BACCALAUREAT 2023 **Session Normale** **Série : C & TMGM**

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice1 (3 points)

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;-2;3)$, $B(4;1;0)$, $C(3;0;-2)$ et $D(2;1;-2)$

1. a) Calculer les produits scalaires suivants $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$.	0.75pt
b) Justifier que B est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).	0.5pt
c) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.	0.5pt
2. a) Donner une équation cartésienne du plan (ACD).	0.5pt
b) Calculer la distance du point B par rapport au plan (ACD) et en déduire l'aire du triangle ACD.	0.75pt

Corrigé

1. a) On a $\overrightarrow{AB}(3;3;-3)$, $\overrightarrow{BC}(-1;-1;-2)$ et $\overrightarrow{CD}(-1;1;0)$

Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-3-3+6=0$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$ d'où $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$

De même $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1-1+0=0$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0}$ d'où $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

Et encore $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=1-1-0=0$ donc $\boxed{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=0}$ d'où $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{CD}$

b) D'après 1. a) on a $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) donc il est orthogonal à ce plan et comme $B\in(BCD)$ alors B est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD)

c) Le volume du tétraèdre ABCD est $V=\frac{1}{3}sh$, où s est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur correspondante.

Considérons que la base est la face BCD donc le sommet correspondant est A. Alors s est l'aire du triangle BCD. Comme $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{CD}$ alors le triangle BCD est rectangle en C donc son aire est

$$s=\frac{1}{2}BC\times CD=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+4}\times\sqrt{1+1+0}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}$$

La hauteur h est égale à la distance du sommet à la base donc $h=AB=\sqrt{9+9+9}=3\sqrt{3}$

D'où $V=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{V=3}$

2. a) Ecriture d'une équation cartésienne du plan (ACD)

<u>Méthode 1</u> : Produit vectoriel

Le plan (ACD) peut se définir comme étant l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{CD})=0$

Calculons les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{CD}$, on a $\overrightarrow{AC}(2;2;-5)$ et $\overrightarrow{CD}(-1;1;0)$ donc

$$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{CD}\left(\begin{vmatrix}2&-5\\1&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-5&2\\0&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&2\\-1&1\end{vmatrix}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{CD}(5;5;4).$$

Si $M(x;y;z)$ alors $\overrightarrow{AM}(x-1;y+2;z-3)$ et donc une équation cartésienne du plan (ACD) s'écrit

$$5(x-1)+5(y+2)+4(z-3)=0\Leftrightarrow\boxed{5x+5y+4z-7=0}.$$

<u>Méthode 2</u> : Système

Une équation cartésienne du plan (ACD) doit être de la forme $ax+by+cz+d=0$ et comme ce plan passe par les points A, C et D alors les coordonnées de ces points vérifient cette équation d'où le système

$$\begin{cases}a-2b+3c+d=0\\3a-2c+d=0\\2a+b-2c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b+3c+d=0\\6b-11c-2d=0\\5b-8c-d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b+3c+d=0\\6b-11c-2d=0\\7c+4d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{5}{7}d\\b=-\frac{5}{7}d\\c=-\frac{4}{7}d\end{cases}$$

Donc l'équation $ax+by+cz+d=0$ s'écrit $-\frac{5}{7}dx-\frac{5}{7}dy-\frac{4}{7}dz+d=0 \Leftrightarrow \boxed{5x+5y+4z-7=0}$ (car $d \neq 0$)

<u>Méthode 3</u> : Représentation paramétrique

Le plan (ACD) peut être défini comme l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels ils existent deux réels k et k' tels que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}+k'\overrightarrow{CD}$. Si $M(x,y;z)$ alors l'égalité se traduit par la représentation paramétrique suivante du plan (ACD) :

$$\begin{cases} x=2k-k'+1 \\ y=2k+k'-2 \Rightarrow x+y=4k-1=4\frac{3-z}{5}-1 \Rightarrow \boxed{5x+5y+4z-7=0} \\ z=-5k+3 \end{cases}$$

b) La distance du point B par rapport au plan (ACD) est

$$d(B;(ACD))=\frac{|5\times4+5\times1+4\times0-7|}{\sqrt{25+25+16}}=\frac{18}{\sqrt{66}} \Rightarrow \boxed{d(B;(ACD))=\frac{3\sqrt{66}}{11}}$$

Recalculons le volume du tétraèdre ABCD en considérant ACD une base et B le sommet correspondant.

Donc $V=\frac{1}{3}s'h'$ où s' est l'aire du triangle ACD et h' la hauteur issue de B donc $h'=d(B;(ACD))=\frac{3\sqrt{66}}{11}$.

