République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Technique et de la Réforme
Direction des Examens et des Concours

BACCALAUREAT 2020 (Session Normale ; Séries : C & TMGM)
PROPPOSTION DU CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1

1° a) Si p un entier relatif tel que le couple $(p+1;p)$ soit une solution de (E), alors

$13(p+1)-15p=5 \Leftrightarrow 13p+13-15p=5 \Leftrightarrow -2p=-8 \Leftrightarrow \boxed{p=4}$

b) D'après la question 1.a le couple $(5;4)$ est une solution de (E).

Si le couple (x,y) est solution de (E), alors $13x-15y=5$ or $13\times(5)-15\times(4)=5$ d'où

$13(x-5)=15\times(y-4)$. Donc $15 | 13(x-5)$, or $13 \wedge 15 = 1$, alors d'après le théorème de Gauss, $15 | (x-5)$,

c'est-à-dire que $\exists k \in \mathbb{Z},\ x-5=15k$, d'où $x=15k+5,\ k\in\mathbb{Z}$

L'égalité $13(x-5)=15\times(y-4)$ s'écrit alors $13\times 15k=15\times(y-4)$ ce qui donne que $y-4=13k$ ou encore $y=13k+4,\ \ k\in\mathbb{Z}$. Donc le couple (x,y) s'écrit : $(15k+5,\ 13k+4),\ \ k\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $x=15k+5,\ k\in\mathbb{Z}$ et $y=13k+4,\ \ k\in\mathbb{Z}$, on aura :

$13x-15y=13\times(15k+5)-15\times(13k+4)=195k+65-195k-60=5$, donc (x,y) est solution de (E).

Conclusion : $\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sont tous les couples } (x,y) \text{ tels que } \begin{cases} x=15k+5 \\ y=13k+4 \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.}$

2°) Soit S l'ensemble des entiers naturels vérifiant $\begin{cases} N\equiv 5[13] \\ N\equiv 10[15] \end{cases}$

a) Soit N un élément de S, alors :

$N\equiv 5[13] \Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{Z},\ N=13x+5$ et $N\equiv 10[15] \Leftrightarrow \exists y\in\mathbb{Z},\ N=15y+10$

Donc, il existe un couple d'entiers (x,y) tel que $N=13x+5=15y+10$ ce qui donne que $13x-15y=5$, c'est-à-dire que (x,y) est solution de (E).

b) En utilisant la question 1.b, on trouve que $N=13x+5=13(15k+5)+5=195k+65+5=195k+70$ ce qui montre que $N\equiv 70[195]$.

Réciproquement si $N\equiv 70[195]$ alors $N=195p+70$ or $N=195p+70=13(15p+5)+5 \Rightarrow N\equiv 5[13]$ et $N=195p+70=15(13p+4)+10 \Rightarrow N\equiv 10[15]$

Conclusion $\boxed{N\in S \Leftrightarrow N\equiv 70[195]}$

Soit A le plus petit élément de S qui est supérieur à 2000, donc A s'écrit sous la forme $195k+70,\ k\in\mathbb{Z}$ avec $A\geq 2000 \Rightarrow 195k+70\geq 2000,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k\geq 9{,}89,\ k\in\mathbb{Z}$,

D'où $k=10$ et on a $A=195k+70=195\times 10+70=1950+70=2020 \Rightarrow \boxed{A=2020}$.

c) Le nombre $A=2020$ s'écrit COVID dans un système de base n, donc

$A=D+I\times n+V\times n^2+O\times n^3+C\times n^4$. Le chiffre C est obligatoirement non nul, d'où

$n^4\leq D+I\times n+V\times n^2+O\times n^3+C\times n^4\leq n^5 \Leftrightarrow n^4\leq 2020\leq n^5$

Si $n\leq 4$, on obtient $2020<4^5=1024$, ce qui est impossible.

