Математический анализ

База

Корняков Санан

БПМИ223

December 30, 2022

Определения:

- **Декартовым произведением** $X \times Y$ множеств X и Y называют множество всевозможных пар (x,y), где первый элемент x каждой пары принадлежит X, а второй её элемент y принадлежит Y.

- **Функцией** f, определённой на множестве X и принимающей значение на множестве Y, называется подмножество декартового произведения $X \times Y$, если выполнено следующее условие: $\forall x \in X\ \exists!$ пара $(x,y) \in f$. При этом пишут $y = f(x)$. Элемент y называют образом x, а x - прообразом элемента y, для функции принято обозначение $f : X \to Y$

- 1. Функция $f : X \to Y$ называется **сюръекцией**(накрытием), если $\forall y \in Y\ \exists x \in X : y = f(x)$.
  2. Функция $f : X \to Y$ называется **инъекцией**(вложением), если из равенства $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$.
  3. Функция, являющаяся одновременно сюръекцией и инъекцией, называется **биекцией** или **взаимно-однозначным отображением**.

- Множества A и B называются **равномощными** или **эквивалентными**, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Другими словами, можно биективно отобразить одно множество на другое. Обозначение: $A \sim B$(читается: "А эквивалентно В").

- Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется **счётным множеством**.

- Говорят, что **множество** A **лежит левее множества** B, если $a \leqslant b$ при $\forall a \in A, b \in B$.

- Пусть множество A лежит левее множества B. Тогда говорят, что **число** c **разделяет множества** A и B, если $a \leqslant c$ и $c \leqslant b$ $\forall a \in A, b \in B$.

- Говорят, что для числового множества **выполняется принцип полноты**, если для любых двух его подмножеств, одно из которых лежит левее другого, найдётся элемент этого множества, разделяющий эти подмножества.

- 1) **Системой вложенных отрезков** называется множество M, состоящее из отрезков, в котором для любых $I_1, I_2 \in M$ выполнено либо условие $I_1 \subset I_2$, либо $I_2 \subset I_1$.
  2) Если при этом в M все отрезки занумерованы, и любой отрезок с большим номером содержится в любом отрезке с меньшим номером, то множество M называют **последовательностью вложенных отрезков**.

- Последовательность вложенных отрезков называется **стягивающейся**, если для любого $\varepsilon > 0$ в этой последовательности найдётся отрезок, длина которого меньше ε.

- Мощность множества всех точек отрезка $[0,1]$ будем называть **мощностью континуума**.

- – Множество $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ называется **отрезком** множества дейтсвительных чисел.
  – Пусть $a < b$. **Интервалом** будем называть множество $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
  – Длиной отрезка $[a,b]$ назовём число $|[a,b]| := b - a$
  – Прямая, точкам которой поставлены в соответствие действительные числа, называется **вещественной прямой**.
  – Множества точек вида $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ и $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ называются **полуинтервалами**.

- Множества точек вида $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ и $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ называются **открытыми лучами**.
- Множества точек вида $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ и $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ называются **замкнутыми лучами**.
- **Окрестностью** точки a вещественной прямой называется любой интервал, содержащий эту точку. Обозначения: $U(a), V(a)$.
- Если $\varepsilon > 0$, то **ε-окрестностью** точки a называют интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Обозначения: $U_\varepsilon(a), V_\varepsilon(a)$.
- **Проколотой ε-окрестностью** точки a называется объединение вида $(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$. Обозначения: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a), \overset{\circ}{V}_\varepsilon(a)$.

- Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, определённая на множестве натуральных чисел и принимающая значения во множестве действительных чисел, называется **числовой последовательностью**. Значения $f(n)$ функции f обозначают a_n. Последовательность также часто обозначают $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, отождествляя её с множеством её значений. Задаётся формулой, реккурентно или другими способами. Любое действительное число можно приблизить **последовательностью десятичных приближений**($\sqrt{2} : 1,1.4,1.41,1.414\dots$).

- Если в любом интервале вещественной оси лежат точки некоторого множества, то говорят, что это множество **всюду плотно** в $\mathbb{R}$.

- Эквивалентные определения **предела последовательности**:
  - Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, если для любой окрестности точки A существует такое натуральное число N, что при всех $n > N$ числа a_n лежат в этой окрестности.
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall U(A)\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \ a_n \in U(A)$$
  - Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \ |a_n - A| < \varepsilon$$
  - Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, если существует такая бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n = A + \alpha_n$.

- Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

- Эквивалентные определения **ограниченной последовательности**:
  - Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется ограниченной, если существуют такие числа $c,C \in \mathbb{R}$, что $c \leqslant a_n \leqslant C$ при всех $n \in \mathbb{N}$.
  - Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется ограниченной, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что $|a_n| \leqslant M$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

- Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ бесконечно малая, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Пусть дано непустое подмножество A множества действительных чисел.

  Число C называется **верхней гранью** множества A, если $a \leqslant C$ при всех $a \in A$. Если множество A имеет хотя бы одну верхнюю грань, то оно называется **ограниченным**

сверху. Наименьшая грань из верхних граней множества(если существует) A называется его **точной верхней гранью** и обозначается $\sup A$(супремум).

Число c называется **нижней гранью** множества A, если $a \geqslant c$ при всех $a \in A$. Если множество A имеет хотя бы одну нижнюю грань, то оно называется **ограниченным снизу**. Наибольшая грань из нижних граней множества (если существует) A называется его **точной нижней гранью** и обозначается $\inf A$(инфимум).

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется **ограниченным**.

Равносильное определение через ε точной верхней(нижней) грани:

Число C называется точной верхней гранью множества A, если:

1)$a \leqslant C$ для всех $a \in A$.

2)$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a > C - \varepsilon$.

- Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется **неубывающей**, если $a_n \leqslant a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и **невозрастающей**, если $a_n \geqslant a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Невозрастающая или неубывающая последовательность называется **монотонной**.

  Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется **возрастающей**, если $a_n < a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и **убывающей**, если $a_n > a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Возрастающая или убывающая последовательность называется **строго монотонной**.

- **Числом e** называют предел последовательности $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, то есть по определению полагают $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.

- **Трансцендентное число** - число, не являющееся корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами.

- **Стремление последовательности к бесконечности**:

  - Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если:
  $$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ a_n > M$$
  - Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если:
  $$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ a_n < M$$
  - Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, если:
  $$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ |a_n| > M$$

- Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_m < \ldots$. Возьмём элементы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ с номерами $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_m < \ldots$. Мы снова получим последовательность $b_k = a_{n_k}$, которая называется **подпоследовательностью** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

- **Частичный предел последовательности(предельная точка последовательности)**.

  - Число a называется частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, если найдётся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, для которой число a является пределом, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.
  - Частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется такая точка a на вещественной прямой, что для любой окрестности точки $U(a)$ этой точки и любого натурального числа N найдётся хотя бы одно такое $n > N$, что $a_n \in U(a)$.

- Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leqslant C$. $M_n = \sup\limits_{k>n} a_k$ - не возрастает и $M_n \geqslant -C$. Значит, по теореме Вейерштрасса $\exists M = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$. $m_n = \inf\limits_{k>n} a_k$ - не убывает и $m_n \leqslant C$. Значит, по теореме Вейерштрасса $\exists m = \lim\limits_{n\to\infty} m_n$. Тогда число $M = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k>n} a_k$ называют **верхним пределом** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, а число $m = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k>n} a_k$ - **нижним пределом** этой последовательности. Соответствующие обозначения: $M := \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $m := \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется **фундаментальной(или последовательностью Коши**), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при всех $n,m > N$ выполняется неравенство $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Более коротко:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m > N\ \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

- Если задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, то сумма $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **числовым рядом**. Сумма $S_n := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ называется n-ной **частичной суммой ряда**. Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется **последовательностью частичных сумм ряда**.

- Если последовательность частичных сумм имеет предел, то есть существует такое действительное число S, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что **ряд сходится**, а число S называют **суммой ряда**. Если последовательность частичных сумм не имеет предела или имеет бесконечный предел, то говорят, что **ряд расходится**.

- Сумма $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}$, $n,p \in N$ называется **отрезком ряда** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**.

- Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется **гармоническим рядом**.

- **Система множеств** - это множество, элементы которого сами являются множествами.

- Система множеств S, состоящее из множеств $\{X\}$, **покрывает множество** Y, если $Y \subseteq \bigcup\limits_{X\in S} X$.

- Подмножество множества $S = \{X\}$, являющегося системой множеств, называют **подсистемой** системы S.

