بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SERVICE DES EXAMENS

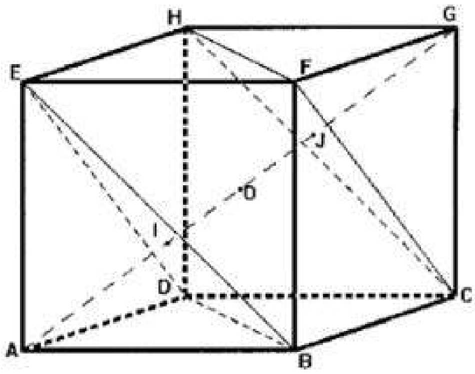
Honneur – Fraternité – Justice

Séries: C & TMGM
Sujet: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

BACCALAUREAT 2002
Session Normale

Exercice1 (4points)

On considère le cube **ABCDEFGH** de centre **O** et d'arête **a** ; $(a > 0)$ (ne pas refaire la figure).



1. Montrer que les triangles **BED** et **CHF** sont équilatéraux. **(1pt)**

2. Soient **I** et **J** les centres de gravités respectifs des triangles **BED** et **CHF**.

a)Prouver que:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} \text{ et } \overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}. \quad \textbf{(0,5pt)}$$

b) En déduire que: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JG}$ et que **O** est le milieu de $[IJ]$. **(0,5pt)**

3. Soit s_1 la réflexion de plan **(BAG)** et soit s_2 la réflexion de plan **(DAG)** ; on pose $f = s_1 o s_2$.

a) Montrer que **f** est une rotation puis déterminer $f(G)$ et $f(A)$, que peut-on en déduire? **(1pt)**

b) Montrer que la droite **(AG)** est perpendiculaire aux deux plans **(BED)** et **(CHF)**. **(0,25pt)**

c) Montrer que **f** laisse globalement invariant les triangles **BED** et **CHF**. **(0, 5pt)**

d) En déduire l'angle de **f** par rapport à un axe orienté dont-on donnera le sens. **(0,25pt)**

Exercice2 (5points)

On considère un triangle **ABC** direct, rectangle et isocèle en **A** et soit Σ et Γ deux cercles passant par **A** et de centres respectifs **B** et **C**. Soit **G** le deuxième point d'intersection de Σ et Γ et soit **D** le point de Σ diamétralement opposé à **A**.

1. a) Faire une figure illustrant les données précédantes à compléter au fur et à mesure (On prend pour la construction **AB** = **4cm**). **(1pt)**

b) Prouver l'existence d'une unique rotation **r** qui transforme **A** en **D** et **C** en **B**, donner ses éléments caractéristiques. **(1pt)**

2. Pour tout point **M** de Γ, distinct de **G** on pose $r(M) = M'$; la droite **(GM)** coupe Σ en **N'** et la droite **(GM')** coupe Γ en **N**.

a) Construire les deux points **R** et **S** tels que les deux quadrilatères **M'GMR** et **N'GNS** soient des carrés, puis déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe **s** qui transforme **M** en **R** et **N** en **S**. **(0,75pt)**

b) Prouver que la droite **(RS)** passe par un point fixe lorsque **M** décrit Γ privé de **G**. **(0,25pt)**

3. Soit **s'** la similitude directe qui transforme **D** en **B** et **B** en **C** ; et soit **I** son centre.

a) Déterminer l'angle et le rapport de **s'**. **(1pt)**

b) Démontrer que $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GB})\ [\pi]$ (1) et $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})\ [\pi]$ (2) **(0.5pt)**

c) Déduire de **(1)** et de **(2)** la position du point **I** centre de **s'** puis déterminer la nature du quadrilatère **ACID**. **(0,25pt)**

4) On pose $f = s o s'$; montrer que **f** est une homothétie et déterminer son rapport et son centre. (0,25pt)

Problème (11points) *N.B: La partie C de ce problème peut être traitée avant la partie B.*

Partie A

On considère la fonction numérique f définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\ln x}; & x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit C_0 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, (Unité **1cm**).

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de **f** au point d'abscisse $x_0 = 0$. **(1pt)**
2. Dresser le tableau de variation de **f**. **(1,5pt)**
3. Démontrer que C_0 admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées. **(0,75pt)**
4. Construire C_0 dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(0,75pt)**

Partie B

Soit f_n de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e^n\}$ par: $f_n(x) = \dfrac{e^n}{-n + \ln x}$ où **n** est un entier naturel et soit C_n sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Démontrer que C_n est l'image de C_0 par une homothétie h_n de centre **O** dont on donnera le rapport. **(0,5pt)**
2. Dresser le tableau de variation de f_n.(On pourra le déduire de celui de **f**). **(0,5pt)**
3. Démontrer que la courbe C_{n+1} de f_{n+1} est l'image de C_n par h_1. **(0,5pt)**
4. a) Démontrer que les deux courbes C_n et C_{n+1} se coupent en un point M_n d'abscisse $x_n = e^{n - \frac{1}{e-1}}$. **(0,5pt)**
   b) Démontrer que les points M_n appartiennent à une droite fixe passant par **O**. **(0,25pt)**
   c) Construire, dans un même repère, une allure de C_n et C_{n+1}, en déduire la position relative de ces deux courbes (à résumer dans un tableau). **(0,75pt)**
5. Soit **g** la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$ par: $g(x) = \dfrac{e}{-1 + \ln x}$. Comment déduire de C_0 une construction de la courbe Γ représentative de **g** (sans étudier **g**)? Construire C_0 et Γ dans un nouveau repère. **(0,5pt)**

Partie C

Soit **F** la fonction numérique définie par:

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{e^{x-1}} f(t)dt; & x > 1 \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

où **f** est la fonction définie à **la partie A** (le calcul de l'intégrale $F(x)$ n'est pas demandé).

1. Montrer que pour tout $x > 1$ on a: $e^{x-1} \geq x$ puis justifier l'existence de $F(x)$ pour tout $x \geq 1$. **(1pt)**

2.a) Montrer que pour tout $x > 1$ on a: $\dfrac{e^{x-1} - x}{x - 1} \leq F(x) \leq \dfrac{e^{x-1} - x}{\ln x}$ **(*)**. **(0,5pt)**

b) En déduire que **F** est continue au point d'abscisse $x_1 = 1$. **(0,5pt)**

3. Soit **G** la restriction de **F** sur $[2;+\infty[$.

a) Calculer $G'(x)$ et $G''(x)$ puis montrer que $\forall x \geq 2;\ G'(x) > 0$. **(0,5pt)**

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{G(x)}{x}$ (on pourra utiliser l'inégalité **(*)**). **(0,5pt)**

c) Dresser le tableau de variation de **G** puis construire une allure de sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé. **(0,5pt)**

Fin.

Baccalauréat 2002	**Session Normale**	**Epreuve de Maths**	**Séries Mathématiques &Techniques**	**2/2**