Appui aux olympiades et compétitions de Mathématiques

Séminaire de formation des professeurs du 04 au 11 janvier 2023

ALGEBRE

Horma Hamoud **Mahfoudh Mohamed Ammou**

Sommaire

I- BASES DU CALCUL NUMERIQUE

1) Priorités des opérations

La règle générale de la priorité des opérations (PEMDAS) détermine l'ordre dans lequel chaque opération doit être effectuée :

1. **Parenthèses : les calculs entre parenthèses ou crochets sont prioritaires sur les calculs situés en dehors. On commence par les parenthèses les plus à l'intérieur. La barre horizontale de fraction ou de racine joue le rôle d'une parenthèse ;**
2. **Exposants (puissances) : l'exponentiation est prioritaire sur la multiplication, la division, l'addition et la soustraction ;**
3. **Multiplications et Divisions : la multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction. Ces opérations sont effectuées de gauche à droite ;**
4. **Additions et Soustractions : elles sont effectuées de gauche à droite ;**
5. **Si une parenthèse contient plusieurs opérations, on les effectue en respectant l'ordre de priorité des opérations (PEMDAS).**
6. **Lorsque toutes les opérations de la parenthèse ont été effectuées, la parenthèse peut être supprimée.**

Exercice 1

Calculer en respectant les priorités opératoires :

$$A = 15 + 60 \div 5 \times 2 + 1 - 4 \times 3$$

$$B = 1 + 3 \times 4 + 2 - 5 \times 12 \div 10$$

$$C = (8 + 2 \times 3) \div (24 \div 4 + 2)$$

$$D = 8 + 2 \times \left(4 \times 2^5 - 5 \times (1 - 2 \times 3)^2 \div 3\right)$$

$$E = \left(20 + 5 \times (-1)\right) \times 2^3 - 12 \times (2 \times 3)^2 \times 8$$

$$F = 9^3 \div (22 - 15 + 2) + 7 \times \left(17 + \left(9 + 5 \times (4 - 3^2)\right)\right)^3$$

$$G = 2 + \left(3 - \frac{5}{7}\right) \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}{3 + \frac{5}{7} - \frac{1}{2}}$$

$$H = \sqrt{57 + \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}}}}}$$

$$I = \sqrt{3 + \sqrt{-8 + 7 \times 6 + \frac{2}{3} + \sqrt{1 + \frac{7}{9}}}}$$

2) Fractions

Soit a, b, c, et d des nombres réels

Addition et Soustraction

$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$, $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$ **, si** $d \neq 0$ **(même dénominateur).**
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ **, si** $b \neq 0$, $d \neq 0$ **(réduction au même dénominateur).**

Multiplication et division

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ **si** $b \neq 0$, $d \neq 0$	$\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$ **, si** $a \neq 0$, $b \neq 0$ **, (l'inverse de** $\frac{a}{b}$**)**
$c\times\frac{a}{b}=\frac{ac}{b}$ **si** $b \neq 0$,	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ **si** $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ **Diviser par un nombre c'est multiplier par son inverse.**

<u>Règles de signes</u>

Le quotient $\frac{a}{b}$ **et le produit ab ont le même signe,** $(b \neq 0)$; $\boxed{\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}}$, $\boxed{\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}}$

<u>Exercice 2</u>

1) Simplifier les expressions suivantes :

$a=\frac{4}{3}+\frac{5}{4}$; $b=\frac{7}{8}\times\frac{6}{13}$; $c=8\times\left(3-\frac{1}{4}\right)^2$; $d=\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\times 9$; $e=\frac{6}{35}\div 3$; $f=6\div\frac{35}{3}$; $g=6\div 35\div 3$; $h=6\div 35\times 3$.

2) Ecrire les nombres suivants sous forme de fraction irréductible :

$a=\frac{5+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{5-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}$; $b=\frac{\frac{150}{71}}{\frac{9}{29}}\times\frac{\frac{13}{58}}{\frac{38}{71}}$; $c=-3\times\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\times\frac{5}{2}+\frac{1}{2}$; $d=\frac{5}{3}-\frac{4}{5}+\frac{2}{7}\times\frac{21}{3}$; $e=\frac{\frac{71}{150}}{\frac{29}{9}}\times\frac{\frac{58}{19}}{\frac{71}{38}}$; $f=\frac{1}{2}+8\times\left(3+\frac{1}{4}\right)^2$

3) Puissances

Soit a et b deux réels non nuls, m et n deux entiers relatifs

$a^n\times a^m=a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ $(a^n)^m=a^{n\times m}$	$(a\times b)^n=a^n\times b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ Pour , $a \neq 0$, $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$	**En particulier :** $(-a)^n=(-1)^n\times a^n$ **Pour n pair** $(-a)^n=a^n$ **Pour n impair** $(-a)^n=-a^n$

Cas particuliers :

