МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра програмного забезпечення

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторної роботи № 3 «Розв'язування задачі цілочислового лінійного програмування (ЦЛП) за допомогою методу Гоморі. Геометрична інтерпретація розв'язку задач цілочислового програмування»

з дисципліни «Дослідження операцій»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»

Укладачі:

д.т.н., проф., проф. кафедри

Любов ЖУРАВЧАК

к.ф.-м..н., старший викладач кафедри

Наталія ІВАСЬКО

Львів 2024

Тема роботи: Розв’язування задачі цілочислового лінійного програмування (ЦЛП) за допомогою методу Гоморі. Геометрична інтерпретація розв’язку задач цілочислового програмування.

Мета роботи: Ознайомитись на практиці із основними алгоритмами розв’язування цілочислових задач математичного програмування

1. Цілочислові задачі математичного програмування

Цілочисловим (іноді його називають також дискретним) програмуванням називається розділ математичного програмування, що вивчає екстремальні задачі, в яких на шукані змінні накладається умова цілочисловості, а область допустимих розв’язків скінчена. Величезна кількість економічних завдань носить дискретний, найчастіше цілочисловий характер, що пов’язано, як правило, з фізичної неділимістю багатьох елементів обчислення: наприклад, не можна побудувати два з половиною заводи, купити півтора автомобіля і т.д.

Під задачею цілочислового лінійного програмування (ЦЛП) розуміють задачу лінійного програмування (ЛП), в якій деякі (а можливо, і усі) змінні мають набувати цілих значень. Задача ЦЛП називається повністю цілочисловою, якщо всі її змінні належать множині цілих чисел. Для змішаної задачі ЦЛП лише деякі змінні є цілочисловими, а інші можуть приймати довільні (нецілі) значення.

Цілочислові задачі математичного програмування можуть виникати різними шляхами.

1. Існують задачі лінійного програмування, які формально до цілочислових не належать, але при відповідних вихідних даних завжди володіють цілочисловим планом.

2. Поштовхом до вивчення цілочислових задач став розгляд задач лінійного програмування, в яких змінні представляли фізично неподільні величини. Наприклад, завдання про оптимізацію комплексу засобів доставлення вантажів, про знаходження мінімального пробігу автомобілів при виконанні заданого плану перевезень, про знаходження мінімальної кількості суден для реалізації цього графіка перевезень і т.п.

3. Іншим важливим поштовхом для побудови теорії цілочислового програмування став новий підхід до деяких екстремальних комбінаторних задач. У них потрібно знайти екстремум цілочислової лінійної функції, заданої на скінченній множині елементів. Такі завдання прийнято називати завданнями з альтернативними змінними. Наприклад, задача комівояжера (мандрівного торговця), задача про оптимальні призначення, задачі теорії розкладу, задачі календарного планування, завдання з додатковими логічними умовами (наприклад, типу "або – або", "якщо – то" і т. д.).

Задачу ЦЛП можна розв’язати, наприклад, як задачу ЛП без урахування умови цілочисловості змінних, а потім округлити отриманий результат. Використання такого підходу вимагає перевірки допустимості отриманого розв’язку. Таким методом часто користуються під час розв’язання практичних задач, особливо, коли значення змінних настільки великі, що можна знехтувати помилками заокруглення. Однак під час розв’язування задач, в яких цілочислові змінні набувають малих значень, заокруглення може призвести до далекого від істинного оптимуму цілочислового результату. Крім цього, під час розв'язування задач великої розмірності такий метод вимагає занадто багато машинного часу. Наприклад, нехай оптимальний розв'язок відповідної задачі ЛП має вигляд $x_1 = 2{,}4$; $x_2 = 3{,}5$. Для отримання наближеного оптимального розв'язку необхідно розглянути чотири точки (2; 3); (2; 4); (3; 3); (3; 4) і вибрати серед них допустиму точку з найкращими значеннями цільової функції. Якщо в задачі є 10 цілочислових змінних, то необхідно перевірити $2^{10} = 1024$ варіантів цілочислових розв'язків. Але навіть розгляд всіх варіантів не гарантує отримання оптимального цілочислового розв'язку задачі.

На сьогодні існує багато методів розв'язування задач ЦЛП, серед яких найбільш відомим є метод Гоморі.

