임용시험 기출문제
(해석학, 복소해석학)

부산대학교 수학교육과
2017

임용시험 기출문제
(해석학, 복소해석학)

해석학 (2002∼2008)

01. (2002년) 자연수 n에 대하여 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$을 $f_n(x) = n(1-x)x^n$으로 정의할 때, 다음 물음에 답하라.

(a) 함수열 $\{f_n\}$이 점별수렴하는 함수f를 구하라.

(b) 함수열 $\{f_n\}$이 f로 평등수렴하는 지를 판정하라.

Solution. (a) 모든 자연수 n에 대하여 $f_n(0) = f_n(1) = 0$이므로 다음 식이 성립한다.

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0, \quad f(1) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$$

이제 $0 < x < 1$이라 하자. 그러면 L'Hôpital의 법칙을 사용하여 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n(1-x)x^n = \lim_{n\to\infty}(1-x)\frac{n}{(1/x)^n} \\ &= (1-x)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(1/x)(1/x)^n} = 0. \end{aligned}$$

따라서 모든 $x \in [0,1]$에 대하여 $f(x) = 0$이다.

(b) $f_n'(x) = 0$인 점 $x = n/(n+1)$에서 함수 $f_n(x)$는 최대값을 갖는다. 이 결과를 이용하여 $\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\}$을 계산한다:

$$\|f_n - f\|_\infty = n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

여기서 $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = \dfrac{1}{e} \neq 0$ 이므로 $\{f_n\}$은 f로 평등수렴하지 않는다.

02. (2002년) 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$가 연속일 때, 리만적분(Riemann integral)의 정의를 이용하여 극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$가 존재함을 보여라.

Proof. $f \in C[0,1]$이므로 함수 f의 리만적분 $\int_0^1 f(x)dx$가 존재하고 리만적분의 정의에 의해서 다음 식이 성립한다.

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{1}$$

식 (1)에서 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$는 폐구간 $[0,1]$의 임의의 분할이고 $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 그리고 $\|P\| = \max\{x_k - x_{k-1} : 1 \le k \le n\}$이다. 여기서

$$x_k = \frac{k}{n} \ \ (0 \le k \le n), \quad t_k = x_k = \frac{k}{n} \ \ (1 \le k \le n)$$

이라 두면 $x_k - x_{k-1} = \dfrac{1}{n}(1 \le k \le n)$, $\|P\| = \dfrac{1}{n}$이므로 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}. \tag{2}$$

식 (1)과 식 (2)에서 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

따라서 극한 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$가 존재한다.

03. (2003년) 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(a) 모든 n에 대하여 n계 도함수 $f^{(n)}(x)$가 존재함을 보이고 함수 f의 $x = 0$에서의 테일러 급수를 구하라.

(b) (a)의 결과를 이용하여 실함수(function of a real variable)와 복소함수(function of a complex variable)의 미분가능성이 갖는 특징의 차이를 서술하라.

Solution. (출제오류) f는 $x=0$에서 미분불능인 함수이다:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{e^u} = 0,$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-1/h}}{h} = \lim_{u\to -\infty} ue^{-u} = -\infty.$$

따라서 , f는 $x=0$에서 미분불능인 함수이다.

Remark. 위의 문제의 오류를 수정하려면 함수 $f(x)$의 정의식을 $f(0) = 0,\ x \neq 0$일 때 $f(x) = e^{-1/x^2}$으로 바꾸면 된다.

03. (2003년) 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(a) 모든 n에 대하여 n계 도함수 $f^{(n)}(x)$가 존재함을 보이고 함수 f의 $x=0$에서의 테일러 급수를 구하라.

(b) (a)의 결과를 이용하여 실함수(function of a real variable)와 복소함수(function of a complex variable)의 미분가능성이 갖는 특징의 차이를 서술하라.

Solution. (a) $x \neq 0$이면 미분하여 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^{-3}e^{-1/x^2}, \\ f''(x) &= x^{-6}(4-6x^2)e^{-1/x^2}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= x^{-3n}P_n(x)e^{-1/x^2}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $P_n(x)$는 다항식이다. 로피탈 법칙을 사용하여 다음 식이 성립함을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^k}=0,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

(2) 식에서 다음 결과를 얻는다.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-1/h^2}}{h}=0.$$

$f^{(n)}(0)=0$이라 하자. $\lim\limits_{x\to 0}P_n(x)=P_n(0)\in\mathbb{R}$이 성립하므로 (1) 식과 (2) 식에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(h)-f^{(n)}(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0}P_n(h)\frac{e^{-1/h^2}}{h^{3n+1}}=P_n(0)\cdot 0=0.$$

따라서 모든 n에 대하여 $f^{(n)}(0)=0$이다. 그러므로 모든 n에 대하여 n계 도함수 $f^{(n)}(x)$가 존재한다.

모든 n에 대하여 $f^{(n)}(0)=0$이므로 함수 f의 $x=0$에서의 테일러 급수는 다음과 같다.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

(따라서, $x=0$의 어떤 근방을 잡더라도 그 근방에서 $f(x)$의 테일러 급수는 $f(x)$에 수렴하지 않는다. 즉, $x=0$에 관한 $f(x)$의 테일러 급수가 $f(x)$에 수렴하는 $x=0$의 근방이 존재하지 않는다.)

(b) 구간 (a,b)가 $x=0$을 포함하는 임의의 개구간(open interval)이라 하자. (a)의 결과에 의해서 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

는 구간 (a,b)에서 미분가능이나 (실제로는 $f\in C^\infty(a,b)$) 개집합 (a,b)의 점 $x=0$에 관한 $f(x)$의 테일러 급수가 $f(x)$에 수렴하는 $x=0$의 근방이 존재하지 않는다.

복소함수의 경우에는 $G \subset \mathbb{C}$가 개집합(open set)일 때, 함수 $f : G \to \mathbb{C}$가 미분가능인 함수(해석함수)이면 도함수에 관한 Cauchy 적분공식에 의해서 $f \in C^\infty(G)$이고 개집합 G의 각 점 z_0에서 z_0에 관한 $f(z)$의 테일러 급수가 $f(z)$에 수렴하는 z_0의 근방이 존재한다.

04. (2003년) 함수항급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$가 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 평등수렴함을 보여라.

(b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$라 할때, f의 리만적분 가능성을 판별하고 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$를 구하라.

Solution. (a) $\left|\dfrac{1}{2^n} \cos(3^n x)\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$이고 상수항급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$가 수렴하므로 Weierstrass M-Test에 의해서 함수항급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$는 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 평등수렴한다.

(b) 임의의 $n = 0, 1, 2, \cdots$에 대하여 함수 $f_n(x) = \dfrac{1}{2^n} \cos(3^n x)$가 $\mathbb{R}$에서 연속함수이므로 함수 $f(x)$는 $\mathbb{R}$에서 $n \to \infty$일 때 연속함수 $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$의 평등극한(uniform limit)이다. 그러므로 $f(x)$는 $\mathbb{R}$에서 연속인 함수이다. 따라서 $f(x)$는 임의의 폐구간 $[a, b] \subset \mathbb{R}$에서 리만적분 가능인 함수이다. 항별적분정리를 사용하여 적분 $\int_0^{2\pi} f(x)dx$를 계산한다:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{2\pi} \cos(3^n x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\frac{1}{3^n} \sin(3^n x)\right]_{x=0}^{x=2\pi} = 0.$$

05. (2004년) $x_1 = 3,\ x_{n+1}^3 = 6x_n^2 - 8x_n$으로 정의된 수열 $\{x_n\}$이 유계인 증가수열임을 보이고 $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값을 구하라.

Solution. (1) $\{x_n\}$: 유계인 증가수열

$x_1 = 3$이므로 $x_2^3 = 6x_1^2 - 8x_1 = 30$이다. 따라서 $3 \le x_2 = \sqrt[3]{30} < 4$가 성립한다. 여기서 $3 \le x_n < 4$라 하면 다음 식이 성립한다.

$$x_{n+1}^3 = 6x_n^2 - 8x_n = 2x_n(3x_n - 4) < 8(12 - 4) = 64,$$
$$x_{n+1}^3 = 6x_n^2 - 8x_n = 2x_n(3x_n - 4) \ge 6(9 - 4) = 30.$$

위의 두 식에서 $3 \le x_{n+1} < 4$가 성립함을 알 수 있다. 따라서 수학적 귀납법에 의해서 모든 n에 대하여 $3 \le x_n < 4$가 성립한다. 다음에 모든 n에 대하여 $x_n < x_{n+1}$이 성립함을 보이자. 모든 n에 대하여 $3 \le x_{n+1} < 4$이므로 다음식이 성립한다.

$$\begin{aligned} x_{n+1}^3 - x_n^3 &= -x_n^3 + 6x_n^2 - 8x_n = -x_n(x_n^2 - 6x_n + 8) \\ &= -x_n(x_n - 2)(x_n - 4) \ge 0. \end{aligned}$$

따라서 $x_{n+1}^3 \ge x_n^3$이므로 $x_{n+1} \ge x_n$이 성립한다.

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값.

수열 $\{x_n\}$이 유계인 증가수열이므로 단조수렴정리에 의해서 $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값이 존재한다. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$라 하면

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^3 = x^3, \quad \lim_{n\to\infty} x_n^2 = x^2$$

이므로 $x_{n+1}^3 = 6x_n^2 - 8x_n$에서 $x^3 = 6x^2 - 8x$를 얻는다. 방정식 $x^3 = 6x^2 - 8x$의 근을 구하면 $x = 0, 2, 4$이다. 그런데 $3 \le x_n < x_{n+1} < 4$에서 $3 \le x \le 4$이므로 구하는 값은 $\lim_{n\to\infty} x_n = x = 4$이다.

Theorem. (르베그의 리만적분 가능성 정리) Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Then f is Riemann integrable over $[a, b] \Leftrightarrow f$ is continuous a.e. on $[a, b]$.

06. (2004년) 함수 $f(x)$를 다음 식으로 정의한다.

$$f(x) : [0, 2] \to \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} x, & x\text{가 유리수} \\ x^2, & x\text{가 무리수} \end{cases}$$

(a) 함수 f가 $x = 1$에서 연속임을 보이라.

(b) 함수 f의 리만(Riemann) 적분가능성을 판정하라.

Solution. (a) $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$ 또는 $|f(x) - f(1)| = |x^2 - 1| = |x+1||x-1|$이므로 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$이 성립하는 δ를 선택하면 다음 식이 성립한다.

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < 3|x - 1| < 3\delta < \varepsilon.$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 연속이다.

Alternate Solution. 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 두자. 그러면 함수 $f(x)$의 정의에 의해서 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{x \in \mathbb{Q}, x \to 1} f(x) = \lim_{x \in \mathbb{Q}, x \to 1} x = 1 = f(1),$$
$$\lim_{x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}, x \to 1} f(x) = \lim_{x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}, x \to 1} x^2 = 1 = f(1).$$

여기서 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$을 얻는다. 따라서 $f(x)$는 $x = 1$에서 연속이다.

(b) 폐구간 $[0, 2]$의 임의의 분할 P에 대응하는 함수 f의 상합(upper sum)과 하합(lower sum)을 각각 $U(P, f)$와 $L(P, f)$로 나타내고 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$를

3/2을 포함하는 폐구간 $[0,2]$의 임의의 분할이라 하자. 편의상 $x_r = 3/2$이라 하면 다음 결과가 성립한다.

$$\begin{aligned} U(P,f) - L(P,f) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\geq \sum_{k=r+1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=r+1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &\geq \sum_{k=r+1}^{n}(x_k^2 - x_k)(x_k - x_{k-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

한편 폐구간 $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$에서 함수 $x^2 - x$의 최소값이 3/4이므로

$$\sum_{k=r+1}^{n}(x_k^2 - x_k)(x_k - x_{k-1}) \geq \frac{3}{4}\sum_{k=r+1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \tag{2}$$

이 성립한다. (1)과 (2)에 의해서 3/2을 포함하는 폐구간 $[0,2]$의 임의의 분할 P에 대하여 $U(P,f) - L(P,f) \geq 3/8$이 성립한다. 그러므로

$$\lim_{\|P\|\to 0}[U(P,f) - L(P,f)] \neq 0$$

이다. 따라서 함수 f는 폐구간 $[0,2]$ 위에서 리만 적분불능인 함수이다.

Alternate Solution. $E = \{x \in [0,2] : f$가 x에서 불연속$\}$이라 두면 $\left[\frac{3}{2}, 2\right] \subset E$이다. m을 실직선 $\mathbb{R}$ 위에서의 르베그(Lebesgue) 측도라 하자. 그러면

$$m(E) \geq m\left(\left[\frac{3}{2}, 2\right]\right) = \frac{1}{2}$$

이므로 $m(E) \neq 0$이다. 따라서, 르베그(Lebesgue)의 리만적분 가능성 정리에 의해서 f는 $[0,2]$ 위에서 리만적분 불능이다.

07. (2005년) 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}$의 수렴·발산을 판정하라.

Solution. 비판정법을 이용한다.

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

$e = 2,71828\cdots$이므로 $r < 1$이다. 따라서, 비판정법에 의해서 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}$은 수렴한다.

Remark. 오일러 수 (Euler number)

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \approx 2.71828.$$

08. (2005년) 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 다음과 같이 정의하자. $x = 0$에서 f가 미분가능(differentiable)한지 판정하라.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & (x\text{가 유리수}) \\ 1, & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$$

Solution. 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 하자. 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in\mathbb{Q}}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in\mathbb{Q}}} \frac{(x^2+1)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in\mathbb{Q}}} x = 0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} \frac{1-1}{x} = 0.$$

따라서 $f(x)$는 $x-0$에서 미분가능이고 $f'(0) = 0$이다.

Alternate Solution. x가 유리수이면 $f(x)-f(0)=x^2$이고 x가 무리수이면 $f(x)-f(0)=0$이다. 그러므로 임의의 ε에 대하여 $\delta=\varepsilon$으로 선택하면 $0<|x-0|<\delta$일 때 다음 식이 성립한다.

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \le |x-0| < \delta = \varepsilon.$$

따라서

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

이고 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능이다.

09. (2005년) 유리수의 집합 $\mathbb{Q}$가 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 조밀(dense)함을 증명하라. 즉, x와 y가 실수이고 $x<y$이면 $x<r<y$를 만족시키는 유리수 r이 존재함을 보이라.

Proof. $m(y-x)>1$이 성립하는 자연수 m을 선택하고 $mx<n$이 성립하는 최소의 정수 n을 선택한다. 그러면 $n-1\le mx$이고 $my>mx+1$이므로 $my>mx+1\le n-1+1=n$이 성립한다. 따라서 다음 결과가 성립한다.

$$x<\frac{n}{m}<y, \quad \frac{n}{m}=r\in\mathbb{Q}.$$

10. (2006년) 평균값 정리를 이용하여, 임의의 두 실 수 x, y에 대하여 다음 식이 성립함을 보이라.

$$|\sin x-\sin y|\le|x-y|.$$

Proof. $f(x)=\sin x$라 두면 $f(x)-f(y)=f'(t)(x-y)$가 성립하는 t가 x와 y 사이에 존재한다. $|f'(t)|=|\cos t|\le 1$이므로 다음 결과가 성립한다.

$$|\sin x-\sin y|=|f(x)-f(y)|=|f'(t)(x-y)|\le|x-y|.$$

11. (2006년) 실수의 집합을 $\mathbb{R}$이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 함수 f_n을 다음과 같이 정의하자.

$$f_n : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{3x^n}{2x^n + 1}.$$

함수열 (f_n)의 극한함수 f를 구하고, (f_n)이 f로 평등수렴(uniform convergence)하는지 판정하라.

Solution. 극한함수 f는 다음 식으로 주어진다.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 3/2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f_n \in C([0,2])$(구간 $[0,2]$에서 f_n이 연속함수)이지만 $f \notin C([0,2])$이므로 집합 $[0,2]$에서 수열 (f_n)은 f에 평등수렴하지 않는다.

Theorem. (First Mean Value Theorem For Integrals). Suppose that f and g are integrable on $[a,b]$ with $g(x) \ge 0$ for all $x \in [a,b]$. Let

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}, \quad \text{and} \quad M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Then there is a number $c \in [m,M]$ such that

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = c\int_a^b g(x)dx.$$

In particular, if f is continuous on $[a,b]$, then there is an $x_0 \in [a,b]$ such that

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx.$$

12. (2006년) 실수의 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. n차 다항식 x^n이 주어질 때, 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$가 연속이면 다음 식을 만족하는 $c \in [0,1]$가 존재함을 보이라.

$$(n+1)\int_0^1 f(x)x^n dx = f(c).$$

Proof. $m = \inf\{f(x) : x \in [0,1]\},\ M = \sup\{f(x) : x \in [0,1]\}$이라 두자. 그러면 다음 식이 성립한다.

$$m\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 f(x)x^n dx \le M\int_0^1 x^n dx. \tag{1}$$

(1) 식에서 다음 식을 얻는다.

$$m \le (n+1)\int_0^1 f(x)x^n dx \le M. \tag{2}$$

f가 폐구간 $[0,1]$에서 연속함수이므로 (2) 식과 극치정리(최대·초소 정리) 또는 중긴치정리에 의해서

$$(n+1)\int_0^1 f(x)x^n dx = f(c).$$

가 성립하는 $c \in [0,1]$가 존재한다.

Alternate Proof. 함수 f가 구간 $[0,1]$에서 연속이고 모든 $x \in [0,1]$에 대하여 $x^n \ge 0$이므로 적분에관한 제1평균치정리에 의해서

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = f(c)\int_0^1 x^n dx \tag{1}$$

가 성립하는 $c \in [0,1]$가 존재한다. $\int_0^1 x^n dx = 1/(n+1)$이므로 (1) 식에서 다음 식을 얻는다.

$$(n+1)\int_0^1 f(x)x^n dx = f(c).$$

13. (2007년) 교대급수판정법을 기술하고, 교대급수판정법을 이용하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!}{(2^n\cdot n!)^2}$가 수렴함을 보이라. 단,

$$\frac{(2n-1)!}{(2^n\cdot n!)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{1}{2n}$$

이다.

Solution. (1) 교대급수 판정법: 교대급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$에서 $a_n \downarrow 0$($\{a_n\}$이 0에 수렴하는 단조감소 수열)이면 교대급수는 수렴한다.

(2) $a_n=\dfrac{(2n-1)!}{(2^n\cdot n!)^2}$이라 두자. 수열 $\{a_n\}$이 0에 수렴하는 단조감소 수열임을 보이면 된다. 임의의 n에 대하여 다음 결과가 성립한다.

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=\frac{(2n+1)!}{(2^{n+1}\cdot(n+1)!)^2}=\frac{(2n-1)!(2n)(2n+1)}{(2^n\cdot n!)^2(2n+2)^2}\\ &=a_n\frac{2n(2n+1)}{(2n+2)^2}<a_n. \end{aligned}$$

따라서 $\{a_n\}$은 단조감소수열이다. 한편

$$a_n=\frac{(2n-1)!}{(2^n\cdot n!)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n}$$

에서 $a_n\to 0$이 성립한다. 따라서, 교대급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$은 수렴한다.

Remark.

$$\begin{aligned} \frac{(2n-1)!}{(2^n\cdot n!)^2}&=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-2)(2n-1)}{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n))^2}\\ &=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\times\frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Definition. 리만-스틸체스(Riemann-Stieltjes) 합. 함수 f와 α가 폐구간 $[a,b]$ 위에서 정의된 임의의 실함수라 하자. 폐구간 $[a,b]$의 (태그붙인) 분

할(tagged partition) $(P,\ T)$($P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\},\ T=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\},\ x_{k-1}\le t_k\le x_k,\ 1\le k\le n$)에 대하여 α에 관한 f의 리만-스틸체스 합을 다음 식으로 정의한다.

$$S(P,T,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})).$$

Definition. 리만-스틸체스 적분. 함수 f와 α가 폐구간 $[a,b]$ 위에서 정의된 임의의 실함수라 하자. 아래의 식 (1)을 만족하는 실수 I가 존재할 때, f가 α에 관하여 리만-스틸체스 적분가능이라 한다.

임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $[a,b]$의 분할 P_ε이 존재하여 $P\supset P_\varepsilon$이면
임의의 T에 대하여 $|S(P,T,f,\alpha)-I|<\varepsilon$이 성립한다. (1)

14. (2007년) 구간 $[0,2]$에서 정의된 두 함수 f와 α가 다음과 같을 때, f는 α에 관하여 Riemann-Stieltjes 적분가능함을 보이고 RS-적분 $\displaystyle\int_0^2 f d\alpha$의 값을 구하라.

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2x, & 1\le x\le 2\end{cases},\quad \alpha(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1 \\ 2, & 1<x\le 2\end{cases}.$$

Solution. 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $1\in P_\varepsilon$이고 $\|P_\varepsilon\|<\varepsilon/2$인 $[0,2]$의 분할 P_ε을 선택한다. $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\supset P_\varepsilon$이라 하자. 그러면 $1\in P$이고 $\|P\|<\varepsilon/2$이 성립한다. 여기서, $1=x_k$라 하자. 다음 결과를 얻는다.

$$S(P,T,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1}))=f(t_{k+1}).$$

따라서, 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}|S(P,T,f,\alpha)-f(1)|&=|f(t_{k+1})-f(1)|=|2t_{k+1}-2|=2|t_{k+1}-x_k|\\ &\le 2|x_{k+1}-x_k|\le 2\|P\|<\varepsilon,\quad \forall T.\end{aligned}$$

따라서, f는 α에 관하여 리만-스틸체스 적분가능이고 $\int_0^2 f d\alpha = 2$이다.

15. (2007년) 다음은 테일러(Taylor) 정리와 관련된 내용이다.

$0 \in (a,b)$이고 함수 f가 (a,b)에서 무한번 미분가능할 때, f의 n차 도함수를 $f^{(n)}$으로 나타내고

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad R_n(x) = f(x) - f_n(x)$$

라 놓으면

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

이 되는 t_x가 0과 x 사이에 존재한다.

함수 $f(x) = \ln(1+x)$에 대하여 $f_n(x)$를 구하고, $R_n(x)$를 이용하여 구간 $[0,1]$에서 f_n이 f로 평등수렴(uniform convergence)함을 보이라.

Solution. 먼저 $f(x) = \ln(1+x)$의 n차 도함수를 계산하면 다음과 같다:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

(a) 부분합 $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

(b) $f_n \to f$ 평등수렴: $|f(x) - f_n(x)|$를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| = |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^{n+2} n!}{(1+t_x)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \\ &\le \frac{1}{n+1}, \quad \forall x \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

위의 식에서 $n \to \infty$일 때 $\frac{1}{n+1} \to 0$이므로 Weierstrass M-test에 의해서 폐구간 $[0,1]$ 위에서 f_n은 f로 평등수렴한다.

16. (2008년) 실수의 집합을 $\mathbb{R}$이라 하고, 폐구간 $I = [0,1]$에서 정의된 연속함수 $f : I \to \mathbb{R}$가 다음 조건을 만족한다고 하자: 임의의 $x \in I$에 대하여 적당한 $y \in I$가 존재하여 다음이 성립한다.

$$|f(y)| \leq \frac{1}{5}|f(x)|.$$

이 때, $f(c) = 0$을 만족하는 $c \in I$가 존재함을 증명하라.

Solution. $a \in I$를 선택하고 다음 조건을 만족하는 수열 (x_n)을 폐구간 I에서 선택한다.

$$5|f(x_1)| \leq |f(a)|,\ 5|f(x_2)| \leq |f(x_1)|, \cdots, 5|f(x_n)| \leq |f(x_{n-1})|, \cdots.$$

그러면, 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$|f(x_n)| \leq \frac{|f(a)|}{5^n}. \tag{1}$$

수열 (x_n)이 유계이므로 볼자노-바이어스트라스 정리에 의해서 수열 (x_n)은 수렴하는 부분수열 (x_{n_k})를 갖는다. $x_{n_k} \to c$라 하면 구간 I가 폐집합이므로 $c \in I$이다. f가 연속함수이므로 식 (1)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$|f(c)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{|f(a)|}{5^{n_k}} = 0.$$

따라서 $f(c) = 0$이 성립하는 $c \in I$가 존재한다.

17. (2008년도) 매클로린 급수(Maclaurin series)를 이용하여 다음 극한값을 구하라.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{(x^2\cos x)^{\frac{5}{2}}}$$

Solution. 테일러 정리에 의해서 다음 식이 성립하는 c가 0과 x 사이에 존재한다.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos c}{120}x^5.$$

$x \to 0$이면 $\cos x \to 1$이고 $\cos c \to 1$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{(x^2\cos x)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{120}\frac{\cos c}{(\cos x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{120}.$$

18. (2008년도) 다음 관계식

$$\int_1^{x^2}(x^2-t)f(t)dt = \frac{1}{2}x^6 + ax^4 + x^2 + a + 1$$

을 만족하는 다항함수(polynomial function) $f(x)$와 상수 a를 구하라.

Solution. $P(x) = x^6/2 + ax^4 + x^2 + a + 1$이라 두자. 그러면 $\deg P(x) = 6$이므로 주어진 조건에 의해서 $\deg f(x) = 1$이다. $f(t) = \alpha t + \beta$라 두고 적분을 계산한다.

$$\begin{aligned}\int_1^{x^2}(x^2-t)f(t)dt &= \int_1^{x^2}(x^2-t)(\alpha t+\beta)dt \\ &= \frac{\alpha}{6}x^6 + \frac{\beta}{2}x^4 - \left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)x^2 + \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2}.\end{aligned}$$

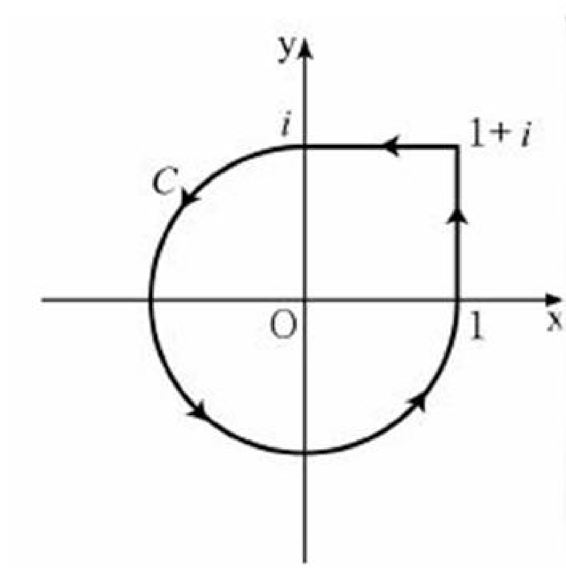
$\int_1^{x^2}(x^2-t)f(t)dt = P(x)$에서 $\alpha = 3$과 $\beta = \dfrac{1}{2}$을 얻는다.따라서 $a = -\dfrac{5}{4}$이고 $f(x) = 3x - \dfrac{5}{2}$이다.

복소해석학 (2002~2008)

01. (2002년) 복소평면 $\mathbb{C}$에서 해석적인 정함수(entire function) f가 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $\operatorname{Re} f(z) > 1$을 만족한다. 이 때 f가 상수임을 보이라.

Proof. 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $\operatorname{Re} f(z) > 1$이므로 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $f(z) \neq 0$이다. 따라서 $g(z) = 1/f(z)$이라 두면 함수 $g(z)$는 복소평면 전체에서 해석적인 함수이다. 한편 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $|f(z)| \geq \operatorname{Re} f(z) > 1$이므로 $|g(z)| = |1/f(z)| < 1$ 이 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 성립한다. 따라서 $g(z)$는 유계인 정함수이다. 함수 $g(z)$가 유계인 정함수이므로 Liouville 정리에 의해서 $g(z)$는 상수함수이다. 따라서 함수 $f(z)$는 상수함수이다.

02. (2003년) 곡선 C는 다음 그림과 같이 $1, 1+i, i$를 연결한 두 선분과 단위원의 일부로 이루어져 있다. 이 때, $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$의 값을 구하라.



Solution. $L_1 = [1, 1+i]$, $L_2 = [1+i, i]$, 단위원의 일부를 T라 두면 $C = L_1 \cup L_2 \cup T$이고 L_1, L_2, T의 매개변수 방정식은 다음과 같다.

$$L_1 : x = 1, y = t \ (0 \le t \le 1), \quad L_2 : x = -t, y = 1 \ (-1 \le t \le 0),$$

$$T : z = z(t) = e^{it} \ (\pi/2 \le t \le 2\pi).$$

$\int_C \overline{z} dz = \int_{L_1} \overline{z} dz + \int_{L_2} \overline{z} dz + \int_T \overline{z} dz$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_C \overline{z} dz &= \int_0^1 (1-it)(i)dt + \int_{-1}^0 (-t-i)(-1)dt + \int_{\pi/2}^{2\pi} e^{-it}(e^{it}i)dt \\ &= \left(i + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + i\right) + \frac{3\pi}{2}i = \left(2 + \frac{3\pi}{2}\right) i. \end{aligned}$$

Remark. $-L_2 = [i, 1+i]$, $z = z(t) = t + i$, $0 \le t \le 1$. We have

$$\int_{L_2} \overline{z} dz = -\int_{-L_2} \overline{z} dz = -\int_0^1 (t-i)dt = -\left(\frac{1}{2} - i\right) = -\frac{1}{2} + i.$$

Theorem. (Cauchy의 적분공식) 함수 $f(z)$가 양의 방향으로 주어진 단순폐콘투어(단순폐경로, simple closed contour) C를 포함하는 단순연결영역에서 해석적이라 하자. z_0가 C의 내부의 점이면 다음 식이 성립한다:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Theorem. (도함수에 대한 Cauchy의 적분공식) 함수 $f(z)$가 양의 방향으로 주어진 단순폐콘투어(단순폐경로, simple closed contour) C를 포함하는 단순연결영역에서 해석적이라 하자. z_0가 C의 내부의 점이면 다음 식이 성립한다:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

03. (2004년) 함수 $f(z)$가 복소평면 $\mathbb{C}$에서 해석적인 함수(entire function)이고 $f(1) = 1$, 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $|f(z)| \leq |z|$가 성립하면 $f(z) = z$임을 보여라.

