Занятие 12. Тригонометрия. Неравенства, аркфункции, преобразования

Домашняя работа

Easy

1. (*Савватеев, 2018*) Докажите, что

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

2. (*«ПВГ», 2018*) Решите уравнение

$$\left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{4}{5}\right) \cdot x + \pi = 2 \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

3. (*«ПВГ», 2016*) Сравните числа $\sin 1 + \cos 1$ и $\dfrac{49}{36}$. Ответ обоснуйте.

4. (*«ПВГ», 2017*) Решите неравенство $3 \sin \left(\dfrac{2x}{3}\right) \geqslant 5 - 2 \cos \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{3}\right)$.

Normal

5. (*«ПВГ», 2015*) Что больше:

$$2 \sin \frac{5\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16}$$

или сумма корней уравнения

$$|3 \cdot \arccos x| = |\arcsin x|?$$

6. (*«Ломоносов», 2019*) Найдите решения неравенства

$$\sin^{2018} x + \cos^{-2019} x \geqslant \cos^{2018} x + \sin^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

7. (*«ПВГ», 2016*) Решите неравенство

$$\sqrt{2 \sin x \cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x \cos x (\sin x - \cos x).$$

8. (*«ПВГ», 2017*) Решите неравенство $\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}\right)^7 > 1$.

9. (*«Росатом», 2017*) Решите уравнение $\cos(\arcsin(\sin x)) = \sin(\arccos(\cos 2x))$.

10. (*«Ломоносов», 2015*) Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = (\arcsin(\sin(\arccos(\cos 3x))))^{-5}.$$

11. (*«Ломоносов», 2016*) Решите уравнение $\operatorname{arcctg}^2 x = 3 \operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}$.

12. (*«Ломоносов», 2020*) Решите неравенство $\operatorname{tg}\arccos x \leqslant \sin \operatorname{arctg} x$.

13. (*«ОММО», 2017*) Сравните числа $\dfrac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$ и $\dfrac{\sin 2018^\circ}{\sin 2019^\circ}$.

14. (*«ОММО», 2016*) Вычислите $2\operatorname{arctg} 2 + \arcsin \dfrac{4}{5}$.

15. (*«ОММО», 2015*) Для $x = \frac{\pi}{2n}$ найдите значение суммы

$$\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2 3(x) + \ldots + \cos^2(nx).$$

16. (*«ПВГ», 2019*) Решите неравенство $\arcsin(\sin|x|) \geqslant \arccos|\cos 2x|$.

17. (*«ПВГ», 2012*) Найдите суммарную длину отрезков, составляющих решение неравенства

$$|2\sin x + 3\cos x| + |\sin x - 3\cos x| \leqslant 3\sin x.$$

на отрезке $[0; 4\pi]$.

18. (*«ПВГ», 2012*) Решите неравенство

$$\arccos(4x^2 - 8x + 3) + 2\arcsin(x-1) < 0.$$

Hard

19. (*«ОММО», 2018*) Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$\left(y^2 - \arccos^2(\cos x)\right) \cdot \left(y^2 - \arccos^2(\cos(x+\pi/3))\right) \cdot \left(y^2 - \arccos^2(\cos(x-\pi/3))\right) < 0.$$

20. (*«ОММО», 2019*) Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$3\arcsin x - 2\arccos y$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

21. (*«ПВГ», 2019*) При всех значениях $a \in \mathbb{R}$ решите неравенство

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + (x-a)^2 \leqslant 2\operatorname{arctg} x.$$

22. (*«ММО», 2014*) Найдите все такие a и b, что $|a| + |b| \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$ и при всех x выполнено неравенство $|a\sin x + b\sin 2x| \leqslant 1$.

23. (*«САММАТ», 2016*) Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{2\arccos x - \arccos y} \cdot (|x| + |y| - 1) = 0, \\ \sqrt{2\arccos y - \arccos x} \cdot (|x+y| + |x-y| - 1) = 0. \end{cases}$$

Ответы

2. $x \in \mathbb{R}$.

3. Первое больше.

4. $\frac{3\pi}{4} + 6\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

5. Первое больше.

6. $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

7. $\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right] \cup \left[\pi + 2\pi k; \frac{17\pi}{12} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

8. $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

9. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

10. $\frac{\pi}{3}$.

11. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. $\left[-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1\right]$.

13. Второе больше.

14. π.

15. $\frac{n-1}{2}$.

16. $\{\pm\pi k\} \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \left[-\frac{2\pi}{3} - 2\pi k; -\frac{\pi}{3} - 2\pi k\right],\ k \in \mathbb{N}_0$.

17. $2\operatorname{arctg}\frac{9}{7}$.

18. $\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

20. $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

21. При $a < 0$ решение нет, при $a \geqslant 0$ единственное решение $x = a$.

22. $(a, b) = \left(\pm\frac{4}{3\sqrt{3}}; \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

23. $\left(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}\right),\ (-1; 0),\ (0; -1),\ (1; 1),\ \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Подсказки и решения

1. Рассмотрите тангенсы левой и правой частей. Будет ли такой переход равносильным? Решение.

2. Нарисуйте египетский треугольник: выразите синус угла, который лежит напротив катета длины 3. Затем выразите его косинус и тангенс. Решение (стр. 15, задача 1).

3. Что можно сказать о монотонности функции $f(x) = \sin x + \cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$? Решение (стр. 1, задача 1).

4. Оцените возможные значения левой и правой частей неравенства по отдельности, и задача станет устной. А здесь решение с помощью замены (стр. 6, задача 1).

5. Произведение синуса на косинус можно преобразовать в сумму синусов. А для поиска корней уравнения припомните тождество $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

6. Исследуйте функцию $f(t) = t^{2018} + t^{-2019}$ на монотонность. Решение (стр. 4, задача 6.1).

7. Сгруппируйте слагаемые в правой части да сверните синус двойного угла в левой. Решение (стр. 3, задача 4).

8. Изобразите графики функций $f(t) = \sqrt{t}$ и $g(t) = t^2$ да не забудьте про основное тригонометрическое тождество. Решение (стр. 7, задача 2).

9. Используйте формулу приведения: $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Решение (стр. 15, задача 2).

10. Найдите $D(y)$ — область определения функции y, она позволит получить оценку на значение периода. Решение (стр. 1, задача 2).

11. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$. Решение (стр. 1, задача 2).

12. Похожую задачку мы обсудили на занятии. Идея проста: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Решение (стр. 2, задача 3).

13. Либо поработайте с производной, либо приведите дроби к общему знаменателю и преобразуйте произведение синусов в разность косинусов. Решение.

14. Попробуйте изобразить прямоугольный треугольник с катетами 2 и 1, отразите его симметрично относительно гипотенузы, длина которой $\sqrt{5}$, опишите окружность около полученного дельтоида, и ответ станет очевидным. Естественно, есть и более стандартное решение и даже еще одно.

15. Первое — с последним, второе — с предпоследним и так далее. Решение (стр. 3, задача 6).

16. Да хоть графически! Ведь достаточно рассмотреть любой отрезок длины 2π. Решение (стр. 8, задача 3).

17. $|a| + |b| = a + b \quad \Leftrightarrow \quad (a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0)$. Решение (стр. 4, задача 3).

18. Для начала удобно сделать замену $t = x - 1$. Решение (стр. 2, задача 2).

19. Эта задачка на закрепление: вместе сделали с арксинусами! Решение (стр. 9, задача 6).

20. Начало очевидное: $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Далее нужно аккуратно рассмотреть все значения α на отрезке $[0; 2\pi]$. Решение (стр. 3, задача 6).

21. Докажите формулу $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{arctg} x$, взяв косинусы левой и правой частей. Решение (стр. 10, задача 3).

22. Попробуйте использовать то, что в точке $x = \frac{\pi}{3}$ верно равенство $\sin x = \sin 2x$. Решение.

23. Решите систему графически. Для того, чтобы изобразить множество точек, заданных уравнением $|x+y|+|x-y| = 1$, раскройте модули, используйте метод областей. А в случае с $2\arccos x = \arccos y$ удобно взять косинусы левой и правой частей (будет ли это равносильным преобразованием?). Решение (стр. 2, задача 5).

Дополнительные материалы

[1] И. В. Яковлев. Введение в аркфункции.

[2] И. В. Яковлев. Обратные тригонометрические функции.

[3] В. В. Ткачук. Математика — абитуриенту (урок 7).

[4] И. М. Гельфанд и др. Тригонометрия.