2. Схема алгоритму методу Гоморі.

Крок 1. Використовуючи будь-який з варіантів СМ, знаходимо оптимальний розв'язок задачі без урахування умов цілочисловості. Якщо задача не має розв'язку – **кінець**. Якщо для отриманого розв'язку виконуються умови цілочисловості, то **кінець** – знайдений оптимальний розв'язок задачі.

Крок 2. Укладаємо додаткове обмеження для змінної, яка в поточному оптимальному розв'язку має *максимальну дробову частину* та повинна бути цілочисловою згідно з умовами задачі.

Крок 3. За допомогою двоїстого СМ знаходимо оптимальний розв'язок задачі з додатковим обмеженням.

Крок 4. Якщо для отриманого розв'язку виконуються умови цілочиселовості, то **кінець** – знайдений оптимальний розв'язок задачі. Якщо розв'язок задачі відсутній – **кінець**. В іншому випадку переходимо до кроку 2.

Метод Гоморі (метод відтинальних площин) існує у двох варіантах: перший варіант призначений для розв'язування повністю цілочислових задач (перший алгоритм Гоморі), другий варіант – для розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі). Основна відмінність між ними полягає у способі формування відтинання.

3. Алгоритм знаходження розв'язку за методом Гоморі для цілком цілочислових задач (перший алгоритм Гоморі).

1. Лінійну задачу розв'язуємо за класичним *симплекс-методом*, без урахування цілочисловості змінних x_j. У результаті отримуємо деякий оптимальний опорний розв'язок, який має такий вигляд:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{1,m}, \tag{3.1}$$

2. Якщо (3.1) містить рівняння, для яких базисні змінні $x_i = b_i$ мають дробові значення, то серед них обираємо таке рівняння, яке має *найбільшу дробову частину*. Дане рівняння перетворюємо на додаткову нерівність:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{lj} x_j \geq \beta_l, \tag{3.2}$$

де $\alpha_{lj} = \{a_{lj}\} = a_{lj} - [a_{lj}], \beta_l = \{b_l\} = b_l - [b_l],\ \alpha_{lj} \geq 0, \beta_l \geq 0$.

Для обрання чисел $[a_{lj}]$ та $[b_l]$ існують наступні правила:

1) якщо дробові числа a_{lj} або b_l є додатними числами, то $[a_{lj}]$ та $[b_l]$ є цілими додатними числами і дорівнюють цілій частині числа a_{lj} або b_l відповідно; приклад:

$$a_{lj} = 2.3, [a_{lj}] = 2,\ \alpha_{lj} = a_{lj} - [a_{lj}] = 2.3 - 2 = 0.3,$$
$$b_l = 1.25, [b_l] = 1,\ \beta_l = b_l - [b_l] = 1.25 - 1 = 0.25,$$

2) якщо дробові числа a_{lj} або b_l є від'ємними числами, то $[a_{lj}]$ та $[b_l]$ є від'ємними цілими числами, які по абсолютній величині на одиницю більші за абсолютну величину цілої частини числа a_{lj} або b_l, приклад:

$$a_{lj} = -3\frac{1}{3}, [a_{lj}] = -4,\ \alpha_{lj} = a_{lj} - [a_{lj}] = -3\frac{1}{3} - (-4) = \frac{2}{3},$$
$$b_l = -\frac{3}{5}, [b_l] = -1,\ \beta_l = b_l - [b_l] = -\frac{3}{5} - (-1) = \frac{2}{5},$$

3) якщо a_{lj} або b_l є цілими числами, то $\alpha_{lj} = 0$ або $\beta_l = 0$;

4) додаткова нерівність (3.2) повинна містити лише додатні коефіцієнти. Її множенням на -1 спочатку приводимо до вигляду, який повинна мати нерівність у симплекс-методі згідно зі стандартною формою:

$$-\sum_{j=1}^{k} \alpha_{lj} x_j \leq -\beta_l,$$

а потім за допомогою додаткової змінної x_{k+1} перетворюємо у наступне рівняння:

$$-\sum_{j=1}^{k} \alpha_{lj} x_j + x_{k+1} = -\beta_l,$$

яке додаємо до оптимального опорного розв'язку системи (3.1) і сумісно з ним створюємо псевдорозв'язок, який містить одне від'ємне значення $b_l = -\beta_l$;

5) дану задачу розв'язуємо за *двоїстим симплекс-методом*. У результаті отримуємо новий оптимальний опорний розв'язок з додатними значеннями b_l.

