

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра програмного забезпечення

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторної роботи № 5 «Розв'язування транспортної задачі ЛП
методом диференціальних рент»

з дисципліни «Дослідження операцій»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»

Укладачі:

д.т.н., проф., проф. кафедри

Любов ЖУРАВЧАК

к.ф.-м..н., старший викладач кафедри

Наталія ІВАСЬКО

Львів 2024

Тема роботи: Розв'язування транспортної задачі ЛП методом диференціальних рент

Мета роботи: Ознайомитись на практиці із розв'язуванням транспортних задач за допомогою побудови умовно оптимального розподілу та покращування його методом диференціальних рент.

5.1. Метод диференціальних рент знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі

Пошук розв'язку транспортної задачі методом потенціалів, розглянутий в лабораторній роботі № 4, починається із знаходження початкового опорного плану, який крок за кроком покращується доти, доки не стане оптимальним. Метод диференціальних рент ґрунтується на протилежному принципі: план, який із самого початку відповідає критерію оптимальності повинен перевірятися на допустимість (задовольняти обмеження задачі). Згідно з цим методом спочатку найкращим способом розподіляють частину продукту (будують умовно оптимальний розподіл), а на наступних кроках зменшують величину нерозподілених продуктів. Причому не потрібно на кожному кроці перевіряти отриманий план на виродженість.

Основні кроки методу диференціальних рент:

1. Будуємо умовно оптимальний розподіл. У кожному зі стовпців знаходимо мінімальні тарифи і обводимо їх колами. Заповнюємо клітинки з обведеними тарифами максимально можливими числами (вибираємо мінімальне серед запасів і потреб відповідних пунктів). Якщо цей розподіл задовольняє обмеження задачі, то він оптимальний – кінець алгоритму.

2. Визначаємо надлишкові та недостатні рядки за правилом:

- рядок є *недостатнім* (від'ємним), якщо запаси відповідного пункту зберігання розподілені повністю, а потреби не задоволені;
- рядок є *надлишковим* (додатним), якщо потреби задоволені й залишився продукт у відповідному пункті зберігання.

У ситуації, коли нерозподілений залишок у рядку дорівнює 0, дивимось на іншу заповнену клітинку у стовпчику, якщо вона розташована в додатному рядку, то розглядуваний рядок позначаємо +0, інакше -0.

Можливі випадки, коли рядок з нерозподіленим залишком 0 єдиний у стовпці або пов'язаний у стовпчику не з однією, а з двома (або більше) заповненими клітинками, одна з яких знаходиться в додатному рядку, а інша - у

від'ємному. Для визначення чи даний рядок є недостатнім чи надлишковим, потрібно дещо збільшити запаси постачальника, який відповідає даному рядку (наприклад, на одиницю) і перерозподілити продукцію між усіма постачальниками. Якщо при цьому кількість розподіленої продукції $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$ не змінилася,

то постачальник вважається надлишковим, а відповідний йому рядок – додатнім. Якщо ж обсяг розподіленої продукції збільшиться, то постачальник вважається недостатнім, а рядок – негативним.

3. Для кожного стовпця знаходимо *різницю* між обведеним тарифом у *від'ємному* рядку та найближчим (за значенням) до нього тарифом, записаним у *надлишковому* рядку. Якщо обведений тариф знаходиться у *додатному* рядку – **різницю не визначаємо**.

Серед різниць знаходимо *найменшу* – **проміжну ренту**.

4. Переходимо до нової таблиці – додаємо до відповідних тарифів, що знаходяться у *від'ємних* рядках, проміжну ренту. Інші елементи не змінюємо.

5. Таблицю з новими тарифами заповнюють спочатку. В цій таблиці число заповнених клітин буде на одну більше. Оскільки в новій таблиці кількість клітин для заповнення є більшою, ніж кількість стовпців, починаємо від стовпця (чи рядка), в якому є один обведений тариф; цю клітинку заповнюємо і усуваємо з розгляду даний стовпчик (рядок). Продовжуючи цю процедуру, заповнюємо всі клітинки з колами. При цьому загальна кількість розподіленої продукції $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$ при переході від однієї ітерації до іншої поступово

збільшується. Якщо план допустимий (вся продукція розподілена, причому використані всі запаси постачальників і задоволені всі потреби споживачів), то він оптимальний – кінець, в іншому випадку переходимо до кроку 2.

