МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра програмного забезпечення

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторної роботи № 8 «Ігрові задачі дослідження операцій»
з дисципліни «Дослідження операцій»
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»

Укладачі:
д.т.н., проф., проф. кафедри
Любов ЖУРАВЧАК
к.ф.-м..н., старший викладач кафедри
Наталія ІВАСЬКО

Львів 2024

**Тема роботи:** Ігрові задачі дослідження операцій

**Мета роботи:** Ознайомитись на практиці із розв’язуванням матричних ігор з використанням симплекс-методу.

## 8.1. Теорія ігор

Ситуації, коли дві сторони з різними (іноді протилежними) інтересами мають дійти до деякого оптимального рішення, причому кожна з них для досягнення своєї мети має можливість діяти різними способами (вибір варіанту дії може здійснюватись залежно від вчинків іншої сторони), називають конфліктними. Математичну модель конфліктної ситуації називають грою. Розділ теорії дослідження операцій, що займається математичними моделями прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту, називається теорією ігор.

Отже, *теорія ігор* – математична теорія конфліктних ситуацій, тобто таких, у яких стикаються інтереси двох або більше сторін, які мають різні цілі.

Теорія ігор вперше була систематично викладена Нейманом і Моргенштерном та оприлюднена лише 1944 року в монографії "Теорія ігор і економічної поведінки", хоча окремі результати були опубліковані ще в 20-х роках. Нині математико-ігрові моделі знаходять своє застосування не тільки в конфліктних ситуаціях, а й у соціально-економічній сфері, у взаємодії людини з природою, в політиці, в біології, у військовій сфері та ін.

*Гра* – це конфліктна ситуація, що регламентована одним правилом, у якій вказані:

- можливі варіанти дій (*стратегії*) учасників (*гравців*);
- кількісний результат гри – ціна гри (виграш або програш), до якої приводить сукупність ходів;
- об’єм інформації кожної сторони про поведінку іншої.

*Стратегія гравця* – сукупність правил, що визначають вибір дій під час кожного персонального ходу гравця залежно від ситуації, яка склалась в процесі гри.

Завданням кожного гравця є знаходження *оптимальної стратегії*, яка за умови багатократного повторення гри забезпечує йому максимально можливий середній виграш.

Існує дуже багато різних ігор, класифікація яких проводиться відповідно до вибраного критерію. Наприклад, якщо в грі беруть участь два гравці, то така гра називається *парною* (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато гравців, тоді гра є *множинною*. Якщо ж кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра – *скінченна*, в іншому разі – *нескінченна*. Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то маємо *гру з нульовою сумою*. Парна гра з нульовою сумою називається *антагоністичною*. Крім цього, існує поняття матричної гри.

*Матрична гра* – одноходова скінченна гра з нульовою сумою. Матрична гра є теоретико-ігровою моделлю конфліктної ситуації, в якій суперники для досягнення діаметрально протилежних цілей роблять по одному ходу (вибору, кроку) із скінченної кількості можливих дій. Наприклад, розглянемо два гравці *A* і *B*, де кожний гравець вибирає одну із можливих стратегій: позначимо стратегії гравця *A* – $A_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, стратегії гравця *B* – $B_j\,(j=\overline{1,n})$. У результаті перший гравець виграє величину $a_{ij}$, а другий гравець програє цю величину. Складемо матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де рядки відповідають стратегіям $A_i$, а стовпці – стратегіям $B_j$. Матриця *A* називається *платіжною*, а також *матрицею гри*.

Із багатьох критеріїв теорії ігор для вибору раціональних варіантів рішень, найпоширенішим є песимістичний критерій *мінімаксу-максиміну* (вибір оптимальної стратегії для кожного з гравців ґрунтується на припущенні, що він діятиме за найгірших для нього умов, тому критерій називається песимістичним). Суть цього критерію полягає у наступному: нехай гравець *A* вибрав стратегію $A_i$, тоді у найгіршому разі він отримає виграш, що дорівнює $\min a_{ij}$, тобто навіть тоді, якщо гравець *B* і знав би стратегію гравця *A*. Передбачаючи таку можливість, гравець *A* має вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто $\alpha=\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$.

Така стратегія гравця *A* позначається $A_{i_0}$ і має назву *максимінної,* а величина гарантованого виграшу цього гравця називається *нижньою ціною гри*.