Proof. 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $|z| < R$인 양수 R을 선택하고 $n > 1$이라 하자. 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $|f(z)| \leq |z|$이므로 $f(0) = 0$이고 원 $|w| = R$위에서 $|f(w)| \leq R$이다. 도함수에 관한 Cauchy 적분공식을 사용하여 다음 결과를 얻는다.

$$|f^{(n)}(0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f(w)}{(w-0)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{R^2 n!}{R^{n+1}} = \frac{n!}{R^{n-1}}.$$

여기서 $R \to \infty$하면 모든 $n > 1$에 대하여 $f^{(n)}(0) = 0$임을 알 수 있다. 따라서 다음 결과가 성립한다.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0)z.$$

그런데 $f(0) = 0$이고 $f(1) = 1$이므로 $f(z) = f'(0)z = z$가 성립한다.

04. (2005년) 복소평면 $\mathbb{C}$안의 영역(domain) D에서 정의된 함수 $f : D \to \mathbb{C}$가 해석적(analytic)이고 모든 $z \in D$에 대해 $\operatorname{Im} f(z) = 2\operatorname{Re} f(z)$가 성립한다. $f(z)$가 D에서 상수임을 보이라.

Proof. $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z \in D$에서 $v(z) = 2u(z)$이므로 Cauchy-Riemann 방정식을 이용하여 다음 식을 얻는다.

$$u_x(z) = v_y(z) = 2u_y(z), \ z \in D,$$

$$u_y(z) = -v_x(z) = -2u_x(z), \ z \in D.$$

여기서 $u_x(z) = -4u_x(z),\ z \in D$가 성립하므로 $u_x(z) = v_x(z) = 0, z \in D$를 얻는다. 따라서

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = 0,\ z \in D$$

가 성립한다. 그러므로 $f(z)$는 D에서 상수이다.

Theorem. (Maximum Modulus Principle) If $f(z)$ is analytic and non-constant in a domain Ω, then $|f(z)|$ has no maximum in Ω.

05. (2006년) 복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 영역(domain) $D = \{z|\ |z| < 2\}$에서 정의된 함수 $f : D \to \mathbb{C}$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z \in D$에 대하여 $|f(z)| \leq \sqrt{5}$이다. $f(0) = 2 + i$일 때, $f(1) + f(i)$의 값을 구하라.

Solution. $|f(0)| = \sqrt{5}$이고 임의의 $z \in D$에 대하여 $|f(z)| \leq \sqrt{5}$이므로 $f(z)$는 영역 D의 내부의 점 $z = 0$에서 최대값을 갖는 해석함수이다. 그러므로 최대절대값원리(maximum modulus principle)에 의해서 D에서 $f(z)$는 상수함수이다. 즉, 임의의 $z \in D$에 대하여 $f(z) = f(0) = 2 + i$이다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

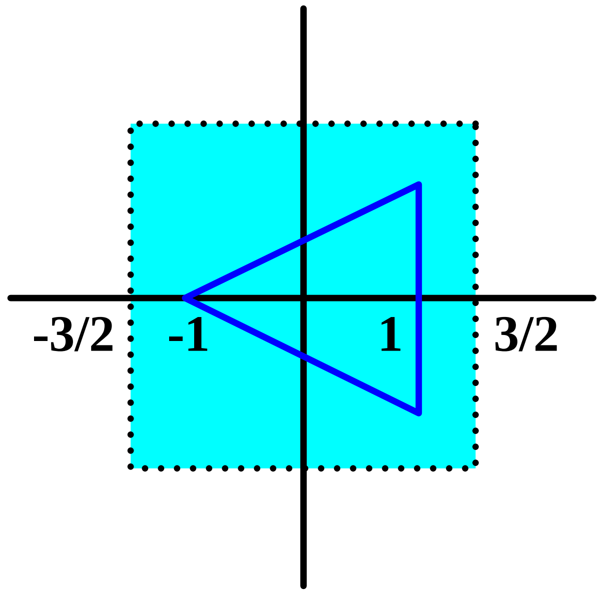
$$f(1) + f(i) = 2f(0) = 4 + 2i.$$

06. (2007년) 복소평면에서 C는 꼭지점이 $-1,\ 1-i,\ 1+i$인 삼각형이고 반시계 방향으로 주어졌을 때, $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z-2)}$의 값을 구하라.

Solution. $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$이라 두고 단순폐콘투어 C를 포함하는 단순연결영역 D를 $D = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{2} < y < \dfrac{3}{2}\right\}$으로 정의한다.

그러면 함수 $f(z)$가 단순연결영역 D에서 해석함수이고 0이 C의 내부의 점이므로 Cauchy 적분공식에 의해서 다음 결과가 성립한다.

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)} = \int_C \frac{f(z)}{z-0}dz = 2\pi i f(0) = -\pi i.$$



Remark. (루셰(Rouché) 정리) f와 g가 단순닫힌경로(simple closed contour) γ와 그의 내부를 포함하는 영역에서 해석적이라 하자. 만일 모든 $z \in \gamma$에 대하여 $|g(z)| < |f(z)|$이면 $f(z)$와 $f(z)+g(z)$는 중복도를 고려하여 동일한 수의 영점을 γ의 내부에 갖는다.

07. (2008년) 복소방정식 $z + e^{-z} = 2$는 $|z-2| < 2$에서 오직 한 개의 복소수 근을 가짐을 보이고, 그 근이 실근임을 보이라.

Solution. $f(z) = z-2,\ g(z) = e^{-z}$ 그리고 γ를 원 $|z-2| = 2$라 하자. 그러면 $f(z)$와 $g(z)$는 γ와 γ의 내부를 포함하는 영역에서 해석적이다. $z \in \gamma$이

면 $z = 2 + 2e^{it}$, $\mathrm{Re}\, z = 2 + 2\cos t$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$|f(z)| = |2e^{it}| = 2, \quad t \in [0, 2\pi],$$
$$|g(z)| = \exp(\mathrm{Re}\,(-z)) = \exp(-2 - 2\cos t) \leq 1, \quad t \in [0, 2\pi].$$

따라서 임의의 $z \in \gamma$에 대하여 $|g(z)| < |f(z)|$가 성립한다. 그러므로 루셰(Rouché) 정리에 의해서 $f(z) = z - 2$와 $f(z) + g(z) = z - 2 + e^{-z}$는 γ의 내부에 같은 수의 영점을 갖는다. 그런데 $f(z) = z - 2$가 γ의 내부에 단 하나의 복소근 $z = 2$를 가지므로 $f(z) + g(z) = z - 2 + e^{-z}$도 γ의 내부에 단 하나의 복소근을 갖는다. 한편 $h(x) = x - 2 + e^{-x}$라 두면 h는 실직선 위에서 연속함수이고 $h(1) < 0$, $h(3) > 0$이므로 중간치정리에 의해서 $h(c) = 0$이 되는 $c \in (1, 3)$가 존재한다. 따라서 γ 내부의 $f(z) + g(z) = z - 2 + e^{-z}$의 단 하나의 복소근을 a라 하면 $a = c$(실근)이다.

2009학년도(1차) (해석학, 복소해석학)

23. <보기>에서 주어진 x_n을 일반항으로 하는 실수열 중 수렴하는 수열을 모두 고른 것은? [1.5점]

ㄱ. $x_n = (n+1)^{\frac{1}{\log(n+1)}}$

ㄴ. $x_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$

ㄷ. $x_n = \dfrac{1+na}{(1+a)^n}$ (단, a는 양의 실수)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

Solution. ④

ㄱ. $\log x_n = \dfrac{1}{\log(n+1)} \log(n+1) = 1$이므로 $x_n = \exp(\log x_n) = e$이다. 따라서 $n \to \infty$이면 $x_n \to e$이다.

ㄴ. 임의의 자연수 n에 대하여 $n! \leq n^{n-1}$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{(n+1)^n}{n!} \geq \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}(n+1) \geq n+1.$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} = \infty$이다.

ㄷ. 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(n+1)a}{(1+a)(1+na)} = \frac{1}{1+a} < 1.$$

비판정법에 의해서 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$은 수렴한다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$이다.
(로피탈 법칙을 사용하여 수열의 극한을 계산한다.)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+na}{(1+a)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+a)^n \log(1+a)} = 0.$$

Heine-Borel 정리. $K(\subset \mathbb{R}^n)$: 컴팩트 집합 $\Leftrightarrow$ K : 유계인 폐집합

컴팩트성 보존 정리. X, Y가 임의의 위상공간이고 $K(\subset X)$가 컴팩트 집합이라 하자. $f : K \to Y$ 가 연속함수이면 $f(K)$도 컴팩트 집합이다.

24. 닫힌 구간(폐구간) [-1, 1]에서 정의된 실함수 $f,\ g, h$에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 할 때,

ㄱ. 연속함수 f가 모든 $q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$에 대하여 $f(q) = 1$이면 f는 항등적으로 1이다.

ㄴ. 함수 g가 연속이고 [-1, 1]의 부분집합 S가 닫힌 집합(폐집합)이면 $g(S)$도 닫힌 집합이다.

ㄷ. $h(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q} \\ x \sin \dfrac{1}{x}, & x \in [-1,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$ 로 정의된 함수 h는 $x = 0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ⑤

ㄱ. $x \in [-1,1]$가 임의의 실수라 하자. **유리수의 조밀성**에 의해서 $r_n \to x$인 유리수의 수열을 [-1,1]에서 선택할 수 있다. 모든 n에 대하여 $f(r_n) = 1$이고 함수 f가 x에서 연속이므로 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = 1$이다. $x \in [-1,1]$가 임의의 실수이므로 $f \equiv 1$이다.

ㄴ. $S \subset [-1,1]$이므로 S는 유계이다. 한편 S가 닫힌 집합(폐집합)이므로 **하이네-보렐 정리**에 의해서 S는 컴팩트 집합이다. 그런데 g가 연속함수

이므로 $g(S)$도 컴팩트 집합이다. 따라서 하이네-보렐 정리에 의해서 $g(S)$는 닫힌 집합(폐집합)이다.

ㄷ. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}} x^2 = 0 = h(0) = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\notin\mathbb{Q}}} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\notin\mathbb{Q}}} h(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

도함수에 관한 중간치 정리(다르부 정리) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$가 $[a,b]$에서 미분가능이고 $f'(a)<k<f'(b)$이면 $f'(c)=k$인 $c\in(a,b)$가 존재한다.

25. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 다음 정리의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

[**정리**] 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 미분가능하고 $f'(a)>f'(b)$이면, $f'(a)>k>f'(b)$인 임의의 실수 k에 대하여 $f'(c)=k$를 만족시키는 점 $c\in(a,b)$가 존재한다.

[**증명**] 함수 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$를 $g(x)=f(x)-kx$로 정의하면 g는 연속이므로 어떤 점 $c\in[a,b]$에서 $\boxed{\text{(가)}}$을 갖는다. 그런데 $\boxed{\text{(나)}}$이(하)므로 $g(x_1)>g(a)$와 $g(x_2)>g(b)$를 각각 만족시키는 점 $x_1,\ x_2\in(a,b)$가 존재하게 되어 a와 b에서 g는 $\boxed{\text{(가)}}$을 가질 수 없다. 따라서 g는 점 $c\in(a,b)$에서 $\boxed{\text{(가)}}$을 갖고 $\boxed{\text{(다)}}$이(하)므로 $g'(c)=0$이다. 그러므로 $f'(c)=k$를 만족시키는 점 $c\in(a,b)$가 존재한다.

	(가)	(나)	(다)
①	최솟값	g가 감소	g'이 연속
②	최댓값	$g'(a)>0$이고 $g'(b)<0$	g가 미분가능
③	최댓값	g가 증가	g가 미분가능

④ 극댓값 $g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$ g'이 연속

⑤ 최솟값 $g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$ g가 미분가능

Solution. ② $f'(a) > k > f'(b)$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{x \to a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) = f'(a) - k > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to b-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} = g'(b) = f'(b) - k < 0. \tag{2}$$

식 (1)에서 $x - a > 0$이므로 $g(x_1) - g(a) > 0$인 $x_1 \in (a, b)$이 존재한다. 식 (2)에서 $x - b < 0$이므로 $g(x_2) - g(b) > 0$인 $x_2 \in (a, b)$가 존재한다

르베그의 리만적분가능 정리. 유계함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 $[a, b]$ 위의 거의 모든 점에서(almost everywhere) 연속이면 f가 $[a, b]$ 위에서 리만적분가능이고 또한 역도 성립한다. (Lebesgue Criterion for Riemann Integrability)

Theorem. 유계함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 불연속인 점의 집합을 D라 하고 실직선(real line) 위의 르베그 측도를 m이라 하자. 다음 결과가 성립한다.

$$f\text{가 } [a, b] \text{ 위의 거의 모든 점에서 연속} \Leftrightarrow m(D) = 0.$$

Theorem. 유계함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 $[a, b]$ 위에서 리만적분가능이면 f가 가측함수이고 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f(x)\, dm(x).$$

여기서 m은 실직선 위의 르베그 측도이다.

26. 닫힌 구간 $[a, b]$에서 정의된 실함수 f, g에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

ㄱ. 임의의 $x, y \in [a,b]$에 대하여 $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^{1/2}$을 만족하면 f는 $[a,b]$에서 리만적분가능이다.

ㄴ. 구간 $[a,b]$에서 리만적분가능한 함수의 불연속점은 기껏해야 유한 개이다.

ㄷ. g^2이 $[a,b]$에서 리만적분가능이면 g도 $[a,b]$에서 리만적분가능이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

Solution. ①

ㄱ. $x_0 \in [a,b]$라 하자. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta = \varepsilon^2$이라 두자. 주어진 조건에서 다음 결과를 얻는다.

$$|x-x_0| < \delta,\ x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \le |x-x_0|^{1/2} < \delta^{1/2} = \varepsilon.$$

따라서 $f(x)$는 x_0에서 연속이다. 그런데 x_0가 구간 $[a,b]$의 임의의 점이므로 f는 구간 $[a,b]$에서 연속이다. 따라서 f는 $[a,b]$에서 리만적분가능이다.

ㄴ. $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$이라 두고 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$를 다음 식으로 정의한다. 그러면 함수 f는 가부번집합(denumerable set) E에서 불연속이나 구간 $[0,1]$ 위에서 리만적분가능이다.

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \in E, \\ 2, & x \notin E. \end{cases}$$

Solution. 실직선 위에서의 르베그 측도를 m이라 하고 f가 불연속인 점의 집합을 D라 하자. 그러면 $D = E \cup \{0\}$가 가산집합이므로 $m(D) = 0$이다. 따라서 르베그의 리만적분가능 정리에 의해서 f는 $[0,1]$ 위에서 리만적분가

능이다. f가 리만적분가능이고 $f = 2$ $a.e.$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{[0,1]} f(x)\,dm(x) = \int_{[0,1]} 2\,dm(x) = 2m([0,1]) = 2.$$

ㄷ. 함수 $g(x)$를 $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 로 정의한다. 여기서 $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다. 그러면 $g^2(x) \equiv 1$이므로 g^2은 구간 $[a,b]$ 위에서 리만적분가능이다. 실직선 위에서의 르베그 측도를 m이라 하고 g가 불연속인 점의 집합을 D라 하자. 그러면 $D = [a,b]$이므로 $m(D) = b - a \neq 0$이다. 따라서 르베그의 리만적분가능 정리에 의해서 g는 구간 $[a,b]$ 위에서 리만적분불능이다.

27. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 자연수 n에 대하여 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$와 $g_n : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$을 각각

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2 + k^3}, \qquad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 x}$$

로 정의할 때, 함수열 (f_n)과 (g_n)에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2.5점]

ㄱ. (f_n)은 균등수렴(평등수렴, uniform convergence)한다.

ㄴ. (f_n)의 극한함수는 연속이다.

ㄷ. (g_n)은 균등수렴한다.

ㄹ. (g_n)의 극한함수는 연속이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄷ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

Solution. ④

ㄱ, ㄴ. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^3}$이라 두자. 모든 자연수 k와 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{1}{x^2+k^3} \le \dfrac{1}{k^3}$이고 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty$이므로 **바이어스트라스** M**-판정법**에 의해서 급수 $f(x)$는 $\mathbb{R}$에서 평등수렴한다. 따라서 함수열 (f_n)은 $\mathbb{R}$에서 f에 평등수렴한다. f가 연속함수의 수열 (f_n)의 평등 극한(uniform limit) 함수이므로 f도 $\mathbb{R}$에서 연속이다.

ㄷ, ㄹ. $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$이라 두면 C는 양의 실수이다. 임의의 $x \neq 0$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 x} = \frac{C}{x}$이므로 함수열 (g_n)의 점별 극한(pointwise limit) 함수 $g(x) = \dfrac{C}{x}$는 $\mathbb{R} - \{0\}$에서 연속이다. 함수열 (g_n)이 $\mathbb{R} - \{0\}$에서 평등수렴하면 $n \to \infty$일 때 $\|g_n - g\|_\infty \to 0$이므로 다음 식을 만족하는 자연수 N이 존재한다.

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) \left|\frac{1}{x}\right| = |g(x) - g_N(x)| < 1. \tag{1}$$

식 (1)에서 다음 결과를 얻는다.

$$0 < \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

$0 < 0$이므로 이 결과는 모순이다. 따라서 함수열 (g_n)은 $\mathbb{R} - \{0\}$에서 평등수렴하지 않는다.

Green 정리. 평면 영역 R이 구분적으로 매끄러운 단순 폐곡선(piecewise smooth simple closed curve) C로 둘러싸인 영역이라 하자. 2변수 함수 $f = (P, Q)$가 영역 R을 포함한 열린 연결집합(open connected set)에서 C^1 함수이고 선적분의 방향이 양의 방향이면 다음 식이 성립한다.

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

28. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위를 반시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 할 때, 다음 선적분의 값은?

$$\int_C (3 + yx^2)\, dx + (2 - xy^2)\, dy$$

① 4π ② -4π ③ $-\frac{16\pi}{3}$ ④ $\frac{16\pi}{3}$ ⑤ -8π

Solution. ⑤ $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$라 하자. **그린 정리**에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_C (3 + yx^2)\, dx + (2 - xy^2)\, dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2 - xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(3 + yx^2) \right) dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-r^2)\, r\, drd\theta = -8\pi. \end{aligned}$$

Theorem. Ω: 영역(domain, 열린 연결집합, open connected set), $z_0 \in \Omega$

$$f \in C(\Omega),\ f \in H(\Omega - \{z_0\}) \Rightarrow f \in H(\Omega).$$

29. 복소수 전체의 집합 $\mathbb{C}$에서 $\mathbb{C}$로의 정함수(entire function) f가 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 두 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

$$|f(z)| \le 2|ze^z|, \quad f'(1) = 1$$

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ e ⑤ $2e$

Solution. ②

모든 z에 대하여 $|f(z)| \le 2|ze^z|$이므로 $f(0)=0$이다. 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{ze^z} = \lim_{z\to 0}\frac{f'(0)z + f''(0)z^2/2! + \cdots}{ze^z} = f'(0).$$

따라서 $g(z)$를 $g(0) = f'(0)$, $z \neq 0$일 때 $g(z) = \dfrac{f(z)}{ze^z}$로 정의하면 $g(z)$가 유계인 정함수이다. 그러므로 **리우빌 정리**에 의해서 $g(z)$는 상수함수이다. 즉, $g(z) \equiv f'(0)$이다. 따라서 $f(z) = f'(0)ze^z$이다. $f'(1) = 1$이므로 $f'(0) = \dfrac{1}{2e}$이다. 따라서 $f(1) = \dfrac{1}{2}$이다.

Remark. $\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x \sinh y,\ \ \sin z = \sin x \cosh y + i\cos x\sinh y$

30. 집합 X에서 X로의 함수 f를 $f(t) = \begin{cases} t\cos(1/t), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ 으로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이고 $\mathbb{C}$는 복소수 전체의 집합이다.)

ㄱ. $X = \mathbb{R}$일 때 f는 $t = 0$에서 연속이다.

ㄴ. $X = \mathbb{C}$일 때 f는 $t = 0$에서 연속이다.

ㄷ. $X = \mathbb{C}$일 때 $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{1-2n}}{(2n)!}$은 모든 $t \in \mathbb{C} - \{0\}$에 대하여 성립한다.

ㄹ. $X = \mathbb{C}$일 때 $\displaystyle\int_{|t|=1} f(t)\,dt = 2\pi i$이다.

① ㄱ, ㄷ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄹ ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

Solution. ①

ㄴ. $z = x + iy$라 하고 실축을 C_1이라 하자. 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in C_1}} z\cos\frac{1}{z} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0. \tag{1}$$

허축을 C_2라 하자. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$이므로 $\cos(1/(iy)) = \cosh(-1/y)$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in C_2}} \left| z\cos\frac{1}{z}\right| &= \lim_{y\to 0}\left| iy\cos\frac{1}{iy}\right| = \lim_{y\to 0}\left| y\cosh\frac{-1}{y}\right| \\ &= \lim_{y\to 0}\left|\frac{\cosh(1/y)}{1/y}\right| = \lim_{y\to 0}\left|\sinh\frac{1}{y}\right| = \infty. \end{aligned} \tag{2}$$

식 (1)과 식 (2)에 의해서 극한 $\lim_{z\to 0} z\cos\frac{1}{z}$은 존재하지 않는다.

ㄷ. 로랑 급수 전개

ㄹ. $z\cos\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-2n+1}}{(2n)!}$, $0 < |z| < \infty$이므로 $\mathrm{Res}(z\cos(1/z);0) = -1/2$이다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_{|z|=1} z\cos\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(z\cos(1/z);0) = (2\pi i)(-1/2) = -\pi i.$$

2009학년도(2차) (해석학, 복소해석학)

4. 다음 (가), (나), (다)를 아래의 <**조건**>에 따라 각각 증명하고, (가)와 (나)의 의미를 비교하여 설명하시오. 그리고 (다)와 관련된 다음 명제가 성립하면 그 이유를 설명하고, 성립하지 않으면 반례를 제시하시오. [20점]

'실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 C^∞급 함수이고 유계(bounded)이면 상수함수이다.'

(가) 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 두 원소 a, b (단, $a < b$)에 대하여, 닫힌 구간 $I = [a, b]$에서 $\mathbb{R}$로의 두 함수 f, g가 연속이고, 모든 $x \in I$에 대하여 $g(x) > 0$이라 하자. 그러면

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

를 만족하는 $c \in I$가 존재한다.

(나) 복소평면 $\mathbb{C}$에 있는 중심이 z_0이고 반지름이 $r(> 0)$인 닫힌 원판 $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \le r\}$에서 정의된 함수 $f : B \to \mathbb{C}$가 해석적(analytic)이면

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\,d\theta$$

이다.

(다) 복소평면 $\mathbb{C}$에서 정의된 함수 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$가 $\mathbb{C}$에서 해석적이고 유계이면 상수함수이다.

< **조 건** >

∘ (가), (나), (다)를 증명할 때, 각 증명에 다음 중 한 가지 이상을 사용하시오.

- 최대·최소의 정리
- 중간값의 정리
- 코시(Cauchy)의 적분 공식

< **참 고** >

∘ 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 C^∞급 함수라는 것은 모든 자연수 n에 대하여 $\mathbb{R}$에서 n계도함수 $f^{(n)}$이 존재하고 $f^{(n)}$이 연속임을 뜻한다.

Solution. (가) f가 컴팩트 구간 I에서 연속이므로 **최대·최소 정리**에 의해서 모든 $x \in I$에 대하여 $f(u) \le f(x) \le f(v)$인 $u,\ v \in I$가 존재한다. I에서 $g(x) > 0$이므로 모든 $x \in I$에 대하여 $f(u)g(x) \le f(x)g(x) \le f(v)g(x)$가 성립한다. 따라서 적분에 관한 비교정리에서 다음 결과를 얻는다.

$$f(u)\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le f(v)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

한편 I에서 $g(x)$가 연속이고 $g(x) > 0$이므로 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$이다. 부등식 (1)의 왼쪽 부등식이나 오른쪽 부등식에서 등식이 성립한 경우에는 $c = u$나 $c = v$로 선택하면 된다. 부등식 (1)에서 등식이 성립하지 않는다고 하자. 다음 결과를 얻는다.

$$f(u) < \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} < f(v). \tag{2}$$

f가 $I = [a, b]$에서 연속이고 $u,\ v \in I$이므로 식 (2)와 **중간값 정리**에 의해서

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = f(c) \quad \text{또는} \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

가 성립하는 $c \in I$가 u와 v 사이에 존재한다.

(나) 중심이 z_0이고 반지름이 r인 원을 γ라 하자. f가 닫힌 원판 B에서 해석적이므로 **코시의 적분 공식**에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz. \tag{3}$$

원 γ의 매개변수 방정식을 $z = z_0 + re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$로 표현할 수 있으므로 식 (3)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

(다) $a, b \in \mathbb{C}$라 하자. $a, b \in D(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$인 임의의 양수 r을 선택한다. γ를 양의 방향을 갖는 원(positively oriented circle) $|z| = r$이라 하자. f가 $\mathbb{C}$에서 유계이므로 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $|f(z)| \le M$인 양수 M을 선택한다. **코시의 적분 공식**에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) f(z)\,dz\right| \\ &= \left|\frac{a-b}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz\right| \\ &\le \frac{M|a-b|}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dz|}{|z-a||z-b|} \\ &\le \frac{M|a-b|}{2\pi}\frac{2\pi r}{(r-|a|)(r-|b|)} = \frac{M|a-b|r}{(r-|a|)(r-|b|)}. \end{aligned} \tag{4}$$

식 (4)에서 $r \to \infty$하여 $f(a) = f(b)$를 얻는다. $a, b \in \mathbb{C}$가 임의의 상수이므로 f는 상수함수이다.

Alternate Solution. r을 임의의 양의 실수라 하자. $a \in \mathbb{C}$라 하고 γ를 양의 방향을 갖는 원(positively oriented circle) $|z-a| = r$이라 하자. f가 정함수(entire function)이므로 **(도함수에 관한) 코시의 적분 공식**에 의해 아래의 식이 성립한다.

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz. \tag{5}$$

f가 $\mathbb{C}$에서 유계이므로 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $|f(z)| \le M$인 양수 M이 존재한다. 식 (5)에서 다음 결과를 얻는다.

$$|f'(a)| \le \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-a|^2}\, |dz| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r}, \quad \forall r > 0. \tag{6}$$

식 (6)에서 $r \to \infty$하여 $f'(a) = 0$을 얻는다. a가 임의의 복소수이므로 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $f'(z) = 0$이다. 따라서 f는 상수함수이다.

(가)와 (나)의 의미의 비교: (가)에서 $g \equiv 1$로 두면 아래의 식이 성립하는 $c \in [a, b]$가 존재한다.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{7}$$

z_0를 중심으로 하고 반지름이 r인 원을 γ라 하면 다음 결과를 얻는다.

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})|ire^{i\theta}|\, d\theta = r \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta. \tag{8}$$

식 (8)과 (나)의 결과에 의해서 아래의 식을 얻는다.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_\gamma f(z)|dz|. \tag{9}$$

식 (7)에 의해서 $f(c)$는 구간 $[a, b]$ 위의 f의 평균이고 식 (9)에 의해서 $f(z_0)$는 중심이 z_0이고 반지름이 r인 원 γ 위의 f의 평균이다.

Definition. K가 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$에서 연결 컴팩트 집합(connected compact subset)이라 하자. $f : K \to \mathbb{R}$가 K에서 연속이고 모든 $x \in K$에 대하여 $f(x) \geq 0$일 때 K **위의** f**의 평균**을 다음 식으로 정의한다.

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(K)} \int_K f(x)\, dV(x).$$

(다)와 관련된 실함수 명제는 성립하지 않는다. 실함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x) = \sin x$로 두면 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $|f(x)| = |\sin x| \leq 1$이므로 $f(x)$는 $\mathbb{R}$에서 유계이다. 한편 모든 자연수 k에 대하여 $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\pi/2)$이므로 $f(x)$는 C^∞급 함수이다. 따라서 $f(x) = \sin x$는 $\mathbb{R}$에서 유계인 C^∞급 함수이나 $\mathbb{R}$에서 상수함수가 아니다.

Alternate Solution. (다)와 관련된 실함수 명제는 성립하지 않는다. 실함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x) = \sin x$로 두면 $f(x)$는 $\mathbb{R}$에서 유계인 C^∞급 함수이나 $\mathbb{R}$에서 상수함수가 아니다.

