МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра програмного забезпечення

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторної роботи №1 «Розв’язування задач лінійного програмування симплекс-методом та графічно»

з дисципліни «Дослідження операцій»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»

Укладачі:

д.т.н., проф., проф. кафедри

Любов ЖУРАВЧАК

к.ф.-м..н., старший викладач кафедри

Наталія ІВАСЬКО

Львів 2023

Тема роботи: Розв'язування задач лінійного програмування симплекс-методом та графічно

Мета роботи: Ознайомитись на практиці із основними поняттями теорії лінійного програмування (ЛП), набути навичок практичного розв'язання задач ЛП табличним симплекс-методом (СМ) та його програмною реалізацією, навчитись розв'язувати задачі ЛП із двома змінними графічним методом.

1.1. Задача лінійного програмування

Сьогодні задачі планування та управління в галузях господарства розв'язують за методами математичного програмування. Найрозвиненішими у цій галузі є методи лінійного програмування. Лінійне програмування – це галузь математичного програмування, яка вивчає підходи до побудови математичних моделей оптимізаційних задач, що характеризуються лінійною функцією мети та лінійними залежностями між змінними, та методи їх розв'язування.

Під **задачею** лінійного програмування (ЗЛП) в загальному розуміють задачу знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь.

Математичну модель загальної задачі лінійного програмування (ЛП) можна подати в такому вигляді: *знайти такі числові значення змінних* $x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0, \ldots,$ $x_n \geq 0,$ *в яких лінійна функція набуває екстремуму (максимуму або мінімуму)*

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min) \tag{1.1}$$

і які задовольняють систему лінійних обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ \ldots \ + \ a_{1n}x_n \leq (\geq) b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ \ldots \ + \ a_{2n}x_n \leq (\geq) b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ a_{m2}x_2 + \ \ldots \ + \ a_{mn}x_n \leq (\geq) b_m, \end{cases} \tag{1.2}$$

Функцію (1) називають **цільовою функцією** або **функцією мети**, вона моделює поставлену в задачі мету.

Для спрощення можна формулювати задачу лише для максимуму цільової функції. Якщо ж в конкретній задачі треба визначити мінімум функції $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$, то це те саме, що шукати максимум функції $f(x)_1 = -f(x) = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_n x_n$.

Розв'язати задачу ЛП означає знайти її оптимальний план та обчислити максимальне (мінімальне) значення цільової функції або показати, що оптимального плану не існує.

Під час розв'язання задачі ЛП можливі *три випадки*:

1. Існує оптимальний план (єдиний або нескінченна множина оптимальних планів).

2. Оптимальний план не існує, хоча плани даної задачі існують, але на непустій множині планів цільова функція не обмежена (зверху – в задачі максимізації, знизу – в задачі мінімізації).
3. Оптимального плану не існує, тому що в задачі не існує жодного плану.

Окрім цього, існує три форми задачі лінійного програмування:

1. **Загальна задача**, коли система обмежень (1.2) містить хоча б одну нерівність.
2. **Основна задача** – це випадок задачі ЛП, коли всі обмеження системи (1.2) є рівняннями.
3. **Канонічна задача** – це частковий випадок основної задачі у тому розумінні, що система рівнянь (1.2) є канонічною, а цільова функція (1.1) виражена тільки через вільні невідомі.

Система лінійних рівнянь називають **канонічною системою**, якщо вона задовольняє такі дві умови:

1. У кожному рівнянні є одна невідома змінна з коефіцієнтом, що дорівнює 1, яка відсутня у решті рівнянь. Таку невідому називають **базисною**.
2. Вільні члени усіх рівнянь системи (1.2) невід’ємні.

Невідомі змінні, що не є базисними, називають **вільними**.

Якщо в канонічній системі прирівняти до нуля всі вільні змінні, то базисні змінні дорівнюватимуть невід’ємним вільним членам рівнянь. Отриманий таким чином план називається **базисним планом** канонічної задачі.

Для того, щоб загальну задачу привести до основної, потрібно:

1) непозитивні змінні замінити на ненегативні з оберненим знаком:

$$x_j \le 0,\ x_j^c = -x_j,\ x_j^c \ge 0,$$

змінні, необмежені в знаку (з областю зміни від $-\infty$ до $+\infty$) замінити на різницю пари ненегативних додаткових змінних:

$$x_j >< 0,\ x_j = x_j^+ - x_j^-,\ x_j^+, x_j^- \ge 0;$$

2) нерівності замінити на рівняння: достатньо ввести невід’ємні *додаткові* невідомі, додавши їх до лівих частинах нерівностей “типу $\le$” або віднявши з лівих частин нерівностей “типу $\ge$” і приписавши до заданої цільової функції з нульовими коефіцієнтами.

1.2. Симплекс-метод розв’язування задачі ЛП

Відомим методом розв’язування задачі ЛП є симплекс-метод, що був опублікований Д.Б. Данцигом у 1949 р. Його ідея полягає в *спрямованому* переборі допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до іншого, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функції під час переходу змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Симплекс-метод – це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи від певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Алгоритм розв’язання задачі симплекс-методом:

1. *Зводимо задачу лінійного програмування до канонічного вигляду*. При необхідності переходу від нерівності до рівняння вводимо додаткові змінні.

Після введення додаткових змінних систему рівнянь та лінійну функцію записуємо у вигляді **розширеної системи**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ \dots \ + \ a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ \dots \ + \ a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + \ a_{m2}x_2 + \ \dots \ + \ a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max .$$

Слід мати на увазі, що всі компоненти вектора правої частини мають бути невід’ємними.

2. Знаходимо *допустимий базисний розв’язок*. Отриману розширену систему заносимо в першу симплекс-таблицю (СТ-1). Останній рядок таблиці називають **оціночним**. У ньому, окрім значення цільової функції (в першій таблиці рівного 0), вказуємо *критерії оптимальності:* для небазисних змінних коефіцієнти цільової функції з протилежним знаком $-c_j$, для базисних 0. У першому зліва стовпці таблиці записуємо основні змінні (базис) x_b, а в заголовок таблиці вносимо всі змінні; у другому стовпці – вільні члени розширеної системи b_1, b_2, …, b_m. Останній стовпець необхідний для оціночних відношень, які використовують під час розрахунку найменшого можливого значення змінної. У робочу частину таблиці (починаючи з третього стовпця) заносимо коефіцієнти a_{ij} при всіх змінних із розширеної системи.