$a^1 = a$ $\frac{1}{a} = a^{-1}$, $(a \neq 0)$	$1^n = 1$ Pour $n > 0$, $0^n = 0$ 0^0 n'a pas de sens	Si $a > 0$; $a^n > 0$. Si $a < 0$: Pour n pair $a^n > 0$ Pour n impair $a^n < 0$	Pour n pair $(-1)^n = 1$ Pour n impair $(-1)^n = -1$ Ne pas confondre $-x^n$ et $(-x)^n$

Exercice 3

Simplifier les écritures :

$$A = \frac{(3^5 \times 2^{-2})^2}{(9^{-1} \times 2^3)^3} \; ; \; B = \left(\frac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 \div \frac{10^2 \times 2}{5^8}$$

$$C = 40^{71} \times (1,25)^{48} \times 10^{-119} \; ; \; D = 12^{100} \times (1,5)^{50} \times 6^{-149}$$

$$E = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times 5^{-2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 ; \; F = \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \left(\frac{-49}{2}\right)^3 ;$$

$$G = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{27}{4}\right)^{-1}$$

4) Racine carrée

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$, $x = \sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$	L'écriture $\sqrt{a}$ n'a pas de sens lorsque a est strictement négatif.

Propriétés algébriques

Soit a, b des réels <u>positifs</u>, alors : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b \neq 0$ $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$, $(n \in \mathbb{N})$ $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	Pour un réel <u>quelconque</u> a : $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$: $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$ si $a \leq 0$	En général $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ Pas de résultat général simple concernant la différence et la somme de deux racines.	Résolution de l'équation $x^2 = a$ dans $\mathbb{R}$ Si $a < 0$, pas de solution. Si $a = 0$, une seule solution x=0. Si $a > 0$, deux solutions : $x_1 = \sqrt{a}$ et $x_2 = -\sqrt{a}$.	Racine n-ième : a un réel positif et n un entier naturel, $n \geq 2$ $x = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x^n = a$ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Expression conjuguée

Expression	Expression conjuguée	Produit
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a})(\sqrt{a})=a$
$a+\sqrt{b}$	$a-\sqrt{b}$	$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})= a^2-b$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})= a-b$

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

$A=\sqrt{27}+2\sqrt{75}-\sqrt{108}$

$B=\sqrt{256}\times\sqrt{121}+\sqrt{144}$

$C=3\sqrt{169}+\sqrt{361}-3\sqrt{256}$

$D=2\sqrt{44}-\sqrt{99}+2\sqrt{275}$

$E=\sqrt{(3-\pi)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$F=4\sqrt{80}-3\sqrt{180}+3\sqrt{45}$

$G=2\sqrt{32}+3\sqrt{18}-3\sqrt{50}$

$H=\sqrt{\frac{8}{9}}\times\sqrt{\frac{12}{25}}\times\sqrt{\frac{225}{24}}$

Exercice 5

Ecrire avec un dénominateur entier :

$A=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+2}$, $B=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $C=\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Exercice 6

Simplifier au maximum : $A=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$, $B=\sqrt{19+6\sqrt{2}}$, $C=\sqrt{11+\sqrt{21}}+\sqrt{11-\sqrt{21}}$.

5)Ordre dans $\mathbb{R}$

Soit a, b, c, d et x des réels.

L'ordre et l'addition

$a\le b \Leftrightarrow a+x\le b+x$	**L'ordre est conservé quand on ajoute le même réel aux deux membres d'une inégalité.**
$\begin{cases} a\le b \\ c\le d\end{cases} \Rightarrow a+c\le b+d$	**L'ordre est conservé dans l'addition de deux inégalités de même sens.**
$a\le b \Leftrightarrow -a\ge -b$	**L'ordre est inversé en passant aux opposés des membres d'une même inégalité.**

L'ordre et la multiplication

$\begin{cases} a \le b \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow ax \le bx$	**L'ordre est conservé quand on multiplie par le même nombre x strictement positif les deux membres d'une même inégalité.**
$\begin{cases} a \le b \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow ax \ge bx$	**L'ordre est inversé quand on multiplie par le même nombre x strictement négatif les deux membres d'une même inégalité.**
$\begin{cases} 0 < a \le b \\ 0 < c \le d \end{cases} \Rightarrow 0 < ac \le bd$	**L'ordre est conservé dans la multiplication des membres positifs de deux inégalités de même sens.**

<u>L'ordre et l'inverse – le carré – la racine carrée</u>

Soit a et b deux réels positifs

$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ $0 < a < b \Rightarrow -b < -a < 0$	**L'inverse et l'opposé inversent l'ordre.**
$0 \le a \le b \Rightarrow 0 \le a^2 \le b^2$ $0 \le a \le b \Rightarrow 0 \le \sqrt{a} \le \sqrt{b}$	**Le carré et la racine carrée conservent l'ordre.**

<u>L'ordre et les puissances successives</u>

Si $0 < a < 1$, alors $0 < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < 1$. On a $0 < n < p \Rightarrow a^n > a^p$.