Гравець *B*, який програє суму у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки має вибрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця *A*. Стратегія гравця *B* позначається через $B_{j_0}$ і називається *мінімаксною*, а величина його програшу – *верхньою ціною гри*, тобто $\beta=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$.

Оптимальний розв’язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні невигідно змінювати вибрану стратегію, оскільки її супротивник може у відповідь вибрати іншу стратегію, яка забезпечить йому кращий результат.

Якщо $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=\upsilon$, тобто, якщо $\alpha=\beta=\upsilon$, то гра називається *грою у чистих стратегіях*. В такому разі виграш гравця *A* (програш гравця *B*) називається *значенням гри* і дорівнює елементу матриці $a_{i_0 j_0}$.

Ігри у чистих стратегіях називаються *іграми з сідловою точкою*, а елемент платіжної матриці, значення якого дорівнює виграшу гравця *A* (програшу гравця *B*) і є сідловою точкою. У цій ситуації оптимальним рішенням гри для обох сторін є вибір лише однієї з можливих, так званих чистих стратегій – максимінної для гравця *A* та мінімаксної для гравця *B*.

***Приклад 8.1.*** Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри для матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 8 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо мінімальні елементи кожного рядка $\alpha_1=\min\{2,10,3,14,5\}=2$, аналогічно, $\alpha_2=\min\{8,9,5,6,7\}=5$, $\alpha_3=\min\{10,8,4,8,12\}=4$.

Обчислюємо максимальні елементи кожного стовпця $\beta_1=10, \beta_2=10, \beta_3=5, \beta_4=14, \beta_1=12$. Нижня ціна гри $\underline{v}$ визначається шляхом максимізації $\alpha_i$:

$\underline{v}=\max\limits_i \alpha_i=\max\{2,5,4\}=5$.

Верхня ціна гри визначається мінімізацією $\beta_j$:

$\overline{v}=\min\limits_j \beta_j=\min\{10,10,5,14,12\}=5$.

Отже, $\overline{v}=\underline{v}$, тому дана гра є грою в чистих стратегіях. Ціна даної гри $v=5$. Гра, яка визначається матрицею $A$, має сідлову точку (2, 3). Тобто притримуючись чистої другої стратегії, перший гравець забезпечує собі виграш, не менший 5 ум. од., другий гравець, застосовуючи чисту третю стратегію, програє не більше 5 ум. од. Обидві стратегії $i$=2 та $j$=3 є оптимальними для першого та другого гравців.

Скінченні ігри, як правило, не мають сідлової точки. Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq \upsilon \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними, тобто кожна із сторін може покращити свій результат, вибираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять шляхом застосування *змішаних стратегій*, які є певними комбінаціями початкових "чистих" стратегій.

## 8.2. Розв'язування матричних ігор в змішаних стратегіях

*Теорема Неймана*: кожна скінченна гра має хоча б один оптимальний розв'язок серед змішаних стратегій.

Для того, щоб розв'язати гру в змішаних стратегіях, спочатку потрібно зменшити розмірність платіжної матриці. Адже як правило, задачі теорії ігор, що моделюють реальні ситуації з життя, мають значну розмірність. Зменшити розмірність матриці можна, якщо вилучити стратегії, про які наперед відомо, що вони є невигідними або повторюють одна одну.

Якщо всі елементи $i$-го рядка (стовпця) платіжної матриці перевищують значення елементів $j$-го рядка (стовпця), то кажуть, що $i$-та стратегія гравця $A$ (гравця $B$) є *домінантною* над $j$-ою.

Наприклад, гравець $A$ прагне збільшити свій виграш, тому він не використовуватиме стратегії, які свідомо дають йому менші суми. Необхідно залишити домінантні стратегії і відкинути доміновані – у платіжній матриці відкинути той рядок, елементи якого менші відповідних елементів іншого рядка. Гравець

*B* прагне зменшити свій програш, тому він не буде використовувати стратегії, які свідомо забирають великі суми. Необхідно залишити доміновані стратегії та відкинути домінантні – у платіжній матриці відкинути той стовпець, елементи якого більші відповідних елементів іншого стовпця.

Коли отримана оптимізована платіжна матриця, перевіряють, чи існує розв'язок в чистих стратегіях. Якщо розв'язок існує, то кінець, інакше формуються дві задачі ЛП (пряма для гравця *B* та двоїста для гравця *A*).

