بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SERVICE DES EXAMENS

Honneur–Fraternité - Justice

Séries :C & TMGM
Sujet :Mathématiques
Durée :4heures
Coefficients :9&6

BACCALAUREAT 2003

Session Complémentaire

Exercice1(5 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation **(E)** d'inconnue z telle que :

$$z^2 - (4\cos t)z + 4 + 5\sin^2 t = 0 \quad \text{où } t \in [0;\pi[\text{ est un paramètre réel.}$$

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)**. on notera z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $\mathrm{Im}(z_1) > 0$ **(1,5pt)**

2. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$; Soient M_1 et M_2 les deux points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Démontrer que lorsque le paramètre t décrit $[0;\pi[$ les points M_1 et M_2 décrivent une ellipse Γ dont on donnera une équation cartésienne. **(0,75pt)**

b) Donner les élément caractéristiques de la courbe Γ puis la construire dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. **(0,75pt)**

c) Placer sur le graphique les points M_1 et M_2 pour $t = \frac{\pi}{6}$. **(0,5pt)**

3. Soit f l'application du plan dans lui même qui à tout point $M(x;y)$ d'affixe z associe le point $M'(x';y')$ d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{5z + \bar{z}}{4}$.

a) Ecrire x' et y' en fonction de x et y. **(0,5pt)**

b) On pose $f(\Gamma) = \Gamma'$, donner une équation cartésienne de la courbe Γ', vérifier que Γ' est un cercle dont on donnera le centre et le rayon puis le construire dans le repère précédent. **(0,5pt)**

c) En déduire une méthode géométrique qui permet de construire l'ellipse Γ point par point à partir de Γ'. **(0,5pt)**

Exercice2(5 points)

Dans le plan orienté, on considère trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 de même rayon et de centres respectifs **M**, **N** et **P**, ces trois cercles sont concourants en un point **K** et se coupent deux à deux en **A**, **B** et **C** tels que:

- Γ_1 et Γ_2 se coupent en **A** et **K** ;
- Γ_2 et Γ_3 se coupent en **B** et **K** ;
- Γ_3 et Γ_1 se coupent en **C** et **K**.

1. Faire une construction illustrant les données précédentes. **(1pt)**

2. On pose $r_1 = s_{(KB)} \circ s_{(KA)}$, $r_2 = s_{(KP)} \circ s_{(KC)}$ et $f = s_{(KB)} \circ s_{(KA)} \circ s_{(KC)}$.

a) Déterminer la nature de chacune des transformations r_1 et r_2. **(0,5pt)**

b) Déterminer $r_1(M)$ et $r_2(M)$: que peut on en déduire ? **(0,75pt)**

c) En déduire que f est une réflexion dont on donnera l'axe. **(0,5pt)**

3.a) Montrer que $(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}) = (\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KP})\ [\pi]$ et écrire(sans le démontrer) deux relations semblables. **(0,75pt)**

b) Vérifier que $(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. **(0,5pt)**

c) En déduire que **K** est l'orthocentre du triangle **ABC**. **(0,5pt)**

4. Soient Γ_4 et Γ_5 les deux cercles circonscrits respectivement aux tringles **ABC** et **MNP**.

Montrer que les cinq cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 et Γ_5 sont de même rayon. **(0,5pt)**

Problème(10 points)

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (2 + \sin(nx))e^{1+nx}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : *Etude et représentation graphique de la fonction* f_1

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = f_1(x) = (2 + \sin x)e^{1+x}$.

1.a) Démontrer que: $\forall x \in \mathbb{R}; \quad \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$. **(0,5pt)**

b) En déduire que: $\forall x \in \mathbb{R}; \quad f'(x) = (2 + \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}))e^{1+x}$ et que f est strictement croissante. **(0,75pt)**

2.a) Démontrer l'inégalité suivante: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{1+x} \leq f(x) \leq 3e^{1+x}$ **[1]**. **(0,5pt)**

b) A l'aide de **[1]** calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement. **(1pt)**

3. Dresser le tableau des variations de f et montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera. **(0,75pt)**

4. Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}; \quad f''(x) = 2(1 + \cos x)e^{1+x}$. **(0,5pt)**

5.a) Montrer que la courbe (C_1) est située entre deux courbes Γ_1 et Γ_2 représentatives de deux fonctions que l'on déterminera (Γ_1 au dessus de Γ_2). **(0,5pt)**

b) Déterminer les points de contact de (C_1) avec Γ_1 et Γ_2. Montrer que (C_1) est tangente à Γ_1 et Γ_2 en leurs points de contact **(On dit que deux courbes sont tangentes en un point si elles ont la même tangente en ce point).** **(1pt)**

6. Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes (C_1), Γ_1 et Γ_2 pour $x \in [-\pi; \pi]$. **(0,5pt)**

7. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. **(0,5pt)**

Partie B : *Calcul d'une intégrale*

On pose : $A_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Démontrer que: $A_n = \frac{2}{n}e^{1+n} - \frac{2}{n}e + \int_0^1 \sin(nx)e^{1+nx}dx$. **(1pt)**

2. On pose : $I_n = \int_0^1 \sin(nx)e^{1+nx}dx$ et $J_n = \int_0^1 \cos(nx)e^{1+nx}dx$.

a) En utilisant l'intégration par parties montrer que:

$$I_n = \frac{\sin n}{n}e^{1+n} - J_n \quad \text{et} \quad J_n = \frac{\cos n}{n}e^{1+n} - \frac{e}{n} + I_n.$$ **(0,75pt)**

b) En déduire I_n et J_n en fonction de n. **(0,75pt)**

3.a) Donner l'expression de A_n en fonction de n. **(0,5pt)**

b) Calculer A_1 et comparer ce résultat avec celui de la question A.7). **(0,5pt)**

FIN.