Si $a > 1$, alors $1 < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$. On a $0 < n < p \Rightarrow a^n < a^p$.

<u>Encadrement et opérations</u>

Soit a, b, a', b', x, y et k des réels.

$\begin{cases} a < x < b \\ a' < y < b' \end{cases}$	$a + a' < x + y < b + b'$ $a - b' < x - y < b - a'$
$a < x < b$	$k > 0 \Rightarrow ka < kx < kb$ $k < 0 \Rightarrow kb < kx < ka$
$\begin{cases} 0 < a < x < b \\ 0 < a' < y < b' \end{cases}$	$0 < aa' < xy < bb'$
$\begin{cases} 0 < a < x < b \\ 0 < a' < y < b' \end{cases}$	$0 < \frac{1}{b'} < \frac{1}{y} < \frac{1}{a'}$ $0 < \frac{a}{b'} < \frac{x}{y} < \frac{b}{a'}$

6) Valeur absolue

1) Définition

Soit x un réel. L'un des nombres x et (-x) est positif : on l'appelle la valeur absolue de x, on le note $|x|$. Autrement dit : $|x| = \mathrm{Max}\{x, -x\}$

2) Propriétés :

Soit a et b deux réels.

$\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$ $\lvert a\rvert \geq 0$ $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$ $\lvert a\rvert \times \lvert b\rvert = \lvert ab\rvert$ $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ **pour** $b \neq 0$	$\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$, **pour** $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ $\left\lvert \frac{1}{a} \right\rvert = \frac{1}{\lvert a\rvert}$, **pour** $a \neq 0$ $\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$ $\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ $\lvert \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \rvert \leq \lvert a+b\rvert$	**Si** $\lvert a\rvert = \lvert b\rvert$, **alors** $a = b$ **ou** $a = -b$. **Si** $\lvert a\rvert = m$, $(m \geq 0)$, **alors** $a = m$ ou $a = -m$. **Si** $\lvert a\rvert \leq m$, **(m>0), alors** $-m \leq a \leq m$.

<u>Exercice 7</u>

1. Ecrire sans le symbole | | les nombres suivants :

a. $\left|1-\sqrt{2}\right|$ **b.** $\left|\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right|$ **c.** $-\left|-\frac{2}{3}\right|+\left|-\frac{13}{9}\right|$ **d.** $x-|x+1|$ **quand** $x=-5$

<u>Exercice 8</u>

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

a. $|3x+10|=|5x-4|$ **b.** $|x-\pi|-|x+2|=0$ **c.** $\left|3x+\frac{\pi}{2}\right|+\frac{|x|}{2}=3$

d. $|x-5|=12$ **e.** $|3-x|\leq 5$ **f.** $|x-5|=-2$ **g.** $|x+7|>2$

II- IDENTITES UTILES

1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
3. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
4. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
5. $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 - ab + b^2 - bc + c^2 - ca) - 3abc$
6. $2(a^3 + b^3 + c^3) = (a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) - 6abc$
7. $a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 4abc$
8. $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) - (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 2abc$
9. $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (c-b)(b-a)(a-c)$
10. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = (a+b+c)(c-b)(b-a)(a-c)$
11. $(a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$
12. $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$
13. $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
14. $a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
15. $a^2 + a + 1 = (a + \sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1)$ $(a \geq 0)$
16. $(aa' + bb')^2 + (ab' - a'b)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$
17. $a^4 - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1) = (a-1)(a^3 + a^2 + a + 1)$
18. $(a+b)(b+c)(c+a) = a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a-b)^2$
19. $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) + (a-b)(b-c)(c-a) = 0$
20. $(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$
21. $(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$

III- INEGALITES USUELLES

1 Inégalité triangulaire :

$\boxed{AB+BC\geq AC}$ **(il y a égalité si les points A, B et C sont alignés)**

Exercice 1 :

Soient a, b et c les mesures des côtés d'un triangle. Montrer que $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

Solution :

On a $\begin{cases} a<b+c & (1) \\ b<a+c & (2) \\ c<a+b & (3) \end{cases}$ Alors

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{2a}{(b+c)+(b+c)}+\frac{2b}{(a+c)+(a+c)}+\frac{2c}{(a+b)+(a+b)}.$$

Or $(1)\Rightarrow a+b+c<(b+c)+(b+c)\Rightarrow \frac{2a}{(b+c)+(b+c)}<\frac{2a}{a+b+c}$

De même $\frac{2b}{(a+c)+(a+c)}<\frac{2b}{a+b+c}$ et $\frac{2c}{(b+a)+(b+a)}<\frac{2c}{a+b+c}$

D'où $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$

2 Signe du carré :

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $\boxed{x^2+y^2\geq 2xy}$ **(il y a égalité si $x=y$)**

Conséquence : $\forall x>0$, $\boxed{x+\frac{1}{x}\geq 2}$ **(il y a égalité seulement pour $x=1$)**

