

## CORRECTION DU SUJET DE RÉVISION

### Exercice 01

Q	1	2	3	4	5	6
R	C	A	A	B	C	B

### Exercice 02

B : l'enfant boit un boisson sucré ou plus par jour

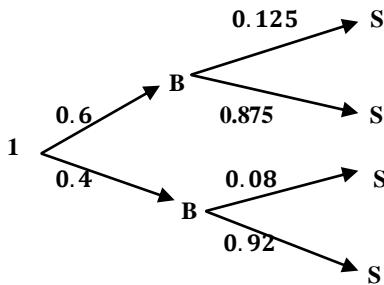
S : l'enfant est un surpoids

D'après les données de l'exercice on a  $P(B) = 60\% = 0.6$

$$P_B(S) = \frac{1}{8} \text{ et } P_{\bar{B}}(S) = 8\% = 0.08$$

$$1) \quad P_B(S) = \frac{1}{8} = 0.125$$

2) L'arbre pondéré



3) Calculons  $P(S \cap B)$  puis interprétons les résultats

$$P(S \cap B) = P(B) \times P_B(S) = 0.125 \times 0.6 = 0.075$$

$P(S \cap B)$  Représente la probabilité qu'on choisie un enfant boit une boisson sucré ou plus par jour et surpoids

4) Déterminons la probabilité que l'enfant est un surpoids

$$P(S) = P(S \cap B) + P(S \cap \bar{B}) = P(S \cap B) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(S) = 0.075 + 0.4 \times 0.08 = 0.107$$

5) On a choisi un enfant en surpoids. Calculons la probabilité de qu'il boive une boisson sucré ou plus par jour

$$P_S(B) = \frac{P(S \cap B)}{P(S)} = \frac{0.075}{0.107} = \frac{75}{107}$$

6) Comme  $P(B) \times P(S) = 0.6 \times 0.107 = 0.0642 \neq P(S \cap B)$  Alors B et S sont indépendants

Exercice 03

$$1) \quad P(z) = z^3 + 2z^2 + (4 + 5i)z + 3 - 15i$$

a) Déterminer les racines carrées du nombre  $z = 15 - 8i$   
Soit  $d = x + iy$  tel que  $d^2 = 15 - 8i$  alors

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(15)^2 + (-8)^2} = 17$$

$$x^2 - y^2 = 15$$

$$2xy = -8$$

$$2x^2 = 32 \leftrightarrow x^2 = 16 \leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -4$$

$$\text{Si } x = 4 \text{ alors } 8y = -8 \leftrightarrow y = -1$$

Donc les racines carrées du nombre  $z = 15 - 8i$  sont

$$4 - i \text{ et } -4 + i$$

b) Calculons  $P(-3i)$ .

$$P(-3i) = (-3i)^3 + 2(-3i)^2 + (4 + 5i)(-3i) + 3 - 15i = 27i - 18 + 15 - 12i + 3 - 15i = 0.$$

Donc  $P(-3i) = 0$

Déterminons les nombres  $a$  et  $b$  tel que

$$P(z) = (z + 3i)(z^2 + az + b).$$

	1	2	$4 + 5i$	$3 - 15i$
$-3i$	↓	$-3i$	$-9 - 6i$	$3 + 15i$
	<b>1</b>	$2 - 3i$	$-5 - i$	<b>00</b>
		$a$	$b$	

Donc :  $P(z) = (z + 3i)(z^2 + (2 - 3i)z + -5 - i)$ .

$$a) \quad P(z) = 0 \leftrightarrow (z + 3i)(z^2 + (2 - 3i)z + -5 - i) = 0.$$

Soit  $z + 3i = 0$  ou  $z^2 + (2 - 3i)z + -5 - i = 0$

$$z_0 = -3i \quad \begin{aligned} \Delta &= (2 - 3i)^2 - 4 \times 1(-5 - i) \\ &= 15 - 8i \end{aligned}$$

