بسم الله الرحمن الرحيم

قالوا سبحانك لا علم لنا إلا ما علمتنا إنك أنت العليم الحكيم

صدق الله العظيم

Classe de 7$^{\text{ème}}$ C

Nombres Complexes

68 exercices corrigés

82 exercices proposés

Professeur

Sidi MAJOR

Série : mathématiques en mouvement

$$\mathbf{Réussite} = \int_{\mathbf{début}}^{\mathbf{fin}} \left(\mathbf{travail} \big/ \mathbf{méthode} \right) \mathbf{d}\left(\mathbf{temps}\right)$$

« Aucune notion n'est plus relative que celle de réussite. Elle évoque un résultat, et n'a de sens que par comparaison. Sa mesure dépend du terme de référence, ou de la valeur à laquelle on accorde le plus de prix. Elle ressortit à plusieurs ordres. Pour telle personne elle se mesure en argent ou en pouvoir, pour telle autre en vertu ou en savoir, pour telle autre en beauté.

Quel que soit l'objet de prédilection de chacun, et sans chercher à savoir qui l'emporte du savant, du capitaine ou du poète, la réussite de l'un ou de l'autre repose d'abord sur un sentiment personnel et constitue l'incarnation de l'esprit de la formule intégrale citée ci-haut. »

Alain GIRARD, modifié
La réussite sociale
Que sais-je. PUF

Dépôt légal : 1658/2016

Préambule

« Les plus belles victoires,
les seules qui ne peuvent donner aucun regret,
sont celles que l'on fait sur l'ignorance »
Napoléon BONAPARTE

Chers lecteurs, chères lectrices, comme il est impossible d'apprendre à nager sans plonger dans l'eau, il est également impossible d'apprendre à résoudre des problèmes de mathématiques sans mettre la main à la patte autrement dit sans se confronter réellement à des exercices variés aussi bien au niveau du concept qu'au niveau de la difficulté.

Partant de cette conception, nous avons opté de donner :

- → *un rappel de cours illustré par des exemples d'application mis en face à face du rappel;*
- → *une batterie d'exercices corrigés, chapeautés de citations, proverbes ou maximes parfois humoristiques, empruntés à différentes cultures : arabes, africaines, asiatiques et européennes, pour attiser la sagacité du lecteur et briser la monotonie de la pesanteur naturelle du raisonnement scientifique. Ces corrigés sont accompagnés, pour certains, de commentaires et/ou de repères historiques qui replacent la notion étudiée dans son contexte heuristique ;*
- → *une batterie d'exercices proposés à la résolution, de niveaux très variés, couvrant presque tous les types de questions susceptibles d'être posées dans le champ conceptuel étudié.*

Pour la batterie d'exercices corrigés, les corrigés ne doivent pas être consultés avant de faire une recherche hardie des solutions ; ces corrigés devront d'ailleurs constituer une source d'inspiration, un modèle de rédaction pour pouvoir s'attaquer efficacement aux exercices proposés.

La résolution d'un exercice ne peut et ne doit en aucun cas être une finalité en soi, mais c'est le cheminement intellectuel adopté dans la résolution qui doit être interpellé pour pouvoir dégager une démarche méthodologique générale pouvant être appliquée à toute une gamme de problèmes similaires. Donc l'objectif final de l'exercice de maths reste la capacité à débusquer des méthodes de résolution de problèmes qui se veulent transversales.

Il y a dans la résolution de tout problème de mathématiques, un peu d'une découverte. Un problème qui vous est soumis peut être sans prétention ; mais, s'il pique votre curiosité et fait entrer en jeu vos facultés d'invention et de créativité, si vous le résolvez par vous-même … vous pouvez en ce moment-là connaître le charme de la découverte et en goûter le triomphe. Ce genre d'expérience peut déterminer le goût du travail intellectuel et laisser, tant sur l'esprit que sur le caractère, une empreinte indélébile qui façonnera la personnalité future de l'apprenti-chercheur que vous êtes.

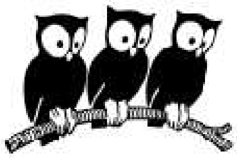
D'autre part, vous remarquerez à travers les corrigés de ce manuel qu'une attention particulière a été accordée à la rédaction et à la rigueur du raisonnement. En effet, les mathématiques sont par excellence une science de la rigueur et donc tout compromis, aussi léger que soit-il, au détriment de cette rigueur compromettrait la quintessence même de la discipline. Dans ce domaine, je ne me gênerais point d'illustrer le haut niveau de rigueur des mathématiques, comparativement à toutes les autres sciences, à travers l'anecdote qui suit :
« U n mathématicien, un physicien et un ingénieur voyagent à travers l'Écosse. Ils voient un mouton noir par la fenêtre du train et immédiatement un dialogue s'instaure entre les trois voyageurs :
L'ingénieur : « Ah !, les moutons de ce pays sont noirs. » ;
Le physicien : « Hmm !, on peut plutôt dire que dans ce pays, il y a des moutons noirs. » ;
Le mathématicien : « Ah ! Non, tout ce qu'on peut dire c'est que dans ce pays, il y a au moins un mouton et que ce mouton-là a au moins un côté noir. »
Ah !, c'est clair qu'il y a ici une nette nuance dans la précision et telle est la vraie singularité des maths.

Ce 1^{er} tome s'adresse spécialement aux élèves de la classe de $7^{ème}$ C, aux professeurs de mathématiques, aux amateurs, mais aussi aux étudiants du 1^{er} cycle universitaire en MP et MI.

Enfin, je ne pourrai terminer sans exprimer, a priori, ma sincère gratitude à ceux et à celles qui prendront le soin de relever des remarques sur ce manuel tant sur la forme que sur le contenu et auront ensuite la gentillesse de me les faire parvenir sur l'adresse électronique « sidimajor@gmail.com » pour qu'ensemble, vous et moi, nous pourrions, par le biais de ce travail, apporter une mince contribution à l'enrichissement du patrimoine scolaire national.

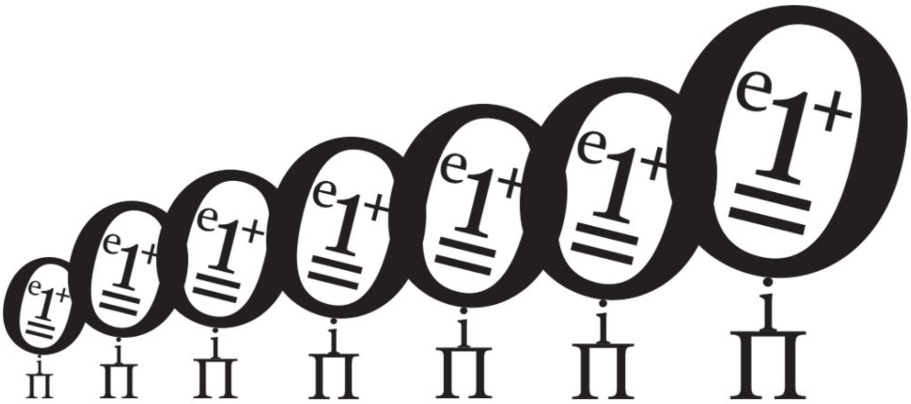
Par l'auteur
Sidi MAJOR

Dédicace



- → à tous les collègues,
- → aux élèves assoiffés de savoirs,
- → à France Guerlain,
- → à Tahya Tiki Demba.

Nombres Complexes



L'identité d'Euler $\mathbf{e^{i\pi} = -1}$ est la bombe des équations, une œuvre d'art, …, une combinaison improbable de 0, 1, pi, e et i qui fait rougir les mathématiciens...

(Cédric VILLANI)

Citations-Choc:

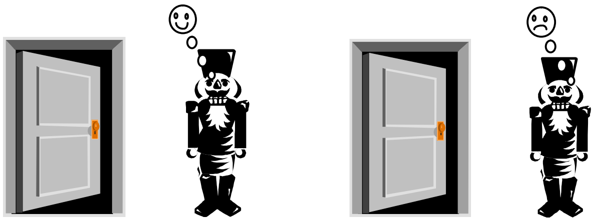
« Pourquoi la vie est complexe ? Parce qu'elle a une partie réelle et une partie imaginaire ».

Marius Sophus Lie.

« Il apparut que, entre deux vérités du monde réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.»

Jacques Hadamard (1865-1963)

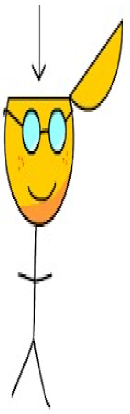
Énigme : Le gardien menteur



Un chevalier dans un labyrinthe, se retrouve face à 2 chemins, celui de droite et celui de gauche. L'un mène à la sortie, l'autre mène tout droit à la mort. Devant chaque sortie se trouve un gardien. Les 2 gardiens connaissent le bon chemin. Cependant l'un ment et l'autre dit la vérité, mais le chevalier ne sait pas à qui se fier. Il n'a le droit de poser qu'une seule question à un seul des gardiens.

Quelle est la question qui lui permet à coup sûr de déterminer le bon chemin ?

Le cours



I. Notion de nombres complexes –Conjugaison

Ensemble $\mathbb{C}$

- *On admet l'existence d'un ensemble de nombres, noté* $\mathbb{C}$*, tel que :*
  - ✓ $\mathbb{C}$ *contient* $\mathbb{R}$ *;*
  - ✓ $+$ *et* $\times$ *ont les mêmes propriétés dans* $\mathbb{C}$ *que dans* $\mathbb{R}$ *;*
  - ✓ *Il existe dans* $\mathbb{C}$ *un nombre i tel que* $i^2 = -1$ *;*
  - ✓ *Pour tout nombre complexe z, il existe un unique couple de réels (a ; b) tel que* $z = a + ib$*.*

Forme algébrique et conjugaison

- $z = a + ib$ *(avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *et* $i^2 = -1$*) est la forme algébrique du nombre complexe z.*

$a = Re(z)$ *et* $b = Im(z)$ *sont les parties réelle et imaginaire de z.*

$$i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i \quad , \quad i^4 = 1$$

Si $Im(z) = 0$ *alors* $z = a$ *est réel.*

Si $Re(z) = 0$ *alors* $z = ib$ *est dit imaginaire pur.*

On calcule dans $\mathbb{C}$ *comme dans* $\mathbb{R}$ *quitte à remplacer à chaque fois* i^2 *par* -1.

$$z = a + ib = 0 \iff a = b = 0$$

$$a + ib = c + id \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ réels})$$

- $\overline{z} = a - ib$ *est le conjugué de* $z = a + ib$*.*

Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier n :

$$z.\overline{z} = a^2 + b^2 \qquad \overline{\overline{z}} = z \qquad z + \overline{z} = 2Re(z) \qquad z - \overline{z} = 2i.Im(z)$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'} \qquad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}} \ (z \neq 0) \qquad \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$$

- *X et Y étant réels, on a :*

$$Z = X + iY \ \text{réel} \iff Y = 0 \iff \overline{Z} = Z$$

$$Z = X + iY \ \text{imaginaire pur} \iff X = 0 \iff \overline{Z} = -Z$$

Exemples d'application

Exemple 1

Calculer sous forme algébrique :

$$z_1 = (2+3i) + (-5+4i);\; z_2 = (2+3i).(-5+4i);\;\; z_3 = 3.(-5+4i);\;\; z_4 = \frac{1+i}{3+4i}.$$

Corrigé

$$z_1 = (2+3i) + (-5+4i) = (2-5) + (3+4)i = -3+7i.$$
$$z_2 = (2+3i).(-5+4i) = -10+8i-15i+12i^2 = -22-7i.$$
$$z_3 = 3.(-5+4i) = \big(3\times(-5)\big) + (3\times 4)i = -15+12i.$$
$$z_4 = \frac{1+i}{3+4i} = \frac{(1+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i+3i-4i^2}{3^2+4^2} = \frac{7-i}{25} = \frac{7}{25} - \frac{1}{25}i.$$

Exemple 2

Soit $z \in \mathbb{C}/\{1\}$ *et* $= \frac{z-1}{1-\overline{z}}$.

Montrer que $B = \frac{A-1}{z-1}$ *est un réel et que* $C = \frac{A+1}{z-1}$ *est un imaginaire pur.*

Corrigé

→ *Montrer que B est un nombre réel*

$$B = \frac{A-1}{z-1} = \frac{\frac{z-1}{1-\overline{z}} - 1}{z-1} = \frac{z+\overline{z}-2}{z+\overline{z}-1-z\overline{z}}.$$

Or si $z = x+iy$ *alors* $z+\overline{z} = 2Re(z) = 2x \in \mathbb{R}$ *et* $z\overline{z} = x^2+y^2 \in \mathbb{R}$ *et par suite* $B = \frac{A-1}{z-1}$ *est un réel.*

→ *Montrer que C est un imaginaire pur*

$$C = \frac{A+1}{z-1} = \frac{\frac{z-1}{1-\overline{z}} + 1}{z-1} = \frac{z-\overline{z}}{(1-\overline{z})(z-1)} = \frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}-1-z\overline{z}}.$$

Or si $z = x+iy$ *: alors* $z-\overline{z} = 2iIm(z) = 2iy \in i\mathbb{R}$ *et on sait déjà que :*

$z+\overline{z}-1-z\overline{z} = 2x-1-(x^2+y^2) \in \mathbb{R}$ *et par suite* $C = \frac{A+1}{z-1}$ *est imaginaire pur.*

Exemple 3

Montrer, sans calculer, que les nombres suivants sont réels:

$$A = \frac{3-4i}{2i+1} + \frac{3+4i}{-2i+1}\;\;;\;\; B = i\left[\frac{3-4i}{2i+1} - \frac{3+4i}{-2i+1}\right]\;\;;\;\; C = \left(\frac{3-4i}{2i+1}\right)\left(\frac{-3-4i}{-2i+1}\right).$$

Corrigé

On remarque, en posant $z = \frac{3-4i}{2i+1}$*, qu'on a :*

$$A = z+\overline{z} = 2Re(z) \in \mathbb{R}$$
$$B = i(z-\overline{z}) = i.2iIm(z) = -2Im(z) \in \mathbb{R}$$
$$C = z\times(-\overline{z}) = -z.\overline{z} \in \mathbb{R}.$$

II. Représentation géométrique

- *Le plan muni d'un repère orthonormal direct est appelé plan complexe. Dans un tel plan, à un point M(a; b) on associe son affixe $z_M = a + ib$ et réciproquement.*
  Si $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ alors :
  L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$;
  L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$;
  L'affixe du barycentre G de (A; a) (B; b) (C; c) est :

$$z_G = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c} \quad (avec\ a+b+c \neq 0)$$

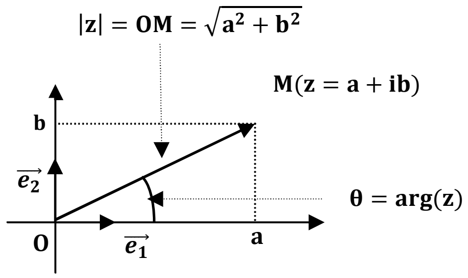
- *On calcule sur les affixes comme on calcule sur les coordonnées.*
- *Si α est un réel et $\vec{u}$ un vecteur alors : $z_{\alpha\vec{u}} = \alpha . z_{\vec{u}}$*

III. Module - Argument

- ***Forme trigonométrique***

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe <u>non nul</u> avec a et b des réels et M son point image. Si θ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$ alors :

$\theta = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}) = arg\ (z)$
(argument de z)
$OM = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$
(module de z)



- *On peut écrire (forme trigonométrique de z) :*

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *avec* $r = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$ *car le réel θ est tel que :*

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|} \quad et \quad sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

Remarque : $signe(cos\theta) = signe(Re(z))$ *et* $signe(sin\theta) = signe(Im(z))$.

<u>Attention :</u> 0 n'a pas d'argument !

- ***Propriétés du module :***
  Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel.
  - ✓ $si\ z = a + ib \quad alors\ |z| = \sqrt{a^2+b^2}$
  - ✓ z *réel* $\Rightarrow |z| = valeur\ absolue\ de\ z$

$\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	$\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$
$\lvert z\rvert^2 = z.\overline{z}$	$\lvert z.z'\rvert = \lvert z\rvert.\lvert z'\rvert$
$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}\ si\ z \neq 0$	$\left\lvert\frac{z'}{z}\right\rvert = \frac{\lvert z'\rvert}{\lvert z\rvert}\ si\ z' \neq 0$
$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$AB = \lvert z_B - z_A\rvert$

Attention : $\forall z, z' : |z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire).*

Exemples d'application

Exemple 4

Soit dans le plan complexe, les points A, B, C *d'affixes respectives :* $2-3i\ ;\frac{1}{2}\ ; 1+4i$ *. Calculer les affixes du vecteur* $\overrightarrow{AB}$*, du milieu* I *de* $[AB]$*, du centre de gravité* G *de* ABC *et du point* E *tel que* $ABCE$ *soit un parallélogramme.*

Corrigé

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = \frac{1}{2} - (2-3i) = \frac{1}{2} - 2 + 3i = -\frac{3}{2} + 3i;$$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{\frac{1}{2} + (2-3i)}{2} = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}i;$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{(2-3i) + \frac{1}{2} + (1+4i)}{3} = \frac{7}{6} + \frac{1}{3}i.$$

$ABCE$ *parallélogramme* $\Leftrightarrow\ \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}\ \Leftrightarrow\ z_{\overrightarrow{EC}} = z_{\overrightarrow{AB}}$

$$\Leftrightarrow\quad z_E = z_C - z_{\overrightarrow{AB}} = (1+4i) - \left(-\frac{3}{2} + 3i\right) = \frac{5}{2} + i.$$

Exemple 5

Calculer le module de chaque nombre complexe :

$$z_1 = 4 - 3i;\ \ z_2 = 1 + i\ ;\ \ z_3 = \frac{1+i}{4+3i}\ ;\ z_4 = (1+i)^8.$$

Corrigé

$$z_1 = |4-3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;\ \ z_2 = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ ;$$

$$z_3 = \left|\frac{1+i}{4+3i}\right| = \frac{|1+i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{2}}{5};\quad z_4 = |(1+i)^8| = |1+i|^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 = 16.$$

Exemple 6

Déterminer, dans le plan complexe, l'ensemble des points $M(z)$ *tels que :*

1) $|z-2| = |z+1|$ *; 2)* $|\overline{z} + 2i| = |z + 3 - i|$ *; 3)* $|iz+2| = 5$ *;* *4)* $|z-2i| = |2z+4|$.

Corrigé

Soit les points $A(2), B(-1), C(2i), D(-3+i)$ *et* $E(-2)$

1) $|z-2| = |z+1| \Leftrightarrow\ |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow\ M$ *sur la médiatrice de* $[AB]$

2) $|\overline{z}+2i| = |z+3-i| \Leftrightarrow \left|\overline{\overline{z}+2i}\right| = |z+3-i| \Leftrightarrow |z-2i| = |z-(-3+i)|$

$\Leftrightarrow |z_M - z_C| = |z_M - z_D| \Leftrightarrow CM = DM\ \Leftrightarrow\ M \in med[CD]$

3) $|iz+2| = 5 \Leftrightarrow |i(z-2i)| = 5 \Leftrightarrow |i|.|z_M - z_C| = 5 \Leftrightarrow |z_M - z_C| = 5$

$\Leftrightarrow CM = 5 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(C,5)$

4) $|z-2i| = |2z+4|\ \Leftrightarrow\ |z-2i| = 2|z+2| \Leftrightarrow\ |z_M - z_C| = 2|z_M - z_E|$

$\Leftrightarrow CM = 2EM \Leftrightarrow\ CM^2 = 4EM^2\quad \Leftrightarrow\quad \overrightarrow{CM}^2 = 4\overrightarrow{EM}^2$

$\Leftrightarrow\ \left(2\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{CM}\right).\left(2\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{CM}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_1M}.3\overrightarrow{G_2M} = 0\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{G_1M}.\overrightarrow{G_2M} = 0$ *où* $\begin{cases} G_1 = bar\{(E,2);(C,-1)\} \\ G_2 = bar\{(E,2);(C,1)\} \end{cases}$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

- *Notation exponentielle*

On pose : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
Si $|z| = r$ *et* $arg(z) = \theta$ *alors z s'écrit:* $z = re^{i\theta}$.

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} \quad et \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1 \,, \quad arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta\ [2\pi].$$

$$e^{i0} = 1, \qquad e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Le calcul sur la forme $e^{i\theta}$ *obéit aux règles des puissances.*

Formules d'Euler :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad et \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Identités à retenir : *Pour tous réels* α *et* β *:*

$$1 - e^{i\alpha} = -2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} \quad et \quad 1 + e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = -2i\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \quad et \quad e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

IV. Propriété et détermination des arguments

- ***Propriétés des arguments***

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, n *un entier naturel et b un réel.*

- ✓ z réel $> 0 \iff arg(z) = 0\ [2\pi]$
- ✓ z réel $< 0 \iff arg(z) = \pi\ [2\pi]$
- ✓ $z = ib, b > 0 \iff arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- ✓ $z = ib, b < 0 \iff arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- ✓ $arg(\overline{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$
- ✓ $arg(z.z') = arg(z) + arg(z')\ [2\pi]$
- ✓ $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)\ [2\pi]$
- ✓ $arg\left(\frac{z'}{z}\right) = arg(z') - arg(z)\ [2\pi]$
- ✓ $arg(z^n) = n.arg(z)\ [2\pi]$
- ✓ *Pour tout réel* $\alpha > 0$*, on a :* $arg(\alpha z) = arg(z)\ [2\pi]$
- ✓ *Pour tout réel* $\alpha < 0$*, on a :* $arg(\alpha z) = \pi + arg(z)\ [2\pi]$
- ✓ *Si* $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ *et* $D(z_D)$ *sont quatre points du plan complexe, distincts deux à deux, alors :*

$$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A)\ [2\pi] \quad et \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) \quad [2\pi]$$

- ✓ ***Formule de Moivre :***
  $\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}$*, on a :* $(\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos(p\theta) + i\sin(p\theta)$

- ***Détermination pratique de l'argument***

Si $arg(z = x + iy) = \theta[2\pi]$ *alors*

nombre	$\overline{z} = x - iy$	$-\overline{z} = -x + iy$	$-z = -x - iy$
argument	$-\theta$	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$

Dans la plupart des exercices portant sur la détermination des arguments, on peut remarquer que les nombres complexes donnés sont générés à l'aide de trois nombres usuels : $\sqrt{3} + i$, $1 + i$ *et* $1 + i\sqrt{3}$ *dont les arguments sont donnés ici :*

$\sqrt{3} + i$	$1 + i$	$1 + i\sqrt{3}$
$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

Exemples d'application

Exemple 7

Linéariser l'expression $A(x) = cos^2 2x.sin3x$.

Corrigé

$$\begin{aligned}
A(x) &= cos^2 2x.sin3x \\
&= \left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right) = \frac{\left(e^{i4x}+2+e^{-i4x}\right)\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right)}{8i} \\
&= \frac{e^{i7x}-e^{ix}+2e^{i3x}-2e^{-i3x}+e^{-i} \ -e^{-i7x}}{8i} \\
&= \frac{\left(e^{i7x}-e^{-i7x}\right)-\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)+2\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right)}{8i} \\
&= \frac{2isin7x+4isin3x-2isinx}{8i} = \frac{1}{4}sin7x+\frac{1}{2}sin3x-\frac{1}{4}sinx
\end{aligned}$$

<u>N.B</u>: *Le résultat de la linéarisation d'une expression de la forme* $cos^p(ax)sin^q(bx)$ *donne toujours une somme de cosinus si* q *est pair* <u>*ou bien*</u> *une somme de sinus si* q *est impair car, au dénominateur, on aura* i^q *et l'on sait que:*

$$i^q = \begin{cases} 1 \ ou -1 \ si \ q \ est \ pair \\ i \ ou -i \ si \ q \ est \ impair \end{cases}$$

Exemple 8

Écrire ces complexes sous forme trigonométrique et exponentielle :

$$z_1 = (1+i)^7(1-i\sqrt{3})^3 \ ; \quad z_2 = \frac{1-itan\alpha}{1+itan\alpha} \quad ; \quad z_3 = -2\left(sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-icos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right).$$

Corrigé

$\rightarrow |z_1| = |1+i|^7.\left|1-i\sqrt{3}\right|^3 = \left(\sqrt{2}\right)^7.2^3 = 64\sqrt{2}$

$$arg(z_1) = 7\,arg(1+i)+3arg\,(1-i\sqrt{3})$$

$$arg(z_1) = 7\left(\frac{\pi}{4}\right)+3\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{4} \ [2\pi].$$

Donc : $z_1 = 64\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 64\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$\rightarrow$ *Pour* z_2 *:*

$$z_2 = \frac{1-itan\alpha}{1+itan\alpha} = \frac{1-i\frac{sin\alpha}{cos\alpha}}{1+i\frac{sin\alpha}{cos\alpha}} = \frac{cos\alpha-isin\alpha}{cos\alpha+isin\alpha} = \frac{cos(-\alpha)+isin(-\alpha)}{cos\alpha+isin\alpha} \ et \ |z_2| = 1.$$

$arg(z_2) = arg[cos(-\alpha)+isin(-\alpha)]-arg[cos\alpha+isin\alpha] = -2\alpha \ [2\pi].$

Donc : $z_2 = cos(-2\alpha)+isin(-2\alpha) = e^{-2i\alpha}$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \ z_3 &= -2\left(sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-icos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = -2\left(cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-isin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right) \\
&= -2\left(cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2\left(cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+isin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right) \\
&= 2\left(cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+isin\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right) = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)+isin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{8}}
\end{aligned}$$

V. Équation du 2nd degré – Racines $n^{ièmes}$

- *Équation du second degré*

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ *d'inconnue complexe* z *où* a, b *et* c *sont des nombres complexes avec* $a \neq 0$. *Le discriminant de l'équation est* $\Delta = b^2 - 4ac$. *On détermine un nombre complexe* δ *tel que* $\delta^2 = \Delta$. *L'équation* $az^2 + bz + c = 0$ *admet dans* $\mathbb{C}$ *deux solutions :*

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

Nota Bene : *On n'écrit* $\sqrt{\Delta}$ *que pour* Δ *réel* ≥ 0, *sinon aurait des « contre-sens » tel que par exemple :* $-1 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\times(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

- *Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe*

Problème : Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation d'inconnue z :* $z^n = a$ *où* a *est un complexe donné et* n *un entier* ≥ 2.

Les solutions d'une telle équation sont appelées les racines $n^{ièmes}$ de a. *Par exemple les solutions de l'équation :* $z^5 = -2 + 2i$ *sont les racines* $5^{èmes}$ *du nombre complexe* $a = -2 + 2i$.

On envisage trois cas :

	Les racines $n^{ièmes}$ de a
1er cas : $a = 0$	*1 seule racine :* $z = 0$
2ème cas : $a = 1$	n *racines $n^{ièmes}$ distinctes :* $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ *avec* $k \in [\![0, n-1]\!]$ *Les* ω_k *sont dits racines $n^{ièmes}$ de l'unité*
3ème cas : $a \neq 1$, *0 d'arg*(θ)	n *racines $n^{ièmes}$ distinctes :* $z_k = \sqrt[n]{\lvert a \rvert} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}$ *avec* $k \in [\![0, n-1]\!]$

Remarques:

- *Dans tous les cas, on a :* $\sum_{k=0}^{k=n-1}(racines) = 0$ *($\sum$ des termes consécutifs d'une SG).*
- *Dans le cas où* $a \neq 0$, *les points images des* n *racines nièmes de* a *sont les sommets d'un n-gone régulier de centre O, origine du repère.*
- $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, *on a :* $\omega_k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = {\omega_1}^k$ *(On dit que* ω_1 *génère les* ω_k*).*
- *Quelques racines usuelles à retenir :*
  - *Racines carrées de l'unité :* 1 *et* -1.
  - *Racines cubiques de l'unité :* 1 ; $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\bar{j} = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - *Racines quatrièmes de l'unité :* $1, -1$; i ; $-i$.
- *Soit les deux équations dans* $\mathbb{C}$: $(E): z^n = 1$ *<u>et</u>* $(F): z^n = a$ *où* $a \in \mathbb{C}/\{0; 1\}$.

Si les ω_k, *avec* $0 \leq k \leq n-1$, *sont les solutions de* (E) *et si* z_0 *est une solution particulière de* (F) *alors toutes les solutions de* (F) *sont les nombres* $z_0 . \omega_k$.

Exemples d'application

Exemple 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1) $2z^2 - 3z - 5 = 0$ *;*

2) $z^2 + 2z + 2 = 0$ *;*

3) $(-4 - 2i)z^2 + (7 - i)z + 1 + 3i = 0$

Corrigé

1) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 49 > 0 \implies$ *2 solutions distinctes :*

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{5}{2} \quad et \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 7}{4} = -1.$$

2) $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = 4i^2$ *et donc* $\delta = 2i \implies$ *2 solutions distinctes :*

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i \quad et \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i.$$

3) $\Delta = (7 - i)^2 - 4.(-4 - 2i).(1 + 3i) = 40 + 42i$*. Cherchons une racine carrée* $\delta = x + iy$ *du discriminant* Δ*. On peut établir que x et y vérifient le système :*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{40^2 + 42^2} = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \\ 2xy = 42 \end{cases}$$

La résolution du système conduit à $\delta = 7 + 3i$ *ou* $\delta = -7 - 3i$*. On peut calculer les solutions en utilisant l'une ou l'autre des deux valeurs de* δ *:*

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-7 + i + (7 + 3i)}{2(-4 - 2i)} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \quad et \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-7 + i - (7 + 3i)}{2(-4 - 2i)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Exemple 10

Déterminer les racines quatrièmes du nombre $a = -8 - 8i\sqrt{3}$*.*

Corrigé

$|a| = \left|-8 - 8i\sqrt{3}\right| = 16$ ***et*** $arg(a) = arg\left[-8\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right] = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \ [2\pi]$

D'où les racines 4èmes sont :

$$z_k = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right)} \ avec \ k = 0, 1, 2, 3$$

En faisant varier k, on trouve les quatre racines 4èmes :

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3} \ ; \quad z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{2}\right)} = 1 - i\sqrt{3} \ ; \ z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{3} - i$$

Remarque : *Si la question dans cet exemple était « Déterminer les racines 4èmes du nombre* $a = -8 - 8i\sqrt{3}$ *sachant que* $z_0 = \sqrt{3} - i$ *en est une » alors on utiliserait la dernière remarque du cours et donc les racines cherchées s'en déduisent :*

$$z_0.1 = \left(\sqrt{3} - i\right).1 = \sqrt{3} - i \ ; \qquad z_0.(-1) = \left(\sqrt{3} - i\right).(-1) = -\sqrt{3} + i \ ;$$

$$z_0.i = \left(\sqrt{3} - i\right).i = 1 + i\sqrt{3} \ ; \qquad z_0.(-i) = \left(\sqrt{3} - i\right).(-i) = -1 - i\sqrt{3}.$$

VI. Écriture complexe des transformations du plan

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. M est un point du plan d'affixe z et M', point d'affixe z', est l'image de M dans une transformation du plan.

Transformations	*Définition géométrique*	*Écriture complexe*
Translation de vecteur $\vec{\mathbf{u}}(\boldsymbol{a})$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + a$
Symétrie de centre $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega})$	$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Réflexion d'axe $(\boldsymbol{Ox})$	$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM'}\right) = -\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right) \end{cases}$	$z' = \overline{z}$
Réflexion d'axe $(\boldsymbol{Oy})$	$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM'}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right) \end{cases}$	$z' = -\overline{z}$
Homothétie de centre $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega})$ *et de rapport k*	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega})$ *et d'angle* α	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha\ [2\pi] \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$
Similitude directe de centre $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega})$*, de rapport k et d'angle* α	$\begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha\ [2\pi] \end{cases}$	$z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$

Justification de la formule pour la similitude directe

Soit $S(\Omega, k, \alpha)$ la similitude directe de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k et d'angle α.

Soit M(z) un point distinct de Ω. Si M(z) a pour transformé M'(z') alors, on a :

$\begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha\ [2\pi] \end{cases}$ *soit en termes d'affixes :* $\begin{cases} |z' - \omega| = k|z - \omega| \\ arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha\ [2\pi] \end{cases}$

ou encore :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = k \\ arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha\ [2\pi] \end{cases}$$

Donc le nombre complexe $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module k et pour argument α et donc :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = ke^{i\alpha} \text{ ou encore } z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega) \quad \boxed{1}$$

Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$ et la relation $\boxed{1}$ est vérifiée.

Exemples d'application

Exemple 11

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$*. Déterminer l'expression complexe de chacune des transformations suivantes :*

1) La translation T *de vecteur* $\vec{u}(3-2i)$ *;*

2) La rotation R *de centre* $A(-1+2i)$ *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *;*

3) L'homothétie H *de centre* $B(2+i)$ *et de rapport* (-3) *;*

4) Les composées $H \circ R$ *et* $T \circ H$*.*

Corrigé

Soit M(z) un point du plan et M'(z') son transformé dans la transformation considérée.

1) Expression complexe de T

$$M(z) \xrightarrow{\quad T \quad} M'(z' = \underbrace{z}_{z_M} + \underbrace{3-2i}_{z_{\vec{u}}})$$

2) *Expression complexe de R*

$$M(z) \xrightarrow{\quad R \quad} M'(z')$$

tel que : $z' - (-1+2i) = e^{i\frac{\pi}{2}}\big(z - (-1+2i)\big)$ *et donc tous calculs faits, on trouve :*

$$z' = iz + 1 + 3i.$$

3) *Expression complexe de H*

$$M(z) \xrightarrow{\quad H \quad} M'(z')$$

tel que : $z' - (2+i) = -3\big(z - (2+i)\big)$*, ce qui donne enfin :*

$$z' = -3z + 8 + 4i.$$

4) Expression complexe de $H \circ R$

$$\begin{tikzcd} M(z) \arrow[r, "R"] \arrow[dr, "H \circ R"'] & M_1(z_1 = iz + 1 + 3i) \arrow[d, "H"] \\ & M'(z' = -3z_1 + 8 + 4i) \end{tikzcd}$$

Donc : $z' = -3(iz + 1 + 3i) + 8 + 4i = -3iz + 5 - 5i.$

On établit de manière analogue l'expression complexe de $T \circ H$*.*

EXERCICES CORRIGES

Les méthodes sont les habitudes de l'esprit et les économies de la mémoire.

Rivaroll

Exercice 1	*Un homme blanc, un homme noir, un homme jaune : toutes les larmes sont salées.*

1. Soit z et z' deux nombres complexes tels que $|z| = |z'| = 1$ *et* $zz' \neq -1$.

Montrer que le nombre complexe $\frac{z+z'}{1+zz'}$ *est réel.*

2. En posant $z = e^{i\theta}$ *et* $z' = e^{i\theta'}$, *calculer* $\frac{z+z'}{1+zz'}$,

Corrigé

1. Plutôt que de se faire noyer dans des calculs fastidieux, il est plus judicieux de tâcher de montrer que $Z = \frac{z+z'}{1+zz'} = \overline{Z}$. *Or, tenant compte du fait que* $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ *et que* $z'\overline{z'} = |z'|^2 = 1$, *on peut écrire:*

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z+z'}}{\overline{1+zz'}} = \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}.\overline{z'}} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{z}.\frac{1}{z'}} = \frac{\frac{z+z'}{zz'}}{\frac{zz'+1}{zz'}} = \frac{z+z'}{zz'+1} = Z$$

Z, égal à son conjugué, est bien un nombre réel.

2. *En posant* $z = e^{i\theta}$ *et* $z' = e^{i\theta'}$, *on calcule* $Z = \frac{z+z'}{1+zz'}$:

$$Z = \frac{z+z'}{1+zz'} = \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i\theta}e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}\left(1+e^{i(\theta'-\theta)}\right)}{1+e^{i(\theta'+\theta)}}$$

Or, pour tout réel α, *on a :* $1+e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\alpha}{2}} + \left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$

D'où :

$$Z = \frac{e^{i\theta}\left(2\cos\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta'+\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta'+\theta}{2}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta'+\theta}{2}\right)}}{\cos\left(\frac{\theta'+\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta'+\theta}{2}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta'+\theta}{2}\right)}$$

Exercice 2	*Celui qui te demande la charité travaille plus pour toi que pour lui-même.*

Pour tout nombre complexe $z \neq -i$, *on pose* $Z = \frac{1+iz}{1-iz}$.

1. Montrer que : Z *réel* $\Leftrightarrow$ z *imaginaire pur.*

2. Montrer que : $|Z| = 1 \Leftrightarrow z$ *réel.*

Quel est dans ce cas l'argument de Z ?

Corrigé

1. On sait que Z est réel si et seulement si $Z = \overline{Z}$. *Or avec* $Z = \frac{1+i}{1-iz}$, *on peut écrire :*

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)} = \frac{\overline{1+iz}}{\overline{1-iz}} = \frac{1-i\overline{z}}{1+i\overline{z}}$$

Dire que Z est réel équivaut donc à écrire :

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1-i\overline{z}}{1+i\overline{z}} \quad \textit{soit} \quad 1+iz+i\overline{z}-z\overline{z} = 1-iz-i\overline{z}-z\overline{z} \ \textit{ou encore} \ \overline{z} = -z$$

Ceci caractérise le fait que z soit imaginaire pur.

2. Z est de module 1 équivaut à dire que $Z\overline{Z} = 1$. *Or, on sait que :*

$$Z\overline{Z} = \frac{1+iz}{1-iz} \times \frac{1-i\overline{z}}{1+i\overline{z}} = \frac{1+iz-i\overline{z}+z\overline{z}}{1-iz+i\overline{z}+z\overline{z}}$$

D'où : $Z\overline{Z} = 1 \iff 1+iz-i\overline{z}+z\overline{z} = 1-iz+i\overline{z}+z\overline{z} \iff \overline{z} = z \iff z$ *réel.*

Dans le cas où Z est de module 1 alors z est un réel. On pose $arg(1 + iz) = \alpha[2\pi]$. *On sait que :*

$$\tan\alpha = \frac{Im(1+iz)}{Re(1+iz)} = \frac{z}{1} = z$$

Et donc : $arg(Z) = arg\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = arg(1+iz) - arg(1-iz) = \alpha - (-\alpha) = 2\alpha\ [2\pi]$

car $1+iz$ *et* $1-iz$ *sont conjugués.*

On peur remarquer que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *car* $Re(1+iz) > 0$ *et on peut écrire que* $\alpha = \tan^{-1} z$.

Donc en conclusion : $arg(Z) = 2\tan^{-1} z\ \ [2\pi]$

Exercice 3	***Il faut éviter de marcher avec la tête et de réfléchir avec les pieds.***

Soient a et b deux nombres complexes distincts tels que $|a| = |b| = 1$.

Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}$*, le nombre :* $\dfrac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{a-b}$ *est élément de* $i\mathbb{R}$.

Corrigé

Posons $Z = \dfrac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{a-b}$ *et calculons* $\overline{Z}$. *On peut écrire :* $\overline{Z} = \dfrac{\overline{z}+\overline{a}\overline{b}z-(\overline{a}+\overline{b})}{\overline{a}-\overline{b}}$

D'autre part comme a et b sont de module 1, on sait que $\overline{a} = \frac{1}{a}$ *et* $\overline{b} = \frac{1}{b}$. *On peut donc écrire :*

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z}+\frac{1}{ab}z-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{ab\overline{z}+z-(a+b)}{b-a} = -\frac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{a-b} = -Z$$

Par conséquent, Z est un nombre imaginaire pur, donc élément de $i\mathbb{R}$.

Exercice 4	***Quand on n'a pas ce que l'on aime, il faut aimer ce que l'on a.***

Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $|a| = |b| = |c| = 1$.
Montrer que $|ab+bc+ca| = |a+b+c|$.

Corrigé

Posons $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$, $c = e^{i\gamma}$, *avec* α, β *et* γ *éléments de* $\mathbb{R}$.

Alors on a :

$$\begin{aligned}
|ab+bc+ca| &= \left|e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\beta+\gamma)}+e^{i(\gamma+\alpha)}\right| = \left|e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}\left(\frac{1}{e^{i\gamma}}+\frac{1}{e^{i\alpha}}+\frac{1}{e^{i\beta}}\right)\right| \\
&= \left|e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}\right| \times \left|\frac{1}{e^{i\gamma}}+\frac{1}{e^{i\alpha}}+\frac{1}{e^{i\beta}}\right| = \left|\frac{1}{e^{i\gamma}}+\frac{1}{e^{i\alpha}}+\frac{1}{e^{i\beta}}\right| \quad car\ \left|e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}\right| = 1 \\
&= \left|\overline{e^{i\gamma}}+\overline{e^{i\alpha}}+\overline{e^{i\beta}}\right| = \left|\overline{e^{i\gamma}+e^{i\alpha}+e^{i\beta}}\right| = \left|e^{i\gamma}+e^{i\alpha}+e^{i\beta}\right| \\
&= |a+b+c|
\end{aligned}$$

Et donc, on est arrivé à CQFD!

Exercice 5	***Le génie n'est qu'une plus grande aptitude à la patience.***

Soit f l'application qui à tout nombre complexe différent de i associe le complexe défini par :

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}/\{i\}$ *sur* $\mathbb{C}/\{1\}$.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

Corrigé

1. Il faut raisonner en équation c'est-à-dire montrer que l'équation d'inconnue z : $f(z) = z'$ *admet une seule solution pour tout z' donné dans* $\mathbb{C}/\{1\}$.

Soit donc z' un élément de $\mathbb{C}/\{1\}$. *Cherchons le nombre de solutions dans l'ensemble* $\mathbb{C}/\{i\}$ *de l'équation en z :*

$$\frac{z+i}{z-i} = z'$$

On a : $\frac{z+i}{z-i} = z' \Leftrightarrow z + i = zz' - iz' \Leftrightarrow z(z'-1) = iz' + i \Leftrightarrow z = \frac{iz'+i}{z'-1}$ *car* $z' \neq 1$

Il existe donc une seule solution.

Maintenant, il reste à démontrer que cette solution est bien dans $\mathbb{C}/\{i\}$. *En effet :*

$$\frac{iz'+i}{z'-1} = i \Leftrightarrow iz' + i = iz' - i \Leftrightarrow i = -i$$

Ce qui est impossible.

Donc, on a bien la solution trouvée est dans l'ensemble $\mathbb{C}/\{i\}$.

En conclusion, l'application f est bien une bijection de $\mathbb{C}/\{i\}$ *vers* $\mathbb{C}/\{1\}$.

2. *Si* $z = x$ *est un réel quelconque, alors :* $|f(z)| = |f(x)| = \left|\frac{x+i}{x-i}\right| = \frac{|x+i|}{|x-i|} = 1$ *car* $|x+i| = |x-i|$

Donc l'image de tout nombre réel est un nombre complexe de module 1.

Réciproquement, soit $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ *un nombre complexe de module 1 (z est dans* $\mathbb{C}/\{1\}$*). Peut-on trouver un nombre réel x tel que* $f(x) = z$ *?*

On sait que : $f(x) = z \Leftrightarrow \frac{x+i}{x-i} = \cos\alpha + i\sin\alpha \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1} + i\frac{2x}{x^2+1} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

D'autre part, on a :

$$\left|\frac{x+i}{x-i}\right| = 1 \text{ et donc } \begin{cases} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = 1 \\ -1 \leq \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \end{cases}$$

Donc il existe bien un seul réel α *de l'intervalle* $]0, 2\pi[$ *(*$\alpha \neq 0$ *car* $z \neq 1$ *) tel que :*

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{x^2-1}{x^2+1} \\ \sin\alpha = \frac{2x}{x^2+1} \end{cases}$$

En conclusion : $f(\mathbb{R}) = \mathcal{U} \setminus \{1\}$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1

Exercice 6	***Tous pour chacun, chacun pour tous : c'est ça la solidarité.***

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. *On note u et v les racines carrées complexes de z. Déterminer l'ensemble* $z \in \mathbb{C}^*$ *tels que les points d'affixes z, u, v forment un triangle de sommet principal le point d'affixe z.*

Corrigé

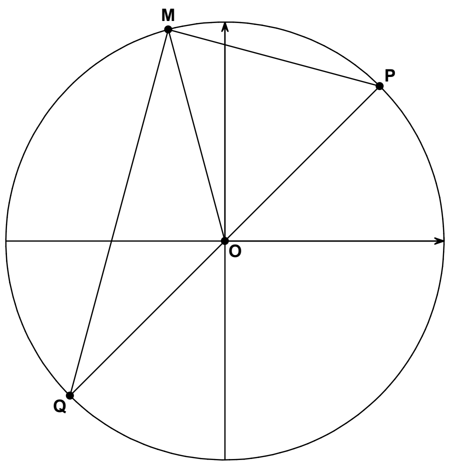
Notons M, P, Q les points d'affixes respectives z, u, v. Pour que le triangle MPQ soit rectangle en M, il faut et il suffit que M soit sur le cercle de diamètre $[PQ]$, *ce qui équivaut à* $OM = OP$.

Et : $OM = OP \Leftrightarrow |z| = |u| \Leftrightarrow |u|^2 = |u|$

$\Leftrightarrow |u| = 0\ (exclu)\ ou\ |u| = 1$

$\Leftrightarrow |u| = 1$

On conclut que l'ensemble cherché est l'ensemble des nombres complexes de module 1.



