République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2017
Session Complémentaire

Série : Sciences de la Nature
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

Exercice 1 (3 points)

On définit les suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 2^n - 2n$, $v_n = 1 + \frac{u_n}{2n}$ et $w_n = \ln(nv_n)$. Soit $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	Le terme général de (v_n) est	$v_n = 1$	$v_n = 2^n$	$v_n = \frac{2^{n-1}}{n}$	(0,5pt)
2	La suite (u_n) est	croissante	décroissante	constante	(0,5pt)
3	La valeur de S_n est	$S_n = 2^{n+1} - n^2 - n - 2$	$S_n = 2^n - n^2 - n - 2$	$S_n = 2^{n+1} - n^2 - n + 2$	(0,5pt)
4	La suite (v_n) est	convergente	divergente	constante	(0,5pt)
5	La suite (w_n) est	arithmétique	géométrique	convergente	(0,5pt)
6	Si $e^{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n} = 120$ alors la valeur de n est	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	(0,5pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - 4\sqrt{2}z^2 + 12z - 8\sqrt{2}$

a) Calculer $P(2\sqrt{2})$. (0,5pt)

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z) = (z - 2\sqrt{2})(z^2 + az + b)$ (0,5pt)

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$ (0,5pt)

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_B = 2\sqrt{2}$ et $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ (0,5pt)

b) Déterminer la nature du triangle ABC et celle du quadrilatère OABC (0,5pt)

3) Pour tout nombre $z \neq \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; on pose : $f(z) = \frac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$.

a) Vérifier que $f(z_B) = -i$ et interpréter graphiquement. (0,5pt)

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$. (0,5pt)

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que f(z) soit imaginaire pur. (0,5pt)

d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = 2$. (0,5pt)

e) Vérifier que les trois ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 passent par les points O et B. (0,5pt)

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)(1+e^{-x})$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement. (0;5pt)

91

b) Montrer que $f(x)=x+2+\frac{x}{e^{x}}+\frac{2}{e^{x}}$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)$. (0,5pt)

c) En déduire que Γ admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation. (0,25pt)

d) Etudier la position relative entre Γ et D. (0,25pt)

2° a) Montrer que $f'(x)=1-(x+1)e^{-x}$ où f' est la dérivée première de f (0,5pt)

b) Etudier les variations de f' et en déduire le signe de $f'(x)$. (0,5pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,25pt)

3° a) Déterminer le point A de Γ où la tangente T à la courbe Γ est parallèle à l'asymptote D. Donner une équation de T. (0,5pt)

b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec les axes de coordonnées (0,25pt)

c) Tracer D, T et Γ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,5pt)

4° a) calculer l'intégrale $I=\int_{-2}^{0} 2e^{-x}dx$ (0,25pt)

b) A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $J=\int_{-2}^{0} xe^{-x}dx$. (0,25pt)

c) En déduire l'aire du domaine délimité par l'asymptote D, la courbe Γ et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$ (0,25pt)

5° Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x+2=(m-2)e^{x}$ (0,25pt)

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x-1+\ln x}{x-1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° On considère la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par : $u(x)=1+x\ln x$.

a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} u(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x)$ (0,5pt)

b) Calculer $u'(x)$ où u' est la dérivée de u, puis dresser le tableau de variation de u (0,75pt)

c) Montrer que $\forall x>0$ on a $u(x)\geq 1-\frac{1}{e}$. En déduire le signe de $u(x)$ (0,5pt)

2° a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter graphiquement (0,5pt)

b) Calculer et interpréter les limites $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ (0,5pt)

3° a) Monter que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x)=2+\frac{1}{x-1}+\frac{\ln x}{x-1}$ (0,5pt)

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire que la courbe (C) admet une asymptote horizontale (Δ) dont on donnera une équation. (0,5pt)

c) Etudier la position relative de (C) et (Δ). (0,5pt)

4° a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de D_f on a : $f'(x)=\frac{-u(x)}{x(x-1)^2}$. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,5pt)

5° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]0,1[$

a) Montrer que g est une bijection de $]0,1[$ sur un intervalle I que l'on précisera. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}, où g^{-1} est la réciproque de g. (0,5pt)

6° a) Montrer que la courbe (C) coupe (Ox) en un unique point A d'abscisse α avec $0.6<\alpha<0.8$ (0,25pt)

b) Tracer (Δ); (C) et (C') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, où (C') est la courbe de g^{-1} (0,5pt)

Fin.

