복소함수론 개요 및 과정소개

복소함수론 및 응용 (Complex Analysis and its Applications)

March, 2023 (Y. Yeom)

1. 과정 개요
2. 수업 목표 및 교재
3. 강의 일정
4. 평가 방법 및 유의 사항
5. 주요 내용 엿보기

복소함수론 과정 개요

- 과목명: 복소함수론및응용 (학수번호: 0114406)
- 학점/시간: 3학점/4시간
- 평가유형: 상대평가
- 수업시간(장소): 월요일 1,2교시, 금요일 3,4교시 (과학관 312호)
- 수업방법: 대면 수업, 대면 시험

수업 목표

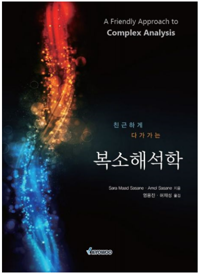
- 교과목 개요
    - 복소수 공간에서 정의된 해석함수의 미적분 개념과 성질을 이해하고, 이를 실수공간에서의 문제 해결에 응용하는 방법을 학습한다.
- 수업 목표
    - 복소수 공간에서 미분의 개념과 테일러 급수의 관계를 파악하고 복소함수의 미적분이 실수 공간의 문제해결에 도움을 주는 과정을 살펴본다.
    - 수학에서 개념의 확장을 전개하는 방법을 살펴보고 함수들이 이루는 공간에 대한 이해가 응용수학의 여러 분야에 활용될 수 있음을 이해한다.

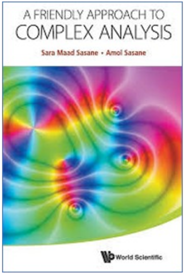
선수학습 내용 (prerequisite)

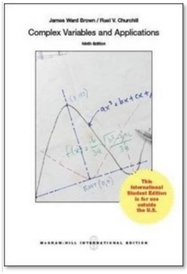
- 선수과목
  - 필수: 미적분학(Calculus)
  - 선택: 선형대수학(Linear Algebra)
  - 선택: 해석학(Mathematical Analysis)
- 필수 개념
  - 함수의 연속성과 미분에 대한 엄밀한 정의(ϵ-δ를 이용한 정의)
  - 다변수 함수의 편미분
  - 실함수의 적분과 선적분 기초
  - 초월함수: sin, cos, exp, log 등

주 교재

- 제목: 친근하게 다가가는 복소해석학
  - 저자(역자): Sara Maad Sasane, Amol Sasane (염용진, 허재성)
  - 출판사(ISBN): 교우 (9791125103714)







참고 도서

- A Friendly Approach To Complex Analysis (Sara Maad Sasane, Amol Sasane) World Scientific 2013 (9814578998)
- Complex Variables and Applications, 9th edition (James Brown, Ruel Churchill) McGraw-Hill 2013 (0073383170)

담당교수/면담시간

- 담당교수: 염용진
    - 연구실: 휘랑관(생활관 D동) 710호
    - 이메일: `salt@kookmin.ac.kr`
    - 전화: 02-910-5749
    - 대학원 연구실: 과학관 316호

    `http://randanalysis.kookmin.ac.kr/wordpress/`
- 면담 시간
    - 면담시간: 월요일 11시∼12시
    - 면담방법: 이메일로 사전 예약 후 방문 (시간변경 가능)

강의일정 (중간고사까지)

- 1주차: 과정 소개, 함수의 연속성(continuity)과 미분(derivative) 복습 (ϵ-δ 방법)
- 2주차: 복소평면, 지수함수, 로그함수, 삼각함수
- 3주차: 복소함수의 미분, 코시-리만 방정식(Cauchy-Riemann equations)
- 4주차: 복소미분(complex differentiation)의 성질, 경로적분(contour integral)의 성질
- 5주차: 단순연결 영역(simply connected domain)과 코시 적분정리, 코시 적분공식(Cauchy integral formula)
- 6주차: 리우비유 정리(Liouville theorem)와 모레라 정리(Morera theorem), 복소해석함수(holomorphic function)의 거듭제곱급수(power series)
- 7주차: 테일러 급수(Taylor series), 중간고사 기출문제 해설
- 8주차: **중간고사**

강의일정 (중간고사 이후)

