BACCALAUREAT 2022
Session Normale
Epreuve de MATHEMATIQUES

Séries :
Sciences Naturelles & TSGE
Coefficient : 6& 4
Durée : 4h

Exercice 1 : (3 points)

Le tableau ci-contre, représente la répartition de 1000 élèves bacheliers selon le genre et la spécialité. On choisit un élève au hasard et on considère les événements suivants : G « l'élève choisi est un garçon » et S « l'élève choisi est scientifique »

	Scientifiques	Littéraires	Total
Garçons	340	240	580
Filles	260	160	420
Total	600	400	1000

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $P(G)$ est	0,24	0,34	0,58	0,5pt
2	La probabilité $P(\overline{S})$ est	0,3	0,4	0,6	0,5pt
3	La probabilité $P_G(S)$ est	$\frac{17}{29}$	$\frac{21}{29}$	$\frac{23}{29}$	0,5pt
4	La probabilité $P(G \cup S)$ est	0,82	0,84	0,85	0,5pt

Les statistiques précédentes sont tirées d'un fichier enregistré sur un ordinateur.
Soit T la variable aléatoire égale à la durée d'attente pour télécharger ce fichier, exprimée en seconde. On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre $0{,}1$.

5	La probabilité $P(T \leq 30)$ est	e^{-3}	$1-10e^{-0,3}$	$1-e^{-3}$	0,5pt
6	La probabilité $P_{T>10}(T \geq 30)$ est	e^{-2}	$1-10e^{-0,2}$	$1-e^{-2}$	0,5pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse						

Exercice 2 : (4 points)

On considère le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par :
$P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 - (2-8i)z + 8 + 4i$.

1° a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(4-2i)^2$ — 0,25pt

b) Calculer $P(2i)$ et déterminer les complexes a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$ — 0,5pt

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. — 0,5pt

2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1+i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 3-i$ — 0,75pt

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. — 0,25pt

c) Ecrire sous forme exponentielle les affixes des nombres z_A et z_B. — 0,5pt

d) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre $\frac{z_C - 2i}{z_A - 2i}$, et en déduire la nature de ABC — 0,5pt

3° a) Déterminer et construire l'ensemble E des points M, d'affixe z, tel que $|z-3+i| = |z+1-i|$ — 0,5pt

b) Déterminer l'ensemble F des points M, d'affixe z, tel que $\arg(z-3+i) - \arg(z+1-i) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ — 0,25pt

Exercice 3 : (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + e^{-n}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = u_{n+1} - u_n$ et soit $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme. 0,

b) Exprimer v_n en fonction de n. 0,5

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_n$. 0,5

d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer sa limite. 0,5p

Exercice 4 : (4 points)

I. 1° Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) $y'' + 2y' + y = 0$. 0,25

2° Déterminer la solution h de l'équation (E) qui vérifie $h(0) = -1$ et $h(-1) = 0$. 0,25

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x+1)e^{-x} - 1$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement. 0,75

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à Γ et étudier leur position relative. 0, 5

2° a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = xe^{-x}$ puis en déduire son signe sur $\mathbb{R}$. 0,5p

b) Dresser le tableau de variation de f. 0,5p

3° a) Montrer que la courbe Γ coupe (Ox) en un unique point d'abscisse α avec $-1,3 < \alpha < -1,2$ 0,5p

b) Montrer que la courbe Γ admet un point d'inflexion A et préciser ses coordonnées. 0,25

c) Construire (Δ), Γ dans le repère précédent. 0,5p

Exercice 5 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2(2\ln x - 1) + 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$ puis interpréter le résultat. 0,75p

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat. 1,25p

2° a) Montrer que $f'(x) = 4x\ln x$. 1pt

b) Dresser le tableau de variation de f. 0,5pt

3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1,+\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. 0,5pt

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}. 0,5pt

4° Construire (C) et (C') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, ((C') étant la courbe de g^{-1}). 0,5pt

5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $K = \int_1^e x^2 \ln x\,dx$. 0,5pt

b) En déduire l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$. 0,5pt

Fin.