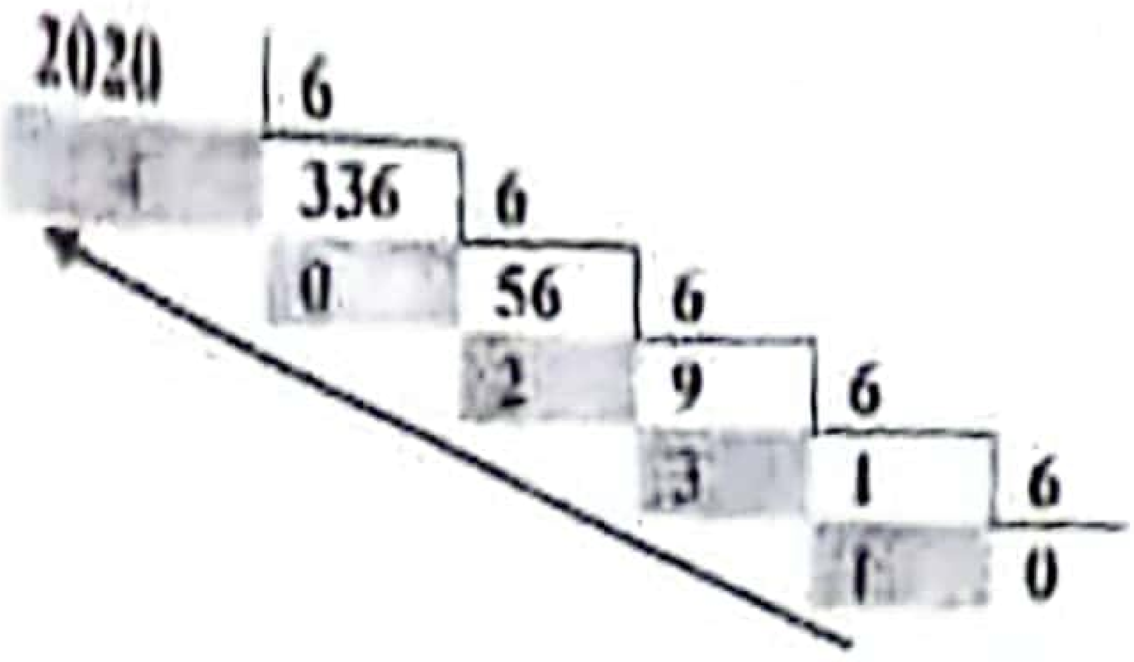
Si $n\geq 7$, on obtient $2401=7^4\leq 2020$, ce qui est aussi impossible. D'où $\boxed{5\leq n\leq 6}$

- si $n=5$ on a :

$$\begin{array}{r|l}
2020 & 5 \\ \hline
0 & 404 \ | \ 5 \\
 & 4 \quad 80 \ | \ 5 \\
 & \quad 0 \quad 16 \ | \ 5 \\
 & \quad\quad 1 \quad 3 \ | \ 5 \\
 & \quad\quad\quad 3 \quad 0
\end{array}$$

Ce qui donne $V=D=0$

Cette écriture est rejetée car les chiffres C, O, V, I et D sont deux à deux distincts.



Ce qui donne
$C = 1$; $O = 3$; $V = 2$; $I = 0$ et $D = 4$

D'où $\boxed{A = \left(\overline{13204}\right)_6}$

Exercice 2

On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par :

$P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 - (5+3i)z + 4 - 8i$

1°) Calcul de $P(-i)$:

	1	$1-2i$	$-5-3i$	$4-8i$
$-i$		$-i$	$-3-i$	$-4+8i$
	1	$1-3i$	$-8-4i$	0

D'après le tableau de Horner ci-dessus, on a : $P(-i) = 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$P(z) = (z+i)\left(z^2 + (1-3i)z - 8 - 4i\right)$

Donc $P(z) = 0 \Leftrightarrow z + i = 0$ ou $z^2 + (1-3i)z - 8 - 4i = 0$

$z + i = 0 \Leftrightarrow z = -i$ et pour l'équation $z^2 + (1-3i)z - 8 - 4i = 0$ on a

$\Delta = (1-3i)^2 - 4(-8-4i) = -8 - 6i + 32 + 16i = 24 + 10i = (5+i)^2$ alors ses solutions sont ;

