Exercice 1 :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	C	A	B	A	B	C

Exercice 2 :

1) $P(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$

a) $P(1) = 1 - 7 + 19 - 13 = 20 - 20 = 0$

$\therefore P(1) = 0$

b)

	1	-7	19	-13
1		1	-6	13
	1	-6	13	0

$\therefore \forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z-1)(z^2 - 6z + 13)$

c) $P(z) = 0 \iff (z-1)(z^2 - 6z + 13) = 0$

$\iff z - 1 = 0$ ou $z^2 - 6z + 13 = 0$

$\iff z = 1$ ou $z^2 - 6z + 13 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4\times1\times13 = 36 - 52 = -16$

$= 16i^2 = (4i)^2$

$z' = \dfrac{6+4i}{2\times1} = \dfrac{6+4i}{2} = 3+2i$

$z'' = \dfrac{6-4i}{2\times1} = \dfrac{6-4i}{2} = 3-2i$

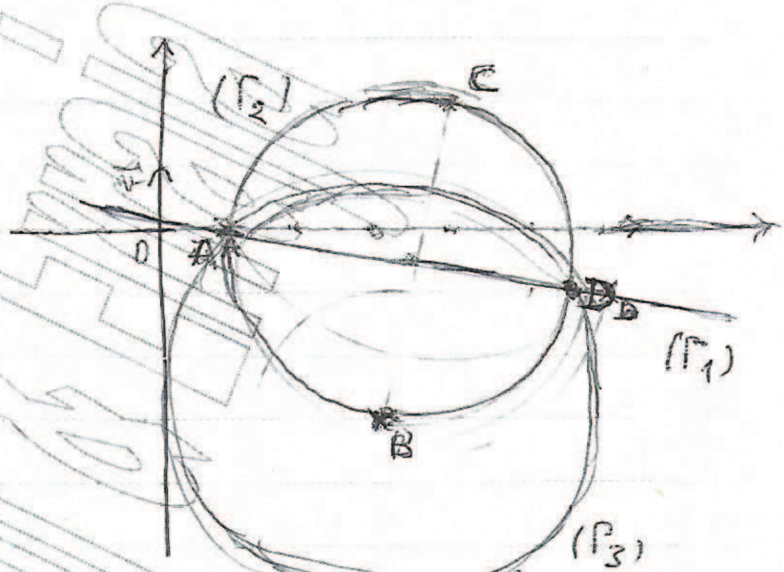
$S = \{1, 3+2i, 3-2i\}$

$Im(3-2i) < Im(1) < Im(3+2i)$

$\therefore z_1 = 3-2i,\ z_0 = 1$ et $z_2 = 3+2i$

2. a) * $z_B = z_1 - i = 3 - 2i - i \ \therefore z_B = 3-3i$

* $z_C = z_2 + 1 = 3+2i+1 \ \therefore z_C = 4+2i$



b) * $AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |3-3i-1|^2 = |2-3i|^2$

$= (2)^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$

* $AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |4+2i-1|^2 = |3+2i|^2$

$= (3)^2 + (2)^2 = 9 + 4 = 13$

* $BC^2 = |z_C - z_B|^2 = |4+2i-3+3i|^2 = |1+5i|^2$

$= (1)^2 + (5)^2 = 1 + 25 = 26$

Donc $AB = AC$ et $AB^2 + AC^2 = BC^2$

d'où ABC est isocèle et rectangle en A.

c) ABDC # $\iff \vec{CD} = \vec{AB} \iff z_D - z_C = z_B - z_A$

$\iff z_D = z_B - z_A + z_C \iff z_D = 3 - 3i - 1 + 4 + 2i$

$\iff z_D = 6 - i$

3) $\forall z \neq 3-3i,\ f(z) = \dfrac{z-4-2i}{z-3+3i}$

a) $f(z_D) = \dfrac{6-i-4-2i}{6-i-3+3i} = \dfrac{2-3i}{3+2i} = \dfrac{-3i-2i^2}{3+2i}$

$= \dfrac{-i(3+2i)}{(3+2i)} = -i \quad \therefore f(z_D) = -i$

$\therefore \left|\dfrac{z_D - z_C}{z_D - z_B}\right| = |-i|$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_B}\right) = \arg(-i)\ [2\pi]$

$\therefore \dfrac{CD}{BD} = 1$ et $(\vec{BD}, \vec{CD}) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\therefore$ DBC est isocèle et rectangle en D (indirect)

Exercice 2 (suite)

3) (suite)

b) $M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_C}{z-z_B}\right|=1$

$\Leftrightarrow \frac{CM}{BM}=1 \Leftrightarrow CM=BM$

∴ Γ_1 est la médiatrice du segment [BC]

(voir figure).

c) $M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow f(z)\in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg[f(z)]=\frac{\pi}{2}[\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left[\frac{z-z_C}{z-z_B}\right]=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\vec{BM},\vec{CM})=\frac{\pi}{2}[\pi]$.

