

### Exercice 1 (3 points)

Un groupe de 100 candidats ont passé un test d'inscription dans un centre de formation professionnelle.

Le test est composé de deux épreuves obligatoires : une écrite et une orale.

Les résultats ont montré que : 60 candidats ont réussi l'épreuve écrite dont 45 ont réussi aussi l'épreuve orale.

Parmi ceux qui ont échoué dans l'épreuve écrite 25 % ont réussi l'épreuve orale.

On choisit au hasard un candidat de ce groupe et on considère les évènements suivants :

A : « le candidat a réussi l'épreuve écrite» ; B : « le candidat a réussi l'épreuve orale».

Pour chacune des questions de cet exercice, une seule des trois réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $p(A)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
2	La probabilité $p(A \cap B)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
3	La probabilité $p_A(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
4	La probabilité $p_{\bar{A}}(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
5	la probabilité $p(B)$ est	0.75	0.55	0.1	(0.5 pt)

La durée de l'épreuve écrite varie de 20 à 60 minutes. On suppose que le temps X, exprimé en minutes, mis par un candidat avant de remettre sa copie, lors de cette épreuve, est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

6	La fonction de densité de X est	$f(x) = \frac{1}{20}$	$f(x) = \frac{1}{40}$	$f(x) = \frac{1}{60}$	(0.25 pt)
7	La probabilité que ce candidat remet sa copie après 30 minutes est	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	(0.25 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.

Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6	7
Réponse							

### Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe z on pose :  $P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+3i)z - 4i$ .

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $-8+6i$

0,5pt

b) Calculer  $P(i)$

0,5pt

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a :  $P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$ .

0,5pt

d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

0,5pt

2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives  $z_A = i$ ,  $z_B = 1-i$  et  $z_C = 2+2i$ .

0,5pt

a) Placer les points A, B et C.

0,5pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

0,25pt

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

0,25pt

d) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan d'affixe z tel que  $\left| \frac{z-2-2i}{z-1+i} \right| = 1$ .

0,5pt

3° Pour tout entier naturel n, on pose  $z_n = (z_C)^n$  et  $v_n = |z_n|$ .

a) Vérifier que  $z_n = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  puis en déduire l'écriture trigonométrique de  $z_n$ .

0,5pt

b) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

0,5pt

c) Calculer la limite de  $(v_n)$  et exprimer en fonction de n la somme  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

0,5pt

### Exercice 3 (5 points)

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x - 1 + 2xe^{-x}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- |   |        |
|---|--------|
| 1° a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$                        | 0,5pt  |
| b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Interpréter graphiquement.   | 0,5pt  |
| c) Montrer que la droite $D$ d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à $(C)$ et étudier la position relative entre $(C)$ et $D$ . | 0,5pt  |
| 2° a) Calculer la dérivée $f'$ puis montrer que l'expression de la dérivée seconde de $f$ est $f''(x) = (2x - 4)e^{-x}$                     | 0,5pt  |
| b) Montrer que la courbe $(C)$ admet un point d'inflexion A dont on donnera les coordonnées.  | 0,25pt |
| c) Etudier les variations de $f'$ et en déduire que $f'$ est positive.  | 0,5pt  |
| d) Dresser le tableau de variation de $f$ .   | 0,5pt  |
| 3° a) Montrer que la courbe $(C)$ coupe $(Ox)$ en un unique point d'abscisse $\alpha$ avec $0.2 < \alpha < 0.3$                             | 0,5pt  |
| b) Déterminer le point B de $(C)$ où la tangente T est parallèle à l'asymptote D. Donner une équation de T.                                 | 0,5pt  |
| c) Tracer D, T et $(C)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  | 0,5pt  |
| d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel $m$ , le nombre de solutions de l'équation : $-m - 1 + 2xe^{-x} = 0$       | 0,25pt |

