RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2010 session Normale

Exercice 1(3points)

On considère une fonction f dérivable sur son domaine de définition D_f de dérivée f'.Son tableau de variation est donné ci-dessous .On nomme (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'(x)		+	‖	−	0	+	
f(x)	-3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

Pour chaque question, parmi les réponses proposées une seule réponse est exacte

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble de définition de f est :	$\mathbb{R}\backslash\{-2\}$	$\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$
2	L'équation f(x)=0 admet dans D_f exactement	3 solutions	2 solutions	1 solution
3	La courbe (C) admet une asymptote d'équation	$x = 1$	$x = -2$	$y = -2$
4	La fonction f est une fonction	Paire	Impaire	ni paire ni impaire
5	L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisses x_0 =1 est	$x = 1$	$y = 0$	$y = -4$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci- dessous. Aucune justification n'est demandée.

N° question	1	2	3	4	5
Réponse Exacte					

Exercice 2 (4points)

Pour tout nombre z on pose : $p(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$

1°)a) Calculer $p(3)$

b) Déterminer les réels a, b tels que pour tout z on a $p(z)=(z-3)(z^2+az+b)$

c)Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $p(z) = 0$

2°) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.les points A, B, C et D d'affixes respectifs $Z_A = 3 + 2i$;$Z_B = -1 + i$, $z_C = -1 - i$ et $Z_D = 3$

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

b) Comparer l'affixe du milieu de [AC] à celle du milieu de [BD]

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z telle que :

$$|z-3| = |z+1-i|$$

Exercice 3 (4points)

On considère la suite numérique(U_n) définie pour tout entier n ≥1 par :

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

1a) Calculer u_1 , u_2 et u_3

b) Justifier que la suite (U_n) ;

n'est pas arithmétique, n'est pas géométrique ; est convergente.

2°) pour tout entier $n \geq 1$ on pose : $v_n = \frac{n^2-1}{n}$

a)Montrer que : $U_n = V_{n+1} - V_n$

b) En déduire l'expression de la somme $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n

3) Pour tout entier $n \geq 2$ on pose $w_n = \ln V_n$ et $s'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$

Démontrer que $S'_n = \ln\left[\frac{(n+1)!}{2n}\right]$

Exercice 4 (9points)

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 2 + e^x$ soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm

1a) Calculer les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et $+\infty$

b) Calculer et donner une interprétation graphique de $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+2))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) Dresser le tableau de variation de f

3°) Montrer que f réalise une bijection de R sur un intervalle J que l'on déterminera

4°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α puis vérifier que $-2,5 < \alpha < -2$

5°) Construire (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

6a) Déterminer la primitive F de f qui vérifie $F(0) = 0$

Soit A (α) l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$

b) Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α . Montrer que $A(\alpha) = \frac{6-2\alpha-\alpha^2}{2}$

7a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = \alpha$

b) Vérifier que $(f^{-1})'(0) = \frac{-1}{\alpha+1}$

8) On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(x + 2 + e^x)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Dresser le tableau de variation de g

c) Construire la courbe (Γ) de g dans un nouveau repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

FIN

Corrigé baccalauréat 2010 session Normale

Exercice 1

N° question	1	2	3	4	5
Réponse Exacte	A	A	B	C	C

Exercice 2

$p(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$

$1a)\ p(3) = 27 - 9 - 12 - 6 = 0$

b) $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$

$= z^3 + az^2 + bz - 3z^2 - 3az - 3b$

$p(z) = z^3 + (a-3)z^2 + (b-3a)z - 3b$

$$\begin{cases} a - 3 = -1 \\ b - 3a = -4 \\ -3b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$$