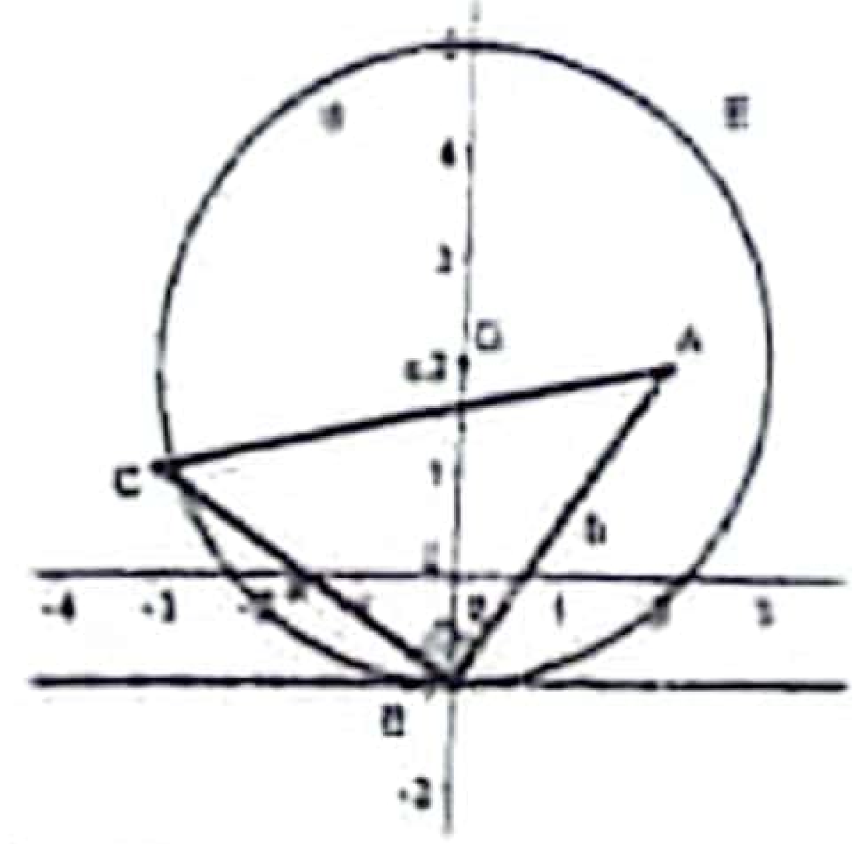
$z_1 = \dfrac{-1+3i-(5+i)}{2} = -3 + i$ et $z_2 = \dfrac{-1+3i+(5+i)}{2} = 2 + 2i$

Donc l'ensemble de solution de l'équation $P(z) = 0$ est $\boxed{S = \{-i; 2+2i; -3+i\}}$

2°) Les points A, B et C sont les images de solutions de l'équation $P(z) = 0$, tels que : $|z_B| < |z_A| < |z_C|$ or $|-i| \le |2+2i| \le |-3+i|$ d'où

$z_B = -i$; $z_A = 2 + 2i$ et $z_C = -3 + i$

a) Représentation des points A, B et C dans le repère : voir figure



Nature du triangle ABC : $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{-3+i-(-i)}{2+2i-(-i)} = \dfrac{-3+2i}{2+3i} = \dfrac{i(3i+2)}{2+3i} = i$

Donc le triangle ABC est isocèle rectangle en B (indirecte).

b) L'affixe de G est $z_G = \dfrac{9z_A - 2z_B + 6z_C}{13} = \dfrac{9\times(2+2i) - 2\times(-i) + 6(-3+i)}{13} = \dfrac{26i}{13} = \boxed{2i}$

c) $M \in E \Leftrightarrow 9MA^2 - 2MB^2 + 6MC^2 = 195 \Leftrightarrow 13MG^2 + 9GA^2 - 2GB^2 + 6GC^2 = 195$, avec

$GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |2+2i-2i|^2 = 4$; $GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |-i-2i|^2 = 9$ et $GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |-3+i-2i|^2 = 10$

Donc $M \in E \Leftrightarrow 13MG^2 + 9\times4 - 2\times9 + 6\times10 = 195 \Leftrightarrow 13MG^2 = 117 \Leftrightarrow MG^2 = 9$, c-à-d $\boxed{MG = 3}$.

Par conséquent : E est le cercle de centre G et de rayon $r = 3$. Ce cercle passe par B, car $GB = 3$.

d) Soit $\varphi(M) = 3MA^2 - 5MB^2 + 2MC^2$ puisque le poids total du système est nul on a

$\varphi(M) = \varphi(B) + 2\overrightarrow{MB}.\vec{u} = 65 + 2\overrightarrow{MB}.\vec{u}$ avec $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$. Or

$13\overrightarrow{BG} = 9\overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{BC} = 3\vec{u}$, d'où $\vec{u} = \dfrac{13}{3}\overrightarrow{BG}$ et puisque $\varphi(B) = 65$ alors on a $\varphi(M) = 65 + \dfrac{26}{3}\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BG}$.

$M \in F \Leftrightarrow \varphi(M) = 65 \Leftrightarrow \varphi(M) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BG} = 0$, donc F est la droite perpendiculaire en B à la droite (BG).

a) E étant le cercle de centre G passant par B et la droite F est perpendiculaire en B à (BG) F est la tangente en B à E.