Exercice 1

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	C	B	A	B	C	A

Exercice 2

1° $p(z)=z^3-(2+2i)z^2-(2-8i)z+8+4i$.

a) $(4-2i)^2=16-16i-4=12-16i$.

b) $p(2i)=(2i)^3-(2+2i)(2i)^2-(2-8i)(2i)+8+4i$

	1	-2-2i	-2+8i	8+4i
2i		2i	-4i	-4i-8
	1	-2	-2+4i	0

$a=-2$, $b=-2+4i$

$p(z)=(z-2i)(z^2-2z-2+4i)$

c) $p(z)=0 \Rightarrow z=2i$ ou $z^2-2z-2+4i=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4(-2+4i)=4+8-16i=12-16i=(4-2i)^2$

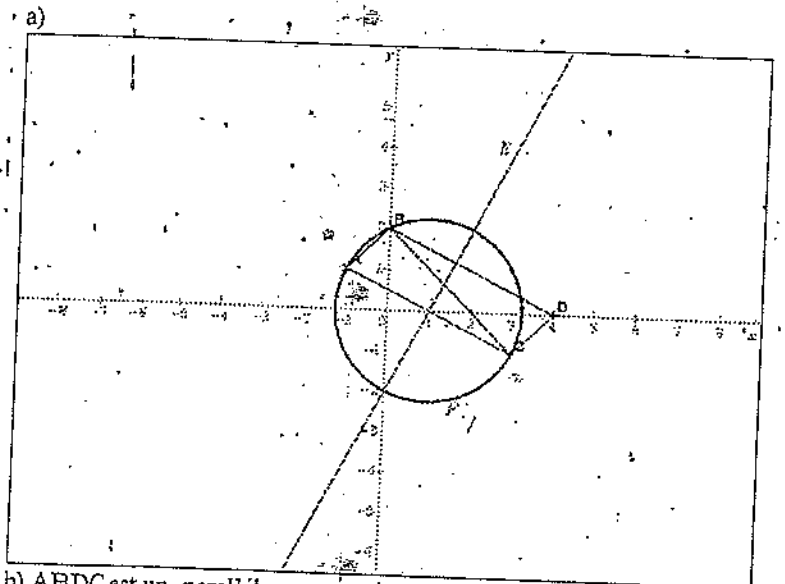
$r_1=4-2i$ et $r_2=-4+2i$ d'où $z_1=\dfrac{2+4-2i}{2}=3-i,\ z_2=\dfrac{2-4+2i}{2}=-1+i$

$S=\{2i, 3-i, -1+i\}$

2°) $z_A=-1+i$, $z_B=2i$

et $z_C=3-i$

a)



b) ABDC est un parallélogramme si et seulement si

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow Z_D-Z_B=Z_C-Z_A$

$\Leftrightarrow Z_D=Z_B+Z_C-Z_A=2i+3-i+1-i=4$

c) $z_A=-1+i \Rightarrow |z_A|=|-1+i|=\sqrt{2}$, $\left(\cos\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \alpha=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

$z_A=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

$z_B=2i \Rightarrow |z_B|=|2i|=2$ et $\arg(z_B)=\arg(2i)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$z_B=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $\dfrac{z_C-2i}{z_A-2i}=\dfrac{3-i-2i}{-1+i-2i}=\dfrac{2-2i}{-1-i}=\dfrac{(2-2i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\dfrac{-2+2i+2i+2}{1+1}=\dfrac{4i}{2}=2i$

$\dfrac{z_C-2i}{z_A-2i}=2i\Rightarrow\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=2i\Rightarrow\left|\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\dfrac{BC}{BA}=2$

$\dfrac{z_C-2i}{z_A-2i}=2i\Rightarrow\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\left(\overline{BA},\overline{BC}\right)=\arg(2i)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc le triangle ABC est rectangle en B

3)a) $|z-3+i|=\Leftrightarrow|z+1-i|\Leftrightarrow|z-(3-i)|=|z-(-1+i)|$

$\Leftrightarrow|Z_M-Z_C|=|Z_M-Z_A|$

$\Leftrightarrow CM=AM$ L'ensemble E est la médiatrice du segment $[AC]$

b) $\arg(z-3+i)-\arg(z+1-i)=\arg\left(\dfrac{z-3+i}{z+1-i}\right)=\arg\left(\dfrac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_A}\right)=\left(\overline{AM},\overline{CM}\right)\dfrac{\pi}{2}[\pi]$