3. Знайдений опорний план *перевіряємо на виконання критерію оптимальності* – для задачі максимізації на наявність в останньому рядку від’ємних коефіцієнтів. Якщо таких коефіцієнтів немає, то розв’язок оптимальний, досягнуто max $f = c_o$ (в лівому нижньому куті таблиці), основні змінні приймають значення, записані в другому стовпці, а змінні, що не входять в базис, рівні 0, тобто отримуємо *оптимальний базисний розв’язок*.

4. Якщо критерій оптимальності не виконується, то найбільшому за модулем від’ємному коефіцієнту $\Delta_s < 0$ в останньому рядку відповідає **провідний стовпець** s.

Обчислюємо оціночні відношення для кожного рядка за такими правилами:

1) ∞ , якщо $a_{is} \le 0$;

2) 0, якщо $b_i = 0$ і $a_{is} > 0$;

3) b_i / a_{ij}, якщо $b_i > 0$ і $a_{is} > 0$.

Визначаємо $\min\limits_i \left\{ \left| b_i / a_{is} \right| \right\}$. Якщо скінченного мінімуму немає, то задача не містить скінченного оптимуму ($f_{\max} = \infty$) . Якщо мінімум існує, то вибираємо рядок q, на якому він досягається (будь-який, якщо їх декілька), та називаємо його **провідним рядком**. На перетині провідних стовпця та рядка знаходиться **головний елемент** a_{qs} .

5. *Переходимо до нового опорного плану*. Базисний розв'язок можна знайти за правилом прямокутника.

Правило прямокутника

Заповнюємо нову симплекс таблицю за правилом:

a) у лівому стовпці записуємо новий базис: замість основної змінної x_q – змінну x_s;

b) на місці головного елемента ставимо 1, у провідному стовпчику всі елементи, окрім головного, прирівнюємо до нуля;

c) новий рядок з номером q отримуємо із старого рядка діленням на головний елемент a_{qs} ;

d) решта елементів a'_{ij} обчислюються за *правилом прямокутника* (рис. 1.1):

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}\, a_{qj}}{a_{qs}}, \qquad b'_i = b_i - \frac{a_{is}\, b_q}{a_{qs}}. \tag{1.3}$$

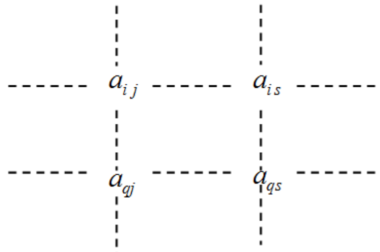

Рис. 1.1. Схема вибору елементів для методу прямокутника

Далі переходимо до п. 3 алгоритму.

Блок-схема алгоритму симплекс-методу наведена на рис. 1.2.

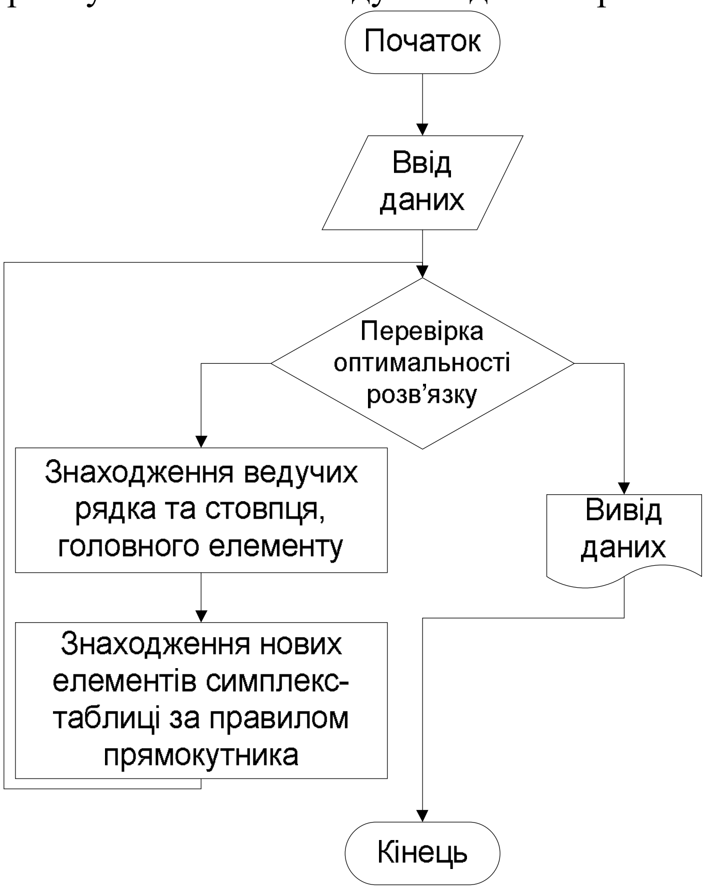

Рис. 1.2. Блок-схема симплекс-методу

1.3. Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Для виготовлення двох видів продукції підприємство використовує п’ять типів сировини. Норми витрат ресурсів сировини кожного типу на одиницю продукції, їхня наявність, а також прибуток від реалізації наведено в таблиці:

Тип ресурсу	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Наявність ресурсів
	A	**B**	
1	1	0	50
2	0	1	80
3	3	-2	90
4	4	1	240
5	-3	1	0
Прибуток	2	7	

Потрібно визначити, скільки продукції кожного виду має виготовляти підприємство, щоб максимізувати прибуток за умови, що збут продукції забезпечений.

Складемо *математичну модель* задачі. Позначимо x_1, x_2 – кількість одиниць продукції, що відповідають видам **A**, **B**, які заплановано виготовляти на підприємстві. Сумарний прибуток від реалізації продукції, який необхідно максимізувати, рівний:

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1 + 7x_2 \to max.$$

Оскільки існують обмеження на розміри витрат ресурсів та за змістом задачі змінні x_1, x_2 задовольняють умовам невід’ємності, запишемо таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 \le 50, & (1) \\ x_2 \le 80, & (2) \\ 3x_1 - 2x_2 \le 90, & (3) \\ 4x_1 + x_2 \le 240, & (4) \\ -3x_1 + x_2 \le 0, & (5) \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. & \end{cases} \qquad (1.4)$$

Після введення додаткових змінних систему рівнянь запишемо у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 50, \\ x_2 + x_4 = 80, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 90, \\ 4x_1 + x_2 + x_6 = 240, \\ -3x_1 + x_2 + x_7 = 0. \end{cases}$$

Додаткові змінні означають кількість відповідного ресурсу, що не використовується під час такого плану виготовлення продукції (залишок).