Remark. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x) = \sin x$로 두면 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $|f(x)| = |\sin x| \leq 1$이므로 $f(x)$는 $\mathbb{R}$에서 유계이다. 한편

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

이므로 f는 $\mathbb{R}$에서 해석적이다. 따라서 $f(x) = \sin x$는 $\mathbb{R}$에서 유계인 해석함수이나 $\mathbb{R}$에서 상수함수가 아니다.

Remark. $f(x) = \sin x$이면 $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\pi/2)$이다. $f(x) = \cos x$이면 $f^{(k)}(x) = \cos(x + k\pi/2)$이다.

2010학년도(1차) (해석학, 복소해석학)

29. 상수수열이 아닌 실수열 $\{x_n\}$에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [1.5점]

ㄱ. $\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{1}{3}$이면 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. 집합 $\{x_n | n$은 자연수$\}$가 단 하나의 극한점(집적점, limit point, cluster point, accumulation point)을 가지면 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\{\sin x_n\}$은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ④

ㄱ. 비판정법(Ratio Test)

ㄴ. 수열 $\{x_n\}$을 n이 홀수이면 $x_n = 1/n$로 정의하고 n이 짝수이면 $x_n = 2$로 정의한다. 그러면 집합 $\{x_n | n$은 자연수$\}$이 단 하나의 극한점을 가지지만 수열 $\{x_n\}$은 발산한다.

ㄷ. 수열에 관한 볼자노-바이어스트라스 정리

30. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 할 때, <보기>에서 균등연속함수(uniformly continuous function)를 모두 고른 걱은? [1.5점]

ㄱ. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$

ㄴ. $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \int_1^x e^{-t^2}\, dt$

ㄷ. $h : [0, 3) \to \mathbb{R}, h(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ③

Remark. $f : E(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$가 미분가능이고 f'이 E에서 유계이면 **평균치정리**에 의해서 f는 E에서 균등연속이다.

Remark. I가 유계구간(bounded interval)이고 $f : I \to \mathbb{R}$가 균등연속이면 **연속확장정리**에 의해서 f는 I에서 유계이다.

ㄱ. $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$이므로 $f'(0) = 0$이다. $x > 0$이면 다음 결과를 얻는다.

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}} \le \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \sqrt{2}.$$

따라서 f'이 $[0, \infty)$에서 유계이다. 그러므로 평균치정리에 의해서 미분가능 함수 f는 $[0, \infty)$에서 균등연속이다.

ㄴ. $g'(x) = e^{-x^2}$이 $[0, \infty)$에서 유계이므로 평균치정리에 의해서 미분가능 함수 g는 $[0, \infty)$에서 균등연속이다.

31. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 복소수 전체의 집합을 $\mathbb{C}$라 하자. 집합 X가 $\mathbb{R}$ 또는 $\mathbb{C}$일 때, 미분가능한 함수 $f_i : X \to X\ (i = 1, 2, 3, 4)$가 상수함수가 될 충분조건으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

ㄱ. $X = \mathbb{R}$일 때 $f_1^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2 \cdots)$

ㄴ. $X = \mathbb{C}$일 때 $f_2^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2 \cdots)$

ㄷ. $X = \mathbb{R}$일 때 $f_3\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3 \cdots)$

ㄹ. $X = \mathbb{C}$일 때 $f_4\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3 \cdots)$

① ㄱ, ㄷ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

Solution. ④ **항등정리**에 의해서 $f_2 = f_4 \equiv 0$이다.

항등정리(Identity Theorem). $\Omega(\subset \mathbb{C})$가 영역(domain)이고 $f : \Omega \to \mathbb{C}$가 미분가능함수(해석함수)이면 다음 명제는 동치이다.

(a) Ω에서 $f \equiv 0$이다.

(b) $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$가 Ω에 극한점(집적점)을 갖는다.

(c) 모든 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$에 대하여 $f^{(n)}(a) = 0$인 $a \in \Omega$가 존재한다.

Theorem. $\Omega(\subset \mathbb{C})$가 영역(domain)이고 $f : \Omega \to \mathbb{C}$가 미분가능함수(해석함수)라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}(a) = 0$인 $a \in \Omega$가 존재하면 f는 상수함수이다.

Example. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ 으로 정의하면 모든 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$에 대하여 $f^{(n)}(0) = 0$이고 함수 f는 $C^\infty(\mathbb{R})$ 함수이다. 그러나 함수 f는 실직선 $\mathbb{R}$ 위에서 해석함수는 아니다.

Example. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 으로 정의하면 모든 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$에 대하여 $f^{(n)}(0) = 0$이고 함수 f는 $C^\infty(\mathbb{R})$ 함수이다. 그러나 함수 f는 실직선 $\mathbb{R}$ 위에서 해석함수는 아니다.

Example. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \ge 0 \\ e^{1/x}, & x < 0 \end{cases}$ 으로 정의하면 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$이고 함수 f는 $\mathbb{R}$에서 미분가능이다.

32. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 미분가능한 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$와 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점]

ㄱ. f'이 단조함수(monotone function)이면 f'은 연속함수이다.

ㄴ. $L \in \mathbb{R}$일 때, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$이면 $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$이다.

ㄷ. 어떤 점 $c \in \mathbb{R}$에서 $g'(c) > 0$이라 하자. 그러면 적당한 양수 δ가 존재해서 임의의 $x, y \in (c-\delta,\ c+\delta)$에 대하여 $x < y$이면 $g(x) < g(y)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

Solution. ①

ㄱ. **True.**

Theorem. $f : I \to \mathbb{R}$가 구간(interval) I에서 단조함수이고 $f(I)$가 구간이면 f는 구간 I에서 연속이다.

Solution. 편의상 f가 단조증가함수라 하자. $c \in I$라 하자. c가 I의 왼쪽 끝점(left endpoint)이 아니면 아래의 식 (1)이 성립한다.

$$f(c-) = \lim_{x\to c-} f(x) = \sup_{x<c} f(x). \tag{1}$$

$f(I)$가 구간이므로 $a \in I$이고 $a < c$이면 $[f(a), f(c)] \subset f(I)$이다. 따라서 집합 $\{f(x) : x < c\}$는 $f(c)$를 오른쪽 끝점으로 갖는 구간이다. 그러므로 식 (1)에 의해서 $f(c-) = f(c)$이다. c가 구간 I의 오른쪽 끝점이 아니면 같은 방법으로 $f(c+) = f(c)$가 성립함을 보일 수 있다. 따라서 f는 점 c에서 연속이다. 그런데 $c \in I$가 임의의 점이므로 f는 구간 I에서 연속이다.

Theorem. (다르부 정리, 도함수에 관한 중간치 정리.) $f : I \to \mathbb{R}$가 구간 I에서 미분가능이라 하자. $a, b \in I$이고 $f'(a) < m < f'(b)$이면 $f'(c) = m$인 c가 a와 b 사이에 존재한다.

Theorem. $f : I \to \mathbb{R}$가 구간 I에서 미분가능이면 $f'(I)$는 구간이다. (임의의 실수 a에대하여 $(a, a) = \emptyset$이고 $[a, a] = \{a\}$이므로 공집합과 한원소집합도 (퇴화) 구간이다.)

Solution. f가 상수함수이면 $f'(I) = \{0\} = [0, 0]$이므로 $f'(I)$는 **퇴화구간**이다. f가 상수함수가 아니라고 하자. $u, v \in f'(I)$이고 $u < w < v$라고 하자. $w \in f'(I)$임을 보이면 된다. $f'(a) = u,\ f'(b) = v$인 $a, b \in I$를 선택한다. 그러면 $f'(a) < w < f'(b)$이므로 **다르부정리(도함수에 관한 중간치정리)**에 의해서 $f'(c) = w$인 c가 a와 b 사이에 존재한다. 따라서 $f'(I)$는 구간이다.

Theorem. $f : I \to \mathbb{R}$가 구간 I에서 미분가능이고 f'이 단조함수이면 f'은 구간 I에서 연속이다.

Solution. $f' : I \to \mathbb{R}$이 구간 I에서 단조함수이고 **다르부 정리**에 의해서 $f'(I)$가 구간이므로 f'은 구간 I에서 연속이다.

ㄴ. **False.** $f(x) = \sin x,\ g(x) = x$

ㄷ. **False.**

Example. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(0) = 0$으로 정의하고 $x \neq 0$이면 $f(x) = x^2 \sin(1/x) + x/2$로 정의하면 $f'(0) > 0$이지만 함수 f는 $x = 0$을 포함한 임의의 열린구간(open interval)에서 증가함수가 아니다.

Solution. 도함수의 정의에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(x \sin\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0.$$

$x \neq 0$이면 $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$이다. $x = 0$을 포함하는 임의의 열린 구간에서 $|2x_0| < 1/4$이고 $\cos(1/x_0) = 1$인 x_0을 선택한다. 그러면 다음 결과를 얻는다.

$$\left|f'(x_0) + \frac{1}{2}\right| = \left|2x_0 \sin\frac{1}{x_0} - \cos\frac{1}{x_0} + 1\right| = \left|2x_0\sin\frac{1}{x_0}\right| < \frac{1}{4}. \tag{1}$$

식 (1)에서 $f'(x_0) < -\frac{1}{4}$을 얻는다. 한편, 열린구간 (a, b)에서 미분가능인 함수가 (a, b)에서 증가함수이면 그 함수의 도함수는 열린구간 (a, b)에서 음이 아니다. 따라서 함수 f는 $x = 0$을 포함한 임의의 열린구간에서 증가함수가 아니다.

Example. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $x \neq 0$이면 $f(x) = x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}$로 정의하고 $f(0) = 0$으로 정의하면 $f'(0) > 0$이지만 f가 증가함수가 되는 $x = 0$의 근방이 존재하지 않는다.

Solution 도함수의 정의에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(1 + 2x\sin\frac{1}{x}\right) = 1 > 0.$$

임의의 양수 δ에 대하여 $\frac{2}{(4n+3)\pi} < \delta$인 자연수 n을 선택하고 $x = \frac{2}{(4n+5)\pi}$ 그리고 $y = \frac{2}{(4n+3)\pi}$라 둔다. 그러면 x, $y \in (-\delta, \delta)$이고 $x < y$이다. $\sin\frac{1}{x} = 1$이고 $\sin\frac{1}{y} = -1$이므로 $f(x) = x + 2x^2$이고 $f(y) = y - 2y^2$이

다. $x = 2/(4n+5)\pi$, $y = 2/(4n+3)\pi$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{2\pi^2(4(4n+3)^2 - 2\pi(4n+3)(4n+5) + 4(4n+5)^2)}{(4n+3)^2(4n+5)^2\pi^4} \\ &> \frac{2(4(4n+3)^2 - 8(4n+3)(4n+5) + 4(4n+5)^2)}{(4n+3)^2(4n+5)^2\pi^2} \\ &= \frac{8((4n+3)-(4n+5))^2}{(4n+3)^2(4n+5)^2\pi^2} = \frac{32}{(4n+3)^2(4n+5)^2\pi^2} > 0. \end{aligned}$$

이 결과에서 $f(x) > f(y)$를 얻는다. 따라서, f가 증가함수가 되는 $x = 0$의 근방이 존재하지 않는다.

33. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$와 $g_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$를 각각

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2}, & x \le n \\ 0, & x > n \end{cases}, \qquad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{k^3}$$

로 정의할 때, 함수열 $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점]

ㄱ. $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$은 모두 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)한다.

ㄴ. $\{f_n\}$의 극한함수를 f라 하면 수열 $\left\{\int_0^\infty f_n(x)\,dx\right\}$는 $\int_0^\infty f(x)\,dx$로 수렴한다.

ㄷ. $\{g_n\}$의 극한함수를 g라 하면 $\{g_n'\}$은 g'으로 점별수렴(pointwise convergence)한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ④

ㄱ. 모든 자연수 n과 모든 $x \in [0,\infty)$에 대하여 아래의 식이 성립한다.

$$|f_n(x)| \le \left|\frac{x}{n^2}\right| \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

따라서 수열 $\{f_n\}$은 구간 $[0,\infty)$ 위에서 균등수렴한다. **바이어스트라스 $M-$판정법**에 의해서 급수 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kx}}{k^3}$가 구간 $[0,\infty)$ 위에서 균등수렴하므로 수열 $\{g_n\}$은 구간 $[0,\infty)$ 위에서 균등수렴한다.

ㄴ. $\displaystyle\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{n}\frac{x}{n^2}\,dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} 0\,dx = 0.$

ㄷ. **바이어스트라스 $M-$판정법**에 의해서 급수 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-kx}}{k^3}\right)'$이 구간 $[0,\infty)$ 위에서 균등수렴하고 급수 $g(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kx}}{k^3}$가 수렴하므로 **무한급수의 항별 미분정리**에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-kx}}{k^3}\right)' = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e^{-kx}}{k^3}\right)' \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-kx}}{k^3}\right)' = \lim_{n\to\infty} g_n'(x). \end{aligned}$$

34. 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$에서 영역 D가 $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}\le 1\right\}$일 때, 다음 삼중적분의 값은? [1.5점]

$$\iiint_D z^2\,dxdydz$$

① $\dfrac{64}{15}\pi$ ② $\dfrac{32}{15}\pi$ ③ $\dfrac{16}{15}\pi$ ④ $\dfrac{8}{15}\pi$ ⑤ $\dfrac{4}{15}\pi$

Solution. ② **원주좌표(원기둥좌표)**를 사용하여 삼중적분을 계산한다.

$$\begin{aligned}\iiint_D z^2\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-2\sqrt{1-r^2}}^{2\sqrt{1-r^2}} z^2 dzrdrdt \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{16}{3}(1-r^2)^{3/2}\,rdrdt \\ &= \frac{32\pi}{3}\int_0^1 (1-r^2)^{3/2}\,rdr = \frac{32}{15}\pi.\end{aligned}$$

35. 다음은 주어진 문제의 풀이를 단계별로 제시한 것이다. (가), (나), (다), (라)에 알맞은 겄은? [2.5점]

<**문 제**>

복소수 전체 집합을 $\mathbb{C}$라 하자. $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<2\}$이고 $f:D\to\mathbb{C}$가 D에서 해석적이라 하자. $f(0)=f'(0)=0$이고 $f''(0)\neq 0$이고 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{i}{12}$이며 모든 $z\in D$에 대하여 $|f(z)|\leq 3$일 때, $f\left(\dfrac{2i}{3}\right)$의 값은?

<**풀 이**>

<**1단계**> 함수 f가 D에서 해석적이므로 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$이 되고, 따라서 $f(z)=\boxed{(가)}\cdot g(z)$의 꼴이다. 단, $g(z)$는 D에서 해석적이며 $g(0)\neq 0$이다.

<**2단계**> $0<r<2$인 r에 대하여 $|z|=r$일 때 $|g(z)|\leq\boxed{(나)}$이 성립한다. 여기서 최대절대값정리(maximum modulus theorem)를 적용하면 $|z|\leq r$일 때 $|g(z)|\leq\boxed{(나)}$이다. 이 명제는 임의의 $r<2$에 대하여 성립하므로 모든 $z\in D$에 대하여 $|g(z)|\leq\boxed{(다)}$이다

<**3단계**> 위의 결과와 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{i}{12}$를 사용하여 $g(z)$를 구할 수 있고,

이를 이용하면 $f\left(\frac{2i}{3}\right) = \boxed{(라)}$ 임을 알 수 있다.

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	z	$\frac{3}{r}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{i}{12}$
②	z	$\frac{3}{r}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$
③	z^2	$\frac{3}{r}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{i}{12}$
④	z^2	$\frac{3}{r^2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{3}$
⑤	z^2	$\frac{3}{r^2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{i}{3}$

Solution. ⑤

<**1단계**> $f(0) = f'(0) = 0$이므로 $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2} = z^2 g(z)$이다. $g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2}$는 D에서 해석적이고 $g(0) = a_2 = f''(0)/2! \neq 0$이다.

<**2단계**> D에서 $|f(z)| \leq 3$이므로 $|z| = r$일 때 $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|^2} \leq \frac{3}{r^2}$이다. 따라서 **최대절대값정리**에 의해서 $|z| \leq r$이면 $|g(z)| \leq \frac{3}{r^2}$이다. $r \to 2$하면 모든 $z \in D$에 대하여 $|g(z)| \leq \frac{3}{4}$이 성립한다.

<**3단계**> $g(1/3) = f(1/3)/(1/3)^2 = 3i/4$이고 모든 $z \in D$에 대하여 $|g(z)| \leq 3/4$이므로 **최대절대값정리**에 의해서 모든 $z \in D$에 대하여 $g(z) = 3i/4$이다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

$$f\left(\frac{2i}{3}\right) = \left(\frac{2i}{3}\right)^2 g\left(\frac{2i}{3}\right) = \left(-\frac{4}{9}\right)\frac{3i}{4} = -\frac{i}{3}.$$

36. 복소평면에서 곡선 C가 $C:\ z(t) = e^{it}\,(0 \le t \le 2\pi)$로 나타내지는 단위 원일 때, 다음 복소적분값 A, B에 대하여 $\dfrac{A}{B}$의 값은?

$$A = \int_C \left(e^{z^2} + z^2 e^{1/z}\right) dz, \quad B = \int_C \frac{1-z}{\sin z}\, dz.$$

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

Solution. ① 코시정리와 유수정리에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$A = \int_C e^{z^2}\, dz + \int_C z^2 e^{1/z}\, dz = 0 + (2\pi i)\frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}.$$

$$B = \int_C \frac{1-z}{\sin z}\, dz = (2\pi i)\frac{1-0}{\cos 0} = 2\pi i, \quad \frac{A}{B} = \frac{1}{6}.$$

유수정리(Residue Theorem). 함수 f가 고립특이점 $z_1, z_2, \cdots, z_n$을 제외하고 영역 Ω에서 해석적이라 하자. γ가 영역 Ω 내부의 양의 방향을 가진 단순폐경로이고 $z_k \in \mathrm{Int}\,(\gamma),\ 1 \le k \le n$이면 다음 결과가 성립한다.

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_k).$$

Remark. $f(z)$가 $z = a$에서 위수 m인 극을 가지면 $f(z)$를 다음 형식으로 표현할 수 있다. $\varphi(a) \ne 0$이고 $\varphi(z)$는 $z = a$에서 해석적이다.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad 0 < |z-a| < R.$$

$z = a$에서의 $f(z)$의 유수는 다음 식으로 주어진다.

$$\mathrm{Res}(f; a) = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Remark. $p(z)$와 $q(z)$가 $z = a$에서 해석적이고 $p(a) \ne 0,\ q(a) = 0,\ q'(a) \ne 0$이면 $z = a$가 $p(z)/q(z)$의 단극이고 $\mathrm{Res}(p/q; a) = p(a)/q'(a)$이다.

2010학년도(2차) (해석학, 복소해석학)

3. 다음은 실수 e에 관한 세 교사의 대화이다. 물음에 답하시오. (30점)

김 교사: 실수 e가 무리수임을 무한급수를 이용해 보일 수 있습니다. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$으로 정의되는 수 e가 무리수임을 증명하려면, 먼저 극한 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 수렴함을 보여야 합니다. 한편 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$이 수렴하고 그 합이 e와 같음을 보일 수 있습니다. 이 사실에 귀류법을 적용하면 ① e가 무리수임을 증명할 수 있습니다.

정 교사: 실수 e와 관련된 내용 중, 표준정규분포의 확률밀도함수에 대한 특이적분(improper integral) ② $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=1$을 이중적분(double integral)의 성질을 사용하여 증명할 수 있습니다.

박 교사: 네, 맞습니다. 그렇지만 고등학교 학생들이 김 선생님과 정 선생님의 증명 과정을 이해하기 어렵다고 생각합니다. 저는 ③ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7182\cdots = e$임을 직관적으로 이해시킨 후, 학생들이 여러 극한값을 능숙하게 구하도록하는 데에 많은 시간을 할애합니다. 그리고 e가 무리수임이 알려져 있음을 간략하게 언급하는 정도로만 다룹니다. 한편, 표준정규분포의 확률밀도함수에 대한 것도 관련된 사실을 간략하게 소개하고 이를 활용해 여러 통계 문제를 해결하는 데에 초점을 맞추어 지도합니다.

3-1. 김 교사와 정교사가 제시한 방법에 따라 밑줄 친 ①과 ②를 각각 증명하시오. (20점)

Solution. ① $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$이라 두자. 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} 0 < e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right] = \frac{1}{n!n}. \end{aligned} \tag{1}$$

e가 유리수라 하고 $e = p/q$ $(p,\ q \in \mathbb{N})$라 두자. 그러면 $q!e$는 정수이다. 식 (1)에서 다음 결과를 얻는다.

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q}. \tag{2}$$

$q!s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$가 정수이므로 $q!(e - s_q)$도 정수이다. $\frac{1}{q} \le 1$이므로 이 결과는 식 (2)에 모순이다. 따라서 e는 무리수이다.

② $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1$이면 $\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$이고 또한 역도 성립한다. 따라서 $\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$가 성립함을 증명하면 된다. $Q = \{(x, y) : -R \le x \le R,\ -R \le y \le R\}$, $(R > 0)$이라 두자. 정사각형 Q에 내접하는 닫힌 원판(closed disk)과 외접하는 닫힌 원판을 각각 K_1, K_2라 하자(그림 1). 다음 결과를 얻는다.

$$\iint_{K_1} e^{-x^2/2 - y^2/2}\, dxdy \le \iint_{Q} e^{-x^2/2 - y^2/2}\, dxdy \le \iint_{K_2} e^{-x^2/2 - y^2/2}\, dxdy. \tag{1}$$

$$\iint_{Q} e^{-x^2/2 - y^2/2}\, dxdy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\, dx\right)^2. \tag{2}$$

원판 K_1과 K_2의 반지름이 각각 R과 $\sqrt{2}R$이므로 식 (1)과 식 (2)에서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} e^{-r^2/2}\, r dr d\theta \le 4\left(\int_{0}^{R} e^{-x^2/2}\, dx\right)^2 \le \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{2}R} e^{-r^2/2}\, r dr d\theta \tag{3}$$

다음 결과를 얻는다.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} e^{-r^2/2}\, r dr d\theta = 2\pi\left(1-e^{-R^2/2}\right). \tag{4}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}R} e^{-r^2/2}\, r dr d\theta = 2\pi\left(1-e^{-R^2}\right). \tag{5}$$

식 (3), (4), 그리고 (5)에서 $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$를 얻는다.

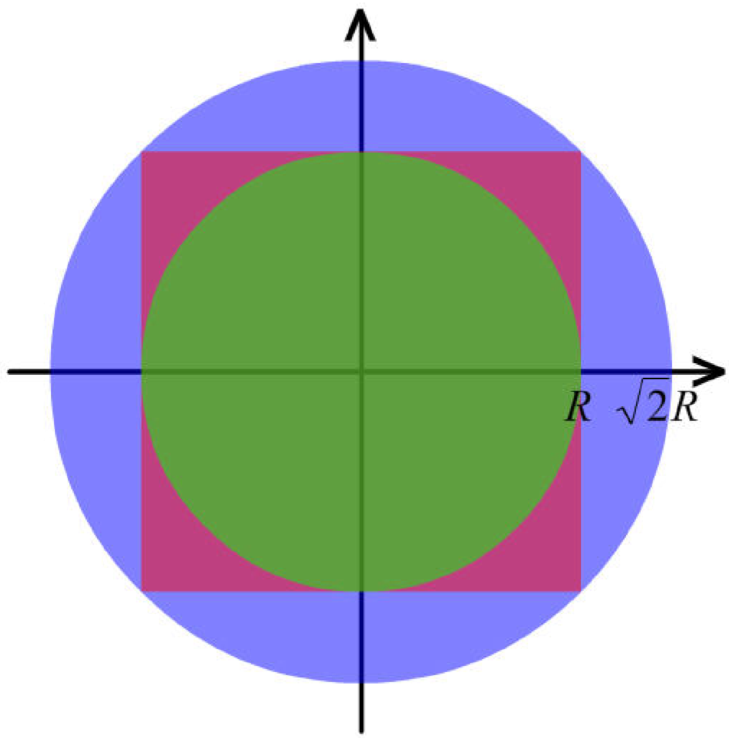


그림 1

3-2. 2007년 개정 수학과 교육과정에서는 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 수학적 개념·원리·법칙을 도입하고, 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념·원리·법칙의 이해 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육

용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 권고하고 있다.

박 교사가 이러한 권고사항에 따라 밑줄 친 ③을 위해 시도할 것으로 예상되는 방안 한 가지를 그 근거와 함께 제시하시오. (10점)

Solution 1. 웹스크립트 내장 함수인 Math.pow 메서드(method)를 사용하여 $e(n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$의 수치값(numerical value)을 n이 100만, 300만, 500만, 700만, 1000만, 5000만인 경우에 계산하여 수열 $(e(n))$이 (유계인) 단조증가 수열임을 실증(demonstration)하고 이 결과를 사용하여(단조수렴정리를 사용하여) 오일러 수(Euler number) e의 수치값이 $2.7182\cdots$ 임을 설명한다. 아래의 코드를 웹문서에 삽입하고 이 웹문서를 브라우저에서 열면 n이 100만, 300만, 500만, 700만, 1000만, 5000만일 때의 $e(n)$의 값이 출력된다.

```
<script>
function e(n) {return Math.pow(1+1/n, n);}
document.write("e(1000000) = "+e(1000000));
document.write("<br>"+"e(3000000) = "+e(3000000));
document.write("<br>"+"e(5000000) = "+e(5000000));
document.write("<br>"+"e(7000000)  = "+e(7000000));
document.write("<br>"+"e(10000000) = "+e(10000000));
document.write("<br>"+"e(50000000) = "+e(50000000));
</script>
```

Remark. 위의 스크립트 코드를 삽입한 웹문서를 브라우저에서 열면 아래의 결과가 출력된다.

```
 e(1000000) = 2.7182804690957534
 e(3000000) = 2.718281375792168
 e(5000000) = 2.718281555200129
 e(7000000) = 2.7182816328653
e(10000000) = 2.7182816941320817
e(50000000) = 2.718281814934939
```

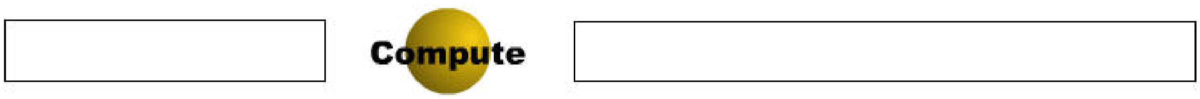
Solution 2. 대표적인 CAS 소프트웨어인 Mathematica를 사용하여 $e(n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$의 수치값(numerical value)을 n이 100만, 300백만, 500만, 700만, 1000만인 경우에 계산하여 수열 $(e(n))$이 (유계인) 단조증가수열임을 실증(demonstration)하고 이 결과를 사용하여(단조수렴정리를 사용하여) 오일러 수(Euler number) e의 수치값이 $2.7182\cdots$ 임을 설명한다. CAS 소프트웨어인 Mathematica에서 다음 식으로 $e(n)$을 정의하고 n이 100만, 300백만, 500만, 700만, 1000만일 때 e[n]의 값을 계산하면 된다.

```
e[n_] := N[(1 + 1/n)^n, 15]
```

Remark. Mathematica에서 $e[n]$을 정의하고 n이 100만, 300백만, 500만, 700만, 1000만일 때 e[n]의 값을 계산하여 다음 결과를 얻는다.

```
 e[1000000]=2.71828046931938
 e[3000000]=2.71828137541221
 e[5000000]=2.71828155663091
 e[7000000]=2.71828163429608
e[10000000]=2.71828169254497
```

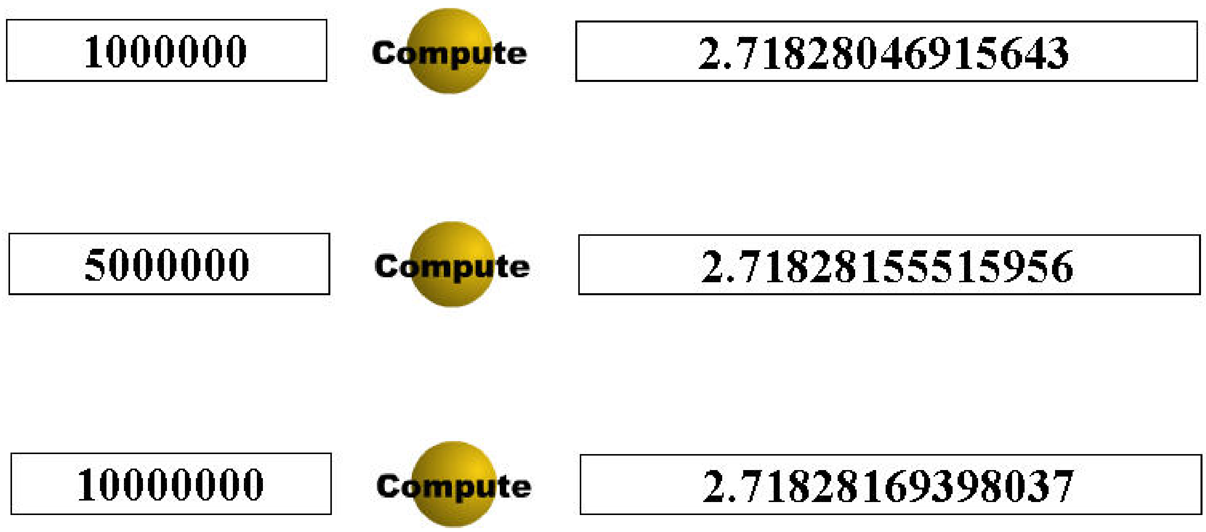
Solution 3. 대표적인 RIA(Rich Internet Application) 소프트웨어인 Adobe Flash를 사용하여 $e(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$의 수치값을 계산할 수 있는 아래 그림과 같은 형식의 **Form 계산기**를 제작한다. 그림에서 왼쪽 텍스트 필드는 입력 필드이고 오른쪽 텍스트 필드는 출력 필드이다. 입력 필드에 자연수를 입력하고 가운데의 버튼을 누르면 $e(n)$의 수치값이 출력 필드에 출력되는 계산기이다.