### Exercice 4 (7 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2+x+x\ln x}{x}$  et soit  $(C)$  sa courbe

représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- |   |          |
|---|----------|
| 1° a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter graphiquement.   | (0,75pt) |
| b) Vérifier que $f(x) = \frac{2}{x} + 1 + \ln x$  | (0,5pt)  |
| c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement  | (0,5pt)  |
| 2° a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de $f$ .  | (1pt)    |
| b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $(C)$ au point d'abscisse $x_0 = 1$   | (0,5pt)  |
| 3° Soit $g$ la restriction de $f$ sur l'intervalle $I = ]0; 2]$   |          |
| a) Montrer que $g$ est une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.   | (0,5pt)  |
| b) Dresser le tableau de variation de $g^{-1}$ , où $g^{-1}$ est la fonction réciproque de $g$ .  | (0,5pt)  |
| c) Calculer $(g^{-1})'(3)$ (on pourra utiliser 2° b))   | (0,25pt) |
| d) Construire $(C)$ , $(C')$ et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , où $(C')$ est la courbe de $g^{-1}$ .  | (0,5pt)  |
| 4° On considère la fonction $h$ définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = f(x) - x$  |          |
| a) Dresser le tableau de variation de $h$ .   | (0,5pt)  |
| b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ , telle que $2 < \alpha < 3$ . Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$ et en déduire que $\forall x \geq \alpha$ on a $f(x) - x \leq 0$ | (0,5pt)  |
| 5° Soit $(u_n)$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$  |          |
| a) Montrer par récurrence que $u_n \geq \alpha$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ .  | (0,25pt) |
| b) Montrer que $(u_n)$ est décroissante (on pourra utiliser 4° b). En déduire que $(u_n)$ est convergente.  | (0,25pt) |
| 6° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $K = \int_1^e \ln x dx$ .  | (0,25pt) |
| b) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$  | (0,25pt) |

*Fin*

PROPOSITION DU CORRIGÉ

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6	7
Réponse	A	B	A	C	B	B	C

Exercice 2

$$1. P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+3i)z - 4i$$

a) Déterminons les racines carrées du nombre complexe  $-8+6i$  :

Un nombre complexe  $z = x + iy$  est une racine carrée de  $-8+6i$  si  $z^2 = -8+6i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |-8+6i| \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z) \\ 2xy = \operatorname{Im}(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y = \pm 3$$

Or d'après (3) :  $xy = 3 > 0$  donc  $x$  et  $y$  ont le même signe. Alors les racines carrées de  $-8+6i$  sont :

$$1+3i \text{ et } -1-3i$$

b) Calcul de  $P(i)$  :

$$\begin{aligned} P(z) &= z^3 - (3+2i)z^2 + (3+3i)z - 4i \\ p(i) &= i^3 - (3+2i)i^2 + (3+3i)i - 4i \\ &= -i + 3 + 2i + 3i - 3 - 4i = 0 \end{aligned}$$

Déterminons les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$

On peut utiliser le tableau d'Horner :

i	1	$-3-2i$	$3+3i$	$-4i$
		i	$1-i-3i$	$-4i$
	1	$-3-i$	$4i$	0

Donc  $a = -3-i$ ;  $b = 4$

$$\text{Donc } P(z) = (z-i)(z^2 - (3+i)z + 4)$$

La division euclidienne peut également être utilisée :

$$\begin{array}{r} P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (3+3i)z - 4i \quad | z-i \\ \hline -z^3 + iz^2 \\ \hline -(3+i)z^2 + (3+3i)z - 4i \\ (3+i)z^2 + (1-3i)z \\ \hline 4z - 4i \\ -4z + 4i \\ \hline 0 \end{array}$$

