République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction de l'Enseignement Secondaire
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2008

Session normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\dfrac{1}{e^x+1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité **2cm**.

1.a) Dresser le tableau de variation de f. (1 pt)

b) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5 pt)

2. Démontrer et interpréter géométriquement chacune des relations suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=0$; (0,25 pt)

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$; (0,25 pt)

c) $\forall x\in\mathbb{R};\quad x\le f(x)\le x+1$; (0,25 pt)

d) $\forall x\in\mathbb{R};\quad f(-x)+f(x)=1$; (0,25 pt)

e) $f(-0,7)\times f(-0,6)<0$. (0,25 pt)

3. Construire la courbe (C). (0,25 pt)

Exercice 2 (3 points)

Pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$ on pose : $U_n=\int_1^e x^3(\ln x)^n\,dx$.

1.a) Démontrer en utilisant une intégration par parties que : $U_1=\dfrac{3e^4+1}{16}$. (1 pt)

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ? (0,5 pt)

2.a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n\ge2$ on a: $4U_n+nU_{n-1}=e^4$. (0, 5 pt)

b) En déduire le calcul de U_2 et U_3. (0, 5 pt)

3.a) Démontrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ on a: $\dfrac{e^4}{n+5}\le U_n\le\dfrac{e^4}{n+4}$. (0,25 pt)

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(nU_n)$. (0,25 pt)

Exercice 3 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z)=z^3-(5+6i)z^2+(-4+14i)z+8-8i$.

1.a) Calculer $P(1)$. (0,5 pt)

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$. (1,25 pt)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère quatre points A, B, C et G tels que : $z_A=2i$, $z_B=1$, $G=\operatorname{bar}\{(A,2),(B,-2),(C,-1)\}$ et $z_G=6$.

a) Calculer l'affixe z_C du point C et montrer que le triangle ABC est rectangle en A. Placer les points A, B, C et G sur la figure. (1 pt)

b) Déterminer puis construire les deux ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan définis par :

$$M\in\Gamma_1\Leftrightarrow 2MA^2-2MB^2-MC^2=-10 \qquad (0,5\text{ pt})$$

$$M\in\Gamma_2\Leftrightarrow MA^2-MB^2=-5. \qquad (0, 5\text{ pt})$$

c) Que peut-on dire à propos de la position relative des deux ensembles Γ_1 et Γ_2 ? (0,25 pt)

Exercice 4 (4 points)

1) On considère la fonction $\mathbf{u}$ définie sur $]1;+\infty[$ par : $\mathbf{u}(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

Dresser le tableau de variation de $\mathbf{u}$. (1 pt)

2) On considère la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=e^{u(x)}=e^{\frac{1}{\ln x}}$.

Démontrer que $\mathbf{f}$ est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et dresser son tableau de variation. (1 pt)

3) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $F_n(x)=\int_x^{x+n} f(t)dt=\int_x^{x+n} e^{\frac{1}{\ln t}}dt$ où $x \in]1;+\infty[$.

a) Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[;\quad nf(x+n) \leq F_n(x) \leq nf(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$. (0, 5 pt)

b) Montrer que : $\forall x>0;\quad e^x>1+x$. En déduire que : $\forall t>1;\quad 0<\ln t<t-1$. (0, 5 pt)

c) Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[;\quad F_n(x)-n>\ln\left(\dfrac{x+n-1}{x-1}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to1^+} F_n(x)$. (0, 5 pt)

d) Dresser le tableau de variation de F_n. (0,25 pt)

e) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction F_1 dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, (cas $n=1$). (0,25 pt)

Exercice 5 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle **ABE** direct rectangle et isocèle en **A**. Soient **F** et **G** les points tels que le quadrilatère **AEFG** soit un carré direct. Les points **I**, **O** et **C** sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BE]$ et $[EA]$. Le point **J** est le symétrique de **I** par rapport à **O**.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes (On pourra prendre **(AB)** horizontale). (1 pt)

b) Démontrer qu'il existe une unique rotation **r** qui transforme **A** en **B** et **E** en **A**. (1 pt)

c) Déterminer l'angle et le centre de **r**. (0, 5 pt)

d) Déterminer **r(J)**. (0,25 pt)

2.a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe **s** qui transforme **C** en **A** et **A** en **B**. (0, 5 pt)

b) Déterminer l'angle et le rapport de **s**. (0,5 pt)

c) Montrer que $s(E)=G$ et déterminer l'image du carré **COJE** par la similitude directe **s**. (0,75 pt)

3) Soit Ω le centre de la similitude **s**.

a) Montrer que le point Ω appartient aux cercles de diamètres $[JF]$, $[EG]$, $[CA]$ et $[AB]$. (0,75 pt)

b) Démontrer que les deux cercles de diamètres $[JF]$ et $[AB]$ sont tangents en Ω. (0,25 pt)

4. On considère les deux cercles Γ et Γ' passant par Ω et de centres respectifs **A** et **B**. Soit **D** l'intersection de ces deux cercles autre que Ω.

a) Démontrer que $s(\Gamma)=\Gamma'$. En déduire que les points Ω, **A**, **B** et **D** sont cocycliques. (0,25 pt)

b) Soit **M** un point de Γ distinct de Ω et de **D**. On pose $s(M)=M'$. Démontrer que les points **M**, **M'** et **D** sont alignés. (0,25 pt)

Fin.