3° a) Nous avons $z' = z \Leftrightarrow z' = mz + (2-2m)i = z \Leftrightarrow (m-1)z = (m-1)2i \Leftrightarrow z = \dfrac{(m-1)2i}{m-1}$

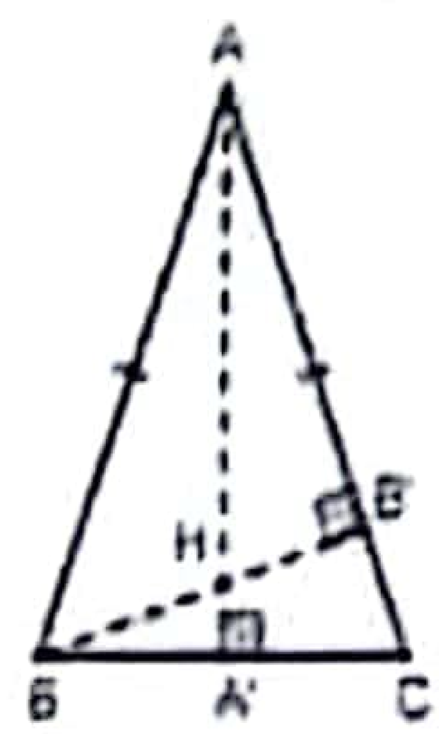
* si $m = 1$, alors tout nombre complexe est solution et la transforma f est l'application identique du plan

* si $m \neq 1$, alors $z' = z \Leftrightarrow z = 2i$ dans ce cas f admet un seul point invariant qui est G.

b) Nous avons $f(B) = A \Leftrightarrow z_A = mz_B + (2-2m)i \Leftrightarrow 2+2i = -im + 2i - 2mi \Leftrightarrow -3mi = 2 \Leftrightarrow \boxed{m = \frac{2}{3}i}$

L'écriture complexe de f dans ce cas est $z' = \frac{2}{3}iz + (2 - \frac{4}{3}i)i = \frac{2}{3}iz - \frac{4}{3} + 2i$ donc f est la similitude directe de centre G, de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3



1°) La construction de la figure

2°.a) B' étant le projeté orthogonal de B sur (AC), alors

$\overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CA}.\overline{CB'} = CA.CB'$ car $\overline{CA}$ et $\overline{CB'}$ sont colinéaires de même sens

D'autre part, A' est aussi le projeté orthogonal de A sur (BC), d'où

$\overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CB}.\overline{CA'} = CB.CA'$, car $\overline{CA'}$ et $\overline{CB}$ sont colinéaires de même sens

Donc on a : $\boxed{\overline{CA}.\overline{CB} = CA \times CB' = CB \times CA'}$.

b) D'après la question 2.a) on a $CA.CB' = CA'.CB \Leftrightarrow CB' = \dfrac{CA'.CB}{CA} = \dfrac{CB}{CA}.CA' = \dfrac{2a \times a}{3a} \Rightarrow \boxed{CB' = \frac{2}{3}a}$

Puisque $B' \in [AC]$ alors $AB' = AC - B'C = 3a - \frac{2}{3}a \Rightarrow \boxed{AB' = \frac{7}{3}a}$

c) Comme $B' \in [AC]$ alors les vecteurs $\overline{B'A}$ et $\overline{B'C}$ sont colinéaires et de sens contraire d'où Nous avons

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = -\frac{B'A}{B'C} = -\frac{\frac{7}{\cancel{3}}\cancel{a}}{\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{a}} = -\frac{7}{2} \Rightarrow 2\overline{B'A} = -7\overline{B'C}$$, ce qui montre que $2\overrightarrow{B'A} + 7\overrightarrow{B'C} = \vec{0}$.

Donc $B' = \text{bar}$

A	C
2	7

d) On donne $G = \text{bar}$

A	B	C
2	7	7

, l'utilisation du barycentre partiel montre, d'une part que

$G = \text{bar}$

A	A'
2	14

, donc $G \in (AA')$ et d'autre part, on a : $G = \text{bar}$

B	B'
7	9

, donc $G \in (BB')$.

Par conséquent G est le point d'intersection des deux hauteurs (AA') et (BB').

D'où G est l'orthocentre H.