Exercice 7	*La grandeur de l'homme est dans sa décision d'être plus fort que sa condition.*

Soient u, v et w trois nombres complexes de même module tels que la somme $u + v + w = 0$.
Montrer que $u = jv = j^2w$ *ou* $u = jw = j^2v$.

Corrigé
On appelle U, V et W les points du cercle unité d'affixe u, v et w. L'égalité $u + v + w = 0$ *montre que le centre de gravité du triangle UVW n'est autre que le point O. Comme O est aussi le centre du cercle circonscrit d'un tel triangle, on peut en déduire que les médianes sont aussi le médiatrices d'un tel triangle.*
Soit par exemple D_U *la médiane issue de U du triangle ; elle est aussi médiatrice de [VW] car elle joint le milieu de [VW] au centre du cercle circonscrit O. On en déduit que UV = UW, c'est-à-dire que le triangle UVW est isocèle en U. Par un raisonnement analogue, on montre aussi qu'il est isocèle en V et en W c'est-à-dire finalement équilatéral. Par conséquent, l'image de U dans la rotation de centre O et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$ *est soit V, soit W.*
Dans le premier cas, on a $v = ju$ *et* $w = j^2u$, *d'où l'on tire* $u = jw = j^2v$.
Dans le deuxième cas, on a $w = ju$ *et* $v = j^2u$, *d'où l'on tire* $u = jv = j^2w$.

Exercice 8	*Se donner du mal pour les petites choses, c'est parvenir aux grandes avec le temps.*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.
Déterminer l'ensemble des points M images des nombres complexes : $z = \dfrac{1+t}{1+i+2t}$, *avec t réel.*

Corrigé
Cette question est assez inhabituelle au sens qu'on la retrouve rarement dans les exercices. Mais il faut plutôt inverser le problème pour retrouver la formulation qui nous est familière, c'est-à-dire qu'il faut exprimer t en fonction de z et nous serons, alors, appelés à traiter la question :
« Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquels t est un réel ».
On a :

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + i + 2t \neq 0 \Rightarrow \frac{1+t}{1+i+2t} \in \mathbb{C}$$

Donc :

$$z = \frac{1+t}{1+i+2t} \Rightarrow t(2z-1) = 1-(1+i)z \Rightarrow t = \frac{1-(1+i)z}{2z-1}$$

(car $z = \frac{1}{2}$ *ne correspond à aucune valeur de t puisque* $0 \neq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$*).*
Or, on sait que :

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow Im(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left(t - \overline{t}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left[\frac{1-(1+i)z}{2z-1} - \frac{1-(1-i)\overline{z}}{2\overline{z}-1}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2i}[(\overline{z}-z) - 4iz\overline{z} + (z+\overline{z})i] = 0 \ \text{ avec } \ z \neq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -y - 2(x^2+y^2) + x = 0 \ \text{ avec } \ (x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0 \ \text{ avec } \ (x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} \ \text{ avec } \ (x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre le point $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ *et de rayon* $\frac{\sqrt{2}}{4}$ *privé du point* $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ *(qui est un point du cercle).*

Exercice 9	*La plus grande victoire, c'est la victoire sur soi.*

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et u le nombre complexe défini par $z.z' = u^2$.
On suppose que : $arg(z') - arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. *Montrer que le nombre :* $t = \frac{1}{u}[z + z' + i(z - z')]$ *est réel.*

Corrigé

L'égalité supposée $arg(z') - arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *signifie que* $arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, *soit* $\frac{z'}{z} \in i\mathbb{R}_+^*$.

On a : $\dfrac{z'}{z} \in i\mathbb{R}_+^* \iff \exists b$ *réel* > 0 *tel que* $z' = ibz$.

Comme $z.z' = u^2$ *et* $z' = ibz$, *alors on déduit que :* $u^2 = ibz^2 = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{b}z\right]^2$ *car* $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2 = i$.

D'où : $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{b}z$ *ou* $u = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{b}z$.

En injectant la relation $z' = ibz$ *dans l'expression* $z + z' + i(z - z')$, *nous obtenons :*

$$z + z' + i(z - z') = z + ibz + iz + bz = z[(1+b) + i(1+b)] = (1+b)(1+i)z.$$

On examine les deux cas possibles :

1er cas :

Si $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{b}z$ *alors* $t = \dfrac{\sqrt{2}(1+b)}{\sqrt{b}} \in \mathbb{R}$.

2ème cas :

Si $u = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{b}z$ *alors* $t = -\dfrac{\sqrt{2}(1+b)}{\sqrt{b}} \in \mathbb{R}$.

Conclusion : Dans tous les cas, le nombre t est un réel.

Exercice 10	*Savoir mal est pire qu'ignorer.*

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 3, on considère les nombres :

$$A = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots,\quad B = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \cdots,\quad C = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \cdots$$

1. *En usant et en abusant de la formule du binôme de Newton et de l'égalité* $1 + j + j^2 = 0$ *avec j le nombre complexe défini par* $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, *calculer les trois quantités :*

$$A + B + C,\quad A + jB + j^2C \quad et \quad A + j^2B + jC$$

2. *En déduire les valeurs de A, B et C.*

Corrigé

Il est clair que :

$$A + B + C = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

D'autre part :

$$A + jB + j^2C = C_n^0 + jC_n^1 + j^2C_n^2 + j^3C_n^3 + j^4C_n^4 \ldots + j^nC_n^n = (1+j)^n = (-j^2)^n = (-1)^n j^{2n}$$

De même :

$$A + j^2B + jC = C_n^0 + j^2C_n^1 + jC_n^2 + j^3C_n^3 + j^2C_n^4 + jC_n^5 + \cdots$$

Or on sait que:

$$j^{3n} = 1\ ,\quad j^{3n+1} = j\ ,\quad j^{3n+2} = j^2$$

D'où :

$$A + j^2B + jC = C_n^0 + j^2C_n^1 + (j^2)^2C_n^2 + (j^2)^3C_n^3 + (j^2)^4C_n^4 + (j^2)^5C_n^5 + \cdots + (j^2)^nC_n^n = (1+j^2)^n$$

Soit :

$$A + j^2B + jC = (-1)^n j^n$$

2. *D'après la première question, on peut dire que les nombres A, B et C sont solutions du système :*

$$\begin{cases} A + B + C = 2^n & (1) \\ A + jB + j^2C = (-1)^n j^{2n} & (2) \\ A + j^2B + jC = (-1)^n j^n & (3) \end{cases}$$

On a :

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 3A = 2^n + (-1)^n j^n + (-1)^n j^{2n} \quad soit \quad A = \frac{2^n + (-1)^n j^n + (-1)^n j^{2n}}{3}$$

$$(1) + j^2 \times (2) + j \times (3) \Rightarrow 3B = 2^n + (-1)^n j^{2n+2} + (-1)^n j^{n+1} \quad soit \quad B = \frac{2^n + (-1)^n j^{2n+2} + (-1)^n j^{n+1}}{3}$$

$$(1) + j \times (2) + j^2 \times (3) \Rightarrow 3C = 2^n + (-1)^n j^{2n+1} + (-1)^n j^{n+2} \quad soit \quad C = \frac{2^n + (-1)^n j^{2n+1} + (-1)^n j^{n+2}}{3}$$

Exercice 11	Les biens de la terre ne font que creuser l'âme et en augmenter le vide.

1. Montrer que pour tout couple (α, β) élément de $(\mathbb{C}^*)^2$, on a :

$$|\alpha - \beta| = |\alpha| \times |\beta| \times \left|\frac{\alpha}{|\alpha|^2} - \frac{\beta}{|\beta|^2}\right|$$

2. En déduire que pour tous x, y, z complexes : $|y| \times |x - z| \leq |z| \times |x - y| + |x| \times |y - z|$

3. Établir pour tous points A, B, C et D du plan l'inégalité suivante, dite inégalité de Ptolémée :

$$AB \times CD \leq AC \times BD + AD \times BC.$$

Corrigé

1. On cherche à prouver une égalité. Le plus simple est de partir du membre de droite et d'essayer d'arriver au membre de gauche :

$$|\alpha| \times |\beta| \times \left|\frac{\alpha}{|\alpha|^2} - \frac{\beta}{|\beta|^2}\right| = |\alpha| \times |\beta| \times \left|\frac{\alpha}{\alpha\overline{\alpha}} - \frac{\beta}{\beta\overline{\beta}}\right| = |\alpha| \times |\beta| \times \left|\frac{\overline{\beta} - \overline{\alpha}}{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\right| = |\alpha| \times |\beta| \times \left|\frac{\overline{\beta - \alpha}}{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\right| = \frac{|\alpha| \times |\beta|}{|\overline{\alpha}| \times |\overline{\beta}|}\left|\overline{\beta - \alpha}\right|$$

Comme $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$, $|\overline{\beta}| = |\beta|$ et $|\overline{\beta - \alpha}| = |\beta - \alpha|$, on peut conclure que :

$$|\alpha| \times |\beta| \times \left|\frac{\alpha}{|\alpha|^2} - \frac{\beta}{|\beta|^2}\right| = |\beta - \alpha|$$

2. D'après la question précédente, on peut écrire :

$$|y| \times |x - z| = |x| \times |y| \times |z| \times \left|\frac{x}{|x|^2} - \frac{z}{|z|^2}\right| = |x| \times |y| \times |z| \times \left|\frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} + \frac{y}{|y|^2} - \frac{z}{|z|^2}\right|$$

Tenant compte du fait que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, on peut se permettre d'écrire :

$$\left|\frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} + \frac{y}{|y|^2} - \frac{z}{|z|^2}\right| \leq \left|\frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2}\right| + \left|\frac{y}{|y|^2} - \frac{z}{|z|^2}\right|$$

Et donc :

$$|y| \times |x - z| \leq |x| \times |y| \times |z| \times \left|\frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2}\right| + |x| \times |y| \times |z| \times \left|\frac{y}{|y|^2} - \frac{z}{|z|^2}\right|$$

Soit enfin : $|y| \times |x - z| \leq |z| \times |x - y| + |x| \times |y - z|$

3. On se place dans le plan complexe et on désigne l'affixe des points par la minuscule de même nom que le point. Ce qu'on cherche à prouver est donc :

$$|b - a| \times |d - c| \leq |c - a| \times |d - b| + |d - a| \times |b - c|$$

D'après l'inégalité qu'on vient d'établir, il est tentant de poser :

$$y = b - a,\ z = c - a \text{ et } x = d - a.$$

On a alors :

$$|x - z| = |d - c| = CD, \quad |x - y| = |d - b| = BD \quad \text{et} \quad |y - z| = |b - c| = BC.$$

Et à partir de là, l'inégalité recherchée saute aux yeux !

Exercice 12	Celui qui n'a pas d'objectifs ne risque pas de les atteindre.

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + 2i + 3i^2 + \cdots + ni^{n-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2} \quad \text{où } i^2 = -1.$$

2. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - 3 + 5 - \cdots + (-1)^k(2k+1) = (-1)^k(k+1)$$

$$2 - 4 + 6 - \cdots + (-1)^{k-1}2k = \frac{1 - (-1)^k(2k+1)}{2}$$

Corrigé

1. On traitera cette par deux méthodes différentes :

1ère <u>méthode :</u> raisonnement par récurrence

Soit la propriété P_n : « $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + 2i + 3i^2 + \cdots + ni^{n-1} = \dfrac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2}$ ».

→ *Initialisation :*

Pour $n = 1$*, le 1*[er] *membre vaut 1 et le second vaut* $\frac{-(1+1)i^{1+1}-i^1+i}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

→ *Transmission :*

Supposons que la propriété est vraie pour un entier naturel non nul n donné c'est-à-dire que :

$$1 + 2i + 3i^2 + \cdots + ni^{n-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2}.$$

Montrons qu'elle est vraie pour le rang $n + 1$ *c'est-à-dire que :*

$$1 + 2i + 3i^2 + \cdots + ni^{n-1} + (n+1)i^n = \frac{-(n+2)i^{n+2} - (n+1)i^{n+1} + i}{2}.$$

On a :

$$1 + 2i + 3i^2 + \cdots + ni^{n-1} + (n+1)i^n = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2} + (n+1)i^n$$

car selon l'hypothèse de récurrence :

$$1 + 2i + 3i^2 + \cdots + ni^{n-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2}.$$

On a :

$$\frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2} + (n+1)i^n = \frac{\boxed{2(n+1)i^n - ni^n} - (n+1)i^{n+1} + i}{2}$$

Or : $\boxed{2(n+1)i^n - ni^n} = -2(n+1)i^{n+2} + ni^{n+2} = -(n+2)i^{n+2}$*, d'où finalement :*

$$1 + 2i + 3i^2 + \cdots + ni^{n-1} + (n+1)i^n = \frac{-(n+2)i^{n+2} - (n+1)i^{n+1} + i}{2}.$$

Donc la propriété est vraie pour le rang $n + 1$.

Conclusion : La propriété est vraie pour le 1[er] *rang 1 et héréditaire à partir de* $n = 1$*, donc la propriété est générale.*

2[ème] *<u>méthode :</u> utilisation de la dérivation « formelle »*

On remarque que la quantité $1 + 2i + 3i^2 + \cdots + ni^{n-1}$ *ressemble « formellement » à la dérivée de :*

$$A(z) = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n \text{ prise pour } z = i.$$

On sait que :

$$\forall z \neq 1, \qquad A(z) = z \times \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

Donc :

$$A'(z) = \left(\frac{z^{n+1} - z}{z - 1}\right)' = \frac{[(n+1)z^n - 1](z-1) - (z^{n+1} - z)}{(z-1)^2}$$

$$A'(z) = \frac{(n+1)z^{n+1} - (n+1)z^n - z + 1 - z^{n+1} + z}{(z-1)^2}$$

$$A'(z) = \frac{nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1}{(z-1)^2}$$

Si on prend $z = i$*, on obtient :*

$$A'(i) = 1 + 2i + 3i^2 + \cdots + ni^{n-1} = \frac{ni^{n+1} - (n+1)i^n + 1}{(i-1)^2} = \frac{ni^{n+1} - (n+1)i^n + 1}{-2i}$$

En multipliant les numérateur et dénominateur de la dernière expression par i, on arrive à :

$$1 + 2i + 3i^2 + \cdots + ni^{n-1} = \frac{ni^{n+2} - (n+1)i^{n+1} + i}{2} = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2} \quad (\ CQFD).$$

2. On pose $n = 2k + 1$.

Dans ce cas, l'égalité établie à la première question s'écrit :

$$1 + 2i + 3i^2 + \cdots + (2k+1)(-1)^k = \frac{-(2k+2)(-1)^{k+1} - (2k+1)(-1)^k \times i + i}{2}$$

Soit :

$$1 + 2i + 3i^2 + \cdots + (2k+1)(-1)^k = (-1)^k(k+1) + \frac{1 - (-1)^k(2k+1)}{2}i.$$

Comme : $i^p = \begin{cases} -1 \; ou 1 \; si \; p \; est \; pair \\ -\, i \; ou \; i \; si \; p \; est \; impair \end{cases}$ *alors la forme algébrique du 1^er membre de l'égalité précédente se clarifie et on peut donc écrire :*

$$[1-3+5-\cdots+(-1)^k(2k+1)]+[2-4+6-\cdots+(-1)^k 2k]i=(-1)^k(k+1)+\frac{1-(-1)^k(2k+1)}{2}i$$

Cette relation donne les égalités recherchées en identifiant les parties réelles d'une part et les parties imaginaires d'autre part.

Exercice 13	***L'ordre est le plaisir de la raison : mais le désordre est le délice de l'imagination.***

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ *n nombres complexes de module 1. On définit le nombre :*

$$Z=\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\right)$$

Montrer que $0 \le Z \le n^2$.

Corrigé

On sait que $|z_k|^2 = z_k.\overline{z_k} = 1$ *et donc* $\frac{1}{z_k} = \overline{z_k}$. *On a donc :* $Z=\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}\right)$

Or la somme des conjugués est le conjugué de la somme c'est-à-dire : $\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}\right)=\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)}$

Et par suite : $Z=\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)}=\left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\right|^2$

D'autre part, on sait que : $\left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{k=1}^{n}1 = n$

D'où le résultat demandé.

Exercice 14	***Il est bon de suivre sa propre pente pourvu que ce soit en montant.***

Soit n un entier naturel tel que $n \ge 2$ *et* θ *un réel. Calculer la somme :* $C_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos^k(\theta)\cos(k\theta)$.

Corrigé

On pose : $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos^k(\theta)\sin(k\theta)$ *et* $Z_n = C_n + iS_n$

On a :

$$Z_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos^k(\theta)\cos(k\theta)+i\sum_{k=0}^{n-1}\cos^k(\theta)\sin(k\theta)=\sum_{k=0}^{n-1}[\cos^k(\theta)\cos(k\theta)+i\cos^k(\theta)\sin(k\theta)]$$

$$Z_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos^k(\theta)\,(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta))=\sum_{k=0}^{n-1}\cos^k(\theta)\,(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^k$$

$$Z_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos^k(\theta)\left(e^{i\theta}\right)^k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(\theta)\,e^{i\theta}\right)^k$$

D'où : $Z_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(\theta)\,e^{i\theta}\right)^k=\frac{1-\left(\cos(\theta)\,e^{i\theta}\right)^n}{1-\cos(\theta)\,e^{i\theta}}$ *(somme des n 1ers termes d'une suite géométrique).*

D'autre part, on a :

$$1-\cos(\theta)\,e^{i\theta}=1-\cos(\theta)\,(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=1-\cos^2(\theta)-i\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$=\sin^2(\theta)-i\sin(\theta)\cos(\theta)=\sin(\theta)\,(\sin(\theta)-i\cos(\theta))$$

Donc :

$$Z_n=\frac{1-\cos^n(\theta)\,(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))}{\sin(\theta)\,(\sin(\theta)-i\cos(\theta))}=\frac{[1-\cos^n(\theta)\,(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))](\sin(\theta)+i\cos(\theta))}{\sin(\theta)\,(\sin(\theta)-i\cos(\theta))(\sin(\theta)+i\cos(\theta))}$$

$$Z_n = \frac{[1 - cos^n(\theta)\,(cos(n\theta) + i\,sin(n\theta))](sin(\theta) + i\,cos(\theta))}{sin(\theta)}$$

$$Z_n = \frac{sin(\theta) + i\,cos(\theta) - cos^n(\theta)\,(cos(n\theta) + i\,sin(n\theta))(sin(\theta) + i\,cos(\theta))}{sin(\theta)}$$

$$Z_n = \frac{sin(\theta) + i\,cos(\theta) - i\,cos^n(\theta)\,(cos(n\theta) + i\,sin(n\theta))(i\,sin(-\theta) + cos(-\theta))}{sin(\theta)}$$

Or $(cos(n\theta) + i\,sin(n\theta))(i\,sin(-\theta) + cos(-\theta)) = cos\big((n-1)\theta\big) + i\,sin\big((n-1)\theta\big)$ *et* $C_n = Re(Z_n)$, *d'où :*

$$C_n = \frac{sin(\theta) + cos^n\theta\,sin\big((n-1)\theta\big)}{sin(\theta)}$$

Exercice 15	Le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite, à condition que les deux points soient bien en face l'un de l'autre.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$ *et a et b deux nombres réels tels que* $b \neq 2k\pi$. *On pose :*

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} sin(a+kb) \quad , \quad C = \sum_{k=0}^{n-1} cos(a+kb) \quad , \quad T = e^{ia}\left(\frac{1-e^{inb}}{1-e^{ib}}\right)$$

1. Déterminer Re(T) et Im(T).
2. Montrer que $T = C + iS$.
3. En déduire le calcul de C et S.

Corrigé

1. *On a :* $T = e^{ia}\left(\frac{1-e^{inb}}{1-e^{ib}}\right) = e^{ia}\,\frac{e^{i\frac{nb}{2}}\left(e^{-i\frac{nb}{2}} + e^{i\frac{nb}{2}}\right)}{e^{i\frac{b}{2}}\left(e^{-i\frac{b}{2}} + e^{i\frac{b}{2}}\right)} = e^{i\left(a+b\frac{n-1}{2}\right)} \times \frac{sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{sin\left(\frac{b}{2}\right)}$

$$T = \frac{sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{sin\left(\frac{b}{2}\right)}\left[cos\left(a + b\frac{n-1}{2}\right) + i\,sin\left(a + b\frac{n-1}{2}\right)\right]$$

Et donc :

$$\begin{cases} Re(T) = \dfrac{sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{sin\left(\frac{b}{2}\right)} cos\left(a + b\dfrac{n-1}{2}\right) \\ Im(T) = \dfrac{sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{sin\left(\frac{b}{2}\right)} sin\left(a + b\dfrac{n-1}{2}\right) \end{cases}$$

2. On a:

$$C + iS = \sum_{k=0}^{n-1} cos(a+kb) + i\sum_{k=0}^{n-1} sin(a+kb) = \sum_{k=0}^{n-1}[cos(a+kb) + i\,sin(a+kb)] = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kb)} = e^{ia}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikb}$$

Or, on sait que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikb} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ib})^k = \frac{1-(e^{ib})^n}{1-e^{ib}} = \frac{1-e^{inb}}{1-e^{ib}}$$

d'où : $C + iS = T$.

3. Comme $T = C + iS$ *avec C et S des nombres réels alors on peut conclure que* $C = Re(T)$ *et* $S = Im(T)$ *et par suite :*

$$\begin{cases} C = \dfrac{sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{sin\left(\frac{b}{2}\right)} cos\left(a + b\dfrac{n-1}{2}\right) \\ S = \dfrac{sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{sin\left(\frac{b}{2}\right)} sin\left(a + b\dfrac{n-1}{2}\right) \end{cases}$$

Exercice 16	***La paresse est le plus court chemin qui mène à l'ignorance.***

Soit x un nombre réel. Calculer les sommes suivantes : $S=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)$ *et* $S'=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx)$.

Corrigé
On a:

$$S+iS'=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)+i\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\cos(kx)+i\sin(kx))=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{ix})^k=(1+e^{ix})^n$$

Or, on sait que : $1+e^{ix}=e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{-\frac{ix}{2}}+e^{\frac{ix}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{ix}{2}}$

Et donc : $S+iS'=(1+e^{ix})^n=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{nix}{2}}$

S est la partie réelle de cette dernière expression, tandis que S' en est la partie imaginaire :

$$S=Re\left(2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{nix}{2}}\right)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$
$$S'=Im\left(2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{nix}{2}}\right)=2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Exercice 17	***Un vieil âne en sait plus qu'un ânon.***

Écrire sans le symbole Σ, la somme suivante : $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}$ *pour* $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$

Corrigé

Il est clair que : $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{Re(e^{ix})}{(\cos x)^k}=Re\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{ikx}}{(\cos x)^k}\right)=Re\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k\right)$.

On reconnaît ici la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{e^{ix}}{\cos x}$ *, ce qui nous amène à distinguer deux cas :*

→ $\frac{e^{ix}}{\cos x}=1$… *Alors* $e^{ix}=\cos x$ *et donc* $\sin x=0$, *ce qui arrive pour* $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Dans ce cas la somme vaut : $S_n=Re\left(\sum_{k=0}^{n-1}1\right)=n$

→ $\frac{e^{ix}}{\cos x}\neq 1$, *soit* $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Dans ce cas : $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^n}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}}=\frac{\cos^n x-e^{inx}}{\cos^n x}\times\frac{\cos x}{\cos x-e^{ix}}=\frac{\cos^n x-\cos nx-i\sin nx}{\cos^{n-1}x\,(-i\sin x)}$

En écrivant la dernière expression sous forme algébrique, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k=\frac{\sin nx}{\cos^{n-1}x\sin x}+i\frac{\cos^n x-\cos nx}{\cos^{n-1}x\sin x}$$

Soit, enfin : $S_n=Re\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k\right)=\frac{\sin nx}{\cos^{n-1}x\sin x}$

Exercice 18	***L'argent est un remède à tout mal, hormis à l'avarice.***

1. Soit ω une racine $n^{ième}$ de l'unité ($n\geq 1$), $\omega\neq 1$. Montrer l'égalité : $1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\frac{-n}{1-\omega}$

☞*Simplifier la somme* $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$ *en songeant à une dérivée « formelle ».*

2. En déduire la valeur des sommes :

$$S_1=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)+3\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)+\cdots+17\cos\left(\frac{32\pi}{17}\right)$$
$$S_2=2\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right)+3\sin\left(\frac{4\pi}{17}\right)+\cdots+17\sin\left(\frac{32\pi}{17}\right)$$

Corrigé

1. Pour tout $x \neq 1$*, on a:* $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$*. En dérivant chaque terme, on obtient, pour tout* $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}$$

Soit ω *une racine n*ième *de l'unité distincte de 1. On sait que* $\omega^n = 1$ *et* $\omega^{n+1} = \omega$*, d'où :*

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{1 + n\omega - (n+1)}{(1-\omega)^2} = \frac{n(\omega - 1)}{(1-\omega)^2} = \frac{-n}{1-\omega}$$

2.En prenant, en particulier, $n = 17$ *et* $\omega = e^{i\frac{2\pi}{17}}$*, on trouve :*

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{-17}{1 - e^{i\frac{2\pi}{17}}} = \frac{-17}{-2i\,sin\left(\frac{\pi}{17}\right)e^{i\frac{\pi}{17}}} = \frac{-17ie^{-i\frac{\pi}{17}}}{2\,sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} = -\frac{17}{2} - \frac{17i}{2\,tan\left(\frac{\pi}{17}\right)}$$

$$Donc : S_1 = Re[1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1}] = -\frac{17}{2} \;\; et\; S_2 = Im[1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1}] = -\frac{17}{2\,tan\left(\frac{\pi}{17}\right)}$$

Exercice 19	*Un jour vaut trois pour qui fait chaque chose en son temps.*

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ *et* ω *une racine nième de l'unité (*$\omega^n = 1$*). Calculer la somme :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\, \omega^k$$

Corrigé

Le fait que $\omega^n = 1$ *signifie qu'il existe* $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ *tel que* $\omega = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$*. On a :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\,\omega^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,\omega^k - \omega^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,\omega^k - 1 = (1+\omega)^n - 1 = \left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n - 1$$

(Formule du binôme de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$*)*

Or $1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = 2\,cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}$ *d'où :*

$$S_n = \left(2\,cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)^n - 1 = 2^n\,cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{ik} - 1$$

Exercice 20	*La paresse marche si lentement que la misère bientôt la rattrape.*

$$Soit\ z\ un\ nombre\ complexe.\ Montrer\ que : \frac{|Re(z)| + |Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$$

Corrigé

$$On\ pose\ z = x + iy\ \ avec\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.\ Il\ s'agit\ donc\ de\ montrer\ que : \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

1ère inégalité :

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|xy|$ *et donc :*

$$2(x^2 + y^2) - (|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy| = (|x| - |y|)^2 \geq 0$$

D'où le résultat escompté.

2ème inégalité : On sait que $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \iff x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2$.

Or $(|x| + |y|)^2 - (x^2 + y^2) = 2|x| \times |y| \geq 0$ *et l'inégalité voulue s'en déduit.*

Exercice 21	*Faute de richesses, une nation n'est que pauvre ; faute de patriotisme, elle est une pauvre nation.*

Soit z *et* z' *deux nombres complexes tels que* $zz' = u^2$*. Montrer que :*

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z + z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z + z'}{2} - u\right|$$

Corrigé

On rappelle que : $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists a \in \mathbb{C}$ *tel que* $z = a^2$*. On a de même pour le nombre complexe* z' *:*

$$\exists b \in \mathbb{C}\ \ tel\ que\ \ z = b^2.$$

De l'égalité $zz' = u^2 = (ab)^2$ *on déduit que* $u = ab$ *ou* $u = -ab$.

On envisage donc deux cas.

Cas où $u = ab$ *:*

$$\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|=\left|\frac{a^2+b^2}{2}+u\right|+\left|\frac{a^2+b^2}{2}-u\right|$$
$$=\tfrac{1}{2}|a+b|^2+\tfrac{1}{2}|a-b|^2$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[|a+b|^2+|a-b|^2\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[(a+b)\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+(a-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(2a\overline{a}+2b\overline{b}\right)=|a|^2+|b|^2=|z|+|z'| \quad \textit{CQFD.}$$

Cas où $u=-ab$: un cheminement identique conduit à la même conclusion.

Exercice 22	Un savant qui ne pratique pas ce qu'il sait ressemble à un nuage qui ne donne pas de pluie.

Montrer que : $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\ \ |z+z'|^2\le(1+|z|^2)(1+|z'|^2).$

Corrigé

On a : $(1+|z|^2)(1+|z'|^2)-|z+z'|^2=1+|z|^2+|z'|^2+|zz'|^2-(z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)=|z|^2|z'|^2+1-\overline{z}z'-z\overline{z'}$
$$=(1-\overline{z}z')\left(1-z\overline{z'}\right)=(1-\overline{z}z')\overline{(1-\overline{z}z')}=|1-\overline{z}z'|^2\ge 0$$

D'où : $|z+z'|^2\le(1+|z|^2)(1+|z'|^2).$

Exercice 23	Tous les ânes qui vont à l'école ne deviennent pas des chevaux de course.

Montrer que : $\forall z\in\mathbb{C},\ \ |1+z|\ge\frac{1}{2}\ \ ou\ \ |1+z^2|\ge 1.$

Corrigé

Nous procéderons par un raisonnement par l'absurde.
On suppose qu'il existe un nombre complexe z tel que :
$$|1+z|<\frac{1}{2}\ \ et\ \ |1+z^2|<1.$$
On pose $z=x+iy$ *avec* $(x,y)\in\mathbb{R}.$
On a :
$$|1+z|<\frac{1}{2}\iff|(x+1)+iy|<\frac{1}{2}\iff(x+1)^2+y^2<\frac{1}{4}$$
$$\iff x^2+y^2+2x+\tfrac{3}{4}<0$$
D'autre part, on a aussi :
$$|1+z^2|=|(x^2-y^2)+2ixy|<1\iff(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2<1$$
$$|1+z^2|<1\iff(x^2-y^2)^2+2(x^2-y^2)+1+4x^2y^2<1$$
$$\iff(x^2+y^2)^2+2(x^2-y^2)<0$$
$$\iff(x^2+y^2)^2<2(y^2-x^2)$$
La dernière inégalité suppose que $y^2-x^2>0$ *soit* $y^2>x^2$.
D'où : $x^2+y^2+2x+\frac{3}{4}>2x^2+x+\frac{3}{4}$ *et comme* $x^2+y^2+2x+\frac{3}{4}<0$ *alors :*
$2x^2+x+\frac{3}{4}<0$. *Or le trinôme* $2x^2+x+\frac{3}{4}$ *est strictement positif comme le montre facilement le signe de son discriminant (négatif) associé au signe du coefficient de* x^2.
Et bravo ! la contradiction est établie. Donc $\forall z\in\mathbb{C},\ \ |1+z|\ge\frac{1}{2}\ \ ou\ \ |1+z^2|\ge1.$

Exercice 24	La nuit est pourvue d'oreilles ; le jour est pourvu d'yeux.

Montrer que : $\forall z\in\mathbb{C}^*,\ \ |z-1|\le\big||z|-1\big|+|z|\times|arg\,(z)|$

Corrigé

Soit $z\in\mathbb{C}^*$. *On a :* $|z-1|=|z-|z|+(|z|-1)|\le\big|z-|z|\big|+\big||z|-1\big|$. *On pose* $z=Re^{i\theta}$ *avec* $R>0$.
On peut écrire :
$$\big|z-|z|\big|=R|\cos\theta-1+i\sin\theta|$$
$$\big|z-|z|\big|=R\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}=R\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$
$\big|z-|z|\big|=2R\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ *car* $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$. *D'autre part, on sait que* $\forall x\in\mathbb{R},\ \ |\sin x|\le|x|$ *d'où :*
$$2R\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\le R|\theta|=R\times|arg\,(z)|=|z|\times|arg\,(z)|$$
Et enfin de compte, on peut bien se vanter d'avoir établi l'inégalité : $|z-1|\le\big||z|-1\big|+|z|\times|arg\,(z)|$ *CQFD.*

Exercice 25	Un âne ne devient pas lettré pour avoir porté beaucoup de livres.

Soit z un nombre complexe de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

1. *En développant* $(z+|z|)^2$, *trouver une formule simple pour calculer les racines carrées de z.*
2. *Déterminer les racines carrées de* $z = 5 + 12i$ *en utilisant cette formule.*

Corrigé

1. *On a :*

$$(z+|z|)^2 = z^2 + 2z.|z| + |z|^2 = z^2 + 2z.|z| + z\overline{z} = z(z + \overline{z} + 2|z|) = z(2Re(z) + 2|z|)$$

Soit : $(z+|z|)^2 = 2z(Re(z)+|z|)$. *Or comme* $z \notin \mathbb{R}_-$, *alors* $Re(z) + |z| > 0$ *et par suite :*

$$z = \left(\frac{z+|z|}{\sqrt{2Re(z)+2|z|}}\right)^2$$

Donc les racines carrées de z sont :

$$\frac{z+|z|}{\sqrt{2Re(z)+2|z|}} \quad et \quad -\frac{z+|z|}{\sqrt{2Re(z)+2|z|}}$$

2. *Application :*

Pour $z = 5 + 12i$, *on a* $|z| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. *Ainsi, on a :*

$$z = \left(\frac{5 + 12i + 13}{\sqrt{10+26}}\right)^2 = (3+2i)^2$$

Donc les racines carrées de $z = 5 + 12i$ *sont :* $3 + 2i$ *et* $-3 - 2i$.

Exercice 26	Patience ! Avec le temps, l'herbe devient du lait.

Soit z un nombre complexe.

1. Montrer que :

$$Im(z) \geq 0 \Longrightarrow z = \left(\sqrt{\frac{|z|+Re(z)}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-Re(z)}{2}}\right)^2$$

$$Im(z) \leq 0 \Longrightarrow z = \left(\sqrt{\frac{|z|+Re(z)}{2}} - i\sqrt{\frac{|z|-Re(z)}{2}}\right)^2$$

2. En déduire les racines carrées des deux nombres complexes : $z_1 = 2 + i$ *et* $z_2 = 4 - 3i$

Corrigé

1. *On pose :* $A = \sqrt{\frac{|z|+Re(z)}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-Re(z)}{2}}$

On a : $A^2 = \frac{|z|+Re(z)}{2} - \frac{|z|-Re(z)}{2} + 2i\sqrt{\frac{|z|^2-(Re(z))^2}{4}}$

Comme $(Im(z))^2 = |z|^2 - (Re(z))^2$, *on déduit que :* $A^2 = Re(z) + i.|Im(z)|$. *D'où :*

$$Im(z) \geq 0 \Longrightarrow A^2 = z$$
$$Im(z) \leq 0 \Longrightarrow A^2 = \overline{z}$$

La dernière implication pouvant s'écrire également sous la forme : $Im(z) \leq 0 \Longrightarrow \overline{A}^2 = z$

2. Application

- *Pour* $z_1 = 2 + i$ *:*
  On a $Im(z_1) > 0$, $Re(z_1) = 2$ *et* $|z_1| = \sqrt{5}$.
  Donc l'une des racines carrées de $z_1 = 2 + i$ *est :*

$$A_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$$

La deuxième racine carrée est $-A_1$.

- *Pour* $z_2 = 4 - 3i$ *:*
  On a $Im(z_2) < 0$, $Re(z_2) = 4$ *et* $|z_2| = 5$. *Donc l'une des racines carrées de* $z_2 = 4 - 3i$ *est :*

$$A_2 = \sqrt{\frac{5+4}{2}} - i\sqrt{\frac{5-4}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(3-i)$$

La deuxième racine est $-A_2$.

Exercice 27	Agissez comme s'il était impossible d'échouer.

Comment faut-il choisir l'entier naturel m pour que le polynôme $P(z) = z^{2m} + z^m + 1$ soit divisible par le polynôme $z^2 + z + 1$?

Corrigé

Le polynôme $z^2 + z + 1$ divise $P(z) = z^{2m} + z^m + 1$ si et seulement si toute racine du $z^2 + z + 1$ est également racine de $P(z)$. Or les racines du polynôme $z^2 + z + 1$ sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et j^2 (car $j^2 + j + 1 = 0$). Calculons $P(j)$ et $P(j^2)$ selon le reste de la division de m par 3 (car $j^3 = 1$).

$\to m = 3k \implies j^m = j^{3k} = (j^3)^k = 1$

$\implies j^m = 1$ et $j^{2m} = (j^m)^2 = 1$

$\implies P(j) = j^{2m} + j^m + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

$\to m = 3k + 1 \implies j^m = j \times (j^3)^k = j$

$\implies j^m = j, \quad j^{2m} = j^2, \quad j^{4m} = j$

$\implies P(j) = j^{2m} + j^m + 1 = j^2 + j + 1 = 0$

et $P(j^2) = j^{4m} + j^{2m} + 1 = j + j^2 + 1 = 0.$

$\to m = 3k + 2 \implies j^m = j^2 \times (j^3)^k = j^2$

$\implies j^m = j^2, \quad j^{2m} = j, \quad j^{4m} = j^2$

$\implies P(j) = j^{2m} + j^m + 1 = j + j^2 + 1 = 0$

et $P(j^2) = j^{4m} + j^{2m} + 1 = j^2 + j + 1 = 0.$

Donc en conclusion, le polynôme $P(z) = z^{2m} + z^m + 1$ est divisible par $z^2 + z + 1$ si et seulement si m n'est pas un multiple de 3.

Exercice 28	La motivation vous sert de départ. L'habitude vous fait continuer.

Trois nombres complexes z_0, z_1 et z_2 ont des modules r_0, r_1 et r_2 qui forment, dans cet ordre, une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et des arguments θ_0, θ_1 et θ_2 qui forment, dans cet ordre, une suite arithmétique de raison $\frac{2\pi}{3}$ et dont le premier terme θ_0 appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Déterminer le module et un argument de z_0, z_1 et z_2, sachant que z_0, z_1 et z_2 sont liés par la relation : $z_0 z_1 z_2 = 8$.

Corrigé

Le module d'un produit étant le produit des modules, on peut écrire : $|z_0 z_1 z_2| = r_0 \times r_1 \times r_2$.

Aucun des trois nombres complexes z_0, z_1 et z_2 n'est nul puisque leur produit vaut 8 ; par conséquent $arg(z_0 z_1 z_2)$ existe et est égal à $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2$, un argument des produits étant la somme des arguments.

La relation $z_0 z_1 z_2 = 8$ se traduit par le système $\begin{cases} r_0 \times r_1 \times r_2 = 8 \\ \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 2k\pi \end{cases}$ car un argument du nombre strictement positif est 0 modulo 2π.

Étant donné que $r_0 = \frac{3}{2} r_1$ et $r_2 = \frac{2}{3} r_1$, la première égalité du système s'écrit : $r_1^3 = 8$, d'où $r_1 = 2$.

Étant donné que $\theta_1 = \theta_0 + \frac{2\pi}{3}$ et $\theta_2 = \theta_0 + \frac{4\pi}{3}$, la deuxième égalité s'écrit alors : $3\theta_0 + 2\pi = 2k\pi$. Ce qui donne $\theta_0 = \frac{2(k-1)\pi}{3} = \frac{2k'\pi}{3}$ (en posant $k - 1 = k'$). Seule la valeur $k' = 0$ convient, vu la contrainte imposée à θ_0 d'appartenir à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On peut conclure que : $\begin{cases} |z_0| = r_0 = 3, |z_1| = r_1 = 2, |z_2| = r_2 = \frac{4}{3} \\ arg(z_0) = 0, arg(z_1) = \frac{2\pi}{3}, arg(z_2) = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

Donc nombres complexes recherchés sont : $z_0 = 3, z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}, \qquad z_2 = \frac{4}{3}e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}i.$

Exercice 29	Mieux vaut vivre un jour comme un lion que cent ans comme un mouton.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 3 cm.

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3+4i)z + 5\overline{z}}{6}$$

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = 1$ *et* $z_C = 3i$.
Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f. Placer les points A, B, C, A', B', C'.
2. On pose $z = x + iy$ *(avec x et y réels). Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.*
3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$. *Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire ?*
4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f. Montrer que M' appartient à la droite (D).
5. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z :

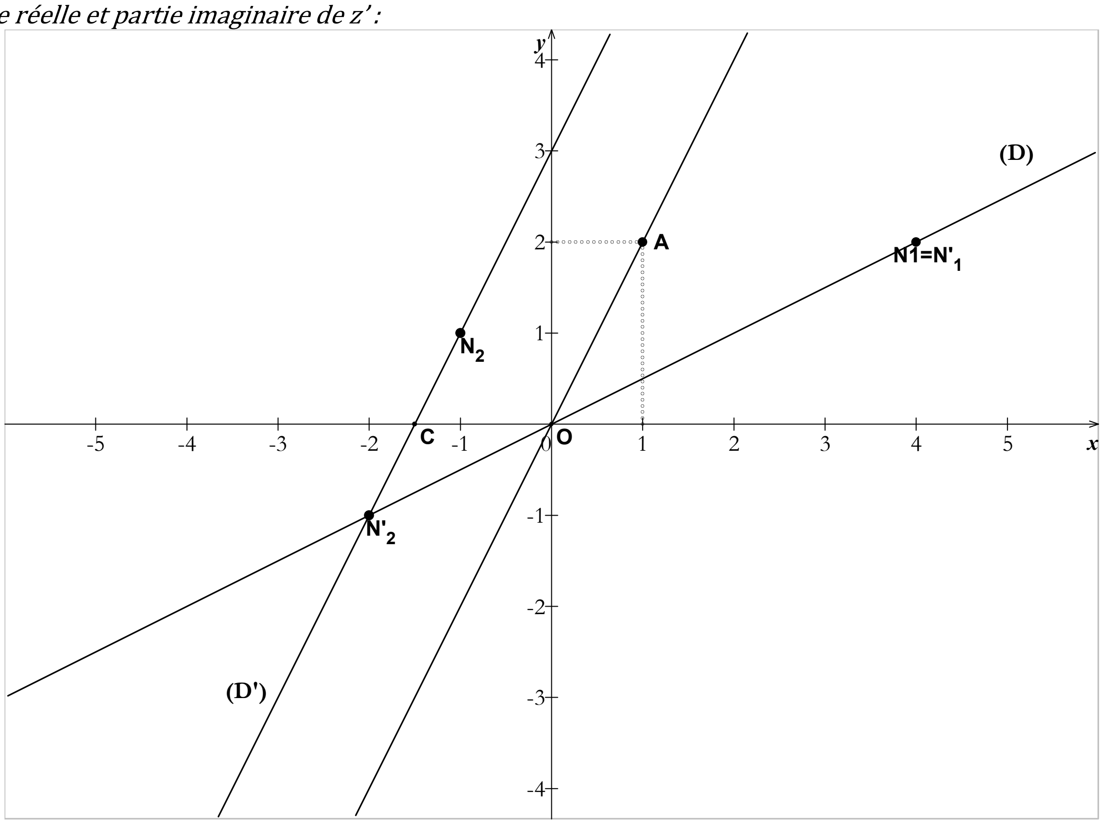
$$\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\overline{z}}{6} + i\frac{z-\overline{z}}{3}$$

En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ *est réel.*
b. En déduire que, si $M' \neq M$*, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.*
6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ?
(on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)). Effectuer la construction sur la figure.

Corrigé
1. On a :

$$a' = \frac{(3+4i)(1+2i)+5(1-2i)}{6} = 0, \qquad b' = \frac{(3+4i)(1)+5(1)}{6} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i, \qquad c' = -2-i$$

2. Partie réelle et partie imaginaire de z' :



On sait que :

$$\begin{aligned} x' + iy' &= \frac{(3+4i)(x+iy) + 5(x-iy)}{6} \\ &= \frac{(8x-4y) + (4x-2y)i}{6} \\ &= \frac{4x-2y}{3} + \frac{2x-y}{3}i \end{aligned}$$

Donc :

$$x' = \frac{4x - 2y}{3} \quad et \quad y' = \frac{2x - y}{3}$$

3. Un point M est invariant par f si et seulement si $f(M) = M$ soit en termes d'affixes $z' = z$.

$$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4x - 2y}{3} \\ y = \dfrac{2x - y}{3} \end{cases}$$

D'où : $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

On remarque que les deux équations $x - 2y = 0$ et $2x - 4y = 0$ du système sont équivalentes à la même équation $y = \frac{1}{2}x$.

Donc l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$. (voir graphique)

On remarque que la droite (D) passe par les points $A' = O$, B' et C'.

4. Les coordonnées x' et y' de M' vérifient :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{4x - 2y}{3} = 2 \times \dfrac{2x - y}{3} \\ y' = \dfrac{2x - y}{3} \end{cases}$$

On remarque bien que $y' = \frac{1}{2}x'$. Le point M' appartient à la droite (D) car ses coordonnées vérifient l'équation de (D).