L'ensemble F est le cercle de diamètre $[AC]$ privé des points A et C

Exercice3

$U_0=0$ et $\forall n\in IN^*$, $U_{n+1}=U_n+e^{-n}$

1) $U_1=U_0+e^0=1$, $U_2=U_1+e^{-1}=1+e^{-1}$, $U_3=U_2+e^{-2}=1+e^{-1}+e^{-2}$

2)

et soit $S_n=V_0+V_1+\ldots+V_{n-1}$

a) $V_n=U_{n+1}-U_n=U_n+e^{-n}-U_n=e^{-n}$

$V_n=e^{-n}=\dfrac{1}{e^n}\Rightarrow V_{n+1}=\dfrac{1}{e^{n+1}}=\dfrac{1}{e^n\times e^1}=\dfrac{1}{e^n}\times\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}\times V_n$

d'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{e}=e^{-1}$ et premier terme $V_0=1$

b) $V_n=V_0q^n=\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$

c) $V_n=U_{n+1}-U_n\Rightarrow\begin{cases}V_1=U_1-U_0\\V_2=U_2-U_1\\V_3=U_2-U_1\\ \\ V_{n-1}=U_n-U_{n-1}\\ \Rightarrow S_n=U_n-U_0\end{cases}$

$\forall n\in IN$, $S_n=U_n$

d) $U_n=S_n=\dfrac{V_0}{1-q}(1-q^n)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{e}}\left(1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n\right)=\dfrac{1}{\frac{e-1}{e}}\left(1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n\right)=\dfrac{e}{e-1}\left(1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n\right)$ En déduire l'expression de U_n

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e}{e-1}\left(1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n\right)=\dfrac{e}{e-1}$

Exercice 4

I-1) $(E)\ y''+2y'+y=0\Rightarrow r^2+2r+1=0\Rightarrow\Delta=4-4=0\Rightarrow r_0=\dfrac{-2}{2}=-1$ donc la solution générale de l'équation

est : $h(x)=(Ax+B)e^{-x}$

2) $h(x)=(Ax+B)e^{-x}\Rightarrow h(0)=(A\times0+B)e^0=B$ on a $h(0)=-1\Rightarrow B=-1$ et

$h(x)=(Ax+B)e^{-x}\Rightarrow h(-1)=(-A+B)e=(-A-1)e=-Ae-e$

on a $h(-1)=0\Rightarrow-Ae-e=0\Rightarrow Ae=-e\Rightarrow A=-1$

donc $h(x)=(-x-1)e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$

II-. $\mathbb{R}$ $f(x) = -(x+1)e^{-x} - 1$

1a)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-(x+1)e^{-x}-1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{(x+1)}{e^{x}}-1\right) = \frac{-(-\infty+1)}{0^{+}}-1 = \frac{+\infty-1}{0^{+}}-1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{e^{x}}-\frac{1}{x}\right) = -\left(1+\frac{1}{-\infty}\right)\left(\frac{1}{0^{+}}\right)-\frac{1}{-\infty} = -(1+0)(+\infty)-0 = -\infty$$

la courbe (Γ) admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de $-\infty$

b) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-(x+1)e^{-x}-1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{(x+1)}{e^{x}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}-1\right) = (0-0-1) = -1$$

$\Rightarrow$ la droite (Δ) d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à (Γ) au voisinage de $-\infty$

$f(x) - y = -(x+1)e^{-x} - 1 + 1 = -(x+1)e^{-x}$

$e^{-x} \succ 0$ donc le signe de $f(x) - y$ est celui de $-(x+1)$

$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow -(x+1) = 0 \Leftrightarrow -x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$$\begin{cases} \text{si } x \le -1 : f(x) - y \ge 0 \Rightarrow \dfrac{\Gamma}{\Delta} \\ \text{si } x \ge -1 : f(x) - y \le 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta}{\Gamma} \end{cases}$$