Une racine carrée du  $\Delta$  est  $4 - i$

$$z_1 = \frac{-2+3i+4-i}{2 \times 1} = 1+i$$

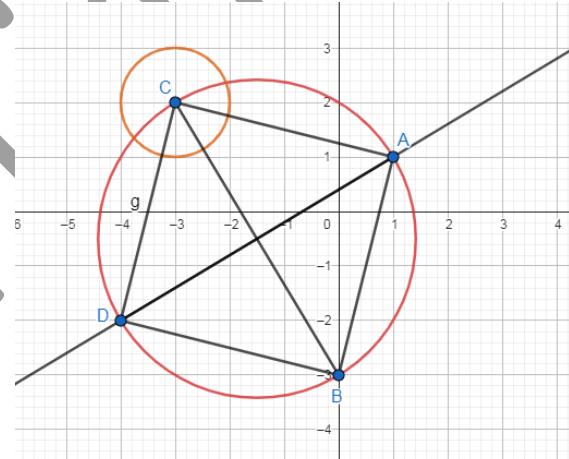
$$z_2 = \frac{-2+3i-4+i}{2 \times 1} = -3+2i$$

Donc  $S = \{-3i ; 1+i ; -3+2i\}$

$$2) \quad z_A = 1+i ; z_B = -3i \text{ et } z_C = -3+2i$$

a) Placement de points A ; B et C

$$A(1; 1) ; B(0; -3) ; C(-3; 2)$$



Déterminons la nature du triangle ABC

$$\text{Soit } K = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3i - (1+i)}{-3+2i - (1+i)} = \frac{-1-4i}{-4+i} = i$$

Comme  $K = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$  Alors le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A

b) Donnons la forme trigonométrique de chacun des nombres  $z_A$  et  $z_B$

$$\bullet |z_A| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{et}$$

$$\text{Arg } z_A = \text{Arg } (1+i) = \frac{\pi}{4}$$

Donc la forme trigonométrique du nombre  $z_A$  est

$$z_A = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\bullet |z_B| = |-3i| = \sqrt{0+9} = 3 \quad \text{et} \quad \text{Arg } z_B = \text{Arg } (-3i) = -\frac{\pi}{2}$$

Donc la forme trigonométrique du nombre  $z_B$  est

$$z_B = 3 \left( \cos -\frac{\pi}{2} + i \sin -\frac{\pi}{2} \right)$$

c) ACDB soit un parallélogramme alors

$$z_A + z_D = z_C + z_B \leftrightarrow z_D = z_C + z_B - z_A = -3 + 2i - 1 - i$$

$$\text{Donc } z_D = -4 - 2i \text{ alors } D(-4; -2)$$

3) Pour tout nombre complexe  $z \neq -3 + 2i$ ; on pose  $f(z) = \frac{z+3i}{z+3-2i}$

a) I milieu du segment  $[BC]$  alors  $z_I = \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{-3i-3+2i}{2} = -1.5 - 0.5i$

b)  $f(z) = -i \leftrightarrow \frac{z+3i}{z+3-2i} = -i \leftrightarrow z+3i = -iz - 3i - 2 \leftrightarrow (1+i)z = -2 - 6i \leftrightarrow z = \frac{-2 - 6i}{1+i} = -4 - 2i = z_D$

Interprétation Le triangle  $ABD$  est un triangle rectangle isocèle en  $D$

c)  $M \in \Gamma_1 \leftrightarrow |f(z)| = 1 \leftrightarrow \left| \frac{z+3i}{z+3-2i} \right| = 1$

$\leftrightarrow |z+3i| = |z+3-2i|$

$\leftrightarrow |z_M - z_B| = |z_M - z_C| \leftrightarrow MB = MC$

Alors  $\Gamma_1$  est la médiatrice du segment  $[CB]$ .

c)  $M \in \Gamma_2 \leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{z+3i}{z+3-2i}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi] \leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{z_M-z_B}{z_M-z_C}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi] \leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$

Alors  $\Gamma_2$  est le cercle de diamètre  $[BC]$  privé de  $B$  et  $C$

d)  $M \in \Gamma_3 \leftrightarrow |f(z) - 1| = \sqrt{34} \leftrightarrow \left| \frac{z+3i}{z+3-2i} - 1 \right| = \sqrt{34} \leftrightarrow \left| \frac{z+3i - z-3+2i}{z+3-2i} \right| = \sqrt{34} \leftrightarrow \left| \frac{-3+5i}{z+3-2i} \right| = 5\sqrt{5} \leftrightarrow \frac{\sqrt{34}}{MC} = \sqrt{34} \leftrightarrow MC = 1$

Alors  $\Gamma_3$  est le cercle de centre  $C$  et de rayon 1

d) Justifie que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  passent le point  $D$

Comme  $|f(z_D)| = |-i| = 1$  Alors  $\Gamma_1$  passe par  $D$

Comme  $\operatorname{Arg}(f(z_D)) = \operatorname{Arg}(-i) = \frac{\pi}{2} [\pi]$  Alors  $\Gamma_2$  passe par  $D$