$e(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$의 수치값(numerical value)을 n이 100만, 300만, 500만, 700만, 1000만, 5000만인 경우에 계산하여 수열 $(e(n))$이 (유계인) 단조증가수열임을 실증(demonstration)하고 이 결과를 사용하여(단조수렴정리를 사용하여) 오일러 수(Euler number) e의 수치값이 $2.7182\cdots$임을 설명한다. 아래의 코드는 Flash의 Actions 패널에 삽입한 Form 계산기 실행 코드이다. 아래의 코드에서 box1과 box2는 각각 입력 텍스트 필드와 출력 텍스트 필드의 변수이름이고 calc는 버튼의 인스턴스(instance) 이름이다.

```
function EulerNumber(n) {
return Math.pow(1+1/n, n)
}
calc.onRelease = function() {
var a=Number(box1);
box2=EulerNumber(a);
}
```

Remark. 아래의 그래픽은 n이 100만, 500만, 1000만인 경우를 위에서 제작한 **Flash Form 계산기**로 계산한 결과의 그래픽이다.



2011학년도(1차) (해석학, 복소해석학)

23. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를

$$f(x) = \int_{1+2x}^{1-2x} (1 - t^3\sqrt{1+3t^2})dt$$

로 정의할 때, $f'(0)$의 값은? (단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Solution. ① 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-(1-2x)^3\sqrt{1+3(1-2x)^2})(-2) \\ &\quad - (1-(1+2x)^3\sqrt{1+3(1+2x)^2})(2). \end{aligned}$$

따라서 $f'(0) = (1-\sqrt{4})(-2) - (1-\sqrt{4})(2) = 4$이다.

24. <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은?

ㄱ. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+7}}$은 수렴한다.

ㄴ. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$는 수렴한다.

ㄷ. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+12^n} x^{2n}$의 수렴반경은 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ⑤

ㄱ. $\displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n^2+7}} \le \frac{1}{n^2}$, 비교판정법

ㄴ. $n \ge 4$이면 $\displaystyle\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}} \downarrow 0$, 교대급수판정법

ㄷ. 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}^{n+1}+\sqrt{3}^{n+1}}{\sqrt{2}^{n}+\sqrt{3}^{n}}\frac{\sqrt{4}^{n}+\sqrt{12}^{n}}{\sqrt{4}^{n+1}+\sqrt{12}^{n+1}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{2^n+3^n}{4^n+12^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{3^n((2/3)^n+1)}{12^n((4/12)^n+1)}}=\frac{1}{2}.$$

25. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은?

ㄱ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 연속함수이고 실수열 $\{x_n\}$이 코시수열(Cauchy sequence)이면 $\{f(x_n)\}$도 코시수열이다.

ㄴ. 함수 $g:[0,1]\to[0,1]$에 대하여 합성함수 $g\circ g$가 연속함수이면 g도 연속함수이다.

ㄷ. $h:[0,1]\to\mathbb{R}$가 연속인 단사함수이면 역함수 $h^{-1}:h([0,1])\to[0,1]$도 연속함수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

Solution. ④

ㄱ. True. 연속성의 수열특성화

ㄴ. False. x가 유리수이면 $g(x)=0$, x가 무리수이면 $g(x)=1$로 함수 g를 정의하면 함수 g는 불연속함수이지만 합성함수 $g\circ g$는 연속함수이다.

ㄷ. True.

Theorem. 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$가 컴팩트 구간 $[a,b]$에서 1대1이고 연속이면 역함수 f^{-1}도 $f([a,b])$에서 연속이다.

26. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하고 복소수 전체의 집합을 $\mathbb{C}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은?

ㄱ. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, & x\text{는 유리수} \\ x\cos x, & x\text{는 무리수} \end{cases}$$

로 정의하면 f는 $x = 0$에서 미분가능이다.

ㄴ. 해석함수(analytic function) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$가 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $g'(z) \neq 0$이면 g는 단사함수이다.

ㄷ. 벡터함수 $F : [0,1] \to \mathbb{R}^2$이 연속함수이고 구간 $(0,1)$에서 미분가능하면 $F(1) - F(0) = F'(c)$를 만족시키는 점 $c \in (0,1)$이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ①

ㄱ. True. $x \to 0$이면 $\dfrac{x+x^2}{x} \to 1$이고 $\dfrac{x\cos x}{x} \to 1$이다. 따라서 $f'(0) = 1$이다.

ㄴ. False. $g(z) = e^z$라 두면 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $g'(z) \neq 0$이지만 g는 단사함수가 아니다. $g(z) = e^z$는 주기가 $2\pi i$인 주기함수이다.

ㄷ. False. 함수 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$를 $F(x) = (x - x^2, x - x^3)$으로 정의하면 F는 $\mathbb{R}$에서 미분가능이다. 다음 결과를 얻는다.

$$F'(x) = (1 - 2x, 1 - 3x^2). \tag{1}$$

$F(1) - F(0) = (0,0) - (0,0) = (0,0)$이므로 식 (1)에 의해서 $F(1) - F(0) = F'(c)$를 만족시키는 점 $c \in (0,1)$는 존재하지 않는다.

평균치 정리. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Ω: 열린집합), $[a, b] \subset \Omega$. f가 선분 $[a, b]$에서 미분가능이면 $f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$인 $c \in [a, b]$가 존재한다.

평균치 정리. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ (Ω: 열린집합), $[a, b] \subset \Omega$. f가 선분 $[a, b]$에서 미분가능이면 $\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c)(b - a)\|$인 $c \in [a, b]$가 존재한다.

27. 실수열 $\{r_k\}$ $(0 < r_k < 1,\ k = 1, 2, 3, \cdots)$이 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$를

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq r_n \\ \dfrac{1}{2^n}, & x > r_n \end{cases}$$

로 정의하면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 수렴한다. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.) [2.5점]

ㄱ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 [0,1]에서 균등수렴(고른수렴, 평등수렴, uniform convergence)한다.

ㄴ. f는 [0,1]-$\{r_k | k$는 자연수$\}$에서 연속이다.

ㄷ. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = f(1)$.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ④

ㄱ. True. 바이어스트라스 M-판정법

ㄴ. True. 모든 f_n이 $[0, 1] - \{r_k | k \in \mathbb{N}\}$에서 연속이고 f가 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$의 평등극한(uniform limit)이므로 f도 $[0, 1] - \{r_k | k \in \mathbb{N}\}$에서 연속이다.

ㄷ. **False.** 항별적분정리에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1-r_n) \neq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = f(1).$$

28. 좌표평면에서 영역 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$일 때, 다음 이중적분의 값은?

$$\iint_D \frac{|y|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\,dxdy$$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

Solution. ④ 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{|y|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\,dxdy &= 2\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\,dydx \\ &= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{(x-2)^2+y^2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= 2\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{5-4x}-(2-x)\right)\,dx = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

29. 복소평면에서 곡선 C는 $C: z(t) = e^{it}\,(0 \leq t \leq 2\pi)$로 나타내어지는 단위원이다. 자연수 n에 대하여 복소적분

$$\int_C z^n\left(e^z + e^{1/z}\right)\,dz$$

의 값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$의 값은? [1.5점]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

Solution. ① $z=0$에서 $z^n(e^z+e^{1/z})$의 유수가 $1/(n+1)!$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi i}{(n+2)!}\frac{(n+1)!}{2\pi i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0.$$

30. 복소수 $z = x + iy$(x, y는 실수)에 대한 정함수(entire function) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1+i)$의 값은? (단, u와 v는 실수값 함수이다.)

(가) 임의의 복소수 $z = x + iy$에 대하여 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$이다.

(나) $f(1) = 0, \quad f(i) = 1 + i$

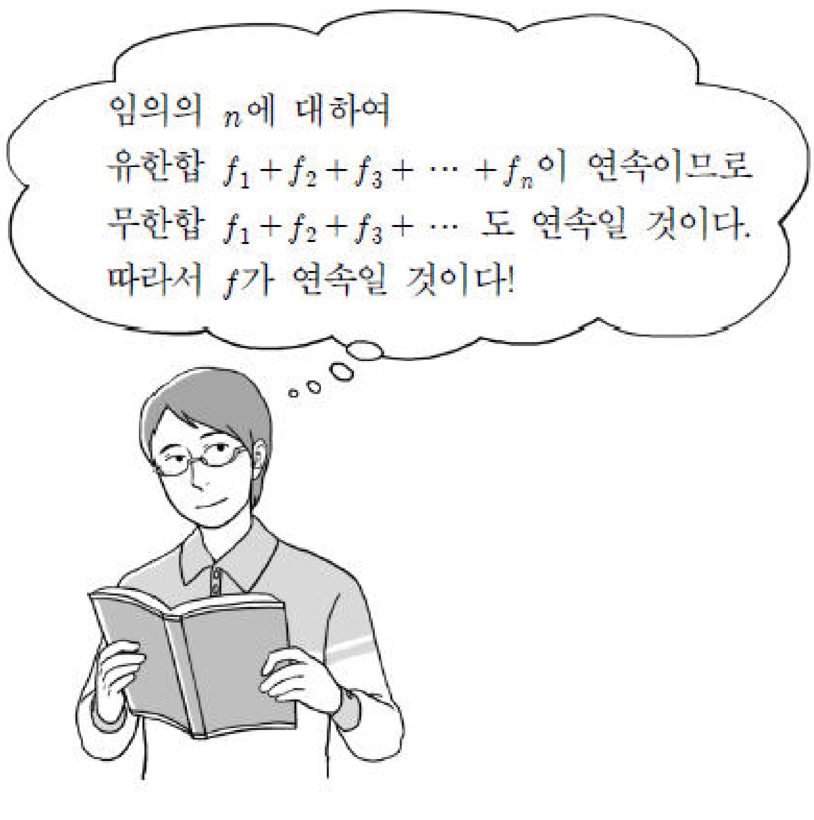
① $1 - i$ ② $1 + i$ ③ $1 - 2i$ ④ $1 + 2i$ ⑤ $2 - i$

Solution. ④ 코시-리만 방정식과 조건 (가)에 의해서 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$이다. 따라서 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$를 $f(z) = u(y) + iv(x)$형식으로 표현할 수 있다. $0 = f(1) = u(0) + iv(1)$, $1 + i = f(i) = u(1) + iv(0)$에서 $u(0) = v(1) = 0$, $u(1) = v(0) = 1$을 얻는다. 그러므로 $f(z) = u(y) + iv(x) = y + i(1 - x)$이다. 따라서 $f(-1+i) = 1 + 2i$이다.

2011학년도(2차) (해석학, 복소해석학)

3. 구간 $I = (-1, 1)$에서 정의되고 함숫값이 실수인 연속함수의 수열 (f_n)이 있다. 함수열 $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)$가 I에서 함수 f로 점별수렴(pointwise convergence)할 때, 물음에 답하시오. (30점)

3-1. '함수 f는 연속함수인가'에 대하여 경규는 다음과 같이 생각하였다.



경규의 생각이 속하는 추론 유형을 폴리아(G. Polya)의 문제해결 4단계 이론에 따른 문제해결 지도에 활용하는 방안을 기술하시오. 그리고 적절한 중등학교 수학 문제를 사례로 들어 이 활용 방안을 구체화하시오 (10점).

3-2. $f_n(x) = a_n x^n$일 때, 다음 세 명제가 참임을 보이시오 (20점).

(I) 모든 $x \in I$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$가 수렴한다.

(II) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 구간 $[-a, a]$ $(0 < a < 1)$에서 f로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniformly converge)한다.

(III) f는 I에서 미분가능하고, 모든 $x \in I$에 대하여 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$이다.

□ 다음 6개의 정리는 필요하면 증명 없이 사용한다.

정리 1. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 수열 (a_n)은 유계이다.

정리 2. 모든 n에 대하여 $|b_n| \leq a_n$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$도 수렴한다.

정리 3. 두 거듭제곱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$의 수렴반경은 서로 같다.

정리 4. 연속함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 구간 (a, b)에서 미분가능하면 $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$를 만족시키는 $c \in (a, b)$가 존재한다.

정리 5. 연속함수 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$에 대하여 함수 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$를 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$로 정의하면 F는 구간 (a,b)에서 미분가능이고 $F' = f$이다.

정리 6. 구간 I에서 정의된 함수열 (f_n)에 대하여 다음을 만족시키는 수열 (M_n)이 존재하면 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 I에서 평등수렴한다.

모든 자연수 n과 모든 $x \in I$에 대하여 $|f_n(x)| \le M_n$이고

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$이 수렴한다.

Solution. (I) $x_0 \in I = (-1,1)$이라 하고 $|x_0| < r < 1$인 양수 r을 선택한다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$이 I에서 점별수렴하고 $\frac{|x_0|}{r} \in I$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{|x_0|}{r}\right)^n$은 수렴한다. 따라서 (정리 1에 의해서) 모든 n에 대하여 $\left| a_n \left(\frac{|x_0|}{r}\right)^n \right| \le M$이 성립하는 양수 M이 존재한다. 다음 결과를 얻는다.

$$|a_n x_0^n| = \left| a_n \left(\frac{x_0}{r}\right)^n r^n \right| \le M r^n. \tag{1}$$

$0 < r < 1$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} M r^n$은 수렴한다. 따라서 (정리 2와) 식 (1)에 의해서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_0^n|$은 수렴한다.그런데 $x_0 \in I$가 임의의 원소이므로 모든 $x \in I$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$는 수렴한다.

Alternate Solution. 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$이 $I = (-1,1)$에서 수렴하므로 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경을 R이라 하면 $R \ge 1$이다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \le 1.$$

$x_0 \in I$라 하고 $|x_0| < \rho < R$인 양수 ρ를 선택한다. $1/R < 1/\rho$이므로 상극한(limit superior)의 정의에 의해서 아래의 식 (1)을 만족하는 자연수 N이 존재한다.

$$n \ge N \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{\rho}. \tag{1}$$

식 (1)에서 아래의 결과를 얻는다.

$$n \ge N \Rightarrow |a_n x_0^n| = |a_n||x_0|^n \le \left(\frac{|x_0|}{\rho}\right)^n. \tag{2}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x_0|}{\rho}\right)^n < \infty$이므로 (정리 2와) 식 (2)에 의해서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_0^n| < \infty$이다. 따라서 $x \in I$이면 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$은 절대수렴한다.

(II) $0 < a < 1$이므로 모든 자연수 n과 모든 $x \in [-a, a]$에 대하여 다음 결과가 성립한다.

$$|f_n(x)| = |a_n x^n| \le |a_n| a^n. \tag{*}$$

(I)에 의해서 상수급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| a^n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n a^n|$이 수렴하므로 (정리 6–바이어스트라스 M-판정법과) 식 (*)에 의해서 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 구간 $[-a, a]$에서 평등수렴한다.

Alternate Solution. 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$이 $I = (-1, 1)$에서 수렴하므로 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경을 R이라 하면 $R \ge 1$이다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \le 1.$$

$0 < a < \sigma < R$인 σ를 선택한다. $1/R < 1/\sigma$이므로 상극한(limit superior)의 정의에 의해서 아래의 식 (1)을 만족하는 자연수 N이 존재한다.

$$n \ge N \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R} + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{\sigma}. \tag{1}$$

식 (1)에서 아래의 결과를 얻는다.

$$n \ge N,\ |x| \le a \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n||x|^n \le \left(\frac{a}{\sigma}\right)^n. \tag{2}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\sigma}\right)^n < \infty$이므로 식 (2)와 **바이어스트라스 M-판정법**에 의해서 $0 < a < 1$이면 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$은 $[-a, a]$에서 평등수렴한다.

(III) 멱급수 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$이 $I = (-1, 1)$에서 수렴하므로 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경을 R이라 하면 $R \ge 1$이다.멱급수 $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$의 수렴반경도 R이므로 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$도 $I = (-1, 1)$에서 수렴한다. $[a, b]$를 구간 I의 임의의 폐부분구간이라 하면 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$과 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$은 폐구간 $[a, b]$에서 평등수렴한다. $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$라 두자. (s_n')이 $[a, b]$ 위에서 g에 **평등수렴**하므로 **미적분학의 기본정리**에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x s_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}(s_n(x) - s_n(a)), \quad x \in [a, b]. \tag{1}$$

식 (1)에서 다음 결과를 얻는다.

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + f(a), \quad x \in [a,b]. \tag{2}$$

함수 $g(x)$가 구간 $[a,b]$ 위에서 연속이므로 식 (2)와 미분정리에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$f'(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}, \quad x \in [a,b] \tag{3}$$

$[a,b]$가 $I=(-1,1)$의 임의의 폐부분구간이므로 모든 $x \in I = (-1,1)$에 대하여 식 (3)이 성립한다.

Alternate Solution. 멱급수 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$이 $I=(-1,1)$에서 수렴하므로 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경을 R이라 하면 $R \geq 1$이다. (정리 3에 의해서) 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$의 수렴반경도 R이므로 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$도 $I=(-1,1)$에서 수렴한다. $0 < a < 1$이라 하면 (II)에 의해서 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$과 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$은 유계 열린구간 $(-a,a)$에서 평등수렴한다.

$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$라 두고 $c \in I = (-1,1)$를 고정한다. $f(c) = \lim_{n\to\infty} s_n(c)$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(c) = \lim_{n\to\infty} s_n'(c)$이므로 아래의 식 (1)이 성립함을 보이면 된다.

$$f'(c) = \left(\lim_{n\to\infty} s_n(c)\right)' = \lim_{n\to\infty} s_n'(c) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(c). \tag{1}$$

$c \in (-a,a)$인 $a \in (0,1)$를 선택하고 임의의 자연수 n에 대하여 함수 $t_n : (-a,a) \to \mathbb{R}$을 다음 식으로 정의한다.

$$t_n(x) = \begin{cases} \dfrac{s_n(x) - s_n(c)}{x - c}, & x \neq c, \\ s_n^{'}(c), & x = c. \end{cases}$$

n과 m이 임의의 자연수라 하자. 다음 결과를 얻는다.

$$t_n(c) - t_m(c) = s_n'(c) - s_m'(c). \tag{2}$$

$x \in (-a, a),\ x \neq c$이면 평균치정리에 의해서 아래의 식 (3)을 만족시키는 α가 x와 c 사이에 존재한다.

$$\begin{aligned} t_n(x) - t_m(x) &= \frac{(s_n - s_m)(x) - (s_n - s_m)(c)}{x - c} \\ &= (s_n - s_m)^{'}(\alpha) = s_n^{'}(\alpha) - s_m^{'}(\alpha),\ x \neq c. \end{aligned} \tag{3}$$

함수열 (s_n')이 구간 $(-a, a)$에서 평등수렴하므로 식 (2)와 식 (3)에 의해서 함수열 (t_n)은 구간 $(-a, a)$에서 평등수렴한다. $\lim\limits_{n\to\infty} t_n(x) = t(x),\ x \in (-a, a)$라 두자. $t(x)$가 구간 $(-a, a)$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to c} t(x) = t(c)$가 성립한다.

$x \in (-a, a),\ x \neq c$라 하자. 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n(x) - s_n(c)}{x - c} = \lim_{n\to\infty} t_n(x) = t(x).$$

따라서 $t(x)$의 연속성에 의해서 아래의 식 (4)를 얻는다.

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} t(x) = t(c). \tag{4}$$

한편 모든 n에 대하여 $t_n(c) = s_n'(c)$이므로 아래의 식 (5)를 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty} s_n'(c) = \lim_{n\to\infty} t_n(c) = t(c). \tag{5}$$

식 (4)와 식 (5)에서 식 (1)을 얻는다. 따라서 증명이 완료되었다.

극한과 도함수의 교환 정리. (a,b)가 실직선 $\mathbb{R}$에서 유계 열린구간(bounded open interval)이라 하고 $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$이라 하자. 수열 $(f_n(x_0))$, $x_0 \in (a,b)$가 수렴하고 함수열 (f_n')이 구간 (a,b)에서 평등수렴하면 함수열 (f_n)은 구간 (a,b)에서 평등수렴하고 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)', \ x \in (a,b).$$

Solution. 도함수의 정의에 의해서 다음 식을 얻는다.

$$f_n^{'}(c) = \lim_{x\to c} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}, \ c \in (a,b).$$

한 점 $c \in (a,b)$를 고정하고 임의의 자연수 n에 대하여 함수 $g_n(x)$를 다음 식으로 정의한다.

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}, & x \neq c, \\ f_n^{'}(c), & x = c. \end{cases}$$

다음 결과를 얻는다.

$$f_n(x) = f_n(c) + (x - c)g_n(x), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in (a,b). \tag{1}$$

$x \in (a,b)$, $x \neq c$라 하자. 평균치정리에 의해서 아래의 식 (2)를 만족하는 α가 x와 c 사이에 존재한다.

$$\begin{aligned} g_n(x) - g_m(x) &= \frac{f_n(x) - f_n(c) - (f_m(x) - f_m(c))}{x - c} \\ &= \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c)}{x - c} \\ &= (f_n - f_m)^{'}(\alpha) = f_n^{'}(\alpha) - f_m^{'}(\alpha), \ x \neq c. \end{aligned} \tag{2}$$

다음 결과를 얻는다.

$$g_n(c) - g_m(c) = f_n^{'}(c) - f_m^{'}(c). \tag{3}$$

$\varepsilon > 0$이라 하자. 함수열 (f_n')이 (a,b)에서 평등수렴하므로 아래의 식 (4)를 만족하는 자연수 N이 존재한다.

$$m, n \geq N \Rightarrow |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in (a,b). \tag{4}$$

식 (2), 식 (3), 그리고 식 (4)에서 다음 결과를 얻는다.

$$m, n \geq N \Rightarrow |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in (a,b).$$

따라서 함수열 (g_n)은 구간 (a,b)에서 평등수렴한다. 함수열 (f_n)이 구간 (a,b)에서 평등수렴함을 보이기 위해서 $c = x_0$을 선택한다. 식 (1)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_m(x) &= f_n(x_0) + (x - x_0)g_n(x) - [f_m(x_0) + (x - x_0)g_m(x)] \\ &= f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)[g_n(x) - g_m(x)]. \end{aligned}$$

위의 식에서 아래의 식 (5)를 얻는다.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + (b-a)|g_n(x) - g_m(x)|, \ \forall x \in (a,b). \tag{5}$$

수열 $(f_n(x_0))$가 수렴하고 함수열 (g_n)이 (a,b)에서 평등수렴하므로 식 (5)에 의해서 함수열 (f_n)은 (a,b)에서 평등수렴한다.

다음에 아래의 식이 성립함을 증명한다.

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)', \ x \in (a,b).$$

함수 $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$를 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 그리고 $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$로 정의한다. $c \in (a,b)$를 고정하고 아래의 식이 성립함을 보이면 된다.

$$f'(c) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(c)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(c).$$

다음 결과를 얻는다.

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x).$$

g가 (a, b)에서 연속이므로, 위의 항등식에서 다음 결과를 얻는다.

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} g(x) = g(c). \tag{6}$$

$f_n'(c) = g_n(c)$이므로, 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(c) = \lim_{n\to\infty} g_n(c) = g(c). \tag{7}$$

식 (6)과 식 (7)에서, $f'(c) = \lim_{n\to\infty} f_n'(c)$를 얻는다.

2012학년도(1차) (해석학, 복소해석학)

22. 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-3)^n$을 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는? (1.5점)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

Solution. ③ 급수의 수렴반경을 R이라 하자. 다음 결과를 얻는다.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = e.$$

$e = 2.7182\cdots$ 이므로 구간 $(3-e, 3+e)$에 포함되는 정수는 1, 2, 3, 4, 5이고 구간의 양 끝점 $3-e$와 $3+e$는 정수가 아니다.

23. 양의 실수 t에 대하여 함수 f를

$$f(t) = \int_0^{\sqrt{t}} \int_y^{\sqrt{t}} \frac{1}{2+\sin(x^2)}\, dxdy$$

로 정의할 때, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

Solution. ① 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\sqrt{t}} \int_y^{\sqrt{t}} \frac{1}{2+\sin(x^2)}\, dxdy = \int_0^{\sqrt{t}} \int_0^{x} \frac{1}{2+\sin(x^2)}\, dydx \\ &= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x}{2+\sin(x^2)}\, dx. \end{aligned}$$

미분정리에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2+\sin(t)} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2(2+\sin(t))}.$$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{6}$이다.

24. 연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$와 실수열 (x_n)에 대하여 옳지 않은 것은? (2.5점)

① 닫힌구간 [0,1]에서 f는 균등연속(평등연속, 고른연속, uniformly continuous)이다.

② 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$이 수렴하면 $(f(x_n))$은 코시수열(Cauchy sequence)이다.

③ f가 단조증가이고 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$이 수렴하면 (x_n)은 수렴한다.

④ f가 미분가능하고 f의 도함수가 유계이면 f는 균등연속이다.

⑤ 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$이 수렴하면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$도 수렴한다.

Solution. ③

① **True.** 평등연속정리(Uniform Continuity Theorem)

② **True.** $x_n \to 0$이므로 수열 (x_n)은 수렴한다. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 연속이므로 연속성의 수열특성화 정리에 의해서 수열 $(f(x_n))$이 수렴한다.

③ **False.** $f(x) = e^x, \quad x_n = \log \dfrac{1}{n^2}, \quad f(x_n) = \dfrac{1}{n^2}$

④ **True.** $M = \sup |f'|(\mathbb{R})$이라 두면 평균치정리에 의해서 모든 $x, y \in \mathbb{R}$에 대하여 $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$가 성립한다.

⑤ **True.** 아벨 판정법.

아벨 판정법 (Abel's Test). 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$가 수렴하고 수열 (b_k)가 단조수열이고 수렴하면 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$는 수렴한다

25. 열린구간 (0,1)에서 미분가능인 함수 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. f의 도함수 f'은 연속이다.

ㄴ. 모든 $x\in(0,1)$에 대하여 $f'(x)<0$이면 f의 역함수 $f^{-1}:D\to(0,1)$이 존재한다. 단, D는 f의 치역이다.

ㄷ. f의 역함수 $f^{-1}:D\to(0,1)$이 존재하면 f^{-1}는 미분가능이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ②

ㄱ. **False.**

Example. $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right),\ x\neq 0,\quad f(0)=0.$ 다음 결과를 얻는다.

$$f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right),\quad x\neq 0,$$
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin(1/x^2)}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

f'이 [-1, 1]에서 비유계이므로 f'은 [-1, 1] 위에서 연속이 아니다.

ㄴ. **True.** $x\neq y$라 하자. 평균치정리에 의해서 $f(x)-f(y)=f'(t)(x-y)$인 t가 x와 y 사이에 존재한다. 한편 $f'(t)\neq 0$이므로 $f(x)\neq f(y)$이다. 따라서 f는 1-1 함수이다.

ㄷ. **False.** 역함수 정리.

역함수 정리. I가 열린 구간(open interval)이고 $f : I \to \mathbb{R}$가 I에서 1대1이고 연속이라 하자. $y_0 \in f(I)$이고 $f'(f^{-1}(y_0))$가 존재하고 영이 아니라고 하자. 그러면 f^{-1}가 y_0에서 미분가능이고 y_0에서의 f^{-1}의 도함수가 아래의 식으로 주어진다.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

26. 닫힌구간 [0,1]에서 연속함수열 (f_n)이 함수 f로 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하고, 열린구간 (0,1)에서 균등연속함수열 (g_n)은 g로 균등수렴한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. f는 [0,1]에서 적분가능하다.

ㄴ. f와 g의 곱 fg는 (0,1)에서 연속이다.

ㄷ. g는 (0,1)에서 균등연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ⑤

ㄷ. **True.**

ε이 임의의 양수라 하자. (0, 1)에서 $g_n \to g$(평등수렴)이므로 아래의 식 (1)을 만족하는 적당한 자연수 N이 존재한다.

$$|g_N(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in (0, 1). \tag{1}$$

g_N이 (0,1)에서 평등연속이므로 아래의 식 (2)를 만족하는 적당한 실수 $\delta > 0$가 존재한다.

$$|x-y| < \delta, x, y \in (0,1) \Rightarrow |g_N(x) - g_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

식 (1)과 식 (2)에서 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}|x-y| < \delta, x, y \in (0,1) \Rightarrow |g(x) - g(y)| &\le |g(x) - g_N(x)| \\ &+ |g_N(x) - g_N(y)| + |g_N(y) - g(y)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

27. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 특이적분(이상적분, improper integral) $\int_0^1 \ln x \, dx$가 수렴한다.