2a) $f(x) = -(x+1)e^{-x} - 1 \Rightarrow f'(x) = -e^{-x} - e^{-x}\left(-(x+1)\right) = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

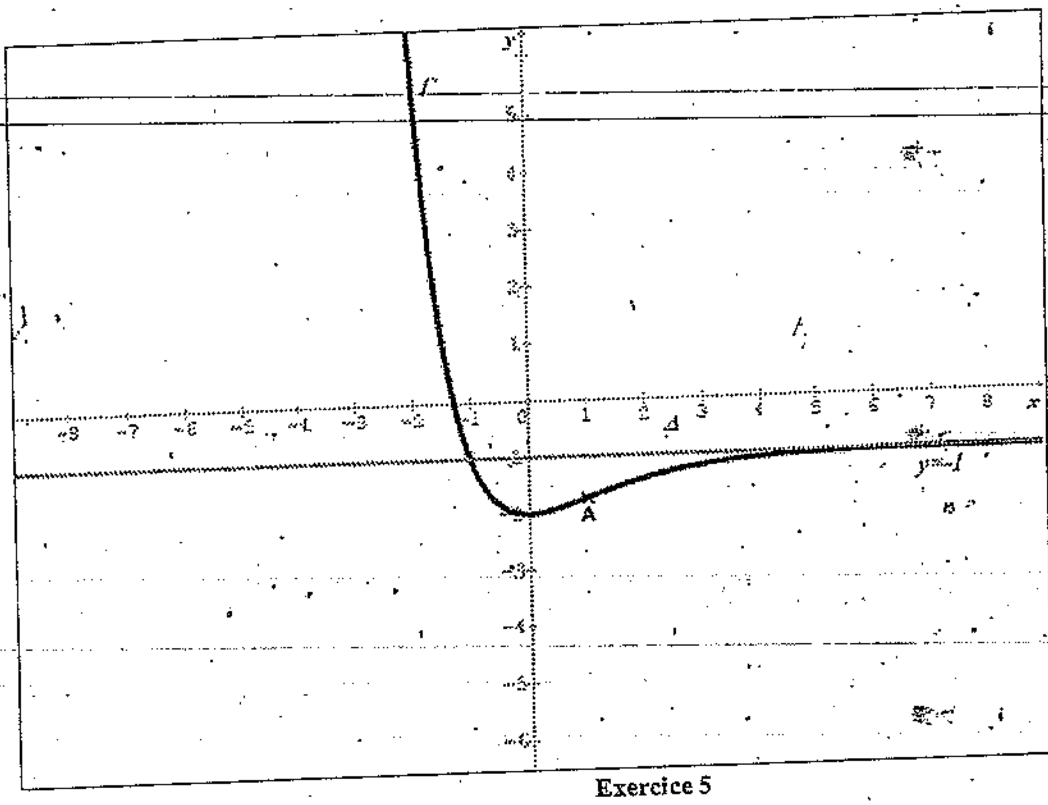
3a) f est continue et strictement décroissante de $]-\infty, 0] \to [-2, +\infty[$ donc f réalise une bijection sur cet intervalle ,comme $0 \in [-2, +\infty[$ donc il existe un unique réel $\alpha \prec 0$ tel que $f(\alpha) = 0$ d'où la courbe (Γ) coupe (Ox) en un unique point d'abscisse α.

$\left(f(-1,3) \succ 0, f(-1,2) \prec 0\right) \Rightarrow f(-1,3) \times f(-1,2) \prec 0 \Rightarrow -1,3 \prec \alpha \prec -1,2$.

b) $f'(x) = xe^{-x} \Rightarrow f''(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ d'où le point d'inflexion $A(1, f(1)) = (1, -2e^{-1} - 1)$

c)



Exercice 5

1) $f(x)=x^2(2\ln x-1)+1$

1) $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(2x^2\ln x-x^2+1\right)=\lim_{x\to0^+}\left(2x.x\ln x-x^2+1\right)=2\times0\times0^- -0^2+1=1$

la fonction f admet un prolongement par continuité en $x_0=0$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2(2\ln x-1)+1=(+\infty)^2(2\times(+\infty)-1)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} x(2\ln x-1)+1=(+\infty)(2\times(+\infty)-1)=+\infty$

la courbe (Γ) admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de $+\infty$

