RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE — **Série : Sciences de la nature**
MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE — **Épreuve : Mathématiques**
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION — **Durée : 4heures**
SERVICE DES EXAMENS — **Coefficient : 6**

Baccalauréat 2014 session Normale

Exercice *1*(3points)

Une cage contient six pigeons dont quatre femelles et deux pigeons mâles ; parmi ces pigeons, on dispose de deux couples de plumage blanc et de deux femelles de plumage gris. On tire simultanément deux oiseaux de cette cage (les tirages sont équiprobables).

1) on considère les probabilités :

p_1 la probabilité de l'événement A : « Les deux oiseaux tirés son de plumage gris »

p_2 la probabilité de l'événement B : « Les deux oiseaux tirés son de même couleur »

p_3 la probabilité de l'événement C : « Les deux oiseaux tirés son de même sexe »

2) On suppose dans cette question, que le tirage a donné deux oiseaux de même couleur .On note p_4 la probabilité que ces deux oiseaux soient de même sexe.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le nombre de tirages possibles est :	6^2	A_6^2	C_6^2
2	La probabilité $p_1$est :	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$
3	La probabilité $p_2$est :	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{15}$
4	La probabilité $p_3$est :	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$
5	La probabilité $p_4$est :	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{15}$

Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse Aucune justification n'est demandée :

Question N°	1	2	3	4	5
Réponse					

Exercice2(5points)

On considère Le plan complexe muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes chacune des équations suivantes:

$(E_1)\quad z^2-2z+17=0 \quad (E_2)\quad z^2+8z+17=0$

2) Pour tout nombre complexe z tel que$z\neq -4-i$, on pose : $f(z)=\frac{z-1+4i}{z+4+i}$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$Z_A=-4-i$,$Z_B=1-4i$ et $Z_C=4+i$

a) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C ; et déterminer la nature du triangle ABC.

b) Calculer $\alpha=f(-1+4i)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.

c)Déterminer puis construire l'ensembleΓ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$

d) Déterminer puis construire l'ensembleΓ_2 des points M du plan d'affixe z tels le nombre f(z) soit imaginaire pur.

3) on considère la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0=4+i$,et pour tout entier naturel n ,$z_{n+1}=\frac{\alpha}{2}z_n$ .On appelle M_n le point d'affixe z_n .

a) Calculer z_1, z_2
b) Montrer que la suite de terme général $V_n = |z_n|$ est une suite géométrique.
c) On pose $S_n = OM_0 + OM_1 + \cdots + OM_n$ Donner l'expression de S_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 3 (7points)

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x - 1 + 2e^x$.Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i}, \vec{j}$) unité 1cm.

1a) Justifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculer et donner une interprétation graphique de : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (2x - 1))$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2a) Dresser le tableau de variation de f
b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α puis vérifier que$-0,3 < \alpha < -0,2$.
3) Construire les courbes (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproquef^{-1} dans le repère (O ;$\vec{i}, \vec{j}$).
4a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $x_0 = \alpha$
b) Vérifier que : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{-2\alpha+3}$
5) On considère la suite (U_n)définie pour tout entier naturel n par : $U_n = f(n)$
a) Montrer que (U_n) est la somme de deux suites ; une arithmétique et une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
b) on pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ .Donner l'expression de S_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 4(7points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :$g(x) = x - 3 + 3\ln x$

1a) calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g
2a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α puis vérifier que$1,59 < \alpha < 1,60$.
b) En déduire le signe de g sur l'intervalle$]0, +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :$f(x) = \frac{(x-3)\ln x}{x}$

On peut donc aussi écrire :$f(x) = \frac{(x-3)}{x}\ln x$ (1) et $f(x) = \ln x - \frac{3\ln x}{x}$ (2)

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i}, \vec{j}$)

1a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.
2a) Calculer la dérivée $f'(x)$ .vérifier que $f'(x)$ et g(x) ont le même signe.
b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-3)^2}{3\alpha}$ et donner une valeur approchée de$f(\alpha)$ à 10^{-1}
c) Dresser le tableau de variation de fonction f.
3a) Déterminer une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse.
b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Tracer (C) et T
c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $2x^2 - mx + x\ln x - 3\ln x = 0$.