- 9주차: 항등정리와(identity theorem)와 최대절대값정리(maximum modulus theorem), 로랑 급수(Laurent series)
- 10주차: 중간고사 해설 (어린이날 녹화강의), 고립 특이점(isolated singularity)의 분류, 유수 정리(residue theorem)
- 11주차: 유수 정리를 이용한 실함수 적분
- 12주차: 리만 사상 정리(Riemann mapping theorem)와 등각 사상, 포아송 적분공식(Poisson integral formula)
- 13주차:조화함수(harmonic function)와 복소해석함수(analytic function)의 관계, 20C수학 - 디락 델타함수(Dirac delta function)과 함수 공간(function space)의 확장
- 14주차: 20C수학 - 로랑 슈바르츠(Laurent Schwartz)의 함수 개념의 일반화, 기말고사 기출문제 해설
- 15주차: **기말고사**, 기말고사 해설(16주차 녹화강의)

평가 방법

- 시험 일정
  - 중간고사: 4월 21일 (금) 수업시간
  - 기말고사: 6월 9일 (금) 수업시간
- 학점 반영 비율
  - 중간고사: 30%(오픈 북 대면시험)
  - 기말고사: 40%(오픈 북 대면시험)
  - 과제: 20% (시험대비용 문제풀이 4회)
  - 출석 및 참여도: 10%

참고/유의 사항

- 시험 점수 확인 및 학점 부여
  - 중간, 기말고사 점수는 개별 통보함
  - 평균점수와 개인성적은 통보하나 등수는 공개하지 않음
  - 시험결과 확인과 이의신청은 학기말까지 가능함
  - 시험, 과제점수 확인 후 학점 부여 단계에서는 조정 요청 불가능함
- 수업 및 과제
  - 수업 후 영상을 가상대학에 업로드 함
  - 과제는 반드시 스스로 풀어서 제출할 것

미분의 정의

- 실함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대하여

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

  을 만족하는 실수 L이 존재하면 함수 f가 $x_0 \in \mathbb{R}$에서 **미분가능**하다고 한다.

- 같은 방법으로, 복소함수 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$에 대하여

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = L$$

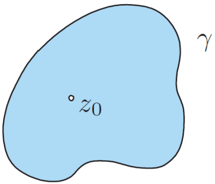
  을 만족하는 복소수 L이 존재하면 f가 $z_0 \in \mathbb{C}$에서 **복소미분가능**하다고 한다.

- 학습할 중심 주제는 "복소미분가능한 함수"의 성질이다.
- 실함수와 미분의 정의는 유사하지만 결과는 매우 다르다.
  복소함수의 미분은 예상을 벗어나는 엄밀함을 가진다.

코시 적분공식(Cauchy integral formula)

- $f : D \to \mathbb{C}$가 단순연결 영역 D에 정의된 복소해석함수이면,
- 영역 D의 닫힌 경로 γ 내부의 한 점 z_0에 대하여,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

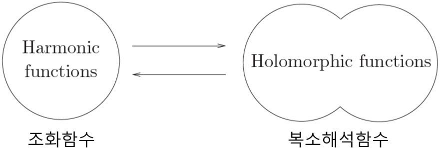


- $f : D \to \mathbb{C}$가 단순연결 영역 D의 모든 점에서 미분가능하면(즉, 복소해석함수이면), f는 무한번 미분가능하다.
- 단순연결 영역 D의 모든 닫힌 경로 γ에 대하여 $\int_\gamma f(z)dz = 0$이면, f는 D에서 복소해석함수이다.

실함수 적분

복소함수의 특이점에 대한 성질로부터 다음 적분을 매우 쉽게 계산할 수 있다.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{6}.$$



조화해석학

- $H(x,y)$가 $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$을 만족하면 조화함수(harmonic function)라고 한다.
- 복소해석함수의 실수부는 조화함수가 되며, 역으로 조화함수가 주어지면 대응되는 복소해석함수를 찾을 수 있다.

20세기 수학 엿보기

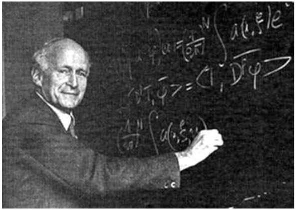
"수학의 본질은 자유로움에 있다."

(The essence of mathematics is in its freedom.)

- Geoge Cantor (1845-1918)

로랑 슈바르츠(1915-2002)

- 함수의 개념을 확장하여 일반화된 함수(generalized function)을 도입하고,
- 뾰족점을 가진 함수, 불연속 함수, 디락 델타함수에 미분을 가능하게 함.



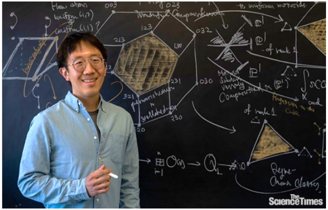


Figure: 필즈메달 수상자: L. Schwartz와 허준이 교수