МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра програмного забезпечення

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторної роботи № 4 «Розв'язування транспортної задачі ЛП методом потенціалів»

з дисципліни «Дослідження операцій»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»

Укладачі:

д.т.н., проф., проф. кафедри

Любов ЖУРАВЧАК

к.ф.-м..н., старший викладач кафедри

Наталія ІВАСЬКО

Львів 2024

Тема роботи: Розв’язування транспортної задачі ЛП методом потенціалів

Мета роботи: Ознайомитись на практиці із основними поняттями транспортних задач, навчитись знаходити початкові опорні плани (за методами північно-західного кута, мінімального елемента та евристичним методом Фойгеля) та оптимальні плани задач за допомогою методу потенціалів.

4.1. Транспортна задача

Розглянемо постановку та математичну модель транспортної задачі. Деякий продукт, що міститься на складах у m постачальників A_i у кількості a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) одиниць відповідно, потрібно доставити n споживачам B_j у кількості b_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) одиниць відповідно. Відома вартість c_{ij} перевезень одиниці вантажу від *i*-го постачальника *j*-му споживачу.

Потрібно скласти план перевезень, що дає змогу вивезти всі вантажі, повністю задовольнити потреби і має мінімальну вартість, тобто знайти, скільки одиниць вантажу має бути відправлено з *i*-го пункту постачальника у *j*-й пункт споживача.

Позначимо через x_{ij} кількість одиниць вантажу, що заплановані на перевезення від *i*-го постачальника до *j*-го споживача. Тоді умову транспортної задачі можна записати у вигляді табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Складемо тепер математичну модель транспортної задачі. Якщо від *i*-го постачальника до *j*-го споживача заплановано перевезти x_{ij} одиниць товару, то вартість перевезення дорівнює відповідно $c_{ij}x_{ij}$. А вартість усього плану перевезень рівна $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$.

Систему обмежень отримуємо з таких умов завдання:

а) всі вантажі мають бути вивезені, тобто повинна виконуватись умова $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i$ ($i=1,2,\ldots,m$) (ці рівняння отримуються із рядків табл. 4.1);

б) всі потреби мають бути задоволені, тобто має виконуватись умова $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j$ ($j=1,2,\ldots,n$) (ці рівняння отримуються із стовпців табл. 4.1).

Таким чином, математична модель транспортної задачі має наступний вигляд: знайти значення невідомих, які мінімізують лінійну функцію

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min$$

і задовольняють умови

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ \ (i=1,2,\ldots,m), \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ \ (j=1,2,\ldots,n), \tag{4.2}$$

$$x_{ij}\ge 0\ \ (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n). \tag{4.3}$$

У цій моделі передбачається, що сумарні запаси рівні сумарним потребам, тобто

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\,. \tag{4.4}$$

Така модель називається *закритою* моделлю транспортної задачі.

Якщо в моделі транспортної задачі не виконується співвідношення (4.4), то така модель називається *відкритою* моделлю транспортної задачі. Тут може бути два випадки:

а) сумарні запаси перевищують сумарні потреби, тобто має місце $\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j$;

б) сумарних запасів менше, ніж сумарних потреб, тобто $\sum_{i=1}^{m}a_i<\sum_{j=1}^{n}b_j$.

Відкриту модель завжди можна звести до моделі закритого типу. Для цього у випадку а) вводиться фіктивний споживач B_{n+1}, потреби якого рівні

$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а у випадку б) вводиться фіктивний поставщик A_{m+1}, запаси якого рівні $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Вартість перевезення одиниці вантажу до фіктивного споживача і вартість перевезення одиниці вантажу від фіктивного постачальника дорівнюють нулю, оскільки вантаж в обох випадках не перевозиться.

Транспортну задачу застосовують також під час виконання економічних завдань, які за своїм характером не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу, тому величини можуть мати різний зміст залежно від конкретного завдання. Наприклад, величини c_{ij} можуть означати вартість, відстань, час, продуктивність тощо.

Як і для інших задач лінійного програмування, процес пошуку оптимального розв'язку транспортної задачі починається із знаходження початкового опорного плану. Розглянемо систему обмежень (4.1) і (4.2) транспортної задачі. Вона містить mn невідомих та $m+n$ рівнянь, пов'язаних між собою співвідношенням (4.4). Якщо додати почленно рівняння окремо підсистеми (4.1) і окремо підсистеми (4.2), то отримаємо два однакових рівняння. У табл. 4.1 таке додавання рівнозначне відповідно почленному додаванню стовпців і рядків.

