Тема 2. Задача лінійного програмування та симплекс-метод її розв'язування

Постановка задачі лінійного програмування (ЛП)

Термін «лінійне програмування» з'явився вперше в 1951 є в працях американських вчених Дж. Данціга та Т. Купманса. Задачі ЛП входять як важлива складова до ширшого класу задач математичного програмування (МП):

Задачі математичного програмування

(неперервно-дискретні нелінійні задачі) – NP-повні

Задачі опуклого програмування

Задачі лінійного програмування

(P-повні) **Задачі про потоки в мережах** **Задачі цілочисельного програмування**

У загальному випадку задача **математичного програмування** формулюється так:

$$f(x) \Rightarrow Max(Min), \quad g(x)(\leq,=,\geq)0,$$

де $x=(x_1,...,x_n), \quad g(x)=(g_1(x),...,g_m(x))$, тобто у них або функція мети, або обмеження, або те й інше нелінійні.

Більшості економічних процесів відповідають задачі нелінійного програмування, а їх апроксимація лінійними задачами викликана тим, що останні добре вивчені і для них існують ефективні алгоритми розв'язання. Навіть найпростіша транспортна задача стає нелінійною, якщо вартість перевезення одиниці вантажу залежить від його загальної кількості.

Задачі про потоки в мережах є підкласом задач ЛП та одночасно підкласом задач **дискретної оптимізації**, тому вони посідають особливе місце серед задач математичного програмування – для них доведено факт можливості побудови ефективних алгоритмів пошуку оптимальних розв'язків з поліноміальною складністю, і такі алгоритми побудовано.

Більшість дискретних та комбінаторних задач МП можуть бути в принципі розв'язані за допомогою повного перебору варіантів. Однак число кроків методу перебору зростає експоненційно залежно від розміру задачі. Аналогом *алгоритмічної нерозв'язності* в скінченній області є перебір експоненційного числа варіантів, а аналогом *алгоритмічної розв'язності* – існування суттєво більш економічного алгоритму, ніж перебір. Ефективним алгоритмом розв’язування задачі перебірного типу вважають такий, час роботи якого обмежений поліномом від розміру задачі.

У **загальному вигляді** задача ЛП формулюється так:

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow Max\ (Min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\le, =, \ge) b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j (\le, ><, \ge) 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Отже, і критерій якості, і обмеження є лінійними функціями від змінних, звідки й походить назва "задача ЛП".

Задача ЛП в **канонічній формі** є такою:

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow Max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

У векторній формі запису обмеження задачі ЛП у вигляді нерівностей можна записати так:

$$\mathbf{P}_1 x_1 + \mathbf{P}_2 x_2 + ... + \mathbf{P}_n x_n \le \mathbf{b} = \mathbf{P}_0,$$

де $\mathbf{P}_0 = (b_1,...,b_m)^T$, $\mathbf{P}_j = (a_{1j},...,a_{mj})^T$.

Розглянемо припустиму множину **R** у просторі даних векторів. Оскільки $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, то усі позитивні комбінації векторів P_1, P_2,…, P_n утворюють конус. Тому питання про існування припустимого розв’язку рівнозначне питанню про належність вектора **b** до цього конуса. Оскільки P_1, P_2,…, P_n є m-мірними векторами ($n>m$), то серед них завжди знайдеться m лінійно незалежних векторів, що утворюють базу m-вимірного простору і містять конус, утворений векторами P_1, P_2,…, P_n.

Тому справедливе наступне **твердження**. Якщо задача ЛП містить n змінних і m обмежень ($n>m$), записаних у формі нерівностей, не враховуючи обмеження невід’ємності $x_j \ge 0$, то в оптимальний розв’язок входить не більше, ніж m ненульових компонент вектора **x**.

На перший погляд, задача ЛП в загальній формі, в якій припускають обмеження будь-якого вигляду, видається загальнішою, ніж задача в канонічній формі. Однак ці обидві постановки є еквівалентними.

Задачу ЛП у загальній формі завжди можна перетворити в задачу в канонічній формі за допомогою таких підстановок:

$$Q(x) \Rightarrow Min, \quad -Q(x) \Rightarrow Max,, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i, \ s_i \ge 0, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \ s_i \ge 0, \tag{2.3}$$

$$x_j \le 0, \ x_j^c = -x_j, \ x_j^c \ge 0, \tag{2.4}$$

$$x_j >< 0, \ x_j = x_j^+ - x_j^-, \ x_j^+, x_j^- \ge 0. \tag{2.5}$$

Мінімізацію функції замінюємо її максимізацією зі знаком "-" (2.1), що відповідає симетричному відбиттю її відносно осей ординат, нерівності ">" (2.3) чи "<" (2.2) приводимо до рівностей шляхом введення додаткових ненегативних змінних, непозитивні змінні замінюємо ненегативними (2.4) з оберненим знаком, а змінну, необмежену в знаку (з областю зміни від $-\infty$ до $+\infty$) замінюємо різницею пари ненегативних додаткових змінних (2.5).

