



Exame Final Nacional de Matemática A Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

5 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos. Não é permitido o uso de calculadora.

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 10.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.°, 11.° e 12.° anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O item 10.2. integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (PMC2015).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

- **10.1.** Considere, num referencial o.n. Oxyz,
 - a reta r, definida pela condição $\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{5} = \frac{z}{3}$
 - o plano α , definido pela equação 3x 2z 3 = 0

Qual é a posição relativa da reta r e do plano α ?

- (A) r é estritamente paralela a α
- **(B)** r e α são concorrentes, mas não perpendiculares.
- (C) r é perpendicular a α
- (D) r está contida em α

PMC2015

10.2. Seja g uma função real, de domínio $\begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix}$

Sabe-se que a função g não tem mínimo.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) A função g não tem zeros.
- (B) A função g não é limitada.
- (C) A função g não tem máximo.
- (D) A função g não é contínua.
- **11.** Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere o conjunto

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^4 + 16 = 0 \quad \land \quad \text{Re}(z) < 0 \right\}$$

Determine os elementos do conjunto A e apresente-os na forma algébrica.

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.°, 11.° e 12.° anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**). Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Um dado cúbico equilibrado tem todas as faces numeradas, umas com o número $\,0\,$ e as restantes com o número $\,1\,$

Lança-se o dado três vezes e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para cima.

Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos nos três lançamentos».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável $\, X \,$ é a seguinte.

| x_i | 0 | 1 |
|------------|-----------------|-------------|
| $P(X=x_i)$ | <u>19</u> 27 | <u>8</u> 27 |

Quantas faces estão numeradas com o número 1?

- (A) Duas.
- (B) Três.
- (C) Quatro.
- (D) Cinco.

PMC2015

- **12.2.** Qual é o valor do limite da sucessão $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$?
 - **(A)** 1
- **(B)** *e*
- (C) e^2
- (D) $+\infty$

13. Considere a função f, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = x^3 + 6 \ln x$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f
- **14.** Seja h a função, de domínio $\left|-\frac{\pi}{3}, +\infty\right|$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)} & \text{se } -\frac{\pi}{3} \le x < 0\\ \frac{e^x}{x+1} & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

- **14.1.** Mostre que a função h é contínua no ponto 0
- **14.2.** Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.
- 14.3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
 - (A) A função h é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$
 - **(B)** A função h é estritamente crescente em $[0, +\infty[$
 - (C) A função h tem um máximo para x = 1
 - **(D)** A função h tem um mínimo para x = 1
- **15.** Considere a função f, definida em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ por $f(x) = \cos x$

Qual dos seguintes conjuntos é o contradomínio da função f?

(A)
$$\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$
 (B) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

(B)
$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$$

(C)
$$\left[\frac{1}{2},1\right]$$
 (D) $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

(D)
$$\left[0, \frac{1}{2}\right]$$

16. Seja m um número real pertencente ao intervalo]0,1[, e seja a um número real positivo.

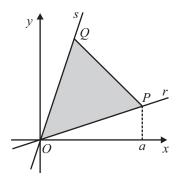


Figura 4

Na Figura 4, estão representadas as retas r e s, que passam na origem do referencial e que têm declives m e $\frac{1}{m}$, respetivamente. Estão também representados os pontos P e Q, pertencentes ao primeiro quadrante. O ponto P pertence à reta r, e o ponto Q pertence à reta s

Sabe-se que o ponto P tem abcissa a e que $\overline{OP} = \overline{OQ}$

Mostre que a área do triângulo $\left[OPQ\right]$ é dada por $\frac{a^2}{2}(1-m^2)$

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

| Item | | | | | | | | | | | |
|---------------------|-------|-----|-------|-------|-----|-------|-------|-------|-----|-----|----|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | |
| 10.1. | 10.2. | 11. | 12.1. | 12.2. | 13. | 14.1. | 14.2. | 14.3. | 15. | 16. | |
| 3 | 3 | 12 | 8 | 3 | 13 | 13 | 13 | 8 | 8 | 12 | 95 |