où $\widehat{PBD} = \varphi + \mu$.

De plus, comme les points A, C, P, Q sont cocycliques, on a $\widehat{CQP} = \widehat{CAP} = \widehat{BAP} = \mu$.

Enfin, comme les points B, D, P, Q sont cocycliques, on a $\widehat{DQP} = \widehat{PBD} = \varphi + \mu$.

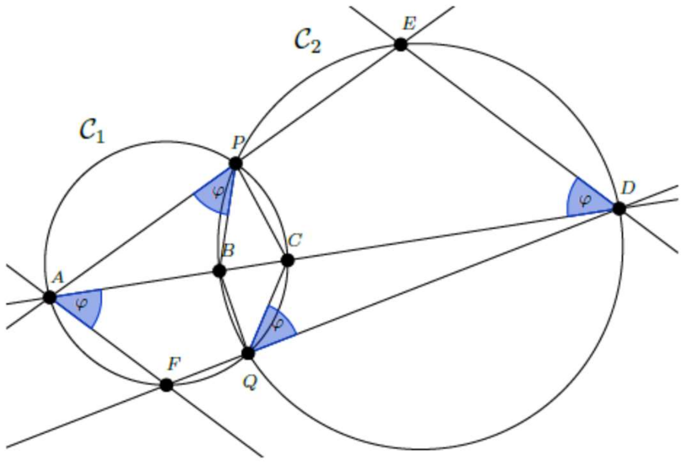
Ainsi, $\widehat{DQC} = \widehat{DQP} - \widehat{CQP} = \varphi + \mu - \mu = \varphi = \widehat{APB}$, et c'est ce qu'il fallait prouver.

Solution 2 : avec les angles orientés

$$\begin{aligned}(AP, BP) &= (AP, AB) + (AB, BP)\\ &= (AP, AC) + (BD, BP), \text{ car les points } A, B, C, D \text{ sont alignés,}\\ &= (QP, QC) + (BD, BP), \text{ car les points } A, C, P, Q \text{ sont cocycliques,}\\ &= (QP, QC) + (QD, QP), \text{ car les points } B, D, P, Q \text{ sont cocycliques,}\\ &= (QD, QC).\end{aligned}$$

Solution 3

Une autre approche de cette exercice à rajouter les droites (AF) et (DE) qui sont parallèles. Car $\widehat{FAP} = 180° - \widehat{FQP} = \widehat{DQP} = 180° - \widehat{DEP} \Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{DEA} = 180°$.



Posons maintenant $\varphi := \widehat{APB}$. On a alors $\widehat{BPE} = 180^\circ - \varphi$, et donc, comme les points B, D, E, P sont cocycliques, $\widehat{BDE} = \varphi$. Comme les droites DE et AF sont parallèles, on a donc $\widehat{FAC} = \varphi$. Comme les points A, C, F, Q sont cocycliques, $\widehat{FQC} = 180^\circ - \varphi$, d'où l'on déduit que $\widehat{DQC} = \varphi$.

Solution 4

En angles orientés, cela donne :

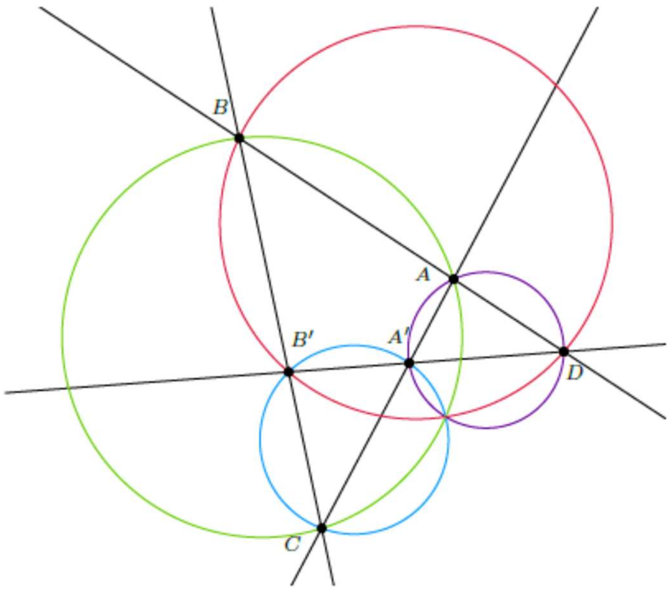
$$\begin{aligned}
(AP, BP) &= (PE, BP), \text{ car les points } A, E, P \text{ sont alignés,}\\
&= (DE, BD), \text{ car les points } B, D, E, P \text{ sont cocycliques,}\\
&= (AF, BD), \text{ car les droites } AF \text{ et } DE \text{ sont parallèles,}\\
&= (AF, AC), \text{ car les points } A, B, C, D \text{ sont alignés,}\\
&= (QF, QC), \text{ car les points } A, C, F, Q \text{ sont cocycliques,}\\
&= (QD, QC), \text{ car les points } D, F, Q \text{ sont alignés.}
\end{aligned}$$