Якщо в ньому й далі існують змінні $x_i = b_i$, значення яких містять дробову частину, то знову додаємо одне додаткове обмеження, і процес розрахунків повторюємо до отримання цілочислових значень базисних змінних.

Ознакою *відсутності розв'язку* задачі у цілих числах є наявність у таблиці хоча б одного рядка з цілими величинами a_{ij} та вільним членом b_i, значення якого містить дробову частину.

4. Алгоритм знаходження розв'язку за методом Гоморі для частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі)

Він аналогічний цілочисловому алгоритму, тобто, так само вводимо додаткові обмеження:

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_{lj} x_j \geq \beta_l ,$$

де величини γ_{lj} визначаємо з таких співвідношень:

1) для нецілочислових значень змінних x_j:

$$\gamma_{lj} = \begin{cases} a_{lj}, \text{якщо} \quad a_{lj} \geq 0, \\ \dfrac{\beta_l}{1-\beta_l}\left|a_{lj}\right|, \text{якщо} \quad a_{lj} < 0; \end{cases}$$

2) для цілочислових змінних x_j:

$$\gamma_{lj} = \begin{cases} \alpha_{lj}, \text{якщо} \quad \alpha_{lj} \leq \beta_l , \\ \dfrac{\beta_l}{1-\beta_l}\left(1-\alpha_{lj}\right), \text{якщо} \quad \alpha_{lj} > \beta_l . \end{cases}$$

5. Приклад розв'язування задачі за алгоритмом Гоморі

<u>Приклад 5.1.</u> У цеху підприємства вирішено встановити додаткове обладнання, для розміщення якого виділено 19 м^2 площі. На придбання обладнання підприємство може витратити 16 млн. грн, при цьому воно може купити обладнання двох видів. Комплект обладнання I виду коштує 4 млн. грн, а II виду – 1 млн. грн Купівля одного комплекту обладнання I виду дає змогу збільшити випуск продукції в зміну на 8 од., а одного комплекту обладнання II виду – на 6 од. Знаючи, що для встановлення одного комплекту обладнання I виду потрібно 2 м^2 площі, а обладнання II виду – 5 м^2 площі, визначити, який набір додаткового обладнання дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

Складемо математичну модель задачі. Припустимо, що підприємство придбає x_1 комплектів I виду і x_2 комплектів обладнання II виду. Тоді змінні x_1 і x_2 мають задовольняти наступні нерівності:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 19, \\ 4x_1 + x_2 \le 16. \end{cases}$$

Якщо підприємство придбає вказану кількість обладнання, то збільшення випуску продукції буде $F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$.

Зрозуміло, що змінні x_1 і x_2 мають бути цілочисловими, тобто

$\begin{matrix} x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \in Z, \end{matrix}$ де Z – множина цілих чисел.

Зведемо задачу до канонічного вигляду

$F - 8x_1 - 6x_2 = 0,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 19, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

Ми отримали задачу *частково цілочислового* або *змішаного програмування*, оскільки на введені нами додаткові змінні не накладені ніякі обмеження. Спочатку, використовуючи симплекс-метод розв'яжемо задачу без урахування цілочисловості розв'язку (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Базис	Вільний член	Змінні				Оціночні відношення
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	19	2	5	1	0	19/2
x_4	16	4	1	0	1	4
F	0	-8	–6	0	0	
x_3	11	0	9/2	1	-1/2	22/9
x_1	4	1	1/4	0	1/4	16
F	32	0	–4	0	2	
x_2	22/9	0	1	2/9	-1/9	
x_1	61/18	1	0	-1/18	5/18	
F	376/9	0	0	8/9	14/9	

Всі критерії оптимальності (остання стрічка таблиці) невід'ємні, відповідно знайдено оптимальний розв'язок задачі $F_{\max} = 376/9 = 41\frac{7}{9}$ при плані $(\frac{61}{18};\frac{22}{9};0;0)$.