4.a) les triangles ABA' et ABB' sont des triangles rectangles de même hypoténuse $[AB]$, donc les points A, B, A' et B' appartiennent au même cercle de diamètre $[AB]$. De même, les triangles HA'C et HB'C sont des triangles rectangles de même hypoténuse $[HC]$, donc les points H, A', C et B' appartiennent au même cercle de diamètre $[HC]$.

b. Puisque les points A, B, A' et B' sont cocycliques de même que les points H, A', C et B' alors on a :

$\left(\overrightarrow{HA'};\overrightarrow{HC}\right)=\left(\overrightarrow{B'A'};\overrightarrow{B'C}\right)[\pi]$ (cocyclicité de H, A', B' et C)

$=\left(\overrightarrow{B'A'};\overrightarrow{B'A}\right)[\pi]$ (colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{B'C}$)

$=\left(\overrightarrow{BA'};\overrightarrow{BA}\right)[\pi]$ (cocyclicité de A, B, A' et B')

$=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CA'}\right)[\pi]$ (égalité des angles à la base d'un triangle isocèle)

$=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)[\pi]$ (colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{CA'}$ et $\overrightarrow{CB}$)

D'où $\boxed{\left(\overrightarrow{HA'};\overrightarrow{HC}\right)=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)[\pi]}$

Calcul de $\left(\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HB}\right)$:

$\left(\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HB}\right)=2\times\left(\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HA'}\right)$ ((HA') est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HB}\right)$)

$=-2\times\left(\overrightarrow{HA'};\overrightarrow{HC}\right)$ (permutation des vecteurs)

$=-2\times\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$ (résultat précédent)

Or $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}(\pi-\theta)$ d'où $\left(\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HB}\right)=-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=-\pi+\theta\Rightarrow\boxed{\left(\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HB}\right)=\theta[\pi]}$

Exercice 4

On considère la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par $f(0)=0$ et $\forall x>0, f(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

1- 1° a) Nous avons $f(x)=x\ln(x+1)-x\ln(x)$ et

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x+1)=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$ donc la fonction f est continue à droit de zéro.

Autre méthode : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}=0=f(0)$, d'où f est continue à droit de zéro.

Et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln(1+t)=+\infty$, donc la fonction f n'est pas dérivable à droit de zéro.

Remarque : la courbe admet à droite du point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

b) $\forall x\in]0;+\infty[$, on a

$f(x)=x\ln(x+1)-x\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}-\ln x-1\Rightarrow\boxed{f'(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}}$

et $f'(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}\Rightarrow f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow\boxed{f''(x)=\frac{-1}{x(x+1)^2}}$

Autre méthode : $f'(x)=\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)'=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x\times\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}=\boxed{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}}$ et

$f''(x)=\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)'=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-x-1}{x(x+1)^2}+\frac{x}{x(x+1)^2}=\boxed{\frac{-1}{x(x+1)^2}}$

) Alors $\forall x \in]0;+\infty[$, $f''(x) < 0$ d'où la fonction f' est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et on a

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) = +\infty \text{, et}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) = 0,$$

d'où le tableau de variation de f' :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
f''	$-$
f'	$+\infty \searrow 0$

D'après le tableau ci-contre, $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) > 0$

2° a) nous avons $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ Donc la courbe (C) admet en $+\infty$ une asymptote horizontale Δ, d'équation $y = 1$.

