République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif
Direction des Examens et des Concours

**BACCALAUREAT 2023**
**SessionComplémentaire**
**Epreuve : MATHEMATIQUES**

Séries : C & TMGM
Coefficient : 9 & 6
Durée : 4h

## Exercice 1 (3 points)

On considère le système $(S):\begin{cases} t \equiv -1[23] \\ t \equiv \ \ 9[19] \end{cases}$

| | |
|---|---|
| 1. Vérifier que 2023 est solution de (S). | 0.5pt |
| 2. Montrer que t est solution de (S) équivaut à $t = 23x - 1 = 19y + 9$, où le couple $(x,y)$ est solution de l'équation $(E):\ \ 23x - 19y = 10$. | 0.5pt |
| 3. Vérifier que le couple $(50;60)$ est solution de (E) puis en déduire les solutions de (E). | 0.75pt |
| 4. Montrer que le système (S) est équivalent à $t \equiv 275[437]$ | 0.5pt |
| 5. a) Montrer que si t est solution de (S) alors : $t^{18} \equiv 1[437]$ et que $t^{7} \equiv 137[437]$. | 0.5pt |
| b) En déduire le reste, dans la division euclidienne, de $2023^{2023}$ par 437. | 0.25pt |

## Exercice 2 (4 points)

Soit ABC un triangle rectangle isocèle direct en A, on construit les carrés directs ACDE et AFGB. On note O et O' leurs centres respectifs et soit I le milieu de $[BC]$ et J le symétrique de A par rapport à I.

| | |
|---|---|
| 1. Déterminer les images des points D et E par la translation T de vecteur $\overrightarrow{CB}$. | 0.5pt |
| 2. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $f = R \circ T$. | |
| a) Montrer que f est une rotation et préciser son angle. | 0.5pt |
| b) A l'aide d'une décomposition convenable de R et de T déterminer le centre de f. | 0.5pt |
| 3. Soit h l'homothétie de centre J et de rapport $\frac{1}{2}$ et $S = h \circ f$. | |
| a) Démontrer que S est une similitude directe. | 0.25pt |
| b) Préciser son rapport et une mesure de son angle puis construire son centre K. | 0.75pt |
| 4. Soit $S'$ la similitude directe de centre E transformant F en O. | |
| a) Caractériser $S'$ et vérifier que $S \circ S'(B) = I$ | 0.5pt |
| b) Montrer que $S \circ S'$ est une homothétie dont on donnera le rapport. | 0.5pt |
| c) Ecrire le centre $\Omega$ de $S \circ S'$ comme barycentre de B et I. Placer $\Omega$. | 0.5pt |

## Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ et soit $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

| | |
|---|---|
| 1. a) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. | 0.5pt |
| b) Montrer que la courbe $\Gamma$ admet une asymptote oblique D et préciser leur position relative | 0.5pt |
| 2. Soit u la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $u(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$. Etudier les variations de u puis calculer $u(0)$ et en déduire le signe de u. | 1pt |
| 3. a) Montrer que $\forall x \in ]-1;+\infty[$, $f'(x) = -\frac{u(x)}{(x+1)^2}$. | 0.5pt |

b) En déduire le signe de $f'$ puis dresser le tableau de variations de f. 0.5pt

4. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$. Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser. 0.25pt

5. Construire la droite D et les courbes $\Gamma$ et $\Gamma'$ ($\Gamma'$ la courbe représentative de la réciproque $g^{-1}$ de g). 0.75pt

## Exercice 4 (4 points)

1. Soit $P(z) = z^3 - 4iz^2 - 6z + 4i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(2i)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
On notera $z_0$, $z_1$ et $z_2$ les solutions de cette équation avec $Re(z_1) > Re(z_0) > Re(z_2)$. 0.75pt

b) Ecrire sous forme exponentielle chacun des trois complexes $z_0$, $z_1$ et $z_2$. 0.75pt

c) En déduire les solutions de l'équation $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 - 4i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 - 6\frac{z-i}{z+i} + 4i = 0$. 0.75pt

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on note A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = z_1$, $z_B = z_0$, $z_C = z_2$ et $z_D = 1$. ($z_0$, $z_1$ et $z_2$ sont ceux définis au-dessus).

a) Préciser les affixes des points A, B et C puis déterminer la nature du triangle ABC. 0.5pt

b) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre A telle que $S(B) = C$. 0.5pt

3. Soit $(M_n)$ la suite des points définie par $M_0 = B$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $M_{n+1} = S(M_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, le triangle $AM_nM_{n+1}$ est rectangle isocèle direct en $M_n$. 0.25pt

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; les points A, $M_n$ et $M_{n+4}$ sont alignés et que $M_{2021} \in (AD)$ 0.5pt

## Exercice 5 (5 points)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}.e^{1-x}$ et soit $C_n$ la courbe de $f_n$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$. 0.5pt

b) Etudier les variations de $f_n$ et dresser son tableau de variation. 1pt

c) Etudier la position relative entre les courbes $C_n$ et $C_{n+1}$. 0.5pt

2. On note $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $I_1 = e - 2$. 0.5pt

b) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante et minorée. Que peut-on conclure ? 0.5pt

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ puis justifier que $I_n - I_{n-1} = \frac{-1}{n!}$. 0.75pt

d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. 0.5pt

e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le I_n \le \frac{e}{n!}$. En déduire les valeurs de $\lim_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim_{n \to +\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$. 0.75pt