Така ситуація свідчить про лінійну залежність системи обмежень. Якщо одне з рівнянь цієї системи відкинути, то система обмежень має містити не більше $m+n-1$ лінійно незалежних рівнянь або стільки само базисних змінних, відповідно, *невироджений опорний розв'язок транспортної задачі містить* $m+n-1$ додатніх компонент або перевезень.

Якщо умови транспортної задачі та її опорний розв'язок записані у вигляді табл. 4.1, то клітини, в яких знаходяться відмінні від нуля перевезення, називаються *заповненими* клітинами, решта – *вільними* клітинами. Зайняті клітини відповідають базисним змінним і для невиродженого опорного розв'язку їхня кількість дорівнює $m+n-1$.

4.2. Знаходження початкового опорного плану транспортної задачі

Метод північно-західного кута

Для знаходження початкового опорного розв'язку транспортної задачі зручно скористатися методом північно-західного кута, суть якого полягає в наступному.

Нехай умови транспортної задачі задані в табл. 4.1. Будемо заповнювати цю таблицю, починаючи від лівого верхнього кута, який умовно назвемо "північно-західним кутом". Не враховуючи вартості перевезення одиниці вантажу, починаємо задовольняти потреби першого споживача B_1 за рахунок запасів першого постачальника A_1. Для цього записуємо в лівий нижній кут клітинки A_1B_1 меньше з чисел a_1 і b_1, тобто $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

На першому кроці може бути два випадки. Якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ і перший стовпець "закритий", тобто потреба першого споживача задоволена повністю. Це означає, що для решти клітин першого стовпця $x_{i1} = 0$ ($i = 2,\ldots,m$). Рухаючись далі по першому рядку таблиці, переходимо до задоволення потреб другого споживача B_j за рахунок запасу, що залишився у постачальника A_1. Тут у клітинку A_1B_2 записуємо менше з чисел $a_1 - b_1$ і b_2, тобто $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$.

Якщо $(a_1 - b_1) \geq b_2$, то $x_{12} = b_2$, другий стовпчик "закритий", тобто $x_{i2} = 0$ ($i = 2,\ldots,m$), і тепер переходимо до задоволення потреб споживача B_3. Якщо $(a_1 - b_1) < b_2$, то $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$ і перший рядок "закритий", тобто запаси першого постачальника повністю вивезені. Це означає, що для решти клітин першого рядка $x_{1j} = 0$ ($j = 3,\ldots,n$). У цьому випадку задоволення потреб споживача B_j розпочинаємо тепер за рахунок запас постачальника A_2. Процес аналогічним чином продовжуємо далі.

Якщо ж на першому кроці $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ і перший рядок "закритий", тобто $x_{1j} = 0$ ($j = 2,\ldots,n$), і тепер, рухаючись далі по першому стовпці таблиці, переходимо до задоволення потреб споживача B_1 за рахунок запасів постачальника A_2. Тут у клітинку A_2B_1 записуємо менше з чисел a_2 і $b_1 - a_1$, а саме $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$.

Цей процес продовжується до вичерпання всіх запасів a_i ($i = 1,2,\ldots,m$) та задоволення всіх потреб b_j ($j = 1,2,\ldots,n$). Остання заповнена клітинка буде у n-му стовпчику та в m-му рядку. Починаючи рух із клитинки A_1B_1 тільки по зайнятих клітинкам, неможливо повернутись не лише до неї, але і в будь-яку іншу зайняту клітинку. Тобто розв'язок, знайдений за методом північно-західного кута, є опорним планом розв'язку транспортної задачі.

Приклад 4.1. Знайти початковий опорний розв'язок транспортної задачі, заданої у табл. 4.2, за методом північно-західного кута.

Таблиця 4.2

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Розв'язок даної задачі наведено в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Постачальники	Потреби					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Отриманий розв'язок є невиродженим опорним розв'язком, так як містить точно $m+n-1=8$ заповнених клітин.

Знайдемо загальну вартість плану перевезень як суму добутків обсягів перевезень, що стоять у лівому нижньому кутку заповнених клітин, на відповідні вартості перевезення одиниці вантажу в цих же клітинах:

$$Z = 100 \cdot 10 + 100 \cdot 2 + 150 \cdot 7 + 50 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot 16 + 250 \cdot 13 = 6950.$$

Початковий опорний розв'язок, знайдений за методом північно-західного кута, зазвичай, є дуже далеким від оптимального, бо під час його отримання не враховують вартості перевезення одиниці вантажу c_{ij}. Тому в подальших розрахунках буде потрібно багато ітерацій для досягнення оптимального розв'язку.

