République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction de l'Enseignement Secondaire
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2008

Session complémentaire

Séries : C & TMGM Epreuve: Mathématiques Durée: 4 heures Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose:

$$P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-16+20i)z + 24 + 8i .$$

1.a) Calculer $P(2i)$. **(0,5pt)**

b) Déterminer les complexes α et β tels que pour tout complexe z on a:
$P(z) = (z-2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$ puis résoudre l'équation $P(z) = 0$. **(1pt)**

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2+2i$ et $z_B = 2i$ et le cercle Γ de diamètre $[OA]$.

Soit M un point variable appartenant au cercle Γ et distinct des points O et A. On considère les deux triangles AEM et OMF directs, isocèles et rectangles respectivement en A et en O .On désigne par G le centre de gravité du triangle OAM et on appelle e, f, g et m les affixes respectives des points E, F, G et M.

a) Construire une figure et démontrer que, quelque soit le point M choisi sur le cercle Γ, on a $|m-1-i| = \sqrt{2}$. **(1pt)**

b) Écrire en fonction de m chacun des nombres complexes e, f et g. **(0,75pt)**

c) Démontrer que le milieu H du segment $[EF]$ est un point de Γ indépendant de la position du point M sur Γ. **(0,25pt)**

d) Déterminer et représenter les lieux géométriques des points E, F et G lorsque M décrit Γ. **(0,25pt)**

e) Préciser la position de M pour laquelle la droite (EF) est tangente au cercle Γ. Déterminer alors l'affixe du point E. **(0,25pt)**

Exercice 2 (4 points)

1. Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ U_n = \int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x^2}dx, \; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) En posant $x = \tan t$, où $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, montrer que $U_0 = \dfrac{\pi}{4}$. **(0,75pt)**

b) Montrer que (U_n) est positive et décroissante en déduire qu'elle est convergente. **(0,75pt)**

c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1} + U_n = \dfrac{1}{2n+1}$ en déduire U_1 et U_2. **(0,5pt)**

d) Donner un encadrement de U_n qui permet de calculer la limite de U_n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **(0,5pt)**

2. Soit (V_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} V_0 = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\ V_n = \int_0^1 (2n+1)x^{2x}\ln(1+x^2)dx, \; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) En utilisant une intégration par parties démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$ on a :

$$V_n = \ln 2 - 2U_{n+1}.$$ (0,5pt)

b) En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$. (0,5pt)

c) Déduire de ce qui précède les variations de (V_n) et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$. (0,5pt)

<u>Exercice 3</u> (4 points)

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,75pt)

2. Soit f_k la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_k(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}-kx$ où k est un paramètre réel, $k\in[0;1]$ et soit (C_k) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

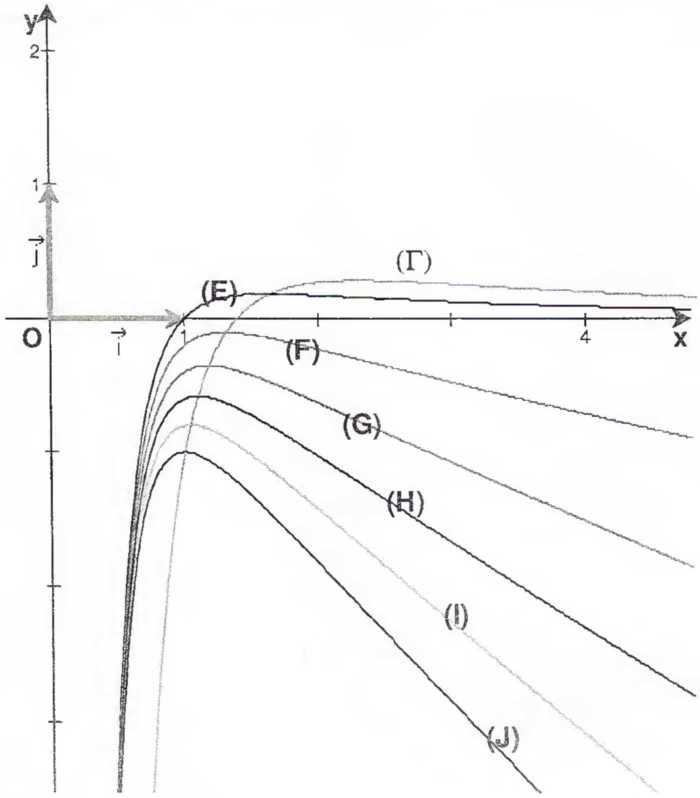
a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f_k(x)$. En déduire les équations des asymptotes éventuelles à (C_k). (0,75pt)