*Пряма задача ЛП для гравця B*:

Максимізувати функцію $Q = \sum_{j=1}^{n} q_j$ за обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le 1; \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le 1. \end{cases}$$

$$q_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

де $q_j = \dfrac{y_j}{\nu}$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – оптимальна змішана стратегія гравця *B*.

*Двоїста задача ЛП для гравця A*:

Мінімізувати функцію $F = \sum_{j=1}^{m} p_j$ за обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}tp_2 + \ldots + a_{m1}p_m \ge 1; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \ge 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \ge 1. \end{cases}$$

$$p_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right),$$

де $p_i = \dfrac{x_i}{\nu}, x = (x_1, \ldots, x_m)$ – оптимальна змішана стратегія гравця *A*.

Розв'язавши обидві задачі, шляхом підстановок обчислюємо $v = \dfrac{1}{Q*} = \dfrac{1}{F*}$ – ціну гри; $y_j = v \cdot q_j$ – оптимальну змішану стратегію гравця *B*, $x_i = v \cdot p_i$ – оптимальну змішану стратегію гравця *A*.

Отже, основними кроками розв'язування антагоністичної гри двох осіб є такі:

*Крок 1*. Обчислюємо нижню та верхню ціни гри. Якщо вони рівні між собою, то гра розв'язана.

*Крок 2*. Зменшуємо розмірність платіжної матриці.

*Крок 3*. Формулюємо пару задач ЛП (пряму та двоїсту), розв'язуючи одну з яких, встановлюємо оптимальну змішану стратегію одного з гравців.

*Крок 4*. Знаходимо розв'язок двоїстої задачі.

*Крок 5.* Шляхом оберненої підстановки визначаємо оптимальні змішані стратегії для обох гравців.

## 8.3. Приклад розв'язування матричної гри в змішаних стратегіях

***Приклад 8.2.*** Розв'язати антагоністичну матричну гру:

$$\begin{array}{cc} & \text{Гравець } B \\ \text{Гравець } A & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Визначимо домінантні стратегії. П'ята стратегія гравця $B$ домінує над другою, оскільки всі значення його програшів за будь-яких дій противника є гіршими, ніж за вибору другої стратегії. Тому п'ята стратегія гірша для гравця $B$, ніж друга, і може бути вилучена із платіжної матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно стратегія $B_3$ домінує над стратегією $B_2$. Отже, вилучаємо домінантну стратегію для гравця $B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Стратегія $B_4$ домінує над стратегією $B_1$, тому вилучаємо стратегію $B_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі аналізуємо стратегії гравця $A$. Стратегія $A_3$ домінує над стратегією $A_4$. Отже, для гравця $A$ залишаємо домінантні стратегії, які принесуть йому більший виграш:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримали оптимізовану платіжну матрицю.

Далі для розв'язування задачі необхідно знайти її нижню та верхню ціни гри. Нижня ціна гри буде дорівнювати: $\underline{v} = \max\{1,1,2\} = 2$. Верхня ціна гри буде рівна $\bar{v} = \min\{3,4\} = 3$. Отже, розв'язку даної задачі у чистих стратегіях не існує. Ціна гри буде лежати в межах: $2 \le v \le 3$. Необхідно розв'язати гру у змішаних стратегіях.

Для цього на основі отриманої платіжної матриці формулюємо дві задачі ЛП:

$$Q = q_1 + q_2 \to \max$$
$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 \le 1; \\ 3q_1 + q_2 \le 1; \\ 2q_1 + 3q_2 \le 1. \end{cases}$$
$$q_i \ge 0.$$

$$F = p_1 + p_2 + p_3 \to \min$$
$$\begin{cases} p_1 + 3p_2 + 2p_3 \ge 1; \\ 4p_1 + p_2 + 3p_3 \ge 1. \end{cases}$$
$$p_i \ge 0.$$

Розв'яжемо пряму задачу ЛП (для гравця *B*) за симплекс-методом. Для цього зведемо її до канонічної форми:

$$Q - q_1 - q_2 = 0$$
$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 + q_3 = 1; \\ 3q_1 + q_2 + q_4 = 1; \\ 2q_1 + 3q_2 + q_5 = 1. \end{cases}$$

Будуємо першу симплекс-таблицю (табл. 8.1). Провідним стовпцем обираємо другий, провідним рядком – перший.

