Тема 1. Вступ до проблематики дослідження операцій та практичних застосувань

Предмет та задачі ДО

Дослідження операцій (ДО) – це теорія математичних моделей та методів отримання оптимальних розв’язків, скерована на обґрунтування доцільності вибору тієї чи іншої альтернативи з множини можливих в області цілеспрямованої діяльності людини. Найперші дослідження в цій галузі стосувались вибору оптимальних стратегій в іграх. У 1906 році італійський математик і соціолог, інженер за освітою Альфредо Парето видав у Мілані "Підручник політичної економії" та математичний додаток до нього, в якому виклав основні положення аналітичної теорії ігор. Сам же термін "ДО" виник у роки Другої світової війни при розробці систем виявлення та супроводу літаків суперника і наведення взаємодіючих перехоплювачів з метою забезпечення узгоджених операцій всіх учасників бойових дій у повітрі й на землі. У 1951 р. була опублікована робота Куна і Такера, у якій наведені необхідні і достатні умови оптимальності для розв’язання нелінійних задач.

Таким чином, ДО – це науковий підхід до розв’язування задач організаційного управління, що ґрунтується на побудові та дослідженні математичних моделей систем та процесів.

Характерні риси операційного підходу:

1) **системність** – будь-яка задача повинна розглядатись з різних точок зору, виходячи із загальної ефективності функціонування системи, до якої вона входить;

2) **комплексність** – операційне дослідження має здійснюватись групою, складеною з фахівців з різних галузей знань;

3) **орієнтація на прийняття рішень** – спосіб дій повинен орієнтуватись на досягнення оптимальних (або близьких до них) результатів;

4) **телеологічність** – оцінка якості отриманого розв'язку реалізується на основі кількісного критерію, що відображає ступінь досягнення мети і дозволяє обрати найкращий з множини розв'язків;

5) **комп’ютеризація** спричинена складністю задач, які необхідно розв’язати.

Основні поняття ДО:

1) **операція** – сукупність взаємно узгоджених керованих дій, об'єднаних єдиним задумом та спрямованих на досягнення певної мети;
2) **оперуюча сторона** – особа чи група осіб, об'єднаних межами операції, що активно прагнуть до досягнення поставленої мети;
3) **активні засоби проведення операції** – це сукупність ресурсів усіх видів та організаційних можливостей, які використовує оперуюча сторона для забезпечення успішного перебігу операції та її завершення;
4) **стратегії оперуючої сторони** – це припустимі способи використання нею активних засобів;
5) **діючі фактори операції** – це визначені та невизначені об'єктивні умови та обставини, що безпосередньо впливають на результат;
6) **стан операції** – це сукупність значень характеристик операції в певний момент часу;
7) **прийняття рішення** – дія, що полягає в виборі значень параметрів, які залежать від оперуючої сторони;
8) **оптимальний розв'язок** – припустимий варіант реалізації операції, який з урахуванням множини переваг є найліпшим;
9) **критерій ефективності** – міра очікуваної або досягнутої відповідності між результатом дій, які виконують, та метою операції;
10) **математична модель операції** – формальне співвідношення, яке встановлює зв'язок критерію ефективності з діючими факторами операції та визначає припустимі стратегії оперуючої сторони.

Етапи процесу ДО:

1. Визначення мети дослідження.
2. Ідентифікація та формулювання проблеми.
3. Побудова моделі операції.
4. Синтез обчислювального методу та розв'язання поставленої задачі за допомогою моделі.
5. Перевірка адекватності моделі (частково шляхом проведення експериментів на реальній системі).
6. Реалізація результатів досліджень (у вигляді детальних інструкцій з експлуатації).

Задачі ДО поділяються на **прямі і обернені**. Розв'язок **прямої задачі** ДО відповідає на запитання: "Що буде, якщо за заданих умов ми оберемо конкретний розв'язок із множини припустимих розв'язків $x \in X$?" і є математичною моделлю критерію якості залежно від керованих змінних $Q(x)$. **Обернена задача** покликана дати відповідь на питання: "Яке значення x необхідно обрати, щоб $Q(x) \Rightarrow Max$?" Зрозуміло, що пряма задача є простішою, ніж обернена, а для розв'язання оберненої задачі спочатку необхідно розв'язати пряму.

Задачі ДО класифікують за **двома основними ознаками**:

1) *змістовною постановкою*:

- розподілу ресурсів;
- транспортування продуктів (вибору маршрутів);
- планування та керування на мережах;
- формування розкладів (календарного та об'ємно-календарного планування);
- планування та розміщення;
- управління запасами, ремонту та заміни обладнання;
- масового обслуговування;
- прийняття рішень в ситуаціях з активною протидією (конфліктні ситуації).