∴ Γ_2 est le cercle de diamètre [BC] privé de B et C. (voir figure).

d) $M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow |f(z)-1|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{z-4-2i}{z-3+3i}-1\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z-4-2i-z+3-3i}{z-3+3i}\right|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-1-5i|}{|z-3+3i|}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{26}}{|z-z_B|}=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-z_B|\times\sqrt{2}=\sqrt{26}$

$\Leftrightarrow |z-z_B|=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z-z_B|=\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow BM=\sqrt{13}$

∴ Γ_3 est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{13}$.

(voir figure).

e) * Nous avons vérifié en 3-a) que $f(z_D)=-i$

D'autre part : $f(z_A)=\frac{z_A-4-2i}{z_A-3+3i}=\frac{1-4-2i}{1-3+3i}$

$=\frac{-3-2i}{-2+3i}=\frac{-2i+3i^2}{-2+3i}=\frac{i(-2+3i)}{(-2+3i)}=i$.

Et comme $f(z_A)=i$ et $f(z_D)=-i$

on a donc :

* $|f(z_A)|=|f(z_D)|=1$ d'où $A\in\Gamma_1$ et $D\in\Gamma_1$
* $f(z_A)\in i\mathbb{R}^*$ et $f(z_D)\in i\mathbb{R}^*$ d'où $A\in\Gamma_2$ et $D\in\Gamma_2$
* $|f(z_A)-1|=|i-1|=\sqrt{2}$ et $|f(z_D)-1|=|-i-1|=\sqrt{2}$ d'où $A\in\Gamma_3$ et $D\in\Gamma_3$.

Exercice 3

1.a) $g(x)=1-x+e^x$

∴ $g'(x)=-1+e^x$

b) * $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)+(e^x)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)+(e^x)$ F.I.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x+e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x}-1+\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$

* $g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$g(0)=2$

T.V. de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Comme le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est $2>0$ donc $g(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

2.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1+xe^{-x})=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1+xe^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x}+e^{-x})=+\infty$

∴ (C) admet une B.P. // (Oy) au voisinage de $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)+\left(\frac{x}{e^x}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x}{e^x}-x+1\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ d'où la droite Δ d'équation $y=x-1$ est une A.O. à (C) au voisinage de $+\infty$

* $f(x)-(x-1)=xe^{-x}$

∴ le signe de $f(x)-(x-1)$ est celui de x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-(x-1)$		$-$	0	$+$	
P.R. de (C) et (Δ)		Δ/C	P.C	C/Δ	

Exercice 3 (suite)

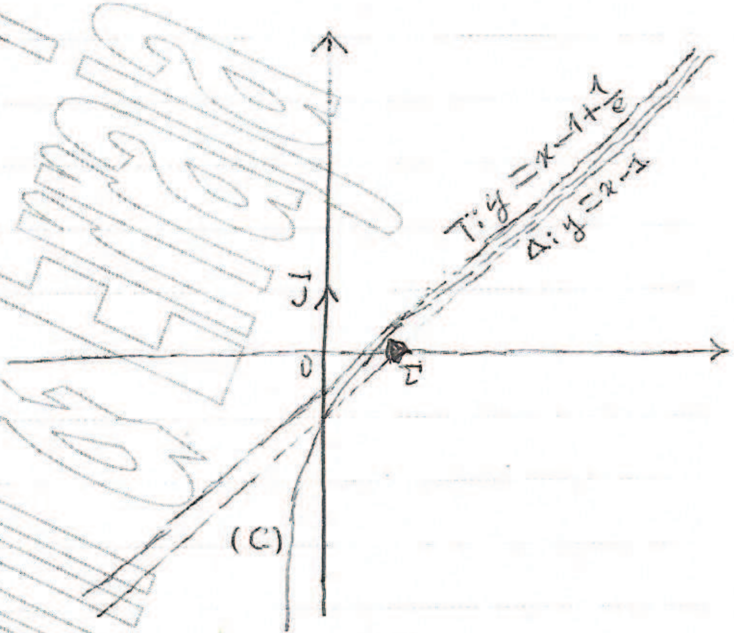
3. a) $f(x) = x - 1 + xe^{-x}$

$\therefore f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x}$

$= \frac{1 - x + e^x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) T.V. de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



4. a) $T // \Delta \Leftrightarrow$ le coefficient directeur de T est égal à 1 $\Leftrightarrow f'(x) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1 - x + e^x}{e^x} = 1 \Leftrightarrow 1 - x + e^x = e^x \Leftrightarrow x = 1$