Exercice 5 (Point de Miquel)

Soient A, A', B, B' quatre points, C le point d'intersection de (AA') et (BB') et D le point d'intersection de (AB) et $(A'B')$.

Montrer que les cercles circonscrits à $CA'B'$, CAB, DAA', DBB' sont concourants.

Solution



On définit P comme l'intersection des cercles circonscrits à $CA'B'$ et à DBB'. Montrons que P, D, A, A' sont cocycliques et alors, par symétrie, on aura gagné.

Or, par chasse aux angles :

$$\begin{aligned}(A'P, PD) &= (A'P, PB') + (PB', PD) \\ &= (A'C, CB') + (BB', BD) \\ &= (AA', BB') + (BB', AD) \\ &= (AA', AD),\end{aligned}$$

ce qui conclut.

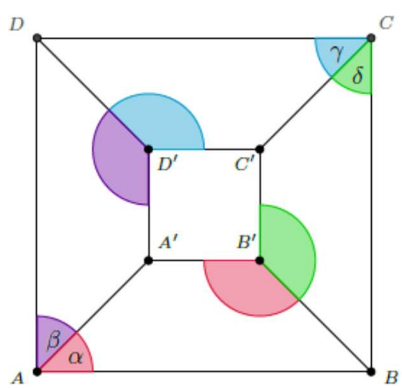
Exercice 6 (Théorème du cube)

Soient $A, B, C, D, A^/, B^/, C^/, D^/$ des points tels que A, B, C, D cocycliques, $A, A^/, B, B^/$ cocycliques, $B, B^/, C, C^/$ cocycliques, $C, C^/, D, D^/$ cocycliques, $D, D^/, A, A^/$ cocycliques.

Montrer que $A^/$, $B^/$, $C^/$, $D^/$ sont cocycliques.

Solution

Au lieu d'utiliser une figure, la configuration du théorème du cube est représentée par un diagramme donnant les relations entre les points impliqués. Le théorème dit alors que, si pour cinq faces du « cubes », les quatre sommets de la face sont cocycliques, alors c'est aussi vrai pour la sixième face.



Par cocyclicité, la somme de deux angles de la même couleur vaut toujours 180°. Comme A, B, C, D sont cocycliques, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$. Donc la somme des quatre angles intérieurs marqués vaut $180°-\alpha+180°-\beta+180°-\gamma+180°-\delta=540°$.

De plus, la somme des angles autour d'un point vaut 360° : donc on a deux angles opposés dans $A'B'C'D'$ dont la somme vaut $720°-540°=180°$.

Donc A', B', C', D' sont cocycliques.

Exercice 7 (Symétriques de l'orthocentre.)

Soit ABC un triangle d'orthocentre H.
Montrer que les symétriques de H par rapport à $(AB), (BC), (CA)$ sont sur le cercle circonscrit à ABC.

