

# Руководство по реализации криптографии на эллиптических кривых

Санан Корняков

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Условия игры . . . . .	3
1.2	База . . . . .	3
1.3	Постановка задачи . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Длинная арифметика</b>	<b>4</b>

## Аннотация

Работа является пошаговым руководством по реализации криптографии на эллиптических кривых. Реализованы объекты длинной арифметики, полей и эллиптических кривых. Изучены и имплементированы алгоритмы шифрования и дешифрования, электронной цифровой подписи, подсчёт количества точек на эллиптической кривой, быстрого умножения и деления длинных чисел. Протестированы объекты и алгоритмы по скорости, сравнивая с готовыми решениями. Руководство параллельно с имплементацией объясняет и рассказывает, что и зачем было реализовано.

*Ключевые слова:* эллиптические кривые, шифрование и дешифрование, криптография, ECDSA, ECC, длинная арифметика, FFT, C++, конечные поля, оптимизация, Schoof's algorithm

## 1 Введение

Современная криптография с нынешними вычислительными мощностями требует значительных усилий в шифровке сообщений, и шифрование с помощью эллиптических кривых - один из мощнейших инструментов. Но доступных и полных объяснений от начала до конца по шифрованию на них ничтожно мало, поэтому я решил сделать руководство для людей, которые хотят ознакомиться с данным видом криптографии.

### 1.1 Условия игры

Если вы искали данное руководство, то скорее всего где-то слышали/читали об эллиптических кривых и о возможности криптографии на них, поэтому я рассчитываю на базовое понимание математики и алгоритмов.

Здесь не будет дотошного доказательства теорем или строгости в описании математических объектов — в первую очередь акцент делается именно на имплементации (на языке C++). Данный язык был выбран в качестве общеизвестного языка среди программистов.

### 1.2 База

Знаменитая формула

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

обычно является самой первой, которую вы увидите при описании криптографии эллиптических кривых. Появляется несколько вопросов:

- Что такое  $x, y, a, b$ ? Где лежат данные числа?

Данные числа являются элементами некоего поля  $\mathbb{F}$ , над которым построена эллиптическая кривая, характеристики больше 3 (забьём на последние слова, так как мы будем работать с полями достаточно больших характеристик). Поле поддерживает все стандартные математические операции: сложение, вычитание, деление на ненулевой элемент, умножение, поэтому можно пока считать его  $\mathbb{R}$ .

- Что такое эллиптическая кривая?

Это группа точек в  $\mathbb{F}^2$ , координаты которых удовлетворяют данному уравнению, и ещё точка бесконечности  $\mathcal{O}$ , которая является своеобразным нулём группы. Сложение в группе происходит по специальным формулам на координаты, которые будут рассмотрены позже. Умножение точки на натуральное число приравнивается к сложению точки с собой это число раз.

- Как это используют для шифрования?

Обычно выбирается эллиптическая кривая  $\mathbb{E}$  над неким полем  $\mathbb{F}$ , точка  $P$  на ней и производится умножение точки на натуральное число  $k$ . Криптографическая стойкость достигается сложностью нахождения числа  $k$  по точкам  $P$  и  $kP$ .

- Чем это лучше других методов шифрования?

Тем, что данный способ шифрования можно реализовать так, что он будет выполняться быстрее других алгоритмов при аналогичной задаче и данных. Также, для одинаковых показателей криптографической стойкости, криптография на эллиптических кривых требует ключей (чисел для шифрования) меньшей длины, чем другие алгоритмы.

### 1.3 Постановка задачи

Ок, мы воодушевились и решили написать свою криптографию. Сначала определим, какие объекты нам надо реализовать:

- Нам надо реализовать эллиптическую кривую. Но эллиптическая кривая никто без поля, значит нам надо реализовать поле.
- Так как поля бывают бесконечными, а мы работаем на компьютере с числами, то ограничимся на простые поля  $\mathbb{F}_p$ , которые представим в виде вычетов по простому модулю  $p$ . Но этот простой модуль и числа в поле надо представить в виде целых чисел, а в криптографии обычно используются числа из более чем 200 битов. Целые числа такого размера не поддерживаются языком C++, поэтому нам надо реализовать класс целых чисел и длинную арифметику на них.

Итого 3 объекта: целые числа, поле, эллиптическая кривая. Приступим наконец к реализации!

## 2 Длинная арифметика