Метод мінімального елемента

Суть методу мінімального елемента полягає в тому, що на кожному кроці здійснюється максимально можливе "переміщення" вантажу в клітинку з мінімальною вартістю перевезення одиниці вантажу c_{ij}.

Нехай умови транспортної задачі задані в табл. 4.2. Заповнення таблиці починаємо з клітинки, в якій найменша величина витрат c_{ij}. Запишемо у цю клітинку менше з чисел a_i і b_j. Потім або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю задоволені, або стовпець, що відповідає споживачеві, попит якого повністю задоволений, або і рядок, і стовпець, якщо вивезені запаси постачальника і задоволені потреби споживача, "викреслюють", тобто вони більше не беруть участь в процесі побудови початкового опорного плану. Далі з решти клітин таблиці знову вибирають клітинку з найменшою величиною витрат, і процес розподілу запасів продовжується доти, доки вони усі не будуть вивезені, а потреби задоволені .

<u>Приклад 4.2.</u> Знайти початковий опорний розв'язок транспортної задачі, заданої в табл. 4.2, за методом мінімального елемента.

Розпочинаємо з клітинки із величиною витрат $c_{14} = \min(c_{ij}) = 1$. Потреби споживача B_4 і запаси постачальника A_1 повністю задоволені, тому перший рядок і четвертий стовпець "викреслюють". Розв'язок даної задачі наведено в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Постачальники	Споживачі					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Цей розв’язок складається із 7 зайнятих клітин, а, отже, є виродженим опорним розв’язком.

Знайдемо загальну вартість плану перевезень:

$$Z = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 7 + 200 \cdot 2 + 150 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4300$$

Ясно, що загальна вартість плану перевезень в прикладі 4.2 значно менша, ніж у прикладі 4.1, отже, він ближчий до оптимального.

Евристичний метод Фойгеля

Метод Фойгеля досить простий і дає змогу отримати опорний план, більш наближений до оптимального розв’язку, ніж у випадку застосування інших методів.

Цей метод полягає у такому:

- на кожній ітерації знаходять різниці між двома найменшими тарифами в усіх рядках і стовпцях, записуючи їх у додаткові стовпець і рядок таблиці;
- знаходять максимальну різницю і заповнюють клітину з мінімальною вартістю в рядку (стовпці), якій відповідає дана різниця.

<u>Приклад 4.3.</u> Знайти початковий опорний розв’язок транспортної задачі, заданої в табл. 4.2, методом Фойгеля.

Таблиця 4.5

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Постачальники</th><th colspan="5">Споживачі</th><th rowspan="2">Запаси</th><th colspan="7">Різниці по рядках (кроки)</th></tr>
<tr><th>B_1</th><th>B_2</th><th>B_3</th><th>B_4</th><th>B_5</th><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th><th>V</th><th>VI</th><th>VII</th></tr>
<tr><td colspan="2">A_1</td><td>10</td><td>7</td><td>4</td><td>1
50</td><td>4
50</td><td>100</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td><u>3</u></td><td>0</td><td>0</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">A_2</td><td>2
200</td><td>7</td><td>10</td><td>6
50</td><td>11</td><td>250</td><td>4</td><td>1</td><td><u>4</u></td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">A_3</td><td>8</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>2
200</td><td>200</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">A_4</td><td>11</td><td>8
200</td><td>12
100</td><td>16</td><td>13</td><td>300</td><td>3</td><td><u>4</u></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Потреби</td><td>200</td><td>200</td><td>100</td><td>100</td><td>250</td><td>850</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">Різниці по стовпцях (кроки)</td><td>I</td><td><u>6</u></td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>-</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>III</td><td>-</td><td>-</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>IV</td><td>-</td><td>-</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>V</td><td>-</td><td>-</td><td>1</td><td>-</td><td><u>2</u></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>VI</td><td>-</td><td>-</td><td>8</td><td>-</td><td><u>9</u></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>VII</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Цей розв’язок складається із 7 зайнятих клітин, а, отже, є виродженим опорним розв’язком.

Знайдемо загальну вартість плану перевезень:

$$Z = 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 1 + 50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 = 4150.$$

Отже, метод Фойгеля дає змогу отримати ще кращий опорний план перевезень порівняно з методами північно-західного кута та мінімального елемента.

4.3. Метод потенціалів для знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі

За допомогою розглянутих вище методів можна отримати початковий (вироджений або невироджений) опорний план транспортної задачі. Цей опорний план як розв'язок задачі лінійного програмування можна було б довести до оптимального за допомогою симплекс-методу. Однак через громіздкість симплексних таблиць і великого обсягу обчислювальних робіт для отримання оптимального плану транспортної задачі використовують більш прості методи. Найпоширенішим з цих методів вважається метод потенціалів.