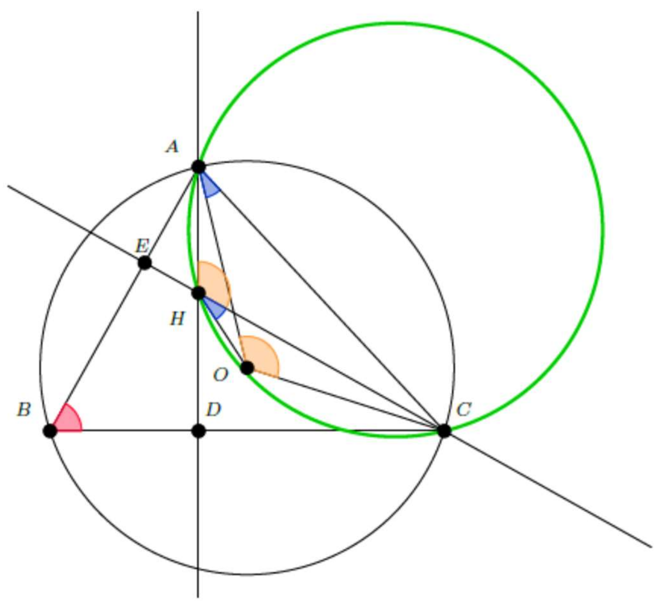
Solution : Il suffit de noter $\mathbf{H_A}$ le symétrique de H par rapport à **(BC)** et de montrer que $\mathbf{A, B, C}$ **et** $\mathbf{H_A}$ sont cocycliques : le fait que $\mathbf{H_B}$ **et** $\mathbf{H_C}$, définis de façon analogue, soient sur le même cercle suivra alors par symétrie de l'énoncé. Or $\widehat{\mathbf{BH_AC}}=\widehat{\mathbf{BHC}}$ par symétrie, et on calcule grâce aux angles droits $\widehat{\mathbf{BHC}}=\mathbf{180°}-\widehat{\mathbf{HBC}}=\widehat{\mathbf{ABC}}+\widehat{\mathbf{ACB}}=\mathbf{180°}-\widehat{\mathbf{BAC}}$. Donc A, B, C, $\mathbf{H_A}$ sont cocycliques, d'où le résultat.

Exercice 8

Soient ABC un triangle tel que $\widehat{\mathbf{ABC}}=\mathbf{60°}$, O le centre de son cercle circonscrit, H son orthocentre. Dans ce triangle, on note D le pied de la hauteur issue de A et E le pied de la hauteur issue de C.

Montrer que O est sur la bissectrice intérieure commune aux angles $\widehat{\mathbf{DHC}}$ **et** $\widehat{\mathbf{AHE}}$.

Solution :



Comme $\widehat{BDH} = 180^\circ - \widehat{BEH} = 90^\circ$, les points B, D, E, H sont cocycliques. Ainsi, $\widehat{DHE} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Donc $\widehat{AHC} = 120^\circ$.

De plus, comme $\widehat{ABC} = 60^\circ$, d'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{AOC} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$.

Donc les points A, C, H, O sont cocycliques.

De plus, comme le triangle AOC est isocèle en O, on a $\widehat{OAC} = 30^\circ$. Donc, par cocyclicité, $\widehat{OHC} = 30^\circ$. Comme $\widehat{CHD} = 180^\circ - \widehat{DHE} = 60^\circ$, on a également $\widehat{OHD} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

Comme la bissectrice commune des angles $\widehat{AHE}$ et $\widehat{CHD}$ dédouble chacun de ces angles de 60° en deux angles de 30°, tout comme le fait la droite OH, on en déduit que le point O est sur cette bissectrice.

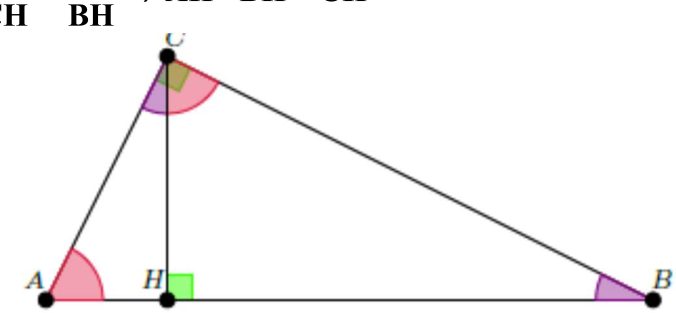
Exercice 9 (Lemme d'Euclide.)