- Точка a называется **предельной точкой для множества** D(два равносильных определения):
  - если в любой окрестности точки a лежит бесконечно много элементов из D.
  - если в любой проколотой окрестности точки a лежит хотя бы один элемент из D.

- Множества и их точки на прямой.
  - Точка a называется **внутренней точкой** для множества X, если $\exists(\alpha,\beta) : a \in (\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta) \subset X$.

- Точка a называется **граничной точкой** множества X, если в любой окрестности точки a содержатся как элементы из множества X, так и элементы, не принадлежащие множеству X.
- Граничная точка множества X, в некоторой окрестности которой содержится только один элемент из X(сама точка), называется **изолированной точкой** множества X.
- Множество называется **открытым**, если все его точки внутренние.
- Множество называется **замкнутым**, если его дополнение до $\mathbb{R}$ открыто.

- Определения **пределов функции**:
  - (**Определение предела по Коши**). Пусть функция f определена на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и пусть a - предельная точка множества E. Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого такого $x \in E$, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Через кванторы:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - a| < \delta \ \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

    Можно переписать в терминах окрестностей:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \, V_\varepsilon(A) \ \exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ f(x) \in V_\varepsilon(A)$$

  - Пусть функция f определена на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$. Число A называется пределом функции f при $x \to +\infty$ по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x \in E$, что $x > \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Через кванторы:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : x > \delta \ \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

    Аналогично:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : x < -\delta \ \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : |x| > \delta \ \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall C > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - a| < \delta \ \ f(x) > C$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall C > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - a| < \delta \ \ f(x) < -C$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall C > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - a| < \delta \ \ |f(x)| > C$$

  - (**Определение предела по Гейне**). Пусть функция f определена на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и пусть a - предельная точка множества E. Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E, если для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, такой что $a_n \in E, a_n \neq a \ \forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \to a$ при $n \to +\infty$, выполняется равенство $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = A$. Через кванторы:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{a_n\}_{n=1}^{+\infty} : a_n \in E \setminus \{a\} \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n \to +\infty} a_n = a \ \ \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = A$$

- Функция вида $D(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \mathbb{Q} \\ 0, \ x \in \mathbb{I} \end{cases}$ называется **функцией Дирихле**.

- Пусть функции f и g определены на множестве E, a - предельная точка множества E. Говорят, что **функции** f и g **эквивалентны** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Обозначение: $f \sim g, \ x \to a$.

- Обозначим $\mathbf{E_a^+} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} | \mathbf{x} > \mathbf{a}\}$, т.е. $E_a^+ = E \cap (a, +\infty)$. Аналогично, $\mathbf{E_a^-} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} | \mathbf{x} < \mathbf{a}\}$, т.е. $E_a^- = E \cap (-\infty, a)$.

- Пусть функция f определена на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и пусть a - предельная точка множества E. Тогда

  - Число A называется **пределом справа** функции f в точке a по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E_a^+ \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$. Через кванторы:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E_a^+ \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

  - Число A называется **пределом слева** функции f в точке a по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E_a^- \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$. Через кванторы:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E_a^- \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

  - Пределы слева и справа также называются **односторонними пределами**.

-
  - Если для любых таких $x_1, x_2 \in E$, что $x_1 < x_2$ выполнено неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция f называется **неубывающей** на множестве E. Если выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция f называется **возрастающей** на множестве E.
  - Если для любых таких $x_1, x_2 \in E$, что $x_1 < x_2$ выполнено неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция f называется **невозрастающей** на множестве E. Если выполнено неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то функция f называется **убывающей** на множестве E.
  - Функция любого из четырёх указанных видов называется **монотонной** на множестве E функцией.

- Функция f, определённая на множестве E, называется

  - **ограниченной** на множестве E, если существует такая константа $C \geq 0$, что $|f(x)| \leq C$ при всех $x \in E$.
  - **ограниченной снизу** на множестве E, если существует такая константа $C \in \mathbb{R}$, что $f(x) > C$ при всех $x \in E$.
  - **ограниченной сверху** на множестве E, если существует такая константа $C \in \mathbb{R}$, что $f(x) < C$ при всех $x \in E$.

- Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется **бесконечно малой** при $x \to a, \ x \in E$, где a является предельной точкой множества E, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то функция f называется **бесконечно большой** при $x \to a, \ x \in E$.