Приклад 2.1. Привести до канонічного вигляду таку задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \quad \Rightarrow Min,\\
&2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \quad = 15,\\
&-x_1 + 5x_2 + 2x_3 \quad \le 21,\\
&5x_1 - 3x_2 - 4x_3 \quad \ge 17,\\
&x_1 \ge 0, \ x_2 >< 0, \ x_3 \le 0.
\end{aligned}$$

Розв’язання.

Здійснимо підстановки: $y_1 = x_1, y_2 - y_3 = x_2, -y_4 = x_3$, додамо додаткову змінну y_5 до другого обмеження та віднімемо додаткову змінну y_6 від третього обмеження, поміняємо знак критерію якості і отримаємо задачу в канонічній формі:

$$\begin{aligned}
&-3y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 5x_4 \quad \Rightarrow Max,\\
&2y_1 - 4y_2 + 4y_3 - 3y_4 \quad = 15,
\end{aligned}$$

$$-y_1+5y_2-5y_3-2y_4+y_5 \quad =21,$$
$$5y_1-3y_2+3y_3+4y_4 \qquad -y_6=17,\ \forall j=\overline{1,6}: y_j\ge 0.$$

Побудова моделей задач ЛП

Методи ЛП використовують в економічних, організаційних, військових та ін. системах для вирішення **розподільчих задач**. Ці задачі виникають, коли наявних ресурсів не вистачає для виконання кожної з передбачених робіт ефективним чином і необхідно якнайкраще розподілити ресурси за роботами відповідно до обраного критерію оптимальності.

При описанні реальної ситуації за допомогою лінійної моделі слід перевірити наявність у ній таких властивостей, як пропорційність і адитивність. **Пропорційність** означає, що внесок кожної змінної в критерій якості і загальний об'єм споживання відповідних ресурсів повинен бути *прямо пропорційний* значенню цієї змінної. **Адитивність** означає, що критерій якості і обмеження мають бути сумою внесків різних змінних.

Приклад 2.2. Оптимальне розподілення взаємозамінних ресурсів.

Наявно m видів взаємозамінних ресурсів b_1, $b_2,\ldots$, b_m, які використовують при випуску n різних виробів. Задана матриця $A=[a_{ij}]$, де a_{ij} характеризує норми витрат i-го ресурсу на одиницю j-го виробу ($j=1,\ldots,n$). Ефективність випуску одиниці j-го виробу характеризується показником c_j, що задовольняє умову лінійності. Необхідно визначити план випуску виробів (оптимальний асортимент), за яким сумарна ефективність набуває найбільшого значення.

Розв'язання. Кількість одиниць j-го виробу, що випускається підприємством, позначимо x_j. Математична модель задачі буде наступною:

$$Q(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow Max,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,\ i=\overline{1,m},$$
$$\forall(i=\overline{1,m}): x_i \ge 0.$$

Обмеження означає, що всі ресурси повинні бути використані повністю.

Геометричне подання задач ЛП

Задачі ЛП з двома змінними можуть бути розв'язані графічно на площині.

Приклад 2.3. Знайти розв'язок задачі:

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \Rightarrow Max,$$

$$x_1 \le 400,\ x_2 \le 300,\ x_1 + x_2 \le 500,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Кожна з цих нерівностей-обмежень визначає півплощину, перетин яких дає опуклий многокутник, який і є припустимою множиною **R** розв'язків задачі ЛП. Тепер розглянемо функцію мети. Функція мети зображується у вигляді лінії рівня, а дві лінії рівня дозволяють визначити напрямок зростання (спадання) значень функції мети. Побудуємо лінії рівня мети. Нехай $Q(x_1, x_2) = 1000 = Q_1$. Графік рівняння $2x_1 + 5x_2 = 1000$ є прямою, що перетинає осі x_1, x_2 в точках 500 і 200 відповідно. При $Q(x_1, x_2) = 1500 = Q_2$ отримаємо пряму, яка перетинає осі x_1, x_2 в точках 750 і 300, тобто ця лінія паралельна до лінії Q_1, але розташована вище за неї. Рухаючи її вгору (у напрямку зростання мети), паралельно до самої себе , приходимо до такого положення Q_{max}, коли лінія рівня і множина **R** матимуть лише одну спільну точку A. Очевидно, що ця точка A(200, 300) – оптимальний розв'язок, бо вона лежить на прямій з максимально можливим значенням Q_{max}. (рис. 2.1). Зазначимо, що ця точка виявилась крайньою точкою множини **R**.