$p(z) = (z-3)(z^2 + 2z + 2)$

c) $p(z) = 0 \Rightarrow (z-3)(z^2 + 2z + 2) = 0$

$\Rightarrow z = 3$ Où $z^2 + 2z + 2 = 0$

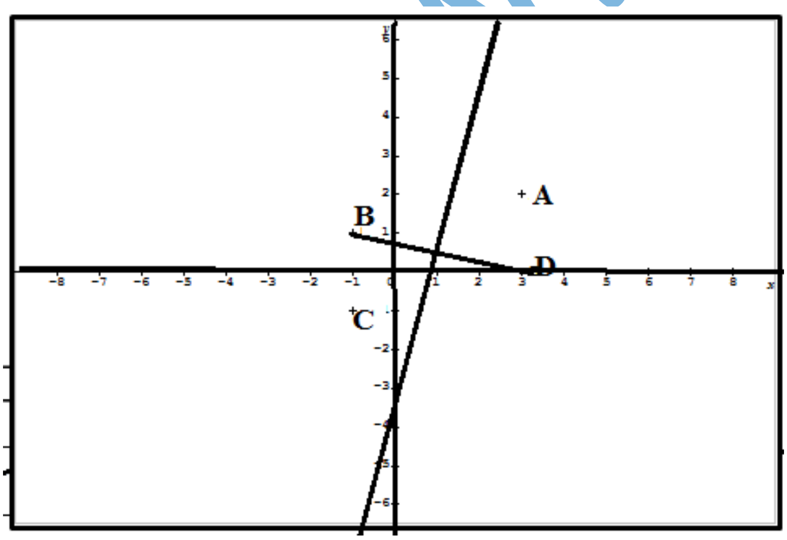
$\Delta = 4 - 8 = -4 = 4i^2$

$$z_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$z_2 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

$S = \{3, -1 + i, -1 - i\}$

a)



b)

$$milieu\ de\ [AC] = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{3 + 2i - 1 - i}{2} = \frac{2 + i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$$

$$milieu\ de [BD] = \frac{Z_B + Z_D}{2} = \frac{-1 + i + 3}{2} = \frac{2 + i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$$

Les segments $[AC]$et $[BD]$ ont le même milieu

c) Puisque Les segments $[AC]$et $[BD]$ ont le même milieu donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

d) $|z-3| = |z+1-i| \Rightarrow \ |z_M - Z_D| = |z_M - Z_B|$

$\Rightarrow \ DM = BM$

L'ensemble des points est la médiatrice du $[BD]$

Exercice 3

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

1a) $U_1 = \frac{3}{2}$, $U_2 = \frac{7}{6}$, $U_3 = \frac{13}{12}$

b)

$$U_3 - U_2 = \frac{13}{12} - \frac{7}{6} = \frac{13}{12} - \frac{14}{12} = \frac{-1}{12}$$

$$U_2 - U_1 = \frac{7}{6} - \frac{3}{2} = \frac{14}{12} - \frac{18}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$U_3 - U_2 \neq U_2 - U_1 \Rightarrow (U_n)$ n'est pas une suite arithmétique

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{7}{6}} = \frac{13\times 6}{12\times 7} = \frac{13}{14}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{7\times 2}{6\times 3} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{U_3}{U_2} \neq \frac{U_2}{U_1}$$

$\Rightarrow (U_n)$ n'est pas une suite arithmétique

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2+n}\right) = 1 \Rightarrow (U_n)$est convergente

2) a)

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n^2+n}$$

$$v_n = \frac{n^2-1}{n}$$

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n^2+2n}{n+1} - \frac{n^2-1}{n}$$

$$= \frac{n(n^2+2n) - (n^2-1)(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2-(n^3+n^2-n-1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2-n^3-n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$v_{n+1} - v_n = U_n$

$U_n = v_{n+1} - v_n$

b) on effectue n relations

$$\begin{cases} U_1 = V_2 - V_1 \\ U_2 = V_3 - V_2 \\ U_3 = V_4 - V_3 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ U_n = V_{n+1} - V_n \end{cases}$$

$$S_n = V_{n+1} - V_1$$

$$S_n = \frac{n^2 + 2n}{n+1}$$

3) $w_n = \ln V_n$

$s'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$

$\quad = \ln V_2 + lnV_3 + lnV_4 + \cdots + lnv_n$

$s'_n = ln(V_2 \times V_3 \times V_4 \times \ldots \times V_n)$

On a:

$$V_n = \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{(n-1)(n+1)}{n}$$

$$V_2 = \frac{1 \times 3}{2}$$

$$V_3 = \frac{2 \times 4}{3}$$

$$V_4 = \frac{3 \times 5}{4}$$

$$V_5 = \frac{4 \times 6}{5}$$

$$V_6 = \frac{5 \times 7}{6}$$

$$V_7 = \frac{6 \times 8}{7}$$

.

.

.

$$v_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n}$$

$$s'_n = ln\left(\frac{1 \times 3}{2} \times \frac{2 \times 4}{3} \times \frac{3 \times 5}{4} \times \frac{4 \times 6}{5} \times \frac{5 \times 7}{6} \times \frac{6 \times 8}{7} \times \ \ldots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n}\right)$$

$$s'_n = ln\left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots . \times n(n+1)}{2n}\right)$$

$$s'_n = ln\left(\frac{(n+1)!}{2n}\right)$$

Exercice 4

$f(x) = x + 2 + e^x$

1a) $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 2 + e^x = -\infty + 2 - 0 = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 + e^x = +\infty + 2 + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+2)) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 + e^x - x - 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+2)) = 0$ $\Rightarrow$ **La courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ au voisinage de $-\infty$**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2+e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\Rightarrow$ **La courbe (C) admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de $+\infty$.**

2) $f'(x) = 1 + e^x > 0$

TV de f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'(x)	+
f(x)	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3) f est continue et strictement croissante de ℝ vers $J =$ ℝ donc f réalise une bijection.