Soit ABC un triangle rectangle en C et H le pied de la hauteur issue de C.

1. Montrer que $\mathbf{AH \times AB = AC^2}$.
2. Montrer que $\mathbf{BH \times BA = BC^2}$.
3. Montrer que $\mathbf{AH \times BH = CH^2}$.

Solution

Du fait que la somme des angles dans un triangle vaut 180°, on obtient facilement les égalités d'angles indiquées en couleur sur la figure suivante. On en déduit que les triangles ABC, ACH et CBH sont semblables. Donc $\mathbf{\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AB \times AH = AC^2}$, $\mathbf{\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BA \times BH = BC^2}$ **et** $\mathbf{\dfrac{AH}{CH} = \dfrac{CH}{BH} \Rightarrow AH \times BH = CH^2}$



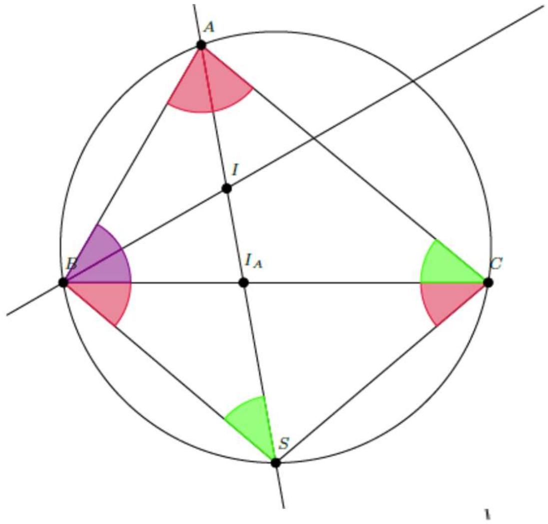
Exercice 10 (Théorème du pôle sud.)

Soit ABC un triangle, (C) son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit, I_A le pied de la bissectrice issue de A et S le point d'intersection de cette bissectrice avec (C) .

1. Montrer que S est sur la médiatrice de [BC]. Ce point S est appelé le pôle sud de ABC (par rapport à A).
2. Montrer que BS = CS = IS. Le cercle de centre S passant par B, C, I est appelé le cercle antarctique de ABC (par rapport à A).
3. Montrer que les triangles ABS et BI_AS sont semblables

Solution

Posons $\alpha = \widehat{\mathbf{BAC}}$, $\beta = \widehat{\mathbf{CBA}}$ **et** $\gamma = \widehat{\mathbf{ACB}}$ on a alors $\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{180^\circ}$. On fait une chasse aux angles utilisant le fait que A, B, C et S sont cocycliques.



Les angles roses sont de mesure $\frac{\alpha}{2}$, les angles verts sont de mesure γ et les angles violets sont de mesure $\frac{\beta}{2}$.

Ainsi, le triangle BCS est isocèle en S, donc S est sur la médiatrice de $[BC]$.

De plus, comme la somme des angles dans un triangle fait 180°, on a $\widehat{BIS} = 180^{\circ} - \gamma - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Donc BIS isocèle en S, d'où $CS = BS = IS$.

Enfin, comme $\widehat{BSA} = \widehat{I_ASB}$ et $\widehat{BAS} = \widehat{I_ABS}$, les triangles ABS et BI_AS sont bien semblables.

IV- Activités

1. Exercices tirés de TD proposé lors du stage olympique de Valbonne 2022 (France)

a) TD1

Exercice 1
(Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Exercice 2
On note ABC un triangle. Montrer que les hauteurs du triangle s'intersectent en un point que l'on appelle *l'orthocentre*.

Exercice 3
Soit k un cercle de centre O et soit A, B et C trois points sur le cercle k tels que $\widehat{ABC} > 90$. La bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ recoupe le cercle circonscrit au triangle BOC en un point D. Montrer que D appartient à la droite (AC).