On a $V=\frac{1}{3}s'h' \Rightarrow s'=\frac{3V}{h'}=9\times\frac{11}{3\sqrt{66}}=\sqrt{\frac{33}{2}}$ d'où l'aire du triangle ACD est $\boxed{s'=\sqrt{\frac{33}{2}}}$.

Exercice 2 (4 points)

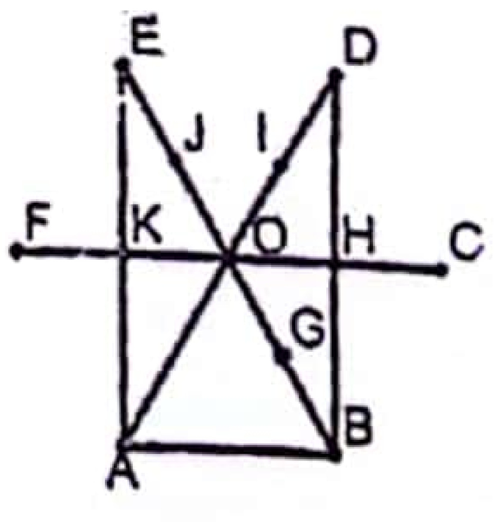
Soit ABD un triangle rectangle en B tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On définit les points : O le milieu de $[AD]$, C le symétrique de O par rapport à (BD), E et F les symétriques par rapport à O des points B et C respectivement. On note également G, H, I, J et K les milieux respectifs des segments $[OB]$, $[OC]$, $[OD]$, $[OE]$ et $[OF]$.

1. Faire une figure soignée. 1pt
2. Caractériser l'homothétie h définie par $h(A)=I$ et $h(B)=J$ 0.5pt
3. Montrer qu'il existe une seule rotation r qui transforme A en B et G en H à caractériser 0.75pt
4. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en F et O en E. 0.25pt
   b) Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. 0.5pt
5. a) Montrer que $S=h\circ r$ est une similitude directe d'angle $\frac{-2\pi}{3}$. 0.5pt
   Préciser son centre et son rapport.
   b) On note $S^2=S\circ S$, $S^3=S\circ S\circ S$ et $S^{n+1}=S\circ S^n$, $\forall n\geq 2$.
   Caractériser S^3 et montrer que $S^{20062023}$ est une homothétie de rapport positif 0.5pt

Corrigé

1. La figure



2. ABDE étant un rectangle et d'après le théorème des milieux on a $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, d'où l'existence de h. Le centre de h est le point d'intersection des droites (AI) et (BJ) qui est le point O. Comme $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ alors le rapport de h est $-\frac{1}{2}$. Donc $\boxed{h=H\left(O;-\frac{1}{2}\right)}$.

3. Les triangles OAB et OBC sont équilatéraux de même dimension (non nulle). AG et BH sont des hauteurs de ces triangles alors $AG=BH\neq0$. En plus comme O, B et C ne sont pas alignés alors $\overrightarrow{AG}\neq\overrightarrow{BH}$.
D'où l'existence de r. Le centre de r est le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[GH]$ qui est O.

L'angle de r est donc $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ dont une mesure est $\frac{\pi}{3}$. D'où $\boxed{r=R\left(O;\frac{\pi}{3}\right)}$

4. a) Le triangle OEF est équilatéral donc $FE=OE$ or $OE=AO\neq0$.
D'où $AO=FE\neq0$ donc il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en F et O en E.

b) L'antidéplacement f est soit une réflexion soit une symétrie glissante. Comme la médiatrice de $[AF]$ passe par O alors elle ne peut pas être confondue avec celle de $[OE]$, donc f ne peut pas être une réflexion alors c'est une symétrie glissante. Son axe passe par les milieux des segments $[AF]$ et $[OE]$, or cette droite passe par K donc c'est la droite (JK). La forme réduite de f est $f = S_{JK} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{JK}$.

Déterminons $\vec{u}$. On a $t_{\vec{u}} = S_{JK} \circ (S_{JK} \circ t_{\vec{u}}) = S_{JK} \circ f$ et $S_{JK} \circ f(O) = S_{JK}(E) = I$ d'où $\vec{u} = \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{KJ}$.

Par conséquent on a $\boxed{f = S_{JK} \circ t_{\overrightarrow{KJ}} = t_{\overrightarrow{KJ}} \circ S_{JK}}$

5. a) La transformation $S = h \circ r$ est la composée d'une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de même centre O, alors S est une similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{-2\pi}{3}$. D'où $\boxed{S = s\left(O; \frac{1}{2}; \frac{-2\pi}{3}\right)}$.

b) $S^3 = s\left(O; \left(\frac{1}{2}\right)^3; 3 \times \frac{-2\pi}{3}\right) \Rightarrow S^3 = s\left(O; \frac{1}{8}; 0\right)$ alors S^3 est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{8}$.