ㄴ. 닫힌구간 [0,1]에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

는 [0, 1]에서 리만(Riemann)적분가능하다.

ㄷ. [0, 1]에서 적분가능한 함수 f에 대하여

$$F(x) = \int_0^x f(y) \, dy$$

로 정의된 함수 F는 열린구간 (0, 1)에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ①

ㄱ. **True.**

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{a\to 0}[x\ln x - x]_a^1 = -1.$$

ㄴ. **False.**

ㄷ. **False.** **미분정리.** f가 구간 [0,1]에서 연속인 경우에 F는 [0, 1]에서 미분가능이다.

28. 복소평면에서 $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 5\}$가 반시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선일 때,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cos z}{\sin z}\, dz$$

의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

Solution. ⑤ $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin z}$라 두자. **유수정리**에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cos z}{\sin z}\, dz = \frac{1}{2\pi i}2\pi i(\mathrm{Res}(f,-\pi) + \mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\pi)) = 3.$$

유수정리(Residue Theorem). 함수 f가 고립특이점 $z_1, z_2, \cdots, z_n$을 제외하고 영역 Ω에서 해석적이라 하자. γ가 영역 Ω 내부의 양의 방향을 가진 단순폐경로이고 $z_k \in \mathrm{Int}\,(\gamma),\ 1 \le k \le n$이면 다음 결과가 성립한다.

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(f; z_k).$$

Remark. $p(z)$와 $q(z)$가 $z = a$에서 해석적이고 $p(a) \neq 0,\ q(a) = 0,\ q'(a) \neq 0$이면 $z = a$가 $p(z)/q(z)$의 단극이고 $\mathrm{Res}(p/q; a) = p(a)/q'(a)$이다.

29. 복소평면에서 영역 $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$에 대하여 연속함수 $f : D \to \mathbb{C}$가 해석적(analytic, holomorphic)이기 위한 필요충분조건을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. D에서 $f(z)$로 수렴하는 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$이 존재한다.

ㄴ. D에 포함되는 모든 단순닫힌경로(단순폐곡선, simple closed contour) C에 대하여 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$이다.

ㄷ. D에서 $\dfrac{dF}{dz} = f$를 만족하는 해석함수 F가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ⑤

테일러 정리. $f \in H(D(a,R)) \Rightarrow f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \quad z \in D(a,R).$

Theorem. Ω가 복소평면의 영역이라 하자. 다음 명제는 동치이다.

(a) Ω가 단순연결영역이다.

(b) Ω가 열린 단위원판(open unit disk) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$와 위상동형(homeomorphic)이다.

(c) Ω에서 해석적인 모든 함수는 원시함수(primitive)를 갖는다.

(d) Ω 안의 모든 폐곡선이 0-호모토픽(null-homotopic)이다.

단순연결영역에 대한 코시 정리(Cauchy's Theorem for Simply Connected Domain). 복소함수 f가 단순연결영역 Ω에서 해석적이면 Ω 내의 임의의 폐경로(closed contour) γ에 대하여 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$이다.

Theorem. 복소함수 $f(z)$가 영역(domain) Ω에서 연속함수라 하자. 다음 명제는 동치이다.

(a) $F' = f$인 $F \in H(\Omega)$가 존재한다. 즉, f가 Ω에서 **원시함수**(primitive, **역도함수**, antiderivative) F를 갖는다.

(b) Ω내의 임의의 경로(contour) γ에 대하여 경로적분 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$는 γ의 시점과 종점에만 종속한다.

(c) Ω내의 임의의 폐경로(closed contour) γ에 대하여 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$이다.

모레라 정리 (Morera's Theorem). $f(z)$가 영역 Ω에서 연속이고 Ω안의 모든 삼각형 경로(triangular path) γ에 대하여 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$이면 $f(z)$는 영역 Ω에서 해석적이다.

2012학년도(2차) (해석학, 복소해석학)

3. 아래의 명제는 함수의 극소, 곡선의 볼록, 급수의 수렴에 대한 성질을 나타낸다. 테일러(Taylor) 정리를 이용하여 명제 (I), (II), (III)이 참임을 각각 증명하시오. (20점)

실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하고, (a,b)를 $\mathbb{R}$의 열린 구간이라 하자.

I. 함수 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$가 (a,b)에서 C^4급 함수이고 $c \in (a,b)$에 대하여 $f'(c) = f''(c) = f^{(3)}(c) = 0, f^{(4)}(c) > 0$이면, f는 $x = c$에서 극솟값(local minimum)을 갖는다.

II. 함수 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$가 (a,b)에서 2계도함수를 갖고 모든 $x \in (a,b)$에 대하여 $f''(x) \geq 0$이면 f는 (a,b)에서 볼록함수(convex function)이다.

III. 함수 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$가 (a,b)에서 C^∞급 함수이고 $c \in (a,b)$라 하자. 임의의 자연수 k에 대하여 모든 $t \in (a,b)$에서 $|f^{(k)}(t)| \leq 2^k$이면 임의의 $x \in (a,b)$에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

※ 아래의 정리는 증명없이 사용한다.

테일러 정리. 함수 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$가 (a,b)에서 $(n+1)$계도함수 $f^{(n+1)}$을 가질 때, $c\in(a,b)$에 대하여

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

이라 하자. 그러면 임의의 $x\in(a,b)$에 대하여 다음 식을 만족하는 점 t_x가 x와 c 사이에 존재한다.

$$f(x)=p_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{(n+1)}.$$

<참 고>

◦ 함수 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$가 자연수 n에 대하여 (a,b)에서 C^n급 함수라는 것은 (a,b)에서 n계 도함수 $f^{(n)}$이 존재하고 $f^{(n)}$이 연속임을 뜻한다.

◦ 함수 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$가 $0\le t\le 1$을 만족하는 임의의 실수 t와 (a,b)의 임의의 두 점 x_1,x_2에 대하여 다음을 만족하면 f를 (a,b)에서 볼록함수(convex function)라 한다.

$$f((1-t)x_1+tx_2)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

◦ 함수 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$가 (a,b)에서 C^∞급 함수라는 것은 모든 자연수 n에 대하여 (a,b)에서 n계 도함수 $f^{(n)}$이 존재하고 $f^{(n)}$이 연속임을 뜻한다.

Solution. (I) $f^{(4)}$가 (a,b)에서 연속이고 $f^{(4)}(c) > 0$이므로 아래의 식 (1)을 만족하는 적당한 양수 δ가 존재한다.

$$x \in (c-\delta, c+\delta)(\subset (a,b)) \Rightarrow f^{(4)}(x) > 0. \tag{1}$$

$x \in (c-\delta, c+\delta)$라 하자. 테일러 정리에 의해서 아래의 식 (2)를 만족하는 점 t_x가 x와 c 사이에 존재한다.

$$f(x) - f(c) = \sum_{k=1}^{3} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(4)}(t_x)}{4!}(x-c)^4 = \frac{f^{(4)}(t_x)}{4!}(x-c)^4. \tag{2}$$

식 (1)과 식 (2)에 의해서 아래의 식 (3)이 성립한다.

$$x \in (c-\delta, c+\delta)(\subset (a,b)) \Rightarrow f(x) \geq f(c). \tag{3}$$

따라서 f는 $x = c$에서 극솟값(local minimum)을 갖는다.

(II) $x_1, x_2 \in (a,b)$이고 $0 < t < 1$이라 하자. 편의상 $x_1 < x_2$라 하고 $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$라 두자. 그러면 $x_1 < x_0 < x_2$이고 $x_0 - x_1 = t(x_2 - x_1)$, $x_2 - x_0 = (1-t)(x_2 - x_1)$이 성립한다. 평균치정리에 의해서 아래의 식 (1)을 만족하는 $\alpha \in (x_0, x_1)$, $\beta \in (x_1, x_2)$가 존재한다.

$$\begin{aligned}
(1-t)f(x_1) &+ tf(x_2) - f(x_0) \\
&= (1-t)(f(x_1) - f(x_0)) + t(f(x_2) - f(x_0)) \\
&= -(1-t)f'(\alpha)(x_0 - x_1) + tf'(\beta)(x_2 - x_0) \\
&= t(1-t)(x_2 - x_1)(f'(\beta) - f'(\alpha)).
\end{aligned} \tag{1}$$

모든 $x \in (a,b)$에 대하여 $f''(x) \geq 0$이고 $\alpha < \beta$이므로 $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$이다. 따라서 식 (1)에 의해서 $0 \leq t \leq 1$을 만족하는 임의의 실수 t와 (a,b)의 임의의 두 점 x_1, x_2에 대하여 아래의 식 (2)가 성립한다.

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \tag{2}$$

따라서 f는 (a,b)에서 볼록함수(convex function)이다.

Alternate Solution. $x_1, x_2 \in (a,b)$이고 $0 < t < 1$이라 하자. 편의상 $x_1 < x_2$라 하고 $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$라 두자. 그러면 $x_1 < x_0 < x_2$이고 $x_0 - x_1 = t(x_2 - x_1)$, $x_2 - x_0 = (1-t)(x_2 - x_1)$이 성립한다. 테일러 정리에 의해서 아래의 식 (1)을 만족하는 $\alpha \in (x_0, x_1)$, $\beta \in (x_1, x_2)$가 존재한다.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(x_1 - x_0)^2, \\ f(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\beta)(x_2 - x_0)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

$(1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0) = -t(1-t)(x_2 - x_1) + t(1-t)(x_2 - x_1) = 0$이고 모든 $x \in (a,b)$에 대하여 $f''(x) \ge 0$이므로 식 (1)에 의해서 아래의 식 (2)가 성립한다.

$$\begin{aligned} (1-t)f(x_1) + tf(x_2) &= f(x_0) + \frac{1}{2}(1-t)f''(\alpha)(x_1 - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}tf''(\beta)(x_2 - x_0)^2 \ge f(x_0) = f((1-t)x_1 + tx_2). \end{aligned} \tag{2}$$

$t = 0$과 $t = 1$인 경우에도 식 (2)가 성립하므로 f는 (a,b)에서 볼록함수(convex function)이다.

Alternate Solution. 볼록함수의 기하적 특성화 정리를 사용하여 증명한다. 모든 $x \in (a,b)$에 대하여 $f''(x) \ge 0$이므로 f'은 (a,b)에서 증가함수이다. $a < c < x < d < b$라 하자. 평균치정리에 의해서 아래의 식 (1)을 만족하는 $x_0 \in (c,x)$와 $x_1 \in (x,d)$이 존재한다.

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(x_0), \quad \frac{f(d) - f(x)}{d - x} = f'(x_1). \tag{1}$$

$x_0 < x_1$이고 f'이 증가함수이므로 $f'(x_0) \le f'(x_1)$이다. 따라서 식 (1)에 의해서 아래의 식 (2)를 얻는다.

$$a < c < x < d < b \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(d) - f(x)}{d - x}. \tag{2}$$

따라서 볼록함수의 기하적 특성화 정리에 의해서 f는 (a, b)에서 볼록함수(convex function)이다.

볼록함수의 기하적 특성화(Geometric Characterization of Convex Function). $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 볼록함수이다. $\Leftrightarrow$ (a, b)에서 함수 f의 그래프의 현(chord)의 기울기가 항상 증가한다:

$$a < c < x < d < b \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(d) - f(x)}{d - x}.$$

Proof. $(\Rightarrow)$ $a < c < x < d < b$라 하고 $Y = \lambda(X)$를 두 점 $(c, f(c)$와 $(d, f(d))$를 지나는 직선이라 하자. f가 (a, b)에서 볼록함수이므로 모든 $X \in [c, d]$에 대하여 $f(X) \le \lambda(X)$이다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{\lambda(x) - \lambda(c)}{x - c} = \frac{\lambda(d) - \lambda(x)}{d - x} \le \frac{f(d) - f(x)}{d - x}.$$

$(\Leftarrow)$ f가 (a, b)에서 볼록함수가 아니면 $a < c < x < d < b$이고 $\lambda(x) < f(x)$인 c, x, d가 존재하므로 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{\lambda(x) - \lambda(c)}{x - c} = \frac{\lambda(d) - \lambda(x)}{d - x} > \frac{f(d) - f(x)}{d - x}.$$

이 결과는 모순이다. 따라서 f는 (a, b)에서 볼록함수이다.

(III) f가 (a,b)에서 C^∞급 함수이므로 테일러 정리에 의해서 임의의 $x \in (a,b)$와 임의의 자연수 n에 대하여 아래의 식 (1)을 만족하는 점 t_x가 x와 c 사이에 존재한다.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{(n+1)}. \tag{1}$$

$R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{(n+1)}$이라 두자. $n \to \infty$일 때 $R_{n+1}(x) \to 0$이면 식 (1)에 의해서 아래의 식이 성립한다.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

따라서 $n \to \infty$일 때 $R_{n+1}(x) \to 0$이 성립함을 보이면 된다. 임의의 자연수 k와 모든 $t \in (a,b)$에 대하여 $|f^{(k)}(t)| \leq 2^k$이므로 아래의 식 (2)를 얻는다.

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}. \tag{2}$$

$a_n = \dfrac{2^n}{n!}(x-c)^n$이라 두면 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(x-c)}{n+1} = 0.$$

따라서 비판정법(Ratio Test)에 의해서 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 절대수렴한다. 그러므로 아래의 식 (3)이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| = 0 \tag{3}$$

식 (2)와 식 (3)에 의해서 $n \to \infty$일 때 $R_{n+1}(x) \to 0$이 성립한다. 증명이 완료되었다.

2013학년도(1차) (해석학, 복소해석학)

21. 모든 항이 양수인 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 때, 수렴하는 급수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+1}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{a_n}-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

Solution. ④

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$: 수렴 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$: 수렴

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n^2+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+1}$: 발산

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \in \mathbb{R}$이므로 **극한 비교판정법**에 의해서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{a_n}-1)$은 수렴한다.

22. 수렴하는 이상적분(특이적분, improper integral)만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$

ㄴ. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$

ㄷ. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x + \sqrt{1-\sin x}}\,dx$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

Solution. ①

ㄱ. $\dfrac{x+1}{x\sqrt{x^4+1}} \le \dfrac{x+1}{x\sqrt{x^4}} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}, \quad x \in [1,\infty)$. $a > 1$이면 이상적분 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$가 수렴하므로 비교판정법에 의해서 이상적분 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$도 수렴한다.

ㄴ. $\dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{\ln x}, \quad x \in [2,\infty)$. 이상적분 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$가 발산하므로 비교판정법에 의해해서 이상적분 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$도 발산한다.

ㄷ. $\sqrt{1-\sin x} \le \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x, \quad x \in [0,\pi/2]$이므로 아래의 식 (1)이 성립한다.

$$\frac{1}{2\cos x} \le \frac{1}{\cos x + \sqrt{1-\sin x}}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos x}\,dx = \infty$이므로 식 (1)에 의해서 적분 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x + \sqrt{1-\sin x}}\,dx$는 발산한다.

Definition. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$인 경우에 $x = a$ 가까이에서 $f(x) \sim g(x)$라 표현하고 $g(x)$를 $f(x)$의 **점근함수** (Asymptotic function)라 한다.

Theorem. 특이적분(이상적분) (improper integral)의 수렴·발산 판정

(1) 특이적분 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx$는 $a > 1$이면 수렴하고 $a \le 1$이면 발산한다.

(2) 특이적분 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$는 $a < 1$이면 수렴하고 $a \ge 1$이면 발산한다.

(3) **절대수렴판정법.** $f(x)$가 국소적 적분가능함수(locally integrable function)라 하자. 특이적분 $\displaystyle\int |f(x)|\,dx$가 수렴하면 특이적분 $\displaystyle\int f(x)\,dx$도 수렴한다.

(4) **비교판정법.** f, g가 국소적 적분가능함수이고 $0 \le f \le g$라 하자. 특이적분 $\displaystyle\int g(x)\,dx$가 수렴하면 특이적분 $\displaystyle\int f(x)\,dx$도 수렴하고 특이적분 $\displaystyle\int f(x)\,dx$가 발산하면 특이적분 $\displaystyle\int g(x)\,dx$도 발산한다.

(5) **점근함수판정법.** f, g가 무한구간 $[a, \infty)$ 위에서 국소적 적분가능함수라 하자. ∞ 가까이에서 $f(x) \sim g(x)$이고 특이적분 $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$가 수렴하면 특이적분$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$도 수렴한다.

(6) **점근함수판정법.** f, g가 유한구간 $(a, b]$ 위에서 국소적 적분가능함수라 하자. 점 a 가까이에서 $f(x) \sim g(x)$이고 특이적분 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$가 수렴하면 특이적분 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$도 수렴한다.

Example. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\,dx = \infty.$

Solution. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\pi/2 - x}{\cos x} = 1$이므로 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 가까이에서 함수 $\dfrac{1}{\pi/2 - x}$는 함수 $\dfrac{1}{\cos x}$의 점근함수이다. 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{b\to\pi/2}\int_0^b \frac{1}{\pi/2-x}\,dx = \lim_{b\to\pi/2}\left[-\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]_0^b = \infty.$$

따라서 **점근함수판정법**에 의해서 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\,dx = \infty$이다.

23. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2}, & (x = 0) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$인 순감소(strictly decreasing) 수열 (x_n)이 존재한다.

ㄴ. $f(a) < \gamma < f(b)$이면 $f(c) = \gamma$를 만족시키는 c가 a와 b 사이에 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(x) = xf(x)$는 구간 $(0,1)$에서 균등연속(평등연속, 고른연속, uniformly continuous)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ⑤

ㄱ. **True.** $x_n = \dfrac{6}{\pi + 12n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.

ㄴ. **True.** $ab > 0$이면 $a, b \in (0,\infty)$이거나 $a, b \in (-\infty, 0)$이므로 중간치 정리에 의해서 $f(c) = \gamma$인 c가 a와 b 사이에 존재한다. $ab = 0$이면

$a = 0$ 또는 $b = 0$이다. 편의상 $a = 0, b > 0$이라 하자. $f(d) = f(0) = \frac{1}{2}$인 $d \in (a, b)$를 선택한다. 그러면 $f(a) = f(0) = f(d) < \gamma < f(b)$이므로 중간치 정리에 의해서 $f(c) = \gamma$인 $c \in (d, b) \subset (a, b)$를 선택할 수 있다. 마지막으로 $ab < 0$이라 하자. 편의상 $a < 0 < b$라 하자. $\frac{1}{2} \leq f(a)$이면 $f(d) = \frac{1}{2}$인 $d \in (0, b)$를 선택한다. 그러면 $f(d) < \gamma < f(b)$이므로 중간치 정리에 의해서 $f(c) = \gamma$인 $c \in (d, b) \subset (a, b)$가 존재한다. $f(a) < \frac{1}{2}$이라 하자. $\gamma = \frac{1}{2}$이면 $f(0) = \gamma$인 $c = 0 \in (a, b)$가 존재한다. $f(a) < \gamma < \frac{1}{2}$이면 $f(d) = \frac{1}{2}$인 $d \in (a, 0)$을 선택한다. 그러면 $f(a) < \gamma < f(d)$이므로 중간치 정리에 의해서 $f(c) = \gamma$인 $c \in (a, d) \subset (a, b)$가 존재한다. $f(a) < \frac{1}{2} < \gamma < f(b)$이면 $f(d) = \frac{1}{2}$인 $d \in (0, b)$를 선택한다. 그러면 $f(d) < \gamma < f(b)$이므로 중간치 정리에 의해서 $f(c) = \gamma$인 $c \in (d, b) \subset (a, b)$가 존재한다.

ㄷ. **True.** $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$이므로 $g(0) = 0$이라 두면 함수 $g(x)$는 폐구간 $[0, 1]$에서 연속이다. 따라서 **평등연속정리**에 의해서 $g(x)$는 폐구간 $[0, 1]$에서 평등연속이다. 그러므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 평등연속이다.

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 f에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 모든 양수 x에 대하여 $f(x) = f(-x)$이면 $f'(0) = 0$이다.

ㄴ. $f(1) - f(0) = \dfrac{f'(c)}{2c}$를 만족시키는 실수 c가 0과 1 사이에 존재한다.

ㄷ. $(f')^3$이 단조증가(monotone increasing)함수이면 f'은 연속함수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution. ⑤

ㄱ. **True.** 모든 양수 x에 대하여 $f(x) = f(-x)$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x} + \lim_{y\to 0-}\frac{f(y)-f(0)}{y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x} + \lim_{x\to 0+}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(-x)}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{0}{x} = 0. \end{aligned}$$

ㄴ. **True.** $g(x) = f(x) - (f(1) - f(0))x^2$이라 두면 $g(x)$가 $\mathbb{R}$에서 미분가능이고 $g(0) = g(1)$이므로 **롤의 정리**에 의해서 $g'(c)$인 $c \in (0, 1)$가 존재한다. $g'(c) = 0$에서 $f(1) - f(0) = \dfrac{f'(c)}{2c}$를 얻는다.

ㄷ. **True.** $(f')^3$이 단조증가(monotone increasing)함수이면 f'도 단조증가함수이므로 아래의 정리에 의해서 f'은 연속함수이다.

Theorem. $f : I \to \mathbb{R}$가 구간 I에서 미분가능이고 f'이 단조함수이면 f'은 구간 I에서 연속이다. (2010학년도 32번 문제)

25. 구간 [0, 1]에서 미분가능한 함수열 (f_n)이 함수 f로 점별수렴(pointwise convergence)한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 함수열 (f_n)이 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence) 하면 f는 균등연속(평등연속, 고른연속, uniformly continuous) 함

수이다.

ㄴ. 함수 f가 폐구간 [0, 1]에서 리만적분가능(Riemann integrable)하면 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$이다.

ㄷ. 함수열 (f_n')이 균등수렴하면 함수열 (f_n)도 균등수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

Solution. ④

ㄱ. **True.** $\varepsilon > 0$이라 하자. (f_n)이 f에 평등수렴하므로 아래의 식 (1)을 만족시키는 N이 존재한다.

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{1}$$

f_N이 컴팩트 구간 [0, 1]에서 평등연속이므로 아래의 식 (2)를 만족시키는 $\delta > 0$가 존재한다.

$$|x-y| < \delta, \quad x, y \in [0,1] \Rightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

$|x-y| < \delta, \quad x, y \in [0,1]$이라 하자. 식 (1)과 식 (2)에서 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

따라서 함수 f는 폐구간 [0, 1] 위에서 평등연속이다.

ㄴ. **False.**

Theorem(평등수렴정리) 수열 (f_n)이 구간 $[a,b]$ 위에서 리만적분가능인 함수의 수열이라 하자. 구간 $[a,b]$ 위에서 (f_n)이 f에 평등수렴하면 f가 구간

$[a,b]$ 위에서 리만적분가능이고 아래의 식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx.$$

유계수렴정리(Bounded Convergence Theorem). 수열 (f_n)이 폐구간 $[a,b]$ 위에서 리만적분가능인 실함수의 수열이고 모든 $n \in \mathbb{N}$과 모든 $x \in [a,b]$에 대하여 $|f_n(x)| \le B$인 양수 B가 존재한다고 하자. 점별극한함수 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in [a,b]$가 존재하고 구간 $[a,b]$ 위에서 리만적분가능이면 아래의 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

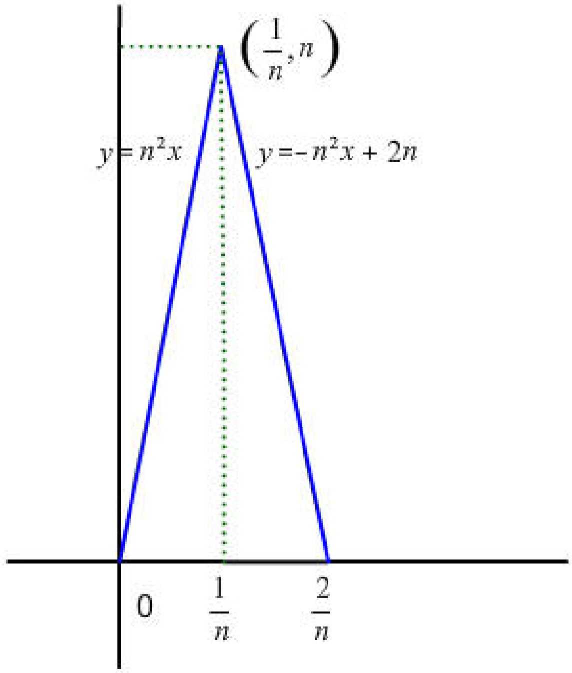
단조수렴정리. 수열 (f_n)이 폐구간 $[a,b]$ 위에서 리만적분가능인 실함수의 단조수열이고 점별극한함수 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in [a,b]$가 존재하고 구간 $[a,b]$ 위에서 리만적분가능이면 아래의 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

ㄷ. **True.**

Theorem. (a,b)가 실직선 $\mathbb{R}$에서 유계 열린구간(bounded open interval)이라 하고 $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$이라 하자. 수열 $(f_n(x_0))$, $x_0 \in (a,b)$가 수렴하고 함수열 (f_n')이 구간 (a,b)에서 평등수렴하면 함수열 (f_n)은 구간 (a,b)에서 평등수렴하고 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)',\ x \in (a,b).$$



Example. 폐구간 $[0, 1]$ 위에서의 함수열 (f_n)을 $f_1(x) \equiv 1$, 그리고 $n > 1$인 경우에 $f_n(x)$를 다음 식으로 정의한다.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2n - n^2x, & 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0, & 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

그러면 연속함수의 수열 (f_n)은 $[0, 1]$ 위에서 $f \equiv 0$에 점별수렴한다. 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$이고 $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$이므로 $\int_0^1 f(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$이다.

26. 실수열 (a_n)에 대하여, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. (a_n)이 유계(bounded)이고 실수열 (b_n)이 코시(Cauchy)수열이면 수열 $(a_n b_n)$은 코시수열이다.

ㄴ. (a_n)이 유계이고 수렴하지 않으면, (a_n)의 수렴하는 부분수열 중 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \lim_{k\to\infty} a_{m_k}$인 부분수열 (a_{n_k}), (a_{m_k})가 존재한다.

ㄷ. (a_n)의 상극한(limit superior, $\overline{\lim_{n\to\to\infty}} a_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n$)이 1이면, 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $a_n < 1-\varepsilon$을 만족시키는 n의 개수는 유한하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

Solution. ②

ㄱ. **False.** $a_n = (-1)^n, b_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n b_n = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ㄴ. **True.**

Theorem. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a_n)$의 모든 부분수열이 $a \in \mathbb{R}$에 수렴한다.

ㄷ. **False.** $a_n = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$이라 두면 $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$이나 임의의 $\varepsilon \in (0,1)$에 대하여 $a_n < 1-\varepsilon$인 n의 개수는 무수히 많다.

27. 두 실수 a와 b에 대하여 복소함수

$f(x+iy) = (x^3 - 2axy - bxy^2) + i(2x^2 - ay^2 + bx^2y - y^3)$ $(x, y$는 실수$)$

가 정함수(entire function)일 때, $a^2 + b^2$의 값은? [1.5점]

① 10 ② 13 ③ 17 ④ 18 ⑤ 20

Solution. ② $u_x = v_y$에서 $b = 3$, $u_y = -v_x$에서 $a = 2$를 얻는다. 따라서 $a^2 + b^2 = 13$이다.

28. <**조건**>을 만족시키는 고립특이점(isolated singularity) $z=0$을 갖는 복소함수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점]

<**조건**> 임의의 $w \in \mathbb{C}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$이고 $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$인 수열 (z_n)이 존재한다.

<보기>

ㄱ. $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$

ㄴ. $f(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1}$

ㄷ. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

Solution. ①

카소라티-바이어스트라스(Casorati-Weierstrass) 정리에 의해서 $a \in \Omega$가 열린집합이고 $f \in H(\Omega - \{a\})$가 $z = a$에서 진성특이점(essential singularity)을 가지면 a의 임의의 근방 $V \subset \Omega$에 대하여 $f(V - \{a\})$가 $\mathbb{C}$의 조밀부분집합이다. (따라서 임의의 $w \in \mathbb{C}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} z_n = a$이고 $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$인 수열 (z_n)이 $\Omega - \{a\}$에 존재한다.)

ㄱ. $z = 0$: 함수 $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$의 진성특이점(essential singularity).

ㄴ. $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{e^z} = 1 \in \mathbb{C}$이므로 $z = 0$가 함수 $f(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1}$의 제거가능한 특이점(removable singularity)이다.

ㄷ. $\lim_{z\to 0} \frac{1}{\sin z} = \infty$이므로 $z = 0$가 함수 $f(z) = \frac{1}{\sin z}$의 극(pole)이다.

2013학년도(2차) (해석학, 복소해석학)

4. 두 양수 a, b에 대하여

$$K(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

를 구하시오. 그리고 실수 x에 대하여

$$s_n(x) = \sum_{m=1}^{n} K(m, 2m)|x|\cos(mx), \quad s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

라 할 때 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} s(x)\,dx$를 구하시오. (20점)

⊛ 아래 제시된 성질은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

<성 질>

(가) 복소평면에서 두 양수 a, b에 대하여 $C : z(t) = a\cos t + ib\sin t\,(0 \le t \le 2\pi)$일 때 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$이다.

