中国科学技术大学 计算机科学与技术系
University of Science and Technology of China
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND TECHNOLOGY

算法设计与分析

Design and Analysis of Algorithms

主讲人　徐 云

Fall 2012, USTC

Part 1 Foundation

Part 2 Sorting and Order Statistics

Part 3 Data Structure

Part 4 Advanced Design and Analysis Techniques

Part 5 Advanced Data Structures

Part 6 Graph Algorithms

Part 7 Selected Topics

…

chap 34 Computation Models and NP-Completeness

…

Part 8 Supplement

第34章 计算模型和NP完全

34.1 引言

34.2 图灵机模型

34.3 NP完全问题

34.1 引言

- 早期的计算模型
- 算法与计算模型的关系
- 计算模型的作用
- 图灵机与语言识别问题
- 通用的图灵机

早期的计算模型

- Recursive Function Theory – Kleene, Church, Turing, Post, 1930's
- Turing Machines – Turing, 1930's
- RAM Machines – von Neumann, 1940's
- Cellular Automata – von Neumann, 1950's
- Finite-state machines, pushdown automata various people, 1950's
- VLSI models – 1970's
- Parallel RAMs, etc. – 1980's

算法与计算模型的关系

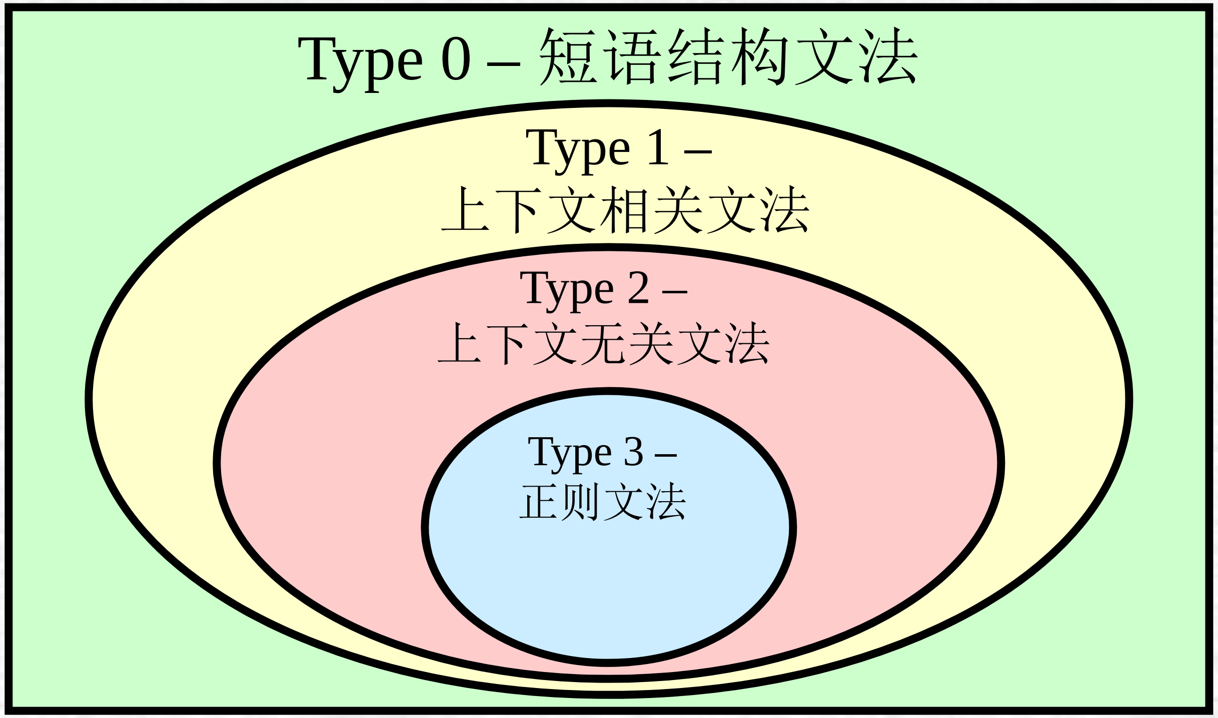
- 非形式地说，算法是为实现某个任务而构造的简单指令集。这是一个非严格的算法定义。
- 1900年，Hilbert在巴黎举行的世界数学家大会上提出了23个数学问题，其中第10个问题是要设计一个算法来测试多项式是否有整数根，他没有用算法这个术语，而用这样一句短语：“通过有限多次运算就可以决定的过程”。
  - 该问题是算法上不可解的，1970年由Yuri Matijasevic解决。
  - 关键在于算法的精确定义，后来由Church和Turing分别解决，从此称为丘奇-图灵论题。
  - Church使用λ演算定义算法和Turing使用图灵机定义算法。
- 现在严格地讲，一个问题算法可解的等于该问题在图灵机上可解(可判断)。