$\boxed{S^3 = H\left(O; \frac{1}{8}\right)}$

La somme des chiffres du nombre 20062023 est 15 donc il est divisible par 3. Il existe alors un entier p tel que $20062023 = 3p$ donc $S^{20062023} = (S^3)^p$. D'où $S^{20062023}$ est la composée de p homothéties de même centre et de même rapport $\frac{1}{8}$. Donc $S^{20062023}$ est l'homothétie de centre O et de rapport $\left(\frac{1}{8}\right)^p$ qui est positif.

Or $p = 6687341$, donc $\boxed{S^{20062023} = H\left(O; \frac{1}{8^{6687341}}\right)}$.

Exercice 3 (4 points)

I. Soit m un nombre complexe non nul. Pour tout nombre complexe z, on note
$P(z) = 2z^3 - (4 - 2i + 2m)z^2 + (m^2 + (3 - i)m + 2 - 3i)z - (m + 1)(m - i)$

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 - 2(1 - i + m)z + (m + 1)(m - i) = 0$. 0.5pt
2. Calculer $P(1)$ et en déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z) = 0$ 0.75pt

II. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B, C, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives
$z_A = 1$, $z_B = -i$, $z_C = 1 - i$, $z_M = m$, $z_{M_1} = z_1 = \frac{(1-i)(1+m)}{2}$ et $z_{M_2} = z_2 = \frac{(1-i)(1+im)}{2}$.

1. Préciser les transformations f et g telles que, pour tout $m \in \mathbb{C}^*$, $f(M) = M_1$ et $g(M) = M_2$ 0.5pt
2. Montrer que $z_2 = iz_1 - i$ et en déduire que $M_2 = R(M_1)$ où R est une rotation à préciser. 0.5pt
3. On suppose, dans cette question, que M décrit le cercle de diamètre $[AB]$ privé de O.
a) Déterminer le lieu géométrique du point M_1. 0.25pt
b) Justifier que, si $m \neq -i$ alors $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = -i\frac{m-1}{i+m}$ puis en déduire que les points M, M_1 et M_2 sont alignés. 0.5pt
4. On considère la parabole P de directrice (OB) et de foyer A.
a) Déterminer le paramètre p et le sommet S de P. 0.5pt
b) Justifier que l'équation réduite de P s'écrit $y^2 = 2x - 1$ puis construire P. 0.25pt
c) Donner une équation de la tangente à P au point C. 0.25pt

Corrigé

I. 1. Le discriminant réduit de cette équation est
$\Delta' = (1 - i + m)^2 - 2(m + 1)(m - i) = -2i + 2(1 - i)m + m^2 - 2(1 - i)m - 2m^2 + 2i = -m^2 \Rightarrow \Delta' = (im)^2$

Les solutions de l'équation sont donc $\frac{1-i+m+mi}{2}=\boxed{\frac{(1-i)(1+im)}{2}}$ et $\frac{1-i+m-mi}{2}=\boxed{\frac{(1-i)(1+m)}{2}}$

2. $P(1)=2-(4-2i+2m)+\left(m^2+(3-i)m+2-3i\right)-(m+1)(m-i)\Rightarrow$

$P(1)=-2+2i-2m+m^2+(3-i)m+2-3i-m^2-(1-i)m+i\Rightarrow\boxed{P(1)=0}$

Donc P est factorisable par $z-1$ c'est-à-dire qu'il existe deux complexes a et b tels que

$P(z)=(z-1)(2z^2+az+b)=2z^3+(a-2)z^2+(b-a)z-b$.

Méthode 1 : identification

Par identification avec l'écriture initiale de $P(z)$ on trouve

$$\begin{cases}a-2=-4+2i-2m\\ b-a=m^2+(3-i)m+2-3i\\ -b=-(m+1)(m-i)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2+2i-2m\\ b=(m+1)(m-i)\end{cases}$$

On vérifie aisément que $b-a=m^2+(3-i)m+2-3i$.

Méthode 2 : Tableau de Horner

	2	$-4+2i-2m$	$m^2+(3-i)m+2-3i$	$-(m+1)(m-i)$
1		2	$-2+2i-2m$	$(m+1)(m-i)$
	2	$-2+2i-2m$	$m^2+(1-i)m-i=(m+1)(m-i)$	0

D'où $P(z)=(z-1)\left(2z^2-2(1-i+m)z+(m+1)(m-i)\right)$.