5.a. On a, pour tout z dans $\mathbb{C}$:

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{\frac{(3 + 4i)z + 5\overline{z}}{6} - z}{1 + 2i} = \frac{(-3 + 4i)z + 5\overline{z}}{6(1 + 2i)} = \frac{[(-3 + 4i)z + 5\overline{z}](1 - 2i)}{6(1 + 2i)(1 - 2i)}$$

Or :

$$(-3 + 4i)(1 - 2i) = 5 + 10i = 5(1 + 2i) \quad et \quad 6(1 + 2i)(1 - 2i) = 30$$

D'où :

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{5(1 + 2i)z + 5(1 - 2i)\overline{z}}{30} = \frac{(1 + 2i)z + (1 - 2i)\overline{z}}{6} = \frac{z + \overline{z}}{6} + \frac{2i(z - \overline{z})}{6} = \frac{z + \overline{z}}{6} + i\frac{z - \overline{z}}{3}$$

Déduction : On sait que $z + \overline{z}$ est un réel et que $z - \overline{z}$ est un imaginaire pur et donc $i(z - \overline{z})$ est réel et par conséquent le nombre $\frac{z' - z}{z_A}$ est un réel car il est somme de deux réels.

<u>Remarque :</u>

On pourrait remarquer que : $\dfrac{z' - z}{z_A} = \dfrac{(1 + 2i)z + (1 - 2i)\overline{z}}{6} = \dfrac{2Re[(1 + 2i)z]}{6} \in \mathbb{R}$

b. Si $M \neq M'$ alors la droite (MM') existe et donc $z' \neq z$ et par conséquent le nombre complexe $\frac{z' - z}{z_A}$ est non nul et admet un argument. On sait que :

$$arg\left(\frac{z' - z}{z_A}\right) = arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{MM'}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}\right) \quad [2\pi]$$

Comme $\frac{z' - z}{z_A}$ est un réel non nul alors $arg\left(\frac{z' - z}{z_A}\right) = 0 \quad [\pi]$ et donc $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}\right) = 0 \quad [\pi]$ et par suite les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires.

Conclusion : les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6. En utilisant la question précédente, les droites (OA) et (NN') sont parallèles pourvu que $N' \neq N$.

En outre, on a montré à la question 4 que le point N' appartient à la droite (D).

- $\rightarrow$ *Si N appartient à la droite (D) alors le point N' est confondu avec le point N.*
- $\rightarrow$ *Si N n'appartient pas à la droite (D) alors le point N' sera l'intersection de la droite (D) et de la parallèle (D') à (OA) passant par le point N. Cette intersection existe puisque (D) coupant (OA) coupe aussi sa parallèle (D').*

Exercice 30	***L'homme qui déplace une montagne commence par déplacer les petites pierres.***

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère trois points A, B et C non alignés dont les affixes respectives a, b et c vérifient la condition : $(R) \quad (a + b + c)^2 = 3(bc + ca + ab)$.

1. Donner trois points A, B et C dont les affixes vérifient (R).

2. On se propose de chercher les points M tels que :

$$(1): \quad \frac{1}{\|\overrightarrow{MA}\|^2}.\overrightarrow{MA} + \frac{1}{\|\overrightarrow{MB}\|^2}.\overrightarrow{MB} + \frac{1}{\|\overrightarrow{MC}\|^2}.\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

a. Si z désigne l'affixe de M, montrer que la relation (1) est équivalente à la relation suivante :

$$(2): \quad \frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} + \frac{1}{z-c} = 0.$$

b. Qu'est le point M pour le triangle ABC ?

Corrigé

1. On peut choisir des valeurs simples et simplificatrices de a et b, comme $a = 1$ et $b = -1$. Dans ce cas, l'équation $(a+b+c)^2 = 3(bc+ca+ab)$ d'inconnue c devient : $c^2 = -3$. On pourra choisir $c = i\sqrt{3}$.

2.a. Sachant que la norme d'un vecteur est le module de son affixe : $\|\overrightarrow{MA}\|^2 = |a-z|^2$. D'autre part, on sait que : $|a-z|^2 = (a-z)(\overline{a-z}) = (a-z)(\overline{a}-\overline{z})$.

D'où : $MA^2 = (a-z)(\overline{a}-\overline{z})$.

Il en est de même pour MB^2 et MC^2. Ainsi : $MB^2 = (b-z)(\overline{b}-\overline{z})$ et $MC^2 = (c-z)(\overline{c}-\overline{z})$.

L'égalité (1) se transpose alors sur les affixes en :

$$(1'): \quad \frac{1}{(a-z)(\overline{a}-\overline{z})}(a-z) + \frac{1}{(b-z)(\overline{b}-\overline{z})}(b-z) + \frac{1}{(c-z)(\overline{c}-\overline{z})}(c-z) = 0,$$

qui après simplification donne : $(1'') \quad \dfrac{1}{\overline{a}-\overline{z}} + \dfrac{1}{\overline{b}-\overline{z}} + \dfrac{1}{\overline{c}-\overline{z}} = 0.$

En conjuguant cette dernière relation, nous obtenons : $(2): \quad \dfrac{1}{a-z} + \dfrac{1}{b-z} + \dfrac{1}{c-z} = 0.$

$$(2) \quad \frac{1}{a-z} + \frac{1}{b-z} + \frac{1}{c-z} = 0.$$

b. En multipliant (2) par la quantité non nulle $(a-z)(b-z)(c-z)$ et en simplifiant, la dernière égalité s'écrit de manière équivalente sous la forme : $(z-b)(z-c) + (z-a)(z-c) + (z-a)(z-a) = 0$.

Soit, après développement du 1er membre :

$3z^2 - 2(a+b+c)z + bc + ca + ab = 0$*, puis en tenant compte de la relation (R) et en divisant par 3:*

$$z^2 - 2z \times \frac{1}{3}(a+b+c) + \left[\frac{1}{3}(a+b+c)\right]^2 = 0.$$

On reconnait une identité remarquable et on écrit donc : $\left(z - \dfrac{1}{3}(a+b+c)\right)^2 = 0.$

Et enfin : $z = \frac{1}{3}(a+b+c)$. Donc l'équation (1) n'a qu'une seule solution qui est le centre de gravité de ABC.

Exercice 31	*Le silence est la clé de la prudence, et le sanctuaire de la sagesse.*

On considère le complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On note I, A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes 1, a, a^2, a^3, a^4 ?

1. Vérifier que $a^5 = 1$.

2. Montrer que IA = AB = BC = CD = DI.

3. Vérifier que, pour tout z complexe : $z^5 - 1 = (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$.

4. En déduire que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.

5. Montrer que $a^3 = \overline{a}^2$ et que $a^4 = \overline{a}$.

6. En déduire que $(a+\overline{a})^2 + (a+\overline{a}) - 1 = 0$.

7. Résoudre l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

8. Calculer $(a+\overline{a})$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

9. Placer les points I, A, B, C et D dans le plan complexe (unité 4 cm).

Corrigé

1. $a^4 = e^{i2\pi} = 1$

2. Les points I, A, B, C, D, sont les images successives les uns des autres par la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{5}$: I va sur A, A sur B, etc. On a donc égalité des distances (une rotation est une isométrie).

3. On développe et l'égalité s'installe elle-même.

4. Comme $a^5 = 1$, le nombre a est une solution de l'équation $a^5 = 1$, soit aussi solution de l'équation : $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)=0$, mais comme a ne vaut pas 1, a est solution de l'équation suivante : $1+z+z^2+z^3+z^4=0$. Donc le nombre a vérifie bien l'égalité : $1+a+a^2+a^3+a^4=0$.

5. On a : $a^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $\overline{a}^2 = \left(e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)^2 = e^{-i\frac{4\pi}{5}} = e^{i2\pi - i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}}$. On établit de même que $a^4 = \overline{a}$.

6. En Utilisant les égalités $a^3 = \overline{a}^2$ et $a^4 = \overline{a}$ dans la relation $1+a+a^2+a^3+a^4=0$; on trouve :

$$1+a+a^2+a^3+a^4=0 \iff 1+a+a^2+\overline{a}^2+\overline{a}=0.$$

D'autre part, on sait que : $(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1 = \left(a^2+2a\overline{a}+\overline{a}^2\right)+(a+\overline{a})-1$

Or $a\overline{a} = |a|^2 = 1$ et par suite :

$$(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1 = \left(a^2+2+\overline{a}^2\right)+(a+\overline{a})-1 = 1+a+a^2+\overline{a}^2+\overline{a} = 0$$

7. La résolution de l'équation du second degré $4x^2 + 2x - 1 = 0$ donne sans difficulté les deux solutions :

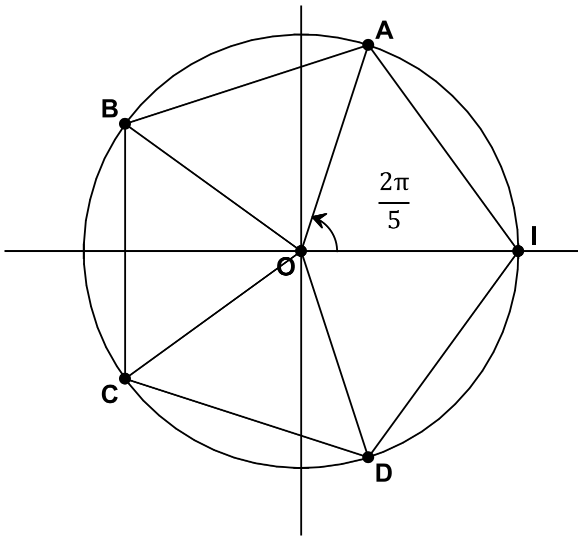
$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad et \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

8. On a : $a+\overline{a} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2Re\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, donc en remplaçant dans l'égalité suivante : $(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=0$, on obtient : $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=0$.

Donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est, de toute évidence, l'une des solutions de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est positif $\left(0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}\right)$ alors $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

9. Voir figure ci-après :



Exercice 32	Ne pile pas ton mil avec une banane mûre.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2 - 4z$

1. Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a. Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.

b. On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3.

a. Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. a. Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $arg(z' + 4)$ et $arg(z - 2)$.

b. On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$. Démontrer que tous les points M du cercle (C) de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un cercle que l'on déterminera.

c. Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$. Donner la forme trigonométrique de $z_E + 4$ et démontrer à l'aide du 3. a. qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique les affixes de ces deux points.

Corrigé

1. a. Calcul de $z_{A'}$ *et* $z_{B'}$: $z_{A'} = z_A^2 - 4z_A = (1+i)^2 - 4(1-i) = -4+2i$

$z_{B'} = z_B^2 - 4z_B = (3+i)^2 - 4(3+i) = -4+2i$

b. Soit U et V deux points d'affixes respectives u et v. Supposons que U et V ont la même image par f.

On a : $f(U) = f(V) \Leftrightarrow u' = v' \Leftrightarrow u^2 - 4u = v^2 - 4v \Leftrightarrow (u^2 - v^2) - 4(u - v) = 0$

ce qui donne également :

$$(u^2 - v^2) - 4(u-v) = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u+v-4) = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ ou } \frac{u+v}{2} = 2$$

Ce qui signifie que $U = V$ *ou U et V sont symétriques par rapport au point d'affixe 2.*

2.a. OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'I}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'I} \Leftrightarrow z - 0 = -3 - z' \Leftrightarrow z' + z + 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$$

b. $z^2 - 3z + 3 = 0$: $\Delta = 9 - 12 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$. *D'où :* $z_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $z_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. a. On a : $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$ *et donc par passage aux modules et aux arguments, on obtient :*

$$|z' + 4| = |z - 2|^2 \quad et \quad arg(z' + 4) = 2arg(z-2)\ [2\pi]$$

b. Soit M un point du cercle (C) de centre le point J d'affixe 2 et de rayon 2, son affixe z est telle que $|z - 2| = 2$, *et son image M' est donc telle que* $|z' + 4| = |z - 2|^2 = 2^2 = 4$; *d'où M' est sur le cercle de centre le point* $K(-4)$ *et de rayon 4.*

c. On a : $z_E + 4 = (-4 - 3i) + 4 = -3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$. *Si E est l'image d'un point d'affixe z alors on peut écrire :*

$$arg(z_E + 4) = 2arg(z-2) + 2k\pi \quad soit \quad 2arg(z-2) = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \ \text{ ou encore } \ arg(z-2) = -\frac{\pi}{4} - k\pi$$

Il y a donc deux arguments possibles à savoir :

$$-\frac{\pi}{4} \quad et \quad -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

En exploitant les modules, on peut déduire que : $|z-2|^2 = |z_E + 4| = |-3i| = 3$ *soit* $|z - 2| = \sqrt{3}$.

On peut donc conclure que :

$$z - 2 = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}} \quad ou \quad z - 2 = \sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Et par suite :

$$z = 2 + \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}} = 2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4+\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

ou

$$z = 2 + \sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2 + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Exercice 33	*La pauvreté est la fille aînée de la paresse.*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$. *Unité graphique : 0,5 cm. On note j le nombre complexe* $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. *On considère les points A, B et C d'affixes respectives* $a = 8$, $b = 6j$ *et* $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, *B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{3}$, *C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle* $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.

2. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

a. Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.

b. Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$. *En déduire que O est un point de la droite (BB').*

c. On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.

Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3. On se propose de montrer que la distance $MA + MB + MC$ *est minimale lorsque* $M = O$.

a. Calculer la distance OA + OB + OC.

b. Montrer que $j^3 = 1$ *et que* $1 + j + j^2 = 0$.

c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.

On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ *et* $c = 8j^2$.

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22$$

d. On admet que pour tous complexes z, z' et z'' : $|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$.

Montrer que $MA + MB + MC$ *est minimale lorsque M = O.*

Corrigé

1. Voir la figure ci-dessous.

2.a. La rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ *a pour écriture complexe :* $z' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - c)$

Ce qui donne : $a' - 8j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(6j - 8j^2)$

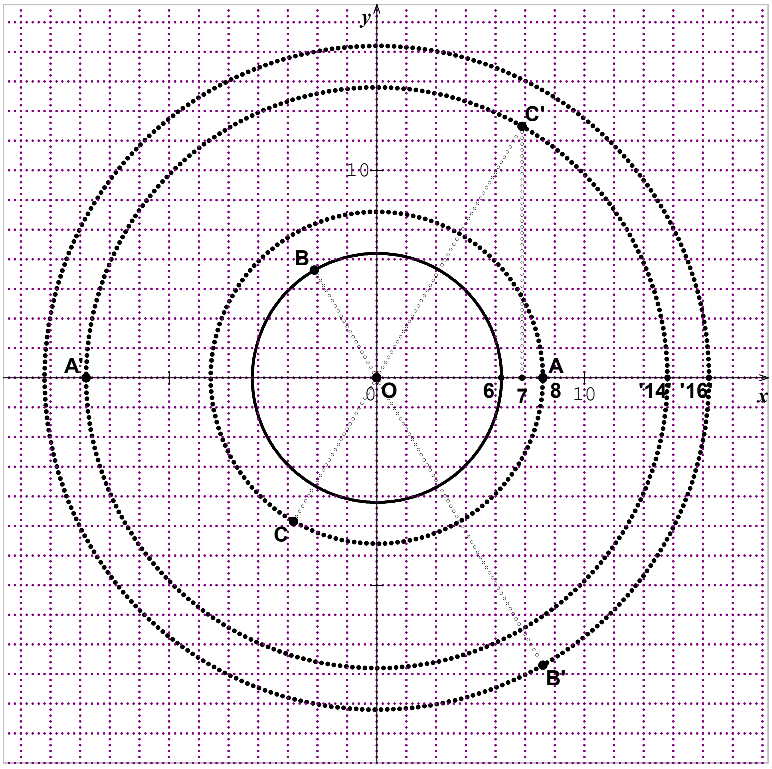
On calcule j et j^2 *sous forme algébrique pour les utiliser dans les questions qui suivent.*

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad et \quad j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On peut factoriser le second membre par $2j = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ *dans l'égalité :* $a' - 8j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(6j - 8j^2)$

D'où : $a' - 8j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(3 - 4j) \Leftrightarrow a' = 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2e^{i\pi}\left(3 + 2 - 2i\sqrt{3}\right)$

Enfin : $a' = -4 - 4i\sqrt{3} - 2\left(5 - 2i\sqrt{3}\right) = -14$*. On constate bien que a' est un réel.*



b. B' est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ *soit :* $b' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)$

$b' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(8j^2 - 8) + 8 = 8 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)(j^2 - 1)$

$b' = 8 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 8 - 2\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(3 + i\sqrt{3}\right)$

$b' = 8 - 2\left(3 - 3 + 4i\sqrt{3}\right) = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Déduction de $O \in (BB')$ *:*

On a : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -e^{-i\frac{\pi}{3}}$*, on en déduit que* $b' = -16j = -16\frac{b}{6} = -\frac{8}{3}b$ *ou encore en termes de vecteurs* $\overrightarrow{OB'} = -\frac{8}{3}\overrightarrow{OB}$ *: les points O, B et B' sont alignés et donc :* $O \in (BB')$

c. $c' = 7 + 7i\sqrt{3} = -14\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -14j^2 = -14 \times \frac{c}{8} = -\frac{7}{4}c$*, soit vectoriellement :* $\overrightarrow{OC'} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{OC}$

Et donc : $O \in (CC')$.

Tandis que les points A et A' sont clairement sur l'axe des abscisses car leurs affixes sont réelles et donc $O \in (AA')$.

Conclusion : les droites (AA'), (BB') *et* (CC') *sont concourantes en O.*

3.a. On sait que : $|j| = |j^2| = 1$*. Donc :* $OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 8 + 6 + 8 = 22$

b. On a : $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1 \quad et \quad 1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

c. On a :

$$(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j = a-z+bj^2-zj^2+cj-zj = a+bj^2+cj-z(1+j+j^2)$$
$$= a+bj^2+cj \quad car\ 1+j+j^2=0.$$

Or on sait que : $bj^2 = 6j \times j^2 = 6j^3 = 6$ *et* $cj = 8j^2 \times j = 8j^3 = 8$ *et par suite* $a+bj^2+cj = 22$

Donc, il en résulte : $|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j| = |a+bj^2+cj| = 22$

d. L'inégalité admise dans l'énoncé permet d'écrire :

$$|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j| \leq |a-z| + |(b-z)j^2| + |(c-z)j|$$

Et comme le module d'un produit est égal au produit des modules :

$$|(b-z)j^2| = |b-z| \times |j^2| = |b-z| \quad et \quad |(c-z)j| = |c-z| \times |j| = |c-z|$$

On peut conclure que : $|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j| \leq |a-z|+|b-z|+|c-z|$

Le premier membre de cette inégalité a été calculé à la question 3.c., il est égal à 22, et le second membre se traduit en termes de distance par : $|a-z|+|b-z|+|c-z| = MA+MB+MC$.

D'où l'inégalité : pour tout point M du plan, on a : $22 \leq MA+MB+MC$ *soit :*

Pour tout point M du plan, $OA+OB+OC \leq MA+MB+MC$ *et donc la somme* $MA+MB+MC$ *est minimale lorsque* $M = O$.

Exercice 34	***Les portes de l'avenir sont ouvertes à ceux qui savent les pousser.***

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$ *(unité graphique : 1 cm).*

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1+\ i, 3-i$ *et 2.*

À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.

1. Faire une figure et compléter cette figure tout au long de l'exercice.

2. Calculer les affixes de A' et B', images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?

3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe −5.

4. a. Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z'+4 = (z-2)^2$.

b. En déduire une relation entre $|z'+4|$ *et* $|z-2|$ *et, lorsque z est différent de 2, une relation entre* $arg(z'+4)$ *et* $arg(z-2)$.

c. Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle (C) de centre I et de rayon 2?

5. Soient E le point d'affixe $2+2e^{i\frac{\pi}{3}}$*, J le point d'affixe −4 et E' l'image de E.*

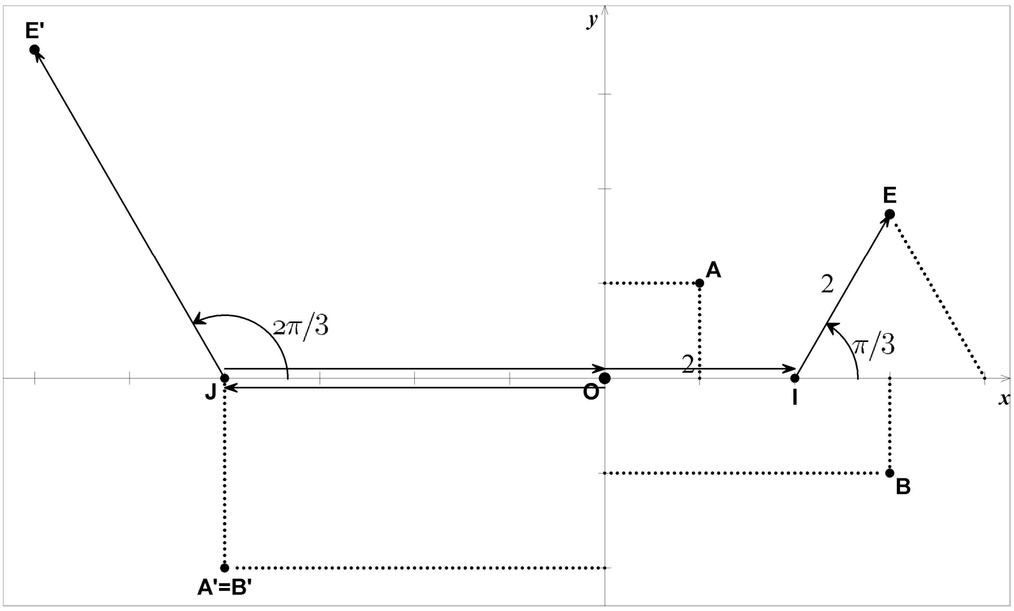
a. Construire le point E puis calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{IE})$.

b. Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{JE'})$.

c. Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.

Corrigé

1. Voir la figure (page suivante)



2. $z_{A'} = -4-2i$*,* $z_{B'} = -4-2i$*, les points A' et B' sont confondus.*

3. Il s'agit de déterminer z tel que $z^2-4z=-5$.

$$z^2-4z=-5 \iff z^2-4z+5=0 : \ \Delta = 16-20 = -4 = (2i)^2$$

Donc il existe deux solutions : $z_1 = 2+i$*,* $z_2 = 2-i$.

4. a. On a : $z'+4 = z^2-4z+4 = (z-2)^2$.

b. $|z'+4| = |(z-2)^2| = |z-2|^2$*,* $arg(z'+4) = arg[(z-2)^2] = 2arg(z-2)$.

c. Lorsque M décrit le cercle (C) de centre I et de rayon 2, alors $|z-2|=2$.
Comme $|z'+4|=|z-2|^2$ *alors* $|z'+4|=2^2=4$.
Donc le point M' parcourt le cercle (C') de centre J le point d'affixe -4 *et de rayon 4.*
5.b. $IE=\left|2+2e^{i\frac{\pi}{3}}-2\right|=2\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=2$. *Donc E est sur (C) et E' est sur (C') et par suite* $JE'=4$.
c. On a : $(\vec{u};\overrightarrow{JE'})=arg(z'+4)=2arg(z-2)=2(\vec{u};\overrightarrow{IE})=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

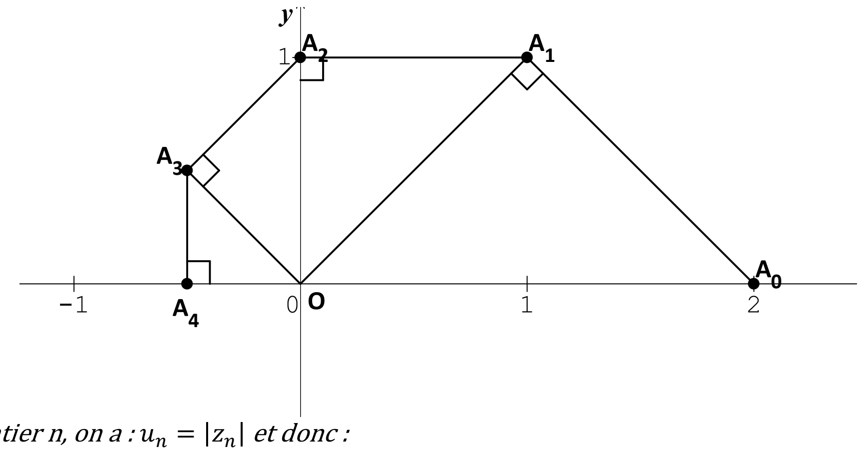
Exercice 35	***Le succès par la persévérance fait oublier les peines d'antan.***

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. *On prendra pour unité graphique 5 cm. On pose* $z_0=2$ *et, pour tout entier naturel n,* $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$. *On note* A_0 *le point du plan d'affixe* z_n.
1. Calculer z_1,z_2,z_3,z_4 *et vérifier que* z_4 *est un nombre réel. Placer les points* $A_1,\ A_2,\ A_3$ *et* A_4 *sur une figure.*
2. Pour tout entier n, on pose $u_n=|z_n|$. *Justifier que* (u_n) *est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,* $u_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
3. Déterminer à partir de quel rang n_0*, les points* A_n *sont sur le disque de centre O et de rayon 0,1.*
4. a. Établir que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$. *En déduire la nature du triangle* OA_nA_{n+1}.
b. Pour tout entier naturel n, on note L_n *la longueur de la ligne brisée* $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$. *Ainsi, on a :*
$L_n=A_0A_1+A_1A_2+\cdots+A_{n-1}A_n$. *Exprimer* L_n *en fonction de n. Quelle est la limite de la suite* (L_n) *?*

Corrigé
1. On a :

$$z_1=\frac{1+i}{2}z_0=\frac{1+i}{2}\times 2=1+i,$$
$$z_2=\frac{1+i}{2}z_1=\frac{1+i}{2}\times(1+i)=i,$$
$$z_3=\frac{1+i}{2}z_2=\frac{1+i}{2}\times i=\frac{-1+i}{2},$$
$$z_4=\frac{1+i}{2}z_3=\frac{1+i}{2}\times\frac{-1+i}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Donc z_4 *est bien un nombre réel.*



2. Pour tout entier n, on a : $u_n=|z_n|$ *et donc :*

$$u_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|\frac{1+i}{2}z_n\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right|\times|z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n.$$

Ainsi, (u_n) *est bien une suite géométrique de premier terme* $u_0=2$ *et de raison* $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Donc : $u_n=u_0q^n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
3. Le point A_n *appartient au disque de centre O et de rayon 0,1 si et seulement si :* $OA_n\le 0{,}1$.
Or, par définition : $OA_n=|z_n|=u_n$*, d'où :*

$$OA_n\le 0{,}1\Leftrightarrow u_n\le 0{,}1\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le 0{,}1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le 0{,}05\Leftrightarrow n.\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le \ln 0{,}05.$$

Soit comme $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$ *, on a:* $n\ge\dfrac{\ln 0{,}05}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\approx 8{,}6$.
Ainsi à partir de $n_0=9$*, tous les points* A_n *appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1.*

4. a. On a :

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\frac{\frac{1+i}{2}z_n-z_n}{\frac{1+i}{2}z_n}=\frac{\frac{1+i}{2}-1}{\frac{1+i}{2}}=\frac{\frac{-1+i}{2}}{\frac{1+i}{2}}=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{(-1+i)(1-i)}{2}=i.$$

D'où : $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right|=|i|=1.$

D'autre part, on sait que : $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right|=\frac{|z_{n+1}-z_n|}{|z_{n+1}|}=\frac{A_{n+1}A_n}{A_{n+1}O}$ *et* $arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right)=\left(\overrightarrow{A_{n+1}O},\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right)\ [2\pi].$

Donc : $A_{n+1}A_n=A_{n+1}O$ *et* $\left(\overrightarrow{A_{n+1}O},\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$

C'est-à-dire que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle de sommet A_{n+1}.

b. Le triangle OA_nA_{n+1} étant rectangle et isocèle en A_{n+1}, le théorème de Pythagore donne : $2{A_nA_{n+1}}^2={OA_n}^2$.

D'où : $A_nA_{n+1}=\frac{OA_n}{\sqrt{2}}=\frac{u_n}{\sqrt{2}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}.$

Ainsi, $A_0A_1=\sqrt{2},\quad A_1A_2=1,\quad A_2A_3=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad A_3A_4=\frac{1}{2}.$

Donc L_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$L_n=\sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$$

Comme $-1<q=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$ *et par suite :* $\lim_{n\to+\infty}L_n=\frac{2}{\sqrt{2}-1}=2\sqrt{2}+2.$

Exercice 36	**Le sel qui vieillit ne perd pas sa saveur.**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure. Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

1. Soit E le point d'affixe $z_E=-i$. Déterminer l'affixe du point E' image de E par f.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que M' $=M$.

3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit M un point distinct des points O, A et B.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a : $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$

b. En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'A},\ \overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}\right)$.

4. Soit Δ la médiatrice de [AB]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.

5. Soit Γ le cercle de diamètre [AB].

a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).

b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

Corrigé

1. *Affixe de E' image de E :* $z_{E'}=\frac{1}{2}\left(-i+\frac{1}{-i}\right)=0.$

2. Il s'agit de déterminer l'ensemble des points M invariants par l'application :

$$M'=M\iff z'=z\iff z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\iff 2z^2=z^2+1\iff z^2=1\iff z=\pm1.$$

Donc les points invariants sont les points d'affixes 1 et -1.

3. *a. Soit z un complexe différent de 0, 1 et -1. On a :* $\frac{z'+1}{z'-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}=\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$

b. L'égalité qu'on vient d'établir : $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ *induit deux autres égalités en termes de normes puis en termes d'arguments*

$$\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2 \quad et \quad arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right) = 2arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\ [2\pi]$$

Soit en termes de distances et d'angles de vecteurs : $\frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA}\right)^2$ *et* $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$.

4. On a : $M \in \Delta \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M'A = M'B \Leftrightarrow M' \in \Delta$.

Donc tout point de Δ *a son image sur* Δ*. On dit que la droite* Δ *est globalement invariante par l'application f ou qu'elle est stable par f.*

5. a. Soit M un point du cercle Γ de diamètre $[AB]$.

Si $M = A$ *(sur Γ) alors* $M' = A$ *(sur* (AB)*) ;*

Si $M = B$ *(sur Γ) alors* $M' = B$ *(sur* (AB)*) ;*

Si $M \neq A$ *et* B *alors le triangle MAB est rectangle en M i.e que* $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Or $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$*, d'où :* $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = 0\ [\pi]$.

L'égalité $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = 0\ [\pi]$ *traduit le fait que le point M' est sur la droite (AB).*

Donc, en conclusion, pour tout point M de Γ, son image M' est sur la droite (AB).

b. Soit M' un point de la droite (AB) *d'affixe Z.*

Si M' a pour antécédent un point M d'affixe z alors on aurait la relation : $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Cette relation est équivalente à l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2Zz + 1 = 0$.

Or, on sait que cette du second degré dans $\mathbb{C}$ *admet au moins une solution, ce qui signifie que tout point M' de la droite (AB) (d'ailleurs même s'il n'appartient pas à (AB)) admet au moins un antécédent.*

Exercice 37	Le mensonge peut courir depuis dix ans, il suffit d'une matinée à la vérité pour l'atteindre.

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$*. Dans tout l'exercice,* $P \setminus O$ *désigne le plan P privé du point origine O.*

1. On considère l'application f de $P \setminus O$ *dans* $P \setminus O$ *qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :*

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}.$$

On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

a. Démontrer que pour $z' \neq 0$*, on a* $arg(z') = arg(z)$ *à* $2k\pi$ *près, avec k entier relatif.*

En déduire que, pour tout point M de $P \setminus \{O\}$ *les points M et* $M' = f(M)$ *appartiennent à une même demi-droite d'origine O.*

b. Déterminer l'ensemble des points M de $P \setminus \{O\}$ *tels que* $f(M) = M$.

c. M est un point du plan P distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.

Établir l'égalité : $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i}\left(\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$

En déduire une relation entre $arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ *et* $arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$.

2. a. Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ *et* $z \neq i$ *et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si* $\frac{z-1}{z-i}$ *est un réel non nul.*

b. Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

Corrigé

1\. *a. On sait que pour tout complexe* $z \neq 0$*, on a :* $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)$ *et* $arg(\overline{z}) = -arg(z)$ *à* 2π *près.*

D'où : $arg(z') = arg\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = -arg(\overline{z}) = -[-arg(z)] = arg(z)\ [2\pi]$.

L'égalité $arg(z') = arg(z)\ [2\pi]$ *se traduit en termes d'angles de vecteurs par :* $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$

Ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{OM'}$ *sont colinéaires et de même sens. Donc les points M et M' appartiennent à la même demi-droite d'origine O.*

b. On a : $f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = \frac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1$.

Donc l'ensemble des points invariants par f est le cercle de centre O et de rayon 1.

c. Un simple calcul, utilisant les propriétés du conjugué, permet de conduire à l'égalité demandée :

$$\frac{z'-1}{z'-i}=\frac{\frac{1}{\overline{z}}-1}{\frac{1}{\overline{z}}-i}=\frac{\frac{1-\overline{z}}{\overline{z}}}{\frac{1-i.\overline{z}}{\overline{z}}}=\frac{\overline{z}-1}{i.\overline{z}-1}=\frac{1}{i}.\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}=-i.\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}.$$

Donc en passant aux arguments :

$$arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)=arg\left[-i.\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}\right]=arg(-i)+arg\left[\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}\right]=-\frac{\pi}{2}-arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\ [2\pi].$$

Soit enfin : $arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)=-\frac{\pi}{2}-arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\ [2\pi].$

2. a. On sait que M appartient à la droite (UV) *privée de U et V si et seulement si :* $(\overrightarrow{VM},\overrightarrow{UM})=0\ [\pi]$.

D'autre part, on a : $(\overrightarrow{VM},\overrightarrow{UM})=arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\ [2\pi].$

Donc : $M\in(UV)\setminus\{U,V\}\Leftrightarrow arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0\ [\pi]\ \Leftrightarrow$ *z réel non nul.*

b. On a :

$$M\in(UV)\setminus\{U,V\}\Leftrightarrow arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0\ [\pi]\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}-arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)=0\ [\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)=-\frac{\pi}{2}\ [\pi]\ \Leftrightarrow\ (\overrightarrow{VM'},\overrightarrow{UM'})=-\frac{\pi}{2}\ [\pi].$$

Donc $M\in(UV)\setminus\{U,V\}$ *si, et seulement, si M' appartient au cercle de diamètre* $[UV]$ *privé de U et V.*

Exercice 38	***La fortune, c'est comme un saignement de nez, cela arrive parfois sans raison, et s'en va de même.***

1. On considère le polynôme P défini par : $P(z)=z^3+(1-i\sqrt{2})z^2+(74-i\sqrt{2})z-74i\sqrt{2}$

a. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z)=0$.

b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z)=(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b)$$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$.

On prendra 1 cm pour unité graphique.

a. Placer les points A, B et I d'affixes $z_A=-7+5i$; $z_B=-7-5i$ *et* $z_I=i\sqrt{2}$.

b. Déterminer l'affixe de I' l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

c. Placer le point C d'affixe $z_C=1+i$.

Déterminer l'affixe du point N tel que ABCN soit un parallélogramme.

d. Placer le point D d'affixe $z_D=1+11i$.

Calculer $Z=\frac{z_A-z_C}{z_D-z_B}$ *sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites* (AC) *et* (BD) *sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère ABCD.*

Corrigé

1. a. Le nombre iy est solution de l'équation $P(z)=0$ *si, et seulement si,* $P(iy)=0$ *soit :*

$$-iy^3-(1-i\sqrt{3})y^2+(74-i\sqrt{2})iy-74i\sqrt{2}=0$$

La séparation des parties imaginaire et réelle donne le système :

$$\begin{cases}-y^2+\sqrt{2}y=0\\-y^3+\sqrt{2}y^2+74y-74\sqrt{2}=0\end{cases}$$

La première équation du système admet deux solutions $y=0$ *et* $y=\sqrt{2}$ *; mais seule la solution* $y=\sqrt{2}$ *vérifie la deuxième équation du système.*

Donc l'unique solution imaginaire de l'équation $P(z)=0$ *est* $z=i\sqrt{2}$.

b. Comme $i\sqrt{2}$ *est une solution de l'équation* $P(z)=0$ *alors le polynôme* $P(z)$ *est factorisable par* $z-i\sqrt{2}$. *Donc il existe deux nombres complexes a et b tels que :*

$$\forall z\in\mathbb{C},\qquad P(z)=(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b).$$

Après développement de $(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b)$ *et identification de ses coefficients avec ceux de* $P(z)=z^3+(1-i\sqrt{2})z^2+(74-i\sqrt{2})z-74i\sqrt{2}$, *nous obtenons le système suivant :*

$$\begin{cases}a-i\sqrt{2}=1-i\sqrt{2}\\-i\sqrt{2}a+b=74-i\sqrt{2}\\-ib\sqrt{2}=-74i\sqrt{2}\end{cases}$$

Ce qui conduit à $a=1$ *et* $b=74$. *D'où l'égalité :* $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z-i\sqrt{2})(z^2+z+74)$.

c. Résolution de l'équation $P(z) = 0$:

$$P(z) = 0 \iff (z - i\sqrt{2})(z^2 + z + 74) = 0 \iff z - i\sqrt{2} = 0 \ \ ou \ \ z^2 + z + 74 = 0.$$

Pour l'équation $z^2 + z + 74 = 0$, on a $\Delta = 1 - 4 \times 74 = -295 = (i\sqrt{295})^2$.

Donc l'équation $z^2 + z + 74 = 0$ admet deux solutions :

$$\frac{-1 - i\sqrt{295}}{2} \quad et \quad \frac{-1 + i\sqrt{295}}{2}.$$

On conclut que l'équation $P(z) = 0$ admet trois solutions :

$$z_1 = i\sqrt{2}, \qquad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{295}}{2}, \qquad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{295}}{2}.$$

2.a. Construction (voir figure)

2.b. On a : $z_{I'} = e^{i\frac{\pi}{4}} z_I = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) i\sqrt{2} = -1 + i$.

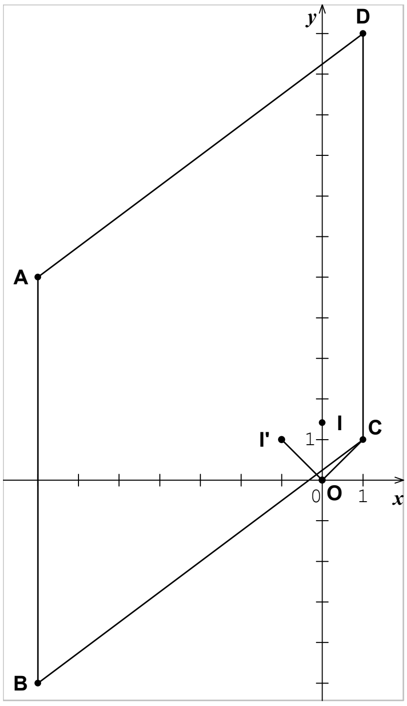
c. Le quadrilatère ABCN est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NC} \iff z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{NC}} \iff z_N = z_A - z_B + z_C = -7 + 5i + 7 + 5i + 1 + i = 1 + 11i.$$

d. Calculons $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$

On a : $Z = \dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \dfrac{-7 + 5i - 1 - i}{1 + 11i + 7 + 5i} = \dfrac{-8 + 4i}{8 + 16i} = \dfrac{-2 + i}{2 + 4i} = \dfrac{(-2 + i)(2 - 4i)}{4 + 16} = \dfrac{1}{2}i = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}.$

Donc $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}) = arg\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et par suite les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Comme ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires alors c'est un losange.



Exercice 39	*Le temps est une lime qui travaille sans bruit*

1. Montrer que $(1 + i)^6 = -8i$.

2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.

a. Déduire de 1. une solution de l'équation (E).

b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3. Déduire également de la question 1 une solution de (E') : $z^3 = -8i$.

4. On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

b. Montrer que b et c sont solutions de (E').

5. a. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2 cm), représenter A, B et C.

b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

Corrigé

1. On a : $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$*, donc :* $(1+i)^6 = ((1+i)^2)^3 = (2i)^3 = -8i$.

2. a. Comme $(1+i)^6 = -8i$ *et que* $(1+i)^6 = ((1+i)^3)^2$ *alors* $(1+i)^3$ *est une solution de (E).*

On sait que $(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = 2i(1+i) = -2+2i$*, donc* $-2+2i$ *est solution de (E).*

b. Comme l'équation (E) est de la forme $z^2 = u$ *qui admet deux solutions opposées si* $u \neq 0$.

Donc la 2ème solution de (E) est $-(-2+2i) = 2-2i$.

3. Comme à la question 2, on peut écrire $(1+i)^6 = ((1+i)^2)^3 = (2i)^3 = -8i$ *et par suite le nombre* $(1+i)^2 = 2i$ *est une solution de (E').*

4. a. $L'expression\ complexe\ de\ r\ est\ z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z. Avec\ z = 2i, on\ a : b = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2i = 2i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}-i.$

Puis pour le calcul de l'affixe de C, image de l'image de A, on a :

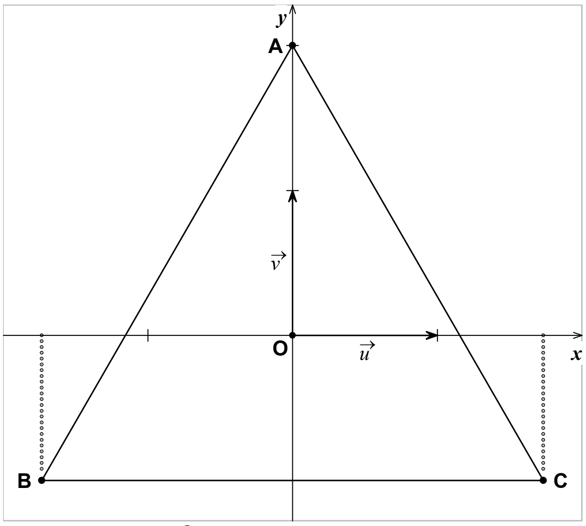
$$c = be^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(2ie^{i\frac{2\pi}{3}}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2ie^{i\frac{4\pi}{3}} = 2i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}-i.$$

b. $Par\ passage$ à $la\ forme\ trigonométrique, on\ trouve :\ b^3 = \left(2ie^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = -8ie^{i\frac{6\pi}{3}} = -8i.$

De même pour c : $c^3 = \left(2ie^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^3 = -8ie^{i\frac{12\pi}{3}} = -8i.$

Donc b et c sont solutions de l'équation (E').

5.a. Placement des points A, B et C :



b. et c. La rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ *transforme A en B, B en C et C en A. Donc le triangle ABC est équilatéral de centre O et par conséquent son centre de gravité est le point O.*

Exercice 40	***Si tu te tapes la tête contre une cruche et que ça sonne creux, n'en déduis pas forcément que c'est la cruche qui est vide.***

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *d'unité graphique 2 cm.*

On considère les points I et A d'affixes respectives 1 et -2*. Le point K est le milieu du segment [IA].*

On appelle (C) le cercle de diamètre [IA]. Faire une figure au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit B le point d'affixe b où b= $\frac{1+4i}{1-2i}$.

Écrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle (C).

2. Soit D le point du cercle (C) tel que $(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KD}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$*, où k est un relatif, et soit d l'affixe de D.*

a. Quel est le module de $d+\frac{1}{2}$ *. Donner un argument de* $d+\frac{1}{2}$.

b. En déduire que $d = \frac{1}{4}+\frac{3i\sqrt{3}}{4}$.

c. Déterminer un réel a vérifiant l'égalité $\frac{1+2ia}{1-ia} = \frac{1}{4}+\frac{3i\sqrt{3}}{4}$.

3. Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \frac{1+2i}{1-ix}$*. On pose* $Z = \frac{m-1}{m+2}$.

Calculer Z et en déduire la nature du triangle AIM.

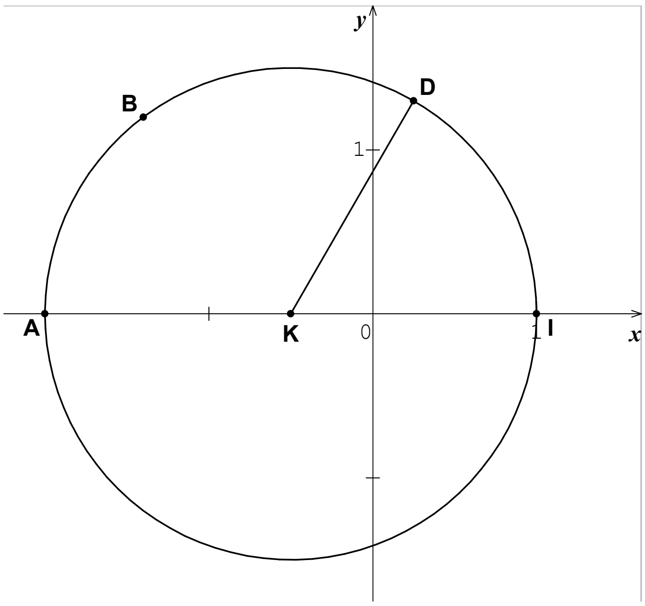
4. Soit N un point, différent de A, du cercle (C) et n son affixe.

Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n = \frac{1+2iy}{1-i}$.