计算模型的作用

- 对于一个计算任务，有两个问题要解决：
  - 该计算任务能否在一个计算机上实现？
  - 该计算任务在一个计算机上实现的复杂度？
- 计算模型可以帮助我们解决上述问题，本课程我们主要学习图灵机模型。
- 计算模型的主要作用：
  - 可计算性：将问题按计算模型的可计算性进行分类。也就是回答一个问题在某种计算模型上是否可计算，而不计较其计算时间的长短。
  - 计算复杂性：将问题按计算模型的计算复杂性(时间和空间)进行分类。
  - 可编程性：在计算模型下算法的实现。

图灵机与语言识别问题（1）

- 语言识别问题和包含关系：



图灵机与语言识别问题（2）

- 有限状态自动机能够识别正则文法生成的语言；
- 下推自动机能够识别上下文无关文法生成的语言；
- 线性有界自动机能够识别上下文相关文法生成的语言；
- 然而上述自动机不能识别短语结构文法生成的语言。图灵机能够识别短语结构文法生成的所有语言，是一种能力很强的计算模型。

通用的图灵机（1）

- TM's we saw executed a specific algorithm
  - A different TM needed for a different alg.
  - Or, re-wire the machine
- Turing (in 1936) foresaw the *stored-program computer*
  - Flexibility to execute different algorithms
  - Turing describes a Universal TM
- "a TM is a general model of computation"
  - Means: *any algorithmic procedure that can be carried out (by a human or a computer) can be carried out by a TM*
- First formulated by Alonzo Church (1936)
  - Referred to as Church's thesis also
  - Not a precise statement because "algorithmic procedure" is undefined → cannot prove

通用的图灵机（2）

- The thesis is generally accepted, because
  - Nature of model indicates all steps crucial to human computation can be carried out
  - No one has proposed an “algorithmic procedure” that cannot be implemented in TM
  - Various enhancements do not enhance the computing power
  - Other theoretical models have been shown to be equivalent to a TM

第34章 NP完全

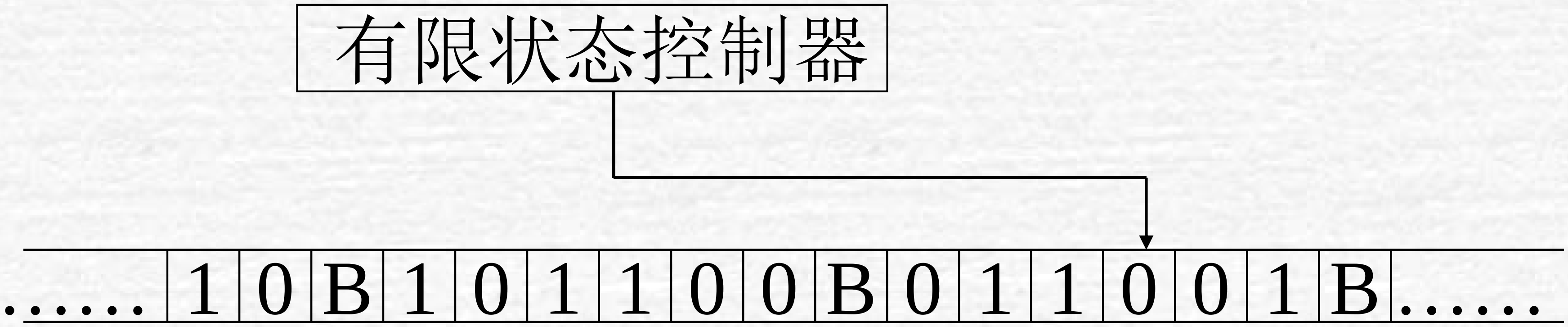
34.2 图灵机模型

- 确定型图灵机
- 确定型图灵机计算示例
- 非确定型图灵机

确定型图灵机DTM（1）

- 图灵机模型(Turing 1936)：最通用的计算模型
  - 能做现代计算机所能做的一切；
  - 但实现的效率和方式有所不同。
- 思想源于：模仿人在一个无限长的带格子的纸带上写字
  - 人使用一个带橡皮头的铅笔来写字；
  - 写字从某个格子开始，或者仅仅读取该格子中的符号，或者擦取该格子中的符号并写上一个新的符号；
  - 写字以这种连续方式进行：沿着纸带的两个方向，向相邻的格子进行写字和读字。