$P(z)=0\Leftrightarrow z=1$ ou $2z^2-2(1-i+m)z+(m+1)(m-i)=0$

Par conséquent d'après 1° les solutions de l'équation $P(z)=0$ sont : $\boxed{1\ ;\ \frac{(1-i)(1+im)}{2}\ \text{et}\ \frac{(1-i)(1+m)}{2}}$.

II. 1. $z_1=\frac{(1-i)(1+m)}{2}=\frac{1-i}{2}m+\frac{1-i}{2}$ c'est l'écriture complexe de la similitude directe de rapport $\left|\frac{1-i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

d'angle de mesure $\arg\left(\frac{1-i}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ et dont le centre est le point d'affixe $\frac{\frac{1-i}{2}}{1-\frac{1-i}{2}}=\frac{1-i}{1+i}=-i$ qui est B.

D'où $\boxed{f=s\left(B;\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{\pi}{4}\right)}$.

$z_2=\frac{(1-i)(1+im)}{2}=\frac{1+i}{2}m+\frac{1-i}{2}$ c'est l'écriture complexe de la similitude directe de rapport $\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

d'angle de mesure $\arg\left(\frac{1+i}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ et dont le centre est le point d'affixe $\frac{\frac{1-i}{2}}{1-\frac{1+i}{2}}=\frac{1-i}{1-i}=1$ qui est le point A.

Donc $\boxed{g=s\left(A;\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{\pi}{4}\right)}$.

2. $z_2=\frac{(1-i)(1+im)}{2}=i\frac{(1-i)(-i+m)}{2}=iz_1-i\frac{1-i}{2}+\frac{1-i}{2}=iz_1-i$. Cette écriture complexe étant celle d'une rotation dont une mesure de l'angle $\arg i=\frac{\pi}{2}$ et dont l'affixe du centre est $\frac{-i}{1-i}=\frac{-i(1+i)}{2}=\frac{1-i}{2}$ qui est le milieu I de $[AB]$.Donc $\boxed{M_2\text{ est l'image de }M_1\text{ par la rotation de centre I et d'angle }\frac{\pi}{2}}$.

3. a) Si M décrit $[AB]$ privé de O alors M_1 décrira l'image du cercle de diamètre $[AB]$ par f privé de $f(O)$.

Or $f(B)=B$. En plus, l'écriture complexe de f est $z'=\frac{1-i}{2}z+\frac{1-i}{2}$.

Si M est en A alors $z'=\frac{1-i}{2}\times1+\frac{1-i}{2}=1-i$ donc $f(A)=C$ et si M est en O alors

$z'=\frac{1-i}{2}\times 0+\frac{1-i}{2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}z_C$ alors $f(O)$ est le milieu de $[OC]$ qui est aussi le milieu de $[AB]$.

Donc le $\boxed{\text{lieu géométrique du point } M_1 \text{ est le cercle de diamètre } [BC] \text{ privé du milieu de } [AB]}$.

b) 1[er] cas : si $m=-i$ alors $z_1=-i$ donc M et M_1 seront confondu et par conséquent l'alignement des points M, M_1 et M_2 est trivial.

2[e] cas : si $m\neq -i$ alors $z_2-m=\frac{1+i}{2}m+\frac{1-i}{2}-m=-\frac{1-i}{2}m+\frac{1-i}{2}=\frac{1-i}{2}(1-m)$ et

$$z_1-m=\frac{1-i}{2}m+\frac{1-i}{2}-m=\frac{-1-i}{2}m+\frac{1-i}{2}=\frac{-i(1-i)}{2}m+\frac{1-i}{2}=\frac{1-i}{2}(-im+1)=\frac{1-i}{2}(-i(m+i))$$

