

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

6 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As citações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

a - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio

Área de um polígono regular: $S_{\text{semiperímetro}} \cdot \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{a^2}{2}$ - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio

Área lateral de um cone: $\pi r g$ - raio da base; g - geratriz

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ - raio

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \cdot \text{Área da base} \cdot \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \cdot \text{Área da base} \cdot \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ - raio

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão $\{u_n\}$:

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$

Progressão geométrica: $u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$t \operatorname{cis} i^n = t^n \operatorname{cis} i^n$ ou $t e^{ij^n} = t^n e^{ini}$

$\sqrt[n]{t \operatorname{cis} i} = \sqrt[n]{t} \operatorname{cis} \frac{i+2kr}{n}$ ou $\sqrt[n]{t} e^{ii} = \sqrt[n]{t} e^{i \frac{i+2kr}{n}}$

$k! \neq 0, \forall n-1 \in \mathbb{N}$

Probabilidades

$$n = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$
$$v = \sqrt{p_1^2 x_1^2 + \dots + p_n^2 x_n^2}$$

Se $X \in \mathbb{N}$, v , então:

$$P(X=1) = 0,6827$$

$$P(X=2) = 0,9545$$

$$P(X=3) = 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$u^n' = n u^{n-1} u' \quad n \in \mathbb{R}$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$e^{u'} = u' e^u$$

$$a^{u'} = u' a^u \ln a \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\ln u' = \frac{u'}{u}$$

$$\log_a u' = \frac{u'}{u \ln a} \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad p \in \mathbb{R}$$

1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$,

o plano α , de equação $2x - 3y + z - 9 = 0$

a reta r , de equação vetorial $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

1.1. Seja A o ponto da reta r cuja ordenada é igual a 4

Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

1.2. Seja P o ponto de intersecção da reta r com o plano α

Determine as coordenadas do ponto P

2.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 2.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 2.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

P2001/2002

2.1. Lança-se cinco vezes um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4, e regista-se o número da face voltada para baixo.

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da probabilidade de, nos cinco lançamentos, sair face 4 exatamente três vezes?

(A) 0,01

(B) 0,03

(C) 0,07

(D) 0,09

PMC2015

2.2. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 8

Seja α a amplitude, em graus, do maior ângulo interno desse triângulo.

Qual é o valor de α , arredondado às unidades?

(A) 75

(B) 100

(C) 120

(D) 125

3. Um saco contém nove cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 9.

3.1. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro cartões do saco.

Qual é a probabilidade de o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8?

- (A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{1}{21}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{7}$

3.2. Colocam-se os nove cartões em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta.

Determine de quantas maneiras diferentes é possível colocar os cartões, de modo que os números inscritos nos três primeiros cartões sejam primos.

4. Numa turma de 12.^o ano, apenas alguns alunos estão matriculados na disciplina de Química.

Relativamente a essa turma, sabe-se que:

o número de raparigas é o dobro do número de alunos matriculados na disciplina de Química;

um terço dos alunos matriculados na disciplina de Química são raparigas;

metade dos rapazes não estão matriculados na disciplina de Química.

Escolhe-se ao acaso um aluno da turma.

Determine a probabilidade de esse aluno estar matriculado na disciplina de Química.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Na Figura 1, está representado, no plano complexo, o quadrado $ABCD$, cujo centro coincide com a origem.

Os pontos A , B , C e D são os pontos dos números complexos z_1 , z_2 , z_3 e z_4 , respetivamente.

A que é igual $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$?

- (A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

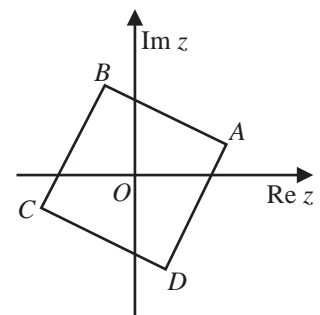


Figura 1

6. Na Figura 2, estão representadas, em referencial o.n. xOy ,

— parte do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^x$

— parte do gráfico da função g , de domínio \mathbb{R}^2 , definida por $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

Considere que um ponto A se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico de g . Para cada posição do ponto A , seja B o ponto do gráfico de f cuja abscissa é igual à do ponto A .

Seja $a \geq 1$ a abscissa comum dos pontos A e B .

Determine o valor de a para o qual a área do triângulo OAB é igual a 5, sabendo-se que esse valor existe e é único.

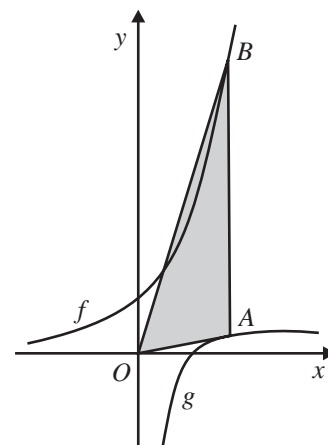


Figura 2

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de a arredondado às décimas.

7. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{1}{n} \ln n$

Determine a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão (u_n) são maiores do que 40,01

8. Para um certo número real k , é contínua em \mathbb{R} a função f , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - x - 2} & \text{se } x \geq 1 \\ k & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 2 (B) 3 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	5.	6.	7.	8.	
12	12	8		8	12	13	8	12	12	8	105