Corrigé

1. *On a :* $b = \dfrac{1+4i}{1-2i} = \dfrac{(1+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{1+2i+4i-8}{5} = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{6}{5}i.$

Le point B appartient au cercle (C) si, et seulement si, $BK = IK = \frac{IA}{2} = 1{,}5.$



Or, on sait que : $BK = |z_K - z_B| = \left|-\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{5} - \dfrac{6}{5}i\right| = \left|\dfrac{9}{10} - \dfrac{6}{5}i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{9}{10}\right)^2 + \left(-\dfrac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{225}{100}} = \dfrac{15}{10} = 1{,}5 = \dfrac{3}{2}$

Donc le point B appartient bien au cercle (C).

2.a. On a : $\left|d + \frac{1}{2}\right| = \left|d - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = |z_D - z_K| = KD = 1{,}5$ *car K est un point du cercle (C).*

D'autre part, on a : $arg\left(d + \frac{1}{2}\right) = (\vec{u}, \overrightarrow{KD}) = (\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KD}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$

b. En vertu de la question précédente, il devient légitime d'écrire :

$$d + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i.$$

Et par suite, on obtient : $d = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i.$

c. Détermination du réel a tel que $\dfrac{1+2ia}{1-ia} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i$:

On a :

$$\begin{aligned}\frac{1+2ia}{1-ia} = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i &\Leftrightarrow 4(1+2ia) = (1-ia)\left(1+3i\sqrt{3}\right)\\ &\Leftrightarrow 4 + 8ia = 1 + 3i\sqrt{3} - ia + 3a\sqrt{3}\\ &\Leftrightarrow 4 + 8ia = 1 + 3a\sqrt{3} + \left(3\sqrt{3} - a\right)i.\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}1 + 3a\sqrt{3} = 4\\ 3\sqrt{3} - a = 8a\end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

3. *Calcul de Z :* $Z = \dfrac{m-1}{m+2} = \dfrac{\dfrac{1+2ix}{1-ix} - 1}{\dfrac{1+2ix}{1-ix} + 2} = \dfrac{1+2ix-1-ix}{1+2ix+2-2ix} = \dfrac{3ix}{3} = ix.$

Donc : $|Z| = |x|$ *et* $arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi].$

On remarque que : $arg(Z) = arg\left(\dfrac{m-1}{m+2}\right) = arg\left(\dfrac{z_M - z_I}{z_M - z_A}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IM})\ [2\pi].$

On en déduit donc que : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IM}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi].$

Donc le triangle AIM est rectangle en M et par suite le point M appartient au cercle de diamètre $[IA]$*, en l'occurrence au cercle (C).*

4. Il s'agit de montrer que pour tout point N de (C), distinct de A, d'affixe n, il existe un réel y tel que :

$$n = \frac{1+2iy}{1-iy}.$$

On a : $n = \frac{1+2iy}{1-iy} \Leftrightarrow n(1-iy) = 1+2iy \Leftrightarrow y(2i+ni) = n-1.$

Comme $2i + ni \neq 0$ $(n \neq -2)$ *alors :* $y = \frac{n-1}{i(n+2)} = -i\frac{n-1}{n+2}.$

Il reste à établir que le nombre y est réel. Dans ce cadre, on sait que : y *réel* $\neq 0 \Leftrightarrow arg(y) = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

Si $y = 0$ *alors* $n = 1$ *c'est-à-dire que* $N = I \in (C)$

Si $y \neq 0$ *alors, on peut écrire :* $arg(y) = arg\left(-i\frac{n-1}{n+2}\right) = arg(-i) + arg\left(\frac{n-1}{n+2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{IN}\right)$ $[\pi]$.

Or comme N appartient au cercle (C) (ici distinct de A et I) alors $\left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{IN}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$ *et par suite y est réel car on a abouti à* $arg(y) = 0$ $[\pi]$.

Exercice 41	***<u>Il y a un proverbe chinois qui ne dit rien. Il m'arrive de le citer quand je n'ai rien à dire...</u>***

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, *on considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c et H le point d'affixe* $a+b+c$. *On suppose, dans tout l'exercice, que les trois nombres a, b et c vérifient :* $|a| = |b| = |c|$.

Le but de l'exercice est de montrer que H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC.

1.a. Soit $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

Exprimer $\overline{w}$ *à l'aide de w. En déduire que w est un nombre imaginaire pur, ou nul.*

b. Montrer à l'aide de la question a. que : $(b+c)(\overline{b} - \overline{c})$ *et* $\frac{b+c}{b-c}$

sont des nombres imaginaires purs, ou nuls.

2.a. Exprimer, en fonction de a, de b et de c, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ *et* $\overrightarrow{CB}$.

b. Utiliser les questions 2.a. et 1.b. pour montrer que la droite (AH) est la hauteur passant par A du triangle ABC.

c. Expliquer, sans calcul supplémentaire, pourquoi H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC.

3. Placer les points A, B, C et H dans le plan dans le cas suivant :

$$a = \sqrt{3} + i, \qquad b = -1 + i\sqrt{3}, \qquad c = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

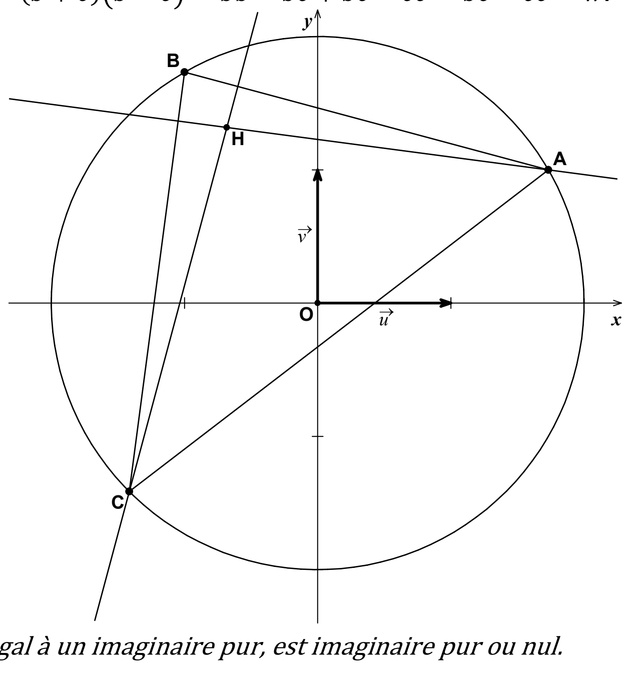
Corrigé

1.a. Le conjugué d'un produit étant le produit des conjugués, on obtient : $\overline{w} = \overline{\overline{b}c - b\overline{c}} = b\overline{c} - \overline{b}c = -w$.

Donc w est imaginaire pur, ou nul.

b. On a, en tenant compte de $|b| = |c|$ *et donc de* $b\overline{b} = c\overline{c}$, *les égalités successives suivantes :*

$$(b+c)(\overline{b} - \overline{c}) = b\overline{b} - b\overline{c} + \overline{b}c - c\overline{c} = \overline{b}c - c\overline{c} = w.$$



Donc $(b+c)(\overline{b} - \overline{c})$ *, étant égal à un imaginaire pur, est imaginaire pur ou nul.*

De même, on peut écrire : $\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{(b+c)\left(\overline{b-c}\right)}{(b-c)\left(\overline{b-c}\right)}=\dfrac{(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)}{(b-c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)}=\dfrac{w}{|b-c|^2}$.

Comme $w\in i\mathbb{R}$ *et* $|b-c|^2\in\mathbb{R}$ *alors* $\frac{w}{|b-c|^2}$ *est imaginaire pur et donc* $\frac{b+c}{b-c}$ *est un imaginaire pur.*

2.a. Le point H a pour affixe $a+b+c$, *donc le vecteur* $\overrightarrow{AH}$ *a pour affixe* $a+b+c-a$, *soit* $b+c$. *Le vecteur* $\overrightarrow{CB}$ *a pour affixe* $b-c$.

b. En supposant $b+c\neq 0$, *on peut écrire :* $arg\left(\dfrac{b+c}{b-c}\right)=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AH}\right)\ [2\pi]$.

Or, comme $\frac{b+c}{b-c}$ *est imaginaire pur non nul alors* $arg\left(\frac{b+c}{b-c}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, *et donc les vecteurs* $\overrightarrow{AH}$ *et* $\overrightarrow{CB}$ *sont orthogonaux. Cela reste également vrai si* $b+c=0$, *A et H étant confondus dans ce cas.*

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ *et* $\overrightarrow{CB}$ *étant orthogonaux ; le point H appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.*

c. En permutant les rôles des sommets, et en utilisant le nombre complexe $\frac{a+c}{a-c}$, *on montrerait que celui-ci est imaginaire pur, ce qui assure l'orthogonalité des vecteurs* $\overrightarrow{BH}$ *et* $\overrightarrow{CA}$. *Le point H appartient alors à la hauteur issue de B du triangle ABC, et est ainsi l'orthocentre du triangle ABC.*

3. Pour placer les points A, B et C, on peut remarquer que :

$$a=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}},\qquad b=-1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{2\pi}{6}},\qquad c=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Exercice 42	***Le fleuve fait des détours parce que personne ne lui montre le chemin.***

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ *on porte les points A, A', B et B' d'affixes respectives 1,* -1*, i et* $-i$.

A tout point M d'affixe z, distinct de O, A, A', B et B' on associe les points M_1 *et* M_2 *d'affixes respectives* z_1 *et* z_2 *tels que les triangles BMM1 et AM2M soient rectangles isocèles avec :* $\left(\overrightarrow{M_1B},\overrightarrow{M_1M}\right)=\left(\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2A}\right)=\frac{\pi}{2}$

1. a. Justifier les égalités : $z-z_1=i(i-z_1)$ *et* $1-z_2=i(z-z_2)$.

b. Vérifier que z_1 *et* z_2 *peuvent s'écrire :* $z_1=\dfrac{1+i}{2}(z+1)$ *et* $z_2=\dfrac{1-i}{2}(z+i)$

2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 *est équilatéral.*

a. Montrer que $OM_1=OM_2\iff |z+1|=|z+i|$. *En déduire l'ensemble Δ des points M tels que* $OM_1=OM_2$ *et tracer Δ sur la figure jointe.*

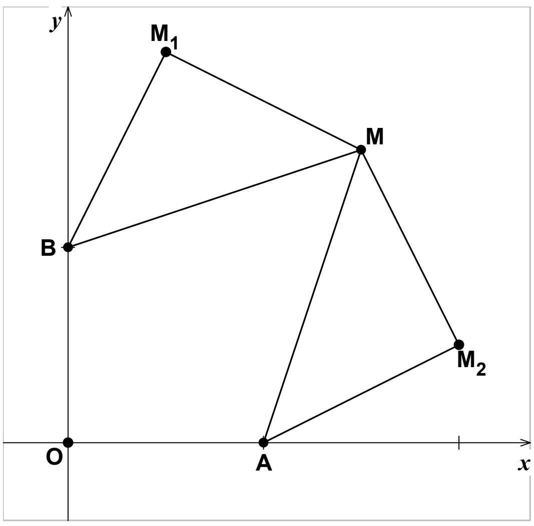
b. Montrer que $OM_1=M_1M_2\iff |z+1|^2=2|z|^2$. *En déduire l'ensemble* Γ *des points M tels que* $OM_1=M_1M_2$ *et tracer* Γ *sur la figure jointe.*

c. En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 *est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.*

3. a. Quelle relation peut-on en écrire entre z_1 *et* z_2 *si* OM_1M_2 *est un triangle équilatéral ?*

b. Déduisez − en que z est alors solution : $e^{-i\frac{\pi}{4}}(z+i)=e^{i\frac{7\pi}{12}}(z+1)$ *et* $e^{-i\frac{\pi}{4}}(z+i)=e^{-i\frac{\pi}{12}}(z+1)$

c. Déduisez-en les affixes z des points M répondant à la question 2.



Corrigé

1.a. On sous-entend à travers les données que :

→ *La rotation de centre* M_1 *et d'angle* $\pi/2$ *transforme le point B en M, ce qui s'écrit entre les affixes :*

$$z - z_1 = i(i - z_1)$$

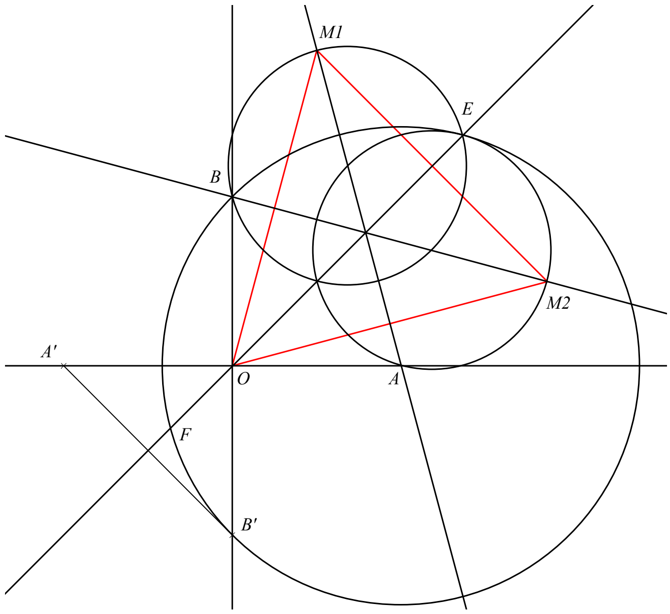
→ *La rotation de centre* M_2 *et d'angle* $\pi/2$ *transforme le point M en A, ce qui s'écrit entre les affixes :*

$$1 - z_2 = i(z - z_2).$$

b. On a :

$$z - z_1 = i(i - z_1) \Leftrightarrow z - z_1 = -1 - iz_1 \Leftrightarrow (1 - i)z_1 = z + 1 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{1-i}(z+1) = \frac{1+i}{2}(z+1).$$

$\text{On établit de manière tout à } fait \text{ analogue que : } z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i).$



2. a. L'équivalence $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z+1| = |z+i|$

$$OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z_1 - 0| = |z_2 - 0| \Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{2}(z+1)\right| = \left|\frac{1-i}{2}(z+i)\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{2}\right| \times |z+1| = \left|\frac{1-i}{2}\right| \times |z+i| \Leftrightarrow |z+1| = |z+i|$$

$$car \left|\frac{1+i}{2}\right| = \left|\frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'ensemble Δ *des points M tels que* $OM_1 = OM_2$ *est la médiatrice du segment* $[A'B']$ *avec* $A'(-1)$ *et* $B'(-i)$.

b. L'équivalence $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$

$$OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2 - z_1| \Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{2}(z+1)\right| = \left|\frac{1+i}{2}(z+1) - \frac{1-i}{2}(z+i)\right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}|z+1| = \frac{1}{2}|z + 1 + iz + i - z - i + iz - 1| = |z| \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2.$$

Détermination de Γ *:* $M \in \Gamma \Leftrightarrow OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$.

En posant $z = x + iy$ *avec x et y réels, on peut prolonger les équivalences :*

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0.$$

On a aussi : $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow AM = \sqrt{2}.$

Donc Γ *est le cercle de centre A et de rayon* $\sqrt{2}$.

c. Le triangle OM_1M_2 *est équilatéral lorsque* $OM_1 = OM_2$ *et* $OM_1 = M_1M_2$ *c'est-à-dire si le point M est à l'intersection de* Γ *et de* Δ.

Les ensembles Γ *et* Δ *se coupent en deux points car* $[AB]$ *est un rayon de* Γ *et* Δ *est la médiatrice de* $[AB]$. *Donc il existe donc deux points solutions.*

3.a. Si le triangle OM_1M_2 *est équilatéral alors, selon l'orientation, on a :* $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z_1$ *ou bien* $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_1$.

Soit de manière condensée : $z_2 = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} z_1$.

b. Les deux égalités établies à la question 1.b : $z_1 = \dfrac{1+i}{2}(z+1)$ *et* $z_2 = \dfrac{1-i}{2}(z+i)$

peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}(z+1) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(z+1) \quad et \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}(z+i) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(z+i).$$

En remplaçant z_1 *et* z_2 *par ces valeurs dans l'égalité* $z_2 = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} z_1$*, on obtient :*

$$\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(z+i) = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \times \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(z+1) = \frac{e^{i\left(\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}}(z+1)$$

Soit après simplification et isolation de z, les deux solutions : $z = \dfrac{e^{i\frac{7\pi}{12}} - ie^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{12}}}$, $z = \dfrac{e^{-i\frac{\pi}{12}} - ie^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}}$.

Exercice 43	***La bonne volonté raccourcit le chemin.***

On considère un cercle de centre O et trois points A, B et C de ce cercle. On désigne par A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$.
Soient U, V, W les milieux respectifs des segments [A'B], [B'C] et [C'A]. Démontrer que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Corrigé

Prenons un cercle trigonométrique (le raisonnement et les résultats sont identiques avec un cercle « normal ») sur lequel nous prenons les trois points A, B et C d'affixes $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ *et* $c = e^{i\gamma}$.
Par la rotation R de centre O d'angle $\pi/3$*, les points A, B et C sont transformés en A', B' et C' d'affixes :*

$$a' = e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}, \qquad b' = e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)} \quad et \quad c' = e^{i\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Les milieux U, V, W de [A'B], [B'C] et [C'A] ont pour affixes respectives :

$$u = \frac{1}{2}(a'+b) = \frac{1}{2}\left(e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{i\beta}\right);$$

$$v = \frac{1}{2}(b'+c) = \frac{1}{2}\left(e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{i\gamma}\right);$$

$$w = \frac{1}{2}(c'+a) = \frac{1}{2}\left(e^{i\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{i\alpha}\right).$$

Pour montrer que les trois points U, V et W forment un triangle équilatéral il suffit, par exemple, de prouver que :

$$\frac{v-u}{w-u} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}.$$

On a :

$$\frac{v-u}{w-u} = \frac{\frac{1}{2}\left(e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{i\gamma}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{i\beta}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{i\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{i\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{i\beta}\right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\beta} + e^{i\gamma} - e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\alpha} - e^{i\beta}}{e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\gamma} + e^{i\alpha} - e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\alpha} - e^{i\beta}}$$

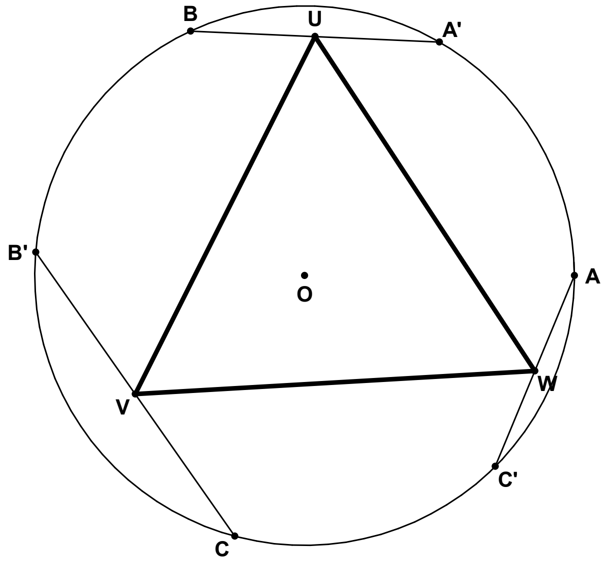
$$= \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)e^{i\beta} + e^{i\gamma} - e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\alpha}}{e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\gamma} + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)e^{i\alpha} - e^{i\beta}}$$

On s'attend à avoir :

$$\frac{v-u}{w-u} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ou\ bien \quad \frac{v-u}{w-u} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Ce qui se traduit par :

$$v - u = e^{i\frac{\pi}{3}}(w-u) \quad ou\ bien \quad v - u = e^{-i\frac{\pi}{3}}(w-u).$$



On a : $e^{-i\frac{\pi}{3}}(w-u) = e^{-i\frac{\pi}{3}}\left[e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\gamma} + \left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right] = e^{i\gamma} + \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}-1\right)e^{i\alpha} - e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\beta}$.

Or on sait que :

$$e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$-e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}} - 1$$

D'où : $e^{-i\frac{\pi}{3}}(w-u) = e^{i\gamma} + \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}-1\right)e^{i\alpha} - e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\beta} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)e^{i\beta} + e^{i\gamma} - e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\alpha} = v - u$

Donc le triangle UVW est bien équilatéral.

Exercice 44	*Avec du temps et de la patience, les feuilles de mûrier se transforment en robe de soie.*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ *(unité graphique : 4 cm).*

On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour chaque point M du plan, d'affixe z, on désigne par M_1 *d'affixe* z_1*, l'image de M par la rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{3}$*, puis par N, d'affixe z', l'image de* M_1 *par la translation de vecteur* $-\vec{u}$.

On note T la transformation qui, à chaque point M, associe le point N.

1. a. Démontrer que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.

b. Déterminer l'image du point B.

c. Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.

2. On pose $z = x + iy$*, avec x et y réels.*

a. On prend $z \neq 0$ *; calculer la partie réelle du quotient* z'/z *en fonction de x et de y.*

b. Démontrer que l'ensemble (Γ) *des points du plan, tels que le triangle* OMN *soit rectangle en O, est un cercle dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points. Tracer* (Γ).

3. Dans cette question, on pose $z = 1 + i$ *et soit les points* $E(1+i)$ *et* $F = T(E)$.

a. Vérifier que $E \in (\Gamma)$ *et placer E et F sur la figure.*

b. Calculer $|z'|$ *et l'aire du triangle* OEF *en cm²*.

Corrigé

1. a. L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ *est :* $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z$ *et celle de la translation de vecteur* $-\vec{u}$ *est* $z' = z_1 - 1$*. Donc par composition de la rotation et de la translation, on obtient :* $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.

b. On a : $z_B = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$*. Donc l'affixe de B', image de B par T, est* $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1 = 1 - 1 = 0$.

L'image du point B est le point O.

c. Un point M(z) est invariant par T si, et seulement, si $T(M) = M$ *c'est-à-dire* $z = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.

$$z = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1 \Leftrightarrow z\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = -1 \Leftrightarrow z\left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Donc T admet un seul point invariant C d'affixe $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

2.a. On a, en considérant $z = x + iy$, *avec x et y réels :*

$$\frac{z'}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Donc : $Re\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2 + y^2}$.

b. On a : OMM' rectangle en $O \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{z'}{z}$ imaginaire pur $\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Re\left(\frac{z'}{z}\right) = 0 \\ Im\left(\frac{z'}{z}\right) \neq 0 \end{cases}$

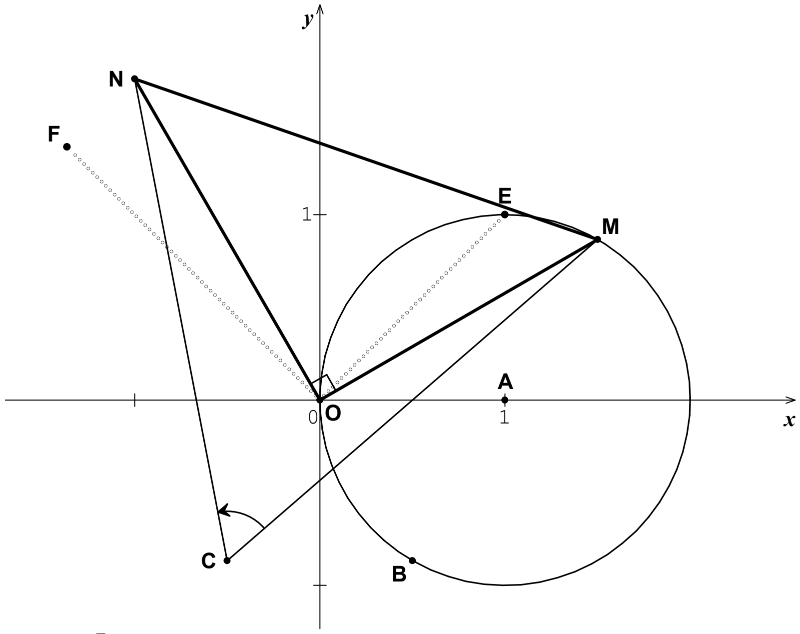
Le problème revient donc à résoudre l'équation : $\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = 0$.

On a : $\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$.

Donc le point M appartient au cercle (Γ) de centre A(1) et de rayon 1.

D'autre part, le triangle OMN n'existe que si $M \neq O$, $N \neq O$ *et* $M \neq N$. *Les deux identités* $N = O$ *et* $M = N$ *correspondent respectivement à* $M = B$ *et* $M = C$. *Seul le point B appartient au cercle (Γ).*

Donc l'ensemble (Γ) des points M pour lesquels le triangle OMN est rectangle en O est le cercle (Γ) privé des deux points O et B.



3. On a $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a. On remarque que : $|z_E - z_A| = |z - 1| = |i| = 1$ c'est-à-dire que $AE = 1$. *Donc E est sur le cercle (Γ).*

b. On a :

$$|z'| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1\right| = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i) - 1\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \times \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Comme le triangle OEF est rectangle en O (car $E \in (\Gamma) \setminus \{O, B\}$*) alors, en unité d'aire :*

$$Aire(OEF) = \frac{OE \times OF}{2} = \frac{|z| \times |z'|}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Soit, en cm^2 : $Aire(OEF) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times 4cm \times 4cm = 8\left(1+\sqrt{3}\right)\,cm^2$.

Exercice 45	Le poulailler reste un palais doré pour le coq, malgré la puanteur des lieux.

Le plan complexe est rapporté à un r.o.n.d $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. *On considère le point A d'affixe 1 et , pour tout* θ *de* $[0,2\pi[$, *le point M d'affixe* $z = e^{i\theta}$. *On désigne par P le point d'affixe* $1+z$ *et par Q le point d'affixe* z^2.

1. A partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.

2. Déterminer l'ensemble des points P, pour θ *appartenant à* $[0,2\pi[$.

Tracer cet ensemble sur la figure précédente.

3. Soit S le point d'affixe $1+z+z^2$, *où z désigne toujours l'affixe du point M. Construire S, en justifiant la construction.*

4. Dans le cas où $S \neq O$, *tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M ?*

$\textit{Démontrer que le nombre } \dfrac{1+\ z\ +\ z^2}{z}\ \textit{est réel, quel que soit } \theta \textit{ appartenant}$ à $[0,2\pi[$.

Conclure sur la conjecture précédente.

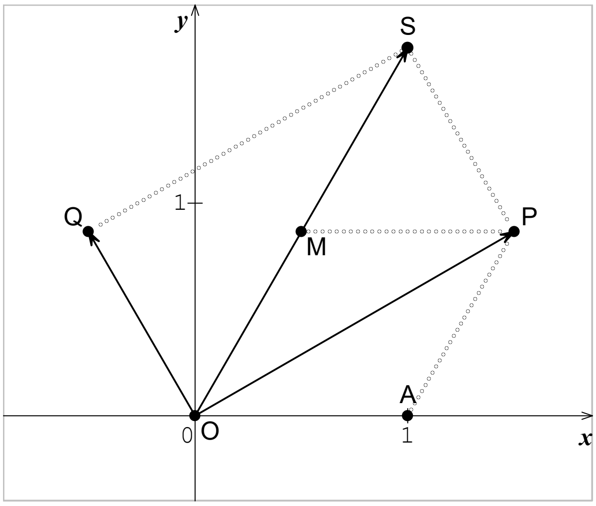
Corrigé

1. Soit z_P *et* z_Q *les affixes respectives des points P et Q. Par hypothèse :* $z_P = z+1$ *ce qui équivaut à la relation vectorielle* $\overrightarrow{MP} = \vec{u}$ *autrement dit, P est l'image de M dans la translation t de vecteur* $\vec{u}$. *D'autre part, on a :*

$$z_Q = z^2 \Leftrightarrow z_Q = e^{2i} \ \Leftrightarrow \begin{cases} OQ = OM \\ (\vec{u},\overrightarrow{OQ}) = 2(\vec{u},\overrightarrow{OM})\ [2\pi] \end{cases}$$

Ainsi, le point M étant fixé, pour déterminer le point P à l'aide de la règle non graduée et du compas il suffit de tracer le parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont donnés par $\vec{u}$ *et [OM].*

Pour déterminer ensuite le point Q on trace le cercle de centre O et de rayon OM = 1, cercle auquel appartient également le point Q; puis à l'aide du compas on reporte la longueur AM de l'autre côté de M par rapport à A, Q ayant une position symétrique de celle de A par rapport à M.



2. Lorsque θ *décrit l'intervalle [0,2π[le point M décrit le cercle C de centre O et de rayon 1. Donc l'ensemble des points P, obtenus en faisant varier M sur ce cercle, est l'image de C par la translation t c'est-à-dire le cercle C' de centre A = t(O) et de même rayon que C soit de rayon 1.*

3. Soit z_S *l'affixe du point S.*

Par hypothèse, on a : $z_S = 1+z+z^2$. *On sait que :* $z_S = 1+z+z^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. *Donc pour déterminer le point S, il suffit de compléter le parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont [OP] et [OQ].*

4. On peut observer sur la figure que le point M semble situé sur la droite (OS).

Le point M ayant pour affixe $z = e^{i\theta}$, *M est distinct de O et z est non nul.*

Donc on peut considérer le rapport :

$$\frac{1+z+z^2}{z} = \frac{1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}}{e^{i\theta}} = \left(1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}\right)e^{-i} \ = e^{-i\theta}+1+e^{i\theta} = 1+2\cos\theta.$$

On en déduit que $\frac{1+z+z^2}{z}$ *est réel quel que soit le réel* θ *dans l'intervalle [0,2π[, ce que l'on peut encore écrire :*

$$\frac{1+z+z^2}{z} = k, \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Ceci qui peut s'écrire encore : $1+z+z^2 = kz,\ \text{où } k \in \mathbb{R}$.

Cette dernière relation s'écrit vectoriellement $\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OM}$ *et traduit la colinéarité des vecteurs* $\overrightarrow{OS}$ *et* $\overrightarrow{OM}$ *et donc l'alignement des points O, M et S.*

Exercice 46	Aussi haut qu'un oiseau vole, il finit par se poser.

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}\}$. *Les éléments de* $\mathbb{Z}[i]$ *sont appelés les entiers de Gauss.*

1. *Montrer que si* α *et* β *sont dans* $\mathbb{Z}[i]$ *alors* $\alpha + \beta$ *et* $\alpha\beta$ *le sont aussi.*
2. *Trouver les éléments inversibles de* $\mathbb{Z}[i]$, *càd les éléments* $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ *tels qu'il existe* $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ *avec* $\alpha\beta = 1$.
3. *Vérifier que quel que soit* $\omega \in \mathbb{C}$, *il existe* $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ *tel que* $|\omega - \alpha| < 1$.
4. *Montrer qu'il existe sur* $\mathbb{Z}[i]$ *une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient* α *et* β *dans* $\mathbb{Z}[i]$ *il existe q et r dans* $\mathbb{Z}[i]$ *vérifiant :* $a = bq + r$ *avec* $|r| < |b|$.

$(Indication : \ on \ pourra \ considérer \ le \ complexe \ \frac{\alpha}{\beta})$

Corrigé

1. *Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$. *Notons* $\alpha = a + ib$ *et* $\beta = c + id$ *avec* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
Alors $\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d)$ *et* $a + c \in \mathbb{Z}, b + d \in \mathbb{Z}$ *donc* $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[i]$.
De même, on a $\alpha\beta = (ac - bd) + i(ad + bc)$ *et* $ac - bd \in \mathbb{Z}, ad + bc \in \mathbb{Z}$ *donc* $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$.
2. *Soit* $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ *inversible. Il existe donc* $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ *tel que* $\alpha\beta = 1$. *Ainsi,* $\alpha \neq 0$ *et* $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}[i]$.
Remarquons que tout élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ *est de module supérieur ou égal à 1 :*
En effet $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq sup(|Re(z)|, \ |Im(z)|)$ *et si* $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$, $sup(|Re(z)|, \ |Im(z)|) \geq 1$.
Si $|\alpha| \neq 1$ *alors* $|\alpha| > 1$ *et* $\left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$.
On en déduit $\left|\frac{1}{\alpha}\right| = 0$, *ce qui est impossible. Ainsi* $|\alpha| = 1$, *ce qui implique* $\alpha \in \{1; -1; \ i; -i\}$.
Réciproquement, on vérifie que les inverses de $1, -1, \ i$ *et* $-i$ *sont respectivement* $1, -1, -i$ *et* i.
Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ *sont donc* $1, -1, \ i$ *et* $-i$.
3. *Soit* $\omega \in \mathbb{C}$. *Notons* $\omega = x + iy$ *avec* $x, y \in \mathbb{R}$. *soit* $E(x)$ *la partie entière de x, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x :* $E(x) \leq x < E(x) + 1$. *Si* $x \leq E(x) + \frac{1}{2}$, *notons* $n_x = E(x)$, *et si* $x > E(x) + \frac{1}{2}$, *notons* $n_x = E(x) + 1$.
n_x *est le, ou l'un des nombres entiers, s'il y en a deux, le plus proche de x :* $|x - n_x| \leq \frac{1}{2}$. *Notons* n_y *l'entier associé de la même manière à y. Soit alors* $\alpha = n_x + i.n_y$.
On a donc : $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ *et* $|\omega - \alpha|^2 = |x - n_x|^2 + |y - n_y|^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. *D'où :* $|\omega - \alpha| < 1$.
4. *Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, *avec* $\beta \neq 0$. *Soit alors* $q \in \mathbb{Z}[i]$ *tel que* $\left|\frac{\alpha}{\beta} - q\right| < 1$. *Soit* $r = \alpha - \beta q$.
Comme $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ *et* $\beta q \in \mathbb{Z}[i]$, $r \in \mathbb{Z}[i]$. *De plus, on a* $\left|\frac{r}{\beta}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - q\right| < 1$ *et donc* $|r| < |b|$.

Exercice 47	Le poisson a confiance en l'eau et c'est dans l'eau qu'il est cuisiné.

On considère le nombre complexe $z = e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in \mathbb{R}$, $z \neq -1$ *et* $z \neq 1$.

1. *Déterminer, en fonction de* θ, *le module et un argument de chacun des nombres* $z + 1$ *et* $z - 1$.
2. $On \ suppose \ que \ \theta = \dfrac{2\pi}{1 + 2n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$a. \ Montrer \ que : \ \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-z)^k = \frac{2}{1 + z}$

$b. \ En \ déduire \ que : \ |1 + z| \geq \dfrac{2}{1 + 2n}$

$c. \ Prouver \ que : \ \left|cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right| \geq \dfrac{1}{1 + 2n}$

3. $On \ suppose \ que : \ 0 < \theta < \pi \ . \ On \ pose : \ u = \dfrac{z(z + 1)}{(z - 1)^2}$

$a. \ Montrer \ que : \ \overline{u} = \dfrac{z + 1}{(z - 1)^2}$

Puis déterminer, en fonction de θ, *le module et un argument de u.*

b. On considère, dans le plan complexe, l'ensemble (Γ) *des points M d'affixe u lorsque* θ *décrit* $]0, \pi[$.
Écrire l'équation cartésienne de (Γ) *puis déterminer la nature de* (Γ). *Construire* (Γ).

Corrigé

1. *On a :*

$$z + 1 = e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\,cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$z - 1 = e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Donc :

$\rightarrow$ *Si* $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ *alors* $\begin{cases} |z+1| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ arg(z+1) = \frac{\theta}{2}\ \ [2\pi] \end{cases}$ *et si* $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$ *alors* $\begin{cases} |z+1| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ arg(z+1) = \frac{\theta}{2} + \pi\ \ [2\pi] \end{cases}$

$\rightarrow$ *Si* $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ *alors* $\begin{cases} |z-1| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ arg(z-1) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\ \ [2\pi] \end{cases}$ *et si* $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$ *alors* $\begin{cases} |z-1| = -2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ arg(z-1) = \frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{2}\ \ [2\pi] \end{cases}$

2. a. *On sait que :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-z)^k = \frac{1-(-z)^{2n+1}}{1+z}$, *et comme* $2n+1$ *est impair et que* $z = e^{i\frac{\pi}{1+2n}}$ *alors :*

$$(-z)^{2n+1} = -z^{2n+1} = -\left(e^{i\frac{\pi}{1+2n}}\right)^{2n+1} = -e^{2\pi i} = -1$$

et par suite : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-z)^k = \frac{2}{1+z}$

b. *L'égalité précédente conduit à l'égalité des modules :* $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-z)^k\right| = \left|\frac{2}{1+z}\right|$

Or, on sait que $|-z| = 1$ *et que :* $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-z)^k\right| \leq \sum_{k=0}^{2n}|-z|^k = \sum_{k=0}^{2n}1 = 2n+1$

D'où l'inégalité : $\left|\frac{2}{1+z}\right| \leq 2n+1$. *Ce qui peut s'écrire également:* $|1+z| \geq \frac{2}{1+2n}$.

c. *On sait d'après la question 1. que :* $1+z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$. *Donc tenant compte de l'égalité* $\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 1$, *on peut conclure :* $|1+z| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$, *et par conséquent :* $2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \geq \frac{2}{1+2n}$ *soit* $\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \geq \frac{1}{1+2n}$

3. *On suppose que* $0 < \theta < \pi$.

a. *Comme* $|z| = 1$, *on a* $\overline{z} = \frac{1}{z}$ *et donc on peut transformer* $\overline{u}$ *de la façon suivante:*

$$\overline{u} = \frac{\overline{z}(\overline{z}+1)}{(\overline{z}-1)^2} = \frac{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}+1\right)}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2} = \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

En utilisant les égalités : $z+1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ *et* $z-1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ *On peut transformer* $\overline{u}$ *:*

$$\overline{u} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{\left(2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{-4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta}} = -\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{-i\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)}$$

Et donc par conjugaison : $u = \overline{\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(-\pi+\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$

On sait que : $0 < \theta < \pi \implies 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ *et donc* $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, *d'où :* $\begin{cases} |u| = \dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ arg(u) = \pi + \dfrac{\theta}{2}\ \ [2\pi] \end{cases}$

b. *Par définition, on a :* $(\Gamma) = \{\, M(u)$ *tel que* $\theta \in]0,\pi[\,\}$. *On pose* $u = x + iy$ *avec* x *et* y *des réels.*

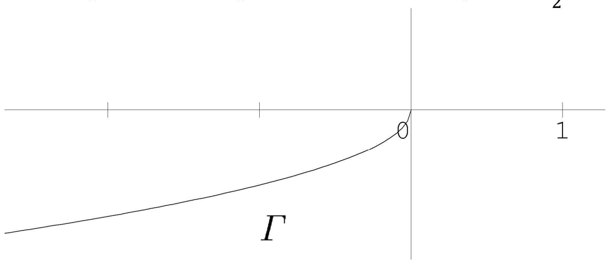
De l'égalité $u = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)}$, *on peut tirer :* $\begin{cases} x = \dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\pi+\dfrac{\theta}{2}\right) \\ y = \dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\pi+\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$ *avec* $\theta \in]0,\pi[$

Et comme : $\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *et* $\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *alors on peut conclure que :*

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ y=-\dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{cases} \quad avec\ \theta\in\,]0,\pi[$$

On remarque que x et y sont liés par la relation : $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ y^2=-\frac{1}{2}x \end{cases}$

Et donc (Γ) *est une partie de la parabole d'équation cartésienne* $y^2=-\frac{1}{2}x$.



Exercice 48	**On entend le fracas des arbres qui tombent, mais pas le murmure de la forêt qui pousse.**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation (E) :* $z^2-\left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)z+2^{2\theta}=0$, *où* θ *est un réel quelconque donné.*

2. Soit A et B les points images des solutions de (E) dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. *Déterminer les valeurs du paramètre* θ *pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral.*

Corrigé

1. Résolution de l'équation (E) : le discriminant Δ_θ *de l'équation (E) est*

$$\Delta_\theta=\left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)^2-4e^{2\theta}=2^{2\theta+2}(\cos^2\theta-1)=\left(2^{\theta+1}\times i\sin\theta\right)^2.$$

Donc $\delta=2^{\theta+1}\times i\sin\theta$ *est une racine carrée de* Δ_θ *et par conséquent les solutions sont :*

$$z_1=\frac{2^{\theta+1}\cos\theta+2^{\theta+1}\times i\sin\theta}{2}=2^\theta(\cos\theta+i\sin\theta)=2^\theta\times e^{i\theta};$$

$$z_2=\frac{2^{\theta+1}\cos\theta-2^{\theta+1}\times i\sin\theta}{2}=2^\theta(\cos\theta-i\sin\theta)=2^\theta\times e^{-i\theta}.$$

2. Déterminons les valeurs de θ *pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral :*

De prime abord, on remarque que le triangle OAB est isocèle de sommet O car :

$$OA=OB=\left|2^\theta\times e^{i\theta}\right|=\left|2^\theta\times e^{-i\theta}\right|=2^\theta.$$

Donc le triangle isocèle OAB est équilatéral si, et seulement, si : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\mp\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Or on sait que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=arg\left(2^\theta\times e^{i\theta}\right)-arg\left(2^\theta\times e^{-i\theta}\right)=\theta-(-\theta)=2\theta\ [2\pi]$.

Donc le triangle OAB est équilatéral si, et seulement, si : $2\theta=\mp\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

$Soit\ enfin: \theta=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ *ou* $\theta=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 49	**Théorème du pistonné : « Tout protégé de la Direction plongé dans une entreprise subit une poussée de bas en haut au moins égale au volume d'incompétence déplacé. »**

Soit θ *un nombre réel. Pour tout nombre complexe z, on pose :*

$$P(z)=z^3+\left(1+3ie^{i\theta}\right)z^2+\left[1+i\left(1+3e^{i\theta}\right)\right]z+(3i-3)e^{i\theta}.$$

1. Vérifier que le nombre $z_1=-3ie^{i\theta}$ *est une solution de l'équation (E) :* $P(z)=0$.

2.a. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=\left(z+3ie^{i\theta}\right)(z^2+az+b)$.

b. Soit z_2 *et* z_3 *les deux solutions de* $z^2+az+b=0$. *Déterminer* z_2 *et* z_3.

3.a. Écrire z_1, z_2 *et* z_3 *sous forme trigonométrique.*

b. On pose $\theta={}^{\pi}/_{10}$.

Écrire sous forme algébrique le nombre complexe : $\alpha=z_1^5+z_2^5+z_3^5$.

Corrigé

1. On vérifie facilement que $z_1 = -3ie^{i\theta}$ *est une racine de* $P(z)$ *c'est-à-dire que :* $P(-3ie^{i\theta}) = 0$.

2.a. Détermination de a et b : Comme $P(-3ie^{i\theta}) = 0$ *alors le polynôme* $P(z)$ *est divisible par* $z + 3ie^{i\theta}$, *autrement dit il existe deux nombres complexes a et b tels que :* $\forall z \in \mathbb{Z}, P(z) = (z + 3ie^{i\theta})(z^2 + az + b)$.

Ainsi, on a : $P(z) = z^3 + (a + 3ie^{i\theta})z^2 + (b + 3ie^{i\theta}a)z + 3ie^{i\theta}b$.

Par identification des coefficients, on déduit que :

$$\begin{cases} a + 3ie^{i\theta} = 1 + 3ie^{i\theta} \\ b + 3ie^{i\theta}a = 1 + i(1 + 3e^{i\theta}) \\ 3ie^{i\theta}b = (3i - 3)e^{i\theta} \end{cases}$$

Soit enfin : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 + i \end{cases}$ *. Donc :* $\forall z \in \mathbb{Z}, P(z) = (z + 3ie^{i\theta})(z^2 + z + 1 + i)$.

b. Détermination des deux autres solutions z_2 *et* z_3 *de l'équation (E) :*

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 3ie^{i\theta})(z^2 + z + 1 + i) = 0 \Leftrightarrow z + 3ie^{i\theta} = 0 \ \ ou \ \ z^2 + z + 1 + i = 0.$$

Résolvons l'équation (A) : $z^2 + z + 1 + i = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4(1 + i) = -3 - 4i = 1 - 2(2i) + (2i)^2 = (1 - 2i)^2$.

L'équation (A) *admet les deux solutions :* $z_2 = \dfrac{-1 - (1 - 2i)}{2} = -1 + i$ *et* $z_3 = \dfrac{-1 + (1 - 2i)}{2} = -i$.

Donc l'équation (E) admet les trois solutions : $z_1 = -3ie^{i\theta}$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -i$.

3.a. Mise sous forme trigonométrique des nombres z_1, z_2 *et* z_3 *. On a :*

$$z_1 = -3ie^{i\theta} = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}e^{i\theta} = 3e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)} = 3\left[cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) + i\,sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)\right];$$

$$z_2 = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$z_3 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}} = cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}.$$

b. On pose $\theta = {}^{\pi}/_{10}$ *. On a :*

$$\alpha = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 = \left[3e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)}\right]^5 + \left[\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right]^5 + \left[e^{i\frac{3\pi}{2}}\right]^5;$$

$$\alpha = 3^5e^{i\left(\frac{15\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} + 4\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{4}} + e^{i\frac{15\pi}{2}} = 3^5e^{i8\pi} + 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$\alpha = 3^5 + 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i = 247 - 5i.$$

Exercice 50	*Même à sec, la rivière garde son nom.*

1. Soit θ *un réel de l'intervalle* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation (E) :* $z^2 - 2i(cos\,\theta)z - cos\,2\theta = 0$.

b. Discuter, suivant les valeurs de θ, *le module et un argument des solutions z' et z'' de l'équation (E).*

c. On considère dans le plan complexe les points M' et M'' d'affixes respectives z' et z''.