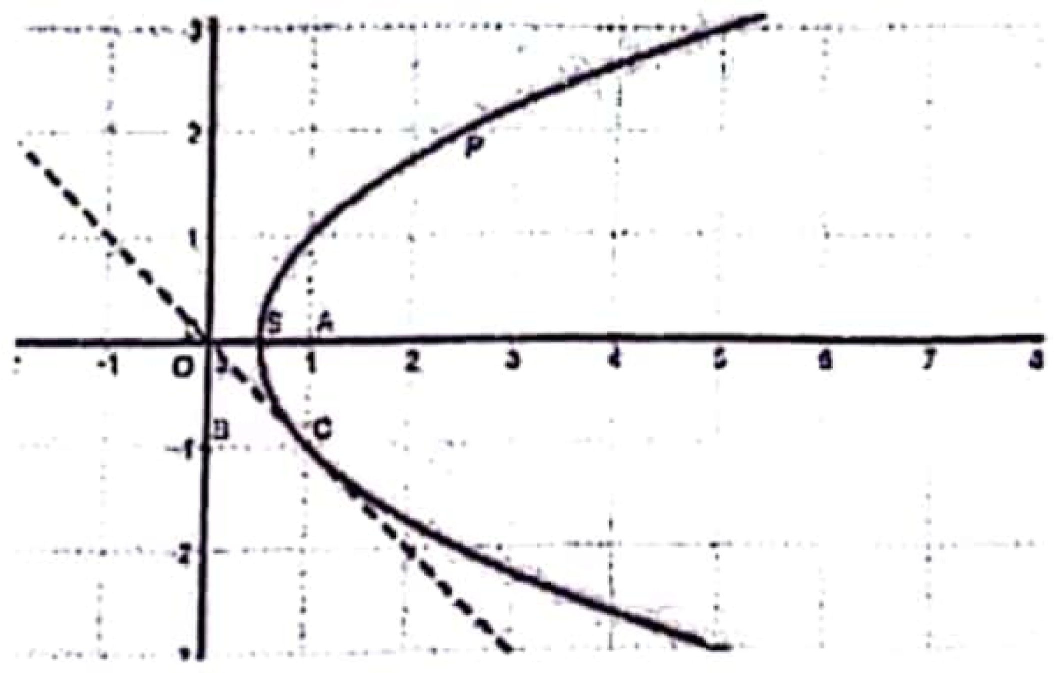
Donc $\frac{z_2-m}{z_1-m}=\frac{\frac{1-i}{2}(1-m)}{\frac{1-i}{2}(-i(m+i))}=\frac{1-m}{-i(m+i)}=-i\frac{m-1}{i+m}$.

D'où $\frac{z_2-m}{z_1-m}=-i\frac{m-z_A}{m-z_B}=-i\frac{z_A-m}{z_B-m}\Rightarrow \arg\left(\frac{z_2-m}{z_1-m}\right)=\arg(-i)+\arg\left(\frac{z_A-m}{z_B-m}\right)$ donc

$$\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MM_2}\right)=-\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)[2\pi].$$

Comme M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ alors $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$ et par conséquent on a $\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MM_2}\right)=0\,[\pi]$, ce qui montre que $\boxed{\text{les points M, } M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont alignés}}$.

4. a) Le paramètre d'une parabole étant la distance du foyer à la directrice, et comme le projeté orthogonal de A sur la directrice (OB) est O alors $p=OA=1$



Le sommet S est le milieu de $[OA]$ son affixe est $z_S=\frac{1}{2}$.

b) L'équation réduite de P s'écrit $(y-0)^2=2p\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow \boxed{y^2=2x-1}$

c) Une équation de T s'écrit

$(y-0)(-1-0)=p\left[(x-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{2})\right]\Leftrightarrow -y=x$ Donc $\boxed{T:\ \ y=-x}$

Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1+\ln(2x+2)}{2(x+1)}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm .

1. Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$	0.5pt
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f	0.75pt
3. a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion A à préciser.	0.25pt
b) Justifier que la tangente T, à (C) en A, a pour équation $y=-\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}+\frac{2}{\sqrt{e}}$	0.25pt
4. Déterminer l'intersection de (C) avec les axes de coordonnées	0.5pt
5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$. Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser. On note g^{-1} sa réciproque.	0.25pt
6. Construire T, (C) et (C') dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ((C') étant la courbe de g^{-1}).	0.75pt
7. a) Montrer que, sur l'intervalle I, l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α et que $0.6<\alpha<0.7$	0.5pt
b) Calculer l'aire en cm² du domaine plan D délimité par les axes de coordonnées et les courbes (C) et (C')	0.25pt

Corrigé

On a $f(x)=\dfrac{1+\ln(2x+2)}{2(x+1)}$

1. $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left[\dfrac{1+\ln(2x+2)}{2(x+1)}\right]=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left[\dfrac{1}{2x+2}+\dfrac{\ln(2x+2)}{2x+2}\right]=0$

2. $f'(x)=\dfrac{\frac{2}{2x+2}\times(2x+2)-2\big(1+\ln(2x+2)\big)}{4(x+1)^2}\Rightarrow \boxed{f'(x)=\dfrac{-\ln(2x+2)}{2(x+1)^2}}$

Alors le signe de f' est celui de $-\ln(2x+2)$ qui s'annule pour $x=-\dfrac{1}{2}$ et il est positif avant $-\dfrac{1}{2}$ et négatif après. Le tableau de variation de f est ci-contre

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3. a) On a $f'(x)=\dfrac{-\ln(2x+2)}{2(x+1)^2}\Rightarrow f''(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x+1)-2(x+1)\ln(2x+2)}{2(x+1)^4}=\dfrac{-1+2\ln(2x+2)}{2(x+1)^3}$.

