ورقة العاطف

Exercice 1 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n+2}{2n+2}u_n + \frac{n}{2n+2}$ et soit $v_n = \frac{u_n - 1}{n+1}$.

Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de u_2 est	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{4}$	0,75pt
2	La suite (u_n) est	Positive	Négative	Nulle	0,75pt
3	La valeur de $u_{n+1} - 1$ est	$\frac{(n+2)u_n + n - 1}{2n+2}$	$\frac{(n+2)(u_n - 1)}{2n+2}$	u_n	0,5pt
4	La suite (v_n) est	Géométrique	Arithmétique	Ni arithmétique, ni géométrique	0,5pt
5	Le terme général de (v_n) est	$\frac{1}{2^n}$	$1 + \frac{n}{2}$	$1 + \frac{1}{2^n}$	0,5pt

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Réponse					

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3i$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = -3-3i$

1° a) Calculer $(2-i)^2$. 1pt

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (2+5i)z - 6 + 6i = 0$. 1pt

2° a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres z_B et z_C 0,5pt

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|z - 3i| = |z - 2 - 2i|$. 0,5pt

3° On pose $z_0 = z_C$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}iz_n + 1 + 3i$ et $d_n = |z_n - z_A|$

a) Montrer que $z_1 = z_B$ 0,5pt

b) Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{z_{n+1} - z_A}{z_n - z_A} = \frac{1}{3}i$ puis en déduire la nature du triangle AM_nM_{n+1} 0,5pt

c) Déduire que (d_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison. 0,5pt

d) Exprimer en fonction de n la somme : $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + ... + d_n$ 0,5pt

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x^2+1+2\ln x}{2x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat. 1pt

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$ et déduire que la courbe (C) admet une asymptote (D) à préciser. 1pt

2° a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{-2\ln x}{x^3}$. 1pt

b) Dresser le tableau de variation de f. 0,25pt

3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. 0,5pt

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}. 0,5pt

4°a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution x_0 et que $0,4<x_0<0,5$. 0,5pt

b) Construire (D), (C) et (C'), ((C') étant la courbe représentative de g^{-1}). 0,5pt

5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer $I=\int_1^e \dfrac{\ln x}{x^2}dx$. 0,5pt

b) En déduire l'aire A du domaine plan délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$. 0,25pt

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-4)(e^x-1)$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(2x-2)e^x-2$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=-2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=+\infty$ 1pt

b) Calculer $h'(x)$ puis dresser le tableau de variation de h. 1pt

c) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et justifier que $1,2<\alpha<1,3$ 0,5

d) Déterminer le signe de h sur $\mathbb{R}$ 0,5

2° a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement. 0,7

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ et que la droite (Δ) d'équation $y=-2x+4$ est une asymptote à Γ. Etudier la position relative entre (Δ) et Γ 0,7

3° a) Montrer que $f'(x)=h(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ 0,5

b) Dresser le tableau de variation de f. 0,

c) Vérifier que $f(\alpha)=-\dfrac{2(\alpha-2)^2}{\alpha-1}$ 0,

4° a) Déterminer les points d'intersection de Γ avec les axes de coordonnées. 0,

b) Construire (D) et Γ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (on prendra $\alpha=1.3$) 0,

[illegible]

Fin.