# BACCALAUREAT 2019
Session Complémentaire
Epreuve : MATHEMATIQUES

Série : Sciences de la Nature
Coefficient : 6
Durée : 4h

**Exercice 1 (3 points)**

Soit f une fonction numérique dérivable sur son domaine de définition et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On donne, ci-contre, le tableau de variation de f.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | $-2$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-3$ | ↗ | $2$ |

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est correcte.

| N° | Question | Réponse A | Réponse B | Réponse C | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | L'ensemble de définition de f est | $]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$ | $]-\infty,3[\cup[3,+\infty[$ | $]-\infty,+\infty[$ | 0.5 pt |
| 2 | La fonction f est | paire | impaire | ni paire, ni impaire | 0.5 pt |
| 3 | La courbe (C) coupe (Ox) en | 3 points | 2 points | 1 seul point | 0.5 pt |
| 4 | Le nombre d'asymptotes de la courbe (C) est | une seule | deux | trois | 0.5 pt |
| 5 | Le nombre de tangentes horizontales de (C) est | 1 | 2 | 3 | 0.5 pt |
| 6 | Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-2$ est | 1 | 2 | 3 | 0.5 pt |

*Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée*

| *Question n°* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Réponse* | A | C | A | C | B | C |

**Exercice 2 (5 points)**

1° Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^3-(4-i)z^2+7z-4+7i$.

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-12-16i$ — 0.25pt

b) Calculer $P(-i)$ — 0.5pt

c) Déterminer les réels a et b tels que, $\forall z\in\mathbb{C}$, on a : $P(z)=(z+i)(z^2+az+b)$. — 0.5pt

d) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. — 0.5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1+2i$, $z_B=-i$ et $z_C=3-2i$.

a) Placer les points A, B et C. — 0.5pt

b) Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Justifier que $z_D=4+i$ — 0.25pt

c) Ecrire sous forme algébrique $\dfrac{z_D-z_C}{z_D-z_A}$ et en déduire la nature du triangle ACD. — 0.5pt

3° Pour tout nombre complexe $z\neq 1+2i$ ; on pose : $f(z)=\dfrac{z-3+2i}{z-1-2i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma_1$ des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$. — 0.5pt

b) Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma_2$ des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{20}$. — 0.5pt

4° On pose $\alpha=\dfrac{z_A+z_B}{2\sqrt{2}}$ et pour tout entier naturel n, on note $u_n=|\alpha^n|$.

a) Ecrire $\alpha$ sous forme algébrique et vérifier que $u_n=\dfrac{1}{2^n}$ ; — 0.5pt

b) En déduire que $(u_n)$ est une suite géométrique et montrer que $u_0+u_1+\dots+u_{2019}=2-\dfrac{1}{2^{2019}}$. — 0.5pt

**Exercice 3** (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(-1)=0$ et $\forall x>-1$, $f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)-(x+1)$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Vérifier que $\forall x>-1$, $f(x)=(x+1)\left[(x+1)\ln(x+1)-1\right]$. 0.5 pt

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)}{x+1}=-1$ (on donne la limite suivante : $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)\ln(x+1)=0$). 0.5 pt

c) En déduire que f est continue et dérivable à droite de -1. 0.5 pt

d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement. 0.5 pt

2° a) Montrer que $\forall x>-1$, $f'(x)=2(x+1)\ln(x+1)+x$, ($f'$ étant la dérivée de f). 0.5 pt

b) En remarquant que $\forall x>-1$, le signe de $2(x+1)\ln(x+1)$ est celui de x, montrer que $f'$ est négative sur $]-1,0[$ et positive sur $]0,+\infty[$. 0.5 p

c) Dresser le tableau de variation de f. 0.25

3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J, à déterminer. 0.25

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$, avec $0.7\le\alpha\le 0.8$. 0.5

c) Justifier que $g'(\alpha)=\alpha+2$ et en déduire la valeur de $\left(g^{-1}\right)'(0)$, où $g^{-1}$ est la réciproque de g. 0.5

4° Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C') ; ((C') étant la courbe de $g^{-1}$). 0.5

**Exercice 4** (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=(2x-2)(1+e^x)$ et soit $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement. 1pt

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(2x-2)\right)$. 0.5

c) En déduire que la droite D d'équation $y=2x-2$ est une asymptote oblique pour $\Gamma$. Etudier la position relative entre $\Gamma$ et D. 0.7

2° a) Calculer $f'(x)$ et justifier que $f''(x)=(2x+2)e^x$ 0.

b) Etudier les variations de $f'$ et en déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)>0$. 0

c) Dresser le tableau de variation de f. 0

3° a) Déterminer le point d'intersection de $\Gamma$ avec (Ox). 0

b) Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 de $\Gamma$.

c) Tracer D, T et $\Gamma$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

d) Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(2x-2)e^x=2+m$.

4° a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $I=\int_0^1(2x-2)e^x\,dx$

b) En déduire l'aire A de la partie du plan délimitée par $\Gamma$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

*Fin*