Cette expression s'annule et change de signe pour $x=-1+\dfrac{\sqrt{e}}{2}$. Donc (C) admet un point d'inflexion A d'abscisse $x=-1+\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ et d'ordonnée $y=f\left(-1+\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)=\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$. D'où $\boxed{A\left(-1+\dfrac{\sqrt{e}}{2},\dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)}$

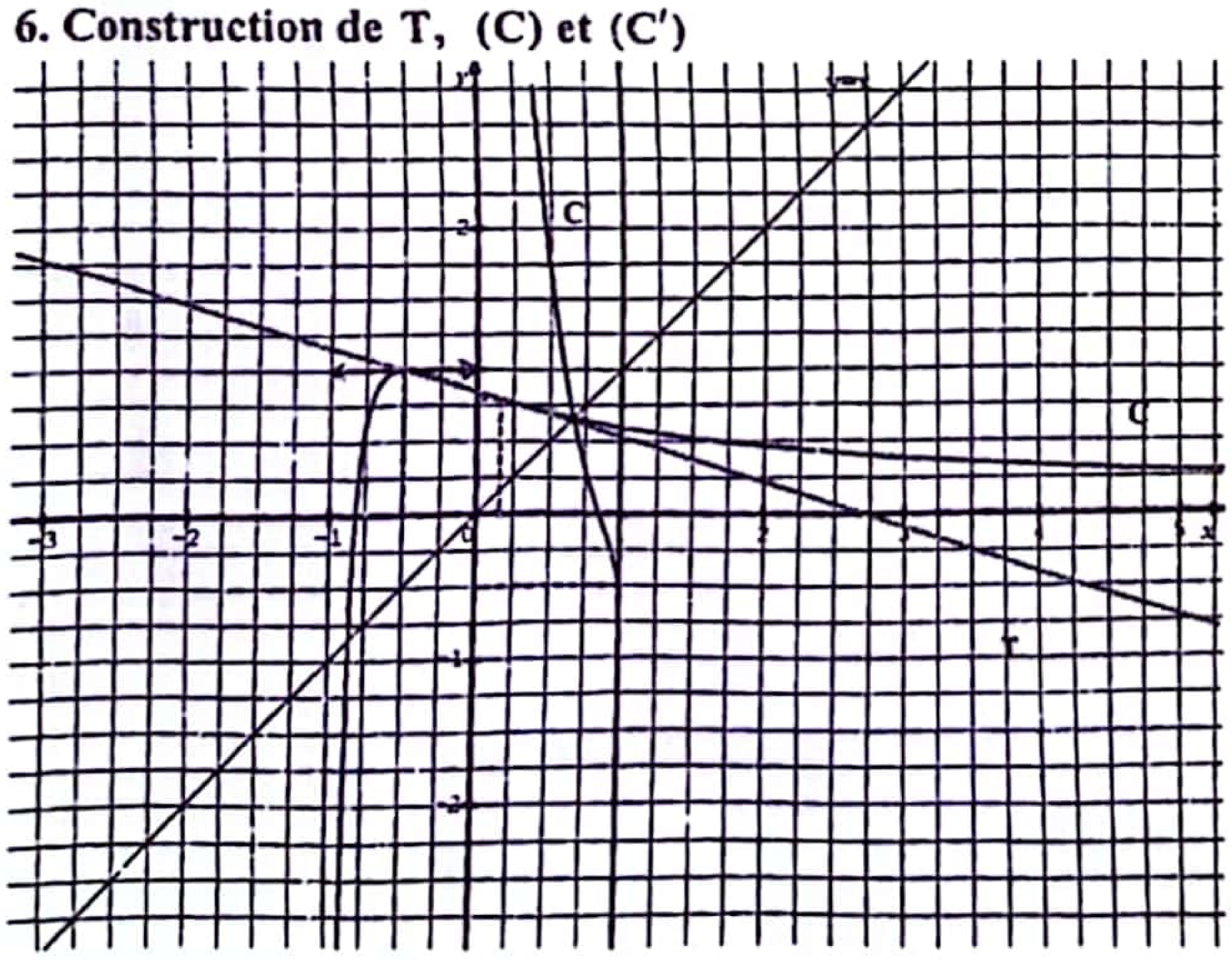
b) L'équation réduite de T est $y=f'\left(-1+\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)\left(x+1-\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)+f\left(-1+\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)$. Or $f\left(-1+\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)=\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$ et $f'\left(-1+\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)=\dfrac{-1}{e}$ donc $y=\dfrac{-1}{e}\left(x+1-\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)+\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$ d'où $\boxed{T:\quad y=-\dfrac{1}{e}x-\dfrac{1}{e}+\dfrac{2}{\sqrt{e}}}$

4. On a $f(x)=0\Leftrightarrow x=-1+\dfrac{1}{2e}$ et $f(0)=\dfrac{1+\ln 2}{2}$.

Les points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées sont $B\left(-1+\dfrac{1}{2e};0\right)$ et $C\left(0;\dfrac{1+\ln 2}{2}\right)$.