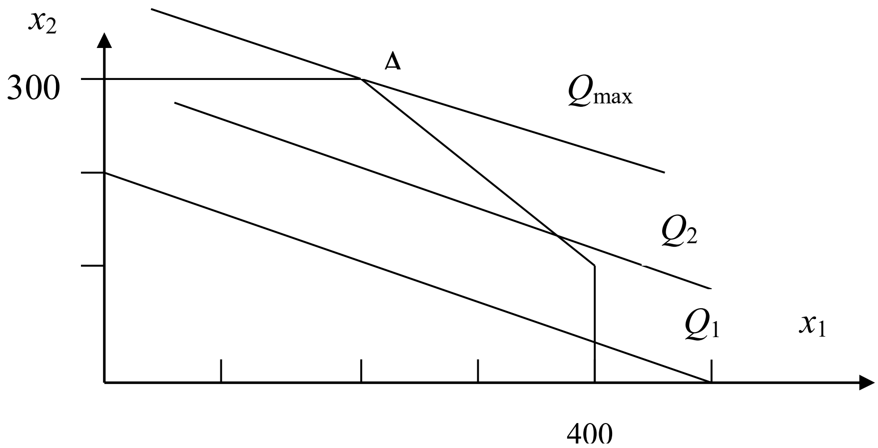


Рис. 2.1. Графічне розв'язування задачі ЛП.

Розв'язування задачі ЛП симплекс-методом (СМ). Дві основні теореми

Для розв'язування задачі ЛП за допомогою симплекс-методу насамперед її слід подати у канонічній формі, а це можна зробити завжди. Тому надалі при розгляді СМ ми вважатимемо, що задача ЛП представлена в канонічній формі. Матричний запис задачі такий:

$$\mathbf{c}^T \times \mathbf{x} \Rightarrow Max, \mathbf{A} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0, \mathbf{b} \ge 0,$$

де $\mathbf{x}$ – вектор-стовпчик змінних задачі ЛП, $\mathbf{c}$ – вектор-стовпчик значень коефіцієнтів критерію якості (функції мети задачі), $\mathbf{A}$ – матриця значень коефіцієнтів обмежень, $\mathbf{b}$ – вектор-стовпчик значень правих частин системи обмежень, ненегативність елементів якого досягається помноженням лівої і правої частини відповідного обмеження при потребі на (-1), верхній індекс «Т» означає операцію транспонування.

Головна особливість задачі ЛП, на основі якої побудований метод її розв'язування, це те, що повний простір припустимих розв'язків такої задачі визначається за допомогою скінченної множини точок – базових припустимих розв'язків. СМ ґрунтується на двох основних теоремах ЛП.

Перша теорема дозволяє обмежитись при пошуку оптимального розв'язку лише вершинами *симплексу* (многогранника обмежень), тобто пошук на безмежній множині розв'язків замінюється пошуком на скінченній (хоча й дуже великій) множині вершин многогранника обмежень.

Теорема 1. Якщо задача ЛП має оптимальний розв'язок, то максимальне значення функція мети набуває в одній з вершин (кутових точок) многогранника, що утворений обмеженнями. Якщо функція мети отримує це значення більш, ніж в одній кутовій точці, то вона має таке ж значення в довільній їх лінійній комбінації.

Таким чином, координати вершин многогранника припустимої області дають достатній об'єм інформації для знаходження оптимального розв'язку.

Друга теорема надає механізм для обчислення координат вершин многогранника обмежень, маючи ці значення обчислюємо значення функції мети (критерію якості) і з'являється можливість порівняти ці розв'язки за якістю і обрати кращий. Базовий розв'язок системи $\mathbf{A} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ визначається базою: m незалежними векторами P_j . У довільній екстремальній точці змінна

x_j, якій відповідає P_j, що не входить до бази, має нульове значення. Таким чином загальна кількість базових розв'язків становить: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Теорема 2. Базові розв'язки системи $\mathbf{A} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ повністю визначають всі її кутові точки.

Координати цих точок можна розрахувати, відсіюючи всі неприпустимі точки та залишаючи ту, для якої значення функції мети максимальне. Але такий шлях є найменш ефективним, оскільки ґрунтується на ідеї повного перебору. СМ ґрунтується на ідеї послідовного просування від однієї вершини многогранника обмежень до сусідньої (по найкрутішому ребрі), в якій значення функції мети є кращим (або принаймні не гіршим), ніж у попередній. Це дозволяє досягнути значно швидше результатів, ніж повний перебір.

Для того, щоб мати можливість застосувати СМ та знайти оптимальний розв'язок задачі ЛП, потрібно задачу в канонічній формі привести до вигляду *з початковим базовим розв'язком*, щоб матриця коефіцієнтів обмежень $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$ мала m одиничних стовпчиків. Таке перетворення може бути здійснене або безпосередньо *шляхом введення додаткових змінних* (для незначної кількості задач), або застосовуючи *двохетапний метод чи метод великих штрафів* (для довільної задачі в канонічній формі).