*Таблиця 8.1*

| Базис | Вільний член | Змінні | | | | | Оціночні відношення |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ | |
| $q_3$ | 1 | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 1/4 |
| $q_4$ | 1 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $q_5$ | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1/3 |
| $F$ | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | |

План неоптимальний. Перераховуємо елементи для побудови другої симплекс-таблиці (табл. 8.2).

*Таблиця 8.2*

| Базис | Вільний | Змінні | Оціночні |
|---|---|---|---|

| | член | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ | відношення |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_2$ | 1/4 | 1/4 | 1 | 1/4 | 0 | 0 | 1 |
| $q_4$ | 3/4 | $2\frac{3}{4}$ | 0 | -1/4 | 1 | 0 | 3/11 |
| $q_5$ | 1/4 | $1\frac{1}{4}$ | 0 | -3/4 | 0 | 1 | 1/5 |
| $F$ | 1/4 | -3/4 | 0 | 1/4 | 0 | 0 | |

План неоптимальний. Перераховуємо елементи для побудови третьої симплекс-таблиці (табл. 8.3).

*Таблиця 8.3*

| Базис | Вільний член | Змінні | | | | | Оціночні відношення |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ | |
| $q_2$ | 1/5 | 0 | 1 | 2/5 | 0 | -1/5 | 1/2 |
| $q_4$ | 1/5 | 0 | 0 | $1\frac{2}{5}$ | 1 | $-2\frac{1}{5}$ | 1/7 |
| $q_1$ | 1/5 | 1 | 0 | -3/5 | 0 | 4/5 | |
| $F$ | 2/5 | 0 | 0 | -1/5 | 0 | 3/5 | |

План неоптимальний. Перераховуємо елементи для побудови четвертої симплекс-таблиці (табл. 8.4).

*Таблиця 8.4*

| Базис | Вільний член | Змінні | | | | | Оціночні відношення |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ | |
| $q_2$ | 1/7 | 0 | 1 | 0 | -2/7 | 3/7 | |
| $q_3$ | 1/7 | 0 | 0 | 1 | 5/7 | $-1\frac{4}{7}$ | |
| $q_1$ | 2/7 | 1 | 0 | 0 | 3/7 | -1/7 | |
| $F$ | 3/7 | 0 | 0 | 0 | 1/7 | 2/7 | |

План оптимальний, адже всі значення в рядку $F$ додатні. Розв'язком прямої задачі є:

$$Q^* = \frac{3}{7}; q = (\frac{2}{7}; \frac{1}{7}).$$

З отриманої симплекс-таблиці виписуємо розв'язок для двоїстої задачі. Для цього виписуємо з останнього рядка значення змінних першого базового розв'язку ($q_3$, $q_4$, $q_5$):

$F^* = \frac{3}{7}; \; p = (0; \frac{1}{7}; \frac{2}{7}).$ Отже, ціна гри $v = \frac{1}{Q^*} = \frac{7}{3}.$

Оптимальною стратегією гравця *B* є: $y = (\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{3}; \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{3}) = (\frac{2}{3}; \frac{1}{3}).$

Оптимальною стратегією гравця *A* є: $x = (0 \cdot \frac{7}{3}; \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{3}; \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{3}) = (0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}).$

## Контрольні запитання до лабораторної роботи № 8

1. Що таке гра?
2. Яка гра називається скінченною, парною?
3. Яка гра називається грою з нульовою сумою?
4. Яка гра називається антагоністичною?
5. Що таке матрична гра?
6. Що таке хід гри?
7. Що називається конфліктною ситуацією?
8. Дайте визначення платіжної матриці.
9. Сформулюйте принцип мінімаксу.
10. Що таке нижня і верхня ціна гри?
11. Дайте визначення максимінної та мінімаксної стратегій.
12. Які властивості мають оптимальні стратегії гравців?
13. Дайте визначення гри в чистих стратегіях.
14. Яка гра називається грою з сідловою точкою?
15. Що таке змішана стратегія гравця?
16. Як зменшити розмірність платіжної матриці?
17. Сформулюйте основну теорему теорії ігор.
18. У який спосіб здійснюється зведення гри до задачі лінійного програмування?
19. Як знайти розв'язок гри типу 2×n графічним методом?
20. Як знайти розв'язок гри типу m×2 графічним методом?
21. Як знайти розв'язок гри типу 2×2 аналітичним методом?

## Завдання до лабораторної роботи № 8

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.