- Пусть функции f и g определены на множестве E, a - предельная точка множества E. Говорят, что функция f является **бесконечно малой по сравнению** с функцией g при $x \to a$, если $f(x) = h(x)g(x)$, где h - бесконечно малая функция при $x \to a$. Обозначение:

$\mathbf{f = o(g)},\ \mathbf{x \to a}$. Запись $f = o(1),\ x \to a$ означает, что f является бесконечно малой при $x \to a$. Таким образом, $f = o(g),\ x \to a \Leftrightarrow f = o(1)g,\ x \to a$.

Если при этом сами функции f и g являются бесконечно малыми при $x \to a$, то говорят, что функция f - **бесконечно малая более высокого порядка** по сравнению с g при $x \to a$.

- Пусть функции f и g определены на множестве E, a - предельная точка множества E. Если при $x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполнено равенство $f(x) = h(x)g(x)$, где h определена и ограничена на $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то пишут $\mathbf{f = O(g), x \to a}$. Запись $f = O(1),\ x \to a$ означает, что f является ограниченной на $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$. Таким образом, $f = O(g),\ x \to a \Leftrightarrow f = O(1)g,\ x \to a$.

- Пусть функция f определена на E, точка $a \in E$. Равносильные определения **непрерывности функции в точке**:

  - Функция f называется непрерывной в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при всех таких $x \in E$, что $|x - a| < \delta$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

    Заметим, что любая $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \subset U_\delta(a)$, поэтому если это условие выполнено, и a - предельная точка множества E, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. В изолированных точках непрерывность выполнена автоматически по определению. Можно считать, что запись $x \in E, a \in E, x \to a$ в случае изолированной точки a означает, что x совпадает с a при достаточно малых δ. Поэтому непрерывность в точке можно записать как:
  - Функция f называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ $(x \in E)$.
  - Функция f называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$ $(x \in E)$.
  - Функция f называется непрерывной в точке a, если $f(x) = f(a) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to a$, $\alpha(a) = 0$ $(x \in E)$.
  - Функция f называется непрерывной в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ справедливо следущее условие: ε-окрестность точки $f(a)$ содержит образ некоторой окрестности точки a при функции f $(x \in E)$.
  - Функция f называется непрерывной в точке a, если для любой такой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что $a_n \in E,\ a_n \to a, n \to +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$.

  Обозначение: $f \in C(a)$ - функция f непрерывна в точке a.

- Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной справа** в точке $a \in E$, если $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, и **непрерывной слева**, если $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$.

- Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ не является непрерывной в точке $a \in E$, то эта точка называется **точкой разрыва** функции f. **Классификация точек разрыва**:

  - Если $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) \neq f(a)$ или f не определена в точке a, то в точке a у функции f **устранимый разрыв**.
  - Если $A = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $A \neq B$, то в точке a функция имеет **разрыв первого рода** (скачок). (Если a — точка разрыва, то a — предельная точка множества E, так как в любой изолированной точке функция непрерывна. Однако может случиться, что все точки множества E в некоторой окрестности точки a лежат по одну сторону от точки a. В этом случае рассматривается только один из указанных в определении пределов.)

- Если хотя бы один из односторонних пределов функции f в точке $a \in E$ не существует или равен $\pm\infty$, то в точке a у функции f **разрыв второго рода**.
- Функция Дирихле является примером функции, **разрывной в каждой точке**.

- Функция f, определённая на множестве E, называется **непрерывной на множестве** E, если она непрерывна в каждой точке E. Обозначение: $f \in C(E)$.

- Функция f, определённая на множестве E, называется **равномерно непрерывной** на этом множестве, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех таких $x_1,x_2 \in E$, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

- Пусть функция f определена на множестве E и отображает его во множество D, причём для любого $y \in D$ существует единственное $x \in E$, для которого $f(x) = y$, т.е. функция f - биекция между E и D. Если каждому $y \in D$ поставить в соответствие то $x \in E$, для которого $f(x) = y$, то тем самым будет определена функция, отображающая множество D в множество E. Она называется **обратной функцией** для функции f. Обозначение: f^{-1}. Таким образом, $f^{-1} \colon D \to E$.

