解答内容不得超过装订线

华中科技大学计算机科学与技术学院 2022～2023 学年第一学期

“算法设计与分析”考试试卷(A 卷)

考试方式：<u>闭卷</u>　考试日期：<u>2023-2-22</u>　考试时长：<u>150</u>分钟

专业班级：________　学　　号：________　姓　　名：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								

分　数	
评卷人	

一、（每小题 5 分，共 15 分）简答题

1．简述能用动态规划解决的问题的特点。

要点：1）具有最优子结构

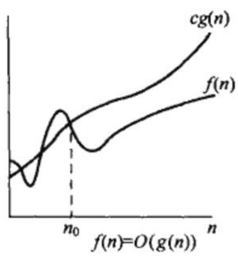
　　2） 无后效性

2. 简述 O，Ω，Θ分别表示什么含义。

f(x) = O(g(x)) 表示的含义是 f(x)以 g(x)为上界

当函数的大小只有上界，没有明确下界的时候，则可以使用大 O 表示法，该渐进描述符一般用于描述算法的 最坏复杂度。

f(x) = O(g(x))正式的数学定义：存在正常数 c、n、n0，当 n>n0 的时，任意的 f(n) 符合 0 <= f(n) <= c.g(n)。如下图所示

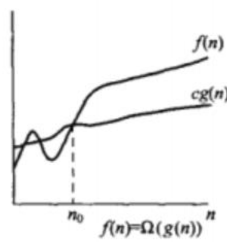


f(n)=O(g(n))

f(x) = Ω(g(x)) 表示的含义是 f(x)以 g(x)为下界

当函数的大小只有下界，没有明确的上界的时候，可以使用大Ω表示法，该渐进描述符一般用与描述算法的 最优复杂度 。

f(n)= Ω(g(n)) 正式的数学定义：存在正常数 c、n、n0，当 n > n0 的时，任意的 f(n) 符合 0 <= c.g(n) <= f(n)。如下图所示



Θ表示紧确界

3. 请简述主定理的主要内容

主定理适用于求解如下递归式算法的时间复杂度：

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

其中：

n 是问题规模大小；

a 是原问题的子问题个数；

$\frac{n}{b}$ 是每个子问题的大小，这里假设每个子问题有相同的规模大小；

$f(n)$ 是将原问题分解成子问题和将子问题的解合并成原问题的解的时间。

对上面的式子进行分析，得到三种情况：

（1） 若$f(n) < n^{\log_b a}$，且是多项式的小于。即$\exists\epsilon > 0$，有$f(n) = O(n^{\log_b a-\epsilon})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

（2） 若$f(n) = n^{\log_b a}$，则$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}logn)$

若$f(n) > n^{\log_b a}$，且是多项式的大于。即$\exists\epsilon > 0$，有$f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$，且对$\forall c >$ 1与所有足够大的n，有$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$，则$T(n) = \Theta(f(n))$

分　数	
评卷人	

二、（10 分）求解递推关系式

（1）$T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

根据主定理$O(n^2logn)$

（2）$f(n) = f\left(\frac{n}{3}\right) + f\left(\frac{n}{5}\right) + f\left(\frac{n}{6}\right) + cn$

假设$\exists\ a\ \forall\ n$ f(n) < an

$$f(n) \leq \frac{7}{10}\,an + cn$$

要假设成立 只需令$a \geq \frac{10}{3}\,c$

解答内容不得超过装订线

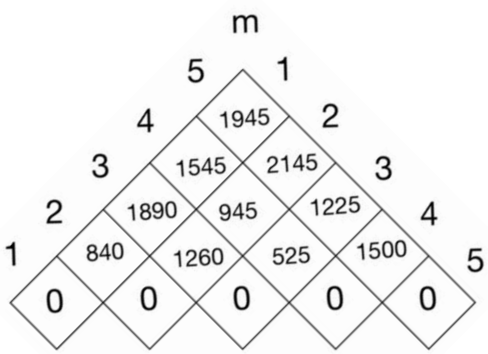
分　数	
评卷人	

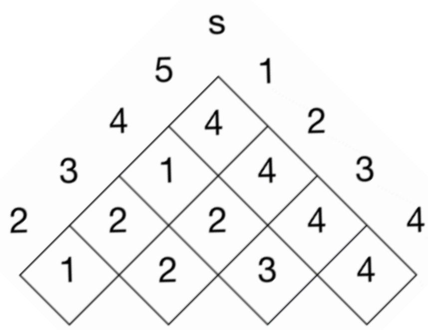
三、（15 分）矩阵链乘法：对 n 个矩阵的链$< A_1, A_2, \dots, A_n >$，记$m[i,j]$为计算矩阵链$A_i \sim A_j$所需的标量乘法运算次数的最小值：

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \ , \\ \min\limits_{i \le k < j} \{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_k p_j\} & \text{if } i < j \ . \end{cases}$$