Exercice 4
Deux cercles ω_1 et ω_2 se coupent en deux points distincts A et C. Soit B le second point d'intersection de ω_1 avec la tangente à ω_2 en le point A. Soit D le deuxieme point d'intersection du cercle ω_2 avec la tangente au cercle ω_1 en le point C. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Exercice 5
Soit ABC un triangle avec $\mathbf{AB} < \mathbf{AC}$, Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ en A coupe la droite $\mathbf{(BC)}$ en P. La bissectrice de l'angle $\widehat{\mathbf{APB}}$ coupe la droite $\mathbf{(AB)}$ en R et la droite $\mathbf{(AC)}$ en S.
Montrer que le triangle ARS est isocèle A.

b) TD2

Exercice 1
Soit ABC un triangle. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ recoupe $[BC]$ en D et le cercle circonscrit à ABC en S. Montrer que la droite (SB) est tangente au cercle circonscrit à ABD.

Exercice 2
Soient A, B, C et D quatre points cocycliques et E le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Montrer l'égalité suivante : $\frac{AC}{BC} \times \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$.

Exercice 3
Soient A, B, C et D quatre points dans cet ordre sur un cercle et soit S le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas C et D. Les droites (SD) et (SC) intersectent (AB) en E et F respectivement. Montrer que C, D, E et F sont cocycliques.

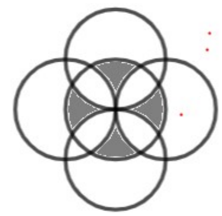
Exercice 4
Soit ABC un triangle isocèle en A, Γ le cercle tangent à (AB) et (AC) en B et C, et M un point de l'arc de Γ intérieur au triangle ABC. On définit E et F les projetés orthogonaux de M sur $[AC]$ et $[AB]$ respectivement, et D son projeté orthogonal sur $[BC]$. Prouver que $MD^2 = ME \times MF$.

Exercice 5
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de B. Les cercles circonscrits aux triangles ABD et BCD recoupent les côtés $[AB]$ et $[BC]$ en E et F respectivement. Montrer que $AE = CF$.

2. Exercices tirés des Olympiades nationales

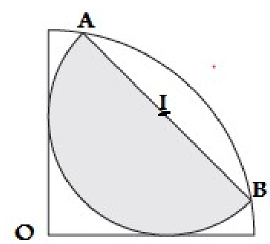
a) Niveau 4AS

Exercice 1 (T2-2022-4AS)



Dans la figure ci-contre, les cinq cercles sont de même rayon 2 cm .
1) Déterminer l'aire d'un triangle équilatéral de côté 2 cm.
2) Déterminer l'aire de partie hachurée.

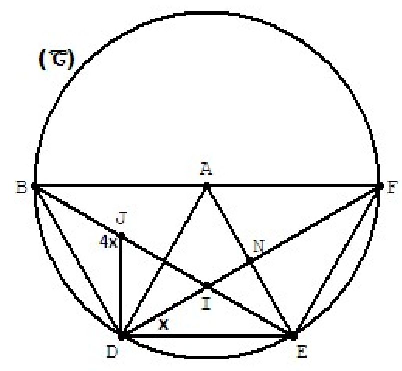
Exercice 2: (T2-2021-4AS)



La figure ci-contre représente un demi-cercle (colorié), inscrit dans un quart de cercle. Soit I le centre du demi-cercle et O celui du quart de cercle et soit $[AB]$ un diamètre du demi- cercle.

1) Montrer que $OI^2 = 2AI^2$
2) Montrer que $OA = \sqrt{3} \times IA$
3) Déduire la valeur de fraction $\dfrac{\text{aire coloriée}}{\text{aire non coloriée}}$

Exercice 3: (T1-2021-4AS)



Sur la figure ci-contre :
(C) est un cercle de centre A
Les points B, A et F sont alignés Le point J est le milieu de $[BI]$.
$(AD)//(EF)$; $\widehat{BJD} = 4x$ et $\widehat{EDF} = x$.
1) Montrer que le triangle IDE est isocèle en I
2) Exprimer en fonction de x les mesures des angles
$\widehat{BFD}$, $\widehat{ADF}$, $\widehat{EBF}$ et $\widehat{DFE}$.
3) En déduire la valeur de x.