确定型图灵机DTM（2）



- 两端无限长的带子，带子可读可写，带子作为输入设备、存储设备和输出设备；
- 有限状态控制器只含有限个状态，其中有开始状态、接受状态和拒绝状态；
- 读写头可左移右移，取决于当前状态和当前格子中的符号；
- 一个单步移动的构成：当前格子中读或写，改变状态，根据状态确定左移/右移/停机；

确定型图灵机DTM（3）

- 图灵机的形式定义：

A TM is $T=(S, I, f, s_0, s_{accept}, s_{reject})$， where

- S : a finite set of states
- I : a finite input alphabet (excluding blank B)
- f : is the transition function: $S \times I \rightarrow S \times I \times \{R, L\}$ [f may not be defined for some points]
- s_0 : the start state
- s_{accept} : the accept state
- s_{reject} : the reject state

确定型图灵机计算示例

- 示例：构造一个图灵机求两个非负整数n_1与n_2的和

解：初始带上的数据如下：

$$\cdots\cdots \; B \; B \; \overbrace{1 \; 1 \; \cdots \; \cdots \; 1 \; 1}^{n_1+1} \; * \; \overbrace{1 \; 1 \; \cdots \; \cdots \; 1 \; 1}^{n_2+1} \; B \; B \; \cdots\cdots$$

通过状态变化五元组(即f)，使得停机时带上产生连续的n_1+n_2+1个1

下面设计状态变化五元组有：

$(s_0,1,s_1,B,R)$ //当前状态和数据$(s_0,1)$->(s_1,B)，并右移

$(s_1,*,s_3,B,R)$ //s_3不定义状态转移函数，使得机器停机

$(s_1,1,s_2,B,R)$

$(s_2,1,s_2,1,R)$ //当前状态和数据为$(s_2,1)$时，右移

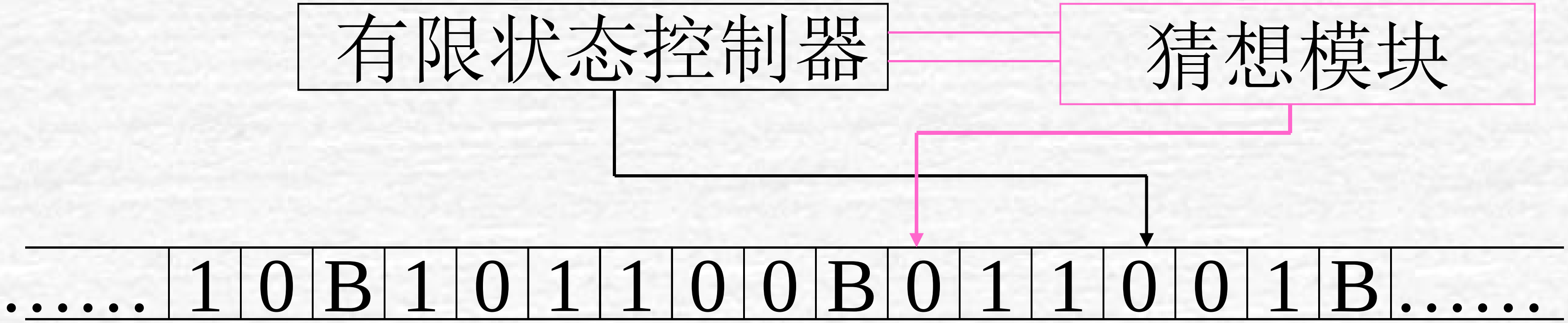
$(s_2,*,s_3,1,R)$ //当前状态和数据为$(s_2,*)$变换到$(s_3,1)$

开始时机器读写头指向最左端的1，状态为s_0，以后状态变化序列为：

$n_1>0$: $(s_0,1,s_1,B,R)$, $(s_1,1,s_2,B,R)$, $(s_2,1,s_2,1,R)$,…,$(s_2,1,s_2,1,R)$, $(s_2,*,s_3,1,R)$