Табличний алгоритм симплекс-методу

Вважаємо, що початковий базовий розв'язок, який містить m одиничних векторів, вже знайдено.

Крок 1. Побудова початкової симплекс-таблиці (СТ).

Розраховуємо значення:

$$Q = \sum_{i \in I_B} c_i b_i,\ z_j = \sum_{i \in I_B} c_i a_{ij},\ \Delta_j = z_j - c_j, \tag{3.1}$$

де Δ_j – критерії оптимальності знайденого розв'язку, Q – біжуче значення функції мети для знайденого базового розв'язку, I_B – множина базових змінних.

Крок 2. Перевірка на оптимальність:

а) $\forall j : \Delta_j \geq 0$ – розв'язок оптимальний. Кінець.

б) $\exists \Delta_j < 0 : \forall a_{ij} \le 0$ – функція мети необмежено зростає. Кінець. Задача некоректно сформульована.

с) $(\forall j \in I_N) \wedge (\Delta_j < 0) : \exists a_{ij} > 0$ – існують можливості покращення значення функції мети, перехід до наступного кроку, I_N – множина небазових змінних.

Крок 3. Пошук наступної вершини многогранника, до якої необхідно перейти: визначення змінної, що вводиться до бази (провідного стовпчика), та змінної, що виводиться з бази (провідного рядка).

Індекс змінної, що вводиться до бази визначаємо так (провідний стовпець):

$$j^* = \arg \max_{j \in I_N \wedge \Delta_j < 0} |\Delta_j|,$$

тобто обираємо стовпець з максимальним за абсолютною величиною значенням критерію досягнення оптимального розв'язку серед усіх від'ємних значень.

Індекс змінної, що виводиться з бази (провідний рядок):

$$i^* = \arg \min_{i \in I_B \wedge a_{ij^*} > 0} \left(\frac{b_i}{a_{ij^*}}\right),$$

тобто обираємо змінну x_{i^*}, для якої досягається мінімальне значення частки від ділення $\frac{b_i}{a_{ij^*}}$, серед усіх додатних значень a_{ij^*}.

Провідним елементом є елемент $a_{i^* j^*}$, що знаходиться на перетині провідних стовпця і рядка.

Крок 4. Перехід до нової вершини із застосуванням методу Жордана-Гауса. Перехід до нової СТ.

Заповнюємо СТ в такій послідовності: стовпчик базових змінних та відповідні значення c_b; стовпчики значень базових змінних (одиничні вектори), відповідні значення $\Delta_i = 0, i \in I_B$; рядок, що відповідає провідному рядку в попередній СТ:

$$a'_{i^* j} = a_{i^* j} / a_{i^* j^*},\ b'_{i^*} = b_{i^*} / a_{i^* j^*};$$

значення інших елементів СТ ($i \ne i^*$) обчислюємо за формулами:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ij^*} \times a'_{i^* j},\ b'_i = b_i - a_{ij^*} \times b'_{i^*},$$

далі знаходимо Q та Δ_j за формулами (3.1). Перехід до кроку 2.

Правило трикутника

Обчислення значень елементів нової СТ зручно здійснювати за допомогою **«правила трикутника»**: $a' = a - b \times c$, де *a, b, c* – вершини трикутника, причому *a* – значення обчислювального елемента в попередній СТ; *b* – значення елемента у провідному стовпчику попередньої СТ, у який впирається горизонтальна стрілка від перераховуваного елемента в старій СТ; *c* – значення в перерахованому рядку нової СТ, що відповідає провідному рядку старої таблиці; a' відповідає *a* в попередній таблиці: $a' = a - b \times c$.

Якщо задача має вироджені опорні плани (базові розв'язки), то на одній з ітерацій одна або декілька змінних базового розв'язку рівні 0, що може приводити до зациклення.

Наочно порядок обчислень проілюструємо на рис. 3.1.

x_b	c_b	$\mathbf{P}_0$	c_1	…	c_m	…	c_{j^*}	…	c_n
			P_1	…	P_m	…	P_{j^*}	…	P_n
x_1	0	b_1	1	…	0	…	a_{1j^*}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{i^*}	0	b_{i^*}	0	…	0	…	$a_{i^*j^*}$	…	a_{i^*n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	0	b_m	0	…	1	…	a_{mj^*}	…	a_{mn}
Q	=	Q_0	0	…	0	…	Δ_{j^*}	…	Δ_n
x_1	0	b'_1	1	…	0	…	0	…	a'_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$x_j{}^*$	c_j	$b_{i^*} / a_{i^* j^*}$	0	…	0	…	1	…	$a_{i^* n} / a_{i^* j^*}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	0	b'_m	0	…	1	…	0	…	a'_{mn}
Q	=	Q_0	0	…	0	…	0	…	Δ'_n

Рис. 3.1. Порядок обчислень при застосуванні СМ.