92

Exercice 1 :

Q	1	2	3	4	5	6
R	C	A	A	B	B	C

Exercice 2 :

1) $p(z) = z^3 - 4\sqrt{2}z^2 + 12z - 8\sqrt{2}$

a) $P(2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2})^3 - 4\sqrt{2}.(2\sqrt{2})^2 + 12.(2\sqrt{2}) - 8\sqrt{2}$

$= 16\sqrt{2} - 32\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 8\sqrt{2} =$

$-40\sqrt{2} + 40\sqrt{2} = 0 \Rightarrow p(2\sqrt{2}) = 0$

Donc $2\sqrt{2}$ est la racine p(z)

b) $p(z) = (z - 2\sqrt{2})(z^2 + az + b)$

D'après le tableau d'ohner suivant :

1	$-4\sqrt{2}$	12	$-8\sqrt{2}$
	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
1	$-2\sqrt{2}$	4	0

$a = -2\sqrt{2}$ et $b = 4 \Rightarrow$

$P(z) = (z - 2\sqrt{2})(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)$

c) $p(z) = 0 \Rightarrow (z - 2\sqrt{2})(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4) = 0$
$\Rightarrow$

$z - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow z_0 = 2\sqrt{2}$ ou

$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 8 - 16 = -8$

$\Rightarrow \Delta = (2i\sqrt{2})^2$

$z_1 = \frac{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ *et*

$z_2 = \frac{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

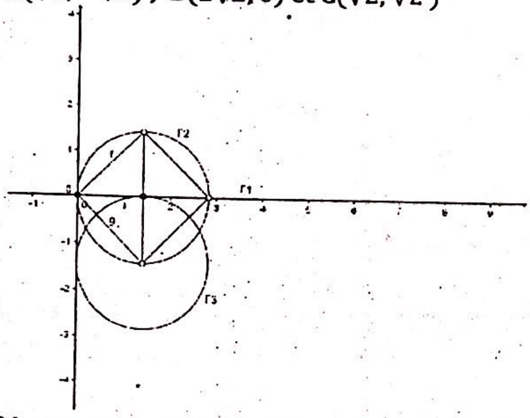
$P(z) = 0 \Rightarrow$

$s = \{\sqrt{2} - i\sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2} + i\sqrt{2}\}$

2) a) On a $Z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$;

$Z_B = 2\sqrt{2}$ et $Z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$A(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $B(2\sqrt{2}; 0)$ et $C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$



b) $AB = |Z_B - Z_A| = |2\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}| = |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2$

$AC = |Z_C - Z_A| = |\sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}| = |2i\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$

$CB = |Z_B - Z_C| = |2\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = |\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = 2$

$AC^2 = 8$; $AB^2 + BC^2 = 8$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

D'après le théorème de Pythagore

Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

$\overrightarrow{AB} = z_B - z_A = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OC} = z_C - z_O = \sqrt{2}\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow$

OABC est un parallélogramme .

$OA = |Z_A - Z_O| = |-\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2$

$OC = |Z_C - Z_O| = |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2$

$\Rightarrow OC = OA = AB = BC$

OABC est un parallélogramme qui a un angle droit et quatre cotés égaux,

Donc OABC est un carré.