- **Элементарные функции**:
  - Многочлены $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, \ldots ,n-1),\ a_n \neq 0$.
  - Рациональные функции - отношения многочленов: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P,Q - многочлены.
  - Показательные функции: $f(x) = a^x,\ a > 0,a \neq 1$.
  - Логарифмические функции: $f(x) = \log_a x,\ a > 0,a \neq 1$.
  - Степенные функции с действительным показателем: $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x},\ x > 0$.
  - Тригонометрические функции (включая обратные).
  - Композиции всех этих функций.

- **Степень с рациональным показателем**. Пусть $x > 0, y = \sqrt[n]{x}, z = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y^n = x \Rightarrow y^{nm} = x^m$ и $z^n = x^m \Rightarrow (y^m)^n = z^n \Rightarrow y^m = z \Leftrightarrow (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$. Значит операции взятия корня и возведения в степень с целочисленным показателем перестановочны и мы можем использовать следующие обозначения: $z = x^{\frac{m}{n}},\ \ z^{-1} = x^{-\frac{m}{n}}$.

- Функция f, определённая в некоторой окрестности точки a, называется **дифференцируемой в точке** a, если существуют такие число A и функция α, что при h из некоторой проколотой окрестности нуля выполнено равенство $f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)h$, где $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. При этом A и α зависят от точки a, поэтому равенство записывают в виде: $f(a+h) - f(a) = A(a)h + \alpha(a,h)h$.

- Функция $h \mapsto Ah$ называется **дифференциалом функции** f в точке a. Она обозначается $df(a)$, т.е. $df(a)(h) = A(a)h$. Равенство записано в фиксированной точке a, то есть оно зависит от точки a.

- Если существует предел $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, то он называется **производной функции в точке** a. Другая форма записи предела: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Производная функции f в точке a обозначается символом $f'(a)$ или $\frac{df}{dx}(a)$.

- Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ - последовательность функций. При каждом фиксированном x получится числовая последовательность и можно ставить вопрос о её сходимости. Множество X всех тех x, при которых $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится, называется **множеством сходимости** или **областью сходимости** этой функциональной последовательности.

Т.е. на множестве X определена функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

- Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ **сходится равномерно** к функции $f(x)$ на множестве X, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ \forall x \in X \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

  Обозначение: $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

Леммы:

- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$
- **(Аксиома Архимеда)**. $\forall a \in \mathbb{R} : a > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : n > a$.
- Множество всех чисел любого отрезка $[a,b]$, где $a < b$, не является счётным.
- 1. $\forall x,y \in \mathbb{R} : x < y \ \exists \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : x < \frac{m}{n} < y$.
  2. $\forall x,y \in \mathbb{R} : x < y \ \exists c \in \mathbb{I} : x < c < y$.

  Доказательство:

  1)$y - x > 0 \Rightarrow \frac{1}{y-x} > 0$, поэтому в силу аксиомы Архимеда $\exists k \in \mathbb{N} : k(y-x) > 1$, а тогда $2k(y-x) > 2$, поэтому между числами $2ky$ и $2kx$ найдётся число $m \in \mathbb{Z}$(например, $m = [2ky] - 1$). Полагая $2k = n$, имеем $nx < m < ny \Leftrightarrow x < \frac{m}{n} < y$.
  2) Из 1) следует, что найдётся такое рациональное число $\frac{p}{q}$, что $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{p}{q} < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Тогда $c = \frac{p\sqrt{2}}{q}$ ∎

- Множество рациональных чисел всюду плотно на вещественной оси.
- Пусть у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ существует предел. Тогда этот предел единственен.
- Сходящаяся последовательность ограниченна.
- **(Лемма об отделимости)**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $A \neq 0$. Тогда существует такое натуральное число N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n| > \frac{|A|}{2}$.

  Замечание. Это предложение о том, что если предел последовательности не равен нулю, то, начиная с некоторого номера, все элементы последовательности не просто не равны нулю, а отделены от него некоторым числом (откуда и название: лемма об отделимости). Другими словами, среди элементов последовательности не может найтись сколь угодно малых, а поэтому числа $\frac{1}{a_n}$ не могут быть по модулю больше некоторой фиксированной величины.

- **(Переход к пределу в неравенстве)**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,, а также существует такое натуральное число N_0, что $a_n \leqslant b_n$ при всех $n > N_0$. Тогда $A \leqslant B$.