Exercice 2

Montrer que pour tous réels x et y tels que $x>1$ et $y>1$ on a $\frac{x^2}{y-1}-4\geq 4-\frac{y^2}{x-1}$

Solution:

$$(x-2)^2=x^2-4(x-1)\geq 0\Rightarrow\frac{x^2}{x-1}\geq 4\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x-1}}\geq 2 \text{ de même } \frac{y}{\sqrt{y-1}}\geq 2$$

D'autre part $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 2\frac{x}{\sqrt{y-1}}\frac{y}{\sqrt{x-1}}\geq 2\times2\times2=8\Rightarrow\frac{x^2}{y-1}-4\geq 4-\frac{y^2}{x-1}$

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Si $a_1,a_2,\cdots,a_n$ et $b_1,b_2,\cdots,b_n$ sont des réels positifs alors :

$$\boxed{\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2}$$

c-à-d $\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2}$. (il y a égalité si les vecteurs $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ sont colinéaires c-à-d si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.)

Exercice 3

Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels.

Montrer l'inégalité suivante en précisant le cas d'égalité $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$

Solution 3:

D'après Cauchy on a $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1 \times x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \leq n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Il y a égalité lorsque $x_k = 1$

Exercice 4

Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs. Montrer que $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{81}{a+b+c+d}$

Solution 4:

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}\right) =$$

$$\left((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 + (\sqrt{d})^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{d}}\right)^2\right)$$

D'après Cauchy on a

$$\left((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 + (\sqrt{d})^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{d}}\right)^2\right) \geq$$

$$\left(\sqrt{a}\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b}\frac{2}{\sqrt{b}} + \sqrt{c}\frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt{d}\frac{4}{d}\right)^2 = 81$$

D'où $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}\right) \geq 81 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{81}{a+b+c+d}$

4 Inégalité de reordonnement :

Soit $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n$ et $b_1 < b_2 < b_3 < ... < b_n$.

Si $S_p = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{p(i)}$ où $p(i) \in \{1; 2; ...; n\}$ alors $\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq S_p \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i}$

Exercice 5

Démontrer que pour tous réels positifs a, b et c on a $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$

Solution

Comme a, b et c jouent le même rôle (symétrie des rôles) on peut supposer que $a \geq b \geq c \Rightarrow a^2 \geq b^2 \geq c^2$ et $ab \geq ac \geq bc$. D'où d'après le théorème de réordonnement on a

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2.a + b^2.b + c^2.c \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

$$a^2b + b^2c + c^2a = a(ab) + b(bc) + c(ca) \geq a(bc) + b(ca) + c(ab) = 3abc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

5 Inégalité de Tchebyshev :

Si $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ alors :

$$\boxed{b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_n \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \le \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}}$$

et $$\boxed{b_1 > b_2 > b_3 > \dots > b_n \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \ge \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}}$$

Exercice 6

Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $abc = 1$.

Montrer que $\dfrac{a-1}{\sqrt{b+c}} + \dfrac{b-1}{\sqrt{c+a}} + \dfrac{c-1}{\sqrt{a+b}} \ge 0$

Solution :

$$\frac{a-1}{\sqrt{b+c}} + \frac{b-1}{\sqrt{c+a}} + \frac{c-1}{\sqrt{a+b}} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

La symétrie des rôles nous permet de supposer que $a \ge b \ge c$ ce qui donne encore que

$$\begin{cases} a-1 \ge b-1 \ge c-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{b+c}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{c+a}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{a+b}} \end{cases}$$

Et d'après Chebyshev on a

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \frac{a+b+c}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \quad \text{car}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} = 1$$

6 Inégalités des moyennes

$\boxed{MQ \ge MA \ge MG \ge MH}$ **c'est-à-dire**

que $\forall a_i \in \mathbb{R}_+^* :$ $$\boxed{\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \ge \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \ge \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}}$$

L'égalité est pour $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. En plus on a

$$\mathrm{Max}(a_1, a_2, \cdots a_n) \ge MQ \ge MA \ge MG \ge MH \ge \mathrm{Min}(a_1, a_2, \cdots a_n)$$

Moyenne arithmétique: $MA = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$;

Moyenne géométrique: $MG = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$;

Moyenne harmonique: $MH = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_i}\right)}$

Moyenne quadratique: $MQ = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

Exercice 7

Montrer que pour tous réels positifs x, y et z on a : $x^4+y^4+z^2 \geq xyz\sqrt{8}$

Solution :

$$x^4+y^4 \geq 2x^2y^2 \Rightarrow x^4+y^4+z^2 \geq 2x^2y^2+z^2 \geq 2xy\sqrt{2}z = xyz\sqrt{8}$$

Exercice 8

Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b et c on a :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Solution :

$$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

donc on a $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+c} \\ \frac{1}{c}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{c+b} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$

D'autre part on a :

$$p=(a+b+c)\left(\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\right)=\left((a+b)+(b+c)+(c+a)\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \Rightarrow$$

$$p=3+\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\right)+\left(\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\right)+\left(\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{b+c}\right)$$

Or $x+\frac{1}{x} \geq 2;\ \forall x>0$ donc

$$p=3+\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\right)+\left(\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\right)+\left(\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{b+c}\right) \geq 3+2+2+2=9$$

D'où $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$

Exercice 9

Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des réels vérifiant $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \frac{1}{2^{n^2+n}}$.