Приклад 5.1. Методом диференціальних рент знайти оптимальний план перевезень, який би забезпечив мінімальні сумарні витрати на доставку продукції від постачальників до споживачів за умови, що всі потреби споживачів будуть задоволені, а всі запаси постачальників використані без залишку. Умова даної транспортної задачі записана у вигляді таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потреби	200	200	100	100	250	850\850

Обчислимо суму потреб (850) та суму усіх запасів (850), отже, задача є закритого типу. У кожному стовпці визначаємо мінімальні ціни перевезення і обводимо їх колами, а клітинки з ними заповнюємо максимально можливими числами (вибираємо менше зі значень запасів і потреб відповідного пункту). Якщо у стовпці є два однакові мінімальні елементи, то заповнюємо один (будь-який) із них.

У першому стовпчику це клітинка A_2B_1 , присвоюємо їй значення 200, оскільки запаси постачальника A_2 довівнюють 250 од., а потреби споживача B_1 - 200 од., у другому стовпчику клітинці A_3B_2 присвоюємо теж значення 200, бо запаси постачальника A_3 і потреби споживача B_2 є однаковими і дорівнюють 200 од. Оскільки запаси постачальника A_3 використанні повністю, то в третьому і п'ятому стовпцях клітинкам A_3B_3 та A_3B_5 присвоюємо значення 0. У четвертому стовпчику в клітинці A_1B_4 записуємо значення 100 (запаси постачальника A_1 і потреби споживача B_4 є однаковими і дорівнюють 100).

В результаті, в таблиці 5.2 отримали деякий розподіл, який маємо перевірити на оптимальність. Для цього обчислимо загальну кількість розподіленої продукції $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 200 + 200 + 100 = 500 < 850$, отже даний розподіл не є оптимальний.

Наступним кроком є визначення надлишкових та недостатніх рядків. На-

приклад, третій постачальник, використавши всі свої ресурси задовольнив споживача B_2 , але зовсім не задовольнив споживача B_3 (той недоотримав 100 од. продукції) і споживача B_5 (недоотримав 250 од. продукції), отже, третій рядок є недостатнім (-350). Другий і четвертий рядки є надлишкові, оскільки залишилися невикористані запаси.

Таблиця 5.2

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	10	7	4	100 ⁽¹⁾	4	100	+0
A_2	200 ⁽²⁾	7	10	6	11	250	+50
A_3	8	200 ⁽⁵⁾	0 ⁽³⁾	2	0 ⁽²⁾	200	-350
A_4	11	8	12	16	13	300	+300
Потреби	200	200	100	100	250	850\850	
Різниця	-	2	1	-	2		

Щоб оцінити рядок A_1 (нерозподілений залишок у рядку A_1 дорівнює 0) дивимось, чи є ще заповнені клітинки в стовпці B_4 , оскільки немає, то для визначення чи даний рядок є недостатнім чи надлишковим, потрібно дещо збільшити запаси постачальника A_1 , нехай на одиницю, тоді запаси постачальника A_1 стануть 101, але потреби споживача B_4 лише 100 од., тому в клітинку A_1B_4 не можемо записати більше, ніж 100, відповідно кількість розподіленої продукції не зміниться, тому постачальника A_1 вважаємо надлишковим, а відповідний йому рядок – додатнім.

Після цього для обведених тарифів, що знаходяться у від'ємних рядках, знаходимо ренти – різниці між ними та найближчими (за значеннями) до них тарифами, записаними у надлишкових рядках. В першому і четвертому стовпці обведені тарифи знаходяться у додатному рядку, тому для них ренти не визначаємо. Найменша серед знайдених різниць і буде проміжною рентою.

Для побудови нової таблиці 5.3 до всіх тарифів, розташованих у третьому (від'ємному) рядку, додаємо проміжну ренту (1).

Знову в кожному стовпці визначаємо мінімальні тарифи перевезення і обводимо їх колами. У стовпці B_2 з'явилось дві клітинки з однаковим тарифом. Оскільки кількість клітинок із зазначеними мінімальними цінами на другій та наступних ітераціях збільшується (їх стає більше, ніж кількість стовпців), то необхідний особливий порядок у складанні схеми розподілу запасів та потреб.

Тому проглядаються спочатку всі стовпці, а потім рядки (можна навпаки спочатку рядки, а потім стовпці), причому спочатку заповнюємо клітинки, які є єдиними в стовпчиках (рядках), а потім усі решта.