  Доказательство:

Предположим противное: A>B, тогда обозначим $A - B = \varepsilon_0 > 0$. Пользуясь определением предела, возьмём такие $N_1 \in \mathbb{N}$,$N_2 \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_1 \; |a_n - A| < \frac{\varepsilon_0}{2}; \forall n > N_2 \; |b_n - B| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ Тогда $\varepsilon_0 = A - B = A - a_n + a_n - b_n + b_n - B \leqslant A - a_n + b_n - B \leqslant |A - a_n| + |B - b_n| < \varepsilon_0$ - противоречие, значит $A \leqslant B$. ■

- Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ бесконечно малая, а последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограниченная, то последовательность $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ бесконечно малая.

- Равносильность определений пределов последовательности.

Доказательство:

1)⇔2) - очев.

2)⇒3):

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \;\; |a_n - A| < \varepsilon$$

Полагая $\alpha_n = a_n - A$, по определению она бесконечно малая.

3)⇒2):

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \;\; |a_n - A| = |A + \alpha_n - A| = |\alpha_n| < \varepsilon$$

■

- Пусть заданы последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = -\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{p_n})^{p_n} = e$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{q_n})^{q_n} = e$

Доказательство:

Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел. По определению числа e:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \;\; |(1 + \frac{1}{n})^n - e| < \varepsilon$$

При всех таких k, что $n_k > N$, выполняется:

$$|(1 + \frac{1}{n_k})^{n_k} - e| < \varepsilon \implies \lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{n_k})^{n_k} = \lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{n_{k+1}})^{n_{k+1}} = e$$

В силу аксиомы Архимеда для любого $p_k > 1$(а их бесконечно много, так как $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$) $\exists n_k : n_k \leqslant p_k < n_k + 1$. Так как $(1 + \frac{1}{n})^n$ неубывает, то

$$(1 + \frac{1}{n_k})^{n_k} \leqslant (1 + \frac{1}{p_k})^{p_k} < (1 + \frac{1}{n_k + 1})^{n_k + 1}$$

По лемме о зажатом пределе $\lim\limits_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{p_k})^{p_k} = e$.

Если последовательность $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$ стремится к $-\infty$, то существует такое N, что при всех $n > N$ $q_n < -1$. При всех таких n положим $q_n = -b_n$, откуда получим:

$$(1 + \frac{1}{q_n})^{q_n} = (1 - \frac{1}{b_n})^{-b_n} = (\frac{b_n}{b_n - 1})^{b_n} = (1 + \frac{1}{b_n - 1})^{b_n - 1} \cdot (1 + \frac{1}{b_n - 1}) \to e$$

■

- Если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность сходится к тому же пределу.

  Таким образом, у последовательности, имеющей предел, этот предел является единственной предельной точкой, или, что равносильно, все частичные пределы совпадают с пределом.

- **(Необходимый признак сходимости ряда)**.

  Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

- **(Критерий сходимости для положительных рядов)**. Если $a_n \geqslant 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда ограничена последовательность его частичных сумм.

  Доказательство:

  $$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow S_{n+1} \geqslant S_n$$

  Поэтому последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ не убывает. Если она ограниченна, то по теореме Вейерштрасса у неё есть предел, то есть ряд сходится по определению. Обратно, если эта последовательность не ограничена, то она стремится к бесконечности $(\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty)$ в силу монотонности, а тогда ряд расходится по определению. ■

- **(Признак сравнения в предельной форме)**. Пусть при всех натуральных n, начиная с некоторого числа $N \in \mathbb{N}$, выполнены неравенства $a_n \geq 0, b_n > 0$, а также $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, причём $A \in (0, +\infty)$. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ или оба сходятся, или оба расходятся.

  Доказательство:

  Так как любое конечное число элементов не влияет на сходимость, то будем считать, что условие выполнено уже при $N = 1$. Пусть $\varepsilon = \frac{A}{2}$. Тогда найдётся такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N_1$ $|\frac{a_n}{b_n} - A| < \frac{A}{2}$, откуда получаем:

  $$\frac{A}{2} b_n < a_n < \frac{3A}{2} b_n$$

  Таким образом, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3A}{2} b_n$, а тогда по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а если расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A}{2} b_n$, а тогда по признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

- (**Мажорантный признак Вейерштрасса**). Пусть при всех натуральных n, начиная с некоторого числа $N \in \mathbb{N}$, выполнены неравенства $|a_n| \le b_n,\ b_n > 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