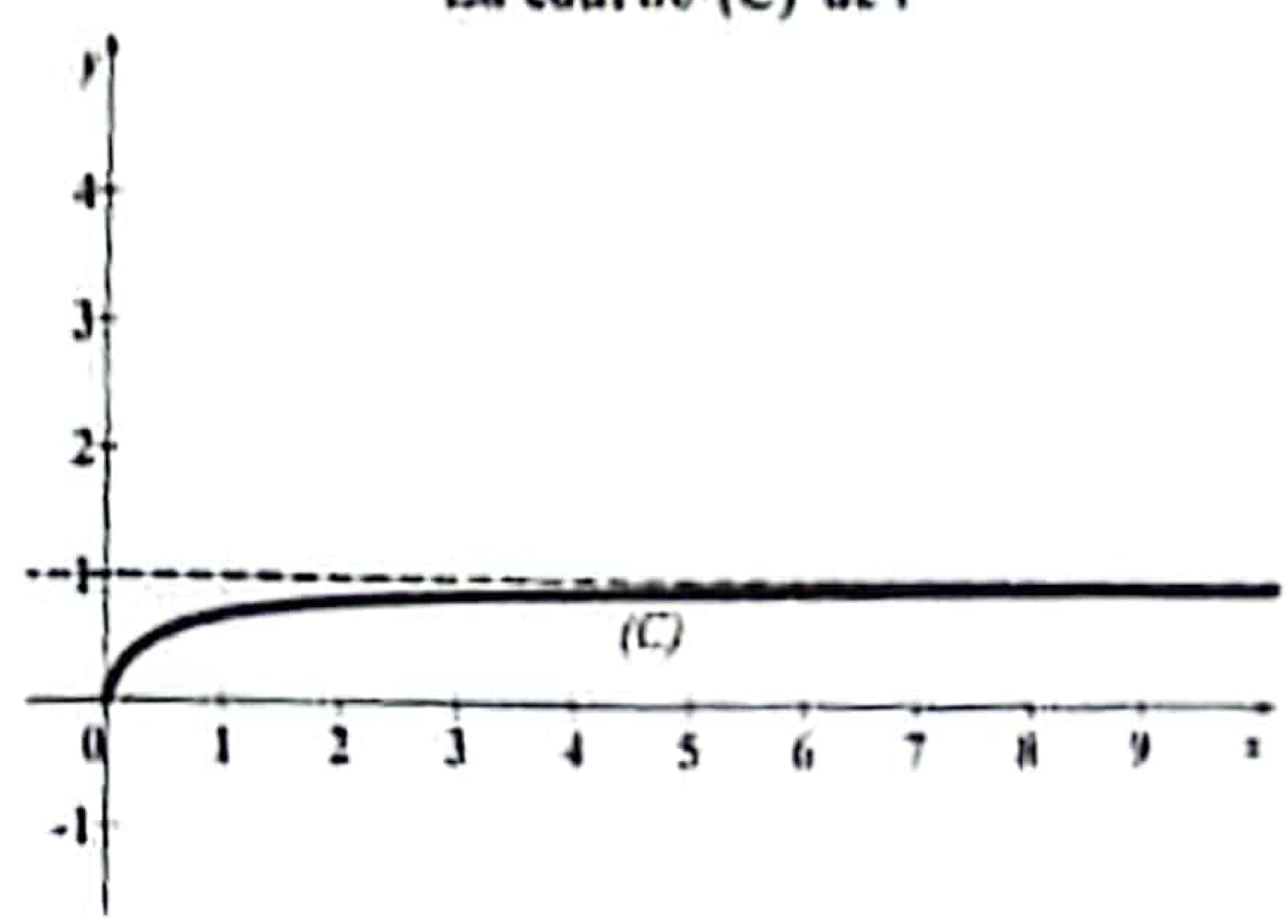
b) Variations de f et tracé de sa courbe : on a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) > 0$,

d'où :

Le tableau de variations de f

x	0 $\quad$ $+\infty$
f'	$+$
f	$0 \nearrow 1$

La courbe (C) de f



II. soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = -\frac{1}{x}(f(x) - 1) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

II- 1.a) soit n un entier supérieur ou égal à 1, nous avons

$$g(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n} - [\ln x]_n^{n+1} = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

b) soit n un entier supérieur ou égal à 1, $\forall x \in [n;n+1]$, on a

$$n \le x \le n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \Rightarrow \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx \Rightarrow \boxed{\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \le \frac{1}{n}}$$

Et il en résulte que : $\frac{-1}{n} \le -\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \le \frac{-1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \le \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \le \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

D'où donc $\boxed{0 \le g(n) \le \frac{1}{n(n+1)}}$.

2°) Pour tout entier naturel $n \ge 1$, on définit la suite (U_n) par :

$$U_n=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}$$

2° a) Pour tout $n\geq 1$ on a : $0\leq g(n)\leq\frac{1}{n(n+1)}$

Pour tout k compris entre 0 et 2n on a $0\leq g(k)\leq\frac{1}{k(k+1)}\Rightarrow 0\leq\sum_{k=n}^{2n}g(k)\leq\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}$ d'où

$0\leq g(n)+g(n+1)+g(n+2)+\cdots+g(2n)\leq U_n$

b) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$ donc U_n s'écrit :

$$U_n=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n+1}}+\cancel{\frac{1}{n+1}}-\cancel{\frac{1}{n+2}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{2n}}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow U_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}=\boxed{\frac{n+1}{n(2n+1)}}$$

Autre méthode : $U_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow U_n=\frac{1}{n}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}=\frac{n+1}{n(2n+1)}$$

c) Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n(2n+1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n^2+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$