Таблиця 5.3

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	10	7	4 100	1 0	4	100	-100
A_2	2 200	7	10	6	11	250	+50
A_3	9	6 200	4 0	3	3 0	200	-250
A_4	11	8	12	16	13	300	+300
Потреби	200	200	100	100	250	850\850	
Різниця	-	1	6	5	8		

У першому та другому стовпцях клітинки A_2B_1 і A_3B_2 є єдиними, то згідно запасів і потреб присвоюємо їм значення 200. Оскільки запаси постачальника A_3 використані повністю, то клітинкам A_3B_3 і A_3B_5 присвоюємо значення 0. Тоді заповнюємо клітинку A_1B_3 , присвоївши їй значення 100, а клітинці A_1B_4 відповідно 0. Визначаємо надлишкові та недостатні рядки та обчислюємо проміжну ренту (таблиця 5.3).

Для контролю маємо на увазі, що суми чисел у надлишкових і недостатніх рядках мають бути однаковими за модулем, але різними за знаками, а також те, що вони мають зменшуватись (або хоча б бути такими самими), оскільки ми маємо покращувати план, зменшуючи нерозподілені надлишки. Але бачимо з таблиці 5.2 і таблиці 5.3, що сумарні надлишок і нестача рівні +350 і -350, як на першій, так і на другій ітерації. Не зменшилась і кількість нерозподілених надлишків, бо загальна кількість розподіленої продукції на другій ітерації однакова

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 200 + 200 + 100 = 500 < 850.$$

Для побудови нової таблиці 5.4 до всіх тарифів, розташованих у першому і третьому рядках таблиці 5.3, додаємо проміжну ренту (1). Аналогічно до перших двох ітерацій в кожному стовпці визначаємо мінімальні ціни перевезення і обводимо їх колами. Спочатку заповнюємо клітинки A_2B_1 , A_1B_4 , A_3B_5 , які є єдиними в стовпчиках, усуваючи з розгляду перший, четвертий та п'ятий стовпці. Запаси постачальників A_1 та A_3 використанні повністю, тому клітин-

кам A_1B_3 , A_3B_2 , A_3B_3 присвоюємо значення 0, усуваючи з розгляду перший та третій рядки. Із запасів постачальників A_2 залишились не використаними 50 од. продукції, які присвоюємо клітинці A_2B_2 . Всі обведені клітинки заповнені.

Таблиця 5.4

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	11	8	5 0	2 100	5	100	-100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250	-150
A_3	10	7 0	5 0	4	4 200	200	-50
A_4	11	8	12	16	13	300	+300
Потреби	200	200	100	100	250	850\850	
Різниця	9	1	7	14	9		

Сумарні надлишок і нестача рівні +300 і -300, що зменшилось порівняно з попередньою ітерацією, а загальна кількість розподіленої продукції збільши-

лась $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 200 + 50 + 100 + 200 = 550 < 850$.

Обчислюємо ренти для обведених тарифів, розміщених у від'ємних рядках, та визначаємо проміжну (1), яку додаємо до всіх тарифів, розташованих у від'ємних рядках.

У таблиці 5.5 спочатку заповнюємо клітинки A_2B_1 , A_1B_4 , A_3B_5 , які є єдиними в стовпчиках. Запаси постачальників A_1 та A_3 використанні повністю, тому клітинкам A_1B_3 , A_3B_2 , A_3B_3 присвоюємо значення 0, як на попередній ітерації. У другому стовпчику залишились не заповненими дві клітинки, то заповнення починаємо з тієї, де менша вартість перевезень (у початковій таблиці), тому клітинці A_2B_2 присвоюємо значення 50 (більше не можемо), тоді для клітинки A_2B_4 залишилось 150.

Визначаємо надлишкові та недостатні рядки. Щоб оцінити рядок A_2 (нерозподілений залишок у цьому рядку дорівнює 0) дивимось, чи є ще заповнені клітинки в стовпцях B_1 та B_2 . У стовпці B_1 більше немає заповнених клітинок, а в стовпці B_2 є ще дві заповнені клітинки, одна з яких знаходиться у додатньому рядку, а друга у від'ємному, тому використовуємо другий спосіб.

Таблиця 5.5

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	12	9	6 0	3 100	6	100	-100
A_2	3 200	8 50	11	7	12	250	+0
A_3	11	8 0	6 0	5	5 200	200	-50
A_4	11	8 150	12	16	13	300	+150
Потреби	200	200	100	100	250	850\850	
Різниця	-	-	5	4	7		

Обчислимо кількість розподіленої продукції в таблиці 5.5 (збільшилась порівняно з попередньою ітерацією) $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 200 + 200 + 100 + 50 + 150 = 700$.