- (**Итерационная формула Герона**). Пусть $a_1 = a > 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$. По неравенствам о средних $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}) \ge \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a}$, поэтому последовательность ограниченна снизу, а также $a_n^2 \ge a\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}) \le \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}) = a_n$, поэтому последовательность невозрастает, а значит по теореме вейерштрасса для последовательностей, a_n имеет предел, допустим $A = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Тогда перейдём к пределу в равенстве $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$:

$$A = \frac{1}{2}(A + \frac{a}{A}) \Leftrightarrow A^2 = a \Leftrightarrow A = \pm a$$

  По теореме о переходе к пределу в неравенствах из $a_n \ge a \Rightarrow A \ge a$. Значит $A = \sqrt{a}$. Заметим, что $(a_{n+1} \pm \sqrt{a}) = \frac{(a_n \pm \sqrt{a})^2}{2a_n}$, поэтому $\frac{a_{n+1} - \sqrt{a}}{a_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{(a_n - \sqrt{a})^2}{(a_n + \sqrt{a})^2}$. Назовём $\frac{a_1 - \sqrt{a}}{a_1 + \sqrt{a}} = q$. Тогда $|q| < 1$ и $\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} = q^{2^{n-1}}$, откуда получаем, что $a_n = \sqrt{a}\frac{1 + q^{2^{n-1}}}{1 - q^{2^{n-1}}}$. Таким образом, $a_n - \sqrt{a} = \frac{2q^{2^{n-1}}}{1 - q^{2^{n-1}}}\sqrt{a}$. Величина $q^{2^{n-1}}$ стремится к нулю быстрее бесконечно убывающей геометрической прогрессии, что является оценкой скорости сходимости.

- (**Принцип Бореля-Лебега**). В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

  Доказательство:

  Допустим нельзя. Тогда разделим данный отрезок $[a,b] = I_1$ пополам и выберем половину, которая не покрывается конечным множеством интервалов из системы, назовём её I_2, и т.д. Получим последовательность вложенных отрезков, где $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$. По лемме о вложенных отрезках, $\exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}\ \ c \in I_n$. Тогда $c \in I_1$, а значит найдётся интервал (α,β) системы интервалов, содержащий точку c, то есть $\alpha < c < \beta$. Пусть $\varepsilon = min\{c - \alpha, \beta - c\}$. Найдём в построенной последовательности такой отрезок I_n, что $|I_n| < \varepsilon$. Поскольку $c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$, то $I_n \subseteq (\alpha,\beta)$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы. ■

- Любое подмножество вещественной прямой мощности континуум имеет хотя бы одну предельную точку.

  Доказательство:

  Пусть X - данное подмножество вещественной прямой.

  Покроем отрезками $[0,1],[-1,0],[1,2],[-2,-1],[2,3],\ldots$ всю прямую. Хотя бы в одном из этих отрезков бесконечно много элементов множества X. Если это не так, то мы могли бы занумеровать все элементы множества X.

  Допустим в отрезке $[a,b]$ бесконечно много элементов из X. Тогда по принципу Больцано-Вейерштрасса в этом отрезке содержится предельная точка множества X. ■

- Множество X замкнуто $\Leftrightarrow$ множество X содержит все свои предельные точки.

  Доказательство:

  ($\Rightarrow$): Дополнение к этому множеству открыто, значит, у всех точек этого дополнения существуют окрестности, в которых лежат только точки дополнения. Если в любой окрестности некоторой точке $a \in \mathbb{R}$ лежат точки множества X, то точка a не может принадлежать дополнению, а значит множество X содержит все свои граничные, а значит, и предельные точки.

  ($\Leftarrow$): Если X содержит все свои предельные точки, то его дополнение содержит только свои внутренние точки, значит дополнение открыто, а значит, X замкнуто. ■

- (**Первый замечательный предел**). $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

  Доказательство:

  Пусть $x \in (0,\frac{\pi}{2})$.