$f(1) = \frac{1}{e}$ $\therefore A(1, \frac{1}{e})$

T : $y = f'(1).(x-1) + f(1)$

$\Leftrightarrow$ T : $y = x - 1 + \frac{1}{e}$

b) $*$ $\Delta : y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0

$*$ T : $y = x - 1 + \frac{1}{e}$

x	1	0
y	$\frac{1}{e}$	$-1 + \frac{1}{e}$

$*$ $(C) \cap (Oy) : (0, f(0)) = (0, -1)$

$*$ $(C) \cap (Ox) : f(x) = 0$

Comme f est continue, strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et comme elle change de signe donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

Et comme $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = \frac{1}{e} > 0$

donc $0 < \alpha < 1$

5. a) $H(x) = -(x+1)e^{-x}$

$\therefore H'(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$

D'autre part : $f(x) - x + 1 = x - 1 + xe^{-x} - x + 1 = xe^{-x}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = f(x) - x + 1$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = H'(x) + x - 1$

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est

$$F(x) = H(x) + \frac{x^2}{2} - x = -(x+1)e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x$$

b) L'aire en u.a. du domaine plan limité par (C), (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ est :

$$\int_1^3 |f(x) - (x-1)|\,dx = \int_1^3 |H'(x)|\,dx = \int_1^3 H'(x)\,dx$$

$$= [H(x)]_1^3 = H(3) - H(1) = (-4e^{-3} + 2e^{-1})\text{ u.a.}$$

Exercice 4

Partie A

1. a) $g(x)=x^3-2+4\ln x$; $x\in]0,+\infty[$

$\therefore g'(x)=3x^2+\frac{4}{x}>0, \forall x\in]0,+\infty[$

d'où g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) $*\ \lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^3-2+4\ln x)=-\infty$

$*\ \lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}(x^3-2+4\ln x)=+\infty$

T.V. de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) Comme g est continue et strictement monotone sur l'intervalle $]0,+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur l'intervalle $J=g(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.

b) Comme g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, l'équation $g(x)=0$ admet donc une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

Et comme $1{,}1\in]0,+\infty[$ et $1{,}2\in]0,+\infty[$ et $g(1{,}1)=(1{,}1)^3-2+4\ln(1{,}1)\simeq-0{,}29<0$ et $g(1{,}2)=(1{,}2)^3-2+4\ln(1{,}2)\simeq 0{,}46>0$ donc $1{,}1<\alpha<1{,}2$.

c)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

Partie B

1. a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-1-\frac{2\ln x}{x^2}\right)=+\infty$

$\therefore x=0$: A.V. à (C).

b) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left((x-1)-\frac{2\ln x}{x^2}\right)=+\infty$

$\lim_{x\to +\infty}(f(x)-(x-1))=\lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{2\ln x}{x^2}\right)=0$

donc la droite Δ d'équation $y=x-1$ est une A.O. à (C) au voisinage de $+\infty$.

c)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-(x-1)$	||	$+$	0	$-$	
P.R. de (C) et Δ	||	$(C)/\Delta$	P.C $(1,0)$	$\Delta/(C)$	

2. a) $f(x)=x-1-\frac{2\ln x}{x^2}$

$\therefore f'(x)=1-\frac{\frac{2}{x}(x^2)-4x\ln x}{x^4}$

$=1-\frac{2x-4x\ln x}{x^4}$

$=1-\frac{2x(1-2\ln x)}{x\cdot x^3}$

$=1-\frac{2-4\ln x}{x^3}$

$=\frac{x^3-2+4\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$

$\therefore \forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

b) $g(\alpha)=0 \iff \alpha^3-2+4\ln\alpha=0$

$\iff 4\ln\alpha=2-\alpha^3 \iff \ln\alpha=\frac{2-\alpha^3}{4}$

$f(\alpha)=\alpha-1-\frac{2\ln\alpha}{\alpha^2}=\alpha-1-\frac{2\left(\frac{2-\alpha^3}{4}\right)}{\alpha^2}$

$=\alpha-1-\frac{2-\alpha^3}{2\alpha^2}=\frac{2\alpha^2(\alpha-1)-(2-\alpha^3)}{2\alpha^2}$

$=\frac{2\alpha^3-2\alpha^2-2+\alpha^3}{2\alpha^2}=\frac{3\alpha^3-2\alpha^2-2}{2\alpha^2}$

c) Le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est celui de $g(x)$ et $f'(x)=0 \iff x=\alpha$

T.V. de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 4 (suite)

3. a) $T : y = -x+1$ et $\Delta : y = x-1$

or : $1\times(-1) = -1$ d'où $T \perp \Delta$.

b) Comme f est continue, strictement monotone et elle change de signe sur chacun des intervalles $]0, \alpha]$ et $]\alpha, +\infty[$ (car $f(\alpha) < f(1) = 0$), l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, \alpha]$ une unique solution $\gamma = 1$ et dans $]\alpha, +\infty[$ une unique solution β. et comme $1{,}1 ; 1{,}3 > \alpha$

et $f(1{,}3) = 1{,}3 - 1 - \frac{2\ln(1{,}3)}{(1{,}3)^2} \simeq -0{,}0150$

et $f(1{,}4) = 1{,}4 - 1 - \frac{2\ln(1{,}4)}{(1{,}4)^2} \simeq 0{,}0670$

donc $1{,}3 < \beta < 1{,}4$.