4a) Calculer l'intégrale $J = \int_1^e \frac{lnx}{x} dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^e lnxdx$.

c) Justifier que l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est donnée par $S = -\int_1^e f(x)dx$. Calculer cette aire.

Fin

Corrigé baccalauréat 2014 Session Normale

Exercice 1

Question N°	1	2	3	4	5
Réponse	C	B	B	C	B

Corrigé Exercice 2

1) $(E_1)\quad z^2-2z+17=0$

$\Delta=4-68=-64=64i^2=(8i)^2$

$z_1=\dfrac{2-8i}{2}=1-4i$

$z_2=1+4i$

$S_1=\{1-4i\,,1+4i\}$

$(E_2)\quad z^2+8z+17=0$

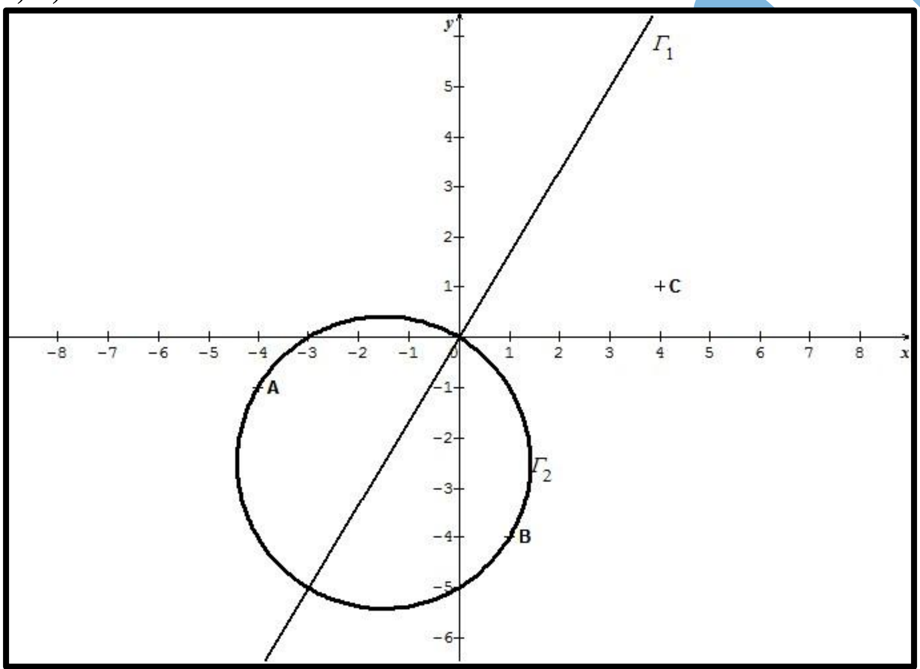
$\Delta=64-68=-4=4i^2=(2i)^2$

$z_3=\dfrac{-8-2i}{2}=-4-i$

$z_4=-4+i$

$S_2=\{-4-i\,,-4+i\}$

2) a)



Démontrons que le triangle ABC est isocèle rectangle en B

on pose :

$K=\dfrac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$

$=\dfrac{-4-i-1+4i}{4+i-1+4i}$

$=\dfrac{-5+3i}{3+5i}$

$=\dfrac{(-5+3i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}$

$$= \frac{-15+25i+9i+15}{9+25} = \frac{34i}{34} = i$$

$$K = i \quad \Rightarrow \begin{cases} |K| = 1 \Rightarrow \frac{BA}{BC} = 1 \\ argK = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Le triangle ABC est isocèle rectangle en B**

b) $\alpha = f(-1+4i)$

$$\alpha = \frac{-1+4i-1+4i}{-1+4i+4+i}$$

$$= \frac{-2+8i}{3+5i}$$

$$= \frac{(-2+8i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}$$

$$= \frac{-6+10i+24i+40}{9+25}$$

$$= \frac{34+34i}{34}$$

$$\alpha = 1+i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

c) $|f(z)| = 1 \Rightarrow$

$$\left|\frac{z-1+4i}{z+4+i}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A}\right| = 1 \Rightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Rightarrow \Gamma_1 \text{ est la médiatrice du } [AB]$$

d) $f(z)$ **est imaginaire pur ssi** $\begin{cases} f(z) = 0 \text{ ou} \\ argf(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \Gamma_2$ **Le cercle de diamètre** $[AB]$ **privé de A**