2. За допомогою графічного методу знайти розв'язок гри заданої матрицею (згідно з варіантом в Додатку 1 до лабораторної роботи № 8) та розв'язати її аналітично, звівши до типу 2×2.
3. Подати гру, задану матрицею згідно з варіантом в Додатку 1 до лабораторної роботи № 8, у вигляді задач ЛП та розв'язати їх. Порівняти результати з отриманими у п.2.
4. Оформити звіт про роботу, який повинен містити всі ітерації обох алгоритмів та розрахунки з поясненнями, за допомогою яких отримано результат.
5. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

## Вимоги до програми

Програма має передбачати такі можливості:

1. Введення вхідних даних вручну (матриці).
2. Перевірка розв'язку гри в чистих стратегіях.
3. Оптимізація платіжної матриці.
4. Передбачити можливість некоректного введення даних.
5. Передбачити можливість покрокового відображення побудови симплекс таблиць.
6. Підписання таблиць.
7. Виведення відповідного повідомлення у випадку відсутності розв'язку задачі.

# ДОДАТОК 1 ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 8

1 $$A=\begin{pmatrix}5&3&8&2&4&5\\2&4&7&5&4&1\\8&4&7&6&9&8\\3&5&8&1&5&9\\6&6&6&0&3&5\\0&1&2&2&4&0\end{pmatrix}$$

2 $$A=\begin{pmatrix}7&5&3&7&8&8\\4&8&5&9&6&5\\1&6&2&7&9&7\\6&9&4&7&9&6\\3&9&0&4&6&9\\1&0&5&6&2&0\end{pmatrix}$$

3 $$A=\begin{pmatrix}4&6&3&6&2&4\\7&7&5&6&6&4\\7&4&9&3&5&1\\9&9&3&4&5&0\\8&5&6&2&7&2\\6&6&3&5&5&5\end{pmatrix}$$

4 $$A=\begin{pmatrix}9&4&1&4&2&4\\6&8&1&3&0&1\\8&8&4&5&6&4\\4&3&8&4&6&7\\7&3&6&4&9&3\\8&1&8&2&5&0\end{pmatrix}$$

5 $$A=\begin{pmatrix}1&8&0&3&3&6\\4&6&5&9&5&2\\7&8&5&4&1&1\\8&9&1&3&0&8\\8&4&8&4&4&6\\2&2&1&3&3&6\end{pmatrix}$$

6 $$A=\begin{pmatrix}4&4&1&0&7&5\\2&0&0&1&6&6\\6&0&6&5&0&6\\6&3&6&0&4&7\\3&0&6&3&4&4\\5&3&6&7&3&5\end{pmatrix}$$

7 $$A=\begin{pmatrix}5&4&4&9&3&4\\5&8&9&9&6&9\\2&7&8&4&6&7\\3&0&0&4&4&2\\7&6&7&2&2&8\\6&8&9&6&3&6\end{pmatrix}$$

8 $$A=\begin{pmatrix}8&6&1&1&2&5\\5&6&9&2&6&5\\3&7&8&2&0&4\\7&9&2&1&9&2\\5&7&8&2&5&5\\6&8&8&6&4&7\end{pmatrix}$$

9 $$A=\begin{pmatrix}8&6&3&1&4&3\\5&3&1&6&8&2\\2&8&1&3&8&3\\6&5&2&8&6&5\\8&8&3&8&8&9\\4&4&5&5&8&3\end{pmatrix}$$

10 $$A=\begin{pmatrix}9&4&9&4&1&4\\2&0&7&8&2&7\\6&8&1&0&1&4\\4&6&4&3&6&9\\8&6&9&8&2&4\\7&7&9&4&3&4\end{pmatrix}$$

11 $$A=\begin{pmatrix}1&7&4&4&4&4\\9&6&5&9&9&6\\9&7&0&2&3&6\\1&6&0&8&5&5\\1&8&6&6&1&2\\7&2&3&8&7&1\end{pmatrix}$$

12 $$A=\begin{pmatrix}6&6&3&2&0&6\\1&6&9&5&1&9\\6&8&6&4&2&5\\1&0&0&7&2&9\\5&3&0&5&1&8\\6&7&0&5&3&9\end{pmatrix}$$

13 $$A=\begin{pmatrix}5&2&4&1&0&2\\9&9&2&0&8&7\\2&0&6&0&6&6\\8&2&9&2&5&2\\1&9&7&1&2&6\\0&6&7&5&8&6\end{pmatrix}$$