Збільшимо запаси постачальника A_2 на одиницю і знову перерозподілимо продукцію між усіма постачальниками. Клітинці A_2B_2 присвоюємо значення 51, а клітинці A_2B_4 залишиться 149, оскільки потреби споживача B_2 не можуть перевищувати 200 од. Оскільки сумарна кількість розподіленої продукції

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 200 + 200 + 100 + 51 + 149 = 700 \text{ не змінилася, то постачальника } A_2$$

вважаємо надлишковим, а відповідний йому рядок – додатнім.

Як бачимо з таблиці 5.5, сумарні надлишок і нестача рівні +150 і -150, отже, нам вдалося покращити план і зменшити нерозподілені надлишки, бо у таблиці 5.4 сумарні надлишок і нестача рівні +300 і -300. Обчислюємо ренти для обведених тарифів, розміщених у від'ємних рядках, та визначаємо проміжну (4), яку додаємо до всіх тарифів, розташованих у від'ємних рядках, отримуємо таблицю 5.6.

У таблиці 5.6 спочатку заповнюємо клітинки A_2B_1 , A_3B_5 , які є єдиними в стовпчиках. Запаси постачальника A_3 використанні повністю, тому клітинці A_3B_3 присвоюємо значення 0. Тоді клітинка A_1B_3 стає єдиною у третьому стовпці, тому їй присвоюємо максимально можливе значення 100, а клітинці A_1B_4 залишилось присвоїти 0. Тепер A_2B_4 стає єдиною клітинкою в четвертому стовпці і їй присвоюємо 50, а в клітинках A_2B_2 і A_4B_2 записуємо значення 0 і 200 відповідно.

Таблиця 5.6

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	16	13	10 100	7 0	10	100	-50
A_2	3 200	8 0	11	7 50	12	250	-0
A_3	15	12	10 0	9	9 200	200	-50
A_4	11	8 200	12	16	13	300	+100
Потреби	200	200	100	100	250	850\850	
Різниця	8	-	2	9	4		

В результаті кількість розподіленої продукції збільшилась на 50 од. порівняно з попередньою ітерацією $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 200 + 200 + 200 + 100 + 50 = 750$.

Визначаємо надлишкові та недостатні рядки. Знову у рядку A_2 нерозподілений залишок дорівнює 0, тому збільшуємо запаси постачальника A_2 на одиницю і перерозподілимо продукцію між усіма постачальниками. Клітинці A_2B_4 присвоюємо значення 51, але в клітинці A_1B_4 залишиться 0, оскільки запаси постачальника A_1 використанні повністю. Оскільки сумарна кількість розподіленої продукції $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 200 + 200 + 200 + 100 + 51 = 751$ збільшилась, тому постачальника A_2 вважаємо недостатнім, а рядок – негативним.

На цій ітерації нам вдалося покращити план і зменшити кількість нерозподілених залишків, оскільки сумарні надлишок і нестача в таблиці 5.6 рівні +100 і -100, а в таблиці 5.5 вони були рівні +150 і -150.

Обчислюємо ренти для обведених тарифів, розміщених у від'ємних рядках, та визначаємо проміжну (2), яку додаємо до всіх тарифів, розташованих у від'ємних рядках, отримуємо таблицю 5.7.

Знову повторюємо алгоритм, зменшуючи нерозподілені залишки доки вони не дорівнюватимуть 0.

Як бачимо з таблиці 5.7, сумарні надлишок і нестача рівні +50 і -50, отже, отриманий план кращий за попередній, але не оптимальний, тому переходимо до таблиці 5.8.

Таблиця 5.7

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	17	15	(12) 0	(9) 50	12	100	+50
A_2	(5) 200	10	13	(9) 50	14	250	+0
A_3	17	14	(12) 0	11	(11) 200	200	-50
A_4	11	(8) 200	(12) 100	16	13	300	+0
Потреби	200	200	100	100	250	850\850	
Різниця	-	-	-	-	1		

З таблиці 5.8 бачимо, що усі елементи останнього стовпця дорівнюють 0, це означає, що запаси всіх постачальників використанні повністю та потреби всіх споживачів задоволені, отже, оптимальний розв'язок знайдено.