Montrer que $(1+2^2a_1)(1+2^4a_2)\cdots(1+2^{2n}a_n) \geq 2^n$.

Solution

Soit $S=(1+2^2a_1)(1+2^4a_2)\cdots(1+2^{2n}a_n)=\sum_{k=1}^{n}\left(1+2^{2k}a_k\right)$. Or d'après l'inégalité MA-MG on a

$\left(1+2^{2k}a_1\right)^2 \geq 4\left(1\times 2^{2k}a_1\right)=2^{2(k+1)}a_1$ d'où

$$S^2 \geq \prod_{k=1}^{n} 2^{2k+2}a_k = \prod_{k=1}^{n} 2^{2k+2} \times \prod_{k=1}^{n} a_k = 2^{n^2+3n} \times \left(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n\right) = 2^{n^2+3n} \times \frac{1}{2^{n^2+n}} = 2^{2n}$$

D'où $S \geq 2^n$

7 Inégalité de Bernoulli :

$$\forall r>0; \forall x>0 : \boxed{r>1 \Rightarrow (1+x)^r \geq 1+rx} \text{ et } \boxed{r<1 \Rightarrow (1+x)^r \leq 1+rx}.$$

Il y a égalité si $r=1$, ou $r=0$ ou $x=0$.

8 Inégalité de Nesbitt :

Si a, b et c sont trois réels strictement positifs alors $\boxed{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}}$ **(l'égalité est pour $a=b=c$)**

9 Inégalité de Titu :

Si $a_1,a_2,\cdots,a_n$ et $b_1,b_2,\cdots,b_n$ sont des réels positifs alors

$\boxed{\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}}$ **(il y a égalité si $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$)**

Exercice 10

Soient $x_1,x_2,...,x_n$ des réels strictement positifs tels que $x_1+x_2+...+x_n=1$.

Montrer l'inégalité suivante en précisant le cas d'égalité $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\geq n^2$

Solution:

D'après Titu on a $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1^2}{x_k}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}x_k}=n^2$

10 Inégalité de Schur :

Si a, b, c sont des nombres strictement positifs alors pour tout réel $t>0$ on a :

$\boxed{a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)+c^t(c-a)(c-b)\geq 0}$.

L'égalité est pour $a=b=c$.

Cas particulier : Si a, b, c sont des nombres positifs alors

$\boxed{a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b}$.

Exercice 11:

Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Montrer que

$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

Solution :

L'inégalité demandée est équivalente à $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$ qui correspond à l'inégalité de Schur pour $t=1$. L'égalité a lieu pour $a=b=c$.

IV- Equations fonctionnelles

1. Définition

Une équation fonctionnelle est une équation dont la variable f est une fonction numérique définie d'un ensemble A dans un ensemble B ($\mathbf{f : A \to B}$) satisfaisant une propriété donnée.

Résoudre une telle **équation fonctionnelle** c'est trouver toutes les fonctions $\mathbf{f : A \to B}$ satisfaisant cette propriété. C'est-à-dire trouver, pour chaque $\mathbf{a \in A}$, la valeur de $\mathbf{f(a)}$ dans B.

Rappelons que, lorsque A et B sont deux ensembles, une fonction $\mathbf{f : A \to B}$ associe à chaque élément $\mathbf{a \in A}$ un unique élément $\mathbf{f(a) \in B}$.

Exemple 1

Trouver toutes les fonctions $\mathbf{f : R \to R}$ telles que $\mathbf{f(x+y) = f(x) + y}$ pour tous $\mathbf{x, y} \in \mathbb{R}$.

Exemple 2

Trouver toutes les fonctions $\mathbf{f : R \to R}$ telles que $\mathbf{f(x+y) = f(x) + f(y)}$ pour tous $\mathbf{x, y} \in \mathbb{R}$.

2. Astuces

a) Respect du domaine de définition

L'ensemble de solution d'une équation dans $\mathbb{R}$ n'est pas forcément le même dans $\mathbb{Q}$ **ou** $\mathbb{Z}$ **ou** $\mathbb{N}$

Exemple : les deux énoncés suivants sont différents

Enoncé1 : Trouver toutes les fonctions $\mathbf{f : R \to R}$ telles que $\mathbf{f(x+y) = f(x) + f(y)}$ pour tous $\mathbf{x, y} \in \mathbb{R}$.