Приклад 3.1. Розв'язати за допомогою СМ таку задачу ЛП:

$Q(x) = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow Max$,

$x_1 + 2x_2 \le 6$,

$2x_1 + x_2 \le 8$,

$-x_1 + x_2 \le 1,$

$x_2 \le 2,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Розв'язання.

Оскільки всі нерівності мають вигляд "менше або рівне" і значення правих частин обмежень є невід'ємними, то при приведенні до канонічного вигляду отримаємо відразу ж і *початковий базовий розв'язок*. Система обмежень у векторній формі має вигляд:

$$\mathbf{P}_1 x_1 + \mathbf{P}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{P}_n x_n = \mathbf{P}_0,\ \mathbf{P}_0 \ge 0,\ \ \forall x_j \ge 0.$$

Приводимо задачу до канонічного вигляду:

$Q(x) = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \Rightarrow Max,$

$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 6,$

$2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 8,$

$-1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 1,$

$0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 2, \quad \forall x_j \ge 0.$

Як бачимо, початкову базу складають вектори P_3, P_4, P_5, P_6, а небазовими змінними є x_1, x_2; поклавши їх рівними 0, з системи рівнянь (обмежень) маємо: $x_3=6$, $x_4=8$, $x_5=1$, $x_6=2$.

Будуємо першу СТ:

x_b	c_b	P_0	$c_1=3$	$c_2=2$	$c_3=0$	$c_4=0$	$c_5=0$	$c_6=0$	
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
x_3	0	6	1	2	1	0	0	0	6/1
x_4	0	8	2	1	0	1	0	0	8/2=4,4<6
x_5	0	1	-1	1	0	0	1	0	$a_{ij*} \le 0$
x_6	0	2	0	1	0	0	0	1	$a_{ij*} \le 0$
Q	=	0	-3	-2	0	0	0	0	$\max\ \lvert\Delta_j\rvert = 3$ $\Delta_j < 0$

Отриманий базовий розв'язок не є оптимальним, бо два значення Δ_j є від'ємними. Обираємо провідний рядок і стовпчик – виводимо з числа базових змінну x_4, а вводимо x_1. Здійснивши цю дію з використанням перетворення Гауса-Жордана (за правилом трикутника), ми перейдемо до сусідньої вершини симплекса, в якій значення функції мети краще, ніж для першого базового розв'язку, і таким чином отримаємо наступну другу СТ:

x_3	0	2	0	3/2	1	-1/2	0	0	
x_1	3	4	1	1/2	0	1/2	0	0	a'_{i*j}
x_5	0	5	0	3/2	0	1/2	1	0	
x_6	0	2	0	1	0	0	0	1	
Q	=	2	0	-1/2	0	3/2	0	0	

Отриманий базовий розв’язок (значення базових змінних зафіксовані в стовпчику P_0, а небазових рівні 0) є кращим, ніж попередній (значення критерію якості збільшилося з 0 до 12), однак не оптимальний (є від’ємне значення $\Delta_2 = -1/2$). Обираємо провідні стовпчик і рядок та переходимо до третьої таблиці:

x_b	c_b	P_0	3	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
x_2	2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0
x_1	3	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0
x_5	0	3	0	0	-1	1	1	0
x_6	0	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1
Q	=	38/3	0	0	1/3	4/3	0	0

Оскільки в ній усі значення Δ_j є невід'ємними, то ми отримали оптимальний розв'язок: x=(10/3; 4/3; 0; 0; 3; 2/3) і оптимальне значення критерію Q=38/3.

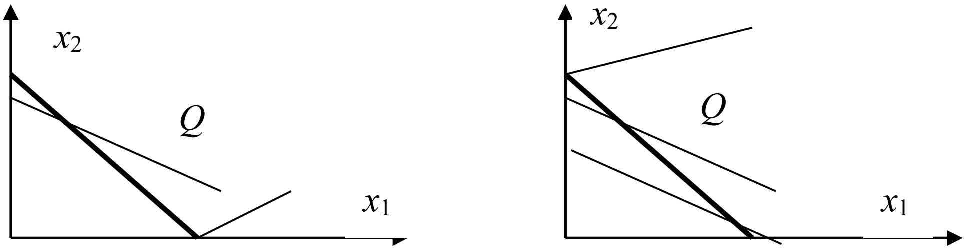
Особливі випадки СМ-у та їх відображення у симплекс-таблицях

Під час розв’язування задач ЛП можливе виникнення особливих випадків, а саме: відсутність припустимих розв'язків, необмеженість критерію якості, зациклення, які зазвичай виникають внаслідок недостатньо коректної формалізації реальної задачі, та які потрібно вміти вчасно виявляти.