Déterminer les lieux des deux points M' et M'' quand θ *parcourt l'intervalle* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Donner les formes algébriques de z' et z'' dans le cas particulier $\theta = \frac{5\pi}{12}$.

Corrigé

1.a. Le discriminant de l'équation (E) est : $\begin{cases} \Delta_\theta = (-2i\,cos\,\theta)^2 - 4(-cos\,2\theta) = -4\,cos^2\,\theta + 4\,cos\,2\theta \\ \quad = -4\,cos^2\,\theta + 4(cos^2\,\theta - sin^2\,\theta) = -4\,sin^2\,\theta = (2i\,sin\,\theta)^2. \end{cases}$

Donc le nombre $\delta = 2i\,sin\,\theta$ *est une racine carrée de* Δ_θ.

L'équation admet deux solutions : $z' = i(cos\,\theta + sin\,\theta)$ *et* $z'' = i(cos\,\theta - sin\,\theta)$.

b. ① Calcul des modules de z' et z'' : $\begin{cases} |z'| = |i| \times |cos\,\theta + sin\,\theta| = |cos\,\theta + sin\,\theta| \\ |z''| = |i| \times |cos\,\theta - sin\,\theta| = |cos\,\theta - sin\,\theta| \end{cases}$

② Calcul des arguments :

On a : $cos\,\theta + sin\,\theta = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos\,\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}sin\,\theta\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}cos\,\theta + sin\frac{\pi}{4}sin\,\theta\right) = \sqrt{2}\,cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

Et $cos\,\theta - sin\,\theta = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos\,\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}sin\,\theta\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}cos\,\theta - sin\frac{\pi}{4}sin\,\theta\right) = \sqrt{2}\,cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$\rightarrow$ *Comme* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *alors* $\theta - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ *et par suite :* $cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ *et donc :* $\begin{cases} |z'| = \sqrt{2}\,cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ arg(z') = \frac{\pi}{2} \ \ [2\pi] \end{cases}$

→ D'autre part, on a également :

- *Si* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ *alors* $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et donc* $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) > 0$. *Par conséquent :* $\begin{cases} |z''| = \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ arg(z'') = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$
- *Si* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *alors* $|z''| = 0$ *z'' n'a pas d'argument.*
- *Si* $\theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ *alors* $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et donc* $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) < 0$. *Par conséquent :* $\begin{cases} |z''| = -\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ arg(z'') = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$

c. Les lieux des points $M'(z')$ *et* $M''(z'')$ *:*
Les égalités : $z' = i(\cos\theta + \sin\theta)$ *et* $z'' = i(\cos\theta - \sin\theta)$ *se transposent sur les vecteurs par :*

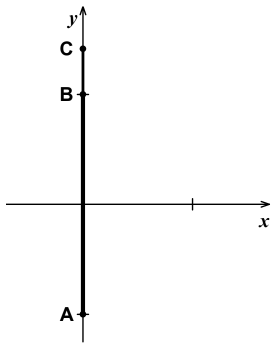
$$\overrightarrow{OM'} = (\cos\theta + \sin\theta)\vec{v} \quad et \quad \overrightarrow{OM''} = (\cos\theta - \sin\theta)\vec{v}$$

où O est l'origine du repère et $\vec{v}$ *est le vecteur unitaire de l'axe des ordonnées.*
Il reste à savoir dans quelles fourchettes de valeurs varient les quantités : $\cos\theta + \sin\theta$ *et* $\cos\theta - \sin\theta$.
Pour cela, on pose pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *:* $f(\theta) = \cos\theta - \sin\theta$ *et* $g(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$.
$Les\ fonctions\ f\ et\ g\ sont\ dérivables\ sur\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et on a :* $f'(\theta) = -\sin\theta - \cos\theta$ *et* $g'(\theta) = -\sin\theta + \cos\theta$.

$$On\ remarque\ que : \forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f'(\theta) = -g(\theta) < 0 \ \ et \ \ g'(\theta) = f(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\begin{cases} \leq 0 \ si \ \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \geq 0 \ si \ \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}.$$

Donc on déduit que :
→ La fonction f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et donc* $f(\theta)$ *varie de* $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ à $f(0) = 1$.
→ La fonction g est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ *et donc* $g(\theta)$ *varie de* $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ à $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

Conclusion :
Le point M' décrit le segment $[AB]$ *avec* $A(-i)$ *et* $B(i)$.
Le point M'' décrit le segment $[BC]$ *avec* $B(i)$ *et* $C(i\sqrt{2})$.



2. Formes algébriques de z' et z'' dans le cas où $\theta = \frac{5\pi}{12}$ *:*

$$z' = i(\cos\theta + \sin\theta) = i\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$z'' = i(\cos\theta - \sin\theta) = i\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Si l'on pose $\theta = \frac{5\pi}{12}$, *on obtient :*

$$z' = i\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = i\sqrt{2}\cos\left(\frac{8\pi}{12}\right) = i\sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = i\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$z'' = i\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) = i\sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) = i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = i\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = i\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Exercice 51	***Celui qui désire la pluie doit aussi accepter la boue.***

Soit u un nombre complexe non nul et j le nombre complexe défini par $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *On pose :*

$$u = re^{i\theta} \quad , \quad z_1 = uj \quad et \quad z_2 = ui.$$

1. Écrire z_1 *et* z_2 *sous forme trigonométrique.*
2. *On pose :* $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 \times z_2}$
a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\overline{j} - i$ $\left(On\ prendra\ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$.
b. En déduire une forme trigonométrique de Z en fonction de r et θ.
3.a. Déterminer les valeurs de θ *pour lesquelles Z est un réel positif.*
b. Déterminer les valeurs de θ *pour lesquelles Z est un imaginaire pur.*
4. On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation (E) :* $z^3 - ujz^2 + u^2z - u^3j = 0$.
a. Vérifier que le nombre $(-iu)$ *est solution de (E).*
b. Résoudre l'équation (E).
c. Montrer que les points images des solutions de (E) sont situés sur un cercle que l'on précisera.

Corrigé

1. Écriture de z_1 et z_2 sous forme trigonométrique :

$$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_1=uj=re^{i\theta}e^{i\frac{2\pi}{3}}=re^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}=r\left(cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+i\,sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2=ui=re^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{2}}=re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=r\left(cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\,sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

2.a. Détermination du module et d'un argument de $\overline{j}-i$:

On a : $\overline{j}-i=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-i=-\frac{1}{2}-i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Et donc : $\left|\overline{j}-i\right|^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1+3+4\sqrt{3}+4}{4}=2+\sqrt{3}$.

D'où : $\left|\overline{j}-i\right|=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Par conséquent, on peut se permettre d'écrire :

$$\overline{j}-i=\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}-i\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right).$$

Comme on sait que :

$$cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\quad et\quad sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)=1-cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)=1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\quad et\quad 0<\frac{5\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$$

alors on peut déduire que : $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Au retour à notre nombre de départ $\overline{j}-i$, on peut écrire :

$$\overline{j}-i=\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(-cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\,sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\,sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$

Donc enfin : $arg\left(\overline{j}-i\right)=\frac{17\pi}{12}\ [2\pi]$.

b. Écriture de Z sous forme trigonométrique en fonction de r et θ :

$$Z=\frac{z_1+z_2}{z_1\times z_2}=\frac{uj+ui}{u^2ij}=\frac{1}{u}\times\frac{j+i}{ij}=\frac{1}{u}\times\frac{(i+j)\overline{ij}}{|ij|^2}=\frac{1}{u}\left(\overline{j}-i\right)\quad car\quad |ij|=1.$$

Donc on a : $arg(Z)=arg\left(\frac{1}{u}\right)+arg\left(\overline{j}-i\right)=-\theta+\frac{17\pi}{12}\ [2\pi]$ et $|Z|=\frac{1}{|u|}\left|\overline{j}-i\right|=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{r}$.

Et par suite : $Z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{r}\left[cos\left(\frac{17\pi}{12}-\theta\right)+i\,sin\left(\frac{17\pi}{12}-\theta\right)\right]$.

3.a. Détermination des valeurs de θ pour lesquelles $Z\in\mathbb{R}^+$:

On remarque tout d'abord que $\forall\theta,\ Z\neq 0$. On a :

$$Z\in\mathbb{R}^+\iff\begin{cases}cos\left(\frac{17\pi}{12}-\theta\right)\geq 0\\ sin\left(\frac{17\pi}{12}-\theta\right)=0\end{cases}\iff\frac{17\pi}{12}-\theta=0\ [2\pi]\iff\theta=\frac{17\pi}{12}+2k\pi\quad avec\ k\in\mathbb{Z}.$$

b. Détermination des valeurs de θ pour lesquelles $Z\in i\mathbb{R}$:

On a : $Z\in i\mathbb{R}\iff cos\left(\frac{17\pi}{12}-\theta\right)=0\iff\frac{17\pi}{12}-\theta=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\iff\theta=\frac{11\pi}{12}\ [\pi]\quad\theta=\frac{11\pi}{12}+k\pi,\qquad(k\in\mathbb{Z})$.

4.a. Vérifions que $(-iu)$ est solution de l'équation (E) :

Remplaçons z par $(-iu)$ dans l'expression $z^3-ujz^2+u^2z-u^3j$.

On trouve : $(-iu)^3-uj(-iu)^2+u^2(-iu)-u^3j=iu^3+u^3j-iu^3-u^3j=0$. *Donc $(-iu)$ est bien solution de (E).*

b. Résolution de l'équation (E) :

Déterminons deux nombres complexes α et β tes que : $z^3-ujz^2+u^2z-u^3j=(z+iu)(z^2+\alpha z+\beta)$.

Après développement de $(z+iu)(z^2+\alpha z+\beta)$ et puis identification des coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases}\alpha+iu=-uj\\ \beta+iu=u^2\\ iu\beta=-u^3j\end{cases}\quad soit\quad\begin{cases}\alpha=-u(i+j)\\ \beta=iju^2\end{cases}$$

D'où enfin : $\forall z\in\mathbb{C},\ z^3-ujz^2+u^2z-u^3j=(z+iu)(z^2-u(i+j)z+iju^2)$.

Alors, on a droit d'écrire : z *solution de*$(E) \iff z + iu = 0$ *ou* $z^2 - u(i+j)z + iju^2 = 0$.
Résolution de l'équation $z^2 - u(i+j)z + iju^2 = 0$ *:*
Le discriminant vaut $\Delta = \left(-u(i+j)\right)^2 - 4iju^2 = u^2(i-j)^2$.
Donc $\delta = u(i-j)$ *est une racine carrée de* Δ*. D'où les solutions :*

$$z' = \frac{u(i+j) - u(i-j)}{2} = ju \quad et \quad z'' = \frac{u(i+j) + u(i-j)}{2} = iu.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est : $S = \{-iu, iu, ju\}$.
c. Les points $M_1(ju), M_2(iu)$ *et* $M_3(-iu)$ *appartiennent au cercle de centre O et de rayon r car :*

$$|ju| = |iu| = |-iu| = r.$$

Exercice 52	***Quand on a un marteau dans la tête, on voit tous les problèmes sous la forme d'un clou.***

1. On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation (E) :* $(z-1)^5 = (z+1)^5$.
a. Montrer que si z est solution de (E) alors z est un imaginaire pur.
b. Montrer que les solutions de l'équation (E) peuvent s'écrire sous la forme :

$$z_k = -i.\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{5}\right) \quad avec \quad k \in \{1,2,3,4\}.$$

2. On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation (E') :* $5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$.
a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation (E').*
b. Montrer que : $(E) \iff (E')$*. En déduire les valeurs exactes de :* $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ *et* $\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

Corrigé
1. Soit (S) l'ensemble des solutions de (E).
a. On a :

$$\begin{aligned} z \in (S) &\iff (z-1)^5 = (z+1)^5 \\ &\implies |z-1| = |z+1| \\ &\implies AM = BM \text{ où } A(1) \text{ et } B(-1) \\ &\implies M(z) \in med[AB] = (y'Oy) \\ &\implies z \text{ est imaginaire pur} \end{aligned}$$

Donc si z est solution de (E) alors z est un imaginaire pur.
b. Soit z_k *une solution de (E).*
On dispose des équivalences suivantes : $z_k \in (S) \iff (z_k - 1)^5 = (z_k + 1)^5$

$$\begin{aligned} &\iff \left(\frac{z_k + 1}{z_k - 1}\right)^5 = 1 \quad (car\ 1 \notin (S)) \\ &\iff \frac{z_k + 1}{z_k - 1} = e^{i\frac{2k}{5}}, \quad k \in \{1,2,3,4\} \\ &\iff z_k = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{5}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1}, \quad k \in \{1,2,3,4\} \\ &\iff z_k = \frac{2e^{i\frac{k\pi}{5}}.\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2ie^{i\frac{k\pi}{5}}.\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}, \quad k \in \{1,2,3,4\} \\ &\iff z_k = \frac{-i}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}, \quad k \in \{1,2,3,4\} \\ &\iff z_k = -i.\cot\left(\frac{k\pi}{5}\right), \quad k \in \{1,2,3,4\} \\ &\iff z_k = -i.\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{5}\right), \quad k \in \{1,2,3,4\} \end{aligned}$$

2.a. Résolution de l'équation (E') : $5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$.
On pose $z^2 = Z$*. L' équation (E') est donc équivalente à :*

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ 5Z^2 + 10Z + 1 = 0 \end{cases}$$

Le discriminant est $\Delta = 100 - 4 \times 5 \times 1 = 80$.
Donc l'équation $5Z^2 + 10Z + 1 = 0$ *admet deux solutions réelles :* $Z_1 = -1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$ *et* $Z_2 = -1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Déterminons les deux racines carrées de Z_1 *et* Z_2 : $Z_1 = -1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \left[i\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}\right]^2$

Donc les deux racines carrées de Z_1 *sont :* $z_1 = i\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ *et* $z_2 = -i\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

De la même manière, on détermine les racines carrées de Z_2 : $z_3 = i\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ *et* $z_4 = -i\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

Donc l'ensemble des solutions de (E') *est :* $(S') = \left\{i\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}, -i\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}, i\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}, -i\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}\right\}$

b. Soit z un nombre complexe.

On a : z solution de (E') $\Leftrightarrow (z-1)^5 = (z+1)^5$

$$\begin{aligned}(z-1)^5 = (z+1)^5 &\Leftrightarrow z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1 = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1\\ &\Leftrightarrow 10z^4 + 20z^2 + 2 = 0\\ &\Leftrightarrow 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow z \text{ solution de } (E)\end{aligned}$$

Donc les deux équations (E) et (E') sont équivalentes.

Déductions :

On sait que : $(S) = \left\{-i.\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right), -i.\tan\left(\frac{\pi}{10}\right), i\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right), i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right\}$

et que : $0 < \tan\left(\frac{\pi}{10}\right) < \tan\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ *car* $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{3\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$

En outre, comme $(S) = (S')$ *alors :* $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ *et* $\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

Exercice 53	*C'est la cendre que l'on croit éteinte qui brûle la maison.*

Soit α *un nombre réel. Pour tout nombre complexe z, on pose :* $P(z) = z^6 - 2z^3\cos(3\alpha) + 1$.

1.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $P(z) = 0$.

b. Justifier que les solutions sont conjuguées deux à deux.

2. *Montrer que :* $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = \prod_{k=0}^{2}\left(z^2 - 2z\cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{3}\right) + 1\right)$.

3. *En déduire que :* $\cos(3\alpha) = 4\cos\alpha \times \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \times \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)$.

Corrigé

1.a. Résolution de l'équation $P(z) = 0$ *dans* $\mathbb{C}$ *: On procède par un changement d'inconnue en posant* $z^3 = t$.

Donc l'équation $P(z) = 0$ *est équivalente au système :* $\begin{cases} z^3 = t \\ t^2 - 2t\cos(3\alpha) + 1 = 0 \end{cases}$

Le discriminant de l'équation $t^2 - 2t\cos(3\alpha) + 1 = 0$ *vaut :*

$$\Delta = (2\cos(3\alpha))^2 - 4 = 4((\cos(3\alpha))^2 - 1) = -4\sin^2(3\alpha) = [2i\sin(3\alpha)]^2$$

Donc l'équation $t^2 - 2t\cos(3\alpha) + 1 = 0$ *admet les deux solutions :*

$$t' = \cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = e^{i(3\alpha)} \quad et \quad t'' = \cos(3\alpha) - i\sin(3\alpha) = e^{i(-3\alpha)}.$$

L'équation $P(z) = 0$ *est par conséquent équivalente à :* $\left(z^3 = e^{i(3\alpha)} \text{ ou } z^3 = e^{i(-3\alpha)}\right)$

Soit : $z = e^{i\left(\alpha + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ *ou* $z = e^{i\left(-\alpha + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ *avec* $k \in \{0,1,2\}$.

Donc les solutions de l'équation $P(z) = 0$ *sont :* $a_k = e^{i\left(\alpha + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ *et* $b_k = e^{i\left(-\alpha + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ *avec* $k \in \{0,1,2\}$.

b. L'équation $P(z) = 0$*, étant à coefficients réels, a ses solutions conjuguées deux à deux. Plus précisément, on a :*

$$a_0 = e^{i\alpha} = \overline{e^{-i\alpha}} = \overline{b_0};\ a_1 = e^{i\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)} = \overline{e^{-i\left(-\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)}} = \overline{e^{-i\left(-\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)}} = \overline{b_2};\ a_2 = e^{i\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)} = \overline{e^{-i\left(-\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)}} = \overline{b_1}.$$

2. Factorisation de $P(z)$ *sous la forme du produit de trois facteurs du second degré :*

Le polynôme $P(z)$*, étant du* $6^{\text{ème}}$ *degré, et* $a_0, \overline{a_0}, a_1, \overline{a_1}, a_2, \overline{a_2}$ *ses six racines alors* $P(z)$ *s'écrit :*

$$P(z) = (z - a_0)(z - \overline{a_0})(z - a_1)(z - \overline{a_1})(z - a_2)(z - \overline{a_2}) = \prod_{k=0}^{2}(z - a_k)(z - \overline{a_k}).$$

Or, on sait que : $(z-a_k)(z-\overline{a_k}) = z^2-(a_k+\overline{a_k})z+a_k\overline{a_k}$;

$$a_k+\overline{a_k} = 2Re(a_k) = 2\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{3}\right) \quad et \quad a_k\overline{a_k} = |a_k|^2 = 1$$

d'où l'égalité : $\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = \prod_{k=0}^{2}\left(z^2-2z\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{3}\right)+1\right).$

3. Déduction de l'égalité : $\cos(3\alpha) = 4\cos\alpha\times\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\times\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$.

Calculons $P(i)$ *sous deux formes :*

On a d'une part : $P(i) = i^6-2i^3\cos(3\alpha)+1 = -1+2i\cos(3\alpha)+1 = 2i\cos(3\alpha)$; *D'autre part :*

$$P(i) = \prod_{k=0}^{2}\left(i^2-2i\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{3}\right)+1\right)$$

$$P(i) = \prod_{k=0}^{2}\left(-2i\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

$$P(i) = 8i\cos\alpha\times\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\times\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$$

Donc, on déduit que : $\cos(3\alpha) = 4\cos\alpha\times\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\times\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$.

Exercice 54	*Le savoir que l'on ne complète pas chaque jour diminue tous les jours.*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$.

On considère pour tout réel $\theta \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, *l'équation* (E_θ): $z^2-2ie^{i\theta}z-4(1-i)e^{2i\theta} = 0$

1. Résoudre l'équation (E_θ) *dans* $\mathbb{C}$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2e^{i\theta}$, $-2(1-i)e^{i\theta}$ *et* $2ie^{i\theta}$

a. Montrer que pour tout $\theta \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, *le point A appartient à un cercle que l'on précisera.*

b. Montrer que OACB est un parallélogramme. En déduire une construction du point B à partir de A.

3.a. Déterminer en fonction de θ, *le module et un argument de* $-2(1-i)e^{i\theta}$.

b. Déterminer l'ensemble des points B lorsque θ *varie dans* $]0,\frac{\pi}{2}[$.

4. Soit l'équation (E'_θ): $\left(\sqrt{2}z-1\right)^3 = (-2+2i)e^{i\theta}z^3$

a. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $(-2+2i)e^{i\theta}$

b. Soit $x \in]0;\ \pi[$. *Montrer l'équivalence suivante :*

$$\frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \sqrt{2}e^{ix} \iff z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+i\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

c. En déduire les solutions de l'équation (E'_θ).

Corrigé

1. Le discriminant est $\Delta = \left(-2ie^{i\theta}\right)^2-4\left(-4(1-i)e^{2i}\ \right) = (12-16i)e^{2i\theta}$. *Déterminons un complexe* δ *tel que* $\delta^2 = \Delta$. *Pour cela, on cherchera x et y réels tels que* $(x+iy)^2 = 12-16i$.

Ce qui donne le système : $\begin{cases} x^2-y^2 = 12 \\ 2xy = -16 \\ x^2+y^2 = 20 \end{cases}$ *soit* $x = \pm 4$ *et* $y = \mp 2$.

Donc $4-2i$ *répond à la question. D'où on peut prendre:* $\delta = (4-2i)e^{i\theta}$. *L'équation proposée admet donc deux racines :* $z_1 = \dfrac{2ie^{i\theta}-(4-2i)e^{i\theta}}{2} = (-1+i)e^{i\theta}$ *et* $z_2 = \dfrac{2ie^{i\theta}+(4-2i)e^{i\theta}}{2} = e^{i\theta}$

2. On dispose des trois points $A(2e^{i\theta})$, $B(-2(1-i)e^{i\theta})$ *et* $C(2ie^{i\theta})$.

a. On constate que $OA = \left|2e^{i\theta}\right| = 2$ *c'est-à-dire que A est sur le cercle de centre O et de rayon 2. Plus précisément, le point A décrit le quart de cercle* $\widehat{EF}$ *privé de ses deux extrémités E(2) et F(2i).*

b. On a $z_{\overrightarrow{OA}} = 2e^{i\theta}$ *et* $z_{\overrightarrow{BC}} = 2ie^{i\theta}+2(1-i)e^{i\theta} = 2e^{i\theta}$ *et donc* $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ *et par suite OACB est un parallélogramme. On peut donc construire B comme étant le symétrique de A par rapport au milieu de* $[OC]$.

3.a. On a $\left|-2(1-i)e^{i\theta}\right| = 2\sqrt{2}$ *et* $arg\left(-2(1-i)e^{i\theta}\right) = \pi-\frac{\pi}{4}+\theta = \frac{3\pi}{4}+\theta\ [2\pi]$.

b. On peut déduire de la question précédente que : $OB = 2\sqrt{2}$ *et* $(\vec{u};\ \overrightarrow{OB}) = \dfrac{3\pi}{4}+\theta\ [2\pi]$

L'égalité $OB = 2\sqrt{2}$ signifie que le point B est situé sur le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$. Tandis que l'égalité $(\vec{u};\ \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4} + \theta\ [2\pi]$ avec $\theta \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ montre que les mesures de l'angle $(\vec{u};\ \overrightarrow{OB})$ varient de $\frac{3\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{4}$. Donc le point B décrit le petit arc $\widehat{GH}$ privé de ses extrémités $G\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$ et $H\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$.

4.a. Racines cubiques de $(-2+2i)e^{i\theta}$

On a $\left|(-2+2i)e^{i\theta}\right| = 2\sqrt{2}$ et $\arg\left((-2+2i)e^{i\theta}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} + \theta = \frac{3\pi}{4} + \theta\ [2\pi]$. Donc les racines cubiques du nombre complexe $(-2+2i)e^{i\theta}$ sont les nombres complexes donnés par : $t_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)}$ avec $k \in \{0,1,2\}$.

b. On a :

$$\frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \sqrt{2}e^{ix} \iff \sqrt{2}z - 1 = \sqrt{2}ze^{ix} \iff z = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1-e^{ix}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{e^{-i\frac{x}{2}}}{-i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{ie^{-i\frac{x}{2}}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i.\cot g\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

c. Résolution de (E'_θ) :

$$\left(\sqrt{2}z-1\right)^3 = (-2+2i)e^{i\theta}z^3 \iff \left(\frac{\sqrt{2}z-1}{z}\right)^3 = (-2+2i)e^{i\theta}$$

$$\iff \frac{\sqrt{2}z-1}{z} = t_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)}\ /\ k \in \{0,1,2\}$$

(On vérifiera que $z = 0$ n'est pas solution)

Donc d'après la question précédente, les solutions de l'équation (E'_θ) sont les nombres complexes :

$$z_k = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i.\cot g\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)\right), \qquad avec\ k \in \{0,1,2\}\ (en\ prenant\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{3} + k\frac{2\pi}{3}).$$

Exercice 55	***Celui qui peut mettre un œuf dans une bouteille peut aussi l'en retirer.***

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ et (E_α) l'équation d'inconnue z : $(\alpha - i)z^2 - [2(\alpha - i) + i\alpha]z + 2i\alpha = 0$.

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.

I. Dans cette partie, on prend $\alpha = 1$. Donc (E_1) s'écrit : $(1-i)z^2 - [2-i]z + 2i = 0$.

1. Calculer $(2-3i)^2$.

2. Résoudre (E_1). On notera z_1 et z_2 les solutions telle que $Re(z_1) < Re(z_2)$.

3. Donner un argument de z_1.

4. Montrer que ${z_1}^{2016}$ est un réel.

II. Dans cette partie, on prend $\alpha = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que $\alpha - i = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$.

2. Vérifier que 2 est une solution de (E_α) .

3. Exprimer la 2e solution z' de (E_α) en fonction de α.

4. Donner la forme exponentielle de z'.

5. Soit les deux points $M'(z')$ et $M''(i)$.

Déterminer la valeur de $\theta \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ pour laquelle le triangle $OM'M''$ est isocèle de sommet O.

Corrigé

I. (E_1) : $(1-i)z^2 - [2-i]z + 2i = 0$

1. $(2-3i)^2 = -5 - 12i$

2. $\Delta = (i-2)^2 - 4 \times 2i \times (1-i) = 3 - 4i - 8i - 8 = -5 - 12i = (2-3i)^2$ donc on peut prendre $\delta = 2 - 3i$ et par suite les solutions de (E_1) sont :

$$z' = \frac{2-i-2+3i}{2(1-i)} = \frac{2i}{2(1-i)} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\ \ et\ \ z'' = \frac{2-i+2-3i}{2(1-i)} = \frac{4-42i}{2(1-i)} = 2.$$

Comme $Re(z') < Re(z'')$ *alors* $z_1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$ *et* $z_2 = 2$.

3. $arg(z_1) = arg\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ *car* $\frac{1}{2}$ *est un réel strictement positif.*

4. On sait que : z_1^{2016} *est un réel* $\neq 0 \iff arg(z_1^{2016}) = 0\ [\pi]$.

Or : $arg(z_1^{2016}) = 2016\, arg(z) = 2016 \times \frac{3\pi}{4} = 504 \times 3\pi = 0\ [\pi]$, *d'où* z_1^{2016} *est un nombre réel.*

II. $\alpha = e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ *et* (E_α) *:* $(\alpha - i)z^2 - [2(\alpha - i) + i\alpha]z + 2i\alpha = 0$.

1. *On a :* $\alpha - i = e^{i\theta} - i = e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

2. En remplaçant z par 2, on trouve $4(\alpha - i) - 2[2(\alpha - i) + i\alpha] + 2i\alpha = 0$, *donc 2 est une racine de l'équation* (E_α).

3. *La 2e racine z' est telle que :* $2z' = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2i\alpha}{\alpha - i}$ *soit* $z' = \dfrac{i\alpha}{\alpha - i}$.

4. *On a :* $z' = \dfrac{i\alpha}{\alpha - i} = \dfrac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta} - i} = \dfrac{e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}} = \dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

Comme $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ *alors* $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ *et donc* $\cos\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$. *Donc la forme exponentielle de z' est :*

$$\frac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

5. On a :

Le triangle OM'M'' est isocèle en O $\iff$ *OM' = OM''* $\iff |z'| = |z''| \iff \dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = 1 \iff \cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$

Comme $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ *on a* $\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3}$ *et finalement* $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 56	*La vie, c'est comme une bicyclette, il faut avancer pour ne pas perdre l'équilibre.*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. *Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, -1 et i. A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tels que :*

$$z' = \frac{z-1}{z+1}.$$

1. Montrer que si $M \in \mathcal{C}(O,1) \setminus \{B\}$ *alors* $M' \in (O, \overrightarrow{v})$.

2. Soit $\theta \in]0, \pi[$. *On considère l'équation* $\mathbb{E}$: $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$.

a. Déterminer les racines carrées de $e^{i\theta} - 1$ *sous forme exponentielle.*

b. Résoudre alors $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{C}$.

3. Soit M_1 *et* M_2 *d'affixes respectives :* $z_1 = e^{i\theta} + \sqrt{2sin\theta}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ *et* $z_2 = e^{i\theta} - \sqrt{2sin\theta}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

a. Vérifier que $Im(z_1) \neq 0$.

b. En déduire que les points A, B et M_1 *ne sont pas alignés.*

c. Montrer que $\dfrac{z_1'}{z_2'} = -1$. *En déduire que les points* A, B, M_1 *et* M_2 *sont cocycliques.*

d. Montrer que $e^{i\theta} - i = -2i\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$. *En déduire que* M_1 *appartient à un cercle fixe de centre C dont on précisera le rayon.*

Corrigé

1. $M(z) \in \mathcal{C}(O,1) \setminus \{B\} \iff OM = 1$ *et* $M \neq B \iff |z| = 1$ *et* $z \neq -1 \iff z \times \overline{z} = 1$ *et* $z \neq -1$.

Dans ce cas, on a : $\overline{z'} = \overline{\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)} = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = \dfrac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1} = -\dfrac{z-1}{z+1} = -z'$

D'où $z' \in i\mathbb{R}$ *et par suite* $M' \in (O, \overrightarrow{v})$.

2. *a. On a :* $e^{i\theta} - 1 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 - e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{-i\frac{\theta}{2}} = \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = (1+i)^2\left(\sqrt{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2\left(e^{i\frac{\theta}{4}}\right)^2$

Et donc : $e^{i\theta}-1=\left[(1+i)\sqrt{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,e^{i\frac{\theta}{4}}\right]^2$ *car* $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ *et donc* $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$.

Comme $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ *alors on peut écrire :* $e^{i\theta}-1=\left[\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,e^{i\frac{\theta}{4}}\right]^2=\left[\sqrt{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)}\right]^2$

et donc les racines carrées de $e^{i\theta}-1$*, sous forme exponentielle, s'en déduisent :*

$$\sqrt{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)}\quad et\quad -\sqrt{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)}=\sqrt{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,e^{i\left(\frac{\theta+5\pi}{4}\right)}$$

b. $\mathbb{E}$: $z^2-2e^{i\theta}z+1=0$ *et le discriminant est :*

$$\Delta=4e^{2i\theta}-4=4\left(e^{2i}\ -1\right)=\left[2\sqrt{2\sin(\theta)}\,e^{i\left(\frac{2\theta+\pi}{4}\right)}\right]^2=\left[2\sqrt{2\sin(\theta)}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]^2$$

(On a remplacé θ *par* 2θ *dans les résultats de la question précédente). D'où les solutions de* $\mathbb{E}$ *sont :*

$$z'=\frac{2e^{i\theta}+2\sqrt{2\sin(\theta)}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{2}=e^{i\theta}+\sqrt{2\sin(\theta)}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\quad et\quad z''=e^{i\theta}-\sqrt{2\sin(\theta)}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

3. On donne les points M_1 *et* M_2 *d'affixes respectives :*

$$z_1=e^{i\theta}+\sqrt{2\sin\theta}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\quad et\quad z_2=e^{i\theta}-\sqrt{2\sin\theta}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

a. On a $Im(z_1)=\sin\theta+\sqrt{2\sin\theta}\,.\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$ *car pour tout* $\theta\in]0,\pi[$ *:*

on a $\sin\theta>0$ *et* $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ *et donc* $\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$*. En conclusion, on a :* $Im(z_1)\neq 0$.

b. Les points A et B et M_1 *ne sont pas alignés car les deux points A et B sont situés sur l'axe des abscisses tandis que le point* M_1*, d'ordonnée* $Im(z_1)\neq 0$*, ne se trouve pas sur cet axe.*

c. On a : $\frac{z_1'}{z_2'}=\frac{\frac{z_1-1}{z_1+1}}{\frac{z_2-1}{z_2+1}}=\frac{(z_1-1)(z_2+1)}{(z_1+1)(z_2-1)}=\frac{z_1z_2+z_1-z_2-1}{z_1z_2+z_2-z_1-1}=\frac{1+z_1-z_2-1}{1+z_2-z_1-1}=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_1}=-1$

car $z_1z_2=1$ *(produit des racines de* $\mathbb{E}$*).*

Déduction :

$$\frac{\frac{z_1-1}{z_1+1}}{\frac{z_2-1}{z_2+1}}=-1\Rightarrow arg\left(\frac{\frac{z_1-1}{z_1+1}}{\frac{z_2-1}{z_2+1}}\right)=0\ [\pi]$$

Soit : $arg\left[\frac{z_1-1}{z_1+1}\right]=arg\left[\frac{z_2-1}{z_2+1}\right]\ [\pi]$ *et donc en termes d'angles orientés :*

$\left(\overrightarrow{BM_1},\overrightarrow{AM_1}\right)=\left(\overrightarrow{BM_2},\overrightarrow{AM_2}\right)\ [\pi]$*. Les points A et B et* M_1 *n'étant pas alignés, les points A, B,* M_1 *et* M_2 *sont cocycliques.*

d. On a :

$$e^{i\theta}-i=-i\left(ie^{i\theta}+1\right)=-i\left[e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}+1\right]=-i\left[e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=-2i\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Déduction : On a $|z_1-i|^2=\left|e^{i\theta}-i+\sqrt{2\sin(\theta)}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|^2=\left|-2i\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+\sqrt{2\sin(\theta)}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|^2$ *et comme* $\left|e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|=1$ *alors :* $|z_1-i|^2=\left|-2i\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2\sin(\theta)}\right|^2=2\sin(\theta)+4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

En utilisant les relations trigonométriques : $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ *et* $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$

on peut conclure que : $|z_1-i|^2=2\sin(\theta)+4\frac{1-\sin(\theta)}{2}=2$*, soit en termes de distance :*

$CM_1=\sqrt{2}$ *et donc le point* M_1 *appartient au cercle de centre C et de rayon* $\sqrt{2}$.

Cette même question autrement :

Après avoir établi que : $|z_1-i|^2=2\sin(\theta)+4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$*, on pose :*

$$f(\theta)=2\sin(\theta)+4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\quad pour\quad \theta\in]0,\pi[$$

La fonction f est dérivable sur $]0,\pi[$ *et* $f'(\theta)=2\cos(\theta)-2\times 4\times\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $f'(\theta)=2\cos(\theta)-2\cos(\theta)=0$.

La fonction f étant dérivable sur $]0,\pi[$ *et de dérivée nulle sur cet intervalle alors f est constante sur* $]0,\pi[$.

D'où : $\forall\theta\in]0,\pi[$*, on a* $f(\theta)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+4\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

Soit : ${CM_1}^2=2$ *et donc le point* M_1 *appartient au cercle de centre C et de rayon* $\sqrt{2}$.

Exercice 57	Tous les chats fouillent dans les poubelles. Mais seuls les chats imprudents tombent dedans.

Soit α un nombre réel et n un entiers naturel non nul.

On considère dans $\mathbb{C}^2$ le système suivant d'inconnue (z,t) : (S) $\begin{cases} z^2+t^2=1 \\ (z+it)^n+z-it^2=2\cos\alpha \end{cases}$

1. *Montrer que le système (S) peut, au moyen d'un changement des inconnues, s'écrire :* $\begin{cases} u.v=1 \\ u^n+v^n=2\cos\alpha \end{cases}$
2. *Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système suivant :* $\begin{cases} u.v=1 \\ u^{2n}-2u^n\cos\alpha+1=0 \end{cases}$
3. *En déduire les solutions du système (S).*

Corrigé

1. *On suppose qu'il existe une solution (z,t) du système (S) c'est-à-dire que :* $\begin{cases} z^2+t^2=1 \\ (z+it)^n+(z-it)^2=2\cos\alpha \end{cases}$

On remarque que : $(z+it)(z-it)=z^2+t^2$, on est tenté de poser : $u=z+it$ et $v=z-it$, et donc le système (S) peut s'écrire : $\begin{cases} u.v=1 \\ u^n+v^n=2\cos\alpha \end{cases}$

2. *Résolvons le système* $\begin{cases} u.v=1 \\ u^{2n}-2u^n\cos\alpha+1=0 \end{cases}$ *dans $\mathbb{C}^2$:*

En posant $X=u^n$, l'équation $u^{2n}-2u^n\cos\alpha+1=0$ s'écrit $X^2-2X\cos\alpha+1=0$.

On a : $X^2-2X\cos\alpha+1=X^2-2X\cos\alpha+\cos^2\alpha+\underbrace{1-\cos^2\alpha}_{=\sin^2\alpha}=(X-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha$

$$=(X-\cos\alpha)^2-(i\sin\alpha)^2=(X-\cos\alpha-i\sin\alpha)(X-\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

D'où : $X^2-2X\cos\alpha+1=0 \Leftrightarrow X=\cos\alpha+i\sin\alpha$ *ou* $X=\cos\alpha-i\sin\alpha \Leftrightarrow X=e^{i\alpha}$ *ou* $X=e^{-i\alpha}$

Retour sur l'inconnue u :

$$u^n=e^{i\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad u=e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$$

$$u^n=e^{-i} \quad\Leftrightarrow\quad u=e^{i\left(\frac{-\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$$

Comme $|u|=1$ et $u.v=1$ alors :

$$v=\frac{1}{u}=\overline{u}$$

Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble $E=E_1\cup E_2$ avec :

$$E_1=\left\{\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},e^{-i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) \text{ tel que } k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}\right\}$$

$$E_2=\left\{\left(e^{i\left(\frac{-\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},e^{-i\left(\frac{-\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) \text{ tel que } k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}\right\}$$

3. *Déduction des solutions de (S) : Selon la question 1, on a :* $\begin{cases} u=z+it \\ v=z-it \end{cases}$ *et donc :*

$$\begin{cases} z=\dfrac{u+v}{2}=\dfrac{u+\overline{u}}{2}=Re(u) \\ t=\dfrac{u-v}{2i}=\dfrac{u-\overline{u}}{2i}=Im(u) \end{cases}$$

Par conséquent l'ensemble des solutions du système (S) est : $E'=E'_1\cup E'_2$ avec :

$$E'_1=\left\{\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right),\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right) \text{ tel que } k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}\right\}$$

$$E_2=\left\{\left(\cos\left(\frac{-\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right),\sin\left(\frac{-\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right) \text{ tel que } k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}\right\}$$

Exercice 58	Quand on se noie, on s'accroche à tout, même au serpent.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^n=-1$. Notons S l'ensemble des solutions de cette équation.

b. Montrer que : $i\in S \Leftrightarrow n\equiv 2\ [4]$.

2.a. Écrire le nombre $u=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ sous forme trigonométrique.

b. Montrer que : $\forall p\in\mathbb{N}$, $u^p+\overline{u}^p=2\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$ (où $\overline{u}$ désigne le conjugué de z).

3. *On considère l'application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :* $f(z)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$.

Montrer que : $f(z)=\dfrac{1}{2}[(1+uz)^n+(1+\overline{u}z)^n]$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

Corrigé

1.a. On a : $z \in S \iff z^n = -1 = e^{i\pi} \iff z = e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ *avec* $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$.

Donc: $S = \left\{e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}\right\}$.

b. On a :

$i \in S \iff \exists k \in \{0,1,2,\dots,n-1\} / \ i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \iff \exists k \in \{0,1,2,\dots,n-1\} / \ \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

$\iff \exists k \in \{0,1,2,\dots,n-1\} / \ \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{n}$

$\iff \exists k \in \{0,1,2,\dots,n-1\} / \ \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{n} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$

$\iff \exists k \in \{0,1,2,\dots,n-1\} / \ n = 4k+2+2h\pi, h \in \mathbb{Z}$

D'où finalement: $i \in S \iff n \equiv 2\ [4]$.

2.a. On sait de toute évidence que $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.

b. Selon Moivre, on a : $u^p = \cos\frac{p\pi}{4} + i\sin\frac{p\pi}{4}$ *et donc* $\overline{u}^p = \cos\frac{p\pi}{4} - i\sin\frac{p\pi}{4}$.

D'où : $\forall p \in \mathbb{N},\ u^p + \overline{u}^p = 2\cos\frac{p\pi}{4}$.

3. Soit z un nombre complexe. On a :

$$\frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\overline{u}z)^n] = \frac{1}{2}\left[\sum_{p=0}^{n} C_n^p (uz)^p + \sum_{p=0}^{n} C_n^p (\overline{u}z)^p\right] = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n} C_n^p (u+\overline{u}) z^p$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n} C_n^p 2\cos\frac{p\pi}{4} z^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p \cos\frac{p\pi}{4}$$

Donc, on bien : $f(z) = \frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\overline{u}z)^n]$.

4. Résolution de l'équation $f(z) = 0$

$$f(z) = 0 \iff (1+uz)^n + (1+\overline{u}z)^n \iff \left(\frac{1+uz}{1+\overline{u}z}\right)^n = -1 = e^{i\pi} \iff \frac{1+uz}{1+\overline{u}z} = e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} = \omega_k$$

Soit : $(u - \overline{u}\omega_k)z = \omega_k - 1$ *avec* $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$

Donc les solutions sont les nombres complexes: $z_k = \dfrac{\omega_k - 1}{u + \overline{u}\omega_k}$ *avec* $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$

Exercice 59	***En toute chose, il faut considérer la fin.***

Soit a un nombre complexe imaginaire pur et n un entier tel que $n \geq 2$. *On considère l'équation :*

$$(E):\ (z+\overline{a})^n - (a-\overline{z})^n = 0.$$

Soit (S) l'ensemble des solutions de (E).

1. Montrer que : $z \in (S) \implies z \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation (E).*

3. On considère l'équation (F) : $(z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n = 0$ *avec* $\alpha \neq 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

a. Montrer que toute solution de (F) est réelle.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation (F).*

4. On pose : $P(z) = (z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n$.

a. Déterminer le degré du polynôme P.

b. On pose : $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$ *. Déterminer* a_0 *en fonction de* α.

c. Soit $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ *les solutions dans* $\mathbb{C}$ *de l'équation* $P(z) = 0$. *Établir que :*

$$\prod_{p=1}^{p=n} z_p = z_1 \times z_2 \times z_3 \times \dots \times z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

d. En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{k=0}^{k=2p+1} \cot\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4p+2}\right) = (-1)^p \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Corrigé

1. On a:

$z \in (S) \iff (z+\overline{a})^n = (a-\overline{z})^n$;

$z \in (S) \implies |z+\overline{a}|^n = |a-\overline{z}|^n$;

$z \in (S) \implies |z+\overline{a}| = |\overline{z}-a|$;

$z \in (S) \implies (z+\overline{a})(\overline{z}+a) = (\overline{z}-a)(z-\overline{a})$ *soit après développement :*

$z \in (S) \implies a.z + \overline{a}.\overline{z} = 0$ *et comme* $\overline{a} = -a$ *alors on peut écrire :*
$z \in (S) \implies a.z - a.\overline{z} = 0$ *et donc* $z \in (S) \implies z = \overline{z}$ *et en fin* $z \in (S) \implies z \in \mathbb{R}$.

2. Comme toute solution de l'équation (E) est réelle et que $\overline{a} = -a$ *alors pour toute solution z de (E) on peut poser* $z = x$ *avec* $x \in \mathbb{R}$ *et donc :*

$$x \in (S) \Leftrightarrow (x+\overline{a})^n = (a-\overline{x})^n \Leftrightarrow (x-a)^n = (a-x)^n$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^n = (-1)^n(x-a)^n \Leftrightarrow (-1)^n = 1 \quad car\, x \neq a.$$

On envisage deux cas :
Cas 1 : Si n est pair alors $(S) = \mathbb{R}$
Cas 2 : Si n est impair alors $(S) = \emptyset$.

