Le principe des tiroirs

Définition :

Ce principe est parfois appelé principe des pigeons (pigeonhole en anglais). On l'attribue au mathématicien franco-belge Dirichlet car c'est lui qui l'a utilisé la première fois dans des démonstrations non évidentes.

Version simple :
« Si n+1 objets sont placés dans n tiroirs, au moins un tiroir contiendra 2 objets ou plus ».
Version générale :
« Si n objets sont placés dans k tiroirs, au moins un tiroir contiendra Ent(n/k) objets ou plus ».

La première fois où Dirichlet a utilisé ce principe c'était pour démontrer ce théorème qui porte son nom et qui stipule que tout irrationnel est approchable à l'ordre au moins 2 par des rationnels.

Théorème de Dirichlet :

Si $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN} \quad \text{avec } 0 < q \leq N.$$

Preuve :

Pour tout réel t, notons $\{t\}$ la partie fractionnaire de t, c'est par définition la différence entre t et sa partie entière $Ent(t)$:

$$\{t\} = t - Ent(t)$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$.
Comme l'intervalle $[0,1[$ est la réunion disjointe des N intervalles $I_i = [i/N, (i+1)/N[$ $(0 \leq i \leq N-1)$, le principe des tiroirs nous assure que deux (au moins) des $N+1$ réels $\{x\}$, $\{2x\}$, $\{3x\}$, …, $\{(N+1)x\}$ se trouvent dans un même intervalle I_i. En d'autres termes, il existe deux entiers k et l tels que $1 \leq k < l \leq N+1$ ainsi qu'un entier $j \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ vérifiant :

$$\frac{j}{N} \leq \{kx\}, \{lx\} < \frac{j+1}{N}$$

Dès lors :

$$|\{lx\} - \{kx\}| < \frac{1}{N}$$

C'est-à-dire :

$$|(l-k)x - (\{lx\} - \{kx\})| < \frac{1}{N}$$

Ou encore, en posant $p = \{lx\} - \{kx\}$ et $q = l - k$:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN} \quad \text{avec } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ et } q \leq N.$$

Exemple :

La Mauritanie compte 4 000 000 d'habitants. Un être humain a, au plus 600 000 cheveux sur la tête. Au vu de ces données, et sachant seulement cela, combien de mauritaniens peut-on trouver qui ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

Corrigé

Il y a 4 000 000 d'habitants à placer dans 600 001 catégories, allant de celle des habitants ayant 0 cheveux, jusqu'à celle des habitants ayant 600 000 cheveux. Alors, il y a, au moins, une catégorie qui contient $Ent(4\,000\,000/600\,001) = 6$ mauritaniens, ayant le même nombre de cheveux.

Applications

Exercice 1

On a jeté de la peinture noire sur le sol blanc d'une pièce carrée de 2 mètres sur 2, n'importe comment. Montrer qu'il existe deux points de la même couleur dont la distance est exactement un mètre.

Exercice 2

On se donne n entiers a_1, a_2, …, a_n. Montrer qu'il existe un sous-ensemble de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dont la somme des éléments est divisible par n.

Exercice 3

On considère 13 nombres réels deux à deux distincts. Prouver que, parmi ces nombres, il existe deux réels a et b vérifiant :

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} \leq 2-\sqrt{3}.$$

Exercice 4

501 nombres différents sont choisis parmi les entiers de 1 à 1000. Montrer qu'il existe toujours au moins un couple de nombres tel que l'un des termes divise l'autre.

Exercice 5

Montrer qu'il existe une puissance de 73 qui se termine par 2020 fois le chiffre 0 suivis du chiffre 1 :

… (2020 fois le chiffre 0) $\dots 0001$.

Exercice 6

Est-il possible que le produit de cinq nombres entiers consécutifs soit un carré parfait ? Si oui, donner au moins un exemple.

CORRIGE

Exercice 1

Considérons dans la pièce carrée de 2 mètres sur 2 un triangle équilatéral de côté 1 m. Ce triangle possède 3 sommets qui ne peuvent avoir que 2 couleurs, noir ou blanc. Donc on a trouvé 2 sommets qui ont la même couleur. Et ils sont distants d'un mètre exactement.

Exercice 2

On considère les sommes :

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1\\
S_2 &= a_1 + a_2\\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3\\
&\dots\quad \dots\quad \dots\\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n
\end{aligned}$$

Si l'une des sommes S_i, pour $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, est divisible par n, on a gagné. Sinon, les $n-1$ restes (tiroirs) de la division euclidienne des n sommes S_i (objets) nous font penser au principe des tiroirs et donc il existe deux sommes S_j et S_k (avec $j < k$) qui donnent le même reste. Dans ce cas :

$$n \text{ divise } S_k - S_j = a_{j+1} + a_{j+2} + a_{j+3} \dots + a_k.$$

Exercice 3

Notons a_1, a_2, a_3, …, a_{13} les treize réels considérés dans l'ordre croissant. Comme la fonction : $x \mapsto \tan x$ est une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}$ alors pour tout i de $[\![1, 13]\!]$, il existe un unique réel $x_i \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan x_i = a_i$.
Si nous subdivisons $]-\pi/2, \pi/2[$ en 12 parties de même amplitude, le principe des tiroirs nous permet de conclure à l'existence de deux indices i, j de $[\![1, 13]\!]$ tels que :

$$0 < x_i - x_j \leq \frac{1}{12}.$$

Et la fonction $x \mapsto \tan x$ étant strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$, on se permet d'écrire :

$$\tan 0 < \tan(x_i - x_j) \leq \tan\frac{\pi}{12}$$

Soit :

$$0 < \tan(x_i - x_j) \leq 2 - \sqrt{3} \quad \text{car} \quad \tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