Вони поділяються на такі:

1) **Виродженість** – наявність надлишкових обмежень:

якщо така ситуація виникає в оптимальній вершині, то такі обмеження несуттєві (рис. 1б); якщо в неоптимальній, то в СТ відсутній однозначний вибір (існує щонайменше два однакових значення Δ і хоча б одна з базових змінних рівна 0) (рис. 1а). Не існує способу виявлення надлишкових обмежень безпосередньо з СТ. У цьому випадку може виникнути зациклення програми.



а) вироджений неоптимальний розв’язок; б) надлишкове обмеження
Рис. 3.1. Графічне зображення вродженості

2) **Безмежна множина оптимальних розв’язків**: якщо небазова змінна x_j зі значенням c_j=0 включається в базу, то її включення не змінює значення функції мети, але дозволяє отримати наступну кутову точку.

3) **Необмежені розв’язки:** якщо знайдеться $\Delta_j < 0$, для якого всі значення $a_{ij} \le 0$ у відповідному j-му стовпці СТ, то максимальне (мінімальне) значення функції мети буде необмеженим.

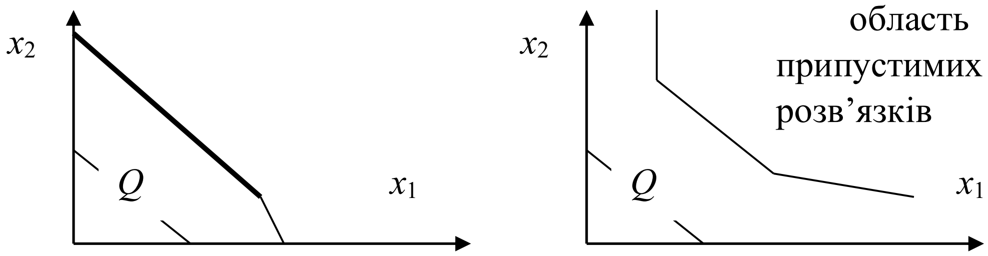
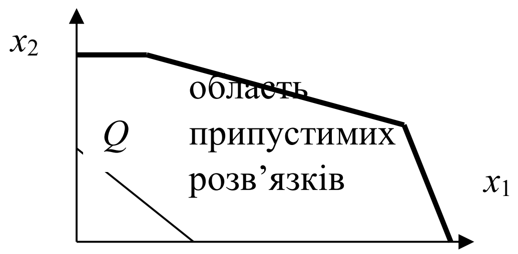


Рис. 3.2. Безмежна множина оптимальних розв’язків та необмежені розв’язки

4) **Необмежена область розв’язків:** в СТ $a_{ij} \le 0$, але відповідне значення $\Delta_j \ge 0$.

5) **Відсутність припустимих розв’язків:** хоча б одна штучна змінна в оптимальному розв'язку задачі після першого етапу двохетапного методу не рівна 0.



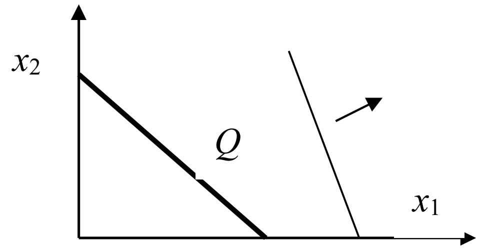


Рис. 3.3. Необмежена область розв'язків та відсутність припустимих

Методи знаходження початкового базового розв'язку: метод великих штрафів та двохетапний метод

Ці методи використовують, коли початкового базового розв'язку (ПБР) з умови задачі безпосередньо отримати не можна. Тоді вводимо штучні змінні у такій кількості, щоб отримати ПБР. Це приводить до необхідності введення додаткових обмежень: в ПБР допускається від'ємність штучних змінних, тоді як в оптимальному їх не повинно бути, бо це порушуватиме деякі з обмежень первісної задачі. Існує два шляхи позбавлення від штучних змінних в остаточному оптимальному розв'язкові:

1) вводимо штрафи за відхилення значень штучних змінних від нуля та включаємо відповідні складові до функції мети (метод великих штрафів);
2) розв'язуємо на першому етапі допоміжну задачу зі штучними змінними, що дозволяє отримати початковий базовий розв'язок вже без них і далі використовуємо класичний СМ (двохетапний метод).

У **методі великих штрафів** критерій якості модифікується і має вигляд:

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{k=1}^{p} MR_k \Rightarrow Max, M >> 0, R_k \geq 0\,,$$

де p – кількість штучних змінних, що є мінімально необхідною для побудови початкового розв'язку, M – значення штрафів, R – штучні змінні. Таким чином, навіть невеликі відхилення штучних змінних від нуля приводитимуть до значного зменшення значення критерію якості, яке потрібно максимізувати, а тому при достатньо великих значеннях M значення штучних змінних мали б бути в оптимальному розв'язку нульовими, тобто вони виводитимуться з бази.