3.a. Soit z une solution de (F) et (S') *l'ensemble des solutions de (F). On a :*
$z \in (S') \Leftrightarrow (z+i)^n = e^{i\alpha}(z-i)^n$ *et donc* $z \in (S') \implies |z+i|^n = |e^{i\alpha}| \times |z-i|^n$ *ou encore :*
$z \in (S') \implies |z+i| = |z-i|$ *car* $|e^{i\alpha}| = 1$.
En considérant les points M(z), A(i) et B(-i), on peut réécrire la dernière implication en termes de distance :
$z \in (S') \implies BM = AM$ *et donc le point M appartient à la médiatrice du segment* $[AB]$ *qui n'est autre que l'axe des abscisses et par suite z est un réel. Donc les solutions de (F) sont réelles.*

b. $z \in (S') \Leftrightarrow (z+i)^n = e^{i\alpha}(z-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = e^{i\alpha}$ *(car z est réel et donc* $z \neq i$*). D'où les solutions* z_k *de (F) sont telles que :*

$$z_k \in (S') \Leftrightarrow \frac{z_k+i}{z_k-i} = e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \ avec\ \ k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$$

$$Tous\ calculs\ faits, nous\ obtenons :\ z_k = \frac{-i\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}+1\right)}{1-e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}}$$

$$En\ posant\ \theta_k = \frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}, on\ réécrit\ les\ solutions\ sous\ la\ forme :\ \ z_k = i\frac{\left(e^{i\theta_k}+1\right)}{e^{i\theta_k}-1}$$

Or, on sait que :
$e^{i\theta_k}+1 = 2\,cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right)e^{i\frac{\theta_k}{2}}$ *et* $e^{i\theta_k}-1 = 2i\,sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)e^{i\frac{\theta_k}{2}}$ *et par suite :*

$$z_k = \frac{2i\,cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right)e^{i\frac{\theta_k}{2}}}{2i\,sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)e^{i\frac{\theta_k}{2}}} = \frac{1}{tan\left(\frac{\theta_k}{2}\right)} = \frac{1}{tan\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} = cot\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\ avec\ k \in [\![0,n-1]\!]$$

4. On a $P(z) = (z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n$.
a. Après le développement de $P(z)$*, on trouve que le coefficient de* z^n *est égal à* $1-e^{i\alpha} \neq 0$ *car* $k \in \mathbb{Z}$ *et* $\alpha \neq 2k\pi$.
Donc le degré du polynôme $P(z)$ *est égal à n.*
b. Calcul de a_0 *en fonction α :*
On a: $a_0 = P(0) = i^n - e^{i\alpha}(-i)^n = i^n[1-(-1)^n e^{i\alpha}]$.
c. Si $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ *sont les solutions dans* $\mathbb{C}$ *de l'équation* $P(z) = 0$ *alors le polynôme* $P(z)$ *se factorise comme suit :* $P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$
En prenant $z = 0$ *dans cette dernière expression de* $P(z)$*, on trouve :*

$$P(0) = a_n(-z_1)(-z_2)\dots(-z_n) = a_n(-1)^n z_1 z_2 \dots z_2 = (-1)^n a_n \prod_{k=1}^{n} z_k$$

$$Par\ identification, on\ obtient :\ \ \prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

d. On a :

$$a_n = 1-e^{i\alpha} = -2i\,sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$$
$$a_0 = i^n[1-(-1)^n e^{i\alpha}] = (i)^{2p+1}(1+e^{i\alpha}) = 2(-1)^p i\,cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} \qquad (n = 2p+1)$$

D'où:

$$\frac{a_0}{a_n} = \frac{2(-1)^p i\,cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}}{-2i\,sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}} = (-1)^{p+1}\,cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$On\ en\ déduit\ que :\ \prod_{k=0}^{2p+1} z_k = (-1)^{2p+1} \times (-1)^{p+1}\,cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = (-1)^p\,cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$Comme\ \ z_k = cot\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4p+2}\right)\ \ alors :\ \prod_{k=0}^{2p+1} cot\left(\frac{\alpha+2k\pi}{4p+2}\right) = (-1)^p\,cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Exercice 60	*Quand le canari se casse sur ta tête, il faut en profiter pour te laver.*

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation : (1)* $x^2 - x + 1 = 0$.

b. En déduire les solutions du système : $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ xy = 1 \end{cases}$ *avec* $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *et* $Im(y^3) \leq 0$.

2. Soit dans $\mathbb{C}$ *l'équation : (E)* $z^3 - 3z - 1 = 0$ *et soit x et y deux nombres complexes tels que* $xy = 1$.

a. Montrer que $x + y$ *est solution de (E) si et seulement si* $x^3 + y^3 = 1$.

b. Déduire de ce qui précède que l'ensemble des solutions de (E) est $S = \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{13}{9}\right)\right\}$.

Corrigé

1.a. Le déterminant de l'équation (1) est $\Delta = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$ *et donc ses solutions sont :*

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad et \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

b. Comme $xy = 1 \Leftrightarrow x^3y^3 = 1$ *alors le système devient* $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^3y^3 = 1 \end{cases}$ *avec* $Im(y^3) \leq 0$. *Donc* x^3 *et* y^3 *sont solutions de l'équation (1) et tenant compte de la condition* $Im(y^3) \leq 0$, *on peut conclure que* $y^3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ *c'est-à-dire que* $y = e^{i\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ *avec* $k \in \{0, 1, 2\}$. *En prenant en considération la relation* $xy = 1$ *et en faisant varier k, on obtient les couples solutions du système :*

Pour $k = 0$, *on trouve* $y = e^{-i\frac{\pi}{9}}$ *et donc* $x = e^{i\frac{\pi}{9}}$ *;*

Pour $k = 1$, *on trouve* $y = e^{-i\frac{7\pi}{9}}$ *et donc* $x = e^{i\frac{7\pi}{9}}$ *;*

Pour $k = 2$, *on trouve* $y = e^{-i\frac{13\pi}{9}}$ *et donc* $x = e^{i\frac{13}{9}}$.

Donc l'ensemble des solutions du système est : $S_1 = \left\{\left(e^{i\frac{\pi}{9}}, e^{-i\frac{\pi}{9}}\right); \left(e^{i\frac{7\pi}{9}}, e^{-i\frac{7\pi}{9}}\right); \left(e^{i\frac{13\pi}{9}}, e^{-i\frac{13\pi}{9}}\right)\right\}$.

2.a. $x + y$ *est solution de (E)* $\Leftrightarrow (x + y)^3 - 3(x + y) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + (x + y)(3xy - 3) = 1$.

Donc on peut déduire que $x^3 + y^3 = 1$ *car* $xy = 1$.

b. On pose $z = x + y$ *avec* $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *et* $xy = 1$.

Donc on a l'équivalence : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ xy = 1 \\ z = x + y \end{cases}$ *et par suite les solutions de (E) sont :*

$$e^{i\frac{\pi}{9}} + e^{-i\frac{\pi}{9}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \quad ; \quad e^{i\frac{7\pi}{9}} + e^{-i\frac{7\pi}{9}} = 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) \quad ; \quad e^{i\frac{13\pi}{9}} + e^{-i\frac{13\pi}{9}} = 2\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) *est :* $\left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right); 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right); 2\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)\right\}$.

Exercice 61	*Le bœuf ne se vante pas de sa force devant l'éléphant.*

1. On pose $A = -1 - i$.

a. Calculer A^3.

b. En déduire les racines cubiques du nombre complexe $2 - 2i$.

c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ *l'équation* (E) : $\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^3 - 2 + 2i = 0$.

2. Soit a et b deux nombres complexes.

a. Vérifier que $(a + b)^3$ *est solution de l'équation :* $(z - a^3 - b^3)^3 - 27a^3b^3z = 0$.

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ *l'équation (F) :* $(z - 2 - 6i)^3 - 432(1 + i)z = 0$.

Corrigé

1.a. On a : $A^3 = -(1 + i)^3 = -(1 + i)^2(1 + i) = -2i(1 + i) = 2 - 2i$.

b. Selon la question précédente $-1 - i$ *est une racine cubique de* $2 - 2i$ *et donc les racines cubiques de* $2 - 2i$ *sont donnés par :* $z_0 = (-1 - i) \times 1 = -1 - i$;

$$z_1 = (-1 - i) \times j = (-1 - i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i;$$

$$z_2 = (-1 - i) \times \overline{j} = (-1 - i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i.$$

c. Soit (S) l'ensemble des solutions de l'équation (E).

$$z \in (S) \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = 2-2i \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = u \text{ tel que } u \in \{z_0, z_1, z_2\}$$

$$\Leftrightarrow z = i.\left(\frac{u+1}{u-1}\right) \text{ tel que } u \in \{z_0, z_1, z_2\}$$

2.a. Soit a et b deux nombres complexes. On a :

$$((a+b)^3 - a^3 - b^3)^3 - 27a^3b^3(a+b)^3 = (3a^2b + 3ab^2)^3 - \big(3ab(a+b)\big)^3$$

$$= (3a^2b + 3ab^2)^3 - (3a^2b + 3ab^2)^3 = 0$$

Donc $(a+b)^3$ *est bien solution de l'équation :* $(z - a^3 - b^3)^3 - 27a^3b^3z = 0.$

b. En s'inspirant de la question 2.a., on peut écrire l'équation (F) sous la forme :

$$(z - (-1-i)^3 - (-2i)^3)^3 - 27(-1-i)^3(-2i)^3 z = 0$$

Et donc $(a+b)^3 = (-1-i-2i)^3 = (-1-3i)^3$ *est solution de l'équation (E).*

D'autre part, comme on a les égalités : $(a+b)^3 = [(a+b)j]^3 = \left[(a+b)\overline{j}\,\right]^3$ *alors les solutions de l'équation (F)sont :* $(-1-3i)^3$ *,* $[(-1-3i)j]^3$ *et* $\left[(-1-3i)\overline{j}\,\right]^3$.

Exercice 62	*Celui qui te devance d'une nuit te devance d'une ruse.*

Soit (z_n) *la suite de nombres complexes définie par :* $\begin{cases} z_0 = \cos x + i \sin x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{cases}$

où x est un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Écrire sous forme trigonométrique le terme z_1.

2. Soit (α_n) *la suite numérique définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \arg z_n\ [2\pi]$ *et* $\alpha_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

a. Montrer que la suite (α_n) *est géométrique de raison* $q = \frac{1}{2}$.

b. En déduire l'expression de α_n *en fonction de x et de n.*

3. Soit (v_n) *la suite définie par :* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = z_n - \overline{z_n}$.

a. Exprimer v_{n+1} *en fonction de* v_n*. Que peut-on en déduire ?*

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| = \dfrac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n - z_0 = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{n-1}|$

5. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$*, on a :* $\cot \dfrac{x}{2^n} - \cot x = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}$

Corrigé

1. On a :

$$z_1 = z_0 + |z_0| = 1 + \cos x + i \sin x = 2\cos^2\frac{x}{2} + 2i\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)$$

Comme $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *alors* $\cos\frac{x}{2} > 0$ *et par suite l'écriture exponentielle de* z_1 *est* $2\cos\frac{\pi}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2.a. De l'égalité $\arg z_n = \alpha_n\ [2\pi]$ *on peut déduire que* z_n *s'écrit* $z_n = |z_n|e^{i\alpha}$.

On a donc : $z_{n+1} = z_n + |z_n| = |z_n|(e^{i\alpha_n} + 1)$

D'où : $|z_{n+1}|e^{i\alpha_{n+1}} = |z_n|e^{i\frac{\alpha_n}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha_n}{2}} + e^{-i\frac{\alpha_n}{2}}\right) = |z_n| \times 2\cos\frac{\alpha_n}{2}e^{i\frac{\alpha_n}{2}}$

Comme $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ *alors* $\cos\frac{\alpha_n}{2} > 0$ *et par suite* $\arg z_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2}\ [2\pi]$ *i.e* $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n$.

La suite (α_n) *est géométrique de raison* $q = \frac{1}{2}$ *et de 1er terme* $\alpha_0 = x$.

b. On a sans peine : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \alpha_0 = \dfrac{x}{2^n}$

3.a. On a : $v_{n+1} = z_{n+1} - \overline{z}_{n+1} = z_n + |z_n| - \left(\overline{z_n + |z_n|}\right) = z_n + |z_n| - \overline{z_n} - |\overline{z_n}|$

Or $|z_n| = |\overline{z_n}|$*, d'où :* $v_{n+1} = z_n - \overline{z_n}$ *et donc :* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n$.

On peut donc conclure que la suite (v_n) *est constante et par suite :* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 = 2i\sin x$

b. On sait que : $v_n = z_n - \overline{z_n}$ *et* $z_n = |z_n|e^{i\frac{x}{2^n}}$, *d'où :* $v_n = |z_n|\left(e^{i\frac{x}{2^n}} - e^{-i\frac{x}{2^n}}\right) = 2i|z_n|\sin\dfrac{x}{2^n}$

D'autre part, comme $v_n = 2i\sin x$ *, on en déduit que :* $2i|z_n|\sin\frac{x}{2^n} = 2i\sin x$*, et donc :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |z_n| = \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

4. On peut écrire pour tout n de $\mathbb{N}^*$ *:*

En faisant la somme membre à membre, on obtient :

$$\begin{cases} z_n = z_{n-1} - |z_{n-1}| \\ z_{n-1} = z_{n-2} - |z_{n-2}| \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_1 = z_0 - |z_0| \end{cases}$$

$$z_n = z_0 + |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{n-1}|$$

Et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad z_n - z_0 = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{n-1}|$$

5. D'après la question précédente, on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$ *:* $z_n - z_0 = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{n-1}|$
Soit donc:

$$\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}\left(\cos\frac{x}{2^n} + i\sin\frac{x}{2^n}\right) - (\cos x + i\sin x) = \sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$$

ou encore : $\dfrac{\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} - \cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{k}}$

Soit en divisant par sin x :

$$\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} - \frac{\cos x}{\sin x} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{x}{k}}$$

En tenant compte du fait que : $\dfrac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \cot\dfrac{x}{2^n}$ *et* $\dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

on écrit enfin l'égalité demandée : $\cot\dfrac{x}{2^n} - \cot x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{x}{k}}.$

Exercice 63	Une pirogue n'est jamais trop grande pour chavirer.

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 4z + \lambda$ *où* λ *est un nombre réel et z une indéterminée complexe.*
1. Montrer que si $P(z) = 0$ *admet une solution complexe* z_0 *alors* $\overline{z_0}$ *est aussi solution.*
En déduire que l'équation $P(z) = 0$ *admet au moins une solution réelle, sans chercher à résoudre l'équation.*
2. Déterminer λ *pour que l'équation* $P(z) = 0$ *admette une racine réelle de module 2.*
3. Déterminer λ *pour que l'équation* $P(z) = 0$ *admette une racine complexe de module 2.*
Résoudre l'équation pour les valeurs de λ *ainsi trouvées et préciser le module et l'argument de chaque solution.*

Corrigé

1. L'équation est à coefficients réels, donc z_0 *est solution si et seulement si* $\overline{z_0}$ *est solution.*
L'équation $P(z) = 0$ *est une équation polynomiale du troisième degré : elle admet donc trois solutions dans* $\mathbb{C}$.
Soit z_0 *l'une de ses trois solutions ; si* z_0 *n'est pas réel alors* $\overline{z_0}$ *est également une solution. Si* z_1 *est la troisième solution alors le polynôme* $P(z)$ *peut se factoriser comme suit :* $P(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0})(z - z_1)$.
Par identification des coefficients de $P(z)$, *on tire l'égalité des coefficients constants :* $\lambda = -z_0\overline{z_0}z_1 = -|z_0|^2 z_1$ *et par suite, nous obtenons :*

$$z_1 = -\frac{\lambda}{|z_0|^2} \in \mathbb{R} \quad \text{car } \lambda \text{ estun nombre réel.}$$

2. L'équation $P(z) = 0$ *admet une racine réelle de module 2 signifie* $P(2) \times P(-2) = 0$, *ce qui donne dans les deux cas* $\lambda = 0$. *On a alors :* $P(z) = z^3 - 4z = z(z^2 - 4) = z(z-2)(z+2)$ *et donc* $S = \{0; 2; -2\}$.
3. $P(z) = 0$ *admet une racine complexe, non réelle, de module 2 si et seulement si il existe un réel* θ *tel que pour tout z, on a :* $P(z) = z^3 - 4z + \lambda = \left(z - 2e^{i\theta}\right)\left(z - 2e^{-i\theta}\right)(z - z_1) = (z - 4\cos(\theta)z + 4)(z - z_1)$
D'où le système obtenu après développement et identification des coefficients :

$$\begin{cases} -4\cos(\theta) - z_1 = 0 \\ 4 + 4\cos(\theta) \times z_1 = -4 \\ -4z_1 = \lambda \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} z_1 = -4\cos(\theta) \\ \cos^2(\theta) = \frac{1}{2} \\ \lambda = 16\cos(\theta) \end{cases}$$

On a : $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} \iff \cos(\theta) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.
D'où deux valeurs possible pour λ *:* $\lambda = 8\sqrt{2}$ *ou* $\lambda = -8\sqrt{2}$.
Si $\lambda = 8\sqrt{2}$ *(c'est-à-dire si* $k = 0$*) alors les racines sont :* $-2\sqrt{2}$; $2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $2e^{-i\frac{\pi}{4}}$
Si $\lambda = -8\sqrt{2}$ *(c'est-à-dire si* $k = 1$*) alors les racines sont :* $2\sqrt{2}$; $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Exercice 64	*Même le poisson qui vit dans l'eau a toujours soif.*

Soit l'application $f:\ \mathbb{C}\ \to\ \mathbb{C}$ *telle que* $f(z)=z+j^2.\overline{z}$ *où* $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer $f(i), f(j), f(i+j)$.

2. Montrer que $\forall z\in\mathbb{C},\ j^2.f(z)\in\mathbb{R}$.

3. Montrer que $\forall z\in\mathbb{C},\ |f(z)|^2-2|z|^2=2Re(jz^2)$.

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$.

Déterminer les deux ensembles : $(E_1)=\{M(z)/f(z)=0\}$ *et* $(E_2)=\{M'(f(z))/z\in\mathbb{C}\}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $f(z)=j$.

6. On pose $f^1=f$ *et* $f^n=f\circ f^{n-1}$ *pour tout entier* n *de* $\mathbb{N}^*$.

a. Déterminer $f^2,\ f^3$ *et* f^4.

b. En déduire l'expression de $f^n(z)$ *en fonction de* n, z *et* j.

7. Soit a, b *et* c *trois nombres complexes.*

a. Vérifier que $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a+b\overline{j}+cj\right)(a+bj+c\overline{j})$.

b. Soit ABC *un triangle et* a, b *et* c *les affixes de A, B et C. Montrer l'équivalence :*

$$\begin{cases} ABC \text{ équilatéral} \\ \quad ou \\ de\ centre\ de\ gravité\ O \end{cases} \Leftrightarrow\ a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* (E): $z^3-3iz+1-i=0$.

Corrigé

1. Calcul de $f(i)$ *: on a* $f(i)=i-i.j^2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

Calcul de $f(j)$ *:* $f(j)=j+j^2.\overline{j}=j+j\left(j.\overline{j}\right)=2j$.

Calcul de $f(i+j)$ *:* $f(i+j)=i+j+j-i.j^2=i-i.j^2+2j=f(i)+f(j)$.

2. Soit z un nombre complexe. On a : $\overline{j^2f(z)}=\overline{j^2(z+j^2\overline{z})}=j(\overline{z}+jz)=j^2z+j.\overline{z}$.

D'autre part, on a: $j^2f(z)=j^2(z+j^2\overline{z})=j^2z+j.\overline{z}$. *Donc* $\overline{j^2f(z)}=j^2f(z)$ *c'est à dire que* $j^2f(z)\in\mathbb{R}$.

3. On a pour tout nombre complexe z :

$$\begin{aligned}|f(z)|^2-2|z|^2=f(z).\overline{f(z)}-2z.\overline{z}&=(z+j^2\overline{z})(\overline{z}+jz)-2z.\overline{z}\\ &=z.\overline{z}+jz^2+\overline{j}.\overline{z}^2+j\overline{j}z\overline{z}-2z\overline{z}\\ &=jz^2+\overline{j}\overline{z}^2=2Re(jz^2)\end{aligned}$$

4.a. Soit un point M(z) du plan tel que $z=x+iy$ *où x et y sont des réels. On a :*

$$\begin{aligned}M\in(E_1)\Leftrightarrow f(z)=0\ &\Leftrightarrow\ |z|^2+Re(jz^2)=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+Re\left[\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x^2-y^2+2ixy\right]=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-\sqrt{3}xy=0\\ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2-\sqrt{3}xy=0\\ &\Leftrightarrow\ \left(x-\sqrt{3}y\right)^2=0\ \Leftrightarrow\ x-\sqrt{3}y=0\end{aligned}$$

Donc (E_1) *est la droite d'équation cartésienne :* $x-\sqrt{3}y=0$.

b. Soit M' le point d'affixe $f(z)$ *pour un nombre complexe z. On a :*

$$\begin{aligned}M'\in(E_2)\ &\Leftrightarrow\ j^2f(z)\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow arg\left(j^2f(z)\right)=0\ [\pi]\\ &\Leftrightarrow arg\left(f(z)\right)=-arg(j^2)=-\frac{4\pi}{3}\ [\pi]\ \Leftrightarrow\ \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM'}\right)=\frac{2\pi}{3}\ [\pi]\end{aligned}$$

Donc (E_2) *est une droite passant par O et privée de O.*

5. Résolvons l'équation $f(z)=j$ *: On a, en écrivant* $z=x+iy$ *avec x et y des nombres réels:*

$$\begin{aligned}f(z)=j\ &\Leftrightarrow z+\overline{j}.\overline{z}=j\ \Leftrightarrow x+iy+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow\ \left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}\right)+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0\end{aligned}$$

$D'\text{où le système}:\ \begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}=0\end{cases}$ *soit encore* $\begin{cases}x-\sqrt{3}y=-1\\ x-\sqrt{3}y=-1\end{cases}$.

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{\sqrt{3}y-1+iy/y\in\mathbb{R}\right\}$.

6.a. Détermination de f^2 :

Pour tout complexe z, on a : $f^2(z) = f(f(z)) = f(z) + j^2\overline{f(z)} = z + j^2\bar{z} + j^2(\bar{z} + jz) = 2z + 2j^2\bar{z} = 2f(z)$.

Détermination de f^3 :

Pour tout nombre complexe z, on a : $f^3(z) = f^2(f(z)) = 2f\big(f(z)\big) = 2f^2(z) = 4f(z) = 2^2 f(z)$.

Détermination de f^4 :

Pour tout complexe z, on a : $f^4(z) = f^3(f(z)) = 4f(f(z)) = 4f^2(z) = 4(2f(z)) = 8f(z) = 2^3 f(z)$.

b. D'après la question précédente, on peut conjecturer que :

« $\forall z \in \mathbb{C}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $f^n(z) = 2^{n-1}f(z)$ *» que nous pouvons démontrer par récurrence sur n.*

La propriété est vraie pour $n = 1, 2$ *et* 3.

On suppose qu'il existe un rang n pour lequel, on a : $\forall z \in \mathbb{C}, f^n(z) = 2^{n-1}f(z)$. *Montrons que* $f^{n+1}(z) = 2^n f(z)$.

On a pour tout nombre complexe z :

$f^{n+1}(z) = f^n\big(f(z)\big) = 2^{n-1}f(f(z)) = 2^{n-1}f^2(z) = 2^{n-1} \times 2f(z) = 2^n f(z)$. *Donc la propriété est vraie pour* $n + 1$ *et par suite :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}$, $f^{n+1}(z) = 2^n f(z) = 2^n(z + j^2\bar{z})$.

7.a. Il est inutile de développer car les calculs occasionnés sont fastidieux. On peut plutôt considérer l'expression littérale suivante $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ *comme un polynôme P de 3e degré dont a est l'indéterminée. Dans ce cas, on vérifiera qu'il admet les 3 racines :* $a_1 = -b - c$, $a_2 = -bj - c\bar{j}$ *et* $a_3 = -b\bar{j} - cj$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} P(a_1) &= (-b-c)^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= -b^3 - c^3 - 3b^2c - 3bc^2 + b^3 + c^3 - 3(-b-c)bc = 0 \end{aligned}$$

Et : $P(a_2) = \big(-bj - c\bar{j}\big)^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= (-bj)^3 - \big(c\bar{j}\big)^3 - 3(-bj)^2\big(-c\bar{j}\big) - 3(-bj)(-c\bar{j})^2 + b^3 + c^3 - 3\big(-bj - c\bar{j}\big)bc$$

Comme $j^3 = \bar{j}^3 = 1$ *et* $j^2\bar{j} = j\big(j\bar{j}\big) = j$ *et* $j\bar{j}^2 = \big(j\bar{j}\big)\bar{j} = \bar{j}$ *alors, on a :*

$$P(a_2) = -b^3 - c^3 - 3b^2cj - 3bc^2\bar{j} + b^3 + c^3 - 3\big(-bj - c\bar{j}\big)bc = 0.$$

Par économie de raisonnement, on conclut qu'on a également : $P(a_3) = 0$. *CQFD.*

b. L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est $\frac{a+b+c}{3}$. *L'équivalence ente le fait que le centre de gravité de ABC est le point O et la nullité de la somme* $a + b + c$ *est évidente. D'autre part, supposons que le triangle ABC est équilatéral et montrons que le produit suivant est nul :*

$$\big(a + b\bar{j} + cj\big)\big(a + bj + c\bar{j}\big).$$

Si ABC est direct alors C est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ *càd* $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$ *et en multipliant par* $e^{i\frac{\pi}{3}}$, *on trouve l'égalité :*

$(c - a)\big(-\bar{j}\big) = j(b - a)$ *i.e* $(-j - \bar{j})a + bj + c\bar{j} = 0$ *et comme* $-j - \bar{j} = 1$ *alors* $a + bj + c\bar{j} = 0$.

Si ABC est indirect, on démontre de manière analogue que $a + b\bar{j} + cj = 0$. *CQFD.*

Réciproquement, Montrons que si $\big(a + b\bar{j} + cj\big)\big(a + bj + c\bar{j}\big) = 0$ *alors le triangle ABC est équilatéral.*

On a : $\big(a + b\bar{j} + cj\big)\big(a + bj + c\bar{j}\big) = 0 \iff a + b\bar{j} + cj = 0$ *ou* $a + bj + c\bar{j} = 0$.

On suppose que $a + bj + c\bar{j} = 0$. *On a* $\bar{j} = -1 - j$ *et donc, en remarquant que* $e^{i\frac{\pi}{3}}j = -1$, *on obtient:*

$$\begin{aligned} a + bj + c\bar{j} = 0 &\iff a + bj + c(-1 - j) = 0 \iff a - c = j(c - b) \\ &\iff e^{i\frac{\pi}{3}}(a - c) = e^{i\frac{\pi}{3}}j(c - b) = b - c \end{aligned}$$

L'égalité $b - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - c)$ *conduit, sans équivoque, à l'équilatéralité du triangle ABC. Idem pour le cas où* $a + b\bar{j} + cj = 0$.

Conclusion : On vient d'établir que :

$$\begin{cases} ABC \text{ équilatéral} \\ \quad\quad ou \\ \text{de centre de gravité } O \end{cases} \iff \big(a + b + c\big)\big(a + b\bar{j} + cj\big)\big(a + bj + c\bar{j}\big) = 0$$

Or, on sait déjà d'après la question 7.a. que :

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\big(a + b\bar{j} + cj\big)\big(a + bj + c\bar{j}\big)$, *d'où :*

$$\begin{cases} ABC \text{ équilatéral} \\ \quad\quad ou \\ \text{de centre de gravité } O \end{cases} \iff a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

c. Résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$: L'expression $z^3 - 3iz + 1 - i$ est de la forme :

$$z^3 - 3iz + 1 - i = z^3 + 1^3 + i^3 - 3 \times 1 \times i \times z$$

Ainsi, on peut remarquer que l'expression $z^3 - 3iz + 1 - i$ n'est autre que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ avec $a = z$, $b = 1$ et $c = i$. Donc les solutions de l'équation(E) : $z^3 - 3iz + 1 - i$ sont :

$$z_1 = -b - c = -1 - i\ ,\ z_2 = -bj - c\bar{j} = -j - i\bar{j}\ ,\ z_3 = -b\bar{j} - cj = -\bar{j} - ij.$$

Exercice 65	*L'ombre du zèbre n'a pas de rayures.*

1. On considère l'application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$P(z) = z^5 + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z$ où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont quatre nombres complexes donnés.

On pose $\omega_j = e^{i\frac{2j}{5}}$, où j désigne un entier naturel compris entre 0 et 4.

Montrer que : $P(\omega_0) + P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 5$.

2. Soit A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cinq points du plan.On construit un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre A_1 de rayon R. Démontrer qu'il existe un sommet S du pentagone tel que : $SA_1 \times SA_2 \times SA_3 \times SA_4 \times SA_5 \geq R^5$.

☞On pourra considérer le polynôme : $P(z) = z(z + \alpha_1 - \alpha_2)(z + \alpha_1 - \alpha_3)(z + \alpha_1 - \alpha_4)(z + \alpha_1 - \alpha_5)$.

Soit α_k l'affixe de A_k ; S_k a pour affixe $\omega_k + \alpha_k$ (par exemple).

Montrer que $S_kA_1 \times S_kA_2 \times S_kA_3 \times S_kA_4 \times S_kA_5 = |P(\omega_k)|$ et raisonner par l'absurde.

Corrigé

1. Pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a:

$$\omega_0{}^k + \omega_1{}^k + \omega_2{}^k + \omega_3{}^k + \omega_4{}^k = 1 + e^{i\frac{2k\pi}{5}} + e^{i\frac{4k\pi}{5}} + e^{i\frac{6k\pi}{5}} + e^{i\frac{8k}{5}} = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2k}{5}}\right)^5}{1 - e^{i\frac{2k}{5}}} = 0.$$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} P(\omega_k) = (\omega_0{}^5 + \omega_1{}^5 + \omega_2{}^5 + \omega_3{}^5 + \omega_4{}^5) + \sum_{k=1}^{4}(\omega_0{}^k + \omega_1{}^k + \omega_2{}^k + \omega_3{}^k + \omega_4{}^k) = 5 + 0 = 5.$

2. On se place dans le cas où $R = 1$. Soit α_1, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 les affixes respectives de A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

S_k a pour affixe $\omega_k + \alpha_k$ car $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 ont les racines cinquièmes de l'unité. Donc :

$$\begin{aligned} |P(\omega_k)| &= |\omega_k|.|\omega_k + \alpha_k - \alpha_2|.|\omega_k + \alpha_k - \alpha_3|.|\omega_k + \alpha_k - \alpha_4|.|\omega_k + \alpha_k - \alpha_5| \\ &= S_kA_1 \times S_kA_2 \times S_kA_3 \times S_kA_4 \times S_kA_5. \end{aligned}$$

Supposons que pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on a : $S_kA_1 \times S_kA_2 \times S_kA_3 \times S_kA_4 \times S_kA_5 < 1$.

Alors dans ce cas, nous aurons pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $|P(\omega_k)| < 1$ et par suite :

$$|P(\omega_0) + P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4)| \leq \sum_{k=0}^{4} |P(\omega_k)| < 5$$

ce qui contredit le fait que : $P(\omega_0) + P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 5$.

Ainsi, on conclut qu'il existe un sommet S tel que $SA_1 \times SA_2 \times SA_3 \times SA_4 \times SA_5 \geq 1$.

Dans le cas où $R \neq 1$, il est laissé au lecteur l'occasion de piocher dans ses méninges.

Exercice 66	*Ne repousse pas du pied la pirogue qui t'a déposé sur la berge.*

Soient $n + 1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n$ et soit le polynôme : $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$

1. Montrer que pour tout nombre complexe z :

$$|(1 - z)P(z)| \geq a_0 - [(a_0 - a_1)|z| + (a_1 - a_2)|z|^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)|z|^n + a_n|z|^{n+1}]$$

2. Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = a_0 - [(a_0 - a_1)x + (a_1 - a_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)x^n + a_nx^{n+1}]$

Quelle est la monotonie de f ?

3. En déduire que toute racine z du polynôme P est telle que $|z| \geq 1$.

4. Vérifier ce résultat avec $P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$.

Corrigé

1. On a : $(1 - z)P(z) = a_0 + (a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1)z^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n + a_nz^{n+1}$. D'où :

$$\begin{aligned} |a_0| &= |(1 - z)P(z) - [(a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1)z^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n + a_nz^{n+1}]| \\ |a_0| &\leq |(1 - z)P(z)| + |(a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1)z^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n + a_nz^{n+1}| \\ |a_0| &\leq |(1 - z)P(z)| + |(a_1 - a_0)z| + |(a_2 - a_1)z^2| + \cdots + |(a_n - a_{n-1})z^n| + |a_nz^{n+1}| \\ |a_0| &\leq |(1 - z)P(z)| + (a_0 - a_1)|z| + (a_1 - a_2)|z|^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)|z|^n + a_n|z|^{n+1} \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

2. Les fonctions $x \mapsto x^k$ sont strictement croissantes sur $]0,+\infty[$ et les coefficients $a_k - a_{k+1}$, a_{n+1} sont positifs, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. Soit z un nombre complexe tel que $0 < |z| < 1$. Comme f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, on a :

$$f(|z|) > f(1) = a_0 - [(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + a_n] = 0$$

D'où l'équation $P(z) = 0$ n'admet aucune solution z vérifiant $0 < |z| < 1$.
4. Si pour tout k de $\{0,1,2,\ldots,n\}$, on a $a_k = 1$ alors :
$\rightarrow$ *Pour $z \neq 1$, $P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$;*
$\rightarrow$ *Pour $z = 1$, $P(1) = n + 1$.*
Donc les solutions de $P(z) = 0$ sont des racines $(n+1)$ièmes de l'unité.
D'où toute solution z de $P(z) = 0$ vérifie $|z| = 1$ (et non $|z| < 1$).

Exercice 67	***Les prières du poulet n'atteignent pas le faucon.***

Soit p un entier naturel non nul et l'équation suivante d'inconnue z :

$$(E_p):\ pz^p = z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1,\ \ c'est\ \text{à}\ dire\ \ pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k$$

On rappelle que pour tous nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| \qquad (in\text{é}galit\text{é}\ triangulaire)$$

1. Dans cette question, on se demande si (E_p) peut admettre une solution de module strictement supérieur à 1.
Soit z une solution (E_p) de module $r > 1$.
a. Montrer que : $p \times r^p(r-1) \leq r^p - 1$
b. Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = px^{p+1} - (p+1)x^p + 1$. Étudier les variations de f.
c. En déduire que l'on ne peut pas avoir $f(r) \leq 0$. Conclure.
2. Soit $e^{i\theta}$ une solution de (E_p) de module 1, autre que 1.

$$a.\ Justifier\ l'\text{é}galit\text{é} :\ e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} = \frac{sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

b. En déduire que $p = -1$. Conclure.

Corrigé
1. Soit z une telle solution de module $r > 1$.
a. On a, en passant via les modules:

$$p|z|^p = |z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1| \leq |z|^{p-1} + |z|^{p-2} + \cdots + |z| + 1 = r^{p-1} + r^{p-2} + \cdots + r + 1$$

Soit :

$$pr^p \leq r^{p-1} + r^{p-2} + \cdots + r + 1 = \frac{r^p - 1}{r - 1}\ \ car\ r \neq 1$$

Comme $r - 1 > 0$, *on peut déduire que :* $\ p \times r^p(r-1) \leq r^p - 1$
b. La fonction f étant polynômiale, elle est dérivable sur $[1,+\infty[$ et :

$$f'(x) = p(p+1)x^{p-1}(x-1) \geq 0\ pour\ tout\ x\ de\ [1,+\infty[$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ avec $f(1) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
c. D'après la question 1.a., on a : $p \times r^p(r-1) \leq r^p - 1$ c'est-à-dire : $pr^{p+1} - (p+1)r^p + 1 \geq 0$
Donc : $f(r) \geq 0$. D'autre part, $f(r) \neq 0$ car $r \neq 1$ et par suite $f(r) > 0$.
Conclusion : Donc toute solution z de l'équation (E_p) est de module inférieur ou égal à 1.
2. a. Si $z = e^{i\theta}$ $(\neq 1)$ est une solution de (E_p) alors :

$$pe^{ip\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{p-1} + \left(e^{i\theta}\right)^{p-2} + \cdots + e^{i\theta} + 1 = \frac{1 - e^{ip\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{-2i\,sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)e^{\frac{ip\theta}{2}}}{-2i\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}} = \frac{sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)e^{\frac{ip\theta}{2}}}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}}$$

$$Donc :\ \ \frac{sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{e^{ip\theta} \times e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{ip\theta}{2}}} = e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}$$

$$b.\ L'\text{é}galit\text{é} :\ \frac{sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}\ \ conduit\ \text{à}\ e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} \in \mathbb{R}^*\ c'est-\text{à}-dire\ que\ \ arg\left(e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}\right) = 0\ [\pi].$$

On a :

$$arg\left(e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}\right)=0\ [\pi]\ \Leftrightarrow\ \exists k\in\mathbb{Z}\ tel\ que\ \frac{(p+1)\theta}{2}=k\pi$$
$$\Leftrightarrow\ \exists k\in\mathbb{Z}\ tel\ que\ p=\frac{2k\pi-\theta}{\theta}\ car\ \theta\neq 0$$

Soit : $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}=e^{ik\pi}=(e^{i\pi})^k=(-1)^k=\dfrac{sin\left(-\frac{1}{2}\theta+k\pi\right)}{p\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=-\dfrac{(-1)^k}{p}\Longrightarrow p=-1$

Ce qui est absurde car p est un entier naturel.
Conclusion : On déduit de cette question que l'équation (E_p) ne peut pas admette une solution, autre que 1, de module 1. Donc toute solution de (E_p) , autre que 1, est de module inférieur strictement à 1.

Exercice 68	Si tu as de nombreuses richesses donne ton bien; si tu possèdes peu, donne ton cœur.

(Équations de droites et de cercles en complexes)

Le plan complexe P étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u},\vec{v})$, à tout point M de coordonnées (x,y) , on associe son affixe $z=x+iy$.

Partie A

1. Étant donnés un nombre complexe non nul $w=u+iv$, u et v réels, et un réel h, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\overline{w}z+w\overline{z}=h$.
2. Soit D la droite dont une équation est $ax+by+c=0$ avec a, b et c réels et $(a,b)\neq(0,0)$.
Trouver un complexe non nul w et un réel h tels que D soit l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie la relation $\overline{w}z+w\overline{z}=h$.

Partie B

1. Étant donnés un complexe w et un réel k, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation $z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}+k=0$ (On aura à discuter suivant le signe de $|w|^2-k$).
2. Soit C le cercle de centre le point de coordonnées (a, b), de rayon R.
Trouver un complexe w et un réel k tels que C soit l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie la relation $z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}+k=0$.

Partie C

On note P^* l'ensemble $P-\{O\}$. On considère l'application de P^* dans P^* qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\dfrac{1}{\overline{z}}$
1. Montrer que pour tout point M de P^*, les points M et $M'=f(M)$ appartiennent à une même dem-droite d'origine O.
2. Montrer que f est involutive (f est une involution si et seulement si f est une bijection de P^* sur P^* égale à sa réciproque). Préciser l'ensemble des points invariants par f.
3.a. Soit (D) une droite ne contenant pas le point O. En utilisant les parties A et B, déterminer l'image de (D) par l'application f.
b. Soit U une droite contenant le point O. Déterminer l'image de $U^*=U-\{O\}$ par f.
4. Soit C un cercle passant par O. Déterminer l'image de $C^*=C-\{O\}$ par f.

Partie D

1. Soient A et B deux points de P^* d'images respectives A' et B' par f.
Exprimer la distance A'B' en fonction des distances AB, OA et OB.
2. Soient un cercle C passant par O et trois points R, S et T sur ce cercle tels que O, R, S et T soient deux à deux distincts et tels que le point d'intersection des droites (OR) et (RT) appartienne au segment $[RT]$.
Montrer que : $OS.RT=OR.TS+OT.RS$ (on pourra considérer l'image par f de C^* et utiliser le fait qu'un point B appartient à un segment $[AC]$ si et seulement si $AB+BC=AC$).
3. Soient trois points R, S et T du plan P tels que O, R, S et T soient deux à deux distincts et tels que :

$$OS.RT=OR.TS+OT.RS$$

Montrer que les points O, R, S et T sont cocycliques ou alignés.

Corrigé

Partie A

1. $w\overline{z}$ est le conjugué de $\overline{w}z$. Donc : $w\overline{z}+\overline{w}z=2Re(\overline{w}z)=2Re[(u-iv)(x+iy)]=2(ux+vy)$.
L'équation $w\overline{z}+\overline{w}z=h$ s'écrit alors $2(ux+vy)=h$ ou encore $ux+vy=\frac{h}{2}$ qui est manifestement l'équation d'une droite puisque, w étant non nul par hypothèse, le couple (u, v) est alors différent de (0, 0).
2. C'est le problème de la réciproque, c'est-à-dire répondre à la question : « L'équation $ax+by+c=0$ d'une droite D peut(elle se mettre sous la forme $w\overline{z}+\overline{w}z=h$? ». En s'inspirant de la question 1, on posera $w=a+ib$.

Dans ces conditions, on a $ax+by=\frac{1}{2}(w\overline{z}+\overline{w}z)$. *Donc l'équation* $ax+by+c=0$ *se met sous la forme* $w\overline{z}+\overline{w}z=h$, *avec* $w=a+ib$ *complexe non nul car* $(a,b)\neq(0,0)$ *et* h *réel valant* $-2c$.

Partie B

1. L'expression $z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}$ *s'écrit :* $z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}=x^2+y^2-2(ux+vy)$. *Ainsi, l'ensemble des points M(z) tels que* $z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}+k=0$ *a pour équation cartésienne :*

$$(x-u)^2+(y-v)^2=u^2+v^2-k=|w|^2-k$$

Si $|w|^2-k\geq 0$ *alors l'ensemble cherché est le cercle de centre le point* $W(w=u+iv)$ *et de rayon* $\sqrt{|w|^2-k}$.

Si $|w|^2-k<0$ *alors l'ensemble cherché est l'ensemble vide.*

2. C'est la réciproque : Il s'agit de mettre l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ *du cercle C sous la forme* $z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}+k=0$. *Pour cela, il suffit de choisir* $u=a$ *et* $v=b$ *et* $k=u^2+v^2-R^2$. *Donc on a bien trouvé un nombre complexe* $w=a+ib$ *et un réel k tel que le cercle C a pour équation :* $z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}+k=0$.

Partie C

1. $arg(z')=arg\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=-arg(\overline{z})=-\big(-arg(z)\big)=arg(z)\ [2\pi]$. *Or* $arg(z')$ *et* $arg(z)$ *sont des mesures respectives des angles* $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right)$ *et* $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$, *par conséquent* $arg(z')=arg(z)\ [2\pi]$ *se traduit par :* $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$ *soit* $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)=0\ [2\pi]$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{OM'}$ *sont colinéaires et de même sens, ce qui prouve que les points M et M' appartiennent à une même demi-droite d'origine O.*

2. On rappelle qu'une application de P^* *dans* P^* *est une bijection de* P^* *sur* P^* *si et seulement si tout point N de* P^* *admet un unique antécédent M dans* P^*.

Soit un point N d'affixe Z différent de 0, il faut donc chercher les antécédents de N, c'est-à-dire les points M tels que $N=f(M)$. *Si on note z l'affixe de M, cela revient à résoudre dans* $\mathbb{C}^*$ *l'équation à l'inconnue z :* $Z=\frac{1}{\overline{z}}$. *En prenant les conjugués puis les inverses des deux membres de l'égalité, on obtient* $z=\frac{1}{\overline{Z}}$. *Ceci prouve deux choses :*

- *La première que N n'a donc qu'un antécédent, car on a obtenu une seule valeur de z non nulle, et par suite que f est bien une bijection.*
- *La deuxième : si f(M)=M', alors f(M')=M, puisque la « formule » donnant z' en fonction de z, donne z en fonction de z'. Par conséquent f est une involution, en effet f est égale à sa réciproque.*

3.a. Une droite (D) ne passant pas par O a une équation de la forme : $\overline{w}z+w\overline{z}=h$, *avec h différent de 0 d'après la partie A. M' est l'image de M par f s'écrit indifféremment :*

$$z'=\frac{1}{\overline{z}}\quad ou\quad z=\frac{1}{\overline{z'}}.$$

Puisque (D) est caractérisée par $\overline{w}z+w\overline{z}=h$, *f(D) sera donc caractérisée par l'égalité (E) suivante :*

$$\overline{w}\times\frac{1}{\overline{z'}}+w\times\frac{1}{z'}=h.$$

Mais (E) s'écrit successivement et de manière équivalente :

$$\overline{w}z'+w\overline{z'}=h\times z'\overline{z'}\ \text{ ou encore }\ h\times z'\overline{z'}-\left(\overline{w}z'+w\overline{z'}\right)=0.$$

Puis en divisant par le nombre réel h non nul et en tenant compte de $\frac{\overline{w}}{h}=\overline{\left(\frac{w}{h}\right)}$, *on obtient :*

$$z'\overline{z'}-\overline{w'}z'+w'\overline{z'}=0,\qquad \text{en posant } w'=\frac{\overline{w}}{h}.$$

Par conséquent $z'\overline{z'}-\overline{w'}z'+w'\overline{z'}=0$ *et* $z'\neq 0$ *caractérise f(D). On reconnait dans cette dernière équation celle d'un cercle passant par O.*

Ainsi :

L'image d'une droite ne passant pas par O est un cercle passant par O privé du point O.

b. Étant donné que U^* *est caractérisé par* $\overline{w}z+w\overline{z}=0$. *Un raisonnement analogue au précédent conduit à caractériser* $f(U^*)$ *successivement par :*

$$\overline{w}\times\frac{1}{\overline{z'}}+w\times\frac{1}{z'}=0.$$

En multipliant par le nombre non nul $z'\overline{z'}$, *nous obtenons :*

$$\overline{w}z'+w\overline{z'}=0,\qquad \text{avec } z'\neq 0.$$

On reconnait la même équation de départ.