3)

$$z_{n+1} = \frac{\alpha}{2} z_n = \frac{(1+i)}{2} z_n$$

a)

$$z_1 = \frac{(1+i)}{2} z_0$$

$$z_1 = \frac{(1+i)(4+i)}{2} = \frac{4+i+4i-1}{2} = \frac{3+5i}{2}$$

$$z_2 = \frac{(1+i)}{2} z_1 = \frac{(1+i)}{2}\left(\frac{3+5i}{2}\right) = \frac{(1+i)(3+5i)}{4} = \frac{3+5i+3i-5}{4} = \frac{-2+8i}{4}$$

$$z_2 = \frac{-1+4i}{2}$$

b) $V_n = |z_n| \Rightarrow V_{n+1} = |z_{n+1}|$

$$V_{n+1} = \left|\frac{(1+i)}{2} z_n\right|$$

$$= \left|\frac{1+i}{2}\right| |z_n|$$

$$V_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} V_n$$

V_n **est une suite géométrique de raison** $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et de premier terme $V_0 = |z_0| = |4+i| = \sqrt{17}$

c) $S_n = OM_0 + OM_1 + \cdots + OM_n$

$$= |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n|$$
$$= V_0 + V_1 + \cdots + V_n$$

est la somme de $(n+1)$ terme d'un suite géométrique

$$S_n = \frac{\sqrt{17}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{\sqrt{17}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2\sqrt{17}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{17}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2\sqrt{17}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{17}(2+\sqrt{2})}{4-2} = \sqrt{17}(2+\sqrt{2})$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2\sqrt{17}+\sqrt{34}$$

Exercice 3

$f(x) = 2x - 1 + 2e^x.$

. 1a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x-1+2e^x) = -\infty - 1 + 0 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x-1+2e^x) = +\infty - 1 + \infty = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(2x-1)\big) = \lim_{x\to-\infty}(2x-1+2e^x-2x+1) = \lim_{x\to-\infty} 2e^x = 0 \Rightarrow$ **la courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x-1$ au voisinage de $-\infty$**

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1+2e^x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+2\frac{e^x}{x}\right) = 2 - 0 + \infty. \Rightarrow$ **la courbe (C) admet une branche infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$**

2a) $f'(x) = 2 + 2e^x > 0$

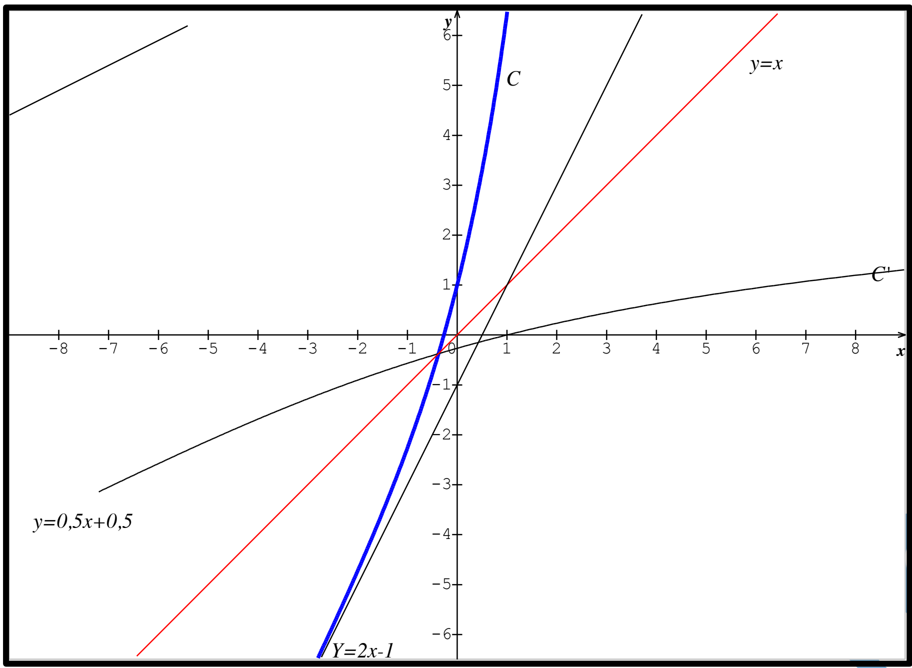
x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

b) f est continue et strictement croissante de ℝ vers J=ℝ d'où f réalise une bijection

c) f réalise une bijection de ℝ vers J et 0∈ J donc il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$