#### Exercice 04

I.  $g(x) = -2x + 4x \ln x$

1) a) Calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x + 4x \ln x) = -2 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 4x \ln x)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-2 + 4 \ln x) = +\infty(-2 + \infty) = +\infty$

b) Calculons  $g'(x)$  puis Dressons le tableau de variations de  $g$

$g'(x) = -2 + 4 \ln x + \frac{1}{x} \times 4x = -2 + 4 \ln x + 4 = 2 + \ln x$

$2 + \ln x = 0$  Alors  $x = e^{-2}$

x	0	$e^{-2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0	$g(e^{-2}) \approx -2.42$	$+\infty$

2) a) sur l'intervalle  $[e^{-2}; +\infty[$   $g$  est continue et strictement croissante et change son signe alors  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et Sur l'intervalle  $]0; e^{-2}]$   $g$  ne change pas son signe alors  $g(x) = 0$  n'admet aucune solution dans cet intervalle

Et comme  $g(1.6) \approx > 0$  et  $g(1.7) \approx < 0$  alors  $1.6 < \alpha < 1.7$

b) D'après les variations de  $g$  on a

x	0	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	/	-	+

II.  $f(0) = 1$  et  $f(x) = 1 - 2x^2 + 2x^2 \ln x$

1) a) Calculons la limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis interprétons le résultat

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2x^2 + 2x^2 \ln x) = 1 - 0 + 0 = 1$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$  Alors  $f$  est continue à droite de 0

b) Etudions la dérivabilité de  $f$  à droite de 0 puis interprétons graphiquement le résultat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2x^2 + 2x^2 \ln x - 1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x + 2x \ln x = -0 + 0 = 0$$

Alors  $f$  est dérivable à droite de 0 et sa courbe admet une demi-tangente horizontale d'équation  $y = f(0) = 1$

c) Calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis interpréter graphiquement le résultat

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x^2 + 2x^2 \ln x) =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{1}{x^2} - 2 + 2 \ln x \right) = +\infty(0 - 2 + \infty) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( \frac{1}{x^2} - 2 + 2 \ln x \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{1}{x^2} - 2 + 2 \ln x \right) \\ = +\infty(0 - 2 + \infty) = +\infty$$

Donc  $C$  admet une branche parabolique suivant ( $oy$ ) en  $-\infty$

2) a) Calculer  $f'(x)$  la dérivée de  $f$  puis donner son signe

$$f'(x) = 0 - 4x + 4x \ln x + \frac{1}{x} \times 2x^2 = -4x + 4x \ln x + 2x \\ = -2x + 4x \ln x = g(x)$$

Donc le signe  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$

x	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

b) Dressons le tableau de variations de  $f$

x	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$f(\alpha)$	$+\infty$

c) Donnons une équation de la tangente au point d'abscisse 1

$T : y = f'(1)(x-1) + f(1) = -2(x-1) - 1 = -2x + 1$

d) sur chacun des intervalles  $]0; \alpha]$  et  $[\alpha; +\infty[$   $f$  est continue et strictement monotone et change de signe alors l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\beta$  et  $\lambda$

Donc  $C$  coupe ( $ox$ ) en deux points d'abscisse  $\beta$  et  $\lambda$  et que  $-1.8 < \beta < -1.7$  et  $0.8 < \lambda < 0.9$

3) Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]0; \alpha]$

Le tableau de variations de  $h$

x	0	$\alpha$
$f'(x)$	-	0
$f(x)$	1	$f(\alpha)$

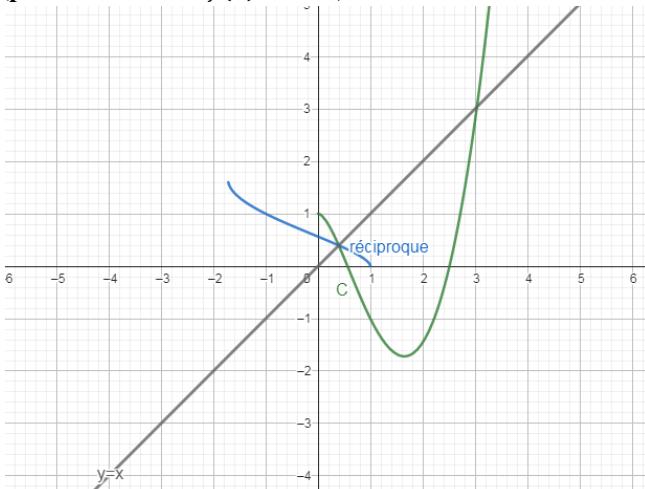
a)  $h$  est continue et strictement décroissant alors elle réalise une bijection de  $]0; \alpha]$  vers  $j = [f(\alpha); 1[$