Exercice 4: (T3-2021-4AS)
ABCD est un rectangle de centre O tel que $AB = 6$ et $AD = 8$. P est un point de $[AD]$. L est le point de $[BD]$ tel que $(PL) \perp (BD)$ et Q est le point de $[AC]$ tel que $(PQ) \perp (AC)$.
1) Faire une figure et calculer AO.
2) Exprimer l'aire du rectangle ABCD en fonction de $PQ + PL$.
3) Déduire la valeur de $PQ + PL$.

Exercice 5 (T2-2020-4AS)

Soit ABC un triangle isocèle en A. E est le symétrique de A par rapport à C. F est le symétrique de E par rapport à B. Soit K le projeté orthogonal de E sur (AB). Les points R et S sont les projetés orthogonaux respectifs de E et F sur (AB).
1) Faire une figure.
2) Montrer que l'aire du triangle AFB est le double de celle de ABC.
3) Montrer que $FS = EK$.
4) Montrer que $FREK$ est un parallélogramme.

b) Niveau 7C

Exercice 6 (T2-2022-7C)

Soit ABC un triangle et D un point du segment $[BC]$ distinct de B et C.

1° Montre que $BD \times AC^2 + DC \times AB^2 = BC \times \left(AD^2 + BD \times DC\right)$

2° On suppose que le triangle ABC est équilatéral de côté 10cm et que $AD \in \mathbb{N}$ déterminer alors les distances BD et CD.

Exercice 7: (T2-2021-7C)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et Γ un cercle dont le centre L est situé sur le segment $[BC]$. On suppose que le cercle Γ est tangent à (AB) en B' et à (AC) en C'. On suppose aussi que le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est situé sur le petit arc $B'C'$ du cercle Γ. Soit x, y et z les mesures en degré respectivement des angles géométriques $\widehat{COB}$, $\widehat{C'OB'}$ et $\widehat{CAB}$; $x, y, z \in [0, 180]$.

1.a) Justifier que $x < y$.

b) Montrer que $2y - z = 180°$ puis en déduire que $z < 60°$.

2) Montrer que le cercle Γ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en deux points.

Exercice 8: (T1-2021-7C)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et on note D, E et F les pieds de ses hauteurs issues respectivement de A, B et C

Les cercles inscrits dans les triangles BDF et CDE sont notés Γ_B et Γ_C. Soit I et J leurs centres respectifs.

La droite (DF) est tangente à Γ_B au point M.

La droite (DE) est tangente à Γ_C au point N.

La droite (MN) recoupe les cercles Γ_B et Γ_C en P et Q respectivement ($P \neq M$ et $Q \neq N$).

1) Faire une figure.

2) Montrer que $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DI}) = (\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DN}) \quad [\pi]$.

3) Montrer que $PM = QN$.

Exercice 9: (T3-2021-7C)

Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. Soit I le centre de son cercle inscrit, I_A le pied de la bissectrice intérieure issue de A et S le point d'intersection de cette bissectrice avec Γ.

1° Faire une figure

2° Montrer que S est sur la médiatrice de $[BC]$.

3° Montrer que $BS = IS$.

4° Montrer que les triangles ABS et SBI_A sont semblables.

NB : Le point S est appelé le pôle sud de ABC (par rapport à A) et le cercle de centre S passant par B, C et I est appelé le cercle antarctique de ABC (par rapport à A)

Exercice 10 (T1-2020-7C)

Soit Γ et Γ' deux cercles qui se coupent en A et B. Les tangentes en A à Γ et Γ' recoupent respectivement Γ' et Γ en D et C et la droite (CD) recoupe le cercle Γ en un point M différent de B.

On se propose de montrer que la droite (MB) passe par le milieu du segment $[AD]$

1) Soit N le point d'intersection de (BM) avec Γ'. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CD}\right)$.

2) Déterminer la nature du quadrilatère $AMDN$ puis conclure.