5. La fonction f étant continue et strictement décroissante sur l'intervalle I alors g réalise une bijection de I sur l'intervalle $J=f(I)=\left]0;1\right]$.

6. Construction de T, (C) et (C')



7. a) $\forall x\in I$ notons $h(x)=f(x)-x$. Alors h est dérivable sur I et on a $h'(x)=f'(x)-1<0$. En plus $h\left(\dfrac{-1}{2}\right)>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$. Donc h est continue strictement décroissante et change de signe sur I alors l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α. En plus $h(0.6)\simeq 0.07$ et $h(0.7)\simeq -0.05$ donc $0.6<\alpha<0.7$

b) Le domaine D est symétrique par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$. Donc son aire $A(\alpha)$ est le double de celle du domaine délimité par (C), Δ et les axes de coordonnées. D'où, l'aire en unité d'aire est :

$$A(\alpha) = 2\int_0^{\alpha}\left(f(x) - x\right)dx$$

$$= 2\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2(x+1)}\cdot \ln(2x+2) - x\right)dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\ln(2x+2) + \frac{1}{4}\left(\ln(2x+2)\right)^2 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\ln(2\alpha+2) + \frac{1}{4}\left(\ln(2\alpha+2)\right)^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\right) - 2\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{(\ln 2)^2}{4}\right)$$

$$= \ln(2\alpha+2) + \frac{1}{2}\left(\ln(2\alpha+2)\right)^2 - \alpha^2 - \ln 2 + \frac{1}{4}(\ln 2)^2 \qquad \text{(u.a.)}$$

Donc $\boxed{A(\alpha) = 4\ln(2\alpha+2) + 2\left(\ln(2\alpha+2)\right)^2 - 4\alpha^2 - 4\ln 2 - 2(\ln 2)^2 \quad cm^2}$

Exercice 5 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ et on note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 1pt

b) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f 0.75pt

2. a) Calculer $f(x) + f(-x)$. En déduire que le point $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie pour Γ 0.5pt

b) Montrer que I est un point d'inflexion pour Γ et déterminer une équation de la tangente T à Γ en I. 0.5pt

c) Construire Γ et sa tangente T en I dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. 0.5pt

3. On considère la suite $\left(I_n\right)$ définie par : $I_0 = \int_0^1 f(x)dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \dfrac{e^{-nx}}{1+e^x}dx$

a) Calculer I_0 et montrer que $\left(I_n\right)$ est décroissante et convergente. 0.75pt

b) Calculer $I_n + I_{n+1}$. 0.5pt

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1-e^{-n-1}}{2(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1-e^{-n}}{2n}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(nI_n\right)$ 0.5pt

Corrigé

On a $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{1+e^x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+e^x}\right) = 0$.

Donc Γ admet en $-\infty$ et en $+\infty$ deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y = 1$ et $y = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{-e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ d'où le tableau de variation de f.