Et puisque $0\leq g(n)+g(n+1)+\cdots+g(2n)\leq U_n$ pour tout $n\geq 1$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[g(n)+g(n+1)+\cdots+g(2n)\right]=0$ (théorème des gendarmes)

Exercice 5

1° a) Les limites de f avec $f(x)=(x+2)e^{-x}$

* $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty}$; * $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)=0\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$

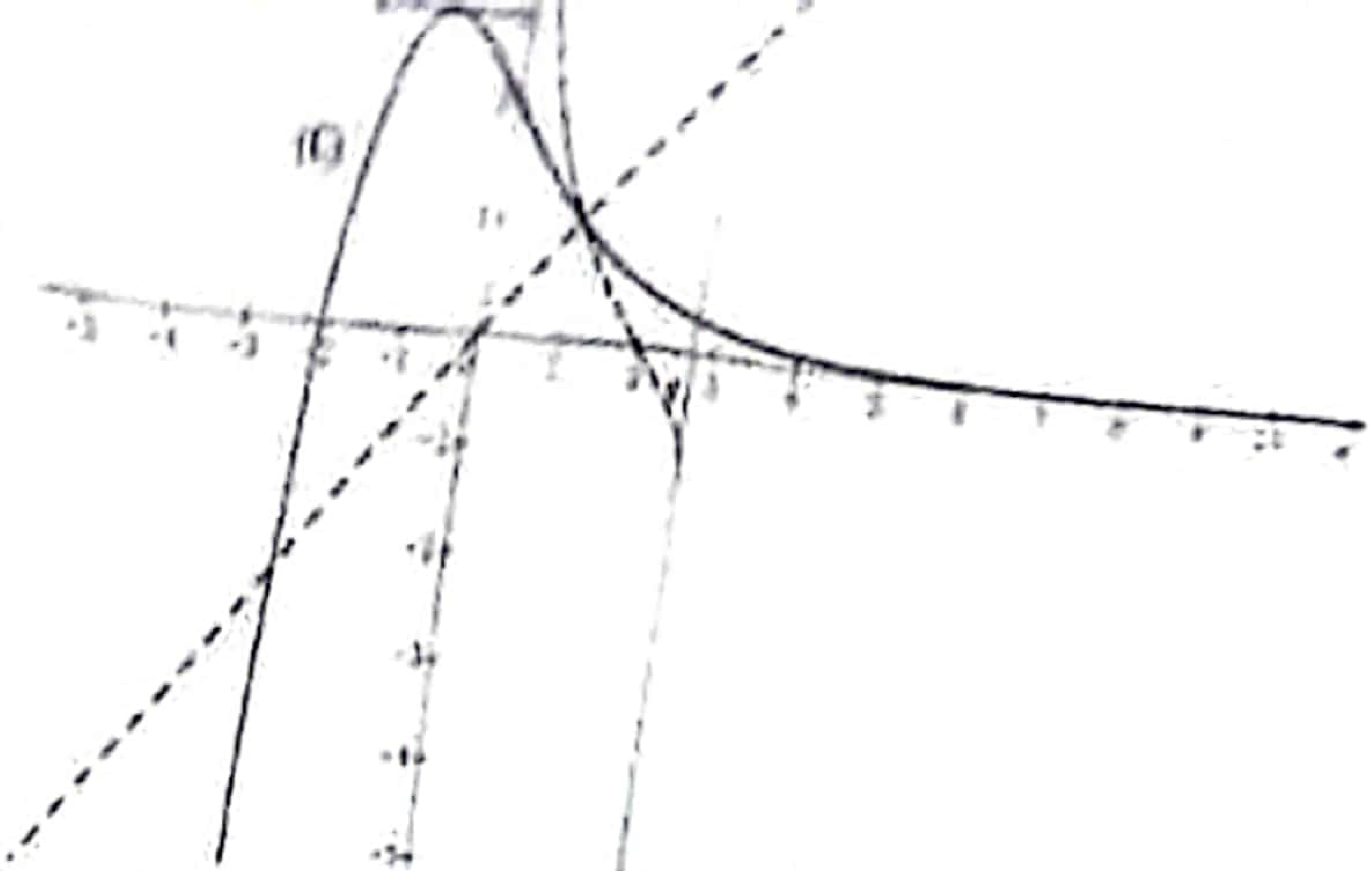
* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{-x}\right]=+\infty\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty}$.