Ainsi : ***Une droite passant par O est invariante globalement par f.***

4. Un point M de C^* *est caractérisé par* $z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}=0$. *Son image M' d'affixe z' sera caractérisé successivement par :*

$$\frac{1}{\overline{z'}} \times \frac{1}{z'} - \overline{w}\frac{1}{\overline{z'}} - w\frac{1}{\overline{z'}} = 0.$$

En multipliant cette dernière relation par le nombre non nul $z'\overline{z'}$*, on obtient :*

$1 - \overline{w}z' - w\overline{z'} = 0$, *avec* $z' \neq 0$*, soit enfin :* $\overline{w}z' + w\overline{z'} = 1$.

Ainsi :

L'image d'un cercle passant par O est une droite ne passant pas par O.

Remarque : Une définition géométrique de la transformation f

*Cette application f qui « échange » droites ne passant pas par O et cercles passant par O est appelée **inversion de pôle O**. On montrerait facilement que l'image d'un cercle ne passant par O est un cercle ne passant pas par O. On peut la définir géométriquement, sans l'outil complexe, en effet l'égalité :*

$$z' = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{z\,\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} \times z$$

se traduit vectoriellement par :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{OM^2} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

On déduit de cette égalité que les points O, M et M' sont alignés (M et M' sont du même côté de O) et que :

$$OM' = \frac{1}{OM}.$$

L'application f n'est pas la seule inversion de pôle O, les relations $z' = \frac{a}{\overline{z}}$*, avec a réel, définissent les inversions de pôle O. Le pôle est le seul point n'ayant pas de transformé. Les inversions sont involutives.*

Apparemment les inversions sont liées à la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses d'écriture complexe $z' = \overline{z}$*. De manière plus précise, deux cercles ou droites symétriques par rapport à l'axe des abscisses sont transformés en deux droites ou cercles symétriques par rapport à l'axe des abscisses.*

Partie D

1. On appelle a, b, a', b' les affixes respectives de A, B, A', B'.

On a :

$$A'B' = |b' - a'| = \left|\frac{1}{\overline{b}} - \frac{1}{\overline{a}}\right| = \left|\frac{\overline{a} - \overline{b}}{\overline{a} \times \overline{b}}\right| = \frac{|a-b|}{|a| \times |b|} = \frac{AB}{OA \times OB}.$$

2. L'image de C^* *par f est une droite (D) ne passant par O. Soient R', S' et T' les images des points R, S et T sont donc alignés sur la droite (D). En outre le point S' est nécessairement, puisque la droite (OS) coupe le segment* $[RT]$*, entre R' et T'.*

Donc : $R'S' + S'T' = R'T'$ *et d'après la 1ère question :*

$$\frac{RS}{OR.OS} + \frac{ST}{OS.OT} = \frac{RT}{OR.OT}.$$

En multipliant cette égalité parle nombre $OR.OS.OT$ *non nul (car O, R, S, T sont distincts deux à deux), on obtient* $OS.RT = OR.TS + OT.RS$.

3. Réciproque :

Soient trois points distincts R, S, T du plan vérifiant la relation (1) : $OS.RT = OR.TS + OT.RS$.

On appelle R', S', T' les images des points R, S, T par f. Ces points vérifient $R'S' + S'T' = R'T'$ *(il suffit de diviser (1) par* $OR.OS.OT$ *qui est non nul et d'utiliser la 1ère question).*

L'égalité $R'S' + S'T' = R'T'$ *implique forcément que les trois points R', S' et T' sont alignés sur une droite* (Δ).

Par conséquent leurs images R, S et T par f (puisque f est une involution) sont sur l'image de (Δ)*. Deux cas sont à envisager :*

- → *La droite* (Δ) *passe par O : l'image de* (Δ^*) *est* (Δ^*)*, d'après la question C.3.b.*
  Les points O, R, S, T sont donc alignés.
- → *La droite* (Δ) *ne passe pas par O : l'image de* (Δ) *est* C^**, où C désigne un cercle passant par O, d'après la question C.3.a. Les points O, R, S, T sont donc cocycliques.*

EXERCICES PROPOSES

Même un fusil maladroit atteindra la cible en multipliant les tirs.

Proverbe japonais

Exercice 1

On donne les nombres complexes : $\boldsymbol{z_1 = -3 - i\sqrt{3}}$ *et* $\boldsymbol{z_2 = -3 + i\sqrt{3}}$.

1. *Montrer que* $\boldsymbol{z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}}$ *et* $\boldsymbol{z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$.
2. *Écrire sous forme exponentielle* $\overline{z_1}^2$ *et* $\frac{{z_1}^2}{\overline{z_2}}$.

Exercice 2

Donner une forme trigonométrique puis une forme exponentielle de chacun des nombres complexes proposés ci-dessous :

a. $z = \frac{2+2i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}$

b. $z = \frac{(1-i)^5}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$

c. $z = \left(3-3i\sqrt{3}\right)^3(-1+i)^4$

d. $z = (1+i)^{2016}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2017}$

e. $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha \quad , \quad \alpha \in \left]0,\pi\right[$

f. $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha \quad , \quad \alpha \in \left]\pi,2\pi\right[$

g. $z = -5\left(\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

h. $z = 1 - i\tan\frac{\pi}{5}$

i. $z = \sin\alpha + i(1+\cos\alpha)\ , \quad \alpha \in \left[0,\pi\right[$

j. $z = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\ , \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Exercice 3

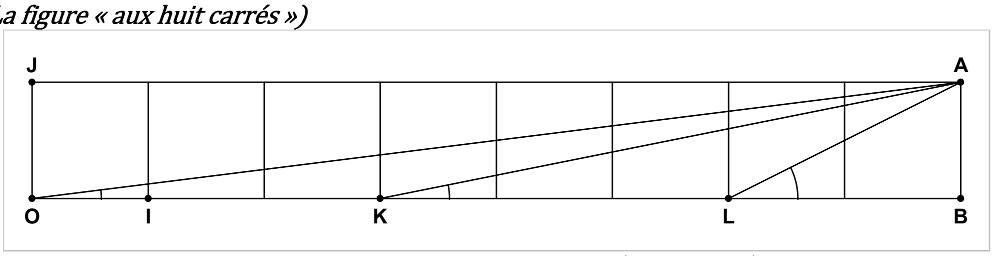
On donne le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Exprimer z^2 *sous forme algébrique*

2. Exprimer z^2 *sous forme exponentielle.*

3. En déduire z sous forme exponentielle.

Exercice 4 (La figure « aux huit carrés »)



On se place dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ *tel que* $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{OJ}$.

On note $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right) = \alpha\ [2\pi]$, $\left(\vec{u},\overrightarrow{KA}\right) = \beta\ [2\pi]$ *et* $\left(\vec{u},\overrightarrow{LA}\right) = \gamma\ [2\pi]$.

Le but de l'exercice est de prouver que : $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

1. *Reproduire la figure et placer les points C et D sur* $[JA]$ *tels que les nombres* β *et* γ *soient des mesures respectives des angles* $\left(\vec{u},\overrightarrow{OC}\right)$ *et* $\left(\vec{u},\overrightarrow{OD}\right)$.
2. *Préciser les affixes* z_A, z_C *et* z_D *des points A, C et D sous forme algébrique.*
3. *Montrer que* $z_A \times z_C \times z_D = 65(1+i)$.
4. *En utilisant les résultats précédents, montrer que :* $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Exercice 5

On considère le nombre complexe $a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Calculer a^2 *puis déterminer son module et son argument.*

2. Donner alors la forme trigonométrique de a.

3. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes des lignes trigonométriques $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 6
Soit z un nombre complexe et $\overline{z}$ son conjugué tels que : $2z^2 + 3\overline{z}^2 = 5 + i$ *(1).*
1. Démontrer que : $z^2 + \overline{z}^2 = 2$ *et* $z^2 - \overline{z}^2 = -2i$.
2. En déduire le module et un argument de z^2, puis déterminer les complexes z vérifiant la relation (1).

Exercice 7
On pose $z_1 = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$; $z_3 = z_1^3 z_2$.
1.a. Mettre z_1^3 sous la forme algébrique.
b. Mettre le nombre complexe z_3 sous la forme algébrique.
2.a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_1, puis le module et un argument du nombre complexe z_1^3.
b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_2.
c. Déduire des questions précédentes la forme trigonométrique du nombre complexe z_3.
3. En comparant les forme trigonométrique et algébrique de z_3, déterminer les valeurs exactes des lignes trigonométriques $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 8
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a. $z^2 - (17 + i)z + 16(1 + i) = 0$;
b. $z^2 + (1 + 4i)z - 5(1 - i) = 0$;
c. $z^2 + (11 + 5i)z + 5(4 + 7i) = 0$.
2. En déduire, sans calculs, la résolution des équations suivantes :
a. $z^2 - (17 - i)z + 16(1 - i) = 0$;
b. $z^2 + (1 - 4i)z - 5(1 + i) = 0$;
c. $z^2 + (11 - 5i)z + 5(4 - 7i) = 0$.

Exercice 9
Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$.
1. Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 10
Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i)$.
1. Démontrer qu'il existe un nombre imaginaire pur $i\beta$ solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - i\beta)Q(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 11
Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + (3 + 4i)z + 5(2 - i)$ *et* z_0, z_1 *et* z_2 *ses racines.*
1. Vérifier que : $z_0 + z_1 + z_2 = 2 + i$ *et* $z_0.z_1.z_2 = 5(-2 + i)$.
2. Sachant que z_0 et z_1 sont opposés et que $Re(z_0) > 0$, *calculer z_2 puis z_0 et z_1.*

Exercice 12
Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :*

1. $(1 - z)(1 - iz) \in \mathbb{R}$	*2.* $(iz - z)(\overline{z} - 1) \in i\mathbb{R}$	*3.* $(z + 1)(\overline{z} - 2) \in \mathbb{R}$
4. $\frac{z+2i}{z-4i} \in \mathbb{R}$	*5.* $\frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R}$	*6.* $\lvert z - 3\rvert = \lvert z - (1 + i)\rvert$
7. $\lvert z - 2 + i\rvert = \sqrt{5}$	*8.* $\lvert z + 3 - i\rvert > \lvert z\rvert$	*9.* $\lvert z + 3 - i\rvert \leq 2$
10. $\lvert z\rvert < \lvert z + 3 - i\rvert < 2$	*11.* $\lvert z - 1 - i\rvert = \lvert\overline{z} + 3i\rvert$	*12.* $\lvert 1 - 4i - 2iz\rvert \geq 4$
13. $\left\lvert\frac{z-4}{z-3i}\right\rvert = \frac{2}{3}$	*14.* $\lvert z + 2i\rvert = 2$ *et* $arg z = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$	*15.* $2 \leq \lvert z\rvert$ *et* $\frac{\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{\pi}{3}$

Exercice 13
Linéariser les expressions suivantes :
1. $f(x) = sin(2x)\,cos^3(3x)$
2. $g(x) = sin^5(2x)$
3. $h(x) = cos(3x)\,cos^2(5x)$
4. $k(x) = cos(3x)\,sin^2(7x)$

Exercice 14
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit A et M les points d'affixes $2+i$ et z.
1.a. Démontrer que le nombre complexe $\omega = (z-2-i)^3$ est un réel strictement positif si et seulement si on a :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k\frac{2\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

b. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que ω soit un réel strictement positif.
2.a. Montrer que ω est un imaginaire pur non nul si et seult si $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
b. En déduire l'ensemble des points M ainsi définis.

Exercice 15
1. Montrer que pour tout élément α de $\mathbb{R}$: $1 + e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $1 - e^{i\alpha} = -2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$
2. En déduire que pour tous réels a et b:

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad \text{et} \quad e^{ia} - e^{ib} = -2i\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

3. Écrire les nombres suivants sous forme $re^{i\theta}$: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_3 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Exercice 16
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique 1 cm).
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.
2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes :

$$a = 4\sqrt{3} - 4i \text{ et } b = 4\sqrt{3} + 4i.$$

a. Écrire a et b sous forme exponentielle.
b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
Déterminer l'affixe du point D.
4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O\ ;\ -1), (D\ ;\ +1), (B\ ;\ +1)$.
a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.
b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.
d. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

Exercice 17
Soit un plan rapporter à un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On note A et B les points d'affixes respectives i et –2i. Soit f l'application du plan P privé de A dans P, qui à tout point M d'affixe z distincte de i associe le point M' d affixe z' définie par : $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$.
1. Soit z un nombre complexe diffèrent de i.
a. On désigne respectivement par r et θ le module et un argument de z - i.
Interpréter géométriquement r et θ à l'aide des points A et M.
b. Montrer que : $(z' + 2i)(z - i) = 1$.
c. En désigne par r' et θ' le module et un argument de z' + 2 i. Exprimer r' et θ' en fonction de r et θ.
Interpréter géométriquement r' et θ' à l'aide des points B et M'.
2. Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1
a. Montrer que si M appartient à (C), alors son image M' appartient à un cercle (C') de centre B et dont on donnera le rayon.
b. Montrer que si M' appartient à (C'), alors son antécédent M par f appartient à (C).
3. Soit T le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$.
a. Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AT}$, En déduire que T appartient au cercle (C).
b. Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AT})$. Tracer le cercle (C) et placer le point T.
c. En utilisant les questions précédentes, construire l'image T' du point T par f

Exercice 18
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
2. On considère les points :
- *A d'affixe $a = \sqrt{3} - i$;*
- *B d'affixe $b = \sqrt{3} + i$;*
- *C le milieu du segment $[OB]$, d'affixe c.*

a. Déterminer une forme exponentielle de a, b et c.
b. Sur une figure, placer les points A, B et C.
c. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
3. Soit D le point tel que le triangle OCD est isocèle rectangle en O et $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$, et E tel que DABE soit un parallélogramme.
a. Placer les points D et E.
b. Déterminer une forme exponentielle de l'affixe d du point D, puis sa forme algébrique et montrer que l'affixe ε du point E est : $\varepsilon = \frac{1}{2} + \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2}\right)i$.
c. Démontrer que : $OE = BE = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$.
4. Démontrer que les points A, C et E sont alignés.

Exercice 19
1.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
b. On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \overline{a}$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.
2.a. Soit A' le point tel que le triangle OAA' est équilatéral direct et a' son affixe. Déterminer une forme exponentielle de a' puis sa forme algébrique et placer A' sur la figure.
b. Déterminer l'affixe b' du point B' défini par l'égalité : $\overrightarrow{OB'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$.
3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle ; on note c l'affixe du point C.
a. Justifier les égalités suivantes : $c\overline{c} = R^2$, $(c-2i)(\overline{c}+2i) = R^2$, $\left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$
b. En déduire que $c - \overline{c} = 2i$ puis que $c + \overline{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
c. Déterminer alors l'affixe du point C et la valeur de R.

Exercice 20 (Nombres complexes et configurations)
Soit ABC un triangle de sens direct. On construit extérieurement au secteur angulaire saillant $([AB),[AC))$. Les segments $[AM]$, $[CN]$ et $[BP]$ tels que :
- $AM = BC$ et (AM) et (BC) perpendiculaires,
- $CN = CA$ et (CN) et (CA) perpendiculaires,
- $BP = BA$ et (BP) et (BA) perpendiculaires.

Soit a, b, c, m, n, p les affixes respectives des points A, B, C, M, N, P.
1.a. Montrer que $p - c = i(m-b)$.
b. Montrer que $PC = MB$ et (PC) et (MB) sont perpendiculaires.
c. Montrer que $BN = MC$ et (BN) et (MC) sont perpendiculaires.
d. En considérant le triangle BMC, montrer que les droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes.
2. Soit K d'affixe k le milieu de $[AN]$ et L d'affixe l le milieu de $[AP]$.
a. Montrer que $m - k = i(b-k)$.
b. Montrer que $m - l = i(c-l)$.
c. Quelle est la nature des triangles BKM et MLC.

Exercice 21 (Nombres complexes et configurations)
On considère un rectangle OABC tel que $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note θ l'angle $\widehat{AOB}$.
La droite perpendiculaire à (OB) en B coupe les droites (OA) et (OC) respectivement en D et E.
On note F le point tel que ODFE soit un rectangle. Les lettres a, b, c, … désigneront les affixes des points A, B, C, … dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
1.a. Démontrer que : $OA = OD\cos^2(\theta)$ et $OC = OE\sin^2(\theta)$.
b. En déduire que : $a = d\cos^2(\theta)$ et $c = e\sin^2(\theta)$.
2. Démontrer que : $a\sin(\theta) = ic\cos(\theta)$.
3. En utilisant les normes de $e + d$ et $c - a$, démontrer que les droites (OF) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 22 (Nombres complexes et réflexion plane)
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
A tout point M d'affixe z, on associe le point M_1, symétrique de M par rapport à $(x'Ox)$, puis le point M_2, image de M_1 par le quart de tour direct de centre O, puis le point M', image de M_2 dans la translation de vecteur $\vec{u} - \vec{v}$.
1. Déterminer les affixes z_1, z_2 des points M_1, M_2, et montrer que l'affixe z' de M' vérifie : $z' = i\overline{z} + 1 - i$.
2. On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le point M'.
Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f.

3.a. Calculer le quotient $\frac{z'-z}{1+i}$ et montrer qu'il est imaginaire pur. En déduire que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à (D).
4. Calculer, en fonction de z, l'affixe du milieu I du segment $[MM']$, et montrer que I appartient à (D).
5. Quelle est la nature de l'application f ?

Exercice 23 (Existence d'un triangle connaissant les milieux des côtés)
Soit A, B, C trois points d'affixes a, b, c. On cherche s'il existe un triangle $M_1M_2M_3$ tel que A soit le milieu du segment $[M_1M_2]$, B le milieu de $[M_2M_3]$, C le milieu de $[M_3M_1]$.
1. Montrer que M_1, M_2, M_3 sont solutions du problème posé si et seulement si leurs affixes z_1, z_2, z_3 vérifient le système (S) :
$$(S)\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a \\ z_2 + z_3 = 2b \\ z_3 + z_1 = 2c \end{cases}$$
2. En résolvant le système (S), montrer que le problème a une solution.
3. Application numérique : $a = 1 + 3i$, $b = -1 + 2i$, $c = -i$. Déterminer M_1, M_2, M_3, et faire une figure.

Exercice 24
Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
1. En utilisant le fait que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = z\bar{z}$, montrer que : $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$
et qu'on a l'égalité : $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$ si et seulement si $arg(z_1) = arg(z_2)\ [2\pi]$.
2. Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts et non alignés.
Montrer que : $AB \times CD + AD \times BC \geq AC \times BD$ et que $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$ si et seulement si A, B, C et D sont situés, dans cet ordre, sur un même cercle.

Exercice 25
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.
Partie A
1. a. Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.
b. Placer les points A, B, et C.
2. Déterminer la nature du quadrilatère OBAC.
3. Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $|z| = |z - 2|$.
Partie B : A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M ' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z-2}$.
1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \frac{-4}{z-2}$.
b. En déduire les points associés aux points B et C.
c. Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.
2. a. Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, on a : $|z' - 2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$.
b. On suppose dans cette question que M est un point de Δ, où Δ est l'ensemble défini à la question A.3.
Démontrer que le point M ' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

Exercice 26
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1 + 3i$ et $z_B = -2$ et $z_C = -\frac{3-3i}{2}$.
Soit f l'application du plan privé de A dans le plan qui, à tout point M d'affixe z distincte de z_A, associe le point M ' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z+2}{z+1-3i}$
1. Factoriser $z^2 - 3iz - 2$ en remarquant que $z = i$ en est une racine, puis résoudre l'équation (E) : $z^2 - 3iz - 2 = 0$
2. Déterminer les affixes des points invariants par f.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O de rayon 1.
4. En posant $z = x + iy$, déterminer Im(z') en fonction de x et y. En déduire l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.
5. a. Montrer que pour tout z différent de $-1 + 3i$ on a l'équivalence suivante :
$$\frac{z+2}{z+1-3i} = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+1+3i} \Leftrightarrow (z - z_C)(\overline{z - z_C}) = \frac{5}{2}.$$
b. En déduire l'ensemble des points M tels que M ' ait une affixe imaginaire pure.

Exercice 27
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 4 cm).
Soit le point A d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$*. On appelle C l'image de B par r.*
a. Déterminer une écriture complexe de r.
b. Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$*.*
c. Écrire z_B *et* z_C *sous forme algébrique.*
d. Placer les points A, B et C.
2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, −1 et 2.
a. Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$*. Placer le point D.*
b. Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.
3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.
a. Déterminer une écriture complexe de h.
b. Montrer que l'affixe de E est $z_D = \sqrt{3}$*. Placer le point E.*
4. a. Calculer le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$*. On écrira le résultat sous forme exponentielle.*
b. En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 28
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$*.*
1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$*,* $z_B = 2i$ *et* $z_C = 2$ *ainsi que le cercle* Γ *de centre A et de rayon 2. La droite (OA) coupe le cercle* Γ *en deux points H et K tels que OH < OK. On note* z_H *et* z_K *les affixes respectives des points H et K.*
a. Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.
b. Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.
c. Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que :
$$z_K = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad et \quad z_H = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$
Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ *associe le point M' d'affixe z' telle que :* $z' = \frac{-4}{z}$*.*
2. a. Déterminer et placer les points images de B et C par f.
b. On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f.
3. a. Montrer que pour tout point M distinct de O, on a : $OM \times OM' = 4$*.*
b. Déterminer $arg(z)$ *en fonction de* $arg(z')$*.*
4. Soient K' et H' les images respectives de K et H par f.
a. Calculer OK' et OH'.
b. Démontrer que : $z_{K'} = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ *et* $z_{H'} = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$*.*
c. Expliquer comment construire les points K' et H' en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.

Exercice 29 (Cocyclicité et nombres complexes)
Soit $\mathbb{C}$ *l'ensemble des nombres complexes,* $\mathbb{C}^*$ *l'ensemble des nombres complexes privé de 0, et f l'application de* $\mathbb{C}^*$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :*
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$
On désigne par (P) *un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et par* (P^*) *le plan* (P) *privé du point O. Soit F l'application de* (P^*) *dans* (P) *dans laquelle tout point m de* (P^*)*, d'affixe z, a pour image le point M d'affixe* $Z = f(z)$*.*
1. Montrer que, si $z \neq i$*, le quotient* $\frac{Z+i}{Z-i}$ *s'exprime très simplement en fonction de* $\frac{z+i}{z-i}$*.*
On désigne par U et U' les points de (P) *d'affixes respectives i et* $-i$*. Soit m un point de* (P^*) *distinct de U et U', et* $M = F(m)$*. Trouver une relation simple entre les angles* $\left(\overrightarrow{mU}, \overrightarrow{mU'}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MU'}\right)$*.*
2. Soit (Γ_1) *le cercle de diamètre* $[UU']$*.*
En utilisant la relation angulaire précédente, trouver l'image de (Γ_1) *par F ; trouver l'ensemble* (γ) *des points m de* (P^*) *tels que* $F(m)$ *appartienne à* (Γ_1)*. Dessiner* (γ)*.*

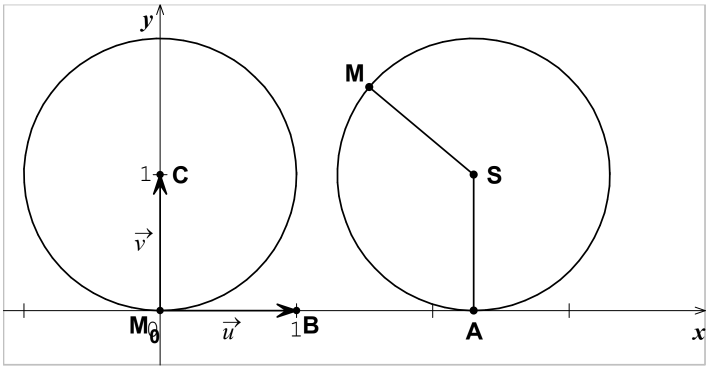
Exercice 30 (Cocyclicité et nombres complexes)
On considère le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$*. Soit U le point d'affixe 1 et V le point d'affixe i.*
1. Démontrer que si A, B et C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c alors :
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi].$$

2. On considère dans le plan les points : U d'affixe 1, M d'affixe z, M' d'affixe z' et P d'affixe zz' où z et z' sont deux nombres complexes distincts de 0 et 1.
a. Démontrer que les points M, M' et P sont distincts deux à deux.
b. Démontrer que pour tout z et tout z' vérifiant ces conditions :

$$arg\left(\frac{zz'-z'}{zz'-z}\right) = arg\left(\frac{z'}{z'-1}\right) - arg\left(\frac{z}{z-1}\right)\ [2\pi].$$

c. En déduire que M, M' et P sont alignés si et seulement si les points O, U, M et M' sont cocycliques ou alignés.

Exercice 31 (La roue du vélo)
On considère un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *tel que le rayon de la roue soit égal à l'unité de longueur et l'axe* $(O, \vec{u})$ *figure le sol.*
Le point de contact de la roue avec le sol est noté A, repéré par le réel t, t parcourant $[0, 2\pi]$.
Pour $t = 0$, $M = M_0$ *est en O. S désigne le centre de la roue du vélo.*

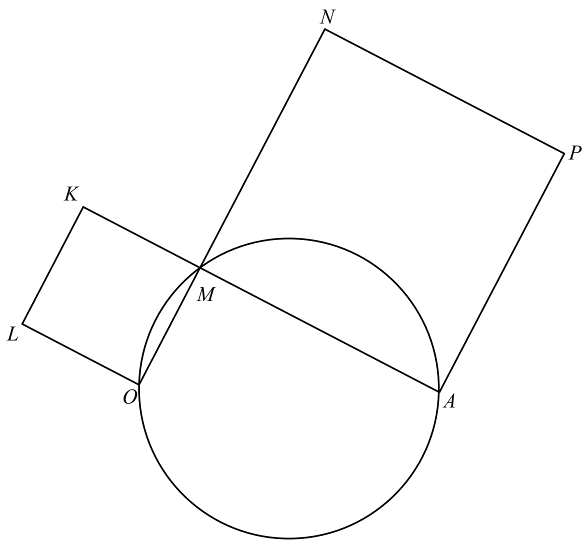


1. Établir que les affixes de A, B et S sont respectivement t, 1 et t+i.
2. Expliquer pourquoi l'angle $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}) = -t$ *en radians.*
3. En déduire l'affixe du vecteur $\overrightarrow{SM}$ *en fonction de t, puis établir que l'affixe de* $\overrightarrow{BM}$ *est :*

$$Z = (t-1) + (1 - e^{-it})i.$$

4.a. Exprimer $e^{it} + e^{-it}$ *et* $e^{it} - e^{-it}$ *en fonction de* $\cos t$ *ou* $\sin t$.
b. Calculer $BM^2 = Z \times \overline{Z}$ *en fonction de t.*
5. On pose : $f(t) = (t-1)^2 - 2(t-1)\sin t + 2(1-\cos t)$. *Démontrer que :* $f'(t) = 2(t-1)(1-\cos t)$.
6. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, 2\pi]$ *et en déduire la position où M est au plus près de B.*

Exercice 32
Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle C de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle C et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-après.
Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.
On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. *On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N, P.*



1. *Démontrer que, quel que soit le point M du cercle C, on a :* $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
2. Établir les relations suivantes : $l = im$ *et* $p = -im + 1 + i$.
On admettra que l'on a également $n = (1-i)m + i$ *et* $k = (1+i)m$.
3. a. Démontrer que le milieu Ω *du segment [PL] est un point indépendant de la position de M sur le cercle C.*

b. Démontrer que le point Ω appartient au cercle C et préciser sa position sur ce cercle.
4. a. Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.
b. Quelle est la nature du triangle ΩNK ?
5. Démontrer que N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 33
Soit $(O;\ \vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complexe P.
Soit A le point d'affixe 1. On considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = 2z - z^2$.
1. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes z^2 et $2z$.
a. Trouver l'ensemble des points M tels que O, M_1 et M_2 soient alignés.
b. On suppose que M n'appartient pas à l'axe des abscisses. Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme.
c. On suppose que $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi,\pi[$. Construire les points M, M_1, M_2 et M'.
2. Dans cette question, M est un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
a. Montrer que $AM = MM'$.
b. Montrer que le rapport $\frac{z'-1}{z}$ est réel.
c. En déduire que les points A et M' sont symétriques par rapport à la tangente en M au cercle $\mathcal{C}$.
3. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon r et par Γ' le cercle de centre A et de rayon r^2.
a. Montrer que $f(\Gamma)$ est inclus dans Γ'.
b. Soit $Z = 1 + r^2e^{2it}$ avec $t \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $2z - z^2 = Z$.
c. En déduire que $f(\Gamma) = \Gamma'$.
d. Trouver la forme trigonométrique des solutions de (E) dans le cas où $r = 1$.

Exercice 34
Pour tout nombre complexe z, on définit : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$
1.a. Calculer $P(2)$.
b. Déterminer deux réels a et b tels que : $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 étant la solution ayant une partie imaginaire positive.
Vérifier que : $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
3.a. Placer dans le plan, muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$, les points A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2, et I le milieu de $[AB]$.
b. Démontrer que le triangle OAB est isocèle direct. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.
c. Calculer l'affixe z_I de I, puis le module de z_I.
d. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 35
Soit A le point d'affixe 2i et f l'application du plan $(O;\ \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{2iz-5}{z-2i}$$

1. Démontrer que f admet deux points invariants.
2. Démontrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
3. Démontrer que la droite de repère $(O;\overrightarrow{e_2})$, privée de A, est globalement invariante par f.
4.a. Démontrer que : $|z'-2i| \times |z-2i| = 9$.
b. En déduire l'image par f du cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon R.
Déterminer R pour que $(\mathcal{C})$ soit globalement invariant par f.

Exercice 36
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. On considère les points A, B, C deux à deux distincts dont les affixes respectives sont les nombres complexes a, b, c.
1. M étant le point du plan d'affixe le nombre complexe z, exprimer en fonction de z :
a. l'affixe z' du point M' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$;
b. l'affixe z'' du point M'' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.
2. Que peut-on dire du triangle ABC si les nombres complexes a, b, c vérifient :

$$\alpha.\ \frac{c-a}{b-a} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \beta.\ \frac{c-a}{b-a} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$$

3. Établir que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice 37
Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose* $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$, *où x, x', y, y' sont des nombres réels.*
1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{OM'}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $Re(z'\overline{z}) = 0$.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $Im(z'\overline{z}) = 0$.
Applications
3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. *Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs* $\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{ON}$ *soient orthogonaux ?*
4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$. *On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.*
a. Montrer que $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -\overline{z}^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|$.
b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice 38
Pour tout nombre complexe distinct de 1 et de -1, *on pose :* $\varphi(z) = \dfrac{z}{1 - z^2}$
1.a Montrer que : $\varphi(z) \in \mathbb{R} \iff (z = \overline{z} \text{ et } z \notin \{1;\ -1\})$
b. Montrer que : $\varphi(z) \in i\mathbb{R} \iff (z = -\overline{z} \text{ ou } z.\overline{z} = 1 \text{ avec } z \notin \{1;\ -1\})$
2. Soit θ *un réel de* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
a. Justifier que $\varphi(e^{i\theta})$ *est un imaginaire pur.*
b. Déterminer le module et un argument de $\varphi(e^{i\theta})$.
c. On pose pour tout naturel $n \geq 1$ *et pour tout* θ *de* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(i\varphi(e^{i\theta})\right)^k$
Calculer $S_n(\theta)$ *et montrer que* $S_n(\theta)$ *converge pour* θ *de* $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Déterminer pour ces valeurs la limite de $S_n(\theta)$, *en fonction de* θ, *lorsque n tend vers* $+\infty$.

Exercice 39
1. Le plan complexe P est rapporté au r.o.n.d $(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. *Au nombre complexe* α, *on associe le point A d'affixe* α.
a. Quel est l'ensemble des points A tels que: $|\alpha| = |\alpha - 1|$ *?*
b. Démontrer que lorsque $|\alpha| = |\alpha - 1|$ *alors on a l'égalité:* $\arg \alpha + \arg(\alpha - 1) \equiv \pi\ (2\pi)$.
2. ***Application:*** *On veut résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation:* $z^3 = i(z-1)^3$ ***(1)***.
a. Quelle relation existe-t-il entre les modules de α *et* $\alpha - 1$ *si* α *est une solution de l'équation* ***(1)****?*
b. A quel ensemble appartiennent donc les points images des solutions de l'équation ***(1)****?*
c. On pose $\arg(\alpha) = \theta$. *Calculer* θ *lorsque la relation* ***(1)*** *est vérifiée.*
d. En utilisant les résultats précédents construire les points images des solutions de ***(1)*** *dans le plan P puis donner les solutions sous formes trigonométriques.*

Exercice 40
Soient α *et* β *deux nombres complexes quelconques. On pose* $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ *et pour tout complexe z :*
$$f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$$
1. Montrer que $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$. *(On notera que* $1 + j + j^2 = 0$ *et* $j^3 = 1$*).*
2.a. En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$.
b. Montrer que l'un au moins des réels $|f(1)|$, $|f(j)|$ *et* $|f(j^2)|$ *est supérieur ou égal à 1.*
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$. *ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et tel que l'affixe de A soit un réel r strictement positif fixé. I et J sont deux points quelconques du plan d'affixes respectives a et b. Dans cette question on prend :*
$$\alpha = -\frac{a + b}{r} \quad et \quad \beta = \frac{ab}{r^2}$$
a. Montrer que les affixes respectives de B et C sont $r.j$ *et* $r.j^2$.
b. Montrer que $BO \times BI \times BJ = r^3|f(j)|$. *Calculer de la même manière* $CO \times CI \times CJ$ *et* $AO \times AI \times AJ$.
c. Montrer que le triangle ABC a au moins un sommet S vérifiant : $SO \times SI \times SJ \geq r^3$.

Exercice 41
Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives 1, i, –1, –i.
1. Montrer que le point M d'affixe le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ *est sur le cercle de centre B et de rayon 1 si et seulement si* $r\cos\theta = \frac{1}{2}$ *ou* $r = 0$.
2. Montrer que le produit $P = MA \times MB \times MC \times MD$ *est égal à* $|z^4 - 1|$.

3. En déduire une condition (portant sur r et θ) pour que P soit égal à 1.
4. Déterminer les points M de l'axe des réels tels que P est égal à 1.
5. Déterminer les points M du cercle de centre O, de rayon 1 tels que P est égal à 1.

Exercice 42
Soient a et b deux nombres complexes non nuls, A et B leurs images respectives dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
1.a. Démontrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $\overline{a} \times b$ est un nombre réel.
b. Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un réel si seulement si les points O, A et B sont alignés ou si $OA = OB$.
2. On suppose dans cette question que les points O, A et B ne sont pas alignés et que les nombres complexes a et b ont pour module 1. Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel strictement positif.
3. **Application**
Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.
a. Calculer, en fonction de z_1 et z_2, l'affixe Z du barycentre I du système $\{(M_1, |z_1|);\ (M_2, |z_2|)\}$.
b. Démontrer que $\dfrac{Z^2}{z_1 z_2}$ est un nombre réel.
c. En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1 O M_2}$.

Exercice 43
Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
1. On pose : $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.
a. Démontrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation (E) :
$$Z^2 + Z - 1 = 0$$
b. Exprimer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
c. Résoudre (E) et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
2. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixe 1, z_0, z_0^2, z_0^3 et z_0^4 dans plan complexe $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
a. Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec la droite de repère $(O;\ \overrightarrow{e_1})$.
Démontrer que l'affixe de H est $\cos\frac{2\pi}{5}$.
b. Soit (Γ) le cercle de centre Ω d'affixe $\left(-\frac{1}{2}\right)$ et passant par le point B d'affixe i. Le cercle (Γ) coupe la droite de repère $(O;\ \overrightarrow{e_1})$ en M et N, M étant le point d'abscisse positive.
Démontrer que M et N ont pour affixes respectives α et β et que H est le milieu de $[OM]$.
c. En déduire une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0.

Exercice 44
On considère (E) : $m^2z^2 - m^3z + 1 - m^2i = 0$, m est un paramètre complexe.
1. Montrer que $\forall m \in \mathbb{C}$, $m^6 + 4im^4 - 4m^2 = m^2(am^2 + b)^2$, a et b deux coefficients à préciser.
2. Déterminer en fonction de m les 2 racines de (E) et la valeur de m pour laquelle ces racines n'existent pas.
3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (E) a une racine double.
4. Déterminer les ensembles E_1 des points M_1 et E_2 des points M_2 quand m décrit $\mathbb{R}^*$.
5. Dans cette question on suppose que $m = e^{i\theta}$. Montrer que $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.
Calculer les racines z_1 et z_2 en fonction de θ et les écrire sous forme trigonométrique.
Déterminer les ensembles E_3 des points M_1 et E_4 des points M_2 quand θ décrit $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right[$.

Exercice 45
Soit l'équation (1) : $z^2 - 2e^{ia}z - 1 = 0$, avec $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
1.a. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'équation (1) admet des coefficients réels, puis résoudre (1) pour chacune de ces valeurs.
b. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles (1) admet une racine double. La résoudre.
2. Soit z et z' les solutions de (1). On pose : $U = (z+1)e^{-i\frac{a}{2}}$ et $U' = (z'+1)e^{-i\frac{a}{2}}$
a. Calculer $U + U'$ et $U.U'$.
b. En déduire que U et U' sont solutions de l'équation : $T^2 - \left(4\cos\dfrac{a}{2}\right)T + 2 = 0$
3. Montrer que $\forall a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, U et U' sont réels.
4. Montrer que $\arg(z+1) = \arg(z'+1)$.
En déduire la position des points A, M et M' d'affixes respectives -1, z et z'.

Exercice 46

Soit a un réel, l'équation $z^2 - 2pz + 1 = 0$ *où* $p = \sin a + i\cos a$ *a pour solutions* z_1 *et* z_2.

1. *Montrer sans calculer* z_1 *et* z_2 *que :* $|z_1| = \dfrac{1}{|z_2|}$ *et* $arg(z_1) = -arg(z_2)\ [2\pi]$
2. *Déterminer a pour que* z_1 *et* z_2 *soient réels puis pour que* z_1 *et* z_2 *soient imaginaires purs.*
3. *Calculer* $|z_1 - p|$ *et* $|z_2 - p|$ *puis* $arg(z_1 - p)$ *et* $arg(z_2 - p)$.
4. *Montrer que* $|z_1 + i| = |z_2 + i|$.

Exercice 47

Soit m un paramètre complexe (E_m) *et l'équation d'inconnue z :* $z^2 - (im + \overline{m})z + im.\overline{m} = 0$.

1.a. Résoudre l'équation (E_m).

b. Comment choisir m pour que (E_m) *admette une racine double ?*

2. Soient A, M' et M'' les points d'affixes respectives $1 + i$, *z' et z''.*

a. Montrer que $\frac{z''-z'}{1+i}$ *est imaginaire pur. En déduire que* $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{M'M''}$.

b. Montrer que AM' = AM''. En déduire que (OA) *est la médiatrice de* $[M'M'']$ *si M' ≠ M''.*

3. Soit l'application définie par :

$$f_m : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array} \quad tel\ que\ z' = imz + \overline{m}$$

a. Déterminer m pour que f_m *soit une translation.*

b. Déterminer m pour que f_m *soit une rotation.*

c. Déterminer m pour que f_m *soit une homothétie.*

Exercice 48

Soit $m \in \mathbb{C}^*$ *et :* $F_m : P \longrightarrow P;\ M(z) \longmapsto M'(z')$ *tel que* $z' = m^3 z + (1 + m + m^2)$

1. *Déterminer les valeurs de m pour lesquelles* F_m *est une translation dont on donnera le vecteur.*
2. *On suppose que* $m = e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$. *Montrer dans ce cas que* F_m *admet un point invariant unique d'affixe :*

$$\omega = \frac{1}{2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

3. *Déterminer les valeurs de m pour lesquelles* F_m *est une rotation d'angle* $\frac{\pi}{2}$. *Caractériser* F_m *dans chaque cas.*
4. *On pose* $m = x + iy$.

a. Déterminer une relation entre x et y pour que m^3 *soit un réel.*

b. En déduire l'ensemble des points M d'affixe m pour lesquels F_m *est une homothétie.*

c. Caractériser cette homothétie dans les deux cas suivants : $m = 1 + i\sqrt{3}$ *et* $m = -1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 49

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $Z^2 - 2iZ - (1 + m^2) = 0$, *où m un réel non nul.*

2. Pour tout nombre complexe Z, on pose : $f(Z) = Z^3 - 3iZ^2 - (3 + m^2)Z + i(1 + m^2)$.

a. Vérifier que $f(i) = 0$. *En déduire une factorisation de* $f(Z)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $f(Z) = 0$.

3. le plan est rapporté à un r.o.d $(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. *On considère les point* $A(i)$, $M(i + m)$ *et* $M'(i - m)$ *.*

a. Vérifier que A est le milieu du segment $[MM']$.

b. Montrer que le triangle OMM' est isocèle.

c. Déterminer les valeurs de m pour que le triangle OMM' soit équilatéral.

Exercice 50

Soit $\theta \in\ ]-\pi, \pi[$ *et (E) l'équation dans* $\mathbb{C}$ *définie par :* $iz^2 + (2\sin\theta)z - 2i(1 + \cos\theta) = 0$ *.*

1.a. Vérifier que: $\sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) = [i(1 + \cos\theta)]^2$ *.*

b. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, *l'équation (E). On note* z_1 *et* z_2 *les deux solutions de (E) avec* z_1 *réel tel que* $z_1 > 0$.

c. Écrire chacune des solutions z_1 *et* z_2 *sous forme exponentielle. En déduire que :* $\dfrac{z_2}{z_1} = e^{i(\pi-\theta)}$

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *supposé direct.*

Soient M_1 *et* M_2 *les points d'affixes respectives* z_1 *et* z_2 *solution de (E).*

a. Montrer que M_1 *et* M_2 *sont symétriques par rapport à la droite* $(O;\ \vec{v})$.

b. Déterminer l'ensemble des points M_1 *quand* θ *décrit* $]-\pi, \pi[$.

c. Déterminer les valeurs de θ *pour que le triangle* OM_1M_2 *est équilatéral.*

Exercice 51

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. *Soit dans P les points* M_1, M_2, M_3 *d'affixes respectives les complexes* z_1, z_2, z_3.

2. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral si et seulement si :

$$z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0 \text{ ou } j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } z_1 + j^2 z_2 + j z_3 = 0.$$

3. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - (1 + a + i\,a)\,z^2 + a\,(1 + i + i\,a)z - i\,a^2 = 0$ (a : un paramètre complexe).

a. Vérifier que 1 est une solution de (E).

b. Calculer les deux autres solutions z' et z'' de (E).

c. Soit dans P les points A, B et C d'affixes les solutions de (E). Déterminer le complexe a de telle manière que le triangle ABC soit équilatéral (on pourra utiliser la question 1.)

Exercice 52

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue Z :
$Z^2 - 2(1+ 3\cos\theta)\,Z + 5\cos^2\theta + 6\cos\theta + 5 = 0$. ($\theta$ étant un paramètre réel).
On désignera par Z ' et Z '' les solutions de cette équation.

2. Déterminer, dans le plan muni P d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$, les ensemble (E_1) et (E_2) des points M' et M'' d'affixes Z' et Z'' lorsque θ décrit $\mathbb{R}$. Construire (E_1) et (E_2).

3. Montrer que $OM'^2 = 5\left(\cos\theta + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}$; en déduire les points M' pour les quels OM' est minimum.

Exercice 53

Soit θ un réel de 1'intervalle $[0, 2\pi[$.

1.a. Vérifier que $\left(e^{i\theta} - i\right)^2 = -1 + e^{2i} - 2ie^{i\theta}$.

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2iz + 2ie^{i\theta} - e^{2i} = 0$.

3. Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i - e^{i\theta}$.

a. Déterminer et construire l'ensemble (C_1) décrit par le point M_1 quand θ varie dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

b. Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[M_1M_2]$.

c. Déduire 1'ensemble (C_2) décrit par le point M_2 quand θ varie dans $[0, 2\pi[$. Construire (C_2)

3. a. Montrer que $M_1M_2^2 = 8(1 - \sin\theta)$.

b. Déduire la valeur de θ pour laquelle M_1M_2 est maximale.

Exercice 54

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^* - \left\{\frac{1}{4}\right\}$ et A le point d'affixe a dans un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.

1. Vérifier que l'équation $E_a : Z^2 - Z + \alpha = 0$ admet des solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.

2. On désigne par B et B' les images des solutions de E_a .

a. Déterminer la nature et caractériser l'application $f : B \longrightarrow B'$.

b. Quel est le lieu géométrique du point A lorsque B et B' décrivent un même cercle de centre O et de rayon R ?

c. Quelle est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\vec{u};\ \overrightarrow{OA}\right)$ lorsque B et B' décrivent une même demi-droite d'origine O ?

Exercice 55

1. Montrer que pour tout réel α on a : $1 + 2i\sin\alpha\, e^{i\alpha} = e^{2i}$.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose : $f(z) = z^3 + 4z^2 + (5 - e^{2i\alpha})z - 4i\sin\alpha\, e^{i\alpha}$.

a. Montrer que $f(-2) = 0$.

b. Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$.

