Exercice1 (3 points)

1° On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $7x-5y=1$

a) Justifier que le couple $(3;4)$ est solution de (E) puis résoudre (E).	**0.75 pt**
b) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ y \equiv 4[7] \end{cases}$	**0.75 pt**
2° Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs A tels que $\begin{cases} A \equiv 4[5] \\ A \equiv 3[7] \end{cases}$	
a) Soit A un élément de S. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers $(x;y)$ tel que $A=7x+3=5y+4$ où $(x;y)$ est une solution de (E)	**0.5 pt**
b) En déduire que $A \in S$ si et seulement si $A \equiv 24[35]$.	**0.5 pt**
c) Soit n et a deux entiers naturels ($0<n<9$) et B un entier qui s'écrit, en base n, sous la forme $\overline{374a}$. Déterminer n puis en déduire l'écriture décimale de l'entier B sachant qu'il appartient à S.	**0.5 pt**

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1° Pour tout nombre complexe z on pose $P(z)=z^3-(5+4i)z^2+(7+10i)z+5-10i$.

Calculer $P(i)$ puis déterminer les solutions $z_0; z_1$ et z_2 de l'équation $P(z)=0$ avec $\mathrm{Re}(z_0)<\mathrm{Re}(z_1)<\mathrm{Re}(z_2)$.	**1 pt**
2° On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0; z_1 et z_2.	
a) Déterminer la nature du triangle ABC .	**0.5 pt**
b) Soit G le barycentre du système $\{(A,13);(B,-3);(C,2)\}$. Déterminer l'affixe de G.	**0.25 pt**
c) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que $13\,MA^2-3\,MB^2+2\,MC^2=12$	**0.5 pt**
3° On considère l'hyperbole H de centre G qui passe par C et dont A est un sommet.	
a) Déterminer le 2ème sommet de H.	**0.25 pt**
b) Vérifier que l'équation de H peut s'écrire sous la forme $x^2-3(y-2)^2=-3$.	**0.5 pt**
c) Donner l' équation réduite de H puis déterminer ses foyers, ses asymptotes et son excentricité et la construire.	**1 pt**

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^3-x\ln x$ si $x>0$ et f(0)=0.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0.	**0.5 pt**
b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.	**0.5 pt**
2° a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer que (C) admet un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.	**0.5 pt**
b) Etudier les variations de f' et en déduire le signe de $f'(x)$.	**0.5 pt**
c) Dresser le tableau de variation de f.	**0.5 pt**
3° a) Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.	**0.25 pt**
b) Etudier la position relative entre (C) et (C') et justifier qu'elles se coupent en trois points dont l'un est d'abscisse α avec $0{,}45 \le \alpha \le 0{,}46$ ((C') étant la courbe de la réciproque f^{-1} de f).	**0.5 pt**
4° Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les courbes (C) et (C').	**0.5 pt**
5° a) A l'aide d'une intégration par parties déterminer la primitive F qui s'annule en 1 de la fonction f sur $]0;+\infty[$.	**0.25 pt**

b) Exprimer en fonction de n et α les intégrales $K=\int_{\alpha}^{1} f(t)dt$ et $I(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I(n)$. **0.75 pt**

c) Déduire l'aire S du domaine plan fermé par les courbes (C) et (C′). **0.25 pt**

Exercice 4 (4 points)

On considère un triangle équilatéral direct ABC de côté a (a>0). Soient D, E et F les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]. On construit le carré direct AGHD de centre O. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [EC], [GH] et [AD].

1° Faire une figure illustrant les données qu'on complètera au fur et à mesure. **0.25 pt**

2° a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en C et E en D. **0.25 pt**

b) Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. **0.5 pt**

3° a) Montrer qu'il existe une unique rotation r transformant H en B et D en E. Préciser son angle. Soit Ω son centre. **0.5 pt**

b) Montrer que Ω appartient à la droite (CF) et au cercle de diamètre [AB]. **0.5 pt**

c) En utilisant les angles $\left(\overrightarrow{D\Omega},\overrightarrow{DE}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DG}\right)$ montrer que $\Omega\in(DG)$. Placer Ω. **0.5 pt**

4° a) Montrer qu'il existe une similitude directe S et une seule qui transforme B en D et D en I. **0.25 pt**

b) Soit S' la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Déterminer $S'(B)$ et $S'(D)$. Caractériser S. **0.5 pt**

5° On considère la suite (M_n) définie par $M_0=B$ et $M_{n+1}=S(M_n)$.

a) Démontrer que le triangle AM_nM_{n+1} est rectangle. **0.25 pt**

b) Déterminer la nature du triangle ABM_{2019} et calculer son aire en fonction de a. **0.5 pt**

Exercice 5 (4 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

1° Etudier les variations de f et tracer sa courbe Γ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. **0.75 pt**

2° Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α et que $0,7<\alpha<0,8$. **0.25 pt**

3° Soit A l'aire du domaine délimité par Γ, (Ox) et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=\ln 3$.

a) Montrer que $A=\int_{\alpha}^{\ln 3}\dfrac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. **0.25 pt**

b) En posant $t=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, montrer que $A=\int_{\alpha}^{\frac{1}{2}}\dfrac{2dt}{t^2-1}$. **0.25 pt**

c) Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{2}{t^2-1}=\dfrac{a}{t-1}+\dfrac{b}{t+1}$ et en déduire la valeur de A. **0.5 pt**

4° Soit (I_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $I_n=\int_{\alpha}^{\ln 3}\left(f(t)\right)^{2n}dt$ et $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} I_k=I_1+I_2+\ldots+I_n$.

a) Montrer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ que $\dfrac{\ln 3-\alpha}{2^{2n}}\le I_n\le(\ln 3-\alpha)\alpha^{2n}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. **0.5 pt**

b) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $2f'(x)=\left(f(x)\right)^3-f(x)$ (1). **0.25 pt**

c) En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left(f(x)\right)^2=1+2\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)$ puis en déduire I_1. **0.5 pt**

5° a) Montrer à l'aide de l'égalité (1) que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}-I_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2^{2n}}-\alpha^{2n}\right)$. **0.25 pt**

b) Montrer que $I_{n+1}=\ln\left(\dfrac{3e^{-\alpha}}{4\alpha^2}\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2^{2k}}-\alpha^{2k}\right)$. **0.25 pt**

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(\alpha^{2k}-\dfrac{1}{2^{2k}}\right)\right)=\ln\left(\dfrac{3}{4\left(1-\alpha^2\right)}\right)$. **0.25 pt**

Fin