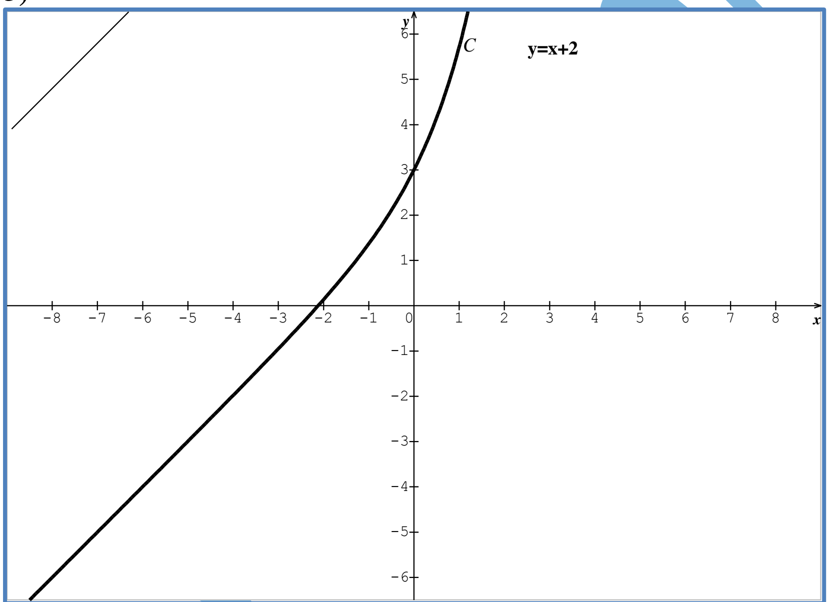
4) f réalise une bijection et change de signe une seule fois donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α tel que f $(\alpha) = 0$

$f(-2,5) \cong -0,4 < 0$

$f(-2) \cong 0,1 > 0$

$f(-2) \times f(-2,5) < 0 \Rightarrow -2,5 < \alpha < -2$

5)



6a) $f(x) = x + 2 + e^x$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + e^x + c$

$F(0) = 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$

$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + e^x - 1$

b) $A(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)dx = [F(x)]_\alpha^0 = F(0) - F(\alpha) = -F(\alpha)$

$A(\alpha) = -F(\alpha)$

$A(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - e^\alpha + 1$

D'après l'équation f $(\alpha) = 0$ on a $\alpha + 2 + e^\alpha = 0 \Rightarrow$

$$e^{\alpha} = -\alpha - 2$$

En remplaçant e^{α} **par** $-\alpha - 2$ **on obtient :**

$A(\alpha) \quad = -\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - e^{\alpha} + 1$

$= -\dfrac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - (-\alpha - 2) + 1$

$= -\dfrac{\alpha^2}{2} - 2\alpha + \alpha + 2 + 1$

$= -\dfrac{\alpha^2}{2} - \alpha + 3$

$$A(\alpha) = \frac{6 - 2\alpha - \alpha^2}{2}$$

7a) $f'(\alpha) = e^{\alpha} + 1$

$\quad = -\alpha - 2 + 1$

$f'(\alpha) = -\alpha - 1$

$f'(\alpha) = -(\alpha + 1)$

$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

$y = -(\alpha + 1)(x - \alpha)$

$y = -(\alpha + 1)x + \alpha(\alpha + 1)$

b) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}$

$= \frac{1}{f'(\alpha)}$

$= \frac{1}{-(\alpha+1)}$

$(f^{-1})'(0) = -\frac{1}{\alpha+1}$

8) $g(x) = \ln(f(x))$

a) g est définie ssi $x + 2 + e^x > 0$

$\Rightarrow$ g est définie ssi $f(x) > 0$

et f est strictement positif sur $]\alpha, +\infty[$ d'où $D_g =]\alpha, +\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} \ln f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln f(x) = +\infty$

$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} > 0$ g est strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$

TV de g

x	α		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2+e^x)}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}+1\right)}{x} = 1 \quad \text{On a } \left(\ln e^x = x \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{et } \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(x + 2 + e^x) - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\ln(x + 2 + e^x) - \ln e^x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2+e^x}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1\right) = 0$$

$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - x) = 0 \Rightarrow$ **La courbe(Γ) de g admet une asymptote oblique d'équation** $y = x$