Таблиця 5.8

Постачальники	Споживачі					Запаси	Нестача (-) Надлишок (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	17	15	(12) 0	(9) 50	(12) 50	100	0
A_2	(5) 200	10	13	(9) 50	14	250	0
A_3	18	15	13	12	(12) 200	200	0
A_4	11	(8) 200	(12) 100	16	13	300	0
Потреби	200	200	100	100	250	850\850	

Мінімальні сумарні витрати на доставку продукції від постачальників до споживачів рівні

$$Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} = 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 1 + 50 \cdot 6 + 50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 = 4150.$$

Примітка: оптимальний план перевезень беремо з останньої таблиці, а вартість перевезень – із першої.

Відзначимо, що він повністю співпав з розв'язком задачі, отриманої за допомогою методу потенціалів (приклад 4.4 до лабораторної роботи № 4).

Контрольні запитання до лабораторної роботи № 5

1. Поясніть основні кроки алгоритму методу диференціальних рент (ДР).
2. Як визначаються надлишкові рядки у методі ДР?
3. Як визначаються недостатні рядки у методі ДР?
4. Як визначаються ренти у методі ДР?
5. Що таке проміжна рента і як вона визначається?
6. Як будується нова таблиця у методі диференціальних рент?
7. Порівняйте між собою методи диференціальних рент та потенціалів.
8. Коли завершується алгоритм диференціальних рент?
9. У чому суть методу ДР?
10. Чи можна використовувати метод диференціальних рент для вироджених задач? Чому?
11. Що робити у ситуації, коли нерозподілений залишок у рядку дорівнює 0?
12. Які методи можна застосовувати для розв'язування транспортних задач?

Завдання до лабораторної роботи № 5

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Написати програму розв'язування транспортної задачі методом диференціальних рент згідно із варіантом з Додатку до лабораторних робіт № 4 та № 5.
3. Оформити звіт про виконану роботу.
4. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

Вимоги до програми

Програма має передбачати такі можливості:

1. Введення вхідних даних вручну (задати елементи таблиці). Передбачити можливість некоректного введення даних.
2. Визначення типу транспортної задачі (у випадку відкритої задачі виведення відповідного повідомлення). Розв'язання закритої задачі.
3. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного варіанта завдання:
 - пошук оптимального плану методом диференціальних рент із виведенням та підписанням усіх проміжних таблиць та рент.
4. Виведення відповідного повідомлення у випадку неіснування оптимального плану.

Додаток до лабораторних робіт № 4 та № 5

Є n пунктів постачання і m пунктів споживання продукції. Вартість перевезення одиниці продукції з i -го пункту постачання в j -й центр споживання c_{ij} наведена в таблицях. Скласти план перевезень щодо постачання необхідної продукції в пункти споживання, який мінімізуватиме сумарні транспортні витрати. Необхідні дані для індивідуального варіанту потрібно взяти з таблиць, наведених нижче.

Варіант 1.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	3	4	5	15	24	25
B	19	2	22	4	13	25
C	20	27	1	17	19	10
D	4	15	17	8	14	30
Потреби	11	11	41	16	11	

Варіант 2.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	2	4	1	3	30
B	5	6	5	4	20
C	3	7	9	5	40
D	1	2	2	7	50
Потреби	35	20	55	30	

Варіант 3.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	2,3	7	6	8	15
B	2	1,3	1	2,5	55
C	4,9	4	4	1	12
D	2	8	1	4	18
E	3	2,1	1,2	5	17
Потреби	35	37	20	25	

Варіант 4.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	5	3	8	4	10	150
B	4	5	3	2	1	60
C	5	11	8	10	4	55
D	16	4	1	5	6	50
Потреби	90	85	70	50	20	

Варіант 5.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	2	4,1	6	17
B	5	2,5	2	3	73
C	3	4	3	4,2	52
D	5,1	3	2	7	38
Потреби	37	35	86	22	

Варіант 6.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	5	3	8	4	10	25
B	4	5	3	2	1	25
C	5	11	8	10	4	10
D	16	4	1	5	6	30
Потреби	11	11	41	11	16	

Варіант 7.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	1,7	3	4	6	28
B	5,2	2,6	9,8	3	27
C	3	2	1	4	52
D	6	5	2,5	7	18
Потреби	32	18	60	15	

Варіант 8.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	1	2	9	7	60
B	3	40	15	5	55
C	6	4	8	3	40
D	24	3	3	1	35
Потреби	50	25	45	70	