За допомогою методу потенціалів після скінченного числа кроків знаходиться оптимальний план транспортної задачі. Для перевірки на оптимальність знайденого на кожному етапі опорного розв'язку кожному постачальнику A_i і кожному споживачу B_j ставлять у відповідність числа u_i та v_j ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), які називають їхніми *потенціалами*. Відношення між цими потенціалами встановлюють за допомогою теореми.

Теорема 4.1. *Якщо план* $\mathbf{X}^* = (x_{ij}^*)$ *транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідають* $m + n$ *чисел* u_i^* *та* v_j^*, *що задовільняють умови:*

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* > 0,$$

$$u_i^* + v_j^* \le c_{ij} \text{ для } x_{ij}^* = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n).$$

На основі теореми 4.1 для того, щоб опорний розв'язок транспортної задачі був оптимальним, необхідно виконання таких умов:

а) для кожної зайнятої клітини сума потенціалів повинна дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу, що стоїть в цій клітині:

$$u_i + v_j = c_{ij}; \tag{4.5}$$

б) для кожної вільної клітинки сума потенціалів повинна бути меншою або дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу, що стоїть в цій клітині:

$$u_i + v_j \le c_{ij}. \tag{4.6}$$

Якщо хоча б одна вільна клітинка не задовольняє умові (4.6), то знайдений опорний план не є оптимальним і його можна покращити. Для перевірки отриманого плану на оптимальність необхідно спочатку побудувати систему потенціалів.

Систему потенціалів можна побудувати тільки для невиродженого опорного плану. Такий план містить $m+n-1$ зайнятих клітин, тому для нього можна скласти систему із $m+n-1$ лінійно незалежних рівнянь вигляду (4.5) з $m+n$ невідомими. У цій системі рівнянь на одне менше, ніж невідомих, тому поклавши, що один із потенціалів дорівнює нулю, можна однозначно визначити решту. Потім необхідно перевірити правильність побудови системи потенціалів, для цього потрібно перевірити виконання умов (4.5) для всіх заповнених клітин.

Якщо опорний план є виродженим, тобто містить менше $m+n-1$ заповнених клітин, то перед побудовою системи потенціалів вводимо додаткову кількість клітин з нульовими перевезеннями, щоб отримати $m+n-1$ заповнених. Клітинки, в які уведені нульові перевезення, називають *фіктивно заповненими клітинками*. Оскільки в транспортній задачі потрібно знайти мінімальне значення цільової функції, то доцільно зробити фіктивно заповненими ті клітинки, в яких найменша вартість перевезення.

Після того, як визначені числові значення всіх потенціалів, для всіх вільних клітин обчислюють величини

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}. \tag{4.7}$$

Якщо для всіх i та j ($i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$) виконується $\Delta_{ij} \le 0$, то знайдений опорний план буде оптимальним. Якщо, хоча б для однієї пари i та j виконується $\Delta_{ij} > 0$, то знайдений опорний план не буде оптимальним, і його замінюють на новий опорний план. Для цього необхідно “завантажити” вільну клітинку $A_k B_l$ (ввести в базис змінну x_{kl}), що задовольняє умову

$$\Delta_{kl} = \max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij}. \tag{4.8}$$

З цією метою будуємо цикл у вигляді ламаної лінії, починаючи від вільної клітинки $A_k B_l$ і проводячи ланки ламаної вздовж рядків і стовпчиків до заповнених клітин. У клітинку $A_k B_l$ ставимо знак “+”, а в решту вершин циклу – почергово знаки “–” та “+” (при цьому точки самоперетину ламаної не враховуємо – вони не є вершинами циклу).

Вибираємо найменше перевезення з вершин циклу, відзначених “–” (в клітині $A_r B_s$), позначаємо його через θ і цю величину “переміщаємо” по клітинках циклу, тобто віднімаємо її від об’ємів перевезень в клітинках, відзначених “–”, і додаємо до об’єму перевезень у клітинках, відзначених “+”. Тоді об’єм перевезень в клітині $A_k B_l$ дорівнює θ, а в клітині $A_r B_s$ – нулю. У результаті клітинка $A_r B_s$ стає вільною (якщо після переміщення перевезень в деяких зайнятих клітинках з’являються нульові перевезення, то із цих клітин тільки одна перетворюється на вільну), а клітинка $A_k B_l$ – зайнятою, і отримуємо новий опорний план. Баланс перевезень не змінився, бо у кожному рядку та стовпчику ми додали і відняли одне й те саме значення.