PROF : AHMED LIMAM ABDELGHAHAR

b)  $(h^{-1})'_{(-1)} = \frac{1}{h'(h^{-1}(-1))}$

$h(1) = -1 \Leftrightarrow h^{-1}(-1) = 1$  Alors  $(h^{-1})'_{(-1)} = \frac{1}{h'(1)} = \frac{-1}{2}$

c) Construire la courbe C et  $C_{h^{-1}}$  ( $C_{h^{-1}}$  est la courbe de  $h^{-1}$ )  
(prenons  $\alpha = 1.6$  et  $f(\alpha) = -1.7$ )



4) a) Déterminons les réels a et b tel que la fonction  $F(x) = ax^3 + bx + cx^3 \ln x$  est une primitive de f

$$F(x) = ax^3 + bx + cx^3 \ln x$$

$$F'(x) = 3ax^2 + b + 3cx^2 \ln x + \frac{1}{x} \times cx^3$$

$$= b + 3ax^2 + 3cx^2 \ln x + cx^2$$

$$= b + (3a+c)x^2 + 3cx^2 \ln x = f(x) = 1 - 2x^2 + 2x^2 \ln x$$

Donc par identification on a

$$b = 1$$

$$3c = 2 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}$$

$$3a + c = -2 \Leftrightarrow a = \frac{-2-c}{3} = \frac{-8}{9}$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{-8}{9}x^3 + x + \frac{2}{3}x^3 \ln x$$

b) En déduire que la valeur de l'intégrale  $\int_1^e f(x) dx$  est  $\frac{-2e^3 + 9e - 1}{9}$

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= [F(x)]_1^e = F(e) - F(1) \\ &= \frac{-8}{9}e^3 + e + \frac{2}{3}e^3 \ln e - \left( \frac{-8}{9}1^3 + 1 + \frac{2}{3}1^3 \ln 1 \right) \\ &= \frac{-8}{9}e^3 + e + \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{9} = \frac{-8}{9}e^3 + \frac{9e}{9} + \frac{6}{9}e^3 - \frac{1}{9} = \frac{-2e^3 + 9e - 1}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_1^e f(x) dx = \frac{-2e^3 + 9e - 1}{9}$$

### Exercice 05

I.(E):  $y'' + 4y' + 4y = 8x - 4$

1) Trouver les réels a et b tel que  $u(x) = ax + b$  soit une solution de l'équation de (E):

$$u(x) = ax + b$$

$$u'(x) = a$$

$$u''(x) = 0$$

$$u'' + 4u' + 4u = 8x - 4$$

$$0 + 4a + 4(ax + b) = 8x - 4$$

$$4a + 4ax + 4b = 8x - 4$$

Par identification

$$4a = 8 \Leftrightarrow a = 2$$

$$4a + 4b = -4 \Leftrightarrow 4b = -4 - 4a = -12 \Leftrightarrow b = -3$$

$$\text{Donc } u(x) = 2x - 3$$

2) Donnons la solution générale de l'équation

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$x = 16 - 16 = 0$$

$$r_0 = \frac{-4}{2 \times 1} = -2$$

Donc la solution générale de l'équation est :

$$y(x) = (Ax + B)e^{-2x}$$
 Avec A et B sont des réels

Déduisons la solution générale de l'équation (E)

$$\text{La solution générale de l'équation (E) est}$$

$$(Ax + B)e^{-2x} + 2x - 3$$
 Avec A et B sont des réels

Donner la solution h de (E) dont la courbe passe par l'origine du repère et coupe l'axe des abscisses au point

$$A\left(\frac{3}{2}; 0\right)$$

$$h(x) = (Ax + B)e^{-2x} + 2x - 3$$

$$h(0) = 0 \text{ et } h\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$h(0) = 0 \Leftrightarrow (A \times 0 + B)e^{-0} + 2 \times 0 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow B - 3 = 0 \Leftrightarrow B = 3$$

$$h\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(A \times \frac{3}{2} + B\right)e^{-2 \times \frac{3}{2}} + 2 \times \frac{3}{2} - 3 = 0$$