3. On suppose dans cette question que $\alpha \in]0;\ \pi[$. Donner les solutions de f(z) = 0 sous forme exponentielle.

4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $-2,\ -1 + e^{i\alpha},\ -1 - e^{i\alpha}$.

a. Montrer que OBAC est un rectangle.

b. Trouver α pour que OBAC soit un carré.

c. Montrer que B et C sont symétriques par rapport à un point fixe I.

Exercice 56

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$ supposé direct. On considère les points A et B d'affixes respectives i et – i . A tout point M (z) on associe par l'application f le point M' tel que :

$$z' = \frac{z + iz\bar{z}}{1 + z\bar{z}}$$

I -1. Déterminer les points invariants par f.

2. Montrer que les points A, M et M' sont alignés.

3. a. Montrer que pour tout point $z \in \mathbb{C}* \setminus \{-i\}$, on a : $arg(z') = \frac{\pi}{2} - \left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$

b. Déduire que si M décrit le cercle $C_{[OB]}$ de diamètre $[OB]$ alors M' décrit une droite à préciser.
c. Donner la construction du point M' image de $M \in C_{[OB]}$ ($M \neq O$ et $M \neq B$)
4.a. Montrer que pour tout $z \neq i$, on a : $|z' - z| = |z' - i| \Leftrightarrow M \in C(O,1)$.
b. Déduire que si $M \in C(O,1)$ alors $M' = A * M$.
II - Soit M un point d'affixe $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et $M' = f(M)$.
1. *Montrer que :* $z' = \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}i(1 + \sin\theta)$.
2.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2e^{i\theta}z^2 - \left(1 + ie^{i\theta}\right)z + i + e^{i\theta} = 0$. On note z_1 et z_2 les solutions de (E) avec z_2 est la solution non imaginaire de l'équation.
b .Écrire la solution z_2 sous forme exponentielle.
c. Déterminer l'ensemble (E) des points $M_2(z_2)$ quand θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
d. Soit N le point d'affixe $\cos\theta$. Montrer que $OM'NM''$ est un losange.

Exercice 57
Soit dans C l'équation, à paramètre $\alpha \in [0, 2\pi[$, (E) : $z^2 - i(2\sin\alpha + 1)e^{-i\alpha}z - 2(\sin\alpha)e^{-2i\alpha} = 0$.
1.a. Montrer que $\Delta = [i(2\sin\alpha - 1)e^{-i}\ ]^2$.
b. En déduire les solutions de l'équation E, soi z' la solution dont le module est égal à 1 et z'' l'autre solution.
c. Mettre z' et z'' sous forme exponentielle.
2. Le plan complexe P est rapporté à un r.o.n.d $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points M' et M'' d'affixes z' et z''.
a. Quel est l'ensemble C' des points M' lorsque α varie dans $]\pi; 2\pi[$.
b. Quel est l'ensemble C'' des points M'' lorsque α varie dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
3. On pose $Z = (2\sin^2\alpha + \sin\alpha) + i(\sin^2\alpha + \cos\alpha)$.
a. Mettre Z sous forme exponentielle en utilisant ce qui précède.
b. En déduire l'affixe du milieu de [M'M''] en fonction de α.
4.a. Calculer $\frac{z'}{z''}$. Que peut on dire des points M', M'' et O ?
b. Pour quelles valeurs de α, O est le milieu de [M'M''] ?

Exercice 58
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z suivante : $z^2 + i\sqrt{3}z - i = 0$.
2. Soit θ un réel de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On considère l'équation d'inconnue z : (E_θ) $z^2 + (2i\sin\theta)z - 2i\cos\theta = 0$.
a. Vérifier que $(\cos\theta + i)^2 = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta$.
b. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation (E_θ).
3. Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives : $z_1 = i$, $z_2 = \cos\theta + (1 - \sin\theta)i$, $z_3 = -\cos\theta - (1 + \sin\theta)i$.
a. Écrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle.
b. Déterminer le réel θ de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ pour que A, B et C soient alignés.
c. Déterminer le réel θ de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ pour que B et C appartiennent à un même cercle de centre O. Quel est le rayon de ce cercle ?

Exercice 59
Soit $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et (E_θ) l'équation: $z^2 - (3\cos\theta + 1 + i\cos\theta)z + 2\cos\theta(\cos\theta + 1 + i\cos\theta) = 0$.
1.a. Montrer que l'équation E_θ admet une solution réelle z_1 que l'on calculera.
b. Déterminer l'autre solution z_2.
2. Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs z_1 et z_2.
a. Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
b. Montrer que $M_1M_2{}^2 = 2\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.
c. Pour quelle valeur de θ la distance entre M_1 et M_2 est maximale ?

Exercice 60
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
1.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+i)z^2 - \left(4\sqrt{2}\cos\alpha\right)z - 4i(1+i) = 0$ où α est un paramètre réel de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On notera z_1 et z_2 les solutions telles que $\mathrm{Im}[(1+i)z_1] \geq 0$ et M_1 et M_2 leurs points images. On précisera la valeur de α pour laquelle l'équation admet une solution double.
b. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2.a. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M_1 et l'ensemble Γ_2 des points M_2 lorsque α décrit $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
b. Déterminer l'ensemble Δ décrit par le point I, milieu du segment $[M_1M_2]$, lorsque α décrit $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3.a. Montrer que lorsque $\alpha \neq 0$, la droite (M_1M_2) garde une direction fixe que l'on précisera.
b. Montrer que les ensembles Γ_1 et Γ_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.
4.a. Préciser l'angle de la rotation de centre O qui envoie M_2 en M_1.
b. Déterminer, en fonction de α, l'aire $S(\alpha)$ du triangle OM_1M_2. Pour quelle valeur de α l'aire $S(\alpha)$ est-elle maximale ?

Exercice 61
1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation: $(1+i)z^2 - 2z + 1 - i = 0$.
2. Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$.
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l équation (E): $mz^2 - 2z + \overline{m} = 0$ où $\overline{m}$ est le conjugué du nombre complexe m.
3. Dans toute la suite, on prend $m = \sqrt{2}e^{i\alpha}$ où α est un réel.
a. Montrer que les racines z' et z" de (E) s'écrivent sous la forme : $z' = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ et $z'' = e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.
b. Dans le plan complexe $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par M' et M" les points d'affixes respectives z' et z" et par M le point d'affixe $z' + z''$. Montrer que $\frac{z'}{z''} = i$. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux.
c. Montrer que le quadrilatère $OM'MM''$ est un carré.

Exercice 62
Dans le plan complexe rapport au repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$ direct, (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1.
1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, où $\alpha \in [0; 2\pi]$.
On considère l'application f qui tout point M de (C), associe $f(M) = MA \times MB$.
a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{2i} - 1 = 2i \sin\alpha\, e^{i\alpha}$.
b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{2i\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.
c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.
3. a. En utilisant 2.c, montrer qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels f(M) est minimal. Donner cette valeur minimale.
b. En utilisant 2.c, montrer qu'il existe un seul point M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel f(M) est maximal. Donner cette valeur maximale.

Exercice 63
1. Expliciter, sous forme trigonométrique, les trois racines cubiques de chacune des deux équations :

$$a.\ \ u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad b.\ \ u^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

2. Établir, pour tout réel α, l'égalité : $1 + e^{i\alpha} = 2e^{i\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}$
3. Résoudre l'équation $(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$ (On pourra poser $(z-1)^3 = v$).

Exercice 64
Soit α un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) : $(1+iz)^3(1 - i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1 + i\tan\alpha)$.
1. Soit z une solution de (E). Montrer que $|1+iz| = |1-iz|$. En déduire que z est réel.
2.a. Exprimer $\frac{1+i\tan}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.
b. Soit z un réel ; on pose $z = \tan\varphi$, avec $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
Montrer que (E) équivaut à une équation d'inconnue φ , et la résoudre.
c. Déterminer les solutions z_1, z_2, z_3 de (E).

Exercice 65
1. Écrire sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe : $a = 16(1-i)$
2. Pour λ nombre réel quelconque, on pose : $z_\lambda = 1 + i + 2\sqrt{2}e^{i\lambda} = x_\lambda + iy_\lambda$
a. Calculer les réels x_λ et y_λ en fonction de λ.
b. Déterminer l'ensemble des points (C) des points M_λ de coordonnées (x_λ, y_λ) quand λ décrit $[0, 2\pi]$.
3. Montrer que les solutions de l'équation $\left(z - (1+i)\right)^3 = a$ sont les affixes des points de (C).

Exercice 66

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2-(1+2i)z-1+i=0$. *On note* z_1 *et* z_2 *les solutions.*

2. Pour n entier, $n\geq 2$, *déterminer les racines nièmes de* z_1 *et de* z_2.

3. Soit M_n *le point d'affixe* z_1^n, P_n *le point d'affixe* z_2^n *et O l'origine du repère. Déterminer les entiers n tels que le triangle* OM_nP_n *soit rectangle.*

Exercice 67

Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ *par :* $P(z)=z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$.

1. *Montrer que pour tout nombre complexe z distinct de 1, on a :* $P(z)=\dfrac{1-z^7}{1-z}$

2. Déterminer les racines septièmes de l'unité; en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ *de l'équation* $P(z)=0$.

3. Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}$, *on a :*

$$P(z)=\left(z^2-2\cos\frac{2\pi}{7}z+1\right)\left(z^2-2\cos\frac{4\pi}{7}z+1\right)\left(z^2-2\cos\frac{6\pi}{7}z+1\right)$$

4. Montrer que : $P(z)=0 \iff \begin{cases} Z=z+\frac{1}{z} \\ Z^3+Z^2-2Z-1=0\end{cases}$

En déduire que $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ *et* $\cos\frac{6\pi}{7}$ *sont les racines de l'équation* (E) : $8x^3+4x^2-4x-1=0$.

5. On pose $\omega=e^{i\frac{2\pi}{7}}$ *et pour tout z de* $\mathbb{C}$: $f(z)=P(z)-(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)(z-\omega^5)(z-\omega^6)$.

a. Montrer que $\forall z\in\mathbb{C}$, *on a* $f(z)=0$. *En déduire que :* $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)(1-\omega^5)(1-\omega^6)=7$.

b. Montrer par un calcul de modules que : $\sin\frac{\pi}{7}\times\sin\frac{2\pi}{7}\times\sin\frac{3\pi}{7}\times\sin\frac{4\pi}{7}\times\sin\frac{5\pi}{7}\times\sin\frac{6\pi}{7}=\frac{7}{2^6}$.

Exercice 68 (plus général que le précédent)

1.a. α *est un nombre réel. Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation d'inconnue z:* $z^2-2z\cos\alpha+1=0$.

b. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation : $z^{2n}-2z^n\cos\alpha+1=0$ *dans laquelle n est un entier naturel non nul donné.*

2. Pour tout naturel non nul n, pour tout réel α, *pour tout complexe z, on pose :* $P_n(z)=z^{2n}-2z^n\cos\alpha+1$.

a. *Montrer que, pour tous z, α et n, on a :* $P_n(z)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2-2z\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right]$.

b. *Calculer* $P_n(1)$ *et en déduire que :* $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$

c. *Pour tout α de* $]0,\pi[$ *et pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :* $H_n(\alpha)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)$.

Montrer que, pour α non nul, on a : $2^{n-1}H_n(\alpha)=\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$

d. Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ *lorsque* α *tend vers 0 ?*

e. En déduire que pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $\sin\frac{\pi}{n}\times\sin\frac{2\pi}{n}\times\ldots\times\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 69

On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :* (E_n): $z^n=(iz+2i)^n$ *où n est un entier naturel non nul.*

1. a. Déterminer sous forme exponentielle les solutions z_1 *et* z_2 *de* (E_2). *On note* z_1 *la solution telle que* $Im(z_1)>0$.

b. Pour tout p de $\mathbb{N}$, *on pose :* $u_p=z_1^p+z_2^p$.

* *Calculer* u_p *en fonction de p ;*

** *Déterminer les valeurs de p pour lesquelles, on a :* $u_p=\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}$

2. On considère dans le plan complexe $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, *on donne les deux points* $A(-2)$ *et* $M(z)$.

a. Montrer que si z est solution de (E_n) *alors* $OM=AM$.

b. Déduire que les solutions de (E_n) *s'écrivent sous la forme* $-1+ia$ *avec* $a\in\mathbb{R}$.

3.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* (E_n).

b. *Montrer que les solutions de* (E_n) *s'écrivent sous la forme :* $z_k=-1+i.\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)$ *où* $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Exercice 70

On considère le polynôme d'indéterminée z : $P(z)=(z+i)^n-(z-i)^n$. *On note S l'ensemble des solutions de l'équation* $P(z)=0$ *dans* $\mathbb{C}$.

1. Déterminer le degré du polynôme P.
2. Montrer que $z \in S \iff z \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $P(2i)$.
4. *En supposant n impair, en déduire l'égalité :* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(4+cot^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)=\frac{3^n-1}{2n}$.

Exercice 71
Dans le plan complexe rapport au repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$ *direct. Soient les deux points A et B d'affixes respectives 1 et* -1.
1. Pour tout complexe z et pour tout entier naturel $n \geq 2$, *on pose* $P_n(z)=(z+1)^n-(z-1)^n$.
a. Montrer que si z_0 *est une racine de* $P_n(z)$ *alors* $\overline{z_0}$ *et* $-z_0$ *sont également des racines de* $P_n(z)$.
b. Montrer que toute racine de $P_n(z)$ *est imaginaire pure.*
c. Montrer l'équivalence : $\frac{z+1}{z-1}=e^{i\alpha} \iff \begin{cases}\alpha \neq 2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\ z=-i\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{cases}$.
d. Déterminer le coefficient a_n *de* z^n *dans le développement polynomial de* $P_n(z)$. *En déduire que pour tout nombre complexe z, on a :*

$$P_n(z)=2n\prod_{k=1}^{n-1}\left(z+i\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

e. Montrer que la suite définie par son 1er terme $u_n=2n\times i^{n-1}\times\prod_{k=1}^{n-1}\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ *ne prend qu'un nombre fini de valeurs que l'on déterminera. En déduire la valeur du produit :*

$$Q=\prod_{k=1}^{10}\tan\left(\frac{k\pi}{11}\right)$$

Exercice 72
Dans un plan (P), rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$, *on donne deux points fixes et distincts F et F'. On suppose de plus que la droite (FF') ne passe pas par O et que les distances OF et OF' ne sont pas égales.*
On désigne par f et f' les affixes de F et F'. Soit l'équation du second degré en X : $X^2-\lambda(f+f')X+\lambda ff'=0$
(λ *étant un réel non nul). On désigne par m et m' les racines de cette équation et par M et M' leurs images.*
1. Quelles relations lient m, m', λ*, f et f' ? En déduire que les couples de droites* $(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OF'})$ *et* $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})$ *ont les mêmes bissectrices.*
2. *Vérifier que :* $\dfrac{(m-f)(m-f')}{m^2}=\dfrac{(m'-f)(m'-f')}{m'^2}=1-\dfrac{1}{\lambda}$.
En déduire que, si $\lambda\in\,]0,1[$, *la droite (OM) est une bissectrice de* $(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FM'})$ *et (OM') une bissectrice de l'angle* $(\overrightarrow{M'F},\overrightarrow{M'F'})$.
3. Soit s l'affixe du milieu S de $[MM']$. *Quel est le lieu du point S lorsque* λ *varie ? Démontrer que le point* Φ,
d'affixe φ, *définie par :* $\dfrac{2}{\varphi}=\dfrac{1}{f}+\dfrac{1}{f'}$ *n'appartient pas à cet ensemble (On ne cherchera pas à construire* Φ*).*
4. *Établir la relation :* $s(s-\varphi)=\dfrac{(m-m')^2}{4}$. *Quelle est la bissectrice de* $\left(\overrightarrow{SO},\overrightarrow{S\Phi}\right)$?
5. On suppose désormais que, a étant une longueur donnée :

$$\left(\vec{e_1},\overrightarrow{OF}\right)=\frac{\pi}{4}\ ,\quad \left(\vec{e_1},\overrightarrow{OF'}\right)=\frac{3\pi}{4}\ ,\quad f+f'=2a\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

Construire F et F'. Calculer φ *et démontrer que* Φ *est le symétrique de O par rapport à la droite (FF').*
6. *On pose* $\theta=\left(\vec{e_1},\overrightarrow{OM}\right)$ *et* $r=OM$. *Démontrer que :* $r=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sin(2\theta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{8}-\theta\right)}$

Exercice 73
Soit n un entier naturel non nul. On considère la suite (H_n) *définie par :* $H_n=1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$.
1. Montrer que les suites (H_n) *et* $\left(H_n+\frac{1}{n}\right)$ *sont adjacentes.*
2. Pour tout réel x, on pose : $G_n(x)=i[(x-i)^{2n+1}-(x+i)^{2n+1}]$
a. Montrer que : $G_n(x)=2(2n+1)x^{2n}-2C_{2n+1}^{2n-2}x^{2n-2}+\cdots+2(-1)^{n-p}C_{2n+1}^{2p}x^{2p}+\cdots+2(-1)^n$
b. Montrer que les solutions de l'équation $G_n(x)=0$ *s'écrivent sous la forme :*

$$x_k=-\cot\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\quad \text{avec } k\in[\![1,2n]\!]$$

c. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_{2n-k} = -x_{k+1}$.

$d.\ En\ déduire\ que :\ G_n(x) = \lambda\left(\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\right)$ $où\ \lambda\ est\ un\ entier\ naturel.$

3. $En\ exploitant\ les\ questions\ 2.a.et\ 2.b.,établir\ que :\ \sum_{k=1}^{n} cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n(2n-1)}{6}$.

4. $En\ utilisant\ la\ double\ inégalité :\ cot^2(\theta) < \frac{1}{\theta^2} < 1 + cot^2(\theta)\quad pour\ \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$En\ déduire\ que :\ \frac{\pi^2}{6} \times \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2} \leq H_n \leq \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{\pi^2}{6} \times \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2}$.

5. En déduire la limite de la suite (H_n).

Exercice 74

1.a. Écrire sous forme exponentielle les racines sixièmes de 1.

b. Calculer $(1+i)^6$ *et montrer que* $z^6 = -8i$ *signifie* $\left(\frac{z}{1+i}\right)^6 = 1$.

c. En déduire les racines sixièmes de $-8i$.

2. Pour $z \in \mathbb{C}$, *on pose :* $P(z) = z^5 + (1+i)z^4 + 2iz^3 + (-2+2i)z^2 - 4z - 4 - 4i$.

a. Vérifier que : $P(z).(z-1-i) = z^6 + 8i$.

b. Résoudre l'équation (E) : $P(z) = 0$.

c. Mettre $P(\sqrt{2})$ *sous forme algébrique, en déduire que :* $|P(\sqrt{2})| = 4\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

d. Justifier l'égalité : $P(z) = \left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right) \times \left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{11}{12}}\right) \times \ldots \times \left(z - \sqrt{2}e^{i\frac{23}{12}}\right)$.

e. En déduire que : $sin\frac{7\pi}{12} sin\frac{11\pi}{12} sin\frac{15\pi}{12} sin\frac{19}{12} sin\frac{23\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{32}$.

Exercice 75

Soit l'équation (E) : $(z+j)^n - (z+j^2)^n = 0$; $j = e^{\frac{2i\pi}{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

1.a. Vérifier que : $\frac{z+j}{z+j^2} = u$ *et* $u \neq 1 \iff z = -j\frac{uj-1}{u-1}$.

b. Montrer que z est solution de (E) signifie il existe k de $\{1, 2, 3; \ldots, n\}$ *tel que :* $\frac{z+j}{z+j^2} = e^{\frac{2i}{n}}$, *en déduire que les solutions de (E) sont :*

$$z_k = \frac{sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{3}\right)}{sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\quad avec\ \ 1 \leq k \leq n-1$$

2. On suppose que $n = 3p$; $p \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer z_p ; *en déduire que :* $(1+j)^{3p} = (1+j^2)^{3p} = (-1)^p$

b. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer : $(1+j)^{3p}$ *et* $(1+j^2)^{3p}$

$En\ déduire\ que :\ 2(-1)^p = 2\sum_{k=0}^{p} C_{3p}^{3k} - \sum_{k=0}^{p-1} C_{3p}^{3k+1} - \sum_{k=0}^{p-1} C_{3p}^{3k+2}\quad (On\ pourra\ remarquer\ que\ 1 + j + j^2 = 0).$

$c.\ En\ remarquant\ que\ 2^{3p} = (1+1)^{3p}\ et\ en\ utilisant\ la\ question\ 2.b.,montrer\ que :\ \sum_{k=0}^{p} C_{3p}^{3k} = \frac{2^{3p} + 2(-1)^p}{3}$.

$d.\ Montrer\ que :\ \lim_{p\to+\infty} \frac{C_{3p}^0 + C_{3p}^3 + \cdots + C_{3p}^{3p}}{2^{3p}} = \frac{1}{3}$

Exercice 76

1. Donner les solutions de l'équation (1) : $z^2 + z + 1 = 0$ *sous forme trigonométrique.*

2. On considère, dans $\mathbb{C}$, *l'équation (2) suivante :* $z^{2n} + z^n + 1 = 0$ *(où* $n \in \mathbb{N}^*$*).*

a. Montrer que les solutions de l'équation (2) peuvent s'écrire sous la forme :

$$z_k = e^{i\left(\frac{2\varepsilon}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\ \ avec\ \ \varepsilon^2 = 1\ \ et\ \ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

b. Établir que : $z_0 \times z_1 \times \ldots \times z_{n-1} = 1$.

3. Dans le plan complexe, on donne les points $A(i)$ *et* $M_k(z_k)$ *et l'ensemble :*

$$(\mathcal{D}) = \{M(z) du\ plan\ tel\ que\ z = (1+i)\alpha\ \ avec\ \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

a. Soit (a, b) *de* $\mathbb{R}^2$. *Établir que :* $M(a+ib) \in (AM_k) \iff 1 - b = a \times cot\left(\frac{\beta_k}{2}\right)$ *avec :*

$$k \in [\![0, n-1]\!],\ \ \varepsilon^2 = 1,\ \ \theta_k = \frac{2\varepsilon\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\quad et\quad \beta_k = \frac{\pi}{2} + \theta_k.$$

b. Est-il possible d'avoir $z_k = 1$ *?*

c. En déduire que $(AM_k) \cap (\mathcal{D}) \neq \emptyset$.

4. *Montrer que :* $M(z) \in (AM_k) \cap (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \ z = \dfrac{1+i}{1+cot\left(\frac{\beta_k}{2}\right)}$.

5. *Prouver que :* $cot\left(\dfrac{\beta_k}{2}\right) = \dfrac{ie^{i\beta_k}+i}{e^{i\beta_k}-1}$.

6. *En déduire que :* $\dfrac{1+i}{1+cot\left(\frac{\beta_k}{2}\right)} = \dfrac{e^{i\theta_k}(i-1)-(1+i)}{e^{i\theta_k}(i-1)+(1+i)}$.

7. *En déduire que :* $M(z) \in (AM_k) \cap (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \begin{cases} z \text{ solution de l'équation} \\ \left(\dfrac{z-i}{1-z}\right)^n + \left(\dfrac{1-z}{z-i}\right)^n = 1 \end{cases}$

Exercice 77

Partie I : *Dans le plan complexe* $(O;\ \vec{u},\vec{v})$*, on donne le point* $A(i)$ *et l'application* φ *définie par :*

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}\setminus\{A\} & \longrightarrow & \mathcal{P}\setminus\{A\} \\ M(z) & \longrightarrow & M'(z') \end{array} \quad \text{tel que} \quad z' = \frac{iz}{z-i}$$

1. a. Montrer que : $\overline{z'} = z' \Leftrightarrow |z|^2 - Im(z) = 0$ *et* $\overline{z'} = -z' \Leftrightarrow \overline{z} = -z$ *puis déterminer les deux ensembles :* $(\mathcal{D}) = \{M/\ M' \in (O,\vec{v})\}$ *et* $(\mathcal{C}) = \{M/\ M' \in (O,\vec{u})\}$.

b. Montrer que φ *est une bijection et que* $\varphi^{-1} = \varphi$ *et déterminer l'image du cercle* $\mathcal{C}(O,r)$ *par* φ.

2. Dans cette question, on pose $z = e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a. Écrire z' sous forme trigonométrique.

b. Déterminer le lieu du point M' lorsque θ *parcourt* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

c. Soient les deux points $A'(-i)$ *et* $N(\overline{z})$. *Montrer que :* $\dfrac{z'-i}{\overline{z}+i} = \dfrac{-1}{|z-i|^2}$ *puis montrer que les droites* (AM') *et* $(A'N)$ *sont parallèles. Expliquer comment construire le point M' connaissant la position du point M.*

Partie II : *Soit n un élément de* $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. *On considère dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $(E)\ \ (z-i)^n = (iz)^n$.

1. Montrer que les solutions de (E) sont les nombres : $z_k = \frac{1}{2}(i - \tan\theta_k)$ *avec* $\theta_k = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}$ *et* $k \in [\![0, n-1]\!]$.

2. On suppose dans cette question que $n = 4p+1$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$. *On pose* $P(z) = (z-i)^n - (iz)^n$.

a. Montrer que : $P(z) = (1-i)\displaystyle\prod_{k=0}^{4p}(z - z_k)$

b. En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=0}^{4p} z_k = \frac{i-1}{2}$

c. Prouver que : $\displaystyle\prod_{k=0}^{4p}\frac{1}{cos\,\theta_k} = 2^{4p}\left(sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 78

Soit $P(x) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ *un polynôme de degré* $n \geq 2$*, à coefficients complexes. Si* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *sont les racines de P, on pose :*

$$R = max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|) \quad \text{et} \quad A = max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$$

1. *Montrer que si z est une racine du polynôme P, alors on a :* $|z|^n \leq A\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|z|^k\right)$.

b. En déduire que si z est une racine de P, alors : $|z| \leq A+1$. *Quelle relation peut-on en déduire entre R et A ?*

2. ***Application :*** *Soit le polynôme* $Q(X) = (2+i)X^3 - 7iX^2 + (9i-2)X - 3i$.

a. En se basant sur les coefficients du polynôme Q, expliquer pourquoi on est sûr que les nombres complexes suivants : $5+2i$, $-2+4i$ *et* $4 - i\sqrt{2}$ *ne peuvent pas être racines du polynôme Q.*

b. Expliquer pourquoi on est en doute quant aux nombres complexes : $4+i$, $2-3i$.

Exercice 79

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. *Soit l'équation :* (E): $z^2 - az + b = 0$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. *On nommera z' et z'' les solutions de* (E).

Partie A : *Dans cette partie, on pose* $a = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i}$ *et* $b = 1$ *avec* $r \in [1, +\infty[$ *et* $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1.a. Vérifier que $re^{i\theta}$ *est une solution de* (E).

b. Trouver alors l'autre solution z'' de (E).

2. On considère les points A, B, M' et M'' d'affixes respectives (-1), 1, z' et z''. On suppose que M' appartient au cercle Γ de centre B et de rayon $\sqrt{2}$. Le but de cette question est de construire M''.

a. Prouver que $4\cos^2\theta = \left(r - \frac{1}{r}\right)^2$.

b.i. Montrer que $M'M'' = \sqrt{r^2 + \frac{1}{r^2} - 2\cos 2\theta}$.

ii. En déduire que $M'M'' = 2$.

c.i. Prouver que : $\dfrac{aff(\overrightarrow{AM'})}{aff(\overrightarrow{BM''})} = \dfrac{e^{2i\theta} - \left(r - \frac{1}{r}\right)e^{i\theta} - 1}{\left|\frac{1}{r}e^{-i\theta} - 1\right|^2}$

ii. En déduire que : $\dfrac{aff(\overrightarrow{AM'})}{aff(\overrightarrow{BM''})} = \dfrac{-2}{\left|\frac{1}{r}e^{-i} \ - 1\right|^2}$.

iii. Conclure que M'' appartient à une demi-droite dont on précisera l'origine et un vecteur directeur.

d. Expliquer comment construire le point M'' pour une position donnée de M' sur Γ.

***Partie B :** Dans cette partie, on prend* $a = 4i(1 + i\sin\theta)$ *et* $b = -8i\sin\theta$ *avec* $\theta \in]-\pi, \pi]$.

1. Résoudre (E).

2. On considère les points M, M' et M'' d'affixes respectives : $z = 2e^{i\theta}$, $z_1 = 2i\left(1 + e^{i\theta}\right)$ *et* $z_2 = 2i\left(1 - e^{-i} \ \right)$.

a. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M(z) quand θ décrit $]-\pi, \pi]$.

b.i. Exprimer z_1 en fonction de z.

ii. En déduire que M_1 est l'image de M par une rotation que l'on caractérisera.

iii. Déterminer alors l'ensemble $(\mathcal{E}_1)$ des points M_1.

3. On désigne par I le milieu de $[M_1M_2]$.

a. Vérifier que I appartient à une droite fixe $(\mathcal{D})$ que l'on précisera.

b. Calculer $aff\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)$.

c. En déduire que $M_2 = S_{\mathcal{D}}(M_1)$.

d. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E}_2)$ des points M_2.

Exercice 80 (Équation du 3ème degré dans $\mathbb{R}$)

Historiquement, les nombres complexes prennent naissance au XVIe siècle. Afin de résoudre des équations du troisième degré, les mathématiciens italiens trouvèrent un nouvel outil mathématique pour continuer les calculs malgré la présence d'une racine négative.

Problème : On sait résoudre les équations du second degré. On se propose de trouver une solution particulière à une équation de degré 3 de la forme $x^3 = px + q$ (formule de Cardan).

On s'intéresse particulièrement à l'équation $x^3 = 15x + 4$ (équation de Bombelli) et à sa résolution.

I. Étude de ce problème :

1. Pour tout réel A, on définit la racine cubique de A : c'est l'unique réel a tel que $a^3 = A$. Ce nombre est noté $\sqrt[3]{A}$.

a. Pourquoi le réel a est-il unique ? Déterminer $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-27}$ et $\sqrt[3]{125}$.

b. On considère l'équation $x^3 = px + q$ $(\mathbf{1})$. On cherche x sous la forme $x = u + v$ avec $uv = \frac{p}{3}$.

Montrer que l'équation $(\mathbf{1})$ est équivalente à : $\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3 \times v^3 = \frac{p^3}{27} \end{cases}$

c. Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $(\mathbf{2})$: $X^2 - qX + \frac{p^3}{27} = 0$.

d. Résoudre l'équation $(\mathbf{2})$ dans le cas où : $q^2 - \frac{4p^3}{27} \geq 0$.

e. En déduire, toujours dans le cas où $q^2 - \frac{4p^3}{27} \geq 0$, une solution de l'équation $(\mathbf{1})$.

La formule trouvée est la formule dite de Cardan dans le cas où $q^2 - \frac{4p^3}{27} \geq 0$.

2. Étude d'exemples

a. Calculer $q^2 - \frac{4p^3}{27}$ dans le cas de l'équation $x^3 = 15x + 4$. En introduisant i tel que $i^2 = -1$, écrire $q^2 - \frac{4p^3}{27}$ sous la forme d'un complexe.

b. Calculer $(2 + i)^3$ et $(2 - i)^3$.

c. Déterminer une solution α de l'équation $x^3 = 15x + 4$ à l'aide de la formule de Cardan.

d. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $x^3 - 15x - 4 = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$.

e. En déduire une solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^3 = 15x + 4$.

II. Applications :

1 Soit l'équation $x^3 = 51x + 104$.

1. Calculer $(4 + i)^3$ et $(4 - i)^3$.

2. Appliquer la formule de Cardan pour trouver une solution α de l'équation $x^3 = 51x + 104$.

3. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $x^3 - 51x - 104 = (x-\alpha)(ax^2 + bx + c)$.
4. En déduire une solution dans $\mathbb{R}$ *de l'équation :* $x^3 = 51x + 104$.
② Soit l'équation $x^3 = -6x + 7$.
1. Appliquer la formule de Cardan pour trouver une solution α *de l'équation* $x^3 = -6x + 7$.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $x^3 + 7x - 7 = (x-\alpha)(ax^2 + bx + c)$.
3. En déduire une solution dans $\mathbb{R}$ *de l'équation :* $x^3 = -6x + 7$.

Pour Info
CARDAN Jérôme (1501 - 1576)
Le nom de Cardan est associé dans l'histoire des mathématiques à ceux de Niccolò Tartaglia, Ludovico Ferrari, ses compatriotes et contemporains italiens, auxquels le lièrent l'amitié, ou la rivalité et la colère, dans cette Italie du XVIème siècle, pleine de drames, d'aventures, et de découvertes. Le problème qui les rassemble est la résolution générale des équations polynomiales de degrés 3 et 4. Il faut leur adjoindre en ce domaine Scipione del Ferro, 1465-1526, et Rafaele Bombelli, 1526-1573. Si la résolution de celles de degré 2 était banale depuis les Babyloniens ou Euclide, sur des cas particuliers, et avait été classifiée par Al Khwarizmi, les polynômes de degrés supérieurs semblaient défier les mathématiciens. Pour le degré 3 la résolution générale n'est évidemment possible que si on dispose des racines cubiques de réels (dans le cas où le polynôme de degré 3 admet une unique racine réelle), ou des racines cubiques des nombres complexes (cas de trois racines réelles). Ce dernier cas ne pouvait que poser des difficultés aux mathématiciens du XVIème siècle, et est justement à l'origine de l'invention des nombres complexes.
Il semble bien que ce soit Scipione del Ferro qui ait le premier résolu les équations du type (en notations actuelles) : $x^3 + p\,x = q$, *et peut être même les équations cubiques de tous les types (à l'époque, comme chez Al Khwarizmi, ces divers types d'équations sont distingués, car les nombres par excellence sont les nombres positifs, et les nombres négatifs paraissent encore étranges et d'un maniement délicat). Tartaglia, quelques années plus tard, retrouve la méthode de résolution dans le premier cas ; Cardan la lui soutire, jure de ne pas la révéler, puis, apprenant que del Ferro l'avait déjà résolue, en prend prétexte pour publier malgré tout, à la fureur de Tartaglia. Il surpasse d'ailleurs Tartaglia dans son ouvrage (l'Ars Magna), car il traite les différents cas d'équations de degré 3, et non pas un seul. Il y ajoute la méthode de résolution générale de l'équation de degré 4, dont il crédite son élève Ferrari.*
C'est dans l'Ars Magna qu'apparaissent pour la première fois les nombres complexes, à propos d'une équation du troisième degré. Cardan manipule les nombres 5 + (-15) et 5 - (-15), et constate que leur produit et leur somme sont tous deux des nombres positifs ordinaires : 40 et 10. Il qualifie lui-même ces considérations de "subtiles et inutiles". Toujours dans le contexte des équations du troisième degré, c'est Rafaele Bombelli qui systématisera l'emploi des nombres complexes dans le cas où les trois racines sont réelles.
Si Cardan était un mathématicien, il était aussi un célèbre médecin, et un joueur enragé. C'était un homme au caractère difficile, qui vécut une vie mouvementée, dont le fils fut condamné à mort et exécuté pour le meurtre de sa femme, et qui fut lui-même emprisonné quelques mois pour hérésie.
Cardan était un grand joueur. Il n'est donc pas surprenant que ce soit lui qui ait le tout premier étudié mathématiquement le hasard, donnant ainsi le départ de la théorie des Probabilités, dans son Livre sur le Jeu de Dés. Il s'est intéressé aussi à la mécanique, et il inventa la pièce mécanique (cardan dans la voiture) qui porte son nom.

Exercice 81 (Notion de birapport)
Quelques définitions :
- On dira qu'une application f est involutive si et seulement si $f \circ f = Id$.
- Quatre points A, B, C et D sont dits cocycliques si et seulement si ils appartiennent au même cercle Γ.
- On montre que quatre points non alignés A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si :

$$(AC, AD) = (BC, BD)\ [\pi] \text{ (des angles de droites)}$$

On désigne par P le plan complexe, par Ω *le point d'affixe i et P'=P−{*Ω *}. M un point quelconque de P' a pour affixe z.*
Pour tout réel non nul m, on désigne par f_m *l'application de P' dans P' telle que :*

$$f_m:\ M(z) \longrightarrow M'(z') \text{ tel que } z' - i = \frac{m}{\bar{z} + i}$$

1. On suppose m donné. Montrer que f_m *est involutive. Déterminer l'ensemble des points invariants par* f_m. *Démontrer que pour tout point M de P', les points* Ω, *M et M' sont alignés et que* $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M'} = m$ *(produit scalaire).*
2. Soit m et λ *deux réels non nuls. Pour tout point M de P', on désigne par M' le point* $f_m(M)$ *et par M'' le point* $f_\lambda(M')$. *Montrer que M'' est l'image de M par une transformation que l'on précisera. Quelle est la nature de cette transformation ?*
3. Le nombre m est toujours supposé fixé. Soit A, B, C, D quatre points distincts de P', d'affixes respectives a, b, c et d. On appelle birapport *de ces quatre points, noté (A, B, C, D), le nombre complexe suivant :*

$$\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

a. Démontrer que (A, B, C, D) = (C, D, A, B).
b. Démontrer que (A, B, C, D) est un réel si et seulement si les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques.
c. On désigne par A', B', C', D' les images respectives des points A, B, C et D par f_m. *Montrer que (A, B, C, D) et (A', B', C', D') sont conjugués.*

4. Déduire de la question précédente que, quels que soient les points M et N appartenant à P', les points M, N, M' et N' sont alignés ou cocycliques.
5. On désigne par Δ une droite ou un cercle du plan P et par Δ_1 son intersection avec P'. Démontrer que l'image de Δ_1 par f_m est l'intersection d'une droite ou d'un cercle avec P'.

Exercice 82 (Extension du logarithme aux nombres complexes)
On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes privé du nombre complexe nul.
Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire de façon unique $z = re^{i\theta}$ lorsqu'on suppose que θ vérifie les inégalités $-\pi < \theta \leq \pi$ et que $r > 0$.
Dans cet exercice, on étudie l'application F de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ qui associe à tout nombre complexe non nul $z = re^{i\theta}$ le nombre complexe $Z = \ln r + i\theta$ (Z est le logarithme de z).
Ainsi, on a :

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ et donc } \ln(i) = i\frac{\pi}{2}$$
$$-1 = e^{i\pi} \text{ et donc } \ln(-1) = i\pi$$
$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et donc } \ln(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$$

On propose de transformer au moyen de F des régions de $\mathbb{C}^*$.
1. Déterminer les images par F des demi-cercles de centre O, tracés dans $\mathbb{C}^*$ de rayon R et dont les extrémités sont placées sur l'axe des imaginaires aux points d'affixes $i\mathbb{R}$ et $-i\mathbb{R}$. Déterminer de même les images des segments de droite portés par des demi-droites d'origine O et dont aucune des extrémités n'est située en O.
2. On définit la région D limitée par les demi-droites (Δ_1) et (Δ_2) d'origine O telles que $(Ox, \Delta_1) = \theta_1$ et $(Ox, \Delta_2) = \theta_2$ où on suppose que θ_1 et θ_2 appartiennent à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et vérifient $\theta_2 > \theta_1$ et par les deux arcs de cercles (Γ_a) et (Γ_b) de centre O et de rayons a et b entièrement situés dans le secteur limité par les deux demi-droites précédentes. Dessiner cette région qui est donc un « secteur de couronne circulaire ». Définir l'image de la frontière de cette région qui est donc constituée de deux arcs de cercles et de deux segments. Montrer que l'intérieur de cette région D est transformé par F en l'intérieur d'un rectangle que l'on définira précisément à l'aide des angles θ_1 et θ_2 et des réels a et b.
3. Déterminer les conditions liant θ_1 et θ_2 d'une part et a et b d'autre part pour que ce rectangle soit centré en O. On pose alors $\theta = \theta_2$ et $R = a$. Trouver la relation entre θ et R pour que ce rectangle devienne un carré de centre O.
4. Soit le cercle C qui passe par O et qui est centré au point d'affixe 1.
En utilisant son équation cartésienne, trouver la relation fournissant r en fonction de θ pour qu'un point d'affixe $z = re^{i\theta}$ appartienne à ce cercle. On suppose $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
L'image par F d'un point quelconque de C étant définie par son affixe $X + iY$, déterminer l'abscisse X en fonction de l'ordonnée Y.
Étudier les variations de X en fonction de Y et, en prenant garde à l'échange des coordonnées, dessiner la courbe image de C par F.
Définir l'image par F de la région D' intérieure à ce cercle et comprise entre deux arcs de cercle de rayon R et $\frac{1}{R}$.
5. Soit la parabole (P) d'équation $y^2 = 2x$. Déterminer la relation entre θ et r pour qu'un point d'affixe $z = re^{i\theta}$ appartienne à cette courbe. Soit alors la région D" comprise dans l'intérieur de cette parabole et entre deux cercles de rayons R et $\frac{1}{R}$.
L'image d'un point $x + iy$ de la portion de parabole (P) comprise entre les deux arcs de cercle précédents étant désignée par $X + iY$, exprimer X en fonction de Y Étudier les variations de X en fonction de Y et en déduire l'image de cette portion de la parabole (P).
Sans prétendre à la précision, dessiner l'allure de l'image de la région D".

Bibliographie

Oui, c'est fini… ou presque fini ! Attention, c'est important ! il reste encore la bibliographie. En effet, c'est quoi un livre de mathématiques ou de sciences physiques ou de … sans sa bibliographie, si ce n'est qu'un leurre ou un manque d'honnêteté intellectuelle autrement dit un délit de plagiat dont l'auteur se cache honteusement derrière sa propre ombre !?

Lors de la rédaction de ce livre, plusieurs manuels et sites ont été consultés (nous exprimons ici notre entière reconnaissance à l'égard de leurs auteurs) :

Bibliographie

- P.H. Terracher-R.Ferachoglou, Maths Term. S Obl. Et spéc. Hachette 2002. ISBN 2.01.13.5294.0
- P.H. Terracher-R.Ferachoglou, Maths Term. S spéc. Hachette 1994. ISBN 2.01.13.4986.9
- J.M. Barros et Col., Maths Term. S spec. Transmath-Nathan 2012. N° édit. 10183118
- J.P. Bouvier, Maths Term. S spec. Belin 1998. ISBN 2.7011.2140.X
- A. Mohsen-S. Nabbout, Géom-Arithm-Prob. MCG Liban 1995. Dépôt légal 03/310409 – 06/627265
- G. Cohen, 52 nouvelles énigmes math. FFJM-vol. 21. Editions POLE 2000. ISBN 2.909737.55.1
- M. Bourahim et col., Ex. corrigés Term Maths Tome 1, MEGAMath 2004. Dépôt légal 2004/2172
- A.S. Haghani et Col., S'exercer en math pour l'examen.Al jadida 2003. Dépôt légal 2003/498
- A.S. Haghani et Col., Alg-Géom-Prob. Ex. Corr. Term SM. Al jadida 1998. Dépôt légal 2003/1576
- A. Mimouni et Col., Maths 4ème année. Kounouz Editions 2014
- S. Touré, Maths Term. SM, CIAM-EDICEF 1999. ISBN 2.84.129554.0
- A. Levine, Maths pour matheux Term. C. Ellipses 1993. ISBN 2.7298.9302.4
- J.L. Boursin, 750 ex. Corr. Term. S. Vuibert 1997. ISBN 2.7117.1413.6
- X. Merlinet B. Clément, Maths Term. S. Ellipses 2012. ISBN 978.2.7298.7623.4
- Iaaly Abdul Raouf, Math. Term. S. Dar-Al Moustakbal 1996 – Tripoli – Liban
- Barache et Bauer, Maths Term. S. 100% Exos. Hatier 2012. ISBN 978.2.218.96268.4
- J.P. Galandrin et Col. Maths Term. S. Spéc. Déclic-Hachette 1998. ISBN 2.01.13.5056.5
- M. Nouvet, Maths Term. S. spéc. Radial-Belin 2006. ISBN 2.7011.4266.0

R. Cuzel et Col. Algèbre et Prob. Term. D. Delagrave 1967. Dépôt légal : imp.8087 – Edit.3486

Cybergraphie

- http : //www.laroche.free.fr
- http://www.mathematiquesfaciles.com
- http://www.recreomath
- http://www.algor.chez.com
- http://especesdemaths
- http://www.mathmoufid.com
- http://www.matheleve.net
- http://www.memopage.com
- http://mp.cpgedupuydelome.fr
- http://www.lyceedadultes.fr
- http://mathprepa.fr
- http://www.animath.fr
- http://ww2.ac-poitiers.fr
- http://math.seguy.fr
- http://algolycee.free.fr
- https://sites.google.com/site/lapotheme
- http://www.lyc-les-iscles.ac-aix-marseille.fr
- http://vivienfrederic.free.fr
- http://mphilippe.fr
- http://www.mathmaurer.com
- http://autres-talents.fr
- http://mathe.kreins
- https://fr.wikipedia
- http://casemath.free.fr
- http://www.jeusetetmaths.com
- http://chingatome.net
- http://www.lyc-perier.ac-aix-marseille.fr
- http://www.lesreferences.com
- http://www.bac-de-maths.fr
- http://formation.cepec.free.fr

Que Dieu me pardonne, si j'ai oublié !

Eh oui, maintenant, on
peut bien dire que
c'est vraiment fini…