3) $f(z) = \frac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

a) $f(z_B) = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} =$

$\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \frac{-4i}{4} = -i$

Interprétation:

Le triangle ABC rectangle isocèle en B.

b) $|f(z)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right| = 1 \Rightarrow$

$\left|\frac{z_M - z_C}{z_M - z_A}\right| = 1 \Rightarrow \frac{CM}{AM} = 1 \Rightarrow AM = CM$

L'ensemble Γ1 des points M d'affixe z est la médiatrice de $[AC]$.

c) f(z) est imaginaire pur $\Leftrightarrow$

$arg f(z) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow arg\frac{z - z_C}{z - z_A} = \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow$

$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow$ L'ensemble Γ2 des points M d'affixe z est le cercle de diamètre $[AB]$. privé de A etC

d) $|f(z) - 1| = 2 \rightarrow \left|\frac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} - 1\right| = 2$

$\left|\frac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2} - z + \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right| = 2 \rightarrow \left|\frac{-2\sqrt{2}}{z_M - z_A}\right| = 2 \rightarrow$

$\frac{2\sqrt{2}}{AM} = 2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{AM} = 1 \rightarrow AM = \sqrt{2} \rightarrow \Gamma_3$ est un cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$ cm

e) $|f(z_B)| = |-i| = 1 \Rightarrow B \in \Gamma 1$

$f(z_B) = -i \Rightarrow B \in \Gamma 2$

$|f(z_B) - 1| = |-i - 1| = \sqrt{2} \Rightarrow B \ni \Gamma 3$

$|f(z_O)| = |-i| = 1 \Rightarrow O \in \Gamma 1$

$f(z_O) = -i \Rightarrow B \in \Gamma 2$

$|f(z_O) - 1| = |-i - 1| = \sqrt{2} \Rightarrow O \ni \Gamma 3$

Exercice 3 :

1) $f(x) = (x+2)(1+e^{-x})$

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+2)(1+e^{-x})$

$= -\infty \times +\infty = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{x})(1+e^{-x}) =$

$1 \times -\infty = -\infty$

Interprétation:

-Cf admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de$-\infty$

b) $f(x) = x+xe^{-x}+2+2e^{-x} =$

$x+2+\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+2+\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x})$

$+\infty+0+0=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2)) =$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)\right) = 0+0 = 0$

Interprétation:

D : y = x + 2 est A. Ob de (C) en $+\infty$

$f(x) - y = \frac{x+2}{e^x}$, $f(x) - y = 0 \Rightarrow x+2 = 0$

$\Rightarrow x = -2 \Rightarrow$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f(x)-y	-		+
P R	D /C		C /D

2) a) $f'(x) = 1+e^{-x}-(x+2)e^{-x}$

$= 1+(1-x-2)e^{-x}$

$\Rightarrow f' = 1-(x+1)e^{-x}$

$f''(x) = -e^{-x}-(-x-1)e^{-x} = xe^{-x}$

b) on pose f''=0 ⇒ x = 0 ; f'(0)=0,

Le TV de f'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''(x)	-		+
f'(x)	$+\infty$ ↘	0	↗ 1

Signe de f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	+

c) Le TV de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	+
f(x)	$-\infty$ ↗	4	↗ $+\infty$

4) a) T //D ⇒ f'(x) =1 ⇒ $1-(x+1)e^{x} = 1$

$\Rightarrow (x+1)e^{x} = 0 \Rightarrow x = -1$; f(-1)=1+e

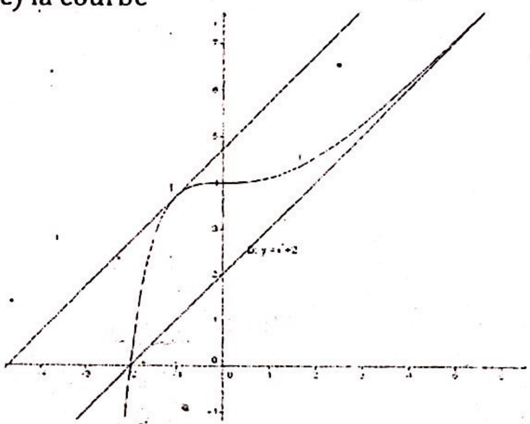
⇒T : y =1(x+ 1)+1+e

⇒T : y = x +2 +e

b) points d'intersection de (C) avec les axes

$\begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(2;0) \\ f(0) = 4 \Rightarrow B(0;-4) \end{cases}$

c) la courbe



4) a) $I = \int_{-2}^{0}(2e^{-x})dx = [-2e^{-x}]_{-2}^{0} =$ $-2+2e^2$

⇒ $\boxed{I = -2+2e^2}$

b) $J = \int_{-2}^{0} xe^{-x}dx$

on pose u = x ⇒ u' =1

et $V' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$\Rightarrow J = [-xe^{-x}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -e^{-x}dx$