$$\left(A \times \frac{3}{2} + B\right)e^{-3} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}A + B = 0 \Leftrightarrow A = \frac{-B}{\frac{3}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$$

$$\text{Donc } h(x) = (-2x + 3)e^{-2x} + 2x - 3 = (2x - 3)(1 - e^{-2x})$$

$$\text{II. } f(x) = (2x - 3)(1 - e^{-2x})$$

$$1) g(x) = 2 + (4x - 8)e^{-2x}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{(4x - 8)}{e^{2x}}\right) = 2 + \frac{(-\infty - 8)}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{4x}{e^{2x}} - \frac{2}{e^{2x}}\right) = 2 + 0 - 0 = 2$$

$$g'(x) = 4e^{-2x} - 2e^{-2x}(4x - 8) = (-8x + 16 + 4)e^{-x}$$

$$= (-8x + 20)e^{-x}$$

Le signe de  $g'(x)$  est celui de  $-8x + 20$

$$-8x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2.5$$

x	$-\infty$	2.5	$+\infty$
$g'(x)$	+	( )	-
$g(x)$	$\searrow$	2.1	$\nearrow$

b) sur l'intervalle  $]-\infty; 2.5]$  g est continue et strictement croissante et change son signe alors  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $a$  et Sur l'intervalle  $[2.5; +\infty]$  g ne change pas son signe alors  $g(x) = 0$  n'admet aucune solution dans cet intervalle

Et comme  $g(0.5) \approx < 0$  et  $g(0.6) \approx > 0$  alors  $0.5 < \alpha < 0.6$

c) D'après les variations de g on a

x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	( )	+

2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement le résultat

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3)(1 - e^{-2x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3)\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) = (-\infty - 3)(1 - \infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) = (2 - 0)(1 - \infty) = -\infty$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  alors C admet une branche parabolique suivant (oy) en  $-\infty$

b) Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Puis montrons que la droite  $D$  d'équation  $y = 2x - 3$  est une asymptote de  $C$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) \left( 1 - \frac{1}{e^{2x}} \right) = (+\infty - 3)(1 - 0) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 3) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (2x - 3) \left( 1 - \frac{1}{e^{2x}} \right) - (2x - 3) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x - 3 - \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{3}{e^{2x}} - 2x + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2x}{e^{2x}} + \frac{3}{e^{2x}} \right) \\ &= -0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc  $C$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = 2x - 3$

c) Etudier les positions relatives de  $C$  avec son asymptote  $D$

$$f(x) - y = f - \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{3}{e^{2x}} = \frac{-2x+3}{e^{2x}}$$

Le signe de  $f(x) - y$  est celui de  $-2x + 3$

$$-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1.5$$

x	$-\infty$	1.5	$+\infty$
$f(x) - y$	-	(○)	+
Position relative	$D/C$	$C/D$	

3) a) Calculer  $f'(x)$  la dérivée de  $f$ . Puis donner son signe

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1 - e^{-2x}) + 2e^{-2x}(2x - 3) \\ &= 2 - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x} - 6e^{-2x} = 2 + (4x - 8)e^{-2x} = g(x) \end{aligned}$$

Donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$

x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	(○)	+

b) Dressons le tableau de variations de  $f$

x	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	(○)	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

c) Montrons que  $C$  admet un point d'inflexion que l'on déterminera

$$f''(x) = g'(x)(-8x + 20)e^{-x}$$

x	$-\infty$	2.5	$+\infty$
$f''(x)$	-	(○)	+

$f''$  s'annule et change de signe en 2.5 alors  $C$  admet un point d'inflexion  $A(2.5; f(2.5))$  or  $f(2.5) = 2 - 2e^{-5}$

d) Déterminons le point A où la tangente T est parallèle à la droite D puis donnons une équation de T

T parallèle à D :  $y = 2x - 3$  alors  $f'(x) = 2$

$$\leftrightarrow 2 + (4x - 8)e^{-2x} = 2 \leftrightarrow (4x - 8)e^{-2x} = 0 \leftrightarrow 4x - 8 = 0$$