Серед змінних оптимального розв'язку є нецілі числа. Виберемо рівняння, у якого дробова частина вільного члена найбільша $\beta_2 = \left\{\frac{22}{9}\right\} = \frac{4}{9}$; $\beta_1 = \left\{\frac{61}{18}\right\} = \frac{7}{18}$. Отже, вибираємо рівняння, що відповідає змінній x_2. Воно має вигляд:

$$x_2 + \frac{2}{9}x_3 - \frac{1}{9}x_4 = \frac{22}{9}.$$

Розраховуємо відповідні значення коефіцієнтів додаткового обмеження (вони всі мають бути додатними), використовуючи другий алгоритм Гоморі. Оскільки $a_{23} = \frac{2}{9} \geq 0$ та $a_{24} = -\frac{1}{9} < 0$, то для змінних x_3 та x_4, на які *не накладено* умову цілочисловості, маємо

$$\gamma_{23} = a_{23} = \frac{2}{9},\ \gamma_{24} = \frac{\beta_2}{1-\beta_2}|a_{24}| = \frac{4}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

Оскільки $\alpha_{21} = \{0\} = 0 < \beta_2$ та $\alpha_{22} = \{1\} = 0 < \beta_2$, то для змінних x_1 та x_2, які мають бути цілочисловими, маємо

$$\gamma_{21} = \alpha_{21} = 0,\ \gamma_{22} = \alpha_{22} = 0.$$

Формуємо додаткове обмеження:

$$0x_1 + 0x_2 + \frac{2}{9}x_3 + \frac{4}{45}x_4 \geq \frac{4}{9},$$

$$0x_1 + 0x_2 + \frac{2}{9}x_3 + \frac{4}{45}x_4 - x_5 = \frac{4}{9},$$

$$-0x_1 - 0x_2 - \frac{2}{9}x_3 - \frac{4}{45}x_4 + x_5 = -\frac{4}{9},$$

$$-0x_1 - 0x_2 - 10x_3 - 4x_4 + 45x_5 = -20.$$

Це рівняння додамо до системи обмежень та розв’яжемо за **двоїстим** симплекс-методом задачу з додатковими рядком та стовпчиком для змінної x_5 (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Базис	Вільний член	Змінні				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	22/9	0	1	2/9	-1/9	0
x_1	61/18	1	0	-1/18	5/18	0
x_5	-20	0	0	-10	-4	45
F	376/9	0	0	8/9	14/9	0
				-8/9:(-10)=4/45	-14/9:(-4)=7/18	
x_2	2	0	1	0	-1/5	1
x_1	7/2	1	0	0	0.3	-1/4
x_3	2	0	0	1	2/5	-9/2
F	40	0	0	0	6/5	4

Отримали новий оптимальний розв’язок задачі $F_{\max} = 40$ при плані $(\frac{7}{2};2;2;0:0)$.

Залишилась єдина змінна, що має бути цілочисловою: $\beta_1 = \left\{\frac{7}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, їй відповідає рівняння:

$$x_1 + \frac{3}{10}x_4 - \frac{1}{4}x_5 = \frac{7}{2}.$$

Відповідно складаємо додаткове обмеження (відтинання):

$$\frac{3}{10}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \geq \frac{1}{2}$$

та рівняння: $$-\frac{3}{10}x_4 - \frac{1}{4}x_5 + x_6 = -\frac{1}{2},$$

$$-6x_4 - 5x_5 + 20x_6 = -10,$$

Нова таблиця 3.3 матиме вигляд.

Таблиця 3.3

Базис	Вільний член	Змінні					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	2	0	1	0	-1/5	1	0
x_1	7/2	1	0	0	0.3	-1/4	0
x_3	2	0	0	1	2/5	-9/2	0
x_6	-10	0	0	0	-6	-5	20
F	40	0	0	0	6/5	4	0
					-6/5:(-6)	-4:(-5)	
x_2	7/3	0	1	0	0	7/6	-2/3
x_1	3	1	0	0	0	-1/2	1
x_3	4/3	0	0	1	0	-29/6	4/3
x_4	5/3	0	0	0	1	5/6	-10/3
F	38	0	0	0	0	3	4

Новий оптимальний розв'язок задачі $F_{\max} = 38$ при плані $(3;\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3};0;0)$.