2) *формальними моделями та методами*:

- **детерміновані** – у випадку, коли дія невизначеностей відсутня, критерій ефективності операції має вигляд $Q(a,x)$, де a – множина детермінованих параметрів, тобто заданих, відомих умов виконання операції й обмежень, накладених на розв'язок; x – множина керованих змінних, вибір значень яких залежить від операційної групи;
- **випадкові** – на результат операції впливають неконтрольовані фактори, критерій ефективності операції має вигляд $Q(a, x, y)$, де y – невідомі фактори.

Для розв'язування задач в умовах невизначеності існує ряд можливостей, які залежать від природи випадкових факторів та можливостей їх контролю. У загальному розрізняють **два основні види невизначеності**:

- *доброякісна* – коли невідомі фактори підкоряються законам теорії вірогідності і дослідникам відомі значення та вид законів розподілу цих факторів (стохастичні задачі);
- *погана* – коли фактори не підкоряються законам вірогідності або параметри законів невідомі.

Шляхи розв'язування **стохастичних задач** є такими:

- заміна випадкових факторів значеннями їх математичних сподівань та розв'язування задачі як детермінованої:

$Q(a, x, M[y]) \Rightarrow Min$, $x \in X$, де $M[y]$ – вектор математичних сподівань або середніх значень (у випадку експериментального визначення) випадкових факторів;

- пошук екстремуму математичного сподівання критерію якості:

$Q = M[Q(a, x, y)] \Rightarrow Min$, $x \in X$, де $M[Q(a, x, y)]$ – математичне сподівання критерію якості;

- введення стохастичних обмежень.

При розв'язуванні задач в умовах *поганої* невизначеності часто розглядають ситуацію з позиції "крайнього песимізму", тобто рішення приймають з розрахунку на найгірший збіг обставин, і з розв'язків, можливих за найгірших умов, обирають найкращий – використовують принцип гарантованого результату.

Багатокритеріальні задачі ДО та основні підходи до їх розв'язування

Важливий вид невизначеності – **невизначеність мети**, що виявляється у наявності декількох, переважно несумісних аспектів оцінки якості того чи іншого розв'язку з множини припустимих. У формальному вигляді аспекти оцінки якості відображають за допомогою множини критеріїв.

Загальний вигляд багатокритеріальної задачі ДО такий:

$$Q_1(a, x) \Rightarrow Max,\ Q_2(a, x) \Rightarrow Max,\ ...,\ Q_n(a, x) \Rightarrow Max,\ x \in X.$$

Знайти розв'язок, який одночасно був би найкращим за всіма критеріями, неможливо, тому що в загальному випадку покращення значення одного з критеріїв приводить до погіршення значення іншого. Множину *недомінованих розв'язків* багатокритеріальної задачі називають *множиною*

Парето-оптимальних розв’язків, і вона є в загальному випадку розв’язком цієї задачі.

Приклад 1.1. Побудувати множину Парето-оптимальних (недомінованих) розв'язків, якщо критерії задані так:

$$Q_1(x) = Q_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 \Rightarrow Max,$$

$$Q_2(x) = Q_2(x_1, x_2) = -2x_1^2 + x_2 \Rightarrow Max,$$

а координати альтернатив у просторі змінних задані таблицею:

№	1	2	3	4	5	6
x_1	1	3	0	-1	6	8
x_2	2	1	3	2	1	-2

Розв’язання.

1) Розраховуємо значення двох критеріїв для кожної з 6 альтернатив:

№	1	2	3	4	5	6
$Q_1(x)$	6	7	9	2	13	20
$Q_2(x)$	0	-17	3	0	-71	-130

2) Для побудови множини Парето-оптимальних альтернатив виключаємо послідовно з наведеної множини доміновані альтернативи. Починаємо з альтернативи 1. Вона непорівняльна з 2, а 3 домінує над нею, тому 1 виключаємо і розглядаємо 2. 3 домінує над 2, тому виключаємо 2 і переходимо до 3. 3 домінує над 4 (4 виключаємо), а з 5 та 6 непорівняльна, тому вона належить до множини Парето-оптимальних. Наступна біжуча альтернатива 5 є непорівняльна з 6. Отже, множину Парето-оптимальних складають альтернативи 3, 5 та 6.

Одним з найрозповсюдженіших способів є зведення *множини критеріїв до одного глобального та розв'язування класичної однокритерійної задачі*. Вадою такого підходу є те, що отриманий розв'язок для деяких специфічних задач може не належати до множини Парето-оптимальних.

Методи згортання критеріїв дозволяють отримати задачу вигляду:

$Q(Q_1(a,x),...,Q_n(a,x)) \Rightarrow Max$**,** $x \in X$.