$f(-0,3) \approx -0,11 < 0$; $f(-0,2) \approx 0,23 > 0$

$f(-0,3) \times f(-0,2) < 0 \Rightarrow -0,3 < \alpha < -0,2$



4a)

$f(\alpha)=0 \Rightarrow\ 2\alpha-1+2e^{\alpha}=0 \Rightarrow 2e^{\alpha}=-2\alpha+1$

$f'(\alpha)=2+2e^{\alpha}$ remplaçons $2e^{\alpha}$ par $-2\alpha+1 \Rightarrow$

$f'(\alpha)=2-2\alpha+1=3-2\alpha$

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha) \Rightarrow y=(3-2\alpha)(x-\alpha)=(3-2\alpha)x-\alpha(3-2\alpha)$

b) $f(\alpha)=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=\alpha$

$$(\mathrm{f}^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{f'(\alpha)}=\frac{1}{3-2\alpha}$$

5a) $U_n=f(n)=2n-1+2e^{n}=v_n+w_n$

U_n est la somme de deux suites l'une arithmétique $v_n=2n-1$ de raison $r=2$ et de premier terme $v_0=-1$

et l'autre géométrique définie par $w_n=2e^{n}$ de raison $q=e$ et de premier terme $w_0=2$

b) $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n=S_{V_n}+S_{W_n}$

$$=\frac{(n+1)(V_0+v_n)}{2}+\frac{w_0}{1-q}(1-q^{n+1})$$

$$S_n=\frac{(n+1)(-1+2n-1)}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=\frac{(n+1)(2n-2)}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=\frac{2n^2-2n+2n-2}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=\frac{2n^2-2}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=n^2-1+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} n^2-1+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})=+\infty-1+\infty=+\infty$$

Exercice 4

$g(x)=x-3+3lnx$

1a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - 3 + 3lnx = 0 - 3 - \infty = -\infty$

, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x - 3 + 3lnx = +\infty - 3 + \infty = +\infty$

b) $g'(x) = 1 + \frac{3}{x} > 0$

x	0		$+\infty$
g'(x)	||	+	
g(x)	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2a) g est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$

$g(1,59) \approx -0,0187 < 0$ et $g(1,60) \approx 0,010 > 0$

$g(1,59) \times g(1,60) < 0 \Rightarrow 1,59 < \alpha < 1,60$

b) Signe de g :

X	0		α		$+\infty$
g(X)	||	−	0	+	

Partie B

1a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x-3)lnx}{x} = -3 \times (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} lnx - \frac{3lnx}{x} = +\infty - 0 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - lnx) = \lim\limits_{x\to +\infty} lnx - \frac{3lnx}{x} - lnx = \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{3lnx}{x} = -3 \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}$ f(x)= $+\infty$ $\Rightarrow$ la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - lnx) = 0 \Rightarrow$ la fonction $h(x) = lnx$ est asymptote à f au voisinage de $+\infty$

2a) $f(x) = lnx - \frac{3lnx}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \left(\frac{\frac{3}{x} \times x - 3lnx}{x^2}\right) = \frac{1}{x} - \left(\frac{3 - 3lnx}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2} - \left(\frac{3 - 3lnx}{x^2}\right) = \frac{x - 3 + 3lnx}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$x^2 > 0 \Rightarrow$ le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

b) $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha - 3 + 3ln\alpha = 0$

$\Rightarrow 3ln\alpha = 3 - \alpha$

$\Rightarrow ln\alpha = \frac{3-\alpha}{3}$

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha - 3)ln\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha - 3)\left(\frac{3-\alpha}{3}\right)}{\alpha} = \frac{(\alpha - 3)\left(\frac{3-\alpha}{3}\right)}{\alpha} = \frac{(3-\alpha)(\alpha - 3)}{3\alpha}$$

$$= \frac{-(\alpha - 3)(\alpha - 3)}{3\alpha}$$

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 3)^2}{3\alpha}$$

$f(\alpha) \approx -0,4$

c)

x	0		α		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	f(α)	↗	$+\infty$

3a) $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = -2$. $f(1) = 0$ **,les coordonnées du point A(1,0)**