2a) $f(x)=x^2(2\ln x-1)+1\Rightarrow f'(x)=2x(2\ln x-1)+\frac{2}{x}\times x^2=4x\ln x-2x+2x=4x\ln x$

b) $4x\succ0\Rightarrow$ le signe de f' est celui de $\ln x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x=0\Leftrightarrow x=e^0=1$

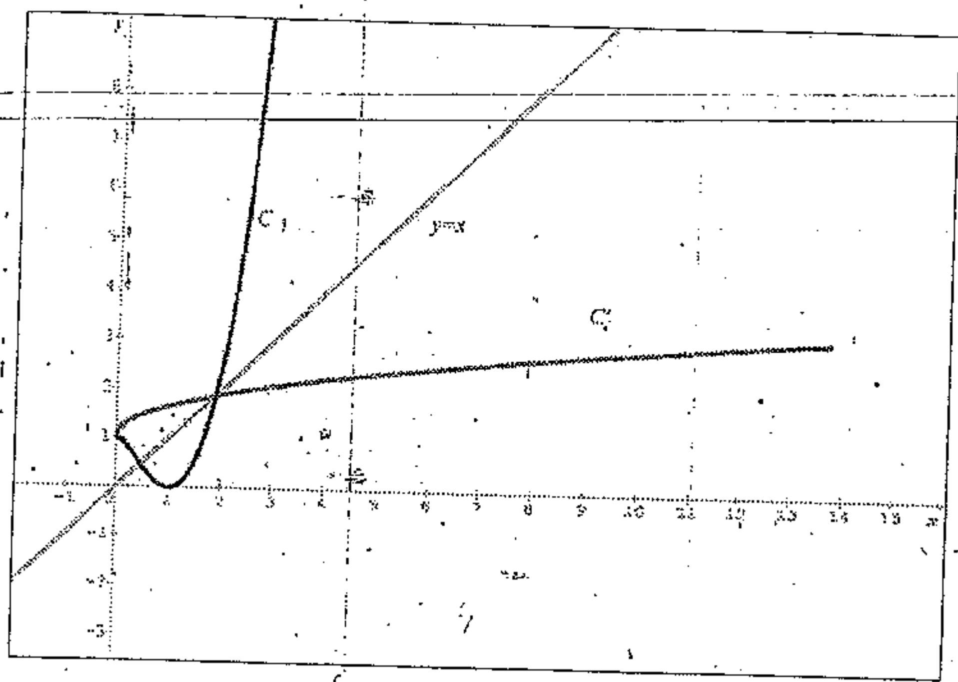
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

3a) g est continue et strictement croissante de $I=[1,+\infty[\to J=[0,+\infty[$ donc g réalise une bijection

b)

x	0		$+\infty$
$(g-1)'(x)$		$+$	
$(g-1)(x)$	1	↗	$+\infty$

4)



5a) $K=\int_1^e x^2\ln x\,dx$ on pose $\begin{cases} u(x)=\ln x \Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v'(x)=x^2 \Rightarrow v(x)=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$

$$K=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\times\frac{x^3}{3}dx=\frac{e^3}{3}\ln e-\frac{1^3}{3}\ln 1-\int_1^e\frac{x^2}{3}dx$$

$$K=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$K=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3e^3}{9}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3+1}{9}$$

b) $A=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(x^2(2\ln x-1)+1\right)dx=\int_1^e\left(2x^2\ln x-x^2+1\right)dx$

$$A=\int_1^e\left(2x^2\ln x\right)dx+\int_1^e\left(-x^2+1\right)dx=2K+\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_1^e$$

$$A=2\left(\frac{2e^3+1}{9}\right)-\frac{e^3}{3}+e+\frac{1}{3}-1=\frac{4e^3+2}{9}-\frac{3e^3}{9}+\frac{9e}{9}-\frac{2}{3}$$

$$A=\frac{4e^3+2-3e^3+9e-6}{9}=\frac{e^3+9e-4}{9}$$