Для отриманого нового опорного плану знову визначаємо числові значення потенціалів і для вільних клітин обчислюємо величини вигляду (4.7). Цей процес продовжуємо, поки серед Δ_{ij} не залишиться жодного додатного.

4.4. Розв'язування транспортних задач з ускладненнями у постановці

Метод потенціалів може бути застосований також до розв'язування транспортних задач **із додатковими умовами** (ускладненнями у постановці):

1) заборона на перевезення продукту з конкретних пунктів зберігання в конкретні пункти споживання.
   Якщо постачання з A_i в B_j не можуть бути здійснені, то відповідний тариф на перевезення $c_{ij} = M$, де M – дуже велике додатне число;
2) перевезення з конкретного пункту зберігання в конкретний пункт споживання строго визначеної кількості продукту.
   Якщо для постачання з A_i в B_j необхідно перевезти точно a_{ij} одиниць продукту, це число записують у відповідну клітинку, яку надалі вважаємо вільною з тарифом M – якнайбільшим;
3) перевезення з конкретного пункту зберігання у конкретний пункт споживання не менше від визначеної кількості продукту.
   Якщо з пункту A_i в B_j необхідно перевезти не менше, ніж a_{ij} одиниць продукту, то вважаємо, що запаси A_i та потреби B_j зменшені на a_{ij} одиниць;
4) перевезення з конкретного пункту зберігання у конкретний пункт споживання не більше від визначеної кількості продукту.
   Якщо з пункту A_i в B_j необхідно перевезти не більше, ніж a_{ij} одиниць продукту, то для кожного обмеження такого типу вводимо додатковий стовпчик, у якому потреби рівні $b_j - a_{ij}$, вартість перевезень $c_{i(n+1)} = M$, при цьому потреби B_j рівні a_{ij} .

<u>Приклад 4.4.</u> Знайти за методом потенціалів оптимальний план транспортної задачі, заданої в табл. 4.2.

Нехай початковий опорний розв'язок (план) даної транспортної задачі знайдено методом мінімального елемента (табл. 4.4).

Він є виродженим, бо кількість заповнених клітин рівна 7, а $m+n-1=8$. Тому, враховуючи, що серед вільних клітин найменшу вартість перевезення одиниці вантажу має A_3B_4, а без використання цієї клітинки неможливо побудувати жодного циклу, то в неї вводимо нульове перевезення (клітинка A_3B_4 вважається фіктивно заповненою). Додамо до таблиці 4.4 по одному рядку і стовпцю для запису потенціалів.

Виберемо рядок, що містить найбільшу кількість заповнених клітин, тобто рядок A_4, і для нього вважатимемо $u_4 = 0$. В рядку A_4 три заповнені клітинки A_4B_2, A_4B_3 та A_4B_5 зв'язують потенціал u_4 відповідно з потенціалами v_2, v_3 та v_5. Обчислимо ці потенціали за формулою (4.1): $v_2 = c_{42} - u_4 = 8 - 0 = 8$; $v_3 = c_{43} - u_4 = 12 - 0 = 12$; $v_5 = c_{45} - u_4 = 13 - 0 = 13$. Решта потенціалів неможливо визначити з допомогою потенціалу u_4. Тепер, почергово переглянувши стовпці B_2, B_3 та B_5, за заповненими у них клітинками і відповідними потенціалами v_2, v_3 та v_5 визначимо потенціали $u_2 = 7 - 8 = -1$ і $u_3 = 2 - 13 = -11$. Решта потенціалів знайдемо в подібний спосіб і запишемо у табл. 4.6.

Таблиця 4.6

Постачальники	Споживачі						Запас
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1 =$ 3	$v_2 =$ 8	$v_3 =$ 12	$v_4 =$ 13	$v_5 =$ 13	
A_1	$u_1 =$ –12	10	7	4	1 100	4	100
A_2	$u_2 =$ –1	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	$u_3 =$ –11	8	5	3	2 **0**	2 200	200
A_4	$u_4 =$ 0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Потім для всіх вільних клітин за формулою (4.7) визначимо знаки Δ_{ij}. Наприклад, для рядка A_1: $\Delta_{11} = -12 + 3 - 10 = -19$; $\Delta_{12} = -12 + 8 - 7 = -11$; $\Delta_{13} = -12 + 12 - 4 = -4$; $\Delta_{15} = -12 + 13 - 4 = -3$.