基于上述定义，对于矩阵规模序列$\langle 10, 12, 7, 15, 5, 20 \rangle$（即$A_1$矩阵的维度为$10 \times 12$，依此类推），求该矩阵链实例的最优括号化方案。

解答

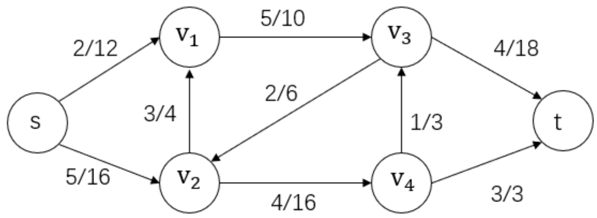




设矩阵链为$A_1A_2A_3A_4A_5$，则最优链乘模式为$((A_1(A_2(A_3A_4)))A_5)$

分　数	
评卷人	

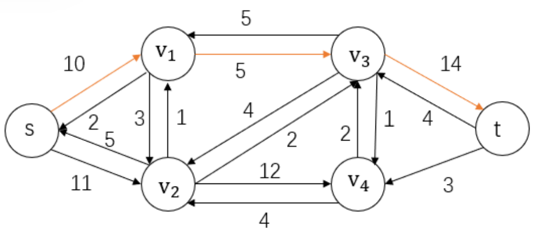
四、(15 分) 用 Ford-Fulkerson 算法求某个流网络 G 的最大流时，某次迭代后得到的流 f 如图所示，边(u,v)上标注的数字含义是：f(u,v)/c(u,v)。



流网络 G，它当前的流 f 和容量

（1）请画出由流 f 所诱导的图 G 的残存网络 G_f，并在其中找出一条增广路径 p（10 分）。

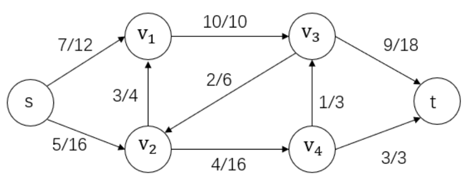
残存网络：



增广路径 p: $s \to v_1 \to v_3 \to t$

p 的残存容量 $c_f(p)$ = 5

（2）请画出用 p 所定义的 G_f 中流 f_p 增加 f 的流量后得到的 G 上的新流（5 分）。



解答内容不得超过装订线

分　数	
评卷人	

五、（15 分）你对 n 个电视节目感兴趣，每个电视节目都有一个开始时间 s 和结束时间 t ，节目 i 的播放时间是$[s_i,t_i)$，$1 \le i \le n$，但由于这些节目在不同频道播出，你无法全部收看。请设计一个低时间复杂度的算法来求出自己能完整观看的最大节目数量，给出算法的描述，并分析你所设计的算法的时间复杂度。

（1）建立观看节目集合，将电视节目按结束时间的非降次序排序，结束时间相同的按开始时间降次排序，将第一个节目加入观看节目集合，记录结束时间，（2）遍历后续电视节目，将第一个开始时间不早于前述结束时间的节目加入观看节目集合，更新结束时间（3）重复第（2）步

时间复杂度:O(nlogn)

计分：　算法描述 10 分，算法分析 5 分。描述要准确，否则酌情扣分。

分　数	
评卷人	

六、（15 分）长江游艇俱乐部在长江上设置了 n 个游艇出租站 $1,2,\cdots,n$。游客可在这些游艇出租站租用游艇，并在下游的任何一个游艇出租站归还游艇。游艇出租站 i 到游艇出租站 j 之间的租金为 $r(i,j)$（$1 \le i < j \le n$）。试设计一个算法，计算出从游艇出租站 1 到游艇出租站 n 所需的最少租金。

（1）请使用动态规划算法对问题进行建模并给出状态转移方程。

（2）请对例子 $n=3$，$r(1,2)=5, r(1,3)=15, r(2,3)=7$ 进行求解，并给出求解过程。

1）

```
for i:1 to n:
    f[i] = r[1][i];
for i:2 to n:
    for j: 2 to i:
        f[i] = min(f[i], f[j-1] + r[j-1][i])
```

2)12

解答内容不得超过装订线

分　数	
评卷人	

七、（15 分）小华来到一家神奇的便利店购买N件商品，这家便利店只出售M件商品（$M > N$)，且每件商品的价格都是A元，但是当同时购买商品 i和商品 j时，可以减少$B_{i,j}$元。已知所有的$B_{i,j}$，小华该怎样选择商品，才能使总花费最小。请对该问题建模并设计算法，分析算法的时间复杂度，并证明该算法的正确性。

对M件商品相互连上一条边，边的权重为$B_{i,j}$。给定所有权重已知的完全图，寻找大小为 N 的团，使得团的权重最大。

建模正确 给 10 分

做成最小生成树　2 分；　穷举 2 分

贪心 3 分；　贪心+局部搜索 5 分

回溯 或 分支限界 5 分

动态规划 4 分

（时间复杂度 1 分）