Enoncé2 : Trouver toutes les fonctions $\mathbf{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\mathbf{f(x+y) = f(x) + f(y)}$ pour tous $\mathbf{x, y} \in \mathbb{R}$.

b) Etude des propriétés de la solution

Éviter de donner une particularité non mentionnée par l'énonce comme f est positive, f est dérivable, f est continue, f est bijective, …

Il faut étudier les propriétés de la solution :

- Est-elle positive ou négative ?
- Est-elle continue ?
- Est-elle dérivable ?
- Est-elle injective, surjective ou bijective ?
- Est-elle involutive ?
- Est-elle symétrique ?
- Est-elle affine ?

Exercice 12 :

Trouver toutes les fonctions $\mathbf{f : R \to R}$ telles que $\mathbf{f(x+y) = f(x) + y}$ pour tous $\mathbf{x, y} \in \mathbb{R}$.

Solution :

En jouant sur la symétrie puisque $\mathbf{f(x+y) = f(y+x)}$ on trouve que $\mathbf{f(x) + y = f(y) + x}$

D'où $\mathbf{f(x) - f(y) = x - y}$ c'est-à-dire que f est affine de pente 1.

Donc toute solution f de cette équation est de la forme $\mathbf{f(x) = x}$.

Réciproquement : la fonction $\mathbf{f(x) = x}$ est aussi solution. Donc elle est l'unique solution de cette équation.

c) Vérification

N'oublier pas la réciproque pour s'assurer que la solution obtenue vérifie bien l'équation ou trouver les solutions

Exemple : Déterminer les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\mathbf{f\left(f(x+1)+y-1\right)=f(x)+y}$

On peut remarquer que la fonction identité est solution

En posant $\mathbf{x=0}$ **et** $\mathbf{y=t-f(0)}$ pour tout réel t, on trouve $\mathbf{f\left(f(1)+y-1\right)=f(0)+y=t}$. Donc pour tout réel t il existe un réel $\mathbf{a=f(1)+y-1}$ tel que $\mathbf{f(a)=t}$. D'où f est surjective.

Il existe donc un réel u tel que $\mathbf{f(u)=1}$ et soit $\mathbf{x=u-1}$, donc $\mathbf{f(x+1)=f(u)=1}$ et donc l'équation s'écrit $\mathbf{f(y)=f(x)+y}$. Si on note $\mathbf{c=f(x)}$ on trouve $\mathbf{f(y)=y+c}$.

Donc toute solution f de cette équation est de la forme $\mathbf{f(x)=x+c}$.

Réciproquement, est-ce que toute fonction de la forme $\mathbf{f(x)=x+c}$ est solution ?

Si elle est solution on aura $\mathbf{\left((x+1+c)+y-1\right)+c=x+c+y \Rightarrow x+y+2c=x+y+c \Rightarrow c=0}$ donc la seule solution de cette équation est la fonction identité $\mathbf{f(x)=x}$.

d) Recherche d'une solution particulière

Il faut premièrement se rassurer que l'ensemble de solution de l'équation n'est pas vide. Pour cela il faut l'essayer par les fonctions usuelles simples :

- La fonction constante $\mathbf{f(x)=k}$ (éventuellement nulle)
- La fonction identité $\mathbf{f(x)=ax}$ (en particulier $\mathbf{a=1}$ **et** $\mathbf{a=-1}$
- La fonction inverse $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}}$
- La fonction exponentielle

Parfois la nature de l'équation permet d'envisager la forme de la solution particulière éventuelle

Application : Reprenons l'Exemple 2

Trouver toutes les fonctions $\mathbf{f: R \to R}$ telles que $\mathbf{f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f(y)}$ pour tous $\mathbf{x,y} \in \mathbb{R}$.

On peut vérifier facilement que la fonction identité est solution et plus généralement que toutes les fonctions.

e) Recherche d'images particulières

Chercher à déterminer les images de certaines valeurs particulières : $\mathbf{f(0);\ f(1);\ ...}$

Si on n'arrive pas à les déterminer, on peut selon le besoin les utiliser comme paramètres et travailler avec, comme on a fait dans la résolution de l'exemple 1.

Exemple :

Pour l'équation $\mathbf{f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f(y)}$ pour tous $\mathbf{x,y} \in \mathbb{N}$.

En posant $\mathbf{x=y=0}$ on trouve $\mathbf{f(0)=2f(0) \Rightarrow f(0)=0}$

En posant $\mathbf{x=y=1}$ on trouve $\mathbf{f(2)=2f(1)}$ ce qui nous permettra de conjecturer que peut -être pour tout entier naturel n on a $\mathbf{f(n)=nf(1)}$. Proposition qu'on peut démontrer facilement par récurrence.

f) Substitutions

Remplacer une ou toutes les variables par des valeurs pour déduire une particularité.
On utilise souvent les substitutions suivantes :

- $\mathbf{x = y = 0}$;
- $\mathbf{x = 0}$ et y quelconque
- $\mathbf{y = 0}$ et x quelconque
- $\mathbf{x = y}$
- $\mathbf{x = -y}$
- $\mathbf{x = f(y)}$
- $\mathbf{x = f(y)}$ et $\mathbf{y = f(x)}$

Mais on peut utiliser d'autres substitutions selon chaque équation.