On peut aussi utiliser l'identification :

$$\begin{aligned} (z) &= (z-i)(z^2 + az + b) \\ &= z^3 + (a-i)z^2 + (b-ai)z - bi \end{aligned}$$

$$\text{Par identification} \begin{cases} a-i = -3-2i \\ b-ai = 3+3i \\ -bi = -4i \end{cases}$$

$$\text{Donc } a = -3-i; b = 4$$

d) L'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2 - (3+i)z + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-i = 0 \Leftrightarrow z=i \\ z^2 - (3+i)z + 4 = 0 \end{cases} \text{ ou }$$

$$\Delta = ((-3+i))^2 - 4 \times 1 \times 4 = -8+6i$$

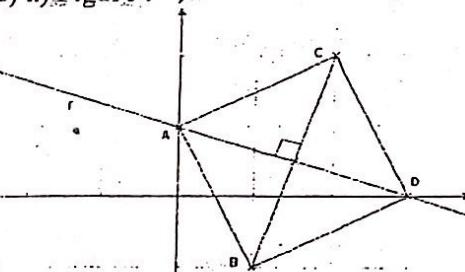
D'après la question n°1, le nombre  $\delta_1 = 1+3i$  est une racine carrée de  $\Delta$ , d'où les solutions de l'équation

$$P(z) = 0 \text{ sont } z' = \frac{3+i+1+3i}{2} = 2+2i \text{ et}$$

$$z'' = \frac{3+i-1-3i}{2} = 1-i. \text{ Donc l'ensemble de solutions}$$

de l'équation  $P(z) = 0$  est  $\{i; 1-i; 2+2i\}$

2) a) Figure :



b) La nature du triangle ABC

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1-i-i}{2+2i-i} = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{-i(i+2)}{2+i} = -i$$

Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

Autre méthode

$$AB = |z_B - z_A| = |1-i-i| = |1-2i| = \sqrt{5}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |2+2i-i| = |2+i| = \sqrt{5}$$

$$CB = |z_B - z_C| = |1-i-2-2i| = |-1-3i| = \sqrt{10}$$

Alors  $AB = AC$  et  $AB^2 + AC^2 = CB^2$ . Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

c) ABDC est un parallélogramme si et seulement si :

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow z_{\overline{AB}} = z_{\overline{CD}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C$$

$$\Leftrightarrow z_D = z_B + z_C - z_A = 1-i+2+2i-i = 3$$

$$\text{Donc } z_D = 3 \text{ et } D(3; 0)$$

Autrement :

ABDC est un parallélogramme si et seulement si les diagonales  $[AD]$  et  $[BC]$  ont le même milieu ; c-à-d :

$$\frac{z_A + z_D}{2} = \frac{z_B + z_C}{2} \Leftrightarrow z_D = z_B + z_C - z_A = 3$$

3) L'ensemble  $\Gamma$  est l'ensemble des points M du plan

affixes z tel que  $\left| \frac{z - 2 - 2i}{z - 1 + i} \right| = 1$

$$\left| \frac{z - 2 - 2i}{z - 1 + i} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z - (2 + 2i)}{z - (1 - i)} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z - z_B}{z - z_C} \right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$|z - z_B| = |z - z_C| \Leftrightarrow MB = MC$$

Donc  $\Gamma$  est l'ensemble des points équidistants de B et C, c'est donc la médiatrice du segment [BC] (c'est la droite)

(AD))

Méthode analytique: En posant  $z = x + iy$ :

$$\left| \frac{z - 2 - 2i}{z - 1 + i} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{(x - 2) + i(y - 2)}{(x - 1) + i(y + 1)} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2}$$

$\Leftrightarrow x + 3y - 3 = 0$ . D'où l'ensemble  $\Gamma$  est la droite

d'équation  $x + 3y - 3 = 0$ , c'est la médiatrice de [BC]

3°  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $z_n = (z_C)^n$  et  $v_n = |z_n|$ .