Здійснюємо почергово відтинання з метою отримання цілочислового розв'язку (табл. 3.4, 3.5):

$$x_2 + \frac{7}{6}x_5 - \frac{2}{3}x_6 = \frac{7}{3},\ \frac{7}{6}x_5 + \frac{1}{3}x_6 \geq \frac{1}{3},\ -\frac{7}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_6 + x_7 = -\frac{1}{3};$$

$$x_1 + \frac{8}{7}x_6 + \frac{3}{7}x_7 = \frac{22}{7},\ \frac{8}{7}x_6 + \frac{3}{7}x_7 \geq \frac{1}{7},\ -8x_6 - 3x_7 + 7x_8 = -1.$$

Одержимо поточні оптимальні розв'язки задачі $F_{\max} = 37\frac{1}{7}$ при плані $(\frac{22}{7};2;\frac{19}{7};\frac{10}{7};\frac{2}{7};0;0)$, $F_{\max} = 36\frac{3}{4}$ при плані $(3;\frac{17}{8};\frac{19}{8};\frac{275}{168};\frac{1}{4};\frac{1}{8};0;0)$.

Таблиця 3.4

Базис	Вільний член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	7/3	0	1	0	0	7/6	-2/3	0
x_1	3	1	0	0	0	-1/2	1	0
x_3	4/3	0	0	1	0	-29/6	4/3	0
x_4	5/3	0	0	0	1	5/6	-10/3	0
x_7	-1/3	0	0	0	0	-7/6	-1/3	1
F	36	0	0	0	0	3	4	0
						18/7	3	
x_2	2	0	1	0	0	0	-1	1
x_1	22/7	1	0	0	0	0	8/7	3/7
x_3	19/7	0	0	1	0	0	19/7	29/7
x_4	10/7	0	0	0	1	0	-5/3	5/7
x_5	2/7	0	0	0	0	1	2/7	-6/7
F	37+1/7	0	0	0	0	0	22/7	18/7

Таблиця 3.5

Базис	Вільний член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	2	0	1	0	0	0	-1	1	0
x_1	22/7	1	0	0	0	0	8/7	3/7	0
x_3	19/7	0	0	1	0	0	19/7	29/7	0
x_4	10/7	0	0	0	1	0	-5/3	5/7	0
x_5	2/7	0	0	0	0	1	2/7	-6/7	0
x_8	-1	0	0	0	0	0	-8	-3	7
F	37+1/7	0	0	0	0	0	22/7	18/7	0
							22/8	3	
x_2	17/8	0	1	0	0	0	0	11/8	-7/8
x_1	3	1	0	0	0	0	0	0	1
x_3	19/8	0	0	1	0	0	0	25/8	19/8
x_4	275/168	0	0	0	1	0	0	75/56	35/24
x_5	1/4	0	0	0	0	1	0	-27/28	1/4
x_6	1/8	0	0	0	0	0	1	3/8	-7/8
F	36+3/4	0	0	0	0	0		39/28	22/8

Останнє відтинання

$$x_2 + \frac{11}{8}x_7 - \frac{7}{8}x_8 = \frac{17}{8},\ \frac{11}{8}x_7 + \frac{1}{8}x_8 \geq \frac{1}{8},\ -11x_7 - x_8 + x_9 = -1,$$

дає оптимальний цілочисловий план $F_{\max} = 36$ при цілочислових змінних x_1=3, x_2=2.

Відповідно до знайденого розв'язку підприємству необхідно купити 3 комплекти I виду обладнання і 2 комплекти II виду, що дасть змогу максимально збільшити випуск продукції до 36 одиниць.

6. Геометрична інтерпретація розв'язків цілочислових задач лінійного програмування

Задачі цілочислового програмування, які містять дві невідомі змінні, можна розв'язати і графічним методом.

Основними кроками розв'язування задач цілочислового програмування графічним методом є:

1. За допомогою графічного методу розв'язуємо нецілочислову задачу лінійного програмування: будуємо область допустимих розв'язків задачі (опуклий багатокутник, який визначається як перетин півплощин, що відповідають нерівностям завдання) і лінію рівня цільової функції. Рухаємо лінію рівня в потрібному напрямку (вектор напряму визначається коефіцієнтами цільової функції) поки не досягнемо крайньої точки області – оптимальної точки (або множини точок). При цьому можна знайти єдиний оптимальний розв'язок (точку), безліч (відрізок) або жодного (область порожня або не обмежена у потрібному напрямку).
2. Визначаємо систему точок з цілочисловими координатами, що знаходяться всередині опуклого багатокутника допустимих розв'язків відповідної нецілочислової задачі.
3. Для знаходження цілочислового оптимального розв'язку, лінію рівня цільової функції пересуваємо у напрямку вектора нормалі до перетину з кутовою точкою утвореної цілочислової сітки. Координати цієї точки і будуть оптимальним цілочисловим розв'язком задачі.