$\leftrightarrow x = 2$  Donc T parallèle à D au point  $B(2; f(2))$

Or  $f(2) = 1 - e^{-4}$

Une équation de T

$$\begin{aligned} T : y &= f'(2)(x - 2) + f(2) \\ &= 2(x - 2) + 1 - e^{-4} = 2x - 3 + e^{-4} \end{aligned}$$

e) Montrons que  $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-3)^2}{2\alpha-4}$

$$f(\alpha) = (2\alpha - 3)(1 - e^{-2\alpha})$$

$$g(\alpha) = 2 + (4\alpha - 8)e^{-2\alpha} = 0 \leftrightarrow e^{-2\alpha} = \frac{-2}{4\alpha - 8} = \frac{-1}{2\alpha - 4}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (2\alpha - 3) \left( 1 + \frac{1}{2\alpha - 4} \right) = (2\alpha - 3) \left( \frac{2\alpha - 4 + 1}{2\alpha - 4} \right) \\ &= (2\alpha - 3) \left( \frac{2\alpha - 3}{2\alpha - 4} \right) = \frac{(2\alpha - 3)^2}{2\alpha - 4} \\ \text{Donc } f(\alpha) &= \frac{(2\alpha - 3)^2}{2\alpha - 4} \end{aligned}$$

4) a) Déterminons les intersections de C avec l'axes des cordonnées

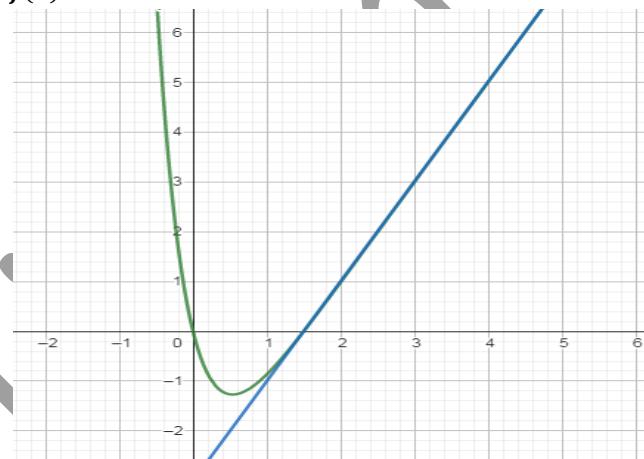
$$C \cap (ox) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(1 - e^{-2x}) = 0$$

$$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$1 - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc C coupe (ox) aux points  $(\frac{3}{2}; 0)$  et  $(0; 0)$

b) Traçons la courbe de f et la droite D. On prend  $\alpha = 0.5$  et  $f(\alpha) = -1.2$



c) Discutons graphiquement suivant le paramètre m le nombre des solutions de l'équation  $3 - 2x = (-2x + 3 + m)e^{-2x}$

$$\begin{aligned} 3 - 2x &= (-2x + 3 + m)e^{-2x} \Leftrightarrow (3 - 2x)e^{-2x} = -2x + 3 + m \\ &\Leftrightarrow 2x - 3 + (3 - 2x)e^{-2x} = m \Leftrightarrow (2x - 3)(1 - e^{-2x}) = m \\ &\Leftrightarrow f(x) = m \end{aligned}$$

Donc les nombres des solutions de l'équation

$3 - 2x = (-2x + 3 + m)e^{-2x}$  est celui des intersections de C avec la droite  $D_m$ ;  $y = m$

Si  $m < f'(\alpha)$   $\Leftrightarrow$  l'équation n'admet aucune solution

Si  $m = f'(\alpha)$   $\Leftrightarrow$  l'équation admet une unique solution

Si  $m > f'(\alpha)$   $\Leftrightarrow$  l'équation admet deux solutions

5) a) Calculer en utilisant une intégration par partie

$$I = \int_0^1 (2x - 3)e^{-2x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } u(x) &= 2x - 3 & \Leftrightarrow u'(x) &= 2 \\ v'(x) &= e^{-2x} & \Leftrightarrow v(x) &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } I = \left[ -\frac{1}{2}(2x - 3)e^{-2x} \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{3}{2} - \left[ \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{3}{2} - \left( \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} = -1 \text{ Donc } I = -1$$

b) En déduire l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe C l'axe des abscisses et les deux droites  $x = 0$  et  $x = 1$

$$A = - \int_0^1 f(x) dx \text{ Car } \frac{(ox)}{C} \text{ dans l'intervalle } [0; 1]$$

$$A = - \int_0^1 ((2x - 3)(1 - e^{-2x})) dx$$

$$= - \int_0^1 (2x - 3)dx + \int_0^1 (2x - 3)e^{-2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x - 3)e^{-2x} dx = -1 - I = -1 - (-1) = 0$$

PROF : AHMED LIMAM ABDELGHAFAR

Ahmed Limam