a) Vérifions que  $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ . On a

$$|z_C| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ D'où :}$$

$$z_C = 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

L'écriture trigonométrique de  $z_n$ :

$$z_n = (z_C)^n = \left( 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^n = \left( 2\sqrt{2} \right)^n e^{in\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{d'où } z_n = \left( 2\sqrt{2} \right)^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

b) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique:

$$v_{n+1} = |z_{n+1}| = |(z_C)^{n+1}| = |z_C| |(z_C)^n| = 2\sqrt{2} |z_C|^n = 2\sqrt{2} \times v_n$$

$$v_{n+1} = 2\sqrt{2} \times v_n$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 2\sqrt{2}$

et de premier terme  $v_0 = |z_C|^0 = 1$

c) La limite de  $(v_n)$ :

$$v_n = (2\sqrt{2})^n \text{ et puisque } 2\sqrt{2} > 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$$

Calcul de la somme  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ :

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - (q)^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - (2\sqrt{2})^{n+1}}{1 - 2\sqrt{2}}$$

Exercice 3 :

f est la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 2x - 1 + 2xe^{-x}$$
 et soit (C) sa courbe

représentative dans un repère orthonormé ( $O; i, j$ ).

1° a) Calcul de limites :

$$\text{On a } f(x) = 2x - 1 + \frac{2x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x}{e^x} \right) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{e^x} \right) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{e^x} \right) = 2 - 0 + \infty = +\infty$$

Interprétation graphique

La courbe (C) admet une B.P. de direction ( $Oy$ ) au voisinage de  $(-\infty)$

c) Montrons que la droite d'équation  $y = 2x - 1$  est une asymptote oblique

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . D'autre part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 + 2xe^{-x} - (2x - 1))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x}{e^x} \right) = 0$$

Alors la droite D d'équation  $y = 2x - 1$  est une asymptote oblique de (C) au voisinage de  $(+\infty)$

Pour étudier la P.R. de (C) et D on étudie le signe de  $f(x) - y$ :  $f(x) - y = \frac{2x}{e^x}$  alors

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
P.R.	D/(C)	$\cap$	(C)/D

La droite D coupe (C) au point de coordonnées  $(0; -1)$

2) a) Calcul des dérivés de f :

$$f(x) = 2x - 1 + 2xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2 + 2e^{-x} + 2x(-e^{-x})$$

$$f'(x) = 2 + (2 - 2x)e^{-x} \text{ et } f''(x) = e^{-x}(-4 + 2x)e^{-x}$$

b) Le point d'inflexion de (C):

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Puisque  $f''$  s'annule et change de signe à  $x_0 = 2$ , et  $f(2) = 3 + 4e^{-2}$ , le point A =  $(2; f(2))$  est un point d'inflexion de la courbe (C). A =  $(2; 3 + 4e^{-2})$

c) Les variations de  $f'$ :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$	$2 - \frac{2}{e^2}$	$\nearrow$

Le minimum de  $f'$  est positif, donc  $f'$  est positive

d) Tableau de variations de f :

	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	-	-	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

3° a) D'après l'étude et les variations de  $f$ :  $f$  est continue, strictement monotone et change de signe, alors la courbe (C) coupe l'axe ( $Ox$ ) en un seul point d'abscisse  $\alpha$ .

D'autre part :  $f(0.2) \approx -0.27$  et  $f(0.3) \approx 0.04$

$$f(0.2) \times f(0.3) < 0 \text{ Alors } 0.2 < \alpha < 0.3$$

b) Pour que à (C) en un point d'abscisse  $x$  soit parallèle à l'asymptote D d'équation  $y = 2x - 1$  il faut et il suffit que:  $f'(x) = 2$