La courbe (C) coupe donc l'axe des abscisses au point A d'abscisse 1 et en un second point B d'abscisse β telle que $1{,}3 < \beta < 1{,}4$.

c) * $\Delta : y = x-1$

x	0	1
y	-1	0

* $T : y = -x+1$

x	0	1
y	1	0

* $C \cap (oy) = \phi$ (car $0 \notin D_f$)
* $C \cap (ox)$: $A(1, 0)$ et $B(\beta, 0)$
* f atteint un minimum absolu en α.

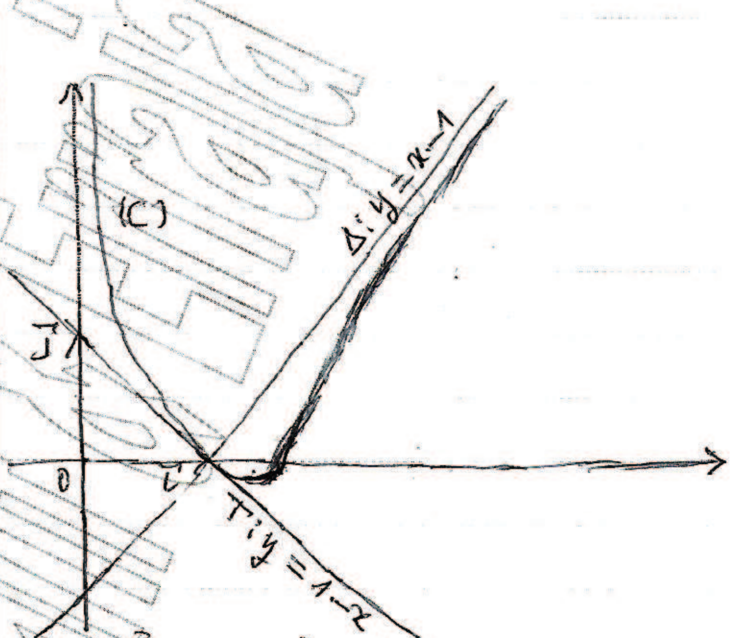
$f(\alpha) = \frac{3\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2}{2\alpha^2} = \frac{3}{2}\alpha - 1 - \frac{1}{\alpha^2}$

$1{,}1 < \alpha < 1{,}2 \Rightarrow \frac{3}{2}\times 1{,}1 < \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}\times 1{,}2$

et $-\frac{1}{(1{,}1)^2} < -\frac{1}{\alpha^2} < -\frac{1}{(1{,}2)^2}$

donc : $\frac{3}{2}\times 1{,}1 - 1 - \frac{1}{(1{,}1)^2} < \frac{3}{2}\alpha - 1 - \frac{1}{\alpha^2} < \frac{3}{2}\times 1{,}2 - 1 - \frac{1}{(1{,}2)^2}$

d'où $-0{,}2 < f(\alpha) < -0{,}1$



d) $2x^3 - (m+1)x^2 - 2\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x^3 - (m+1)x^2 - 2\ln x}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 2x - (m+1) - \frac{2\ln x}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 - \frac{2\ln x}{x^2} = -x + m$

$\Leftrightarrow f(x) = -x + m$

$(C) \cap \Delta_m$: $\Delta_m : y = -x + m$; $\Delta_m // T$

m	$-\infty$		1		$+\infty$
Nbre de soluti		0	1	2	

4. a) $S = \int_1^\beta |f(x)|dx = \int_1^\beta (-f(x))dx = -\int_1^\beta f(x)dx$

(car $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [1, \beta]$)

b) Pour calculer $I = \int_1^\beta \frac{\ln x}{x^2}dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$, alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$

$\therefore I = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\beta + \int_1^\beta \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\beta + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\beta$

$= \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^\beta = -\frac{\ln\beta}{\beta} - \frac{1}{\beta} + 1$

$S = -\int_1^\beta \left(x - 1 - \frac{2\ln x}{x^2}\right)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_1^\beta + 2\int_1^\beta \frac{\ln x}{x^2}dx$

$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_1^\beta + 2I = \beta - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2} + 2I$

$= \beta - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2} + 2\left(1 - \frac{1}{\beta} - \frac{\ln\beta}{\beta}\right)$

$\therefore S = \left(\frac{3}{2} + \beta - \frac{\beta^2}{2} - \frac{2}{\beta} - \frac{2\ln\beta}{\beta}\right)$ u.a.