Розглянемо детальніше графічний метод на прикладі 5.1.

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 19, \\ 4x_1 + x_2 \leq 16. \end{cases}$$

На рис. 3.1 зображено область допустимих розв'язків (чотирикутник **ABCD**) та лінію рівня цільової функції, яка досягає свого максимального значення $41{,}78$ в точці **C**.

Зауважимо, що геометрично множина допустимих розв'язків будь-якої лінійної цілочислової задачі являє собою систему точок з цілочисловими координатами, що знаходяться всередині опуклого багатокутника допустимих розв'язків відповідної нецілочислової задачі.

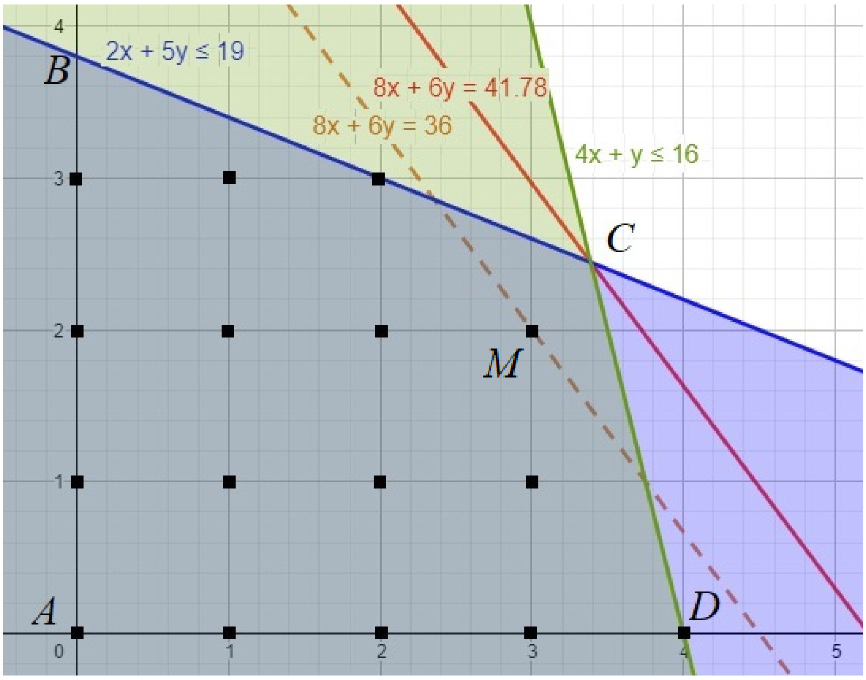

Рис. 3.1

Отже, множина допустимих планів складається з 16-ти точок (рис. 3.1), які утворені перетинами сім'ї прямих, що паралельні осям $Ox1$ та $Ox2$ і проходять через точки з цілими координатами 0, 1, 2, 3, 4. Оптимальний цілочисловий розв'язок відповідає точці **M** ($x_1 = 3, \quad x_2 = 2$), яка є кутовою точкою утвореної цілочислової сітки, яку перетинає лінія рівня цільової функції $8x_1 + 6x_2 = 36$.

Контрольні запитання до лабораторної роботи № 3

1. Що таке задача цілочислового лінійного програмування?
2. Наведіть приклади необхідності використання задач ЦЛП.
3. Які є типи задач ЦЛП?
4. Які є алгоритми розв'язування задач ЦЛП?
5. У чому полягає суть методу Гоморі?
6. Назвіть основні кроки першого алгоритму Гоморі.
7. Назвіть основні кроки другого алгоритму Гоморі.
8. У чому полягає особливість багатокутника розв'язків ЗЦП?
9. Яка геометрична інтерпретація розв'язків цілочислової задачі на площині?
10. Як розв'язати задачу цілочислового програмування графічним методом?
11. Чи можна за допомогою графічної інтерпретації отримати розв'язок задачі цілочислового програмування шляхом округлення компонентів оптимального плану ЗЛП, математична модель якої співпадає з моделлю ЗЦП, але не містить вимоги цілочисельності?