Interprétation graphique : (C) admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=0$ (qui est l'axe (Ox)) et admet en $-\infty$ une branche parabolique parallèle à l'axe (Oy) .

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=e^{-x}-(x+2)e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$. Elle s'annule pour $x=-1$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		+	0	−	
f	$-\infty$	↗	e	↘	0



2° a) La fonction f étant continue et strictement décroissante sur I alors sa restriction g réalise une bijection de I sur son intervalle image qui est $J =]0,e]$.

b) La courbe (C') est symétrique à (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$. Pour la construction voir la figure ci-dessus.

3° a) Pour tout $x \in [-2;0]$ on a $-2 \le x \le 0 \Rightarrow 0 \le x+2 \le 2 \Rightarrow 0 \le (x+2)^n \le 2^n$ (1) , de même

$-2 \le x \le 0 \Rightarrow 0 \le -x \le 2 \Rightarrow 1 \le e^{-x} \le e^2 \Rightarrow \frac{1}{n!} \le \frac{e^{-x}}{n!} \le \frac{e^2}{n!}$ (2). Le produit des deux doubles inégalités

(1) et (2) montre que $\forall x \in [-2;0]$, $0 \le \frac{(x+2)^n}{n!} e^{-x} \le \frac{2^n}{n!} e^2$.

b) On a $I_1 = \int_{-2}^{0} (x+2) e^{-x} dx$. Procédons par intégration parties. Posons $\begin{cases} u' = e^{-x} \\ v = x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -e^{-x} \\ v' = 1 \end{cases}$ d'où

$I_1 = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} e^{-x} dx = \left[-(x+3)e^{-x}\right]_{-2}^{0} = -3 + e^2$ donc $\boxed{I_1 = e^2 - 3}$

c) Utilisons encore une intégration par parties sur $I_{n+1} = \int_{-2}^{0} \frac{(x+2)^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!} dx$.

Posons $\begin{cases} u' = e^{-x} \\ v = \frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -e^{-x} \\ v' = \frac{(n+1)(x+2)^n}{(n+1)!} = \frac{(x+2)^n}{n!} \end{cases}$ d'où

$I_{n+1} = \left[-\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}\right]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} \frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!} dx \Rightarrow \boxed{I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = e^2 - U_n$.

D'après la question 3.b) on a $I_1 = e^2 - 3$ et puisque $U_1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{2^k}{k!} = \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} = 3$ alors $I_1 = e^2 - U_1$.

Supposons que $I_n = e^2 - U_n$ et montrons que $I_{n+1} = e^2 - U_{n+1}$. On a

$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = e^2 - U_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = e^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = e^2 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \Rightarrow I_{n+1} = e^2 - U_{n+1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = e^2 - U_n$.

5° $v_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \times \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n+1} v_n$. En plus $\forall n \ge 2$ on a $n+1 \ge 3 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{n+1} \le \frac{2}{3}$

la multiplication par v_n, qui est strictement positif, donne $\frac{2}{n+1}v_n \leq \frac{2}{3}v_n \Rightarrow \boxed{v_{n+1} \leq \frac{2}{3}v_n}$.

Utilisons la récurrence de nouveau pour montrer que $\forall n \geq 2,\ v_n \leq 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

<u>Initialisation</u> : On a $v_2 = \frac{2^2}{2!} = 2 \leq 2\times 1 = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2-2}$, alors l'inégalité est vraie pour $n=2$.

<u>Hérédité</u> : Supposons que $v_n \leq 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ et montrons qu'alors $v_{n+1} \leq 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Puisque $v_{n+1} \leq \frac{2}{3}v_n$ on a donc $v_{n+1} \leq \frac{2}{3}\times 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

<u>Conclusion</u> : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right] = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

6° D'après la question 3°a) on a : $\forall x \in [-2;0],\ 0 \leq \frac{(x+2)^n}{n!}e^{-x} \leq \frac{2^n}{n!}e^2$, en intégrant cette double inégalité

on trouve : $0 \leq \int_{-2}^{0}\frac{(x+2)^n}{n!}e^{-x}dx \leq \int_{-2}^{0}\frac{2^n}{n!}e^2dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq 2\times\frac{2^n}{n!}e^2 = 2e^2\times v_n$, d'où $\forall n \geq 2$, on a

$\boxed{0 \leq I_n \leq 2e^2\times v_n}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

D'après la question 3°c) on a $I_n = e^2 - U_n \Rightarrow U_n = e^2 - I_n$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^2$.