Цей метод приводить до необхідності визначення коректних значень штрафів. Якщо значення штрафів завеликі, то похибки заокруглення можуть суттєво вплинути на результат (комп'ютер оперує зі скінченними значеннями), і знайдений розв’язок буде неоптимальним внаслідок того, що первісні коефіцієнти функції мети будуть приблизно нульовими порівняно зі значеннями штрафів. Якщо ж значення штрафів невеликі, то штучні змінні в оптимальному розв'язку будуть ненульовими, тобто знайдений розв'язок буде неприпустимим.

Цих недоліків позбавлений **двохетапний метод**, в якому на першому етапі розв’язуємо задачу із введеними штучними змінними (тобто з тими ж модифікованими обмеженнями), але з функцією мети

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{p} R_k \Rightarrow Min\,.$$

Якщо у результаті отримуємо розв’язок, у якому всі значення штучних змінних нульові, то первісна задача має припустимі розв’язки, в іншому випадку задача не має розв’язків. Якщо всі штучні змінні виведемо з числа базових, то переходимо до другого етапу, на якому оптимальний розв'язок першого етапу використовуємо як початковий базовий, при цьому повертаємось до первісного критерію функції мети.

Приклад 4.1. Знайти початковий базовий розв'язок за допомогою методів великих штрафів та двохетапного і записати функції мети для такої задачі ЛП:

$$\begin{aligned}
&Q(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 \Rightarrow Min\,,\\
&3x_1 + x_2 = 3,\\
&4x_1 + 3x_2 \ge 6,\\
&x_1 + 2x_2 \le 4,\ \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\,.
\end{aligned}$$

Розв’язання.

Спочатку приведемо задачу до канонічної форми:

$$\begin{aligned}
&Q(x_1, x_2) = -4x_1 - x_2 \Rightarrow Max\,,\\
&3x_1 + x_2 \qquad\qquad = 3,\\
&4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad = 6, \qquad\qquad m=3 \text{ – кількість обмежень},\\
&x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 4,\ \ \forall x_i \ge 0\,.
\end{aligned}$$

Вводимо 2 штучні змінні R_1 та R_2 (один одиничний вектор, утворений змінною x_4 вже маємо) і отримуємо систему обмежень, яку використаємо в обох методах:

$$3x_1 + x_2 + 0x_3 + 1R_1 + 0R_2 + 0x_4 = 3,$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 0R_1 + 1R_2 + 0x_4 = 6,$$
$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0R_1 + 0R_2 + 1x_4 = 4\,.$$

Початкову базу утворюватимуть змінні (R_1, R_2, x_4), їх має бути стільки, скільки є обмежень.

Для *методу великих штрафів* необхідно, щоб в оптимальному розв'язку штучні змінні були виведені з бази, тому функція мети матиме вигляд:

$$Q(x_1, x_2) = -4x_1 - x_2 - MR_1 - MR_2 \Rightarrow Max\,,$$

а для *двохетапного методу* функція мети першого етапу матиме вигляд:

$$Q(x_1, x_2) = -R_1 - R_2 \Rightarrow Max\,.$$

Приклад 4.2. Продовжити розв’язування задачі з прикладу 4.1 *методом великих штрафів*.

Розв’язання. Послідовність симплекс-таблиць:

x_b	c_b	P_0	c_1=-4	c_2=-1	c_3=0	c_4=0	C_5=-M	c_6=-M
			P_1	P_2	P_3	P_4	R_1	R_2
R_1	-M	3	3	1	0	0	1	0
R_2	-M	6	4	3	-1	0	0	1
x_4	0	4	1	2	0	1	0	0
Q		0	4	1	0	0	0	0
	xM	-9	-7	-4	1	0	0	0

Q=-3M-6M+0·4=0-9M, Δ_1=-3M-4M+0·1-(-4)=4-7M, Δ_2=-M-3M+0·2-(-1)=1-4M, Δ_3=-0M-(1)M+0·0-0=0+M.