Заповнюємо першу симплекс таблицю (СТ-1), у якій змінні x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 вважаємо базисними. В останньому рядку записуємо коефіцієнти функції мети з протилежним знаком:

x_b	c_b	P_0	$c_1=2$	$c_2=7$	$c_3=0$	$c_4=0$	$c_5=0$	$c_6=0$	$c_7=0$	
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
x_3	0	50	1	0	1	0	0	0	0	-
x_4	0	80	0	1	0	1	0	0	0	80/1=80
x_5	0	90	3	-2	0	0	1	0	0	-
x_6	0	240	4	1	0	0	0	1	0	240/1=240
x_7	0	0	-3	**1**	0	0	0	0	1	0/1=0
Q	=	0	–2	–7	0	0	0	0	0	

Як видно із СТ-1, значення основних змінних x_1, x_2 дорівнюють нулю, а додаткові змінні набувають своїх значень відповідно до обмежень задачі. Ці значення змінних відповідають такому плану, за якого нічого не виготовляється, ресурси не використовуються та значення функції мети рівне нулю (тобто вартість виготовлення продукції відсутня). Такий план, звичайно, не є оптимальним.

Це видно і з 4-го рядка СТ-1, оскільки в ньому є два від’ємні числа: $-2, -7$. Від’ємні числа не тільки свідчать про можливість збільшення загальної вартості продукції, що виготовляється, але й показують, наскільки збільшиться прибуток після введення у план одиниці того чи іншого товару. Так, число –7 означає, що під час введення у план виготовлення одиниці продукції типу **B** забезпечується збільшення загальної вартості товарів, що випускаються, на 7 грошових одиниць. Якщо ввести у план виготовлення одиницю продукції **A**, то загальна вартість виготовлених товарів зросте на 2 грошові одиниці. Тому з економічного погляду найвигідніше вводити у план виготовлення продукцію типу **B**.

Це ж необхідно зробити і на підставі формальної ознаки симплекс-методу. Перевіряємо критерій оптимальності. В останньому рядку є від’ємні коефіцієнти. Вибираємо стовпець, в якому найменший від’ємний елемент (-7), отже, *другий стовпець буде провідним*.

Знаходимо відношення. Для цього ділимо елементи стовпця вільних членів на додатні елементи провідного стовпця: $80/1=80$, $240/1=240$, $0/1=0$. Вибираємо $\min\{80; 240; 0\}=0$. Отже, п’ятий рядок є *провідним*. На перетині провідних рядка та стовпця стоїть *провідний* елемент $a_{52}=1$.

Переходимо до нового базисного розв’язку. Будуємо другу симплекс-таблицю (СТ-2). Новий базисний розв’язок системи знайдемо за правилом прямокутника:

- у провідному стовпці всі елементи, окрім провідного, прирівняємо до нуля;
- п'ятий рядок отримуємо шляхом ділення його елементів на провідний елемент: $a_{52} = 1$;
- решта клітин заповнюємо за правилом прямокутника.

У крайньому лівому стовпці СТ-2 замість змінної x_7, що виводиться з базису, запишемо нову базисну змінну x_2:

x_b	c_b	P0	2	7	0	0	0	0	0	
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
x_3	0	50	1	0	1	0	0	0	0	50/1
x_4	0	80	**3**	0	0	1	0	0	-1	80/3
x_5	0	90	-3	0	0	0	1	0	2	-
x_6	0	40	7	0	0	0	0	1	-1	240/7
x_2	2	0	-3	1	0	0	0	0	1	-
Q	=	0	-23	0	0	0	0	0	7	

У СТ-2 в останньому рядку є від'ємне число, а це свідчить про те, що розв'язок не є оптимальним. Аналогічно можна побудувати третю симплекс-таблицю (СТ-3):

x_b	c_b	P0	2	7	0	0	0	0	0	
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
x_3	0	70/3	0	0	1	-1/3	0	0	1/3	70
x_1	7	80/3	1	0	0	1/3	0	0	-1/3	-
x_5	0	170	0	0	0	1	1	0	1	170
x_6	0	160/3	0	0	0	-7/3	0	1	**4/3**	40
x_2	2	80	0	1	0	1	0	0	0	-
Q	=	1840/3	0	0	0	23/3	0	0	-2/3	

І цього разу критерій оптимальності не досягнуто: маємо від'ємний елемент. Для обчислення виберемо як провідний сьомий стовпець; визначимо, що четвертий рядок є провідним, відповідно, a_{47} – *провідний елемент*.

Обчислимо нову симплекс таблицю (СТ-4):

x_b	c_b	P_0	2	7	0	0	0	0	0	
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
x_3	0	10	0	0	1	1/4	0	-1/4	0	70
x_1	7	40	1	0	0	-1/4	0	1/4	0	-
x_5	0	130	0	0	0	11/4	1	-3/4	0	170
x_7	0	40	0	0	0	-7/4	0	3/4	1	40
x_2	2	80	0	1	0	1	0	0	0	-
Q	=	640	0	0	0	13/2	0	1/2	0	

Перевіримо, чи цей розв’язок є оптимальним. Для цього розглянемо останній рядок СТ-4. У ньому нема від’ємних чисел. Це означає, що знайдений базисний розв’язок X^{*}= (40, 80, 10, 0, 130 , 0, 40) є оптимальним та max Q= 640.

Відповідно до умови задачі план випуску продукції, що охоплює виготовлення 40 товарів **А** та 80 товарів **В**, є оптимальним. За такого плану повністю використовується сировина 2-го та 4-го виду, залишається невикористаними 10 одиниць сировини 1-го виду, 130 одиниць сировини 3-го виду та 40 одиниць сировини 5-го виду, а вартість виготовленої продукції дорівнює 640 грошових одиниць.

Приклад 2. Розв’язати задачу про оптимальне використання ресурсів з прикладу 1 графічним методом.

Використаємо побудовану в попередній задачі математичну модель (1.4). Спочатку відкладемо лінії, які отримують з обмежень. Наприклад, для рівняння $3x_1 - 2x_2 = 90$, отриманого з нерівності (3), будуємо пряму, що проходить через точки (30; 0) і (0; -45). Вибираємо з утворених внаслідок побудови прямої двох півплощин ту, яка відповідає умовам задачі. У випадку, коли пряма не проходить через точку (0; 0), її зручно вибрати за контрольну. Наприклад, контрольна точка (0; 0) задовольняє умову нерівності $3x_1 - 2x_2 \le 90,$ тому обираємо півплощину, яка її містить.