Для трьох вільних клітин Δ_{ij} будуть додатними, тобто $\Delta_{23} = 1$, $\Delta_{24} = 6$ і $\Delta_{25} = 1$. Отже, знайдений опорний план не є оптимальним. При переході до нового опорного плану клітинку, яку треба завантажувати, знову знаходимо з умови (4.8). Тепер такою є клітинка A_2B_4. Далі будуємо цикл з вершинами в ній та заповнених клітинках A_3B_4, A_3B_5, A_4B_5, A_4B_2 і A_2B_2; у клітинку A_2B_4 ставимо знак "+", а в решту вершин циклу – почергово знаки "–" та "+" (табл. 4.7).

Таблиця 4.7

Постачальники	Споживачі						Запаси
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1 =$ 3	$v_2 =$ 8	$v_3 =$ 12	$v_4 =$ 13	$v_5 =$ 13	
A_1	$u_1 =$ –12	10	7	4	1 100	4	100
A_2	$u_2 =$ –1	2 200	7(-) 50	10	6(+)	11	250
A_3	$u_3 =$ –11	8	5	3	2(-) 0	2(+) 200	200
A_4	$u_4 =$ 0	11	8(+) 150	12 100	16	13(-) 50	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Таблиця 4.8

Постачальники	Споживачі						Запас
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1 =$ 3	$v_2 =$ 8	$v_3 =$ 12	$v_4 =$ 7	$v_5 =$ 13	
A_1	$u_1 =$ –6	10	7	4	1 100	4	100
A_2	$u_2 =$ –1	2 200	7 50	10	6 0	11	250
A_3	$u_3 =$ –11	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4 =$ 0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Знаходимо найменше перевезення θ у вершинах цього циклу, відзначених "–" (клітинки A_3B_4, A_4B_5 и A_2B_2): $\theta = \min(0; 50; 50) = 0$. Цю величину віднімаємо від об'ємів перевезень в клітинках зі знаком "–" і додаємо до об'ємів перевезень у клітинках зі знаком “+” (клітинки A_2B_4, A_3B_5 і A_4B_2). Змінюємо значення потенціалів (табл. 4.8) і обчислюємо $\Delta_{13}=2$, $\Delta_{15}=3$, $\Delta_{23}=1$ і $\Delta_{25}=1$.

Таблиця 4.9

Постачальники	Споживачі						Запаси
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1=$ 3	$v_2=$ 8	$v_3=$ 12	$v_4=$ 7	$v_5=$ 13	
A_1	$u_1=$ –6	10	7	4	1(-) 100	4(+)	100
A_2	$u_2=$ –1	2 200	7(-) 50	10	6(+) 0	11	250
A_3	$u_3=$ –11	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4=$ 0	11	8(+) 150	12 100	16	13(-) 50	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Знайдений опорний план ще не є оптимальним. Будуємо цикл (табл. 4.9), здійснюємо переміщення перевезень у межах його клітин і знаходимо нові зна-

Таблиця 4.10

Постачальники	Споживачі						Запаси
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1=$ 3	$v_2=$ 8	$v_3=$ 12	$v_4=$ 7	$v_5=$ 10	
A_1	$u_1=$ –6	10	7	4	1 50	4 50	100
A_2	$u_2=$ –1	2 200	7 0	10	6 50	11	250
A_3	$u_3=$ –8	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4=$ 0	11	8 200	12 100	16	13	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

чення потенціалів (табл. 4.10).

Для трьох вільних клітин Δ_{ij} будуть додатними, а саме $\Delta_{13} = 2$, $\Delta_{23} = 1$ і $\Delta_{33} = 1$. Отже, знайдений опорний план не оптимальний. Продовжуємо далі: будуємо цикл (табл. 4.11), здійснюємо переміщення перевезень у межах його клітин, обчислюємо нові значення потенціалів за заповненими клітинками і для всіх вільних клітин за формулою (4.7) визначаємо знаки Δ_{ij}.

Таблиця 4.11

Постачальники	Споживачі						Запаси
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1 =$ 3	$v_2 =$ 8	$v_3 =$ 12	$v_4 =$ 7	$v_5 =$ 10	
A_1	$u_1 =$ –6	10	7	4(+)	1(-) 50	4 50	100
A_2	$u_2 =$ –1	2 200	7(-) 0	10	6(+) 50	11	250
A_3	$u_3 =$ –8	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4 =$ 0	11	8(+) 200	12(-) 100	16	13	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Для всіх вільних клітин Δ_{ij} будуть недодатними. Отже, знайдений опорний план є оптимальним, а його загальна вартість перевезень є такою:

$$Z = 50 \cdot 1 + 50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 6 + 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 100 \cdot 12 = 4150.$$

Контрольні запитання до лабораторної роботи № 4

1. Що таке транспортна задача і яке її призначення?
2. Яка постановка транспортної задачі?
3. Чи можна застосувати для розв’язування транспортних задач симплекс-метод? Відповідь обґрунтуйте.
4. У чому полягає математична модель транспортної задачі?
5. Що ви знаєте про закриту модель транспортної задачі?
6. Що таке відкрита модель транспортної задачі і як вона розв’язується?
7. Як визначається опорний план транспортної задачі в таблиці, що таке вільні клітинки і заповнені?
8. У чому суть методу північно-західного кута?