12. Як визначаються ціла і дробова частини числа?
13. У чому полягає сутність процедури формування правильного відсікання?
14. Запишіть нерівність, яка визначає правильне відсікання.
15. Охарактеризуйте головні групи методів розв'язування задач цілочислового програмування.

Завдання до лабораторної роботи № 3

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Написати програму розв'язування задачі ЦЛП методом Гоморі та знайти розв'язок (максимальне значення функції та значення цілочислових змінних, при якому воно досягається) згідно з варіантом Додатку 1 до лабораторної роботи № 3.
3. Розв'язати задачу з Додатка 1 до лабораторної роботи № 3 графічним методом (знайти максимальне значення функції та значення змінних, при якому воно досягається).
4. Оформити звіт про виконану роботу.
5. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

Вимоги до програми

Програма має передбачати такі можливості:

1. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного завдання:
   - зведення до канонічної форми;
   - виведення усіх СТ.
2. Введення вхідних даних вручну:
   - задати цільову функцію;
   - задати коефіцієнти обмеження на змінні "типу $\leq$" та "типу $\geq$".
3. Передбачити можливість некоректного введення даних.
4. Передбачити можливість покрокового відображення побудови симплекс-таблиць.
5. Підписання таблиць.
6. Виведення відповідного повідомлення у випадку відсутності оптимального цілочислового плану.

Додаток 1 до лабораторної роботи № 3

1	$f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	16	$f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 7; \\ 2x_1 - 3x_2 \le 5; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
2	$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 7; \\ -x_1 + 2x_2 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	17	$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 14; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 12; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
3	$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 21; \\ -x_1 + 3x_2 \le 8; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	18	$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 14; \\ 2x_1 + 5x_2 \le 18; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
4	$f(x_1, x_2) = 8x_1 + 2x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 30; \\ 12x_1 + 6x_2 \le 70; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	19	$f(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 50; \\ 4x_1 + 3x_2 \le 20; \\ x_2 \le 5; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
5	$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10; \\ 4x_1 + x_2 \le 20; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	20	$f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 15; \\ 3x_1 - 2x_2 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$

6	$f(x_1,\ x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 \ge -15; \\ 3x_1 - 2x_2 \le 3; \\ 2x_1 + x_2 \le 5; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	21	$f(x_1,\ x_2) = 4x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 \ge -15; \\ 3x_1 - 2x_2 \le 3; \\ 2x_1 + x_2 \le 5; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
7	$f(x_1,\ x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10; \\ x_1 + 4x_2 \le 11; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	22	$f(x_1,\ x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 11; \\ 3x_1 + 3x_2 \le 13; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
8	$f(x_1,\ x_2) = 8x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	23	$f(x_1,\ x_2) = 8x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_2 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
9	$f(x_1,\ x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 14; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 12; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	24	$f(x_1,\ x_2) = 4x_1 + 3x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 + x_2 \le 17/3; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
10	$f(x_1,\ x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 50; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34; \\ x_2 \le 8; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	25	$f(x_1,\ x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 14; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 12; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
11	$f(x_1,\ x_2) = x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 + 2x_2 \le 2; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	26	$f(x_1,\ x_2) = x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5; \\ x_1 + 2x_2 \le 5; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$

12	$f(x_1,\ x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9; \\ 3x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	27	$f(x_1,\ x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8; \\ 3x_1 + x_2 \le 11; \\ x_2 \le 5; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
13	$f(x_1,\ x_2) = 7x_1 + 3x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20; \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	28	$f(x_1,\ x_2) = 7x_1 + 3x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 25; \\ 4x_1 + 2x_2 \le 15; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
14	$f(x_1,\ x_2) = 8x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	29	$f(x_1,\ x_2) = 8x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20; \\ 5x_1 + 4x_2 \le 25; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
15	$f(x_1,\ x_2) = x_1 + 4x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	30	$f(x_1,\ x_2) = x_1 + 4x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$