Аналогічно чинимо з усіма нерівностями (1), (2), (4), (5): замінюємо їх на рівності, проводимо відповідні прямі та обираємо необхідні півплощини.

$$x_1 = 50,$$
$$x_2 = 80,$$
$$4x_1 + x_2 = 240,$$
$$-3x_1 + x_2 = 0.$$

У результаті отримаємо багатокутник допустимих розв’язків задачі – перетин усіх півплощин (рис. 13.1).

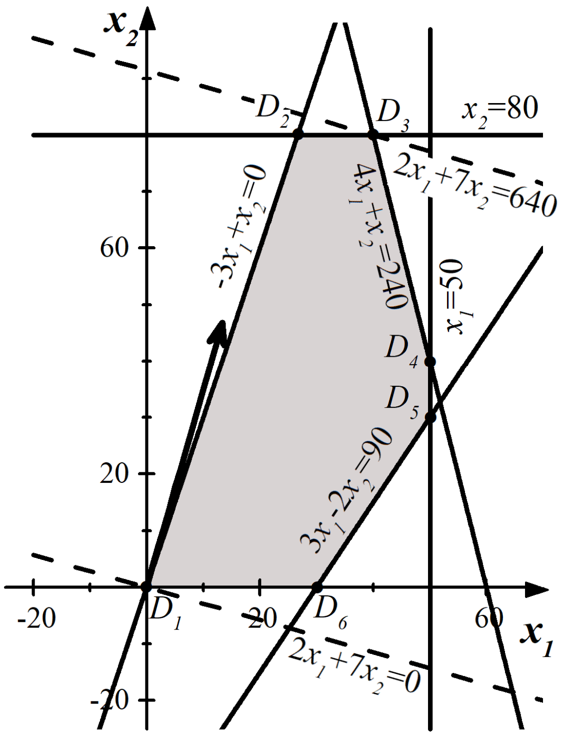

Рис. 13.1. Графічний метод розв’язання задачі ЛП

Далі будуємо пряму, що відповідає функції мети $2x_1 + 7x_2 = 0$. Переносимо її паралельно у напрямі вектора (2; 7), який отримуємо з коефіцієнтів біля змінних у цій функції. Максимальне значення функції буде в одній або двох вершинах (тоді й на відповідній межі, що їх сполучає, це означає безліч розв’язків) багатокутника, з якою (якими) перетнеться ця пряма.

Ми отримали розв’язок задачі лінійного програмування: $x_1 = 40$, $x_2 = 80$ (остання точка перетину прямої, що відповідає функції мети, з багатокутником – це точка D_3),

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1 + 7x_2 = 2\times 40 + 7\times 80 = 640.$$

Отже, функція досягає в точці $D_3(40, 80)$ максимального значення, що дорівнює 640.

Порівняємо два методи одержання розв’язків: симплексний і графічний. З СТ-2 бачимо, що після першої ітерації ми і далі перебуваємо у початковій вершині (0, 0) багатокутника, утвореного обмеженнями – базисна змінна x_2 рівна 0 і небазисна x_1 теж. Табл. СТ-3 показує, що ми перемістилися у вершину з координатами (80/3, 80). І на останній, третій, ітерації (табл. СТ-4) ми потрапили у вершину (40, 80). Як бачимо, рух у симплекс-методі дійсно відбувся по найкрутішому ребру, щоб найшвидше отримати максимальний розв’язок.

Контрольні запитання до лабораторної роботи № 1

1. Сформулюйте задачу лінійного програмування.
2. Що таке цільова функція?
3. Як задачу мінімізації звести до задачі максимізації цільової функції?
4. Який план називається опорним?
5. Що таке допустимий план?
6. Які є три форми задачі ЛП?
7. Яка система називається канонічною?
8. Яка різниця між вільними та базисними змінними?
9. Опишіть алгоритм симлекс-методу.
10. На якій ідеї ґрунтується симплекс-метод?
11. У чому суть правила прямокутників?
12. Який елемент симплекс таблиці називається головним?
13. Як обчислити оціночні відношення для симплекс-таблиці?
14. Що таке провідний рядок (стовпець) симплекс-таблиці?
15. Яка умова закінчення симплекс-методу?
16. Чим відрізняється оптимальний розв'язок задачі ЛП від допустимого?
17. Чи може функція мети задачі ЛП містити нелінійні вирази зі змінних?
18. Чи може задача ЛП мати більше, ніж один, оптимальний розв'язок?
19. Чи може в допустимий розв'язок задачі ЛП входити від'ємна компонента?
20. Опишіть графічний спосіб розв'язування задачі ЛП.

Порядок виконання лабораторної роботи № 1:

1. Розв'язати задачу ЛП симплекс-методом згідно з варіантом до завдання № 1 до лабораторної роботи № 1:
   - записати математичну модель задачі;
   - знайти оптимальний розв'язок заданої задачі симплекс-методом з використанням симплексних таблиць (СТ);
   - розробити алгоритм та написати програму, що реалізує табличний СМ;
   - провести тестування розробленої програми згідно з заданим варіантом.
2. Розв'язати задачу ЛП згідно з варіантом до завдання № 2 до лабораторної роботи № 1 графічним методом (знайти максимальне та мінімальне значення функції та значення змінних, при якому вони досягаються).

Вимоги до програми:

Програма має передбачати такі можливості:

1. Введення вхідних даних вручну:
   - задати кількість рядків та стовпців;
   - задати функцію мети;
   - задати коефіцієнти обмеження на змінні «типу ≤».
2. Перевірку на некоректне введення даних.
3. Покрокове відображення побудови симплекс таблиць.
4. Підписання таблиць.
5. Виведення відповідного повідомлення у разі відсутності оптимального розв'язку.
6. Автоматичне знаходження оптимального розв'язку для відповідного завдання:
   - зведення до канонічної форми;
   - виведення усіх СТ.

Завдання № 1 до лабораторної роботи № 1

Варіант 1.

Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси (сировину, робочу силу та устаткування), необхідні для виробництва кожного з чотирьох видів товарів. Інформація про витрати ресурсів на виготовлення одиниці окремого виду товару, прибуток від його реалізації, а також запаси ресурсів наведено в таблиці:

Вид ресурсу	Витрати ресурсів на одиницю товарів виду				Обсяг ресурсів
	1	2	3	4	
Сировина, кг	3	5	47	2	65
Робоча сила, год	20	13	18	31	400
Устаткування, станко-год	9	15	7	16	130
Прибуток за одиницю товару, грн	30	20	50	45	-

Скласти оптимальний план виготовлення товарів, який максимізує прибуток.

Варіант 2.

Меблева фабрика випускає столи, стільці, книжкові полиці й книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два різних типи дошок: фабрика має 1500 м дошок типу 1 і 1000 м дошок типу 2. Крім того, задані трудові ресурси в кількості 800 люд.-год. Нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення одного виробу й прибуток від реалізації одного виробу наведено у таблиці:

Вид ресурсу	Витрати ресурсів на одиницю товарів виду			
	Стіл	Стілець	Книжкова полиця	Книжкова шафа
Дошки типу 1, м	5	1	9	12
Дошки типу 2, м	2	3	4	1
Трудові ресурси, люд-год.	3	2	5	10
Прибуток за одиницю виробу, грн	12	5	15	10

Скласти оптимальний план випуску виробів, яка максимізує прибуток.

Варіант 3.

Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі (A, B, C) використовує три види основної сировини (цукор-пісок, патоку і фруктове пюре). Норми витрати сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі певного виду, загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, і прибуток від реалізації 1 т карамелі кожного виду наведено в таблиці:

Вид сировини	Норми витрат, т, на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини, т
	A	B	C	
Цукор-пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	-	0,1	0,1	120
Прибуток, грн	108	112	126	-

Скласти оптимальний план виробництва продукції кондитерської фабрики, який забезпечить максимальний прибуток від її реалізації. Максимально можливий випуск карамелі виду A не перевищує 120 т.

Варіант 4.

На підприємстві використовують три технологічних процеси для виробництва деякого продукту із застосуванням при цьому чотирьох видів сировини. Витрата сировини при роботі за різними технологічними процесами, ресурси сировини й ціна продукту, отриманого в результаті застосування процесу, наведено в таблиці:

Вид сировини	Витрата сировини при роботі за різними технологічними процесами			Ресурси, кг
	I	II	III	
1	5	4	6	50
2	8	3	7	50
3	3	9	4	20
4	6	5	2	60
Ціна, грн	10	15	8	-

Визначити інтенсивність використання кожного процесу з умови забезпечення максимуму товарної продукції.

Варіант 5.

Підприємство може випускати продукцію за трьома технологіями виробництва. При цьому протягом однієї години за першою технологією воно випускає 20 од. продукції, за другою – 25 од., за третьою – 30 од. продукції. Кількість виробничих факторів, які витрачаються за годину при різних способах виробництва, та наявність ресурсів цих факторів представлено в таблиці:

Фактори	Витрати виробничих факторів			Ресурси факторів
	I	II	III	
Сировина, кг	2	1	3	60

Верстатний парк, верст.-год	3	4	2	80
Робоча сила, люд.-год	7	3	4	70
Енергія, кВт-год	2	1	3	50
Транспорт, км	1	0	1	40
Інші витрати, грн	4	2	1	50

Спланувати роботу підприємства для одержання максимуму продукції.

Варіант 6.

Підприємство може працювати за п’ятьма технологічними процесами, причому кількість одиниць продукції, що випускається за різними технологічними процесами за одиницю часу (наприклад, зміну), відповідно дорівнює 300, 260, 320, 400 і 450 шт. Витрати виробничих факторів у гривнях при роботі за різними технологічними процесами протягом одиниці часу й наявні ресурси цих факторів наведено в таблиці:

Фактори	Витрати виробничих факторів					Ресурси, грн
	I	II	III	IV	V	
Сировина	12	15	10	12	11	1300
Електронергія	0,2	0,1	0,2	0,25	0,3	30
Зарплата	3	4	5	4	2	400
Накладні витрати	6	5	4	6	4	800

Скласти програму максимального випуску продукції за одиницю часу.

Варіант 7.

Підприємство випускає продукцію трьох видів (P_1, P_2, P_3). Рівень її випуску лімітується обмеженістю ресурсів (сировини, робочої сили, технологічного обладнання двох типів), які є у розпорядженні підприємства. Вихідні дані подано в таблиці:

Види ресурсів	Обсяг ресурсів	Норми витрат на одиницю продукції кожного виду		
		P_1	P_2	P_3
Сировина, кг	24	5	7	4
Робоча сила, осіб	80	10	5	20
Обладнання I типу, од.	10	5	2	1
Обладнання II типу, од.	6	2	1	1
Вартість одиниці продукції, грн	-	12	8	46

Визначити рівень випуску продукції за видами, за якого досягається максимум її загальної вартості.

Варіант 8.

Для виготовлення трьох видів виробів (A, B, C) використовується токарне, фрезерне, зварювальне й шліфувальне устаткування. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів устаткування, а також загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування і прибуток від реалізації одного виробу кожного виду наведено в таблиці:

Тип устаткування	Витрати часу на обробку одного виробу, верстато-год			Загальний фонд робочого часу, год
	A	B	C	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток, грн	10	14	12	-

Скласти оптимальну програму виробництва, при якій прибуток буде максимальним.

Варіант 9.

На кондитерській фабриці випускають цукерки чотирьох типів. Від реалізації 1 кг кожного виробу фабрика отримує прибуток відповідно 2, 1, 3, 5 ум. од. На виготовлення цукерок витрачаються ресурси трьох типів: енергія, сировина, праця. Дані про технологічний процес наведено в таблиці:

Ресурси	Витрати ресурсів на 1 кг цукерок				Запаси ресурсів, од.
	I	II	III	IV	
Сировина	2	3	1	2	30
Електроенергія	4	2	1	2	40
Праця	1	2	3	1	25

Спланувати виробництво цукерок так, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

Варіант 10.

Для виробництва продукції трьох видів (A, B, C) використовується три різних види сировини. Кожний з видів сировини може бути використаний в обсязі, не більшому, ніж 140, 250 і 240 кг відповідно. Норми витрат кожного виду сировини на одиницю продукції певного виду й ціна одиниці продукції кожного виду наведено в таблиці:

Вид сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг		
	A	B	C
1	4	2	1
2	3	1	3
3	1	2	5
Ціна од. продукції, грн	10	14	12

Скласти план, який забезпечує максимальний випуск продукції у вартісному вираженні, якщо випуск виробу А не перевищує 20 шт., а виробу В не перевищує 60 шт.