9. У чому суть методу мінімального елемента?
10. У чому суть методу Фойгеля?
11. З якою метою застосовується метод потенціалів?
12. Що таке потенціали, який зв’язок існує між ними?
13. У чому суть методу потенціалів?
14. Як будується система потенціалів, що називають фіктивно заповненими клітинками?
15. Як переходити до нового опорного плану в методі потенціалів, як будується цикл?
16. Сформулюйте теорему про потенціали. Видозміною якої теореми вона є?
17. Як розв’язують транспортні задачі з ускладненнями у постановці?

Завдання до лабораторної роботи № 4

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Написати програму розв’язування транспортної задачі за методом потенціалів (для пошуку опорного початкового плану реалізувати один з методів: північно-західного кута, метод мінімального елемента, евристичний метод Фойгеля - такий, який не дає зразу оптимального розв'язку) згідно з варіантом із Додатка до лабораторних робіт № 4 та № 5.
3. Оформити звіт про виконану роботу.
4. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

Вимоги до програми

Програма має передбачати такі можливості:

1. Введення вхідних даних вручну (задати елементи таблиці). Передбачити можливість некоректного введення даних.
2. Визначення типу транспортної задачі (у випадку відкритої задачі виведення відповідного повідомлення). Розв’язання закритої задачі.
3. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного варіанта завдання:
   - пошук опорного плану та перевірка його на виродженість;
   - для невиродженого опорного плану пошук оптимального методом потенціалів із виведенням та підписанням усіх проміжних таблиць та побудовою циклів.
4. Виведення відповідного повідомлення у разі відсутності оптимального плану.

Додаток до лабораторних робіт № 4 та № 5

Є n пунктів постачання і m пунктів споживання продукції. Вартість перевезення одиниці продукції з i-го пункту постачання в j-й центр споживання c_{ij} наведена в таблицях. Скласти план перевезень щодо постачання необхідної продукції в пункти споживання, який мінімізуватиме сумарні транспортні витрати. Необхідні дані для індивідуального варіанту потрібно взяти з таблиць, наведених нижче.

Варіант 1.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	3	4	5	15	24	25
B	19	2	22	4	13	25
C	20	27	1	17	19	10
D	4	15	17	8	14	30
Потреби	11	11	41	16	11	

Варіант 2.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	2	4	1	3	30
B	5	6	5	4	20
C	3	7	9	5	40
D	1	2	2	7	50
Потреби	35	20	55	30	

Варіант 3.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	2,3	7	6	8	15
B	2	1,3	1	2,5	55
C	4,9	4	4	1	12
D	2	8	1	4	18
E	3	2,1	1,2	5	17
Потреби	35	37	20	25	

Варіант 4.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	5	3	8	4	10	150
B	4	5	3	2	1	60
C	5	11	8	10	4	55
D	16	4	1	5	6	50
Потреби	90	85	70	50	20	

Варіант 5.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	2	4,1	6	17
B	5	2,5	2	3	73
C	3	4	3	4,2	52
D	5,1	3	2	7	38
Потреби	37	35	86	22	

Варіант 6.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	5	3	8	4	10	25
B	4	5	3	2	1	25
C	5	11	8	10	4	10
D	16	4	1	5	6	30
Потреби	11	11	41	11	16	

Варіант 7.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	1,7	3	4	6	28
B	5,2	2,6	9,8	3	27
C	3	2	1	4	52
D	6	5	2,5	7	18
Потреби	32	18	60	15	

Варіант 8.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготовлення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	1	2	9	7	60
B	3	40	15	5	55
C	6	4	8	3	40
D	24	3	3	1	35
Потреби	50	25	45	70	

Варіант 9.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6	2	4,8	3	20
B	8	4	5	8	30
C	5,5	2	3	7	27
D	5	6	8,2	4	23
E	1,8	9	7	6	30
Потреби	40	30	48	12	

Варіант 10.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	1	3	4	8	20
B	8	6	2	6	20
C	7	7	4	8	25
D	5	8	4	5	45
Потреби	25	30	40	15	