Варіант 9.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6	2	4,8	3	20
B	8	4	5	8	30
C	5,5	2	3	7	27
D	5	6	8,2	4	23
E	1,8	9	7	6	30
Потреби	40	30	48	12	

Варіант 10.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	1	3	4	8	20
B	8	6	2	6	20
C	7	7	4	8	25
D	5	8	4	5	45
Потреби	25	30	40	15	

Варіант 11.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,2	1	4,2	5	17
B	2	4	5,1	8	20
C	5	8	3	4	40
D	2	4	9	2	20
E	4	2,75	2	1	23
Потреби	45	30	25	20	

Варіант 12.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	1	3	3	8	10
B	8	6	2	6	20
C	4	7	7	3	35
D	5	2	4	5	45
Потреби	25	30	40	15	

Варіант 13.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	9	1	3	43
B	2	5	5	6	20
C	2	5	10	4	30
D	3	7	2	6	32
Потреби	18	50	22	35	

Варіант 14.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виго- товлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	8	12	4	9	10	60
B	5	7	15	3	6	40
C	9	4	6	12	7	100
D	5	3	2	6	4	50
Потреби	30	80	65	35	40	

Варіант 15.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	9	4	7,4	20
B	2	8	5	1	15
C	7	2,2	1	4	30
D	2,5	6	10	6	40
Потреби	48	10	35	12	

Варіант 16.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виго- товлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	6	3	1	3	10	150
B	2	8	7	5	6	90
C	1	3	8	6	8	40
D	7	4	5	9	2	55
Потреби	100	75	80	60	20	

Варіант 17.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,3	8,6	1	5	25
B	2,5	7	5	7	42
C	4	5	11	8	40
D	1	5	4	5	35
Потреби	44	30	26	42	

Варіант 18.

Підприємст- ва	Вартість одиниці продукції					Обсяг виго- товлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	7	3	4	8	6	20
B	5	7	2	3	5	60
C	1	4	5	2	6	45
D	3	4	2	7	8	70
Потреби	25	40	50	35	45	

Варіант 19.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,3	8	5	11	12
B	4	11	7	9	24
C	7	3	5	8	32
D	9	5,5	10	1	32
E	5	8	11	5	30
Потреби	60	20	30	20	

Варіант 20.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виго- товлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	8	6	7	3	4	50
B	7	4	9	3	4	50
C	6	1	4	5	2	55
D	7	8	3	4	2	50
Потреби	35	30	50	25	65	

Варіант 21.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	7,3	9	3	10	14
B	3	10	5	9	30
C	7	11	3	2	20
D	8	5	9	2	32
E	4,8	9	10	5	16
Потреби	60	14	20	18	

Варіант 22.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виго- товлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	5	1	5	2	4	30
B	5	7	6	3	2	70
C	1	5	4	2	6	25
D	1	6	3	3	5	25
Потреби	10	40	20	60	20	

Варіант 23.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4,2	10	5	9	17
B	5	8	5	9	33
C	6	4	4	7,3	20
D	7	5	11	4	12
E	3	11	8	5	20
Потреби	35	22	30	15	

Варіант 24.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виго- товлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	2	8	4	6	3	95
B	3	2	5	2	6	55
C	6	5	8	7	4	40
D	3	4	4	2	1	60
Потреби	30	90	80	20	30	

Варіант 25.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	5,1	8	6	15	310
B	7	12	5	9	145
C	6	9	2	16	202
D	8	3	9	4	180
E	4,5	9	10	5	73
Потреби	530	120	120	140	

Варіант 26.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	3	7	1	5	4	30
B	7	5	8	6	3	5
C	6	4	8	3	2	45
D	3	1	7	4	2	40
Потреби	10	35	15	25	35	

Варіант 27.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	2	2	5	7	170
B	5	6,1	2	3	129
C	4	4	3	6,2	115
D	8	2	2	7	240
Потреби	117	140	310	87	

Варіант 28.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	1	5	2	2	1	90
B	3	6	2	4	3	15
C	8	10	4	5	6	90
D	7	3	7	9	1	55
Потреби	30	40	55	80	45	

Варіант 29.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	2	2.5	5	80
B	5	2.5	2	4	72
C	3	4	3	4.2	50
D	5.1	3	2	4	40
Потреби	65	47	92	38	

Варіант 30.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	16	30	17	10	16	4
B	20	27	26	9	23	6
C	13	4	22	3	1	10
D	3	1	5	4	24	10
Потреби	7	7	7	7	2	