Варіант 11.

Підприємство випускає продукцію трьох видів: P_1, P_2 і P_3. Використовують три види ресурсів: обладнання, сировину та електроенергію. Норми витрат, обмеження ресурсів і прибуток від реалізації одиниці продукції наведено у таблиці:

Ресурси	Норми витрат від реалізації одиниці продукції			Обмеження ресурсів
	P_1	P_2	P_3	
Обладнання	2	3	4	30
Сировина	2	1	5	48
Електроенергія	2	1	3	20
Прибуток	30	20	40	

Досвід роботи показав, що попит на продукцію P_1 ніколи не перевищує попиту на продукцію P_2 більш, ніж на 1 од. Крім того, відомо, що попит на продукцію P_3 ніколи не перевищує 2 од. на добу. Скласти оптимальний план випуску продукції.

Варіант 12.

Підприємство випускає чотири види виробів і використовує три типи основного устаткування: токарне, фрезерне й шліфувальне. Витрати часу на виготовлення одиниці продукції на кожному з типів устаткування, загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду наведено в таблиці:

Тип устаткування	Витрати часу на обробку одного виробу виду, верстато-год				Загальний фонд робочого часу, верстато-год
	A	B	C	D	
Токарне	2	1	1	3	300
Фрезерне	1	-	2	1	70
Шліфувальне	1	2	1	-	340
Прибуток, грн	8	3	2	1	-

Скласти програму виробництва, за якої загальний прибуток від реалізації продукції буде максимальним.

Варіант 13.

На ткацькій фабриці для виготовлення трьох артикулів тканини використовуються ткацькі верстати двох типів, пряжа і барвники. Продуктивність верстатів, норми витрати пряжі і барвників, ціна 1 м тканини кожного артикула, а також загальний фонд робочого часу верстатів, кількість пряжі й барвників, які є в розпорядженні фабрики наведено у таблиці:

Ресурси	Загальна кількість ресурсів	Норми витрат на 1 м тканини артикула		
		I	II	III
Продуктивність верстатів, верстато-год/м:				
1-го типу	200	0,02	-	0,04
2-го типу	500	0,04	0,03	0,01
Пряжа, кг/м	15000	1,0	1,5	2,0
Барвники, кг/м	450	0,03	0,02	0,025
Ціна, грн/м	-	5	8	8

Скласти програму виробництва тканин, яка забезпечить їхню максимальну загальну вартість.

Варіант 14.

Підприємство для виготовлення чотирьох видів продукції використовує токарне, фрезерне, свердлильне, розточувальне і шліфувальне устаткування, а також комплектуючі вироби, збирання яких потребує виконання певних складально-налагоджувальних робіт. Норми витрат усіх видів ресурсів на виготовлення кожного виду виробу, а також наявний фонд кожного з ресурсів, прибуток від реалізації одиниці продукції певного виду наведено в таблиці:

Ресурси	Норми затрат на виготовлення одного виробу виду				Обсяг ресурсів
	I	II	III	IV	
Продуктивність верстатів, людино-год:					
токарного	50	-	62	-	6427
фрезерного	4	3	2	2	480
свердлильного	9	11	15	5	2236
розточувального	16	9	16	13	2624
шліфувального	-	16	3	5	780
Комплектуючі вироби, шт	3	4	3	3	520
Складально-налагоджувальні роботи, людино-год	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибуток, грн	315	278	573	370	-

Скласти оптимальну програму випуску продукції, яка дасть максимальний прибуток від реалізації продукції.

Варіант 15.

На фермі вирощують кіз, корів і овечок. Для забезпечення нормальних умов їх догляду використовують три види кормів. Кількість корму кожного виду, який щодня повинні одержувати тварини, наведено в таблиці. У ній також зазначено загальний обсяг корму кожного виду, який може бути використаний фермою, і прибуток від реалізації однієї літри молока.

Вид корму	Кількість корму кожного виду, який щодня повинні одержувати			Обсяг корму
	Коза	Корова	Вівця	
I	2	4	3	180
II	4	5	1	240
III	6	9	7	426
Прибуток	16	10	12	-

Визначити кількість кіз, корів та овець, необхідну для отримання максимального прибутку від реалізації молока.

Варіант 16.

Для виробництва трьох видів продукції підприємство використовує два типи технологічного устаткування і два види сировини. Норми витрат сировини й робочого часу на виготовлення одного виробу кожного виду, загальний фонд робочого часу технологічного устаткування, обсяг наявної сировини, а також ціна одного виробу певного виду наведено в таблиці:

Ресурси	Загальна кількість ресурсів	Норми витрат на один виріб		
		I	II	III
Продуктивність верстатів, нормо-год:				
1-го типу	200	2	-	4
2-го типу	500	4	3	1
Сировина, кг:				
1-го типу	1495	10	15	20
2-го типу	4500	30	20	25
Ціна, грн/шт	-	10	15	20

Скласти оптимальний план виробництва продукції, щоб загальна вартість усієї виготовленої продукції була максимальною.

Варіант 17.

Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси (сировину, робочу силу та устаткування), необхідні для виробництва кожного з чотирьох видів товарів.

Інформація про витрати ресурсів на виготовлення одиниці окремого виду товару, прибуток від його реалізації, а також запаси ресурсів наведено в таблиці:

Вид ресурсу	Витрати ресурсів на одиницю товарів виду				Обсяг ресурсів
	I	II	III	IV	
Сировина, кг	3	5	47	2	65
Робоча сила, год	20	13	18	31	400
Устаткування, станко-год	9	15	7	16	130
Прибуток за одиницю товару, грн	30	20	50	45	-

Скласти оптимальний план з виготовлення товарів, який максимізує прибуток, за таких додаткових умов: першого товару випустити не більше 5 одиниць, другого – не більше 6 одиниць, обмежень на кількість інших товарів немає.

Варіант 18.

