

Exercice 1 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (1 + 2\cos\theta)z^2 + (1 + 2\cos\theta)z - 1$ où $\theta \in [0; 2\pi[$.

1) Calculer $P(1)$ puis déterminer les solutions z_0 , z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ sachant que z_0 est réel, et $\text{Im } z_1 \geq 0$ si $\sin\theta \geq 0$. (1,5)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points M_0 , M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0 , z_1 et z_2 . Déterminer, lorsque θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$, le lieu géométrique Γ_1 des points M_1 et M_2 . (0,5)

3) Soit le point G barycentre du système $S = \{(M_0, 1); (M_1, 1); (M_2, -3)\}$

a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$, alors le lieu géométrique Γ du point G est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne. (0,5)

b) Déterminer, dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les coordonnées du centre et des sommets, puis calculer l'excentricité de l'ellipse Γ . Construire Γ dans ce repère. (0,5)

4) On suppose dans cette question que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les coordonnées des points M_0 , M_1 , M_2 et G . Placer ces points sur la figure précédente. Quelle est la particularité de G dans ce cas ? (0,5)

b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ' des points M du plan tels que :

$$MM_0^2 + MM_1^2 - 3MM_2^2 = 6$$

(0,5)

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x); & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1.a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$, interpréter graphiquement. (0,75)

b) Dresser le tableau de variations de f . (0,75)

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Construire la courbe (C) . (0,25)

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :
$$\begin{cases} f_n(x) = x^n(1 - \ln x); & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

a) Pour $n \geq 2$, étudier la dérivabilité de f_n à droite de $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement. (0,25)

b) Dresser le tableau de variation de f_n . (0,5)

3.a) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points communs que l'on déterminera. (0,5)

b) Etudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}) . (0,25)

4) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $U_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 f_n(x) dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale U_n . (0,25)

b) Justifier sans calcul, que la suite (U_n) est positive et décroissante. (0,25)

c) Donner l'expression de U_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,25)

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbf{IR} par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1.a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement. (0,75)

b) Vérifier que f est impaire, puis dresser son tableau de variation. (1)

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm . (0,25)

d) Calculer l'aire A du domaine plan limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 3$. (0,25)

2. On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = \ln 3, \text{ et pour tout entier naturel } n \geq 1 : U_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt.$$

a) Calculer U_1 . (0,25)

b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,5)

c) Vérifier que pour tout $x \geq 0$ on a : $1 - f'(x) = (f(x))^2$. Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}. \quad (0,75)$$

d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{cases} U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \\ U_{2n+1} = \ln \frac{5}{3} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p} \left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \end{cases} \quad (0,5)$$

e) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \frac{1}{2n} \left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} \left(\frac{4}{5}\right)^p$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. (0,75)

Exercice 4 (7 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre G et de côté a , $a > 0$.

Soient I , J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale) (0,75)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme I en A et B en J . (0,5)

c) Déterminer un angle de r_1 et préciser son centre. (0,5)

2) On considère la rotation r_2 de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $r_2(C)$, $r_2(J)$. (0,5)

b) En déduire l'image de la droite (AC) par r_2 puis la construire. (0,25)

3) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $k = \frac{-1}{2}$. On pose $s = r_1 \circ h$.

a) Quelle est l'image du triangle ABC par h ? (0,25)

b) Montrer que s est une similitude directe et donner son rapport et son angle. (0,5)

c) Déterminer $s(A)$. Que peut-on conclure ? (0,25)

- d) Donner la forme réduite de s . (0,25)
- 4) On pose $s^1 = s$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s^{n+1} = s \circ s^n$.
- a) Caractériser s^3 . (0,25)
- b) Soit $p = 10^{2011}$. Montrer que s^{p-1} est une homothétie de rapport négatif. (0,75)
- 5) Pour tout point M du plan, on pose : $r_1(M) = M_1$, $r_2(M) = M_2$ et $s(M) = M'$.
- a) Déterminer M_1, M_2 dans chacune des positions suivantes de M : M est en I ; en K ; ou en A . (0,75)
- b) Montrer que, pour tout M distinct de A , le triangle AMM' est rectangle. (0,25)
- c) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés. (On pourra considérer les triangles IMM_2 , KMM_1 et l'angle $(\overrightarrow{MK}; \overrightarrow{MI})$). (0,5)
- 6) On suppose dans cette question que M est situé sur le cercle de diamètre $[AC]$, M est distinct du point A . Montrer que :
- a) La droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,25)
- b) La droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,25)
- c) L'angle $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{MM'})$ à une mesure constante α modulo π que l'on déterminera. (0,25)

Fin .