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 2 + (2 - 2x)e^{-x} = 2$$

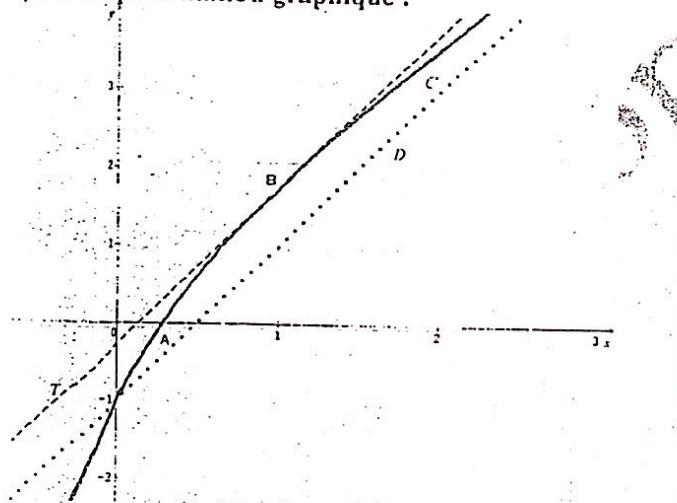
$$\Leftrightarrow (2 - 2x)e^{-x} = 0 \text{ or } e^{-x} > 0$$

Donc  $2 - 2x = 0$  et  $x = 1$  et comme  $f(1) = 1 + 2e^{-1}$  alors le point auquel la tangente est parallèle à D est  $B(1; 1 + 2e^{-1})$

Équation de la tangente en B :  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$\begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 1 - 2e^{-1} \end{cases} \text{ donc } T: y = 2x - 1 + 2e^{-1}$$

c) La Représentation graphique :



d) Discussion graphique, du nombre de solutions de l'équation  $-m - 1 + 2xe^{-x} = 0$

$$-m - 1 + 2xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2xe^{-x} = m$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 + 2xe^{-x} = 2x + m \Leftrightarrow f(x) = 2x + m$$

Les solutions de l'équation  $f(x) = 2x + m$  sont les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec la droite  $D_m$  d'équation  $y = 2x + m$  parallèle à D et à T. Alors

Si  $m \leq -1$  : il y a une seule solution

Si  $-1 < m < -1 + 2e^{-1}$  : il y a 2 solutions

Si  $m = -1 + 2e^{-1}$  : il y a une seule solution

Si  $m > -1 + 2e^{-1}$  : il n'y a pas de solution

### Exercice 5 :

1)  $f$  est la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{x + 2 + x \ln x}{x}$$

$$\text{a) On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 + x \ln x) = 2$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2 + x \ln x}{x} = +\infty$$

#### Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation :  $x = 0$  ( c'est l'axe des ordonnées )

$$\text{b) } f(x) = \frac{x + 2 + x \ln x}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} + \frac{x \ln x}{x} = 1 + \frac{2}{x} + \ln x$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x} + \ln x \right) = 1 + 0 + (+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

#### Interprétation graphique :

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction ( $Ox$ ) au voisinage de  $(+\infty)$

$$\text{2) a) } f(x) = \frac{-2 + x + \ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2 + 1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2 + x}{x^2}$$

#### Tableau de variation de $f$

$x$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$2 + \ln 2$	$+\infty$

b) Équations de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1 :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow T: y = -x + 4$$

3)  $g$  est la restriction de  $f$  sur  $I = [0; 2]$

a) Tableau de variation de  $g$  :

$x$	0	2
$g'(x)$	-	0
$g(x)$	$+\infty$	$2 + \ln 2$

D'après l'étude et le t.v. de  $g$  :  $g$  est continue et strictement croissante de  $I = [0; 2]$  sur

$J = [2 + \ln 2; +\infty[$  donc  $g$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J$ .

b) T.V de  $g^{-1}$

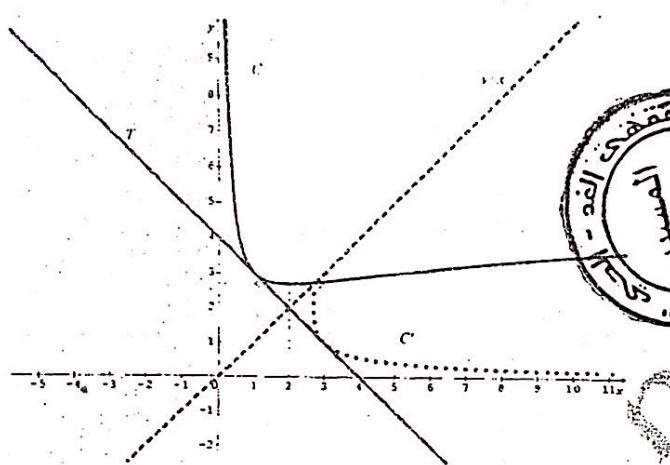
x	2+ln 2	+	+∞
$(g^{-1})'(x)$	.	.	.
$g^{-1}(x)$	2	↗	0