$n_1=0$: $(s_0,1,s_1,B,R)$, $(s_1,*,s_3,B,R)$

非确定型图灵机NTM



- 分为猜想阶段和验证阶段；
- 不现实的计算
  - 现实中的计算方式都是确定的
- 解SAT问题的一个非确定型算法
  - 第一步：猜测一个变量的真值赋值；
  - 第二步：检查该赋值是否满足
- 非确定型算法的计算时间：
  - 各种可能的计算过程的最短时间

第34章 NP完全

34.1 引言

34.2 图灵机模型

34.3 NP完全问题

P问题和NP问题

- 判定问题：只有肯定和否定两种答案
  - 优化问题可以化作判定问题处理；
- P问题：
  - 具有多项式时间算法的判定问题类；
- NP问题：
  - 在非确定型图灵机上多项式时间可解的问题；
  - 在确定型图灵机上多项式时间可验证的问题；
- 一个结论：P类包含在NP类中
- NP类问题在确定图灵机上指数时间可解，如果P<>NP

计算难度的比较——归约

- 多项式时间归约（Karp归约 1972)；
- 问题A的实例I多项式时间内转化为问题B的实例f(I)，对于A的输入I 的回答与其对应的B的输入 f(I) 一致，则称A可多项式归约于B，记为 $A \leq_p B$；
- 如果B可以多项式时间求解，则A也可以多项式时间求解；

NP完全问题（1）

- 定义：

  问题p是NP完全（NPC）问题，

  $$p \in NPC: 1. p \in NP;\ 2. \forall q \in NP, \text{有}\, q \le_p p$$

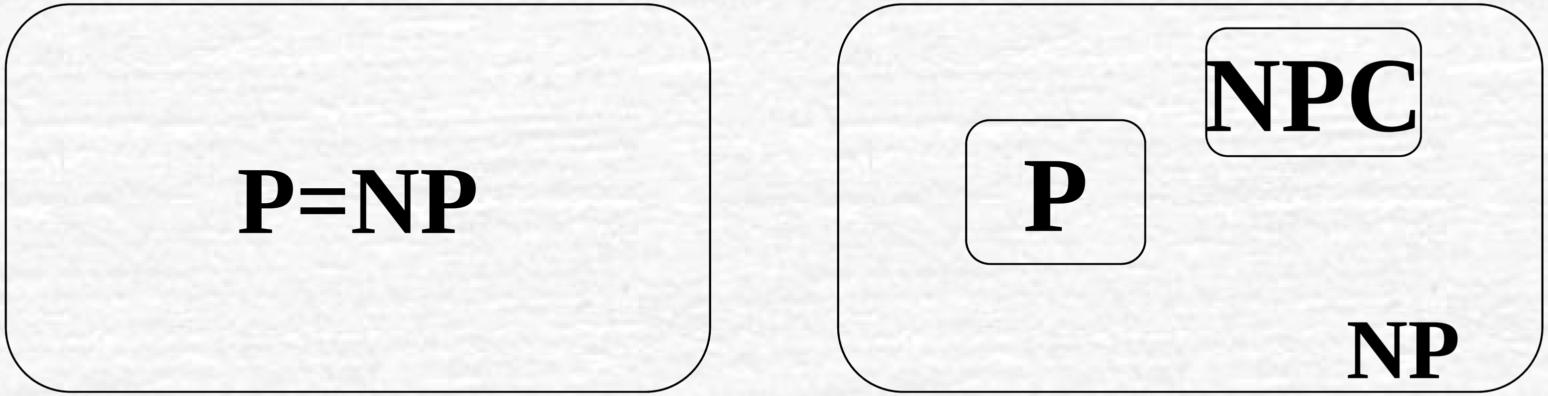
- NP完全问题是NP问题中”最难“的问题

NP完全问题（2）

- 第一个NP完全问题（Cook-levin定理　1971）
  - 可满足性问题3SAT是第一个NP完全问题
- 如果一个NP完全问题多项式时间归约到另一个NP问题，则该问题也是NP完全的
- 六个NP完全问题（Karp 1972）
  - 3SAT，3DM，VC，团，HC，划分
- 更多的NP完全问题
  - 1979年：300多个
  - 1998年：2000多个

P=?NP（P-NP问题）

$$P \cap NPC \neq \phi \Rightarrow P = NP$$



现在的估计

如果 $P \neq NP$，则NPC问题无有效算法

如何处理NP完全问题

- 实际中的NP完全问题不会消失；
- 证明难度并不会使问题得到解决；
- 如何处理NP完全问题：
  - 近似算法
  - 随机算法
  - 并行计算
  - …
  - 新型的计算模型(计算机)：DNA计算，量子计算，等

End of Ch34