Baccalauréat 2010

Session Complémentaire

Exercice 1 (4 points)

Pour tout réel t et pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $G_0(t) = \int_0^t e^x dx$ et $G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$.

1.a) Démontrer que $G_n(t)$ existe pour tout entier naturel et donner l'expression $G_0(t)$ et de $G_1(t)$ en fonction de t. (1,25)

b) Démontrer que pour tout réel $t \geq 0$ on a : $\frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2e^t$. (0,5)

c) Démontrer que pour tout réel $t \leq 0$ on a : $\frac{1}{2}t^2e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2$. (0,5)

d) En déduire le calcul de la limite : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)}$. (0,25)

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $I_n = G_n(1) = \int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$. En déduire I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geq 1$. (0,5)

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ? (0,5)

c) Donner un encadrement de I_n qui permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et calculer cette limite. (0,5)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose :
$P(z) = z^3 - (4+6i)z^2 + (-6+16i)z + 12 - 4i$.

1.a) Calculer $P(1+i)$. (0,25)

b) Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a :
$P(z) = (z-1-i)(z^2 + az + b)$. (0,5)

c) Déterminer les solutions de l'équation $P(z) = 0$. (0,5)

2.a) Placer les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ sachant que $|z_A| \leq |z_B| \leq |z_C|$. Déterminer la nature du triangle ABC. (0,5)

b) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s de centre A qui transforme C en B. (0,25)

c) Donner l'expression complexe de s. Déterminer le rapport et un angle de s. (0,75)

3) On considère la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le M' d'affixe z' tel que :
$z' = \frac{1-i}{2}z + i$. Pour tout entier naturel n on pose : $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$. On définit une suite de points (M_n) par $M_0 = C$ et $M_n = f^n(M_0)$.

a) Reconnaître la transformation f et déterminer ses éléments caractéristiques. (0,5)

b) Déterminer la nature du triangle AM_nM_{n+1}. (0,25)

c) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$. (0,25)

d) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et l'interpréter. (0,25)

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de coté a, $(a > 0)$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA].

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,5)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme I en C et B en J. (0,25)

b) Préciser l'angle et le centre Ω de r_1. (0,5)

3. Soit $\mathbf{t}$ la translation de vecteur $\overline{\mathbf{CK}}$. On pose : $r_2 = t \circ r_1$.

a) Déterminer la nature de la composée $r_2 = t \circ r_1$. Préciser $r_2(I)$ et $r_2(B)$. Caractériser r_2. (1)

b) Déterminer une droite Δ telle que $s_\Delta \circ r_2 = s_{(AJ)}$. En déduire une autre décomposition de r_2. (0,25)

4. On considère les similitudes directes s_1 et s_2 de centres respectifs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ telles que : $s_1(B) = K$ et $s_2(K) = B$.

a) Déterminer un angle et le rapport de chacune des similitudes directes s_1 et s_2. (1)

b) Déterminer la nature de la composée $f = s_2 \circ s_1$ et la caractériser. (0,25)

5. Dans cette question, $\mathbf{M}$ est un point variable du plan. On pose $r_1(M) = M_1$ et $r_2(M) = M_2$.

a) Démontrer que si $\mathbf{M}$ est distinct de $\mathbf{J}$ et de Ω alors on a : $(\overline{M\Omega}, \overline{MJ}) = (\overline{MM_1}, \overline{MM_2})\ \ [2\pi]$. (0,5)

b) En déduire le lieu géométrique du point $\mathbf{M}$ lorsque les points $\mathbf{M}$, $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ sont alignés. (0,25)

c) Démontrer que pour toute position du point $\mathbf{M}$ dans le plan, la distance M_1M_2 reste constante et la préciser et que la droite (M_1M_2) possède une direction fixe à préciser. (0,5)

Exercice 4 (7 points)

I- On considère la fonction numérique $\mathbf{g}$ définie par : $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x > -1$ on a : $g(x) > 0$. (0,25)

2. Déterminer les réels $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ tels que pour tout réel $x > -1$ on a : $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$. (0,75)

3. Déterminer la primitive $\mathbf{G}$ de la fonction $\mathbf{g}$ sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ et qui vérifie : $G(0) = 1$. (0,5)

II- On considère la fonction numérique $\mathbf{f}$ définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + x + 1 + \ln(x+1)$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $\mathbf{1cm}$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique. (1)

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. (0,5)

2.a) Montrer que la fonction $\mathbf{f}$ réalise une bijection de $I =]-1, +\infty[$ sur un intervalle $\mathbf{J}$ que l'on déterminera. (0,25)

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Vérifier que $-0,53 < \alpha < -0,52$. (0,5)

3.a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) \geq x + 1$. Interprétation graphique. (0,25)

b) Montrer que les courbes (C) et (C'), représentant respectivement la fonction $\mathbf{f}$ et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, se coupent en un unique point dont l'abscisse β vérifie $-0,81 < \beta < -0,80$. (0,5)

c) Démontrer que : $(f^{-1})'(\beta) = \dfrac{\beta + 1}{2\beta^2 + 3\beta + 2}$. (0,5)

4.a) Déterminer tous les points de la courbe (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $y = 2x$. (0,5)

b) Discuter suivant les valeurs du paramètres réel $\mathbf{k}$ le nombre de solution de l'équation : $x^2 - x + 1 + \ln(x+1) = k$. (0,5)

c) Construire les courbes (C) et (C'). (0,5)

5. Soit $\mathbf{A}$ l'aire du domaine plan limité par les courbes (C) et (C') et les axes des coordonnées.

a) Montrer que : $A = \alpha^2 + \int_\beta^\alpha (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1))dx$. (0,25)

b) Calculer $\mathbf{A}$ en fonction de α et β (On pourra utiliser une intégration par parties). (0,25)

Fin.