BACCALAUREAT 2021
Session Normale
Epreuve : MATHEMATIQUES

Série : C & TMGM
Coefficient : 9 & 6
Durée : 4h

Exercice 1: (3 points)

A. 1. Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre 2021 par 11. — 0.25pt

2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 2021^n par 11. — 0.5pt

3. Justifier que le nombre $2021^{2020} - 2021^{1960}$ est divisible par 11. — 0.25pt

B. Soit N un entier naturel s'écrivant $\overline{xyxy}$ dans le système décimal.

1. Montrer que N est un multiple de 101. — 0.25pt
2. Déterminer y pour que N soit un multiple de 5. — 0.25pt
3. Déterminer x et y pour que N soit un multiple de 20 et préciser N dans ces cas. — 0.5pt

C. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$, où x et y sont deux entiers strictement compris entre 0 et 10.

1. Montrer que M est inversible et déterminer sa matrice inverse M^{-1}, en fonction de x et y. — 0.5pt
2. Déterminer les valeurs possibles de x et y telles que le déterminant de M soit égal à 1. — 0.5pt

Exercice 2: (4 points)

ABCD un rectangle de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soient E le symétrique de B par rapport à (AC), F celui de O par rapport à A, I le milieu de $[OA]$ et J celui de $[OD]$.

1. Faire une figure soignée. — 0.5pt
2. Justifier que le triangle BEF est équilatéral direct. — 0.25pt
3. Montrer que les points O, E, F et B appartiennent à un même cercle. Préciser son centre. — 0.25pt
4. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f transformant F en O et A en D. — 0.5pt
b) Justifier que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. — 0.5pt
5. a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe S transformant E en O et B en C. — 0.25pt
b) Déterminer le rapport de S et une mesure de son angle. — 0.5pt
c) Montrer que le centre de S appartient aux cercles de diamètres respectifs $[OE]$ et $[BC]$. Préciser le centre de S. — 0.5pt
d) Déterminer l'image de C par S et construire le point $K = S(D)$. — 0.5pt
e) Soit (M_n) la suite des points du plan tels que $M_0 = B$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = S(M_n)$.
Vérifier que $M_{2021} \in [JC]$ — 0.25pt

Exercice 3: (5 points)

Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -2 - i$ et $z_B = -1 - 3i$.

1. a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $-4z^2 - (12+16i)z + 7 - 24i = (2iz - 4 + 3i)^2$ — 0.5pt
b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
(E) : $z^2 - (2m+2+i)z + 2m^2 + (5+5i)m - 1 + 7i = 0$, où m est un paramètre complexe. — 0.5pt

2. Soit S_1 la similitude directe qui, à tout point M d'affixe m, associe le point M_1 d'affixe $z_1 = (1+i)m - 1 + 2i$ et soit S_2 la similitude directe qui, à tout point M d'affixe m associe le point M_2 d'affixe $z_2 = (1-i)m + 3 - i$.

a) Donner les éléments caractéristiques de S_1 et S_2. — 1pt
b) Montrer que $S_1 \circ S_2$ est une homothétie dont on donnera le rapport et le centre C. — 0.5pt
c) Soit R la transformation qui au point M_1 associe le point M_2, pour tout point M du plan. Justifier que R est une rotation dont on donnera une mesure de l'angle et l'affixe du centre D. — 0.5pt
d) Placer les points A, B, C et D et déterminer la nature du triangle ABD. — 0.75pt

3. Soit E l'ellipse de foyers A et B et dont D est un sommet.

a) Déterminer le centre I de E et justifier que la longueur du grand axe de E est $\sqrt{10}$.	**0.5pt**
b) Donner l'équation de E.	**0.25pt**
c) Construire E après avoir placé ses sommets.	**0.5pt**

Exercice 4 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]-1;+\infty\right[$ par $f(x) = 1+(x+1)\ln(x+1)-\left(\ln(x+1)\right)^2$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Calculer et interpréter les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.	**0.75pt**
2. Pour tout réel $x > -1$, on note $u(x) = x+1-\ln(x+1)$ et $v(x) = x\ln(x+1)$	
a) Montrer que la fonction v est positive sur chacun des intervalles $\left]-1,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$.	**0.5pt**
b) Etudier les variations de la fonction u puis en déduire qu'elle est positive sur $\left]-1;+\infty\right[$	**0.5pt**
c) Montrer que $\forall x > -1$; $f'(x) = \dfrac{u(x)+v(x)}{x+1}$ où f' est la dérivée de f.	**0.25pt**
d) Dresser le tableau de variation de f.	**0.25pt**
3. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.	**0.25pt**
4. Soit $g(x) = f(x) - x$.	
a) Etudier les variations de g et justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet sur I une unique solution α	**0.5pt**
b) Vérifier que $-0.7 < \alpha < -0.6$. En déduire la position relative de (C) et la droite Δ d'équation $y = x$	**0.5pt**
5. Construire la droite Δ et les courbes (C) et (C') . ((C') étant la courbe de la réciproque f^{-1} de f)	**0.5pt**

Exercice 5 : (4 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $f(0) = 0$ et $\forall x > 0; f(x) = \dfrac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x^2}$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. a) Justifier que $\forall x > 0;\ \dfrac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x^n} = e^{1-\frac{1}{x}+n\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$ puis en déduire que $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x^n}\right) = 0$	**0.5pt**
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0.	**0.5pt**
2. a) Montrer que $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(1-2x)e^{1-\frac{1}{x}}}{x^4}$ et préciser son signe.	**0.5pt**
b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe Γ .	**0.5pt**
3. Calculer l'aire A du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.	**0.25pt**
4. On définit la suite $\left(I_n\right)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^2 \dfrac{f(x)}{x^n}dx$	
a) Justifier que $I_0 = A$	**0.25pt**
b) Montrer que la suite $\left(I_n\right)$ est strictement décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?	**0.5pt**
c) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $I_{n+1} - (n+1)I_n = \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n+1}} - 1$.	**0.5pt**
d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{\sqrt{e}}{2^{n+1}}\right)$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.	**0.5pt**

Fin.