$\Rightarrow J = [-xe^{-x}-e^{-x}]_{-2}^{0} = -1-2e^2+e^2$

$\Rightarrow \boxed{J = -1-e^2}$

c) $D = \int_{-2}^{0}(y-f(x))dx = I+J$

$= -2+2e^2-1-e^2$

$\Rightarrow \boxed{D = e^2-3}$

d) L'équation : $x+2 = (m-2)e^{x}$

$\Rightarrow (x+2)e^{-x} = m-2$

$\Rightarrow (x+2)e^{-x}+x+2 = x+m$

$\Rightarrow (x+2)(1+e^{-x}) = x+m$

⇒f(x) = x + m

⇒y = x + m//D//T

Le nombre de solution de cette équation est le nombre de point d'intersection de (C) avec les parallèles à D (A. Ob)

on peut résumer les résultats dans un tableau suivant :

Les valeurs de m	*Nombre de Solutions*
$m \leq 2$	*1Solution*
$2 < m < 2+e$	*2 Solutions*
$m = 2+e$	*1 Solution (T)*
$m > 2+e$	*10Solution (T)*

Exercice 4 :

$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$;

$$f(x) = \frac{2x-1+\ln x}{x-1}$$

1) $u(x) = 1+x\ln x$

a) $\lim_{x\to 0^+} u(x) = \lim_{x\to 0^+}(1+x\ln x) = 1+0 = 1$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1+x\ln x) = 1+\infty = +\infty$

b) $u'(x) = \ln x + 1$

$u'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1}$

$u(e^{-1}) = 1 - e^{-1}$

Le TV

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$u'(x)$	-		+
$u(x)$	1 ↘	$1+e^{-1}$	↗ $+\infty$

c) D'après le TV, $u(x) \geq 1 - e^{-1} \Rightarrow$

$u(x) \geq 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow u(x) > 0$

2) $f(x) = \frac{2x-1+\ln x}{x-1}$

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x-1+\ln x}{x-1}\right) = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$

Donc d : x =0 est AV de Cf

b) $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2x-1+\ln x}{x-1}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x-1+\ln x}{x-1}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Donc d : x =1 est AV de Cf

3) a) $f(x) = \frac{2x-1+\ln x}{x-1} = \frac{2x-1-1+1+\ln x}{x-1} = \frac{2x-2+1+\ln x}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1}$

$= 2 + \frac{1}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1}$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{1}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1}\right) =$

$2+0+0 = 2$

Cf admet une asymptote horizontale (d)d'équation : y = 2

c)La position de Cf avec (d)

f(x) - y = $\frac{1}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1} = \frac{1+\ln x}{x-1}$

f(x) – y = 0$\Rightarrow 1+\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1}$

$f(e^{-1}) = 2$

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
f(x)-y	-	+		+
P R	(d)/Cf	Cf/(d)		Cf/ (d)
		2		

4)a) $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{(-x+x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$

$= \frac{-(1+x\ln x)}{x(x-1)^2} = \frac{-u(x)}{x(x-1)^2}$

b)Le TV de f

x	0	α	1	$+\infty$
f'(x)	-			-
f(x)	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 2

5)a)g est la restriction de f sur $]0;1[$

g est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]0;1[$ *sur* $I =]-\infty;+\infty[$

b)Le TV de g^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	-	
$g^{-1}(x)$	1 ↘	0

6) a) f(x) =0
D'après le TV, f(x) ; change le signe une seule fois de I =]0; 1[*donc l'équation f(x)= 0 admet une unique solution α*
Donc Cf coupe(ox)en unique point A d'abscisse α
$f(0{,}6) > 0, f(0{,}8) < 0$
$\Rightarrow f(0{,}8) < f(\alpha) < f(0{,}6)$
Comme f(x) est décroissante sur]0; 1[
Alors $0{,}6 < \alpha < 0{,}8$.
b) La courbe