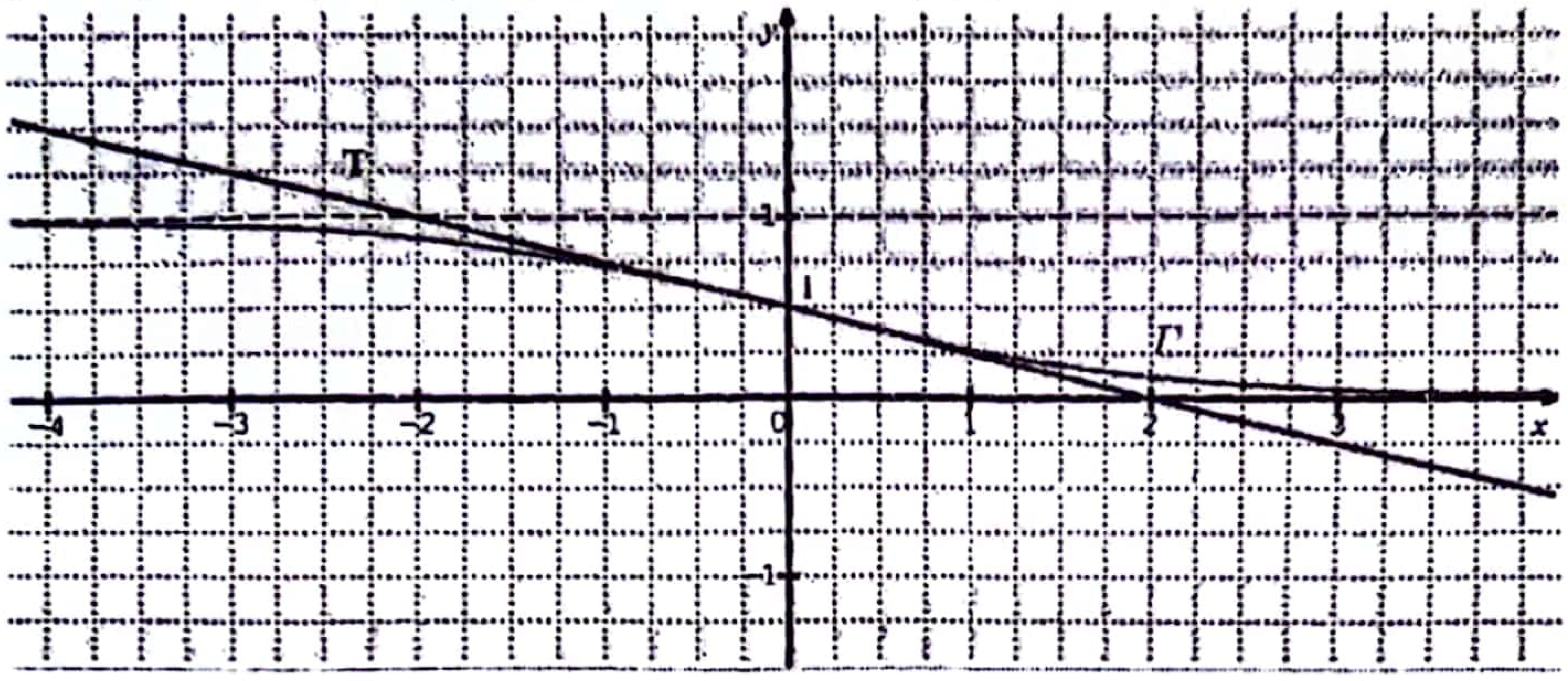
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f'	$-$
f	$1 \searrow 0$

2. a) $f(x) + f(-x) = \dfrac{1}{1+e^x} + \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{1+e^x} + \dfrac{e^x}{1+e^x} = 1 \Rightarrow \boxed{f(x) + f(-x) = 1}$

Donc le point $\boxed{I\left(0;\dfrac{1}{2}\right) \text{ est un centre de symétrie pour } \Gamma}$.

b) Pour montrer que I est un point d'inflexion pour Γ, il suffit de montrer que I est un point de Γ, or $f(0) = \dfrac{1}{1+e^0} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow I \in \Gamma$. Donc I est un point d'inflexion pour Γ.

c) Construction de Γ et T : L'équation réduite de T s'écrit $y = f'(0)(x-0)+f(0) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}$. Alors T passe par I et par le point de coordonnées $(2;0)$.



3. a) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -\ln(1+e^{-1})+\ln 2 \Rightarrow \boxed{I_0 = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0;1]$, on a $-(n+1)x \le -nx \le 0 \Rightarrow 0 \le e^{-(n+1)x} \le e^{-nx} \le 1 \Rightarrow 0 \le \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^x}dx \le \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}dx \le \int_0^1 dx$.

$\Rightarrow \boxed{0 \le I_{n+1} \le I_n \le 1}$, donc la suite (I_n) est décroissante et minorée alors $\boxed{(I_n) \text{ est convergente}}$.

b) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^x}dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}dx = \left[-\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow \boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{1-e^{-n-1}}{n+1}}$

c) Comme pour tout n, $I_{n+1} \le I_n$ et $I_n + I_{n+1} = \frac{1-e^{-n+1}}{n+1}$ alors $I_n + I_{n+1} \le 2I_n \Rightarrow \frac{1-e^{-n+1}}{n+1} \le 2I_n \Rightarrow \boxed{\frac{1-e^{-n+1}}{2(n+1)} \le I_n}$

de même $2I_n \le I_{n-1} + I_n = \frac{1-e^{-n}}{n} \Rightarrow \boxed{I_n \le \frac{1-e^{-n}}{2n}}$.

D'où pour tout n, $\boxed{\frac{1-e^{-n-1}}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1-e^{-n}}{2n}}$

Etant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n-1}}{2(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{2n} = 0$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$ (Théorème des gendarmes)

D'autre part on a $\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot(1-e^{-n-1}) \le nI_n \le \frac{1}{2}\cdot(1-e^{-n})$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+2}(1-e^{-n-1})\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-e^{-n}) = 1$

alors, d'après le théorème des gendarmes, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n) = \frac{1}{2}}$.