У процесі виготовлення чотирьох видів кабелю виконується 5 технологічних операцій. Норми витрат на 1 км кабелю певного виду на кожній із операцій, прибуток від реалізації 1 км кожного виду кабелю, а також загальний фонд робочого часу, протягом якого можуть виконуватися ці операції, зазначено в таблиці:

Технологічна операція	Норми витрат часу на обробку 1 км кабелю, год				Загальний фонд робочого часу, год
	I	II	III	IV	
Волочіння	1,2	1,8	1,6	2,4	7200
Накладення ізоляції	1,0	0,4	0,8	0,7	5600
Скручування елементів у кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11176
Свинцування	3,0	-	1,8	2,4	3600
Випробування і контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4200
Прибуток, грн/км	1,2	0,8	1,0	1,3	-

Скласти план випуску кабелю для отримання максимального загального прибутку від реалізації продукції.

Варіант 19.

Для виробництва продукції трьох видів використовується три різних види сировини, кожний з яких може бути використаний в обсязі, не більшому, ніж 140, 250 і 240 кг відповідно. Норми витрат кожного виду сировини на одиницю продукції певного виду й ціна одиниці продукції кожного виду наведено в таблиці:

Вид сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг		
	I	II	III
1	4	2	1

2	3	1	3
3	1	2	5
Ціна од. продукції, грн	10	14	12

Скласти план випуску продукції, який забезпечує її максимальний випуск у вартісному вираженні.

Варіант 20.

На меблевій фабриці виготовляється п’ять видів продукції: столи, шафи, дивани, крісла й тахти. Норми витрат праці, а також деревини й тканини на виробництво одиниці продукції певного виду, прибуток від реалізації виробу та загальна кількість ресурсів певного виду, що є в розпорядженні фабрики, наведено в таблиці:

Вид ресурсу	Норми витрати ресурсів на одиницю продукції					Загальна кількість ресурсів
	Стіл	Шафа	Диван	Крісло	Тахта	
Трудові ресурси, люд-год.	4	8	12	9	10	3456
Деревина, $м^2$	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Тканина, м	-	-	6	4	5	2400
Прибуток, грн/шт.	8	10	16	14	12	-

Скласти план виробництва продукції, який максимізує прибуток.

Варіант 21.

Підприємство випускає чотири види виробів і використовує три типи основного устаткування: токарне, фрезерне й шліфувальне. Затрати часу на виготовлення одиниці продукції на кожному з типів устаткування, загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду наведено в таблиці:

Тип устаткування	Витрати часу на обробку одного виробу, верстато-год				Загальний фонд робочого часу, верстато-год
	Виріб 1	Виріб 2	Виріб 3	Виріб 4	
Токарне	2	1	1	3	300
Фрезерне	1	-	2	1	70
Шліфувальне	1	2	1	-	340
Прибуток, грн	8	3	2	1	-

Скласти програму виробництва, за якої загальний прибуток від реалізації продукції буде максимальним, якщо випуск продукції виду 3 не перевищує 10 шт., а виду 4 – 20 шт.

Варіант 22.

Для виготовлення солодощів трьох типів P_1, P_2, P_3, прибуток від реалізації яких дорівнює 25, 15 та 10 ум. од. відповідно, використовують продукцію трьох типів: K_1, K_2 та K_3, запаси яких на виробництві відповідно 50, 75 та 90 ум. од. Для виготовлення солодощів P_1 необхідно 2 ум. од. K_1, 1 ум. од. K_2 і 3 ум. од. K_3, для виготовлення солодощів P_2 – 3 ум. од. K_1, 2 ум. од. K_2 і 3 ум. од. K_3, а для виготовлення солодощів P_3 – 1 ум. од. K_1, 4 ум. од. K_2 і 2 ум. од. K_3. Скласти план випуску солодощів, який би забезпечив фірмі максимальний прибуток.

Варіант 23.

Меблева фабрика випускає столи, стільці, книжкові полиці й книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два різних типи дошок. Фабрика має в наявності 1500 м дошок типу 1 і 1000 м дошок типу 2. Крім того, задані трудові ресурси в кількості 800 люд.-год. Нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення одного виробу й прибуток від реалізації одного виробу наведено у таблиці:

Вид ресурсу	Витрати ресурсів на одиницю товарів виду			
	Стіл	Стілець	Книжкова полиця	Книжкова шафа
Дошки типу 1, м	5	1	9	12
Дошки типу 2, м	2	3	4	1
Трудові ресурси, люд-год.	3	2	5	10
Прибуток за одиницю виробу, грн	12	5	15	10

Скласти оптимальну програму випуску виробів, яка максимізує прибуток, за таких додаткових умов: столів – не більше 40, стільців – не більше 130.

Варіант 24.

Завод додатково освоїв випуск продукції чотирьох асортиментів B_1, B_2, B_3, B_4. Для її випуску потрібна сировина чотирьох видів A_1, A_2, A_3, A_4, яку завод може щомісячно виділяти в обмеженій кількості. Кількість сировини, необхідної для виготовлення продукції, прибуток від реалізації, а також лімітоване щомісячне надходження потрібної сировини подано в таблиці:

Сировина	Щомісячне надходження сировини (ум. од.)	Витрати сировини на одиницю кожного виробу			
		B_1	B_2	B_3	B_4

A_1	1260	2	4	6	8
A_2	900	2	2	0	6
A_3	530	0	1	1	2
A_4	210	1	0	1	0
Прибуток від реалізації одиниці виробу		8	10	12	18

Визначити, яку кількість кожного з видів продукції B_1, B_2, B_3, B_4 має випускати завод, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

Варіант 25.

Є три види сировини А, В і С, які використовують для виготовлення двох видів продуктів: 1 та 2. У розпорядженні є 500 одиниць сировини А, 750 одиниць сировини В і 200 одиниць сировини С. Продукт 1 складається з однієї одиниці сировини А і двох одиниць сировини В, а продукт 2 – з двох одиниць сировини А, однієї одиниці сировини В і однієї одиниці сировини С. Одиниця продукту 1 дає змогу отримати 4 одиниці нової продукції в суміжному виробництві, а одиниця продукту 2 – 5 одиниць. Визначити кількість одиниць кожного продукту, яку треба випустити для максимального забезпечення суміжного виробництва нової продукції.

Варіант 26.

Підприємство випускає продукцію трьох видів: P_1, P_2 і P_3. Використовують три види ресурсів: обладнання, сировину та електроенергію. Норми витрат, об'єм ресурсів і прибуток від реалізації одиниці продукції наведені у таблиці:

Ресурси	Норми витрат			Об'єм ресурсів
	P_1	P_2	P_3	
Обладнання	2	3	4	30
Сировина	2	1	5	48
Електроенергія	2	1	3	20
Прибуток	30	20	40	

Скласти оптимальний план випуску продукції.

