Bac 2019 session complémentaire

Énoncé

Exercice N°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$. Pour tout nombre complexe z on pose :
$P(z) = z^3 - (12+5i)z^2 + (45+42i)z - (54+97i)$.

1. a. Déterminer les nombres m et p tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-3-4i)(z^2+mz+p)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

b. On considère les points A, B et C images respectives des solutions de l'équation $P(z) = 0$, avec $\mathbb{R}e(z_A) \geq \mathbb{R}e(z_B) \geq \mathbb{R}e(z_C)$.
Placer les points A, B et C.

2. a. Déterminer l'affixe du point I, barycentre du système $\{(A;-3);(B;2);(C;3)\}$.

b. Donner l'écriture complexe de la similitude directe S de centre I, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

c. Montrer que l'image de C par S est le point D d'affixe 1+4i.

3. On considère l'ellipse Γ de centre I dont D et A sont des sommets.

a. Donner l'équation réduite de Γ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b. Déterminer l'excentricité, les foyers et les autres sommets de Γ. Construire Γ.

4. On considère la suite (M_n) des points du plan définis par $M_0 = C$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $M_{n+1} = S(M_n)$.

a. Déterminer les affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 des points M_1 , M_2 et M_3 .

b. Montrer que tous les points M_n appartiennent à l'une des quatre droites (IA), (IB), (IC) et (ID). Laquelle passe par M_{2019}.

Exercice N°2 :

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_2^4 \frac{(x-2)^n e^{2-x}}{n!} dx$.

1. a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(1-e^{-2})$.

2. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-2}$.

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2^n}{n!} \times e^{-2}$.

a. Vérifier que $\forall n \geq 5$; $u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$.

b. Montrer que $\forall n \geq 5;\ 0 \leq u_n \leq \frac{4}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 0 \leq I_n \leq (e^2-1)u_n$. puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ I_n = 1 - e^{-2} \times \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right) = 1 - e^{-2} \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right)$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^2$.

Exercice N°3 :

On considère un triangle ABC rectangle isocèle direct en A. On définit les milieux respectifs I, J, K et O de segments [AB], [BC], [CA] et [AJ]. Soit D le symétrique de A par rapport à J.

1. Placer les données précédentes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
2. On considère l'antidéplacement f qui transforme K en J et I en D. Vérifier que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.
3. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui transforme A en I et B en J.

b. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

c. Montrer que le centre Ω de S appartient aux cercles circonscrits aux triangles AOI et BIJ. En déduire que $\Omega \in (BO)$.

d. Déterminer S(C) et en déduire que les points Ω, C et I sont alignés.

e. Trouver deux réels a et b tels que $\Omega = \text{bar}\{(C,a);(I,b)\}$.

4. Soit h l'homothétie de centre Ω qui transforme O en B et soit $g = h \circ S$.

a. Montrer que h(I) = C et en déduire le rapport de h.

b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de g et déterminer g(A) et g(I).

c. Déterminer l'image du carré AIJK par g et en déduire que la droite (ΩD) passe par le milieu L du segment [AI].

Exercice N°4 :

Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{3\ln x}{1+x^3}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Pour tout réel strictement positif x, on pose $u(x) = 1 + x^3(1 - 3\ln x)$.

a. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

b. Dresser le tableau de variation de u.

c. Montrer que l'équation u(x) = 0 admet une unique solution α et que $1{,}5 \leq \alpha \leq 1{,}6$. En déduire le signe de u(x).

2. a. Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Montrer que $\forall x>0\ \ f'(x) = \frac{3u(x)}{x(1+x^3)^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

c. Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^3}$ et tracer la courbe (C).

3. Pour tout entier n strictement positif, on définit la suite (v_n) par $v_n = \int_1^e \frac{(\ln t)^n}{1+t^3}\,dt$.

a. Montrer que la suite (v_n) est décroissante et minorée puis en déduire qu'elle est convergente.

b. Montrer que $\forall n\geq1;\ \frac{1}{1+e^3}\int_1^e (\ln t)^n dt \leq v_n \leq \int_1^e (\ln t)^n dt$.

4. On note, pour tout entier n strictement positif, $w_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$.

a. Justifier que la suite (w_n) est décroissante.

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n\geq1;\ w_{n+1} = e - (n+1)w_n$.

c. Montrer que $\forall n \geq 1;\ \frac{e}{n+2} \leq w_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

d. Justifier que $\frac{w_n}{1+e^3} \leq v_n \leq \frac{w_n}{2}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.