Найуживанішими є:

- лінійне згортання

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (c_i \times Q_i(a,x)) \Rightarrow Max, \; x \in X, \; \sum_{i=1}^{n} c_i = 1, c_i > 0,$$

- лінійне згортання нормованих критеріїв:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (c_i \times \frac{Q_i(a,x) - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i^{\min}}) \Rightarrow Max, \; x \in X, \; \sum_{i=1}^{n} c_i = 1, c_i > 0.$$

У цих методах c_i – вагові коефіцієнти критеріїв, які повинні відображати їх важливість; $Q_i^{\max}, Q_i^{\min}$ – максимальне та мінімальне значення i-го критерію. Основною проблемою є виявлення точних значень вагових коефіцієнтів, що часто є суб'єктивним.

Приклад 1.2. Обрати з використанням лінійної згортки критеріїв з вагами 0.3 та 0.7 найкращу альтернативу, якщо критерії і координати альтернатив у просторі змінних задані так само, як у прикладі 1.2.

Розв’язання.

1) Обчислимо значення критерію-згортки для кожної з 6 альтернатив:

$$Q^{(1)} = 0.3 \times Q_1^{(1)} + 0.7 \times Q_2^{(1)} = 0.3 \times 6 + 0.7 \times 0 = 1.8,$$

№	1	2	3	4	5	6
$Q^{(i)}$	1.8	-9.8	4.8	0.6	-45.8	-85.0

2) Оберемо максимальне значення, вважаючи, що аргументом є номер альтернативи:

$$x^* = \arg \underset{x \in X}{Max}\, Q(a,x) = \arg \underset{x \in X}{Max} \{1.8, -9.8, 4.8, 0.6, -45.8, -85\} = 3,$$

отже, за критерієм-згорткою кращою є альтернатива 3.

Одним з найзрозуміліших змістовно є **метод переведення критеріїв в обмеження**. Він полягає у виділенні головного критерію $Q_1(x)$, за яким проводитимуть оптимізацію, нормативних значень Q_i^N для кожного з критеріїв, що залишилися, та розв'язуванні отриманої таким чином однокритерійної задачі оптимізації:

$$Q_1(x) \Rightarrow Max,\ Q_2(x) \geq Q_2^N,\ ...,\ Q_n(x) \geq Q_n^N,\ x \in X.$$

Основними проблемами є складність визначення головного критерію та нормативних значень для інших.

Приклад 1.3. Визначити найкращий розв'язок при оцінюванні 6 можливих розв'язків за 3 критеріями, образи яких у просторі критеріїв задані в таблиці, шляхом переведення критеріїв в обмеження, за умови пошуку максимального значення критерію $Q_1(x)$ для випадку $Q_2(x) \geq 5$, $Q_3(x) \geq 4$:

	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$
A_1	2	4	8
A_2	4	3	14
A_3	7	8	2
A_4	5	6	6
A_5	8	4	4
A_6	3	6	12

Розв’язання.

Виключимо з переліку альтернатив ті, для яких не виконуються обмеження, а серед решти визначимо найкращі:

	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$	$Q_2(x) \geq 5$	$Q_3(x) \geq 4$	два обме- ження
A_1	2	4	8	-	+	-
A_2	4	3	14	-	+	-
A_3	7	8	2	+	-	-
A_4	5	6	6	+	+	+
A_5	8	4	4	-	+	-
A_6	3	6	12	+	+	+

Одночасно два обмеження виконуються для A_4, A_6. Для цих альтернатив максимальне значення критерію $Q_1^{(4)} = 5$, тобто обираємо A_4.

Метод контрольних показників дозволяє позбутися деяких проблем, притаманних попередньому методу, але й тут залишається проблема обґрунтування значень нормативів і додається проблема знаходження розв'язку максимінної задачі. Систему нормативів задають для всіх критеріїв, а критерій якості подають так:

$$Q(x) = \underset{i}{Min} \frac{Q_i(x)}{Q_i^N} \Rightarrow \underset{x \in X}{Max}.$$

Приклад 1.4. Визначити найкращий розв'язок при оцінюванні 6 можливих розв'язків за 3 критеріями, заданими в прикладі 1.3, шляхом використання контрольних показників: $Q_1^N = 6,\ Q_2^N = 8,\ Q_3^N = 10$.

Розв'язання.

Порахуємо спочатку значення $\frac{Q_i(x)}{Q_i^N}$, далі визначимо мінімальні значення в кожному з рядків таблиці і запишемо в 4-ту колонку. Серед мінімальних значень виберемо максимальне, що відповідає альтернативі A_4:

	$\frac{Q_1(x)}{Q_1^N}$	$\frac{Q_2(x)}{Q_2^N}$	$\frac{Q_3(x)}{Q_3^N}$	$\underset{i}{Min} \frac{Q_i(x)}{Q_i^N}$	$\underset{x \in X}{Max}$
A_1	2/6	4/8	8/10	2/6=1/3	
A_2	4/6	3/8	14/10	3/8	
A_3	7/6	8/8	2/10	2/10=1/5	
A_4	5/6	6/8	6/10	6/10=3/5	+
A_5	8/6	4/8	4/10	4/10=2/5	
A_6	3/6	6/8	12/10	3/6=1/2	