République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif
Direction des Examens et des Concours

BACCALAUREAT 2024
Session Complémentaire
Epreuve : MATHEMATIQUES

Séries : C & TMGM
Coefficient : 9 & 6
Durée : 4h

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}(5;-2;0)$ et $\vec{n}(2;5;1)$ et le point $A(2;4;2)$.

1.a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$	0.5pt
b) Déterminer une équation du plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.	0.75pt
2. Soit Q le plan d'équation $z-2=0$ a) Montrer que si le point $M(x,y,z)$ appartient aux plans P et Q alors $2x+5y=24$	0.5pt
b) Résoudre l'équation $2x+5y=24$ où x et y sont des entiers relatifs.	0.75pt
c) Déduire que parmi les points d'intersection de P et Q, il y a exactement trois points dont les coordonnées sont des entiers naturels.	0.5pt

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie par $f(0)=0$ et $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x)=x^2(1-\ln x)$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0^+.	0.75pt
2.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement.	1pt
b) Calculer $f'(x)$, $\forall x \in]0;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.	0.75pt
3. Déterminer les points d'intersection de (Γ) avec l'axe (Ox) puis construire (Γ)	0.75pt
4.a) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]\sqrt{e};+\infty[$, montrer que h admet une réciproque	0.25pt
b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}, réciproque de h, puis construire sa courbe dans le repère précèdent.	0.5pt

$(\vec{AI}, \vec{BI}) =$

Exercice 3 (5 points)

ABC est un triangle rectangle isocèle en A, direct et soient I, J et K et les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB]. Soit r la rotation de centre I transformant J en K.

1. Faire une figure illustrant les données de l'exercice.	0.5pt
2. a) Déterminer une mesure de l'angle de r et montrer que $r(A)=B$.	1pt
b) On pose $f=r\circ t_{\vec{KJ}}$. Déterminer $f(K)$ puis déterminer et caractériser f.	1pt
3. Soit $S=h\circ r$ où h est l'homothétie de centre B et de rapport 2.	
a) Montrer que S est une similitude directe, puis déterminer son rapport et une mesure de son angle.	1pt
b) Déterminer $S(A)$, $S(I)$ et $S(J)$.	0.75pt
c) Exprimer le centre Ω de S comme barycentre de A, B et C. Placer Ω sur la figure.	0.75pt

$A \longrightarrow B$

$D \longrightarrow$

$\Omega \longrightarrow \Omega$

$BD = k\,AC$

$BD - k\,AC = 0$

donc $\Omega A = k\,\Omega B$

$\Omega A - k\,\Omega B = 0$

Exercice 4 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 4z + 4(1+\cos^2\alpha) = 0$, avec $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) (on note z_1 et z_2 les solutions de cette équation avec $\mathrm{Im}(z_1) > \mathrm{Im}(z_2)$) **0.5pt**

2. Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = z_1$, $z_B = z_2$, $z_C = 5+2i$ et $z_D = -1-2i$.

a) Déterminer, suivant les valeurs du réel k, l'ensemble Γ_k de points M du plan tel que $2MO^2 + MA^2 - MB^2 = k$ **0.5pt**

b) Déterminer l'ensemble Δ de points M du plan tel que $2MO^2 - MA^2 - MB^2 = -10$ **0.5pt**

3. Soient a, b et c trois réels et H l'hyperbole d'équation $x^2 + ay^2 + bx + c = 0$ qui passe par les points A, C et D.

a) Montrer que le triplet (a,b,c) vérifie le système $\begin{cases} a+2b+c=-4 \\ 4a+5b+c=-25 \\ 4a-b+c=-1 \end{cases}$ **0.5pt**

b) Résoudre le système et donner l'équation réduite de H. **1pt**

c) Déterminer le centre, les sommets, l'excentricité et les asymptotes de H **1pt**

Exercice 5 (4 points)

$2MO^2 + MA^2 - MB^2 = k$

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(2-x)^n}$ sur $]-\infty,2[$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ puis calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to 2^-} f_n(x)$. **1pt**

b) Montrer que $\forall x < 2,\ f_n'(x) = \frac{e^{-x}(x-2+n)}{(2-x)^{n+1}}$ et dresser le tableau de variation de f_n **0.75pt**

c) Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) **0.5pt**

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)dx$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k-2)I_k$

a) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ **0.25pt**

b) Montrer que $\forall x < 2,\ f_n'(x) = -f_n(x) + nf_{n+1}(x),\ n \in \mathbb{N}^*$ **0.25pt**

c) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nI_{n+1} - I_n = \frac{1}{e} - \frac{e}{3^n}$ **0.5pt**

d) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = -I_n + \frac{n-1}{e} + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - 1\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$. **0.75pt**

Fin.

$f^n = n \times f' \times f^{n-1}$