D'autre part, on sait que :

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y}$$

D'où :

$$0 < \frac{\tan x_i - \tan x_j}{1 + \tan x_i \times \tan x_j} \leq 2 - \sqrt{3}$$

Soit enfin :

$$0 < \frac{a_i - a_j}{1 + a_i . a_j} \leq 2 - \sqrt{3}$$

Exercice 4

On sait que tout entier naturel n peut s'écrire sous la forme $n = 2^k p$ où p est un entier naturel impair et cela en extrayant de n autant de facteurs de 2 qu'il puisse contenir. Si n est impair alors de toute évidence $k = 0$.
Si on choisit 501 entiers (objets) de 1 à 1000, chacun pouvant s'écrire sous la forme $2^k p$ où p est un entier parmi les 500 entiers impairs 1, 3, 5, 7, … , 999 (tiroirs) alors le principe de Dirichlet nous assure l'existence de deux entiers $n_i = 2^{k_i} p$ et $n_j = 2^{k_j} p$ (avec $n_i > n_j$) définis à partir du même entier naturel impair p. Donc, on a bien trouvé, parmi les 501 entiers, deux entiers n_i et n_j tels que n_j divise n_i.

Exercice 5

On considère la suite des $1\underbrace{000 \dots 000}_{2020 \text{ zéros}}1$ nombres entiers qui sont des puissances de 73 : 73, 73^2, 73^3, …, $73^{1\underbrace{000\dots 000}_{2020 \text{ zéros}}1}$ (objets). En divisant ces nombres par $1\underbrace{000 \dots 000}_{2021 \text{ zéros}}$, on obtient $1\underbrace{000 \dots 000}_{2021 \text{ zéros}}$ restes (tiroirs) et donc d'après le principe des tiroirs, il existe deux puissances de 73 qui ont le même reste. La différence de ces deux nombres est de la forme $73^j(73^k - 1)$ avec j et k entiers. Cette différence est divisible par $\mathbf{1}\underbrace{\mathbf{000\ldots000}}_{\mathbf{2021\ zéros}}$. Or $\mathbf{1}\underbrace{\mathbf{000\ldots000}}_{\mathbf{2021\ zéros}}$ est premier avec 73, et donc avec $\mathbf{73^j}$, et divise donc, selon Gauss, le nombre $\mathbf{73^k-1}$. Ainsi le nombre $\mathbf{73^k-1}$ s'écrit sous la forme $\mathbf{73^k-1} = \mathbf{1}\underbrace{\mathbf{000\ldots000}}_{\mathbf{2021\ zéros}}\times \boldsymbol{N}$ et par suite $\mathbf{73^k} = \mathbf{1}\underbrace{\mathbf{000\ldots000}}_{\mathbf{2021\ zéros}}\times \boldsymbol{N}+\mathbf{1}$ c'est-à-dire que $\mathbf{73^k}$ se termine par $\underbrace{\mathbf{000\ldots000}}_{\mathbf{2020\ zéros}}\mathbf{1}$.

Exercice 6

Il s'agit de savoir si l'équation $\boldsymbol{y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ (avec $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ entiers strictement positifs) admet des solutions. On peut bien remarquer que pour deux paires de facteurs du second membre, le plus grand diviseur commun est au plus égale à 4. On déduit de cette remarque que tout nombre premier $\boldsymbol{p \geq 5}$ qui rentre dans la décomposition en facteurs premiers de l'un des 5 facteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x+1}$, $\boldsymbol{x+2}$, $\boldsymbol{x+3}$,$\boldsymbol{x+4}$ doit figurer avec un exposant pair. Pour ce qui est des facteurs premiers 2 et 3, on peut scinder les 5 entiers $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x+1}$, $\boldsymbol{x+2}$, $\boldsymbol{x+3}$,$\boldsymbol{x+4}$ en 4 catégories disjointes deux à deux :

G1 : ceux pour lesquels 2 et 3 figurent avec des exposants pairs ;
G2 : ceux pour lesquels 2 et 3 figurent avec des exposants respectivement pairs et impairs ;
G3 : ceux pour lesquels 2 et 3 figurent avec des exposants respectivement impairs et pairs ;
G4 : ceux pour lesquels 2 et 3 figurent avec des exposants impairs.

Donc selon le principe des tiroirs, au moins deux des 5 nombres $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x+1}$, $\boldsymbol{x+2}$, $\boldsymbol{x+3}$,$\boldsymbol{x+4}$ (objets) sont dans la même catégorie (tiroirs). La différence de ces deux nombres est au plus égale à 4, ce qui est le cas de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x+4}$. Dans ce cas, les seules valeurs possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 dont le produit 120 n'est pas un carré parfait.

Enfin : Le produit de cinq entiers consécutifs (dont aucun n'est nul) n'est jamais un carré parfait.

MERCI