Exemples :

❑ **Exemple 1** : Reprenons l'exemple 1 précédent

Trouver toutes les fonctions $\mathbf{f : R \to R}$ telles que $\mathbf{f(x+y) = f(x) + y}$ pour tous $\mathbf{x, y \in \mathbb{R}}$.

Si on pose $\mathbf{y = 0}$, on trouve $\mathbf{f(x) = f(x)}$ ce qui n'ajoute pas de précision.
On doit donc choisir convenablement la substitution qui nous donne des informations utiles.
Par exemple, si on remplace x par 0 et on laisse y quelconque on trouve $\mathbf{f(y) = y + f(0)}$. Or $\mathbf{f(0)}$ est une constante, donc on a $\forall \mathbf{y \in \mathbb{R}}$; $\mathbf{f(y) = y + k}$ où $\mathbf{k = f(0)}$. La fonction f est alors une fonction affine.
Réciproquement, il est facile de démontrer que toute fonction affine vérifie l'équation. Donc l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions affine

Voici également un autre exemple, plus poussé, où plusieurs substitutions successives permettent de résoudre le problème.

EXERCICE 13 :

Trouver l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :
$\forall \mathbf{x, y \in \mathbb{R}}$: $\mathbf{f(x+y) = f(x) + f(y)}$.

Solution

On peut remarquer que l'identité est une solution et que $\mathbf{f(0) = 0}$.

Si a est une constante alors pour tout réel x on a $\mathbf{\dfrac{f(x+a) - f(x)}{x+a-x} = \dfrac{f(a)}{a} = k}$ donc f est affine de la forme $\mathbf{f(x) = kx}$. Réciproquement $\mathbf{f(x) = kx}$ est solution.
D'où les solutions de l'équation sont les fonctions f définies par $\mathbf{f(x) = kx}$, pour tout réel k.

EXERCICE 14 :

Trouver l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :
$\forall \mathbf{x, y \in \mathbb{R}}$: $\mathbf{f(x+y) = f(x) \times f(y)}$.

Solution :

Soit $\mathbf{E_2}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ telles que
$\forall \mathbf{x, y \in \mathbb{R}}$: $\mathbf{f(x+y) = f(x) \times f(y)}$

Soit f une solution. On pose $\alpha = f(1)$

On suppose que $\alpha = 0$ on a donc $\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = f(x-1+1) = f(x-1) \times f(1) = 0$. Donc f est la fonction nulle.

On suppose que $\alpha \neq 0$ on a donc $\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$. Donc f est positive.

Or $\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(1-x) \times f(x) = f(1-x+x) = f(1) \neq 0$ alors f est strictement positive.

On note $g(x) = \ln(f(x))$. On a alors

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad g(x+y) = \ln(f(x+y)) = \ln(f(x) \times f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = g(x) + g(y)$ d'où, d'après l'exercice 1, il existe un réel k tel que $g(x) = kx \quad \forall x \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire que $f(x) = e^{kx}; \forall x \in \mathbb{R}$

Conclusion l'ensemble des solutions de cette équation est la réunion de la fonction nulle avec les fonctions de la forme $f(x) = e^{kx}; \forall k \in \mathbb{R}$

Exercice 15 :

Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que,

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad f(x^2 - y^2) = (x-y)(f(x) + f(y))$.

Solution :

Soit f une éventuelle solution.

Pour $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 0$

Pour $x = -y \neq 0$, on a $0 = f(0) = 2x(f(x) + f(-x)) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ alors f est impaire.

En remplaçant y par $-y$ dans l'équation fonctionnelle on trouve pour tous réels x et y :

$f(x^2 - y^2) = (x-y)\big(f(x) + f(y)\big)$ et $f(x^2 - y^2) = (x+y)\big(f(x) - f(y)\big)$

La soustraction nous donne que $xf(y) = yf(x)$ donc pour tous réels non nuls x et y on a

$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ ce rapport est donc constant soit k cette constante donc $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = kx$ ce qui est vrai aussi pour $x = 0$.

Réciproquement il est clair que les fonctions $x \mapsto kx$ sont solutions

Donc les solutions de l'équation fonctionnelle sont toutes les fonctions $x \mapsto kx$, pour tout réel k.

V- Activités :

1. Exercices sur les égalités et les inégalités

Exercice 16

Calculer la valeur de l'expression $S = \frac{1+2a}{1+\sqrt{1+2a}} + \frac{1-2a}{1-\sqrt{1-2a}}$ pour $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Exercice 17

a, b , c et d quatre réels non nuls. Montrer que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ac+bd} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$

Exercice 18

Simplifier l'expression $S = \frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca}$ sachant que $abc = 1$

Exercice 19

Soit a, b et c trois réels vérifiant $abc = 1$ et $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Montrer que l'un au moins de ces réels est égal à 1.