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

(다) 자연수 m에 대하여 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(mx)\,dx = \frac{(-1)^m - 1}{m^2}$이다.

(라) 구간 I에서 정의된 함수열 (f_n)이 있다. 모든 자연수 n과 모든 $x \in I$에 대하여 $|f_n(x)| \le M_n$이고 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$이 수렴하면 함수급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 I에서 평등수렴(균등수렴, uniformly convergence)한다.

(마) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 적분 가능한 함수열 (f_n)이 f로 평등수렴하면 f도 적분 가능하고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$이다.

Solution. (1) $I = \int_0^\pi \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$라 두면 $I = \pi K(a,b)$이다. $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$ 그리고 $I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$라 두면 $I = I_1 + I_2$이다. 다음 결과를 얻는다.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 t}{a^2 + b^2\tan^2 t}\,dt.$$

$I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 t}{b^2 + a^2\tan^2 t}\,dt.$$

$b\tan t = u$라 두고 I_1을 계산하고 $a\tan t = v$라 두고 I_2를 계산한다.

$$I_1 = \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{u}{a}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2ab}.$$

$$I_2 = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{dv}{b^2+v^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{v}{b}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2ab}.$$

$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{ab}$이므로 $K(a,b) = \frac{I}{\pi} = \frac{1}{ab}$이다.

(2) $K(n,2n) = \frac{1}{2n^2}$이므로 $s(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n^2}|x|\cos(nx)$이다. 모든 자연수 n과 모든 $x \in [-\pi,\pi]$에 대하여 $\left|\frac{1}{2n^2}|x|\cos(nx)\right| \le \frac{\pi}{2n^2}$이고 급수 $\sum_{n=1}^\infty \frac{\pi}{2n^2}$가 수렴하므로 함수급수 $s(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n^2}|x|\cos(nx)$는 구간 $[-\pi,\pi]$에서 평등수렴한다. 다음 결과를 얻는다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\,dx = \sum_{m=1}^n K(m,2m)\,2\int_0^\pi x\cos(mx)\,dx = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m - 1}{m^4}.$$

구간 $[-\pi, \pi]$ 위에서 적분가능한 함수열 $(s_n(x))$가 $s(x)$에 평등수렴하므로 $s(x)$도 구간 $[-\pi, \pi]$ 위에서 적분가능이고 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} s(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^4} \\ &= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.\end{aligned} \tag{A}$$

모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{1}{(2n-1)^4} \le \dfrac{1}{n^4}$이고 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$이 수렴하므로 비교판정법에 의해서 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$도 수렴한다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \tag{B}$$

식 (A)와 식 (B)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} s(x)\,dx = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = -\frac{\pi^4}{48}.$$

Remark. $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k,\ p_n = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1},\ q_n = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$라 두면 $p_n + q_n = s_{2n}$이고 $p_n + q_{n-1} = s_{2n-1}$이다. 따라서 홀수항 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$과 짝수항 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 수렴하면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴하고 다음 식이 성립한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Alternate Solution. $a = b$이면 $K(a, b) = 1/a^2 = 1/ab$이다. 그러므로 일반성을 잃지 않고 $0 < a < b$라 가정해도 된다. $z = z(t) = e^{it}$라 두면

$dt = \dfrac{dz}{iz}$, $\sin t = \dfrac{z - 1/z}{2i}$, $\cos t = \dfrac{z + 1/z}{2}$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} 2\pi K(a,b) &= \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}\frac{1}{a^2(z+1/z)^2 - b^2(z-1/z)^2} \\ &= \frac{-4}{i}\int_{|z|=1} \frac{zdz}{(b^2-a^2)z^4 - 2(a^2+b^2)z^2 + (b^2-a^2)} \qquad \text{(A)} \\ &= \frac{-4}{i}\int_{|z|=1} \frac{zdz}{((b+a)z^2-(b-a))((b-a)z^2-(b+a))}. \end{aligned}$$

$p(z) = z, q(z) = (b^2-a^2)z^4 - 2(a^2+b^2)z^2 + (b^2-a^2)$라 하자. $(b+a)z^2 - (b-a) = 0$일 때 유리함수 $f(z) = p(z)/q(z)$는 단위원 $|z| = 1$의 내부에 단극(simple pole)을 갖는다. 다음 결과를 얻는다.

$$\left.\frac{p(z)}{q'(z)}\right|_{z^2=(b-a)/(b+a)} = \frac{1}{-8ab}. \qquad \text{(B)}$$

식 (A), 식 (B), 그리고 유수정리에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$2\pi K(a,b) = \frac{-4}{i}2\pi i\left(\frac{1}{-8ab} + \frac{1}{-8ab}\right) = \frac{2\pi}{ab}.$$

따라서 $K(a,b) = \dfrac{1}{ab}$이다.

Alternate Solution. 곡선 C를 $C : z(t) = a\cos t + ib\sin t$ $(-\pi \le t \le \pi)$라 하자. 그러면 $dz = (-a\sin t + ib\cos t)dt$이므로 $\overline{z}dz = (iab + (b^2 - a^2)\sin t\cos t)dt$이다. 함수 $\dfrac{(b^2-a^2)\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$가 기함수(odd function)이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} 2\pi i = \int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_C \frac{\overline{z}dz}{z\overline{z}} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iab + (b^2-a^2)\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt \\ &= iab\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} \\ &= (iab)(2\pi K(a,b)) \end{aligned}$$

따라서 $K(a,b) = \dfrac{1}{ab}$이다.

2014학년도(2교시, 전공A) (해석학, 복소해석학)

기입형: 1∼15 (30점), 서술형: 1∼6 (20점)

07. 반복적분 $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 7y^2 \sin(x^7)\, dxdy$의 값을 구하시오. [2점]

Solution. 적분순서(order of integration)를 바꾸어 반복적분을 계산한다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 7y^2 \sin(x^7)\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} 7y^2 \sin(x^7)\, dydx \\ &= \int_0^1 7\sin(x^7)\frac{x^6}{3}\, dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \sin t\, dt = \frac{1}{3}(1-\cos(1)).\end{aligned}$$

Remark. WolframAlpha (definite double integral)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 7y^2 \sin(x^7)\, dxdy = \frac{2}{3}\sin^2\frac{1}{2} \approx 0.153233$$

08. 거듭제곱급수(멱급수, power series) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n\sqrt{n}}$의 수렴구간을 구하시오. [2점]

Solution. 먼저 비판정법을 사용하여 급수의 수렴반경을 계산한다.

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\sqrt{n+1}}{5^n\sqrt{n}} = 5.$$

$x=5$인 경우에는 교대급수판정법에 의해서 멱급수는 수렴하고 $x=-5$인 경우에는 $p-$급수 판정법에 의해서 멱급수는 발산한다. 따라서 구하는 수렴구간은 (-5, 5]이다.

09. 양수 $r>0$에 대하여 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} x^6\sin(1/x^r)+x^r\sin(1/x^2), & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

함수 f의 도함수 f'이 $x=0$에서 연속이기 위한 필요충분조건을 r에 대한 부등식으로 나타내시오. [2점]

Solution. $f'(0-)=0$이므로 f'이 $x=0$에서 연속이기 위한 필요충분조건은 $f'(0+)=0$이다. $|\sin(1/x^r)|\le 1$, $|\sin(1/x^2)|\le 1$이고 $x\to 0+$일 때 $x^6/x\to 0$이므로 $f'(0+)=0$이기 위한 조건은 $x\to 0+$일 때 $x^r/x=x^{r-1}\to 0$이다. 따라서 $f'(0+)=0$이기 위한 조건은 $r>1$이다.

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2xe^{-2nx}\,dx$의 값을 구하시오. [2점]

Solution.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2xe^{-2nx}\,dx=\lim_{n\to\infty}n^2\left(-\frac{e^{-2n}}{2n}-\frac{e^{-2n}}{4n^2}+\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{1}{4}.$$

13. (미적분학, 해석기하학) 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위에 곡선

$$C=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2|14ax^2+2a^2xy+14ay^2+x+y-1=0\}$$

이 주어져 있다. 곡선 C를 원점을 중심으로 시계방향으로 45°만큼 회전이동 했을 때, 초점이 x축에 있는 쌍곡선이 되는 자연수 a 중에서 가장 작은 수를 구하시오. [2점]

Solution. (복소평면에서 $Z=e^{i\alpha}$를 원점을 중심으로 θ 회전한 복수를 z라 하면 $z=re^{i(\alpha+\theta)}=Ze^{i\theta}$이므로 $x+iy=(X+iY)e^{i\theta}=(X+iY)(\cos\theta+i\sin\theta)$에서 $x=X\cos\theta-Y\sin\theta,\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta$를 얻는다.)

점 $(X,\ Y)$를 45° 회전한 점을 $(x,\ y)$라 하면 $x = (X-Y)/\sqrt{2}$, $y = (X+Y)/\sqrt{2}$이므로 이들 식을 원래의 방정식(original equation)에 대입하여 다음 결과를 얻는다.

$$a(a+14)X^2 - a(a-14)Y^2 + \sqrt{2}X - 1 = 0. \tag{1}$$

$a(a-14) > 0$이면 식 (1)이 초점이 X축에 있는 쌍곡선을 표현하므로 조건을 만족하는 최소의 자연수는 $a = 15$이다.

서술형: 1∼6: 20점

04. 연속함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$에 대해 집합 $\{f(x)|x \in [0, 1]\}$의 상한(최소상계, supremum, least upper bound) M이 존재한다. <정리 1>을 증명없이 이용하여 $f(x*) = M$을 만족하는 $x* \in [0, 1]$이 존재함을 증명하시오. [4점]

<정리 1>

유계인 실수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

Solution. M의 정의에 의해서 아래의 식 (A)를 만족하는 $[0, 1]$ 안의 수열 (x_n)이 존재한다.

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M. \tag{A}$$

<정리 1>(볼자노-바이어스트라스 정리)에 의해서 유계 수열 (x_n)은 수렴하는 부분수열 (x_{n_k})를 갖는다. $k \to \infty$일 때 $x_{n_k} \to x*$이라 하자. 그러면 구간 $[0, 1]$이 닫힌 유계구간이므로 $x* \in [0, 1]$이다. 식 (A)와 f의 연속성에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$f(x*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

2014학년도(3교시, 전공B) (해석학, 복소해석학)

서술형: 1∼3 (10점), 논술형: 1∼2 (20점)

논술형: 1∼2: 20점

벡터 공간의 기저. 벡터의 집합 $\{v_1,\ v_2, \cdots, v_n\}$이 벡터공간 V의 부분집합이라 하자. $\mathrm{span}\left(\{v_1,\ v_2, \cdots, v_n\}\right) = V$이고 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n$이 일차독립일 때, 벡터의 집합 $\{v_1,\ v_2, \cdots, v_n\}$을 벡터 공간 V의 기저(basis)라 한다.

02. 다음 4개의 복소함수

$$f_1(z) = z, \quad f_2(z) = \overline{z}, \quad f_3(z) = e^z, \quad f_4(z) = e^{\overline{z}}$$

로 생성되는 복소 벡터 공간

$$\{a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 |\ a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}\}$$

를 V라 하자. 여기서 $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다. 복소평면 $\mathbb{C}$ 상의 시계 반대방향의 단위원 $C : |z| = 1$에 대하여 사상(map) $T : V \to \mathbb{C}$를 다음과 같이 정의하자.

$$T(f) = \int_C f(z)\, dz$$

T가 선형사상임을 증명하시오. 선형사상 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 기저를 구하고, $\ker(T)$를 이용하여 $T^{-1}(2) = \{f \in V |\ T(f) = 2\}$를 나타내시오. [10점]

Solution. $f,\ g \in V$이고 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$라 하면 $f,\ g$가 던위원 $C : |z| = 1$ 위에서 연속이므로 경로적분(선적분)(contour integral, line integral)의 정의와 경로

적분의 선형성(linearity)에 의해서 아래의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} T(\alpha f + \beta g) &= \int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\, dz \\ &= \alpha \int_C f(z)\, dz + \beta \int_C g(z)\, dz = \alpha T(f) + \beta T(g). \end{aligned}$$

따라서 사상(map) $T : V \to \mathbb{C}$는 선형사상이다.

$f_1(z) = z$와 $f_3(z) = e^z$가 정함수(entire function)이므로 Cauchy 정리에 의해서 $\int_C f_1(z)\, dz = \int_C f_3(z)\, dz = 0$이다. 경로적분(contour integral)의 정의와 유수정리(residue theorem)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_C f_2(z)\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it}\, dt = 2\pi i.$$

$$\int_C f_4(z)\, dz = \int_C e^{\overline{z}}\, dz = \int_C e^{1/z}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z},\ 0\right] = 2\pi i.$$

$T(f_1) = T(f_3) = 0$이므로 $f_1, f_3 \in \ker(T)$이다. $T(f_2) = T(f_4) = 2\pi i \neq 0$이므로 $f_2 \notin \ker(T)$이고 $f_4 \notin \ker(T)$ 이다. $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 \in V$라 두자. 아래의 식 (1)이 성립한다.

$$f \in \ker(T) \Leftrightarrow T(f) = (a_2 + a_4) 2\pi i = 0. \tag{1}$$

$a_2 = a_4 = 0$이면 식 (1)에 의해서 $f \in \ker(T)$이다. $a_2 = 0,\ a_4 \neq 0$이거나 $a_2 \neq 0,\ a_4 = 0$이면 식 (1)에 의해서 $f \notin \ker(T)$이다. $a_2 \neq 0,\ a_4 \neq 0$라 하자. 그러면 $a_2 + a_4 = 0 \Leftrightarrow a_4 = -a_2$이므로 아래의 식 (2)를 얻는다.

$$f \in \ker(T) \Leftrightarrow f = a_1 f_1 + a_2 (f_2 - f_4) + a_3 f_3. \tag{2}$$

식 (2)에의해서 $\ker(T)=\operatorname{span}(\{f_1,\ f_2 - f_4,\ f_3\})$이 성립한다. $f(z) = a f_1(z) + b(f_2(z) - f_4(z)) + c f_3(z) = az + b(\overline{z} - e^{\overline{z}}) + c e^z 0$이라 하자. $f(0) = 0,\ f(1) = 0$에서 $c = b,\ a = -b$를 얻는다. 따라서 $f(z) = b(\overline{z} - z + e^z - e^{\overline{z}}) = 0$이다.

$f(i) = b(2\sin(1) - 2)i = 0$에서 $b = 0$을 얻는다. 따라서 $a = b = c = 0$이다. 그러므로 $f_1,\ f_2 - f_4,\ f_3$는 일차독립(linearly independent)이다. 따라서 집합 $\{f_1,\ f_2 - f_4,\ f_3\}$는 벡터공간 $\ker(T)$의 한 기저이다.

$T(f_2) = 2\pi i$이므로 $T\left(\dfrac{f_2}{\pi i}\right) = 2$이다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

$$f \in T^{-1}(2) \Rightarrow T(f) = 2 = T\left(\frac{f_2}{\pi i}\right) \Rightarrow f - \frac{f_2}{\pi i} \in \ker(T). \tag{3}$$

식 (3)에서 $f \in \ker(T) + \dfrac{f_2}{\pi i}$를 얻는다. 한편 $f \in \ker(T) + \dfrac{f_2}{\pi i}$이면 $T(f) = 2$이다. 따라서 $T^{-1}(2) = \ker(T) + \dfrac{f_2}{\pi i}$를 얻는다.

Remark. $\displaystyle\int_{|z|=1} e^z\,dz = 0$에서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\cos(t + \sin(t))\,dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\sin(t + \sin(t))\,dt = 0$$

Remark. $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{\overline{z}}\,dz = \int_{|z|=1} e^{1/z}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z},\ 0\right] = 2\pi i$

$$\int_{|z|=1} e^{\overline{z}}\,dz = -\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(t - \sin t)\,dt + i\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(t - \sin t)\,dt$$

따라서 다음 결과가 성립한다.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\sin(t - \sin(t))\,dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\cos(t - \sin(t))\,dt = 2\pi$$

Remark. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\cos(t - \sin(t))\,dt \neq 0$

Solution. $u(t) = e^{\cos(t)}\cos(t - \sin(t))$라 하자. 다음 결과를 얻는다.

$$u(0) = e,\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) > 0,\ u(\pi) = -\frac{1}{e} < 0. \tag{A}$$

$u(t)$가 폐구간 $[0,\pi]$에서 연속이므로 중간치정리와 식 (A)에 의해서 $u(t_0) = 0$인 $t_0 \in (\pi/2, \pi)$가 존재한다. 다음 결과를 얻는다.

$$\int_0^{2\pi} u(t)\,dt = 2\int_0^{\pi} u(t)\,dt = 2\int_0^{t_0} u(t)\,dt + 2\int_{t_0}^{\pi} u(t)\,dt.$$

모든 $t \in [0,\pi]$에 대하여 아래의 식 (B)가 성립하므로 $u(t)$는 폐구간 $[0,\pi]$ 위에서 단조감소 함수이다.

$$u'(t) = -e^{\cos t}((1-\cos t)\sin(\sin t) + \sin t\cos(\sin t) \le 0. \tag{B}$$

모든 $t \in [0, t_0]$에 대하여 $u(t) \ge 0$이고 $u(t)$가 구간 $[0, t_0]$ 위에서 단조감소 함수이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\int_0^{t_0} u(t)\,dt \ge \int_0^{\pi/2} u(t)\,dt > u\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right). \tag{C}$$

모든 $t \in [t_0, \pi]$에 대하여 $u(t) \le 0$이고 $u(t)$가 구간 $[t_0, \pi]$ 위에서 단조감소 함수이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\int_{t_0}^{\pi} u(t)\,dt \ge (\pi - t_0)u(\pi) = -\frac{1}{e}(\pi - t_0) > -\frac{\pi}{2}\frac{1}{e}. \tag{D}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - \frac{1}{e} > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{e} > 0$이므로 식 (C)와 식 (D)에 의해서 $\int_0^{\pi} u(t)\,dt > 0$이다. 따라서 $\int_0^{2\pi} u(t)\,dt = 2\int_0^{\pi} u(t)\,dt \ne 0$이다.

2015학년도(2교시, 전공A) (해석학, 복소해석학)

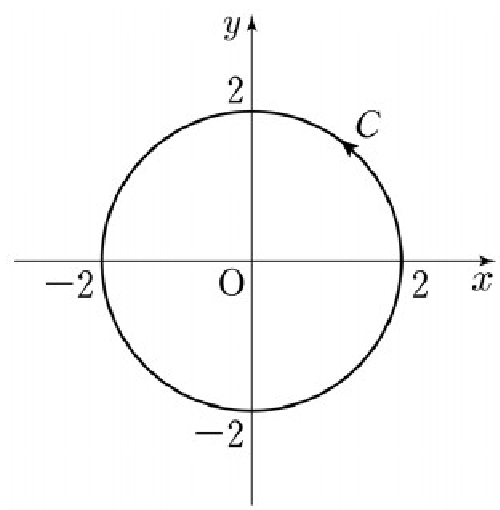
기입형: 1~10 (20점), 서술형: 1~4 (20점)

기입형: 1~10: 20점

02. 다음 그림과 같이 반시계 방향의 단순닫힌곡선(simple closed curve) $C : x^2 + y^2 = 4$가 주어졌을 때

$$\int_C (e^{\sin x} - 4x^2 y)dx + (e^{\cos y} + 4xy^2)dy$$

의 값을 구하시오. [2점]



Solution. 곡선 C로 둘러싸인 영역을 R이라 하고 $P = e^{\sin x} - 4x^2 y$, $Q = e^{\cos y} + 4xy^2$라 두면 Green 정리에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_C Pdx + Qdy &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_R 4(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r^3 drd\theta = 32\pi.\end{aligned}$$

03. 매개변수방정식 $x = 4t - t^2, \quad y = t^2 + 1 \ (0 \le t \le 1)$로 주어진 곡선 $y = f(x)$가 있다. 이 곡선 위의 두 점 $(0, f(0))$, $(3, f(3))$을 연결하는 직선의 기울기와 곡선 위의 점 $(c, f(c))$에서의 접선의 기울기가 같게 되는 값 c를 구간 $(0, 3)$에서 구하시오. [2점]

Solution. $0 \le t \le 1$이므로 $4t - t^2 = 0$에서 $t = 0$, $4t - t^2 = 3$에서 $t = 1$을 얻는다. 그러므로 $(0, f(0)) = (0, 1)$, $(3, f(3)) = (3, 2)$를 연결하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다. 따라서

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{4 - 2t} = \frac{1}{3}$$

에서 $t = \frac{1}{2}$을 얻는다. 그러므로 $c = \frac{4}{2} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$을 얻는다.

공간에서 원점을 지나는 직선에 관한 회전(1). $u = (u_1, u_2, u_3)$가 단위벡터(unit vector)일 때, u 방향의 직선을 회전축으로 하여 θ만큼 회전시킨 회전변환 R은 다음 식으로 주어진다. (Wikipedia, the free encyclopedia)

$$R = \cos\theta I + (1 - \cos\theta) u \otimes u + \sin\theta [u]_\times. \tag{A}$$

여기서 I는 단위행렬, $\otimes$는 텐서적(tensor product), 그리고 $[u]_\times$는 벡터 u의 벡터곱 행렬(vector product matrix)이다:

$$u \otimes u = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{pmatrix}, \qquad [u]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

식 (A)를 벡터 u의 성분과 회전각 θ를 사용하여 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta + u_1^2(1-\cos\theta) & u_1u_2(1-\cos\theta) - u_3\sin\theta & u_1u_3(1-\cos\theta) + u_2\sin\theta \\ u_1u_2(1-\cos\theta) + u_3\sin\theta & \cos\theta + u_2^2(1-\cos\theta) & u_2u_3(1-\cos\theta) - u_1\sin\theta \\ u_1u_3(1-\cos\theta) - u_2\sin\theta & u_2u_3(1-\cos\theta) + u_1\sin\theta & \cos\theta + u_3^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix}.$$

공간에서 원점을 지나는 직선에 관한 회전(2). z축을 회전축으로 하여 θ만큼 회전시킨 회전변환을 $R_z(\theta)$라 하고, $\mathbb{R}^3$의 단위벡터 u 방향의 직선을 회전축으로 하여 θ만큼 회전시킨 회전변환을 $R_u(\theta)$라 하면 아래의 식 $(\star)$를 만족하는 직교행렬(orthogonal matrix) P가 존재한다.

$$R_u(\theta) = PR_z(\theta)P^{-1} \tag{$\star$}$$

04. (선형대수) 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 원점과 점 $(1, 2, 3)$을 지나는 직선을 회전축으로 하여 $180°$ 회전이동하는 변환을 T라 하자. 벡터 (x, y, z)에 대하여 $T(x, y, z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$가 되는 행렬 A의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)을 구하시오. [2점]

Solution. $u = (1,\ 2,\ 3)/\sqrt{14}$이라 하고 $\theta = 180°$라 하자. 그러면 아래의 식 (1)을 만족시키는 직교행렬 P가 존재한다.

$$A = R_u(\theta) = PR_z(\theta)P^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \tag{1}$$

식 (1)에 의해서 행렬 A와 행렬 $B = R_z(\theta)$가 닮음행렬이므로 A의 특성다항식과 B의 특성다항식은 같다. 따라서 $P_A(x) = \det(xI - A) = \det(xI - B) = (x+1)^2(x-1)$이다.

Alternate Solution. 원점과 점 $(1, 2, 3)$을 지나는 직선 방향의 단위벡터를

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

이라 두자. 회전각이 $\theta = 180°$이므로 구하는 회전변환 T는 다음 식으로 주어진다. 여기서 I는 단위행렬, $\otimes$는 텐서적(tensor product), 그리고 $[u]_\times$는 벡터 u의 벡터곱 행렬(vector product matrix)이다.

$$\begin{aligned} T &= \cos\theta I + \sin\theta [u]_\times + (1-\cos\theta) u \otimes u \\ &= -I + 2u \oplus u = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

따라서 T의 특성다항식은 다음 식으로 주어진다. 아래 식에서 M_{11}, M_{22}, M_{33}은 소행렬식(minor determinant)이다.

$$\begin{aligned} P(t) = \det(t\,I - T) &= t^3 - \operatorname{trace}(A)\,t^2 + (M_{11} + M_{22} + M_{33})\,t - \det(A) \\ &= (t+1)^2(t-1) \end{aligned}$$

강체운동(rigid motion). 함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$가 $\mathbb{R}^n$에서 거리를 보존할 때 함수 f를 $\mathbb{R}^n$의 **강체운동(등거리변환, isometry)**이라 한다.

Remark. $\mathbb{R}^n$의 강체운동은 회전과 평행이동의 합성으로 표현된다. 즉, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$가 강체운동이면 $f = T \circ R$이 성립하는 회전 R과 평행이동 T가 존재한다.

Definition. 두 곡선 $\alpha, \gamma : I \to \mathbb{R}^n$에 대하여 $\gamma = f \circ \alpha$인 $\mathbb{R}^n$의 등거리변환(강체운동) f가 존재할 때 두 곡선 α와 γ가 **합동(congruent)**이라 한다.

공간곡선의 기본정리 (Fundamental Theorem of Space Curves).

(1) 2개의 매끄러운 함수(smooth functions) $\kappa(s) > 0$와 $\tau(s)$에 대하여 $\kappa(s)$를 곡률로 갖고 $\tau(s)$를 열률로 갖는 정칙 단위속력곡선 $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$가 존재한다.

(2) $\alpha, \gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$가 정칙 공간곡선이라 하자. 두 곡선 α와 γ가 같은 곡률과 같은 열률을 갖고 두 곡선의 곡률이 0이 아니면 두 곡선 α와 γ는 합동이다.

07. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡선 $\alpha(t) = (2t, t^2, at^3)$, $\beta(t) = (t, bt, t^2)$이 합동이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. [2점]

Solution. 두 곡선이 합동이면 모든 t에 대하여 아래의 식 (A)가 성립한다.

$$(2t)^2 + (t^2)^2 + (at^3)^2 = t^2 + (bt)^2 + (t^2)^2. \tag{A}$$

식 (A)에서 $a^2t^6 + (3 - b^2)t^2 = 0,\ t \in \mathbb{R}$을 얻는다. 따라서 $a^2 + b^2 = 3$이다.

Alternate Solution. 곡선의 곡률을 κ, 열률을 τ라 하자. $\kappa(\alpha) = \kappa(\beta) \neq 0$이고 $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$이면 **공간곡선의 기본정리**에 의해서 두 곡선 α와 β는 합동이다. $\beta'''(t) = (0, 0, 0)$이므로 $\tau(\beta) = 0$이다. 따라서

$$\tau(\alpha) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t) \cdot \alpha'''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} = \frac{24a}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} = 0$$

에서 $a = 0$을 얻는다. $\kappa(\alpha(0)) = \kappa(\beta(0))$에서 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{1}{2} = \frac{|\alpha'(0) \times \alpha''(0)|}{|\alpha'(0)|^3} = \frac{|\beta'(0) \times \beta''(0)|}{|\beta'(0)|^3} = \frac{2}{1 + b^2}.$$

여기서 $b^2 = 3$을 얻는다. 따라서 $a^2 + b^2 = 3$이다.

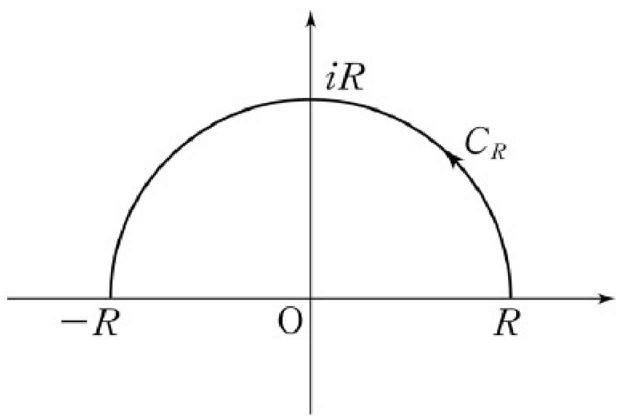
서술형: 1∼4: 20점

조르당 부등식 (Jordan's Inequality). $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta < \frac{\pi}{R}, \quad (R>0).$

04. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 다음 그림과 같이 반지름 길이가 R인 반원을 $C_R = \{Re^{it} \in \mathbb{C} \mid 0 \le t \le \pi\}$라고 할 때, $a>0$과 $b>0$에 대하여

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}\,dz = 0$$

임을 보이고 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2}\,dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점]



Solution. $R>a$라 하자. $z=Re^{it}$일 때 $|z^2+a^2| \ge |z|^2-|a|^2 = R^2-a^2$이므로 조르당 부등식에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\left|\int_{C_R}\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}\,dz\right| \le \int_{C_R}\left|\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}\right|\,|dz|$$
$$\le \frac{R^2}{R^2-a^2}\int_0^{\pi} e^{-bR\sin t}\,dt < \frac{R^2}{R^2-a^2}\times\frac{\pi}{bR}.$$

따라서 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}\,dz = 0$이다. $R>a$라 하고 $C=[-R,R]+C_R$이라 하자. $f(z)=\dfrac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}$라 두면 $z=ai$에서 $f(z)$의 유수가 $\dfrac{aie^{ib(ai)}}{2(ai)} = \dfrac{e^{-ab}}{2}$이므

로 유수정리(residue theorem)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2}\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \frac{e^{-ab}}{2} = e^{-ab}\pi i. \qquad \text{(A)}$$

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$이므로 식 (A)에 의해서 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2}\,dx = e^{-ab}\pi i$이다.