b) Montrer que l'équation : $1-kx^3-2\ln x=0$ admet, dans $\mathbb{R}_+^*$, une unique solution α_k et que $1\leq\alpha_k\leq\sqrt{e}$. (0,5pt)

c) Calculer $f_k'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_k. (0,5pt)

3.a) Etudier la position relative des courbes (C_k) et $(C_{k'})$ où k et k' sont deux réels avec $0\leq k<k'\leq1$. (0,5pt)

b) Sur la figure ci-dessous on a représenté les courbes (C_k) pour $k\in\{0;\ 0,2;\ 0,4;\ 0,6;\ 0,8;\ 1\}$. Reconnaître celle qui représente (C_0), $(C_{0,2})$ et $(C_{0,8})$. (0,5pt)



4. Soit M_k le point de (C_k) en lequel la tangente est horizontale. Les points M_k sont situés sur la courbe (Γ) (voir figure ci-dessus), donner une équation cartésienne de (Γ). (0,5pt)

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de sens direct de coté a, $(a>0)$.

Les points E, F, G et H sont définis respectivement par : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure (on prendra (AB) horizontale) **(0,5pt)**

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A)=B$ et $r(E)=F$. **(0,5pt)**

b) Déterminer un angle et le centre de la rotation r. **(0,5pt)**

c) Montrer que EFGH est un carré et calculer son aire en fonction de a. **(0,5pt)**

3. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en E.

a) Montrer que $s(B)=F$ puis déterminer $s(C)$ et $s(D)$. **(0,75pt)**

b) Calculer le rapport de s. **(0,25pt)**

c) Soit α une mesure de l'angle de s déterminer la valeur exacte de $\cos\alpha$. **(0,25pt)**

4. Soient I, J, K et L les points définis par :

I l'intersection des segments $[AG]$ et $[BH]$;

J l'intersection des segments $[BH]$ et $[CE]$;

K l'intersection des segments $[CE]$ et $[DF]$;

L l'intersection des segments $[DF]$ et $[AG]$.

a) Montrer que IJKL est un carré. **(0,25pt)**

b) Montrer que $K=\text{bar}\{(D,4);(F,9)\}=\text{bar}\{(C,7);(E,6)\}$. **(0,25pt)**

c) En déduire l'aire du carré IJKL en fonction de a. **(0,25pt)**

Exercice 5 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC direct de coté a, $(a>0)$. Soient D et E les images respectives de A et B par la symétrie de centre C. Soit I le milieu du segment $[BC]$.

1. Faire une figure (qui sera complétée au fur et à mesure) illustrant les données précédentes. **(0,75pt)**

2.a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 de centre B et qui transforme D en A. **(0,5pt)**

b) Déterminer l'angle et le rapport de s_1. **(0,5pt)**

c) Soit M un point de la droite (DE) distinct de D et de E. Déterminer le lieu géométrique du point M' image de M par s_1. Construire M' à partir d'une position donnée de M sur (DE) puis démontrer que les points M', M, B et E sont cocycliques quelque soit la position de M sur (DE). **(0,75pt)**

3. Soit s_2 la similitude directe qui transforme I en B et E en D.

a) Déterminer l'angle et le rapport de s_2. **(0,5pt)**

b) Déterminer le centre de s_2. **(0,5pt)**

4. On pose $f=s_1\circ s_2$.

a) Montrer que f est une similitude directe puis donner son angle et son rapport. **(0,25pt)**

b) Montrer que le centre de f est le point d'intersection du cercle de diamètre $[BE]$ avec un deuxième cercle Γ que l'on déterminera. Construire ce centre. **(0,25pt)**

Fin.