Варіант 11.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,2	1	4,2	5	17
B	2	4	5,1	8	20
C	5	8	3	4	40
D	2	4	9	2	20
E	4	2,75	2	1	23
Потреби	45	30	25	20	

Варіант 12.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	1	3	3	8	10
B	8	6	2	6	20
C	4	7	7	3	35
D	5	2	4	5	45
Потреби	25	30	40	15	

Варіант 13.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	9	1	3	43
B	2	5	5	6	20
C	2	5	10	4	30
D	3	7	2	6	32
Потреби	18	50	22	35	

Варіант 14.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виго-товлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	8	12	4	9	10	60
B	5	7	15	3	6	40
C	9	4	6	12	7	100
D	5	3	2	6	4	50
Потреби	30	80	65	35	40	

Варіант 15.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	9	4	7,4	20
B	2	8	5	1	15
C	7	2,2	1	4	30
D	2,5	6	10	6	40
Потреби	48	10	35	12	

Варіант 16.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виго-товлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	6	3	1	3	10	150
B	2	8	7	5	6	90
C	1	3	8	6	8	40
D	7	4	5	9	2	55
Потреби	100	75	80	60	20	

Варіант 17.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,3	8,6	1	5	25
B	2,5	7	5	7	42
C	4	5	11	8	40
D	1	5	4	5	35
Потреби	44	30	26	42	

Варіант 18.

Підприємст-ва	Вартість одиниці продукції Споживачі					Обсяг виго-товлення
	1	2	3	4	5	
A	7	3	4	8	6	20
B	5	7	2	3	5	60
C	1	4	5	2	6	45
D	3	4	2	7	8	70
Потреби	25	40	50	35	45	

Варіант 19.

Підприємства	Вартість одиниці продукції Споживачі				Обсяг виготов-лення
	1	2	3	4	
A	6,3	8	5	11	12
B	4	11	7	9	24
C	7	3	5	8	32
D	9	5,5	10	1	32
E	5	8	11	5	30
Потреби	60	20	30	20	

Варіант 20.

Підприємства	Вартість одиниці продукції Споживачі					Обсяг виго-товлення
	1	2	3	4	5	
A	8	6	7	3	4	50
B	7	4	9	3	4	50
C	6	1	4	5	2	55
D	7	8	3	4	2	50
Потреби	35	30	50	25	65	

Варіант 21.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	7,3	9	3	10	14
B	3	10	5	9	30
C	7	11	3	2	20
D	8	5	9	2	32
E	4,8	9	10	5	16
Потреби	60	14	20	18	

Варіант 22.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виго-товлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	5	1	5	2	4	30
B	5	7	6	3	2	70
C	1	5	4	2	6	25
D	1	6	3	3	5	25
Потреби	10	40	20	60	20	

Варіант 23.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4,2	10	5	9	17
B	5	8	5	9	33
C	6	4	4	7,3	20
D	7	5	11	4	12
E	3	11	8	5	20
Потреби	35	22	30	15	

Варіант 24.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виго-товлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	2	8	4	6	3	95
B	3	2	5	2	6	55
C	6	5	8	7	4	40
D	3	4	4	2	1	60
Потреби	30	90	80	20	30	

Варіант 25.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	5,1	8	6	15	310
B	7	12	5	9	145
C	6	9	2	16	202
D	8	3	9	4	180
E	4,5	9	10	5	73
Потреби	530	120	120	140	

Варіант 26.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	3	7	1	5	4	30
B	7	5	8	6	3	5
C	6	4	8	3	2	45
D	3	1	7	4	2	40
Потреби	10	35	15	25	35	

Варіант 27.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	2	2	5	7	170
B	5	6,1	2	3	129
C	4	4	3	6,2	115
D	8	2	2	7	240
Потреби	117	140	310	87	

Варіант 28.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	1	5	2	2	1	90
B	3	6	2	4	3	15
C	8	10	4	5	6	90
D	7	3	7	9	1	55
Потреби	30	40	55	80	45	

Варіант 29.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Обсяг виготов-лення
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	2	2.5	5	80
B	5	2.5	2	4	72
C	3	4	3	4.2	50
D	5.1	3	2	4	40
Потреби	65	47	92	38	

Варіант 30.

Підприємства	Вартість одиниці продукції					Обсяг виготовлення
	Споживачі					
	1	2	3	4	5	
A	16	30	17	10	16	4
B	20	27	26	9	23	6
C	13	4	22	3	1	10
D	3	1	5	4	24	10
Потреби	7	7	7	7	2	