2015학년도(3교시, 전공B) (해석학, 복소해석학)

서술형: 1∼4 (20점), 논술형: 1∼2 (20점)

논술형: 1∼2: 20점

02. 다음을 읽고 물음에 답하시오.

유계인 닫힌 구간 $[a,b]$에서 유계함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$와 $[a,b]$의 분할 P에 대한 하합(lower sum)과 상합(upper sum)을 각각 $L(f,P)$, $U(f,P)$로 나타내고,

$$A=\sup\{L(f,P)\mid P\text{는 } [a,b]\text{의 분할}\}$$

$$B=\sup\{U(f,P)\mid P\text{는 } [a,b]\text{의 분할}\}$$

이라 두자. 이때 $[a,b]$의 임의의 분할 P, Q에 대하여 $L(f,P)\le U(f,Q)$이므로

$$A\le B \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (가)$$

가 성립한다. 만약

$$A\ge B \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (나)$$

도 성립하면 f는 $[a,b]$에서 리만적분가능하다고 한다. 한편, 고등학교 교과서에서는 "함수 f가 $[a,b]$에서 연속이면 극한

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x,\ \left(\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)\dots\dots\dots (다)$$

는 항상 존재함이 알려져 있다."라고 설명하고 이 극한을 정적분의 정의로 사용하고 있다.

부등식 (가)를 증명하고, $[a,b]$에서 정의된 연속함수 f에 대하여 (나)가 성립함을 증명하시오. 그리고 이를 토대로 $[a,b]$에서 정의된 연속함수 f의 경우, (다)의 극한 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$가 존재함을 보이시오. [10점]

Solution. (가) $\alpha = \{L(f,P) |\ P$는 $[a,b]$의 분할$\}$, $\beta = \{U(f,P) |\ P$는 $[a,b]$의 분할$\}$이라 하자. $[a,b]$의 임의의 분할 P, Q에 대하여 $L(f,P) \le U(f,Q)$이므로 $[a,b]$의 임의의 분할 Q에 대하여 $U(f,Q)$는 집합 α의 하나의 상계(upper bound)이다. 한편, A가 집합 α의 최소상계(supremum)이므로 $[a,b]$의 임의의 분할 Q에 대하여 $A \le U(Q,P)$가 성립한다. 따라서, A는 집합 β의 하나의 하계(lower bound)이다. 한편, B가 집합 β의 최대하계(infimum)이므로 $A \le B$가 성립한다.

(나) 함수 f가 구간 $[a,b]$ 위에서 정의된 연속함수라 하자. ε이 임의의 양수라 하자. f가 컴팩트 구간 $[a,b]$에서 평등연속(uniformly continuous)이므로 다음 식을 만족하는 $\delta > 0$가 존재한다.

$$|x-y| < \delta,\ x, y \in [a,b] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{1}$$

$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$를 $\|P\| < \delta$인 $[a,b]$의 분할이라 하자. 극치(Extreme Value) 정리에 의해서 다음 식을 만족하는 $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$와 $y_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$가 존재한다$(1 \le k \le n)$.

$$f(x_k^*) = M_k = \sup f([x_{k-1}, x_k]), \quad f(y_k^*) = m_k = \inf f([x_{k-1}, x_k]) \tag{2}$$

다음 결과를 얻는다.

$$|x_k^* - y_k^*| \le x_k - x_{k-1} \le \|P\| < \delta, \quad 1 \le k \le n. \tag{3}$$

식 (1), 식 (2), 그리고 식 (3)에서 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(f(x_k^*) - f(y_k^*))(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon. \end{aligned} \tag{4}$$

A와 B의 정의에 의해서 $L(f,P) \le A$이고 $B \le U(f,P)$이다. 따라서 $0 \le B - A \le U(f,P) - L(f,P)$가 성립한다. 따라서 식 (4)에 의해서 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $0 \le B - A < \varepsilon$이 성립한다. 따라서 $B \le A$가 성립한다.

(다) 임의의 자연수 n에 대하여 $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, $(k = 0, 1, \cdots, n)$이라 두고 $P(n) = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$이라 두자. 그러면 $P(n)$은 구간 $[a,b]$의 한 분할이고 $\|P(n)\| \to 0$이면 $n \to \infty$이다. 여기서, $\|P(n)\|$은 분할 $P(n)$의 노름(norm)이다. $t_k = x_k$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$라 두고 $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$이라 두면 분할 $P(n)$에 대응하는 f의 리만합은 다음 식으로 주어진다.

$$S(f, P(n), T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}. \tag{5}$$

f가 구간 $[a,b]$ 위에서 연속이므로 함수 f는 구간 $[a,b]$ 위에서 리만적분가능이다. 따라서 아래의 식 (6)을 만족하는 실수 $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$가 존재한다. (아래의 **보조정리**.)

$$\text{임의의 } T \text{ 에 대하여,} \quad \lim_{\|P\| \to 0} S(f, P, T) = I. \tag{6}$$

$n \to \infty$이면 $\|P(n)\| \to 0$이므로 식 (5)와 식 (6)에 의해서 아래의 식 (7)을 얻는다. 따라서, 식 (다)의 오른쪽 극한이 존재한다.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = I \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

보조정리. 함수 f가 구간 $[a,\ b]$ 위에서 리만적분가능이고 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = I$라 하고 $S(f,P,T)$를 분할 P에 대응하는 f의 리만합(Riemann sum)이라 하자. 그러면 아래의 식 (8)이 성립한다.

$$\text{임의의 } T \text{ 에 대하여,} \quad \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,T) = I. \tag{8}$$

Solution. $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = I$이므로 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $I - \varepsilon/2 < L(f,P_1)$ 그리고 $U(f,P_2) < I + \varepsilon/2$이 성립하는 구간 $[a,b]$의 분할 $P_1,\ P_2$가 존재한다. $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$라 두자. 그러면 $P_\varepsilon \supset P_j,\ j = 1,2$이므로 다음 결과가 성립한다.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_1) \le L(f,P_\varepsilon) \le U(f,P_\varepsilon) \le U(f,P_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

모든 $x \in [a,b]$에 대하여 $m \le f(x) \le M$이라 하고 $P_\varepsilon : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$이라 하자. $l_\varepsilon = \displaystyle\min_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$이라 두고 $\varepsilon > 0$에 대응하는 δ를 다음 식을 만족하는 양수로 선택한다.

$$\delta < \min\left\{ l_\varepsilon,\ \frac{\varepsilon}{2(n-1)(M-m)} \right\}.$$

P가 $||P|| < \delta$인 $[a,b]$의 임의의 분할이라 하자. P_ε의 분할점은 양 끝점 x_0와 x_n을 제외하면 $n-1$개이므로 분할 P로 결정되는 부분구간들 중에서 분할 P_ε의 분할점 x_k를 내부에 포함하는 부분구간은 많아야 $n-1$개이다. 분할 P로 결정되는 부분구간들 중에서 분할 P_ε의 분할점을 내부에 포함하는 부분구간을 $J_1, \ldots, J_p (p \le n-1)$이라 두고 P로 결정되는 나머지 부분구간을 $K_1, \ldots, K_q$라 하자. 다음 결과가 성립한다.

$$U(f,P) = \sum_{j=1}^{p} M_j l(J_j) + \sum_{k=1}^{q} M_k^* l(K_k). \tag{10}$$

$P' = P_\varepsilon \cup P$라 하자. $||P|| < \delta < l_\varepsilon$이므로 각각의 J_j는 단 하나의 x_k만 포함한다. 따라서 P'에 의해서 결정되는 부분구간은 $2p$개의 부분구간 J_j', J_j'' $(1 \leq j \leq p)$와 $K_1, \ldots, K_q$이다. 그러므로 다음 결과를 얻는다.

$$U(f, P') = \sum_{j=1}^{p} (M_j' l(J_j') + M_j'' l(J_j'')) + \sum_{k=1}^{q} M_k^* l(K_k). \tag{11}$$

$l(J_j) = l(J_j') + l(J_j'')$이므로 식 (10)과 식 (11)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$U(f, P) - U(f, P') \leq (M - m) \sum_{j=1}^{p} l(J_j) < (M - m)(n - 1)\delta < \frac{\varepsilon}{2} \tag{12}$$

$U(f, P') \leq U(f, P_\varepsilon)$이므로 식 (9)와 식 (12)에서 다음 결과를 얻는다.

$$||P|| < \delta \Rightarrow U(f, P) < I + \varepsilon. \tag{13}$$

같은 방법으로 $L(f, P)$와 $L(f, P')$을 계산하여 다음 결과를 얻는다.

$$L(f, P') - L(f, P) \leq (M - m) \sum_{j=1}^{p} l(J_j) < (M - m)(n - 1)\delta < \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

$L(f, P_\varepsilon) \leq L(f, P')$이므로 식 (9)와 식 (14)에서 다음 결과를 얻는다.

$$||P|| < \delta \Rightarrow I - \varepsilon < L(f, P). \tag{15}$$

임의의 P와 임의의 T에 대하여 $L(f, P) \leq S(f, P, T) \leq U(f, P)$이므로 식 (13)과 식 (15)에 의해서 아래의 식이 성립한다.

$$||P|| < \delta \Rightarrow I - \varepsilon < S(f, P, T) < I + \varepsilon, \quad \forall T$$

따라서 식(8)이 성립한다.

Theorem. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$가 유계함수이면 다음 명제는 동치이다.

(a) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = I$인 실수 I가 존재한다.

(b) 임의의 T에 대하여 $\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,T) = I$인 실수 I가 존재한다.
$(\forall\varepsilon,\ \exists\delta > 0 : \|P\| < \delta \Rightarrow |S(f,P,T) - I| < \varepsilon,\ \forall T)$

(c) 다음 식을 만족하는 실수 I가 존재한다.
$\forall\varepsilon,\ \exists P_\varepsilon : P \supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(f,P,T) - I| < \varepsilon,\ \forall T$

Theorem. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$가 유계함수이면 다음 두 명제가 동치이다.

(i) 다음 조건을 만족하는 실수 I가 존재한다: $U(f) = \inf_P U(f,P) = \sup_P L(f,P) = L(f) = I$.

(ii) 다음 조건을 만족하는 실수 I가 존재한다: 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $[a,b]$의 분할 P_ε이 존재하여 $P \supset P_\varepsilon$이면 임의의 T에 대하여 $|S(f,P,T) - I| < \varepsilon$이 성립한다.

Solution. (i)⇒(ii). $U(f) = L(f) = I$이므로 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $I - \varepsilon < L(f,P_1)$ 그리고 $U(f,P_2) < I + \varepsilon$이 성립하는 구간 $[a,b]$의 분할 $P_1,\ P_2$가 존재한다. $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$라 두고 $P \supset P_\varepsilon$이라 하자. 그러면 $P \supset P_j,\ j = 1,2$이므로 다음 결과가 성립한다.

$$
\begin{aligned}
I - \varepsilon < L(f,P_1) \le L(f,P) &\le S(f,P,T) \\
&\le U(f,P) \le U(f,P_2) < I + \varepsilon,\ \forall T.
\end{aligned}
$$

따라서 $P \supset P_\varepsilon$이면 임의의 T에 대하여 $|S(f,P,T) - I| < \varepsilon$이 성립한다.

(ii)⇒(i). 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 다음 식을 만족하는 구간 $[a, b]$의 분할 P_ε을 선택한다.

$$P \supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(f, P, T)) - I| < \frac{\varepsilon}{4},\ \forall T. \tag{1}$$

$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \supset P_\varepsilon$이라 하고 다음 조건을 만족하는 $t_k, s_k \in [x_{k-1}, x_k]$를 선택한다.

$$M_k - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(t_k), \quad f(s_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{2}$$

$T_1 = \{t_1, \cdots, t_n\}$ 그리고 $T_2 = \{s_1, \cdots, s_n\}$라 두자. 식 (1)과 식 (2)에서 아래의 식 (3)과 식 (4)를 얻는다.

$$U(f,\ P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) < S(f,\ P,\ T_1) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

$$L(f,\ P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) > S(f,\ P,\ T_2) - \frac{\varepsilon}{4} > I - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

식 (3)과 식 (4)에서 다음 결과를 얻는다.

$$0 \le U(f) - L(f) \le U(f,\ P) - L(f,\ P) < \varepsilon. \tag{5}$$

ε이 임의의 양수이므로 식 (5)에서 $U(f) = L(f)$를 얻는다. 그리고 식 (3)과 식 (4)에서 아래의 식 (6)이 성립하므로 $U(f) = L(f) = I$이다.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \le L(f) = U(f) < I + \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

Theorem. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 유계함수이면 다음 두 명제는 동치이다.

(i) 다음 조건을 만족하는 실수 I가 존재한다: $U(f) = \inf_P U(f, P) = \sup_P L(f, P) = L(f) = I$.

(ii) 임의의 T에 대하여 $\lim_{\|P\| \to 0} S(f, P, T) = I$인 실수 I가 존재한다.
$(\forall \varepsilon,\ \exists \delta > 0 : \|P\| < \delta \Rightarrow |S(f, P, T) - I| < \varepsilon,\ \forall T)$

Solution. (i)⇒(ii). $U(f) = L(f) = I$이므로 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $I - \varepsilon/2 < L(f, P_1)$ 그리고 $U(f, P_2) < I + \varepsilon/2$이 성립하는 구간 $[a, b]$의 분할 $P_1,\ P_2$가 존재한다. $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$라 두자. 그러면 $P_\varepsilon \supset P_j,\ j = 1, 2$이므로 다음 결과가 성립한다.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P_1) \le L(f, P_\varepsilon) \le U(f, P_\varepsilon) \le U(f, P_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $m \le f(x) \le M$이라 하고 $P_\varepsilon : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$이라 하자. $l_\varepsilon = \min_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$이라 두고 $\varepsilon > 0$에 대응하는 δ를 다음 식을 만족하는 양수로 선택한다.

$$\delta < \min\left\{ l_\varepsilon,\ \frac{\varepsilon}{2(n-1)(M-m)} \right\}.$$

P가 $||P|| < \delta$인 $[a, b]$의 임의의 분할이라 하자. P_ε의 분할점은 양 끝점 x_0와 x_n을 제외하면 $n-1$개이므로 분할 P로 결정되는 부분구간들 중에서 분할 P_ε의 분할점 x_k를 내부에 포함하는 부분구간은 많아야 $n-1$개이다. 분할 P로 결정되는 부분구간들 중에서 분할 P_ε의 분할점을 내부에 포함하는 부분구간을 $J_1, \ldots, J_p (p \le n-1)$이라 두고 P로 결정되는 나머지 부분구간을 $K_1, \ldots, K_q$라 하자. 다음 결과가 성립한다.

$$U(f, P) = \sum_{j=1}^{p} M_j l(J_j) + \sum_{k=1}^{q} M_k^* l(K_k). \tag{2}$$

$P' = P_\varepsilon \cup P$라 하자. $||P|| < \delta < l_\varepsilon$이므로 각각의 J_j는 단 하나의 x_k만 포함한다. 따라서 P'에 의해서 결정되는 부분구간은 $2p$개의 부분구간 J_j', J_j'' $(1 \leq j \leq p)$와 $K_1, \ldots, K_q$이다. 그러므로 다음 결과를 얻는다.

$$U(f, P') = \sum_{j=1}^{p} (M_j' l(J_j') + M_j'' l(J_j'')) + \sum_{k=1}^{q} M_k^* l(K_k). \tag{3}$$

$l(J_j) = l(J_j') + l(J_j'')$이므로 식 (2)와 식 (3)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$U(f, P) - U(f, P') \leq (M - m) \sum_{j=1}^{p} l(J_j) < (M - m)(n - 1)\delta < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

$U(f, P') \leq U(f, P_\varepsilon)$이므로 식 (1)과 식 (4)에서 다음 결과를 얻는다.

$$||P|| < \delta \Rightarrow U(f, P) < I + \varepsilon. \tag{5}$$

같은 방법으로 $L(f, P)$와 $L(f, P')$을 계산하여 다음 결과를 얻는다.

$$L(f, P') - L(f, P) \leq (M - m) \sum_{j=1}^{p} l(J_j) < (M - m)(n - 1)\delta < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

$L(f, P_\varepsilon) \leq L(f, P')$이므로 식 (1)과 식 (6)에서 다음 결과를 얻는다.

$$||P|| < \delta \Rightarrow I - \varepsilon < L(f, P). \tag{7}$$

임의의 P와 임의의 T에 대하여 $L(f, P) \leq S(f, P, T) \leq U(f, P)$이므로 식 (5)와 식 (7)에 의해서 아래의 식이 성립한다.

$$||P|| < \delta \Rightarrow I - \varepsilon < S(f, P, T) < I + \varepsilon, \quad \forall T$$

(ii)⇒(i). (ii)가 성립하면 임의의 양수 ε에 대하여 아래의 식 (8)이 성립하는 $\delta > 0$가 존재한다.

$$||P|| < \delta \Rightarrow I - \frac{\varepsilon}{4} < S(f, P, T) < I + \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall T \tag{8}$$

$||P_\varepsilon|| < \delta$인 구간 $[a,\ b]$의 하나의 분할을 선택한다. $P \supset P_\varepsilon$이면 $||P|| < \delta$이므로 아래의 식 (9)가 성립한다.

$$P \supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(f,P,T)) - I| < \frac{\varepsilon}{4},\ \forall T. \tag{9}$$

$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \supset P_\varepsilon$이라 하고 다음 조건을 만족하는 $t_k, s_k \in [x_{k-1}, x_k]$를 선택한다.

$$M_k - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(t_k), \quad f(s_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{10}$$

$T_1 = \{t_1, \cdots, t_n\}$ 그리고 $T_2 = \{s_1, \cdots, s_n\}$라 두자. 식 (9)와 식 (10)에서 아래의 식 (11)과 식 (12)를 얻는다.

$$U(f,\ P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) < S(f,\ P,\ T_1) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

$$L(f,\ P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) > S(f,\ P,\ T_2) - \frac{\varepsilon}{4} > I - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

식 (11)과 식 (12)에서 다음 결과를 얻는다.

$$0 \le U(f) - L(f) \le U(f,\ P) - L(f,\ P) < \varepsilon. \tag{13}$$

ε이 임의의 양수이므로 식 (13)에서 $U(f) = L(f)$를 얻는다. 그리고 식 (11)과 식 (12)에서 아래의 식 (14)가 성립하므로 $U(f) = L(f) = I$이다.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \le L(f) = U(f) < I + \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

2016학년도(2교시, 전공A) (해석학, 복소해석학)

3. (기입형) 이차함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-10)^2$과 양의 정수 n에 대하여 a_n을 특이적분(이상적분, improper integral) $\displaystyle\int_1^\infty (f(n))^t\,dt$의 수렴 또는 발산에 따라 다음과 같이 정의하자.

$$a_n = \begin{cases} \int_1^\infty (f(n))^t\,dt, & \int_1^\infty (f(n))^t\,dt\text{가 수렴} \\ 0, & \int_1^\infty (f(n))^t\,dt\text{가 발산} \end{cases}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오. [2점]

Solution. $\displaystyle\int_1^\infty (f(n))^t\,dt = \int_1^\infty \frac{(n-10)^{2t}}{2^t}\,dt$이므로 $a_{10}=0$이고

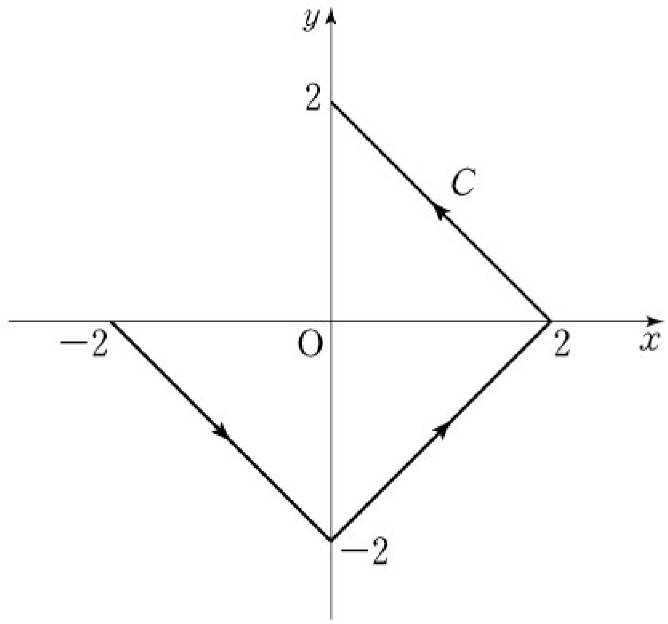
$$a_9 = a_{11} = \int_1^\infty \frac{1}{2^t}\,dt = -\frac{2^{-t}}{\log 2}\bigg|_1^\infty = \frac{1}{2\log 2}.$$

이다. n이 9, 10, 11이 아닌 자연수이면 특이적분 $\displaystyle\int_1^\infty (f(n))^t\,dt$가 발산하므로 $a_n=0$이다. 따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\log 2}$이다.

Remark. $\displaystyle\int_0^\infty 2^{-x}\,dx = \frac{1}{\log 2} \approx 1.4427.$

Remark. $\displaystyle\int te^t\,dt = e^t(t-1)+C$

4. (기입형) 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 C는 점 (-2, 0)에서 시작하여 점 (0, -2)와 점 (2, 0)을 지나 점 (0, 2)까지 선분으로 연결하는 경로이다. $\int_C (3+ye^x)dx + e^x dy$의 값을 구하시오. [2점]



Solution. 점 $(0, 2)$에서 점 (-2, 0)까지의 선분을 L이라 하고 폐곡선 $C+L$로 둘러싸인 영역을 D라 하자. $P = 3 + ye^x$, $Q = e^x$이라 두면 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$이므로 Green 정리에 의해서 아래의 식 (1)이 성립한다.

$$\int_{C+L} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0. \tag{1}$$

경로 $-L$의 매개변수 방정식은 $x = t,\ y = 2 + t\ (-2 \le t \le 0)$이므로 식 (1)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_C P\,dx + Q\,dy &= \int_{-L} P\,dx + Q\,dy \\ &= \int_{-2}^{0} (3 + 3e^t + te^t)\,dt = te^t + 2e^t + 3t\Big|_{-2}^{0} = 8.\end{aligned}$$

Alternate Solution. $f(x,\ y) = 3x + ye^x$이라 두면 $\nabla f = (3 + ye^x,\ e^x)$이므로 선적분의 기본정리에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_C (3 + ye^x)\,dx + e^x\,dy = f(0,\ 2) - f(-2,\ 0) = 8$$

5. (기입형) 좌표평면에서 영역 D가 $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 9\}$일 때, 함수 $f : D \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x,\ y) = \begin{cases} y, & y \ge \sin\sqrt{x} \\ \sin\sqrt{x}, & y < \sin\sqrt{x}. \end{cases}$$

두 반복적분의 합

$$\int_0^2 \int_0^9 f(x,\ y)\,dydx + \int_0^2 \int_0^{\sin\sqrt{x}} (y - \sin\sqrt{x})\,dydx$$

의 값을 구하시오. [2점]

Solution. $f(x,\ y)$의 정의에 의해서 아래의 식 (1)을 얻는다.

$$\int_0^9 f(x,\ y)\,dy = \int_0^{\sin\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}\,dy + \int_{\sin\sqrt{x}}^9 y\,dy = \frac{81}{2} + \frac{(\sin\sqrt{x})^2}{2}. \tag{1}$$

한편 $\displaystyle\int_0^{\sin\sqrt{x}} (y - \sin\sqrt{x})\,dy = -\frac{(\sin\sqrt{x})^2}{2}$이므로 식 (1)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_0^2 \int_0^9 f(x,\ y)\,dydx + \int_0^2 \int_0^{\sin\sqrt{x}} (y - \sin\sqrt{x})\,dydx = \int_0^2 \frac{81}{2}\,dx = 81.$$

11. (서술형) 함수 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$가 구간 $[0, \infty)$에서 미분가능하다. 모든 점 $x \in [0, \infty)$에 대하여 $|f'(x)| \le M$이고 $f(0) > 0$일 때, $f(x) \le f(0) + Mx$임을 보이시오. 또한 $0 \le M < 1$이면 방정식 $f(x) = x$는 단 하나의 해를 가짐을 보이시오. (단, M은 상수이다.) [4점]

Solution. $x = 0$이면 분명히 $f(x) \le f(0) + Mx$가 성립한다. $x > 0$이라 하면 평균치정리에 의해서 $f(x) - f(0) = f'(c_x)(x - 0)$인 점 $c_x \in (0, x)$가 존재한다. 따라서 $f(x) = f(0) + f'(c_x)x \le f(0) + Mx$가 성립한다. $f(0) > 0$이고 $0 \le M < 1$이라 하자. $g(x) = f(x) - x$라 하자. 그러면 $g(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 연속이고 $g(0) = f(0) > 0$이다. $\dfrac{f(0)}{1-M} < c$인 $c \in (0, \infty)$를 선택한다. 그러면 $f(0) < c - Mc$이므로 아래의 식 (1)이 성립한다.

$$f(c) \le f(0) + Mc < c \tag{1}$$

식 (1)에 의해서 $g(c) = f(c) - c < 0$이 성립한다. 그러므로 중간치 정리에 의해서 $g(a) = 0$, 즉 $f(a) = a$인 $a \in (0, c)$가 존재한다. 따라서 점 a가 f의 고정점이다.

$a, b \in [0, \infty)$, $(a < b)$가 f의 상이한 고정점이라 하자. 평균치정리에 의해서 $f(a) - f(b) = (a - b)f'(c)$가 성립하는 $c \in (a, b)$가 존재하고 $|f'(c)| \le M < 1$이므로 아래의 식 (2)가 성립한다.

$$|a - b| = |f(a) - f(b)| = |(a - b)f'(c)| < |a - b| \tag{2}$$

이 결과는 모순이다. 따라서 f의 고정점은 유일하다.

Definition. $(X,\ d)$를 거리공간(metric space)이라 하고 $f : X \to X$라 하자. 모든 $x,\ y \in X$에 대하여 $d(f(x),\ f(y)) \leq c\,d(x,\ y)$를 만족시키는 상수 $c\,(0 \leq c < 1)$가 존재할 때, 사상 $f : X \to X$를 **축약사상**(contraction mapping)이라 한다.

축약사상 정리(Contraction Mapping Theorem). $f : X \to X$가 완비거리공간(complete metric space) $(X,\ d)$ 위에서의 축약사상이면 f는 단 하나의 고정점(fixed point)을 갖는다.

Solution. 축약사상의 정의에 의해서 모든 $x,\ y \in X$에 대하여 $d(f(x),\ f(y)) \leq c\,d(x,\ y)$를 만족시키는 상수 $c \in [0,\ 1)$가 존재한다. $a_0 \in X$를 임의의 점이라 하고 $a_{n+1} = f(a_n)$으로 두어 수열 (a_n)을 귀납적으로 정의한다. 먼저 수열 (a_n)이 코시(Cauchy) 수열임을 보인다. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $d(a_{n+1},\ a_n) = d(f(a_n),\ f(a_{n-1})) \leq c\,d(a_n,\ a_{n-1})$이므로 귀납적으로 아래의 식 (1)이 성립함을 보일 수 있다.

$$d(a_{n+1},\ a_n) \leq c^n\, d(a_1,\ a_0), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$m > n \geq 1$이라 하자. 식 (1)에서 아래의 식 (2)를 얻는다.

$$\begin{aligned} d(a_m,\ a_n) &\leq d(a_m,\ a_{m-1}) + d(a_{m-1},\ a_{m-2}) + \cdots + d(a_{n+1},\ a_n) \\ &\leq (c^{m-1} + c^{m-2} + \cdots + c^n) d(a_1,\ a_0) \\ &\leq \frac{c^n}{1-c} d(a_1,\ a_0). \end{aligned} \tag{2}$$

식 (2)에 의해서 $m,\ n \to \infty$이면 $d(a_m,\ a_n) \to 0$이다. 따라서 수열 (a_n)은 코시 수열이다. $(X,\ d)$가 완비 거리공간이므로 $a_n \to a$인 $a \in X$가 존재한다. 축약사상 f가 연속함수이므로 다음 결과를 얻는다.

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

따라서 점 a가 축약사상 f의 고정점이다. $b \in X$가 f의 고정점이면 $d(a,\ b) = d(f(a),\ f(b)) \leq c\,d(a,\ b)$이고 $c < 1$이므로 $d(a,\ b) = 0$이다. 따라서 $a = b$이다. 그러므로 축약사상 f의 고정점은 유일하다.

2016학년도(3교시, 전공B) (해석학, 복소해석학)

Definition. 멱급수 형태의 함수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$을 주어진 수열 $\{a_n\}$의 **생성함수**(generating function)이라 한다.

