

华中科技大学计算机科学与技术学院 2022~2023 学年第一学期

## “算法设计与分析”考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭卷 考试日期: 2023-2-22 考试时长: 150 分钟

专业班级: \_\_\_\_\_ 学 号: \_\_\_\_\_ 姓 名: \_\_\_\_\_

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 分数 |   |   |   |   |   |   |   |    |

|     |  |
|-----|--|
| 分 数 |  |
| 评卷人 |  |

一、(每小题 5 分, 共 15 分) 简答题

1. 简述能用动态规划解决的问题的特点。

2. 简述  $O$ ,  $\Omega$ ,  $\Theta$  分别表示什么含义。

解答内容不得超过装订线

3. 请简述主定理的主要内容

|     |  |
|-----|--|
| 分 数 |  |
| 评卷人 |  |

二、（10 分）求解递推关系式

(1)  $T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

(2)  $f(n) = f\left(\frac{n}{3}\right) + f\left(\frac{n}{5}\right) + f\left(\frac{n}{6}\right) + cn$

解答内容不得超过装订线

|     |  |
|-----|--|
| 分 数 |  |
| 评卷人 |  |

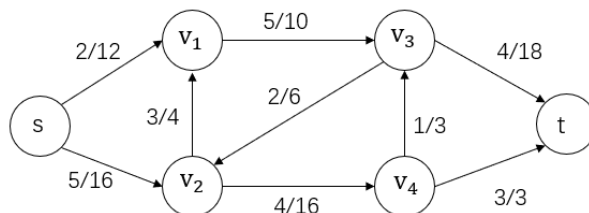
三、(15 分)矩阵链乘法: 对  $n$  个矩阵的链  $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ , 记  $m[i, j]$  为计算矩阵链  $A_i \sim A_j$  所需的标量乘法运算次数的最小值:

$$m[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j, \\ \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + p_{i-1}p_kp_j\} & \text{if } i < j. \end{cases}$$

基于上述定义, 对于矩阵规模序列  $\langle 10, 12, 7, 15, 5, 20 \rangle$  (即  $A_1$  矩阵的维度为  $10 \times 12$ , 依此类推), 求该矩阵链实例的最优括号化方案。

|     |  |
|-----|--|
| 分 数 |  |
| 评卷人 |  |

四、(15 分) 用 Ford-Fulkerson 算法求某个流网络  $G$  的最大流时，某次迭代后得到的流  $f$  如图所示，边  $(u, v)$  上标注的数字含义是： $f(u, v)/c(u, v)$ 。



流网络  $G$ ，它当前的流  $f$  和容量

(1) 请画出由流  $f$  所诱导的图  $G$  的残存网络  $G_f$ ，并在其中找出一条增广路径  $p$  (10 分)。

残存网络：

增广路径  $p$ : \_\_\_\_\_

$p$  的残存容量  $c_f(p) =$  \_\_\_\_\_

(2) 请画出用  $p$  所定义的  $G_f$  中流  $f_p$  增加  $f$  的流量后得到的  $G$  上的新流 (5 分)。

解答内容不得超过装订线

|     |  |
|-----|--|
| 分 数 |  |
| 评卷人 |  |

五、(15 分) 你对  $n$  个电视节目感兴趣，每个电视节目都有一个开始时间  $s$  和结束时间  $t$ ，节目  $i$  的播放时间是  $[s_i, t_i)$ ， $1 \leq i \leq n$ ，但由于这些节目在不同频道播出，你无法全部收看。请设计一个低时间复杂度的算法来求出自己能完整观看的最大节目数量，给出算法的描述，并分析你所设计的算法的时间复杂度。

|     |  |
|-----|--|
| 分 数 |  |
| 评卷人 |  |

六、(15 分) 长江游艇俱乐部在长江上设置了  $n$  个游艇出租站  $1, 2, \dots, n$ 。游客可在这些游艇出租站租用游艇，并在下游的任何一个游艇出租站归还游艇。游艇出租站  $i$  到游艇出租站  $j$  之间的租金为  $r(i, j)$  ( $1 \leq i < j \leq n$ )。试设计一个算法，计算出从游艇出租站 1 到游艇出租站  $n$  所需的最少租金。

- (1) 请使用动态规划算法对问题进行建模并给出状态转移方程。
- (2) 请对例子  $n = 3$ ,  $r(1, 2) = 5, r(1, 3) = 15, r(2, 3) = 7$  进行求解，并给出求解过程。

解答内容不得超过装订线

|     |  |
|-----|--|
| 分 数 |  |
| 评卷人 |  |

七、(15 分) 小华来到一家神奇的便利店购买 $N$ 件商品，这家便利店只出售 $M$ 件商品 ( $M > N$ )，且每件商品的价格都是 $A$ 元，但是当同时购买商品  $i$  和商品  $j$  时，可以减少 $B_{i,j}$ 元。已知所有的 $B_{i,j}$ ，小华该怎样选择商品，才能使总花费最小。请对该问题建模并设计算法，分析算法的时间复杂度，并证明该算法的正确性。





.....  
解答内容不得超过装订线  
.....



.....  
解答内容不得超过装订线  
.....

