Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Baccalauréat 2005

Session normale

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. On pose : $P(z) = z^3 - (5+7i)z^2 + (-6+26i)z + 24 - 24i$ où z est un nombre complexe.

a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure. **(0,25pt)**

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$. **(0,5pt)**

2. Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$.

a) Placer les points A, B et C. Montrer que les points O, A, B et C sont cocycliques. **(0,5pt)**

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;5),(A;-3),(C;4)\}$. Vérifier que G est le milieu de $[AB]$. **(0,5pt)**

c) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z telle que le nombre $\frac{z-2}{z-4i}$ soit imaginaire pur. **(0,25pt)**

3. Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M) = 5MO^2 - 3MA^2 + 4MC^2$ et Γ_k l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = k$ où k est un réel.

a) Discuter, suivant les valeurs de k, la nature de Γ_k. **(0, 5pt)**

b) Reconnaître et construire Γ_{60}. **(0,5pt)**

4. Soit f l'application qui à tout point $M(x,y)$ d'affixe z associe le point $M'(x',y')$ d'affixe z' tel que : $z' = \frac{3z - \bar{z}}{4}$, ($\bar{z}$ est le conjugué de z) et soit Γ le cercle d'équation $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

a) Ecrire x' et y' en fonction de x et y. **(0,25pt)**

b) Donner une équation cartésienne de l'ensemble Γ' image du cercle Γ par l'application f. **(0,25pt)**

c) Montrer que Γ' est une ellipse dont on déterminera le centre, les sommets et l'excentricité. **(0,25pt)**

5. Représenter Γ et Γ' sur la figure précédente. **(0,25pt)**

Exercice 2 (6 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction numérique définie pour tout x de $]0,+\infty[$ par: $f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$, on désigne par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 5cm.

1. Dresser le tableau de variation de f_n. **(0,75pt)**

2.a) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A, dont on déterminera les coordonnées et que ces courbes (C_n) admettent la même tangente en A. **(1pt)**

b) Etudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}). **(0,5pt)**

c) Soit M_n le point de (C_n) en lequel la tangente est horizontale. Montrer que tous les points M_n sont situés sur une branche d'une courbe dont on donnera une équation. **(0,5pt)**

3. Tracer (C_3). **(0,75pt)**

4. Dans cette question on pose : $f = f_3$ et pour tout $n \geq 2$: $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k) = \frac{\ln 2}{2^3} + \frac{\ln 3}{3^3} + \ldots + \frac{\ln n}{n^3}$.

a) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$. (0,5pt)

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $S_n - \frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x)dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^3}$. (0,5pt)

c) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $\int_2^n f(x)dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x)dx + \frac{\ln 2}{8}$. (0,5pt)

d) Calculer $\int_2^n f(x)dx$, en déduire que la suite (S_n) est convergente. (0,5pt)

e) On pose $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lambda$, montrer que $\frac{\ln(2\sqrt{e})}{8} < \lambda < \frac{\ln(4\sqrt{e})}{8}$. (0,5pt)

Problème (10 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct **ABCD** de coté **a**.
Soit **M** un point variable du segment **[AC]**. Soient **E**, **F**, **G** et **H** les projetés orthogonaux respectifs de **M** sur **[AB]**, **[BC]**, **[CD]** et **[DA]**. Dans tout le problème, **M** est distinct de **A** et de **C**.
L'objectif de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

Partie A

Dans cette partie, on se propose de démontrer par deux méthodes que lorsque le point **M** varie sur **[AC]**, les droites **(DM)**, **(CE)** et **(AF)** d'une part et les droites **(BM)**, **(CH)** et **(AG)** d'autre part restent concourantes.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre **AB = 8cm** et la droite **(AB)** horizontale) (0,5pt)

2. Utilisation d'homothéties

Pour une position donnée du point **M** sur **[AC]**, on désigne par **P** le point d'intersection des droites **(AF)** et **(CE)**. On considère deux homothéties h_1 et h_2 de même centre **P** telles que h_1 transforme **A** en **F** et h_2 transforme **C** en **E**.

a) Déterminer l'image de la droite **(AD)** par h_1 ; (0,25pt)

b) Déterminer l'image de la droite **(BC)** par h_2 ; (0,25pt)

c) En déduire l'image de la droite **(AD)** par $h_2 \circ h_1$; (0,25pt)

d) Déterminer l'image de la droite **(DC)** par $h_1 \circ h_2$; 0,25pt)

e) En déduire que, quelque soit la position de **M** sur **[AC]**, les droites **(DM)**, **(CE)** et **(AF)** restent concourantes. (0,25pt)