2. (서술형)(해석학, 이산수학) 점화식 $a_0 = 1,\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2^n}\ (n \geq 1)$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 생성함수와 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n$의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

Solution. 함수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$을 주어진 수열 $\{a_n\}$의 생성함수라 하자. $\frac{1}{2}xf(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2}x^{k+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{2}x^n$이므로 아래의 식 (1)을 얻는다.

$$\left(1-\frac{1}{2}x\right)f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{a_{n-1}}{2}\right)x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{1-x/2}. \quad (1)$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2}$이다. $xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n = f'(1) = \frac{1}{(1-1/2)^3} = 8.$$

아벨 공식(Abel's Formula). (a_k)와 (b_k)가 실수의 수열이고 모든 자연수 $n \geq m \geq 1$에 대하여 $A_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} a_k$라 두면 모든 자연수 $n > m \geq 1$에 대하여 아래의 식이 성립한다.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_{n,m} b_n - \sum_{k=m}^{n-1} A_{k,m}(b_{k+1} - b_k).$$

아벨 공식(Abel's Formula). (a_k)와 (b_k)가 실수의 수열이고 모든 자연수 n에 대하여 $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$라 두면 모든 자연수 n에 대하여 아래의 식이 성립한다.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_{k+1} - b_k).$$

Example. $a_k = \dfrac{1}{2^k}$, $b_k = k$라 두면 $A_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$이므로 아벨 공식에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Example. $a_k = \dfrac{1}{2^k}$, $b_k = k^2$이라 두면 $A_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$이므로 아벨 공식에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k} = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 - \frac{1}{2^k}\right)(2k+1) = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}.$$

Example. 점화식 $a_0 = 1,\ a_n = \frac{1}{2}\,a_{n-1} + \frac{1}{2^n}\ (n \geq 1)$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n과 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n$의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오.

Solution. $a_0 = a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}\,a_1 + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2},\ a_3 = \frac{1}{2}\,a_2 + \frac{1}{2^3} = \frac{4}{2^3},\ a_4 = \frac{1}{2}\,a_3 + \frac{1}{2^4} = \frac{5}{2^4}$이므로 $a_n = \frac{n+1}{2^n}$이다. 다음 결과가 성립한다.

$$\sum_{k=0}^{n} k\,a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k}.$$

$c_k = \frac{1}{2^k},\ d_k = k$라 두면 $C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$이므로 아벨 공식에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}. \tag{1}$$

$c_k = \frac{1}{2^k},\ d_k = k^2$이라 두면 $C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$이므로 아벨 공식에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k} = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 - \frac{1}{2^k}\right)(2k+1) = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}. \tag{2}$$

식 (1)과 식 (2)에 의해서 $\sum_{k=0}^{n} k a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{2^k} = 8 - \frac{n^2+5n+8}{2^n}$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \lim_{n \to \infty} \left(8 - \frac{n^2+5n+8}{2^n}\right) = 8.$$

Theorem. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이 선형변환(linear transformation)이면 모든 $x \in \mathbb{R}^n$에 대하여 $T(x) = Bx$인 $m \times n$ 행렬(matrix) B가 존재한다.

Solution. $\mathbb{R}^n$의 표준기저를 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots,\ e_n = (0, 0, \cdots, 1)$이라 하자. $T(e_k) = (b_{1k}, b_{2k}, \cdots, b_{mk}),\ 1 \le k \le n$라 두자. 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}
T(x) &= T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k T(e_k) \\
&= x_1(b_{11}, b_{21}, \cdots, b_{m1}) + x_2(b_{12}, b_{22}, \cdots, b_{m2}) \\
&\quad + \cdots + x_n(b_{1n}, b_{2n}, \cdots, b_{mn}) \\
&= (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n, b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n, \\
&\quad \cdots, b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n) \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Bx.
\end{aligned}$$

3. (서술형) (해석학, 선형대수) 2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$의 단위벡터(unit vector) $\mathbf{u}$에 대하여 선형사상 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$을

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$$

로 정의하자. 모든 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 $||T(\mathbf{x})|| = ||\mathbf{x}||$임을 보이시오. 또한 $\mathbf{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$일 때, $\mathbb{R}^2$의 기저(basis) $B = \{(1,\ 0),\ (1,\ 1)\}$에 대한 T의 행렬 $[T]_B$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 두 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$에 대

하여 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$는 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$의 점곱(유클리드 내적, dot product, Euclidean inner product)이고, $||\mathbf{x}||$는 $\mathbf{x}$의 유클리드 노름(Euclidean norm)이다.) [4점]

Solution. 모든 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$에 대하여 $||\mathbf{x}||^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$이고 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2 = 1$이므로 모든 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$에 대하여 아래의 식 (1)이 성립한다.

$$\begin{aligned} ||T(\mathbf{x})||^2 &= T(\mathbf{x})\cdot T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u})\cdot(\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 4(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})^2 + 4(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})^2\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = ||\mathbf{x}||^2. \end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)에 의해서 모든 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 $||T(\mathbf{x})|| = ||\mathbf{x}||$이다. $\mathbf{e}_1 = (1,\ 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1,\ 1)$이라 두자. $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로 다음 결과를 얻는다.

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} = (1,\ 0) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0,\ -1). \tag{2}$$

$\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{u} = \sqrt{2}$이므로 다음 결과를 얻는다,

$$T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - 2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} = (1,\ 1) - 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-1,\ -1). \tag{3}$$

$\mathbf{x} = (x_1,\ x_2)$라 두면 $\mathbf{x} = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ 이므로 $T(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2)$이다. 따라서 식 (2)와 식 (3)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$T(\mathbf{x}) = (-x_2,\ -x_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

그러므로 기저(basis) B에 대한 T의 행렬은 $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

무한급수의 항별미분정리. 모든 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 f_k가 열린 유계구간 (a, b) 위에서 미분가능이라 하자. 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$가 한 점 $x_0 \in (a, b)$에서 수렴하고 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$가 (a, b) 위에서 평등수렴하면 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$도 (a, b) 위에서 미분가능인 함수에 평등수렴하고 아래의 식이 성립한다.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

4. (서술형) 양의 정수 n에 대하여 함수 $f_n : [-1,\ 1] \to \mathbb{R}$를

$$f_n(x) = e^{x/n^2} - \cos\frac{x}{n^2}$$

로 정의할 때, 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 구간 [-1, 1]에서 미분가능한 함수로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)함을 보이시오. [4점]

※ 다음 정리는 필요하면 증명없이 사용할 수 있다.

구간 $[a,\ b]$에서 정의된 미분가능한 함수열 $\{f_n\}$에 대하여 다음 두 조건 (가), (나)를 모두 만족하는 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$는 $[a,\ b]$에서 미분가능한 함수로 평등수렴한다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$가 수렴하는 점 $x_0 \in [a,\ b]$가 존재한다.

(나) 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$가 $[a,\ b]$에서 평등수렴한다.

Solution. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $f_n(0) = e^0 - \cos 0 = 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0$이다. 즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$가 수렴하는 점 $x_0 = 0 \in [-1,\ 1]$이 존재한다. 모든

$x \in [-1,\ 1]$과 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $e^{x/n^2} \le e$이므로 아래의 식이 성립한다.

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{1}{n^2}\left(e^{x/n^2} + \sin\frac{x}{n^2}\right)\right| \le (e+1)\frac{1}{n^2},\ \forall x \in [-1,\ 1],\ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$이 수렴하므로 식 (1)과 Weierstrass M-판정법에 의해서 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$가 구간 $[-1,\ 1]$에서 평등수렴한다. 따라서 위의 정리에 의해서 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$는 구간 [-1, 1]에서 미분가능한 함수로 평등수렴한다.

(무한급수의 항별미분정리에 의해서 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$는 구간 [-1, 1]에서 미분가능한 함수로 평등수렴하고 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$이다.)

Example. $f(z) = \mathrm{sech(z)} = \dfrac{1}{\mathrm{cosh(z)}} = \dfrac{2}{\mathrm{e^z + e^{-z}}} = \dfrac{2\mathrm{e^z}}{\mathrm{e^{2z}} + 1}\left(|\mathrm{z}| < \dfrac{\pi}{2}\right)$의 점 $z_0 = 0$에 관한 테일러(Taylor) 급수 전개를 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$이라 하자. 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $a_{2n+1} = 0$임을 보이시오.

Solution. $\cosh(z)$의 점 $z_0 = 0$에 관한 테일러(Taylor) 급수 전개를 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$이라 하자. 그러면 $b_0 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $b_{2n-1} = 0$, $b_{2n} = 1/(2n)!$이다. $\mathrm{sech(z)}\cosh(\mathrm{z}) = 1$이므로 $\mathrm{sech(z)}\cosh(\mathrm{z})$의 멱급수 전개를 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$이라하면 $c_0 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $c_n = 0$이다. $0 = c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = a_1$에서 $a_1 = 0$을 얻는다. $0 = c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = a_3$에서 $a_3 = 0$을 얻는다. $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2n-1} = 0$이라 하자. j가 $1 \leq j \leq 2n-1$인 홀수이면 $a_j = 0$이고 j가 짝수이면 $2n+1-j$가 홀수이므로 $b_{2n+1-j} = 0$이다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

$$0 = c_{2n+1} = \sum_{j=0}^{2n+1} a_j b_{2n+1-j} = \sum_{j=0}^{2n-1} a_j b_{2n+1-j} + a_{2n}b_1 + a_{2n+1}b_0 = a_{2n+1}$$

따라서 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $a_{2n+1} = 0$이다.

유수 정리(Residue Theorem). 함수 f가 고립특이점 $z_1, z_2, \cdots, z_n$을 제외하고 영역 Ω에서 해석적이라 하자. γ가 영역 Ω 내부의 양의 방향을 가진 단순폐경로이고 $z_k \in \mathrm{Int}\,(\gamma)$, $1 \leq k \leq n$이면 다음 결과가 성립한다.

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_k).$$

Remark. $f(z)$가 $z=a$에서 위수 m인 극을 가지면 $f(z)$를 아래의 식 (1)의 형식으로 표현할 수 있다. $\varphi(a) \neq 0$이고 $\varphi(z)$는 $z=a$에서 해석적이다.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad 0 < |z-a| < R. \tag{1}$$

$z=a$에서의 $f(z)$의 유수는 다음 식으로 주어진다.

$$\operatorname{Res}(f;a) = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Remark. $p(z)$와 $q(z)$가 $z=a$에서 해석적이고 $p(a) \neq 0,\ q(a)=0,\ q'(a) \neq 0$이면 $z=a$가 $p(z)/q(z)$의 단극이고 $\operatorname{Res}(p/q;a) = p(a)/q'(a)$이다.

7. (서술형) 복소함수 $f(z) = \dfrac{e^z}{e^{2z}+1}$ $\left(|z| < \dfrac{\pi}{2}\right)$의 점 $z_0 = 0$에 관한 테일러(Taylor) 급수 전개를 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$이라 하자. 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $a_{2n+1} = 0$임을 보이시오. 또한 복소평면에서 시계반대 방향의 단위원 $C : |z| = 1$에 대하여 $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z^3}\,dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점]

Solution. $f(z) = \dfrac{e^z}{e^{2z}+1} = \dfrac{1}{e^z+e^{-z}} = \dfrac{1}{2}\operatorname{sech} z$이다. $\cosh(z)$의 점 $z_0=0$에 관한 테일러(Taylor) 급수 전개를 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$이라 하자. 그러면 $b_0 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $b_{2n-1} = 0,\ b_{2n} = 1/(2n)!$이다. $f(z)\cosh(z) = 1/2$이므로 $f(z)\cosh(z)$의 멱급수 전개를 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$이라하면 $c_0 = 1/2$이고 모든 자연수 n에 대하여 $c_n = 0$이다. $0 = c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = a_1$에서 $a_1 = 0$을 얻는다. $0 = c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = a_3$에서 $a_3 = 0$을 얻는다. $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2n-1} = 0$이라 하자. j가 $1 \le j \le 2n-1$인 홀수이면

$a_j = 0$이고 j가 짝수이면 $2n+1-j$가 홀수이므로 $b_{2n+1-j} = 0$이다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

$$0 = c_{2n+1} = \sum_{j=0}^{2n+1} a_j b_{2n+1-j} = \sum_{j=0}^{2n-1} a_j b_{2n+1-j} + a_{2n} b_1 + a_{2n+1} b_0 = a_{2n+1}$$

따라서 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $a_{2n+1} = 0$이다.

$g(z) = \dfrac{f(z)}{z^3}$가 $z = 0$에서 위수 3인 극을 가지므로 $z = 0$에서 $g(z)$의 유수는 다음 식으로 주어진다.

$$\mathrm{Res}(\mathrm{g};\ 0) = \frac{\mathrm{f}''(0)}{2!} = -\frac{1}{4}. \tag{1}$$

따라서 식 (1)과 유수정리에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_C \frac{f(z)}{z^3}\, dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(\mathrm{g};\ 0) = 2\pi \mathrm{i} \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi \mathrm{i}}{2}.$$

2017학년도 (해석학, 복소해석학)

4. (수학 A) 좌표평면 영역 D가

$$D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$$

일 때, 중적분 $\iint_D 3\cos(x^3)\,dA$의 값을 구하시오. [2점]

Solution.

$$\begin{aligned}\iint_D 3\cos(x^3)\,dA &= \int_0^1 \int_0^{x^2} 3\cos(x^3)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 3\cos(x^3)[y]_0^{x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 3x^2\cos(x^3)\,dx = [\sin(x^3)]_0^1 = \sin(1)\end{aligned}$$

5. (수학 A) 좌표평면의 영역

$$D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4,\ x + y \le 4\}$$

에서 함수 $f(x,\ y) = 4x - 2xy + y^2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [2점]

Solution. $f_x(x,\ y) = f_y(x,\ y) = 0$이면 $x = y = 2$이다. $(2,\ 2) \in D$이고 $f(2,\ 2) = 4$이다. 영역 D의 경계에서 $f(x,\ y)$의 최댓값과 최솟값을 구하자. 선분 $x = 0,\ 0 \le y \le 4$에서 $f(x,\ y) = y^2$이므로 최솟값은 0이고 최댓값은 16이다. 선분 $0 \le x \le 4,\ y = 0$에서 $f(x,\ y) = 4x$이므로 최솟값은 0이고 최댓값은 16이다. 선분 $x + y = 4,\ 0 \le x \le 4$에서 $f(x,\ y) =$

$4x - 2x(4-x) + (4-x)^2 = 3(x-2)^2 + 4$이므로 최솟값은 4이고 최댓값은 16이다. 따라서 영역 D에서 $f(x,\ y)$의 최솟값은 0이고 최댓값은 16이다. 그러므로 $f(x,\ y)$의 최댓값과 최솟값의 합은 16이다.

6. (수학 A) 복소수 $z = x + iy(x,\ y$는 실수)에 대한 함수

$$f(z) = (x^n y + xy^n + x + y) + iv(x,\ y)$$

가 $z = 1$에서 해석적(analytic)이 되도록 하는 자연수 n의 값과 이 때의 $f'(1)$의 값을 각각 구하시오. (단, $v(x,\ y)$는 실수값 함수이다.) [2점]

Solution. $u(x,\ y) = x^n y + xy^n + x + y$이라 하자. 코시-리만 방정식을 사용한다. $u_x = nx^{n-1}y + y^n + 1 = v_y$에서 $v(x,\ y) = \dfrac{n}{2}x^{n-1}y^2 + \dfrac{y^{n+1}}{n+1} + y + h(x)$이다. $u_y = -v_x$에서 아래의 식 (1)을 얻는다.

$$x^n + nxy^{n-1} + 1 = -\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 - h'(x) \tag{1}$$

식 (1)에서 $n = 1$이고 $h'(x) = -2x - 1$이다. 따라서 $u(x,\ y) = 2xy + x + y$이고 $v(x,\ y) = y^2 + y - x^2 - x + C$이다. 그러므로 $f'(1) = u_x(1,\ 0) + iv_x(1,\ 0) = 1 - 3i$이다.

Definition. 복소함수 $f(z)$가 제거된 원판 $D'(a, R) = \{z : 0 < |z-a| < R\}$에서 해석적일 때 함수 $f(z)$가 $z = a$에서 **고립특이점**(isolated singularity)을 갖는다고 한다.

Definition. $z = a$가 복소함수 $f(z)$의 고립특이점이면 $f \in H(D'(a, R))$인 양수 R이 존재하므로 원환 $0 < |z-a| < R$에서 $f(z)$를 **로랑급수**(Laurent series)로 전개할 수 있다:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-a)^n} + \cdots, \ z \in D'(a,R),$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}\, dz, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

여기서 γ는 점 a를 내부에 포함하고 원환 $0 < |z-a| < R$에 포함된 양의 방향을 갖는 임의의 단순폐경로(simple closed contour)이다. $f(z)$의 로랑급수 전개에서 $\dfrac{1}{z-a}$의 계수인 b_1을 고립특이점(isolated singular point) $z = a$에서의 f의 **유수**(residue)라 한다:

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res}(f; a) = b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz.$$

$f(z)$의 로랑급수 전개에서 음의 부분의 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$을 $f(z)$의 $z = a$에서의 **주부**(principal part)라 한다. $z = a$에서의 $f(z)$의 주부가 적어도 하나의 영이 아닌 항을 포함하고 주부의 영이 아닌 항의 개수가 유한개일 때 $z = a$를 $f(z)$의 **극**(pole)이라 한다. $z = a$가 $f(z)$의 극이면 $b_m \neq 0$이고 모든 자연수 k에 대하여 $b_{m+k} = 0$인 자연수 m이 존재한다. 이 경우에 $z = a$를 $f(z)$의 **위수**(order) m인 극이라고 하고 $m = 1$인 경우에 **단극**(simple pole)이라 한다. $z = a$가 $f(z)$의 위수 m인 극이면 함수 $f(z)$를 다음 형식으로 표현할 수 있다.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-a)^m}.$$

여기서 $b_m \neq 0$이고 $0 < |z-a| < R$이다. $z = a$에서 f의 주부가 무한히 많은 영이 아닌 항을 포함할 때 $z = a$를 $f(z)$의 **진성특이점**(essential singular point)라 한다. $z = a$에서 f의 주부의 모든 계수가 영일 때 $z = a$를 $f(z)$의 **제거가능 특이점**(removerable singular point)라 한다.

Theorem. Ω가 영역(domain), $a \in \Omega$, 그리고 $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$라 하자. 다음 결과가 성립한다.

(a) $z = a$: 제거가능 특이점 $\Leftrightarrow$ 극한 $\lim_{z \to a} f(z)$가 존재하고 유한 값이다.

(b) $z = a$: 극 $\Leftrightarrow \lim_{z \to a} f(z) = \infty$.

(c) $z = a$: 위수가 m인 극 $\Leftrightarrow$ 극한 $\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z)$가 존재하고 0이 아닌 유한 값이다.

(d) $z = a$가 진성특이점: $\Leftrightarrow z \to a$일 때 $f(z)$가 유한 극한이나 무한 극한에 접근하지 않는다.

리만 제거가능 특이점 정리. Ω가 영역(domain), $a \in \Omega$, 그리고 $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$라 하자. 다음 결과가 성립한다.

$$z = a: \ f\text{의 제거가능 특이점} \Leftrightarrow \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0.$$

최대절대값원리 (Maximum Modulus Principle). 복소함수 $f(z)$가 영역 Ω에서 상수가 아닌 해석함수이면 $|f(z)|$는 Ω에서 최대값을 갖지 않는다.

최대절대값원리 (2nd version). $f(z)$가 유계 영역(bounded domain) Ω에서 해석적이고 $\overline{\Omega}$에서 연속이면 $|f(z)|$는 Ω의 경계 $\partial\Omega$에서 최대값을 갖는다.

Theorem. Ω가 영역(domain), 그리고 $a \in \Omega$라 하자. $f \in C(\Omega)$이고 $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$이면 $f \in H(\Omega)$이다.

11. (수학 A) 복소평면 $\mathbb{C}$의 영역 $D = \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < |z| < 1\}$에 대하여 함수 $f : D \to \mathbb{C}$는 해석적(analytic)이다. 임의의 $z \in D$에 대하여 함수 $f(z)$가 부등식

$$|f(z)| \leq 1 + \ln\left(\frac{1+|z|}{2|z|}\right)$$

를 만족시킨다. $z = 0$은 함수 $f(z)$의 제거 가능 특이점(없앨 수 있는 특이점, removable singular point)임을 보이고, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$일 때 $f\left(\frac{1+i}{3}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

Solution. $B(0,\ 1)$을 원점을 중심으로 하고 반경이 1인 열린 원판(open disk)이라 하면 $0 \in B(0,\ 1)$이고 $D = B(0,\ 1) \setminus \{0\}$이다. $f \in H(B(0,\ 1) \setminus \{0\})$이므로 $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$이면 리만 제거가능 특이점 정리에 의해서 $z = 0$은 $f(z)$의 제거가능 특이점이 된다. 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}\lim_{|z|\to 0} |zf(z)| &\leq \lim_{|z|\to 0} |z| \ln\left(\frac{1+|z|}{2|z|}\right) = \lim_{r\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+r}{2r}\right)}{\frac{1}{r}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)} = 0\end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)에 의해서 $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$이므로 $z = 0$은 $f(z)$의 제거가능 특이점이다.

$z = 0$이 $f(z)$의 제거가능 특이점이므로 극한 $\lim_{z\to 0} f(z)$가 존재하고 유한값이다. $f(0) = \lim_{z\to 0} f(z)$로 정의하면 $f \in C(B(0,\ 1))$이다. 그런데 $f \in H(B(0,\ 1) \setminus \{0\})$이므로 $f \in H(B(0,\ 1))$이다. 즉, 함수 $f(z)$는 단위 열린 원판(unit open disk) $B(0,\ 1)$에서 해석적이다. $0 < r < 1$이라 하자. 그러면 원 $|z| = r$에서 아래의 식 (2)가 성립한다.

$$|f(z)| \leq 1 + \ln\left(\frac{1+r}{2r}\right) \tag{2}$$

$z_0 \in B(0,\ 1)$이라 하고 $|z_0| < r < 1$인 $r > 0$을 선택한다.그러면 $z_0 \in \overline{B(0,\ r)} \subset B(0,\ 1)$이므로 최대절대값 원리(Maximum Modulus Principle, 2nd version)와 식 (2)에 의해서 아래의 식 (3)을 얻는다.

$$|f(z_0)| \leq \max_{z \in \overline{B(0,\ r)}} |f(z)| = \max_{|z|=r} |f(z) \leq 1 + \ln\left(\frac{1+r}{2r}\right) \tag{3}$$

$r \to 1-$하여 식 (3)에서 $|f(z_0)| \leq 1 + \ln(1) = 1$을 얻는다. 그런데 $z_0 \in B(0,\ 1)$이 임의의 점이므로 단위 열린 원판 $B(0,\ 1)$에서 $|f(z)| \leq 1$이다. 한편 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$이므로 최대절대값 원리(Maximum Modulus Principle)에 의해서 $f(z)$는 상수함수이다. 따라서 $f\left(\dfrac{1+i}{3}\right) = 1$이다.

Alternate Solution. $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$을 $f(z)$의 로랑급수라 하자. 중심이 원점이고 반경이 $r\,(0 < r < 1)$인 원을 C_r이라 두면 b_n은 아래의 식 (1)로 표현된다.

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z^{-n+1}}\, dz \tag{1}$$

$|f(z)| \leq 1 + \ln\left(\dfrac{1+|z|}{2|z|}\right)$이므로 식 (1)에서 아래의 식 (2)를 얻는다.

$$|b_n| \leq \frac{1}{2\pi} r^{n-1} \left(1 + \ln\left(\frac{1+r}{2r}\right)\right) 2\pi r = r^n \left(1 + \ln\left(\frac{1+r}{2r}\right)\right) \tag{2}$$

식 (2)에 의해서 $r \to 0$이면 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $b_n = 0$이다. 따라서 $z = 0$은 $f(z)$의 제거가능 특이점이다.

4. (수학 B) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 미분가능하고 도함수 f'이 $\mathbb{R}$에서 연속이다. 자연수 n에 대하여 함수 g_n을

$$g_n(x) = 2^n\{f(x+2^{-n}) - f(x)\}$$

라 하자. 함수열 $\{g_n\}$이 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 f'으로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)함을 보이시오. 또한 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\, dx = f(1) - f(0)$임을 보이시오. [4점]

Solution. $x \in [0,\ 1]$이라 하자. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 미분가능이므로 아래의 식 (1)이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+2^{-n}) - f(x)}{2^{-n}} = f'(x) \tag{1}$$

$\varepsilon > 0$이라 하자. f'이 콤팩트 구간(compact interval) $\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$에서 연속이므로 f'은 $\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$에서 평등연속(균등연속, uniformly continuous)이므로 적당한 $\delta > 0$가 존재해서 아래의 식 (2)가 성립한다.

$$|x-y| < \delta, \quad x,\ y \in \left[0,\ \frac{3}{2}\right] \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \varepsilon \tag{2}$$

n이 임의의 자연수라 하자. 평균치 정리(mean value theorem)에 의해서 아래의 식 (3)을 만족하는 $x_n \in (x,\ x+2^{-n}) \subset \left[0,\ \frac{3}{2}\right]$이 존재한다.

$$g_n(x) = \frac{f(x+2^{-n}) - f(x)}{2^{-n}} = f'(x_n) \tag{3}$$

$x_n \to x$이므로 아래의 식 (4)를 만족하는 적당한 자연수 N이 존재한다.

$$m,\ n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| < \delta \tag{4}$$

식 (2), (3), 그리고 식 (4)에 의해서 아래의 식 (5)가 성립한다.

$$m,\ n \geq N,\ x \in [0,\ 1] \Rightarrow |g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon \tag{5}$$

식 (5)에 의해서 함수열 $\{g_n\}$은 닫힌 구간 [0, 1]에서 평등수렴한다. 따라서, 식 (1)에 의해서 함수열 $\{g_n\}$은 닫힌 구간 [0, 1]에서 f'으로 평등수렴한다. 함수열 $\{g_n\}$이 [0, 1]에서 f'에 평등수렴하므로 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해서 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0)$$

7. (수학 B) 상수함수가 아닌 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 무한번 미분가능하고 모든 실수 x와 자연수 n에 대하여

$$|f^{(n)}(x)| \le n^2(|x|+2)$$

를 만족시킬 때, 집합 $\{x \in \mathbb{R}|\ f(x) = 0,\ |x| < 1\}$이 유한집합임을 보이시오. [5점]

※ 다음 정리들은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

(가) $c \in (a,\ b)$이고 함수 $f(x)$가 열린구간(open interval) $(a,\ b)$에서 $(n+1)$번 미분가능할 때,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k, \quad R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

로 놓으면 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$이 되는 t_x가 c와 x 사이에 존재한다.

(나) 함수 $g(x)$가 $|x-c| < r$ $(r > 0,\ c$는 상수)인 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \ne c,\ g(x_n) = 0$이고 $\lim_{n\to\infty} x_n = c$인 수열 $\{x_n\}$이 존재하면 $|x-c| < r$인 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $g(x) = 0$이다.

Solution. $A = \{x \in \mathbb{R}|\ f(x) = 0,\ |x| < 1\}$가 무한집합(infinite set)이라 하자. A가 유클리드 공간 $\mathbb{R}$의 유계인 무한집합(bounded infinite set)이므로 Bolzano-Wierstrass 정리에 의해서 집합 A는 $\mathbb{R}$에서 집적점(cluster point, accumulation point, limit point)을 갖는다. $c \in \mathbb{R}$를 A의 집적점이라 하자.

$x \in \mathbb{R}$이라 하면 정리 (가)에 의해서 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$이 되는 t_x가 c와 x 사이에 존재한다. 모든 실수 x와 자연수 n에 대하여 $|f^{(n)}(x)| \leq n^2(|x|+2)$이므로 아래의 식 (1)을 얻는다.

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}\right| \leq \frac{(n+1)^2(|t_x|+2)}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} \tag{1}$$

$a_n = \dfrac{(n+1)^2(|t_x|+2)}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}$이라 두면 아래의 식 (2)를 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)^2}|x-c| = 0$$

식 (2)와 비판정법(ratio test)에 의해서 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다. 따라서 $n \to \infty$이면 $a_n \to 0$이다. 그러므로 식 (1)에 의해서 $n \to \infty$이면 $R_n(x) \to 0$이다. 따라서 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 아래의 식이 성립한다.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{3}$$

$c \in \mathbb{R}$가 집합 A의 집적점(cluster point)이므로 임의의 자연수 n에 대하여 $\left(B\left(c, \dfrac{1}{n}\right) - \{c\}\right) \cap A \neq \emptyset$이다. 따라서 $x_n \in \left(B\left(c, \dfrac{1}{n}\right) - \{c\}\right) \cap A$인 수열 $\{x_n\}$이 존재한다. 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \neq c$, $f(x_n) = 0$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$이다. $r > 0$이 임의의 양수라 하자. $|x-c| < r$임 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 식 (3)이 성립하므로 정리 (나)에 의해서 $|x-c| < r$인 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) = 0$이다. 그런데 r이 임의의 양수이므로 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) = 0$이다. $f(x)$가 상수함수가 아니므로 이 결과는 모순이다. 따라서 $A = \{x \in \mathbb{R} |\ f(x) = 0,\ |x| < 1\}$는 유한집합이다.