У цій СТ для представлення значень функції мети та критеріїв оптимальності отриманого базового розв’язку використовуємо 2 рядки, оскільки ці значення будуть мати складову з М та без штрафного коефіцієнта. Наприклад, тут $\Delta_2 = 1 - 4M < 0$, при порівнянні таких значень слід пам'ятати, що M>>0, тому в першу чергу розглядати коефіцієнти при M, тому $0.001M + 1 > 100000$.

x_1	-4	1	1	1/3	0	0		0
R_2	-M	2	0	5/3	-1	0		1
x_4	0	3	0	5/3	0	1		0
Q		-4	0	-1/3	0	0		0
	xM	-2	-7	-5/3	1	0		0

Коли змінна з коефіцієнтом М в функції мети виводиться з бази, відповідний стовпчик у СТ може не обчислюватись, оскільки ця змінна більше до числа базових не потрапить. Тому в 2-ій таблиці не обчислюємо значення у стовпчику, що відповідає R_1, а в наступних не обчислюємо 2 стовпчики, що відповідають штучним змінним. Хід розв’язування просувається від неприпустимих розв’язків до припустимих, що досягається виведенням з бази штучних змінних:

x_1	-4	3/5	1	0	1/5	0		
x_2	-1	6/5	0	1	-3/5	0		
x_4	0	1	0	0	1	1		
Q		-18/5	0	0	-1/5	0		
x_1	-4	2/5	1	0	0	-1/5		
x_2	-1	9/5	0	1	0	3/5		
x_3	0	1	0	0	1	1		
Q		-17/5	0	0	0	1/5		

Приклад 4.3. Продовжити розв’язування задачі з прикладу 4.1 *двохетапним методом*

Розв’язання.

У *двохетапному методі* починаємо з СТ, подібної до першої таблиці методу великих штрафів, але з іншою функцією мети – мінімізуємо суму штучних змінних (максимізуємо їх суму зі знаком "-" перед кожною).

x_b	c_b	P_0	$c_1=0$	$c_2=0$	$c_3=0$	$c_4=0$	$c_5=-1$	$c_6=-1$
			P_1	P_2	P_3	P_4	R_1	R_2
R_1	-1	3	3	1	0	0	1	0
R_2	-1	6	4	3	-1	0	0	1
x_4	0	4	1	2	0	1	0	0
Q		-9	-7	-4	1	0	0	0

Хід розв’язування не відрізняється від класичного симплекс-методу:

x_1	0	1	1	1/3	0	0	1/3	0
R_2	-1	2	0	5/3	-1	0	-4/3	1
x_4	0	3	0	5/3	0	1	-1/3	0
Q		-2	0	-5/3	1	0	-1/3	0
x_1	0	3/5	1	0	1/5	0	3/5	-1/5
x_2	0	6/5	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5

x_4	0	1	0	0	1	1	1	-1
Q		0	0	0	0	0	1	1

Всі $\Delta_j \geq 0$, маємо оптимальний розв'язок 1-го етапу:

$x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$.

Оскільки значення штучних змінних нульові, то задача має припустимий розв'язок, і переходимо до 2 етапу з *первісним критерієм мети*, як початковий базовий розв'язок використаємо оптимальний розв'язок 1-го етапу:

x_b	c_b	P_0	$c_1=-4$	$c_2=-1$	$c_3=0$	$c_4=0$
			P_1	P_2	P_3	P_4
x_1	-4	3/5	1	0	1/5	0
x_2	-1	6/5	0	1	-3/5	0
x_4	0	1	0	0	1	1
Q		-18/5	0	0	-1/5	0
x_1	-4	2/5	1	0	0	-1/5
x_2	-1	9/5	0	1	0	3/5
x_3	0	1	0	0	1	1
Q		-17/5	0	0	0	1/5

У результаті отримали такий же розв'язок, як і при застосуванні попереднього методу.

Задачі дробово-лінійного програмування (ДЛП)

Задачу дробово-лінійного програмування в загальному випадку формулюють так:

$$Q(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \Rightarrow Max, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}, \ \ x_j \geq 0.$$

Крім того, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$. В задачі ДЛП критерій якості на відміну від задачі ЛП є часткою від ділення двох різних лінійних функцій від змінних задачі, а обмеження залишаються лінійними.

Ця задача завжди може бути приведена до задачі ЛП за допомогою таких підстановок:

$$y_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \right)^{-1}, \; y_j = y_0 \times x_j .$$

У результаті отримаємо

$$Q'(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \Rightarrow Max, \; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \; \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1, \; \forall y_j \geq 0, \; j = \overline{1,n},$$

бо $\sum_{j=1}^{n} d_j y_j = \sum_{j=1}^{n} d_j y_0 x_j = y_0 \sum_{j=1}^{n} d_j x_j = \frac{y_0}{y_0} = 1.$

Отже, задачу ДЛП необхідно спочатку привести до еквівалентної задачі ЛП, розв'язати останню і за допомогою обернених підстановок розрахувати оптимальні значення змінних первісної задачі.

Приклад 4.4. Змістове формулювання критерію, що приводить до задачі ДЛП.

Розв'язання.

Нехай c_j – затрати на виробництво *j*-го виробу, x_j – кількість виробів *j*-го типу. Якщо необхідно мінімізувати середню собівартість (собівартість на один виріб), то критерій якості матиме вигляд: $Q(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \Rightarrow Min$.