c) Calcul de  $(g^{-1})'(3)$

$$(g^{-1})'(3) = \frac{1}{g'(g^{-1}(3))} = \frac{1}{g'(1)} = -1$$

En effet  $\begin{cases} g^{-1}(3)=1 \\ g'(1)=-1 \end{cases}$

d) La représentation graphique de (C) et (C')



4) On considère la fonction  $h(x) = f(x) - x$

a) Les variations de h :

$$h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-2+x}{x^2} - 1 = \frac{-x^2 + x - 2}{x^2}$$

Résolvons l'équation :  $-x^2 + x - 2 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times (-2) = -7 < 0$$

Donc  $-x^2 + x - 2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'après le T.V de h :

x	0	+	+∞
$h'(x)$	.	.	.
$h(x)$	+∞	↘	-∞

D'après l'étude et les variations de h :

h est continue et strictement décroissante de  $[0; +\infty]$  sur  $\mathbb{R}$  et comme  $0 \in \mathbb{R}$  alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$

$$\text{or : } h(2) = \frac{4+2\ln 2}{2} - 2 \approx 0,69 > 0$$

$$h(3) = \frac{e+3\ln 3}{3} - 3 \approx -0,23 < 0$$

$$h(2) \times h(3) < 0 \quad \text{Donc } 2 < \alpha < 3$$

Comme  $h(\alpha) = 0$  alors  $f(\alpha) - \alpha = 0$  soit  $f(\alpha) = \alpha$

D'après le T.V de h :

$$\forall x \geq \alpha, \quad h(x) \leq 0 \Rightarrow \forall x \geq \alpha : \quad f(x) - x \leq 0$$

$$5) \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Montrons par récurrence que :  $U_n > \alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Initialisation :  $U_0 = 3 > \alpha$

Donc c'est vrai pour le 1<sup>er</sup> terme

Hérité

Supposons que  $U_n > \alpha$

Comme f est croissante sur  $[1; +\infty]$  alors :

$$f(U_n) > f(\alpha) \text{ d'où } U_{n+1} > \alpha$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n > \alpha$

b) Montrons que  $(U_n)$  est décroissante

D'après 4<sup>e</sup> b) on a :  $\forall x \geq \alpha, \quad f(x) - x \leq 0$

Puisque  $U_n \geq \alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$Alors : f(U_n) - U_n \leq 0$$

$$D'où : U_{n+1} - U_n \leq 0$$

Donc  $(U_n)$  est décroissante

Puisque  $(U_n)$  décroissante et minorée (par  $\alpha$ ) alors

$(U_n)$  est convergente

$$6) \text{ Calcul de } K = \int_1^e \ln x \, dx$$

Par une intégration par parties :

$$K = \int_1^e 1 \times \ln x \, dx$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u'(x) = 1 \rightarrow u(x) = x \\ v(x) = \ln x \rightarrow v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Alors :

$$K = [x \ln x]_1^e - \int_1^e \left( x \cdot \frac{1}{x} \right) dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e$$

$$\Rightarrow K = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) \Rightarrow K = 1$$

b) L'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=e$  est

$$A = \int_1^e f(x) \, dx = \int_1^e \left( \frac{2}{x} + 1 + \ln x \right) dx$$

$$\Rightarrow A = \int_1^e \left( \frac{2}{x} + 1 \right) dx + k = [2 \ln x + x]_1^e + k$$

$$A = (2 \ln e + e) - (2 \ln 1 + 1) + k \Rightarrow A = (2 + e) u.a.$$