Варіант 27.

Для виробництва трьох видів виробів (А, В, С) використовують три різноманітні види ресурсів. Норми витрат кожного з видів ресурсів на одиницю продукції кожного виду, запаси ресурсів і прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в таблиці:

Вид ресурсів	Запаси ресурсів	Норми витрат на 1 виріб		
		A	B	C
Праця, людино-год	180	4	2	1

Сировина, кг	210	3	1	3
Устаткування, год	244	1	2	5
Прибуток, гр.од.	-	10	14	12

Скласти план випуску продукції, за якого сумарний прибуток є максимальним.

Варіант 28.

Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі використовує три види основної сировини (цукор-пісок, патоку і фруктове пюре). Норми витрати сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі певного виду, загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, і прибуток від реалізації 1 т карамелі кожного виду наведено в таблиці:

Вид сировини	Норми витрати на 1 т карамелі, т			Загальна кількість сировини, т
	I	II	III	
Цукор-пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	-	0,1	0,1	120
Прибуток, грн	108	112	126	-

Скласти оптимальний план виробництва продукції кондитерської фабрики, який забезпечить максимальний прибуток від її реалізації.

Варіант 29.

Процес виготовлення промислових виробів чотирьох видів P_1, P_2, P_3, P_4 складається з послідовного оброблення кожного з них на трьох верстатах. Тривалість використання кожного з цих верстатів для виготовлення цих виробів обмежено 10 год на добу. Тривалість оброблення одного виробу (у хвилинах) і прибуток від продажі одного виробу кожного виду вказані в таблиці:

Верстат	Тривалість оброблення одного виробу, хв				Обмеження часу, год/добу
	P_1	P_2	P_3	P_4	
1	10	5	2	4	10
2	6	20	3	1	10
3	8	15	2	3	10
Прибуток	200	300	250	150	-

Знайти оптимальні обсяги виготовлення виробів кожного виду, які максимізують прибуток.

Варіант 30.

На звірофермі можуть вирощувати лисиць, песців і норок. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовують три види кормів. Кількість корму кожного виду, який мають щодня отримувати звірі, наведено в таблиці. У ній також зазначено загальний обсяг корму кожного виду, який може бути використаний звірофермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці, песця і норки.

Вид корму	Кількість корму кожного виду, який мають щодня отримувати			Загальний обсяг корму
	Норка	Песець	Лисиця	
1	2	3	4	180
2	4	1	6	140
3	6	7	8	510
Прибуток	16	12	10	-

Визначити, скільки лисиць, песців і норок треба вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальним.

Завдання № 2 до лабораторної роботи № 1

Варіант 1.

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4; \\ x_1 - 2x_2 \ge -4; \\ x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 2.

$$f(x_1, x_2) = 6x_1 - 5x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10; \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 3.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 6; \\ x_1 + x_2 \le 8; \\ x_1 \le 3; \\ x_2 \le 5; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 4.

$$f(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3; \\ x_1 - x_2 \le 1; \\ -x_1 + 2x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 16.

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6; \\ x_1 - x_2 \ge -2; \\ x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 17.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 16; \\ x_1 + 2x_2 \le 12; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 18.

$$f(x_1, x_2) = 7x_1 - 2x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3; \\ -3x_1 + x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \ge 1; \\ 2x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 19.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 \le 45; \\ 6x_1 + 3x_2 \le 18; \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 5.

$$f\left(x_1, x_2\right) = 4x_1 + 3x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 20; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 6.

$$f\left(x_1, x_2\right) = 5x_1 + 4x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 3; \\ x_1 + 3x_2 \le 4; \\ -x_1 + x_2 \le 5; \\ 5x_1 + 4x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 7.

$$f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + 3x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 16; \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 12; \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 8.

$$f\left(x_1, x_2\right) = 3x_1 + 3x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4; \\ 3x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 + 5x_2 \le 4; \\ x_1 \le 3; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 20.

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1 + 2x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4; \\ x_1 - 2x_2 \ge -4; \\ x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 21.

$$f\left(x_1, x_2\right) = 3x_1 + 3x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4; \\ x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6; \\ -x_1 + x_2 \le 7; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 22.

$$f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 - 4x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16; \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9; \\ x_1 + 3x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 23.

$$f\left(x_1, x_2\right) = 3x_1 + 3x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4; \\ 3x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 + 5x_2 \ge 4; \\ x_1 \le 3; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 9.

$$f(x_1,x_2) = -2x_1 - x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10; \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12; \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 10.

$$f(x_1,x_2) = -7x_1 + x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ 5x_1 + x_2 \ge 3; \\ -3x_1 + x_2 \le 3; \\ 2x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 11.

$$f(x_1,x_2) = 5x_1 - 3x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6; \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6; \\ x_1 - x_2 \le 4; \\ 4x_1 + 7x_2 \le 28; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 12.

$$f(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 18; \\ x_1 + 2x_2 \ge 14; \\ x_1 - 2x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 24.

$$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 8; \\ x_1 + 2x_2 \ge 6; \\ x_1 - x_2 \le 3; \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 25.

$$f(x_1,x_2) = 3x_1 + 3x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8; \\ 3x_1 + 7x_2 \ge 21; \\ x_1 + 2x_2 \ge 6; \\ x_1 \ge 1; \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

Варіант 26.

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \ge 1; \\ 5x_1 - x_2 \le 0; \\ -x_1 + 5x_2 \ge 0; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 27.

$$f(x_1,x_2) = 7x_1 + x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3; \\ 5x_1 + x_2 \ge 5; \\ x_1 + 5x_2 \ge 5; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 13.

$$f(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 10; \\ 3x_1 + x_2 \ge 15; \\ x_1 + x_2 \le 12; \\ x_1 \le 8; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 14.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -6; \\ x_1 + x_2 \ge 3; \\ x_1 \le 3; \\ x_2 \le 5; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 15.

$$f(x_1, x_2) = 7x_1 + 6x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10; \\ x_1 \le 6; \\ x_2 \le 5; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 28.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -6; \\ x_1 + x_2 \ge 3; \\ x_1 \le 9; \\ x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 29.

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4; \\ 3x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 + 5x_2 \ge 4; \\ x_1 \le 3; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 30.

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max(min)$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 1; \\ 3x_1 - x_2 \le 12; \\ x_1 + 2x_2 \le 14; \\ 2x_1 + x_2 \le 13; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$