3. Utilisation d'une rotation vectorielle

On considère la rotation vectorielle φ d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Prouver que $\varphi(\overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AF}$. En déduire que les droites **(DE)** et **(AF)** sont perpendiculaires. (0,25pt)

b) Trouver $\varphi(\overrightarrow{DF})$ et $\varphi(\overrightarrow{DM})$. En déduire que, quelque soit la position de **M** sur **[AC]**, les droites **(DM)**, **(CE)** et **(AF)** sont concourantes. (0,5pt)

4. Déduire de ce qui précède, en utilisant une réflexion appropriée, que quelque soit la position de **M** sur **[AC]**, les droites **(BM)**, **(CH)** et **(AG)** restent concourantes. (0,25pt)

Partie B

Soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 les cercles de diamètres respectifs $[FM]$, $[ME]$, $[GA]$ et $[CH]$

On se propose dans cette partie, de démontrer que lorsque le point M varie sur $[AC]$, les cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 restent concourants.

1. Pour une position donnée du point M sur $[AC]$, on désigne par Ω le point d'intersection de (DM) et (EF).

a) Prouver qu'il existe une unique similitude directe s de centre Ω qui transforme M en F. **(0,5pt)**

b) Déterminer l'angle de s et montrer que $s(E) = M$. **(0,5pt)**

2. Déterminer l'image du carré $AEMH$ par la similitude s. **(0,5pt)**

3. En déduire que lorsque le point M varie sur $[AC]$, les cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 restent concourants. **(0,5pt)**

4. Sur la figure précédente, déduire un ensemble de quatre autres cercles qui possèdent la même propriété. **(0,25pt)**

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier un ensemble de carrés.

1. Sur une nouvelle figure placer les points O_1, O_2, I et J milieux respectifs des segments $[CM]$, $[AM]$, $[BM]$ et $[DM]$. Montrer que le quadrilatère O_1JO_2I est un carré et que son aire est constante quelque soit la position de M sur $[AC]$. **(0,5pt)**

2. Déterminer le lieu géométrique du point J lorsque M varie sur $[AC]$. **(0,5pt)**

3. On considère les deux points S et T tels que le quadrilatère $SGTH$ soit un carré direct.

a) Montrer que lorsque M varie sur $[AC]$, alors le point S reste fixe puis le placer sur la figure. **(0,5pt)**

b) Déterminer et représenter le lieu géométrique du point T lorsque M varie sur $[AC]$. **(0,25pt)**

4. On pose $AE = x$ avec $0 < x < a$. Soit $f(x)$ l'aire de la partie délimitée par les deux carrés O_1JO_2I et $SGTH$.

a) Calculer l'aire du carré $SGTH$ en fonction de x et a. **(0,25pt)**

b) Ecrire $f(x)$ en fonction de x et a. **(0,25pt)**

c) Quelle est la position du point M pour laquelle la surface commune $f(x)$ est minimale ? **(0,25pt)**

Partie D

Dans cette partie on considère que le point M est fixé au centre du carré $ABCD$. On se propose d'étudier deux tangentes communes à deux coniques: la parabole $\mathscr{P}$ de sommet H et de directrice (CD) et l'ellipse $\mathscr{E}$ de foyers A et B, et de longueur du grand axe $a\sqrt{2}$.

1.a) Faire une nouvelle figure, déterminer le foyer de $\mathscr{P}$ et montrer que B appartient à $\mathscr{P}$. **(0,5pt)**

b) Montrer que M est un sommet de l'ellipse $\mathscr{E}$. Construire les autres sommets et justifier la construction. **(0,5pt)**

2. Montrer que la droite (FH) est une tangente commune à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{E}$. **(0,5pt)**

3. Soient (Δ) la droite passant par F et orthogonale à (AF) et (Δ') la droite passant par B et orthogonale à (BD) et soit N le point d'intersection de (Δ) et (Δ').

a) Montrer que (Δ) est une tangente à $\mathscr{P}$ et déterminer leur point de contact. **(0,5pt)**

b) Montrer que (Δ) est la tangente à $\mathscr{E}$ en N. **(0,25pt)**

c) Représenter $\mathscr{E}$ et $\mathscr{P}$ sur la figure. **(0,25pt**

Fin.