Exercice 20
Soient a, b et c trois réels non nuls tels que $a+b+c=0$.

On pose $A=\dfrac{4bc-a^2}{bc+2a^2}$, $B=\dfrac{4ca-b^2}{ca+2b^2}$ et $C=\dfrac{4ab-c^2}{ab+2c^2}$.

Montrer que $A+B+C=3$ et que $ABC=1$

Exercice 21

Soient les réels strictement positifs x, y, z, a, b et c vérifiant $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

Montrer que $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{a+b+c}\sqrt{x+y+z}$.

Exercice 22
Soient a, b et c trois réels non nuls.

Montrer que si $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ alors deux parmi les nombres a, b et c sont opposés.

Exercice 23
Soient a, b et c trois réels tels que $a+b+c=0$.

Montrer que $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=2\left(a^4+b^4+c^4\right)$

Exercice 24
Prouver que si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle, on a :
$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Exercice 25
Soient x, y et z des réels distincts deux à deux tels que : $x+y+z=\sqrt{2}$.

Calculer $A=\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^3}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$

Exercice 26

Soient a, b et c trois réels strictement positifs vérifiant $a+b+c=1$. Montrer que $abc\leq\dfrac{1}{27}$

Exercice 27
Soient x et y deux réels positifs tels que $x+y=2$. Montrer que $x^2y^2(x^2+y^2)\leq 2$

Exercice 28
Soient a, b et c trois entiers strictement positifs vérifiant $ab<c$. Montrer que $a+b\leq c$

Exercice 29

Montrer que pour tous réels positifs a, b et c on a : $(a+b+c)^3\geq\dfrac{27}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$

Exercice 30
Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle. Prouver que :
$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$

Exercice 31
Soient $x_1,x_2,...,x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(x_1+x_2+...+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2$$

Exercice 32

Prouver que pour tous réels strictement positifs x et y: $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{x^2+y^4}\leq\dfrac{1}{xy}$

Exercice 33

Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

Exercice 34

Montrer que pour tous réels $x_1, x_2, ..., x_n$, $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}x_k^2$

2. Exercices sur les équations fonctionnelles

Exercice 35 :

Trouver l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

$\forall x, y \in \mathbb{R} :\quad f(xy) = f(x) + f(y)$.

Exercice 36 :

Trouver l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

$\forall x, y \in \mathbb{R} :\quad f(xy) = f(x) \times f(y)$.

Exercice 37 :

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout entier

$\forall n \in \mathbb{N} :\quad f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$.

Exercice 38 :

Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

$\forall x, y \in \mathbb{R} :\quad f(xf(x) + f(y)) = y + \left(f(x)\right)^2$.

Exercice 39 :

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

a) Pour tous réels x et y, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 40 :

Déterminer toutes les paires de fonctions f et g définies sur : $\mathbb{R}_+$ qui vérifient,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : \quad \begin{cases} \left(f(x) + y - 1\right)\left(g(y) + x - 1\right) = (x+y)^2 \\ \left(-f(x) + y\right)\left(g(y) + x\right) = (x+y+1)(y-x-1) \end{cases}$$

3. Exercices tirés des olympiades nationales de Mathématique de 7e C

Exercice 41 (T2-2022)

Soient x, y et z trois réels non nuls tels que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$.

a) Monter que : $(xy)^3 + (zy)^3 + (xz)^3 = 3(xyz)^2$

b) En déduire que : $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{z+x}{y} + \dfrac{y+z}{x} = -3$

Exercice 42 (T1-2021)

Soit n un entier naturel strictement positif. x et y deux réels positifs tels que $x^n + y^n = 1$

1) **Montrer que pour tout réel $t \in]0,1[$: $\dfrac{1+t^2}{1+t^4} < \dfrac{1}{t}$.**

2) **Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$.**

Exercice 43 (T2-2021)

1) Soit x, y et z des nombres réels strictement positifs. Montrer que :

a) $\quad x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

b) $\dfrac{1}{(2x+y+z)^2} \leq \dfrac{1}{4(x+y)(x+z)}$.

2) Soit a, b et c des nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=a+b+c$.

Montrer que : $\dfrac{1}{(2a+b+c)^2}+\dfrac{1}{(2b+c+a)^2}+\dfrac{1}{(2c+a+b)^2} \leq \dfrac{3}{16}$.

Exercice 44 (T3-2021)

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n)=n\cdot f(1)$
2. $\forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(p)=p\cdot f(1)$
3. $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r)=r\cdot f(1)$

Exercice 45 (T3-2021)

Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $abc=1$

1. Vérifier que $a^5+b^5=(a+b)\left[(a-b)(a^3-b^3)+a^2b^2\right]$
2. Montrer que $\dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}+\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}+\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1$