Baccalauréat 2006

Session complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 *(5 points)*

Dans tout l'exercice

- Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$;
- a est un nombre réel strictement positif ;
- A est le point de coordonnées $(a;0)$;
- (D) est la droite d'équation $x = a$;
- f est une fonction réelle strictement positive de variable réelle t, définie sur $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$.

Pour chaque valeur du paramètre t, on note s_t l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point $M_t = s_t(M)$ d'affixe z_t telle que : $z_t = f(t)(\cos t + i\sin t)z$.

1.a) Quelle est la nature de l'application s_t ? Donner ses éléments caractéristiques. *(0,5pt)*

b) Donner les équations analytiques qui définissent s_t et celles qui définissent s_t^{-1} par rapport à $(O;\vec{u},\vec{v})$ (s_t^{-1} est l'application réciproque de s_t). *(0,5pt)*

2. Dans cette question, on pose : $f(t) = \dfrac{1}{\cos t}$ pour tout $t \in \left]-\pi/2,\pi/2\right[$.

a) Montrer que si $M \neq O$ alors $\forall\ t \in \left]-\pi/2,\pi/2\right[$, le triangle OMM_t est rectangle en M. *(0, 5pt)*

b) Le point M étant fixe, quel est l'ensemble $\Gamma(M)$ décrit par M_t lorsque t décrit $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$? *(0, 5pt)*

c) Montrer que l'image de la droite (D) par s_t est une droite (D_t) dont on donnera une équation cartésienne dépendant seulement de a et de $\tan(t)$. *(0,5pt)*

3. Dans cette question, on pose : $f(t) = \cos t$ pour tout $t \in \left]-\pi/2,\pi/2\right[$.

a) Montrer que si $M \neq O$ alors $\forall\ t \in \left]-\pi/2,\pi/2\right[$ le triangle OMM_t est rectangle en M_t. *(0,25pt)*

b) Le point M étant fixe, quel est l'ensemble $\Gamma'(M)$ décrit par M_t lorsque t décrit $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$? *(0,25pt)*

4. On suppose toujours que $f(t) = \cos t$ mais avec $t \neq 0$. On pose $A_t = s_t(A)$.

a) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A_tM_t})$. *(0,5pt)*

b) Soit H_t le point d'intersection des droites (AM) et (A_tM_t). Montrer que les points O, H_t, A et A_t sont cocycliques. *(0,5pt)*

c) Montrer que les points O, H_t, M et M_t sont cocycliques. Quelle est la projection orthogonale de O sur la droite (AM)? *(0,5pt)*

d) Soit (D_t) l'image de la droite (D) par s_t. Montrer que, lorsque t varie, (D_t) passe par un point fixe. *(0,5pt)*

Exercice 2 *(4 points)*

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante : (E_n) $\quad (iz)^n = (z+2i)^n$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1.a) Déterminer et écrire sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_2), où z_1 est la solution telle que : $\mathrm{Re}(z_1) < 0$. *(0,5pt)*

b) Posons : $u = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}z_1$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $(u)^p + (\bar{u})^p = 2\cos\left(\dfrac{p\pi}{4}\right)$ (où $\bar{u}$ est le conjugué de u.) *(0,5pt)*

c) On considère l'application f définie de l'ensemble des nombres complexe sur lui-même par :

$$f(z) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$$

Montrer que: $f(z) = \dfrac{1}{2}\left[(1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n\right]$. *(0,5pt)*

d) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 0$. *(0,5pt)*

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ les deux points $A(-2i)$ et $M(z)$ où z est un nombre complexe.

a) Montrer que si z est solution de (E_n) alors $OM = AM$.*(0,5pt)*

b) En déduire que toute solution de (E_n) peut s'écrire sous la forme $a - i$ où a est un réel. *(0,5pt)*

3.a) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E_n).*(0,5pt)*

b) Montrer que les solutions de (E_n) peuvent s'écrire sous la forme :

$$z_k = -i + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{n}\right) \text{ où } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$ *(0,5pt))*

Problème *(11 points)*

Partie A

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1.a) Déterminer l'ensemble D de définition de f .*(0,5pt)*

b) Montrer que f est une fonction impaire. *(0,5pt)*

c) Dresser le tableau de variations de f .*(0,5pt)*

d) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité **4 cm** .*(0,5pt)*

2.a) Montrer que f réalise une bijection de D sur $\mathbb{R}$.*(0,25pt)*

b) Soit g la réciproque de f . Montrer que pour tout réel x, $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.*(0,5pt)*

c) Tracer la courbe représentative (C') de g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.*(0,5pt)*

3. Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre les deux courbes (C) et (C') et située dans le carré défini par : $-1 \le x \le 1$ et $-1 \le y \le 1$.*(0,25pt)*

Partie B

Pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \ge 0$, on pose : $I_n(x) = \int_0^x [g(t)]^n\,dt$ et on convient que $[g(t)]^0 = 1$.

1.a) Justifier l'existence de $I_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \ge 0$.*(0,5pt)*

b) Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$.*(0,5pt)*

c) Montrer que $\forall p \ge 1$ et $\forall x \ge 0$, on a : $0 \le I_{2p}(x) \le x(g(x))^{2p}$.*(0,5pt)*

d) Déduire que $\forall x \ge 0$, la suite $(I_{2p}(x))$ est convergente et calculer sa limite. *(0,5pt)*

2.a) Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}$, on a : $[g(t)]^2 = 1 - g'(t)$ *(0,5pt)*

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \ge 0$, on a : $I_{n+2}(x) = I_n(x) - \frac{1}{n+1}[g(x)]^{n+1}$.*(0,5pt)*

c) Déduire alors que $\forall p \ge 1$ et $\forall x \ge 0$, on a :

$$I_{2p}(x) = x - \left[(g(x)) + \frac{1}{3}(g(x))^3 + \ldots + \frac{1}{2p-1}(g(x))^{2p-1}\right]$$ *(0,5pt)*

d) En utilisant les questions précédentes, calculer : $\lim\limits_{p \to +\infty}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2p-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1}\right]$ *(0,5pt)*

Partie C

Soit h la fonction numérique définie sur $]-1\,;1[$ par: $h(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}\,dt$.

1.a) Justifier la définition de h sur $]-1\,;1[$.*(0,5pt)*

b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $\frac{t^2}{1-t^2} = a + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t}$ où a, b et c sont des réels à déterminer. *(0,5pt)*

c) En déduire que : $\forall x \in]-1;1[$, $h(x) = -x + f(x)$ où f est la fonction définie dans **la partie A**. *(0,25pt)* la fonction h et construire sa courbe représentative (C'') dans un nouveau repère orthonormé. *(0,5pt)*

er que : $\forall x > 0$ et $\forall k \in IN^*$, on a : $\ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln k$ *(0,25pt)*

duire que $\forall k \in IN^*$, $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln k$ et que $\forall k \in IN^*$, $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln(n!)$ *(0,5pt)*

duire que $\forall n \in IN^*$ $\ln(n!) \geq (n + \frac{1}{2})\ln(n + \frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\ln 2$. *(0,25pt)*

$(U_n)_{n \in IN^*}$ la suite définie sur IN^* par : $U_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2})\ln(n) + n$.

er que : $\forall n \in IN^*$, $U_n - U_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ *(0,25pt)*

er que $\forall n \in IN^*$, $U_n \geq \frac{1}{2}\ln 2$ *(0,25pt)*

re alors que la suite $(U_n)_{n \in IN^*}$ est convergente. *(0,25pt)*

Fin.