Équation de la tangente T en A : $y = -2(x-1) = -2x + 2$

b) Intersection de (C) avec (OX) $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$

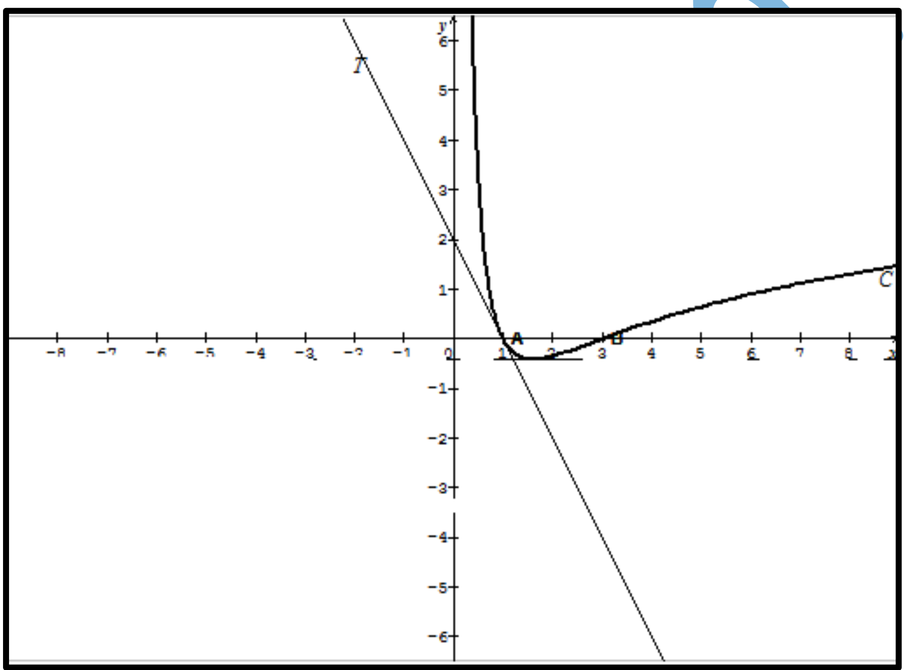
$$\frac{(x-3)\ln x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)\ln x = 0$$

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ ou\ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$S = \{1, 3\}$$

Les coordonnées des points d'intersections de (C) avec (OX) sont : $A(1,0)$ *et* $B(3,0)$



c) $2x^2 - mx + x\ln x - 3\ln x = 0$

$mx = 2x^2 + x\ln x - 3\ln x$

$m = \dfrac{2x^2 + x\ln x - 3\ln x}{x}$

$m = 2x + \ln x - \dfrac{3\ln x}{x}$

$-2x + m = \ln x - \dfrac{3\ln x}{x}$

$-2x + m = f(x)$

Les solutions de l'équation $f(x) = -2x + m$ **sont les abscisses des points d'intersections entre la courbe (C) de f et la droite** (D_m) **d'équation** $y = -2x + m$

m	$-\infty$		2		$+\infty$
nombre de solutions	0 solution		1 solution	2 solutions	

4a)

$$J = \int_1^e \frac{lnx}{x} dx = \left[\frac{(lnx)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}$$

b) calcukons I à l'aide d'une I .P.P

$$I = \int_1^e lnxdx$$

$$On\ pose \begin{cases} u = lnx \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$I = [xlnx]_1^e - \int_1^e dx$$

$$I = e - [x]_1^e$$

$$I = e - e + 1$$

$$I = 1$$

c)signe de f

x	0		1		3		$+\infty$
lnx	‖	$-$	0	$+$		$+$	
x-3	‖	$-$		$-$	0	$+$	
f(x)	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

sur $[1, e]$ $f(x) \leq 0 \Rightarrow S = -\int_1^e f(x)dx$

$$S = -\int_1^e f(x)dx = -\left(\int_1^e lnxdx - 3\int_1^e \frac{lnx}{x}dx\right)$$

$$S = -(I - 3J)$$

$$S = -\left(1 - \frac{3}{2}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}$$