14 $$A=\begin{pmatrix}7&0&1&0&3&2\\5&7&9&6&6&1\\4&8&7&5&4&2\\1&2&8&3&0&3\\2&2&2&3&4&2\\3&9&4&3&1&3\end{pmatrix}$$

15 $$A=\begin{pmatrix}3&7&8&4&8&8\\6&9&1&1&7&9\\8&4&3&0&9&2\\2&9&5&4&5&7\\2&4&7&3&0&5\\7&8&5&3&5&9\end{pmatrix}$$

16
$$A=\begin{pmatrix}8&2&6&2&3&5\\7&3&0&5&4&7\\4&1&3&5&3&3\\6&1&6&4&2&5\\9&4&1&5&2&4\\6&4&6&9&3&4\end{pmatrix}$$

17
$$A=\begin{pmatrix}8&2&4&5&8&1\\7&4&4&1&6&8\\7&5&6&8&7&8\\8&6&5&9&6&4\\6&0&5&5&4&4\\2&2&4&0&3&1\end{pmatrix}$$

18
$$A=\begin{pmatrix}3&7&8&8&5&3\\5&9&0&5&2&4\\2&7&9&8&7&4\\5&7&9&4&3&5\\0&4&6&9&6&6\\5&6&2&0&0&1\end{pmatrix}$$

19
$$A=\begin{pmatrix}2&6&3&7&7&5\\4&6&5&4&4&8\\4&3&5&1&1&6\\3&4&5&7&6&9\\5&4&7&9&7&9\\3&8&5&8&3&4\end{pmatrix}$$

20
$$A=\begin{pmatrix}1&4&2&4&4&6\\1&4&0&1&7&7\\4&4&6&6&7&1\\8&4&6&7&9&9\\4&9&9&3&8&2\\8&0&5&0&3&6\end{pmatrix}$$

21
$$A=\begin{pmatrix}9&2&5&7&3&9\\1&0&0&4&2&8\\4&3&5&6&4&7\\8&6&3&4&5&6\\2&1&3&1&4&5\\8&4&1&2&2&5\end{pmatrix}$$

22
$$A=\begin{pmatrix}8&6&1&6&2&5\\5&3&1&4&1&2\\4&3&5&6&4&7\\3&0&6&2&3&6\\2&1&3&1&4&5\\5&3&8&7&4&5\end{pmatrix}$$

23
$$A=\begin{pmatrix}3&2&6&5&2&5\\8&7&8&6&7&9\\2&7&9&8&2&1\\5&2&4&1&0&3\\2&3&6&1&4&7\\8&4&3&2&5&6\end{pmatrix}$$

24
$$A=\begin{pmatrix}4&0&3&1&1&4\\8&9&5&1&4&8\\1&3&4&6&8&4\\4&4&4&6&7&5\\9&6&3&7&7&7\\2&6&3&5&6&3\end{pmatrix}$$

25
$$A=\begin{pmatrix}9&3&6&4&6&2\\6&4&5&5&5&4\\4&5&2&7&5&2\\4&9&5&5&4&5\\4&3&5&4&2&1\\6&0&5&1&3&1\end{pmatrix}$$

26
$$A=\begin{pmatrix}9&3&1&4&3&2\\7&0&3&2&3&1\\4&5&2&7&3&3\\3&6&7&5&4&2\\4&3&5&4&2&1\\6&5&4&5&5&6\end{pmatrix}$$

27
$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&5&5&4\\9&0&4&3&6&5\\2&8&0&4&7&2\\2&1&9&2&3&0\\8&7&5&6&7&6\\7&6&6&7&7&1\end{pmatrix}$$

28
$$A=\begin{pmatrix}4&9&3&4&5&4\\3&7&9&9&2&0\\8&4&7&6&6&0\\0&4&4&2&5&3\\7&2&7&8&3&0\\9&6&4&6&5&3\end{pmatrix}$$

29
$$A=\begin{pmatrix}6&0&5&1&1&8\\3&3&6&6&4&2\\0&5&0&6&7&8\\7&8&5&7&8&9\\2&3&4&4&2&2\\0&6&3&5&2&2\end{pmatrix}$$

30
$$A=\begin{pmatrix}0&4&3&6&7&4\\0&9&5&2&6&8\\4&6&1&5&8&7\\1&3&0&8&0&6\\3&8&3&2&4&3\\3&3&4&6&8&4\end{pmatrix}$$