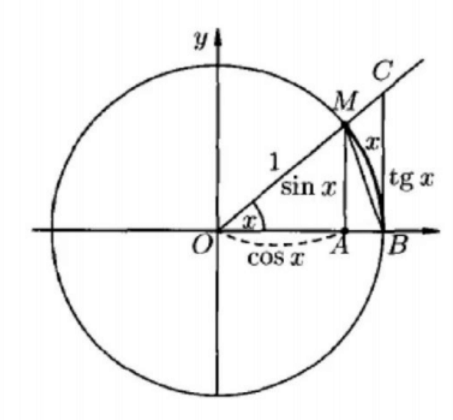

Рис. 1: Первый замечательный предел

Тогда справедливы неравенства:

$$S_{\triangle OMB} < S_{\text{сектор } OMB} < S_{\triangle OCB} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{2} < \pi \cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Leftrightarrow 1 - \cos x > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} > 2\sin\frac{x}{2} > 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0 \Rightarrow |\frac{\sin x}{x} - 1| < |x|$$

Причём последнее неравенство справедливо при всех $x \in (-\frac{\pi}{2},0) \cup (0,\frac{\pi}{2})$.

Если взять произвольное $\varepsilon > 0$, полагая $\delta = min\{\frac{\pi}{2},\varepsilon\}$ (так как неравенство верно при $x \in (-\frac{\pi}{2},0) \cup (0,\frac{\pi}{2})$), получим, что при всех $0 < |x| < \delta$ выполнено $|\frac{\sin x}{x} - 1| < \varepsilon$, а это по определению означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

- (**Второй замечательный предел**). $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

  Доказательство:

  Рассмотрим $x \to +\infty$. Заметим, что:

  $$(1+\frac{1}{n+1})^n = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})} \to e$$

  $$(1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n}) \to e$$

  Т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1\ |(1+\frac{1}{n+1})^n - e| < \varepsilon$, и для этого же ε $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1\ |(1+\frac{1}{n})^{n+1} - e| < \varepsilon$. Поэтому при $N = max\{N_1,N_2\}$ и при $x > 1+N$ имеем $[x] > N$, а тогда:

  $$e - \varepsilon < (1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} < e + \varepsilon$$

  Значит $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 : \forall x \in E : x > N+1\ |(1+\frac{1}{x})^x - e| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

  Теперь рассмотрим $x \to -\infty$. Допустим $y = -x$, тогда $y \to +\infty$, и мы можем применить теорему о пределе композиции:

  $$e = \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y-1} = \lim_{y\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{y-1})^y}{(1+\frac{1}{y-1})} = \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^y =$$

  $$= \lim_{y\to+\infty}(\frac{y}{y-1})^y = \lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y} = \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x$$

  Значит $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

  При $x \to 0$ делаем замену $p = \frac{1}{x}$ и применяем теорему о пределе композиции:

  $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{p\to\infty}(1+\frac{1}{p})^p = e$$

  ■

- $f = o(g), x \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (при этом считаем, что $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a).

- В изолированной точке любая функция, определённая в ней, непрерывна.

- $f \in C(a) \Leftrightarrow f$ непрерывна справа и слева, причём $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$.

- **Локальные свойства непрерывных функций.** Пусть функции f и g определены на множестве E, $a \in E$, $f \in C(a)$, $g \in C(a)$. Тогда выполнены следующие свойства:

  - $\alpha f + \beta g \in C(a)\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
  - $f \cdot g \in C(a)$.
  - если $g(x) \neq 0\ \forall x \in E$, то $\frac{f}{g} \in C(a)$.
  - $\exists M \geq 0,\ \delta > 0 : |f(x)| \leq M\ \forall x \in E \cap U_\delta(a)$.

– если $f(a) \neq 0$, то существует такая окрестность $U_\delta(a)$ точки a, что $|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}$ $\forall x \in E \cap U_\delta(a)$, причём для таких x $f(x) \cdot f(a) > 0$, то есть функция f совпадает по знаку с $f(a)$.

- (**Теорема о композиции непрерывных функций**). Пусть множества E,D,K содержатся в $\mathbb{R}$, $f : E \to D$, $g : D \to K$. Пусть $a \in E$, $f(a) \in D$ и $f \in C(a)$, $g \in C(f(a))$. Тогда функция $g \circ f : E \to K$ непрерывна в точке a.

  Доказательство:

  Через 6 определение непрерывности функции в точке, т.е. через последовательности. ■

- (**Разрыв монотонной на интервале функции**). Монотонная на интервале функция может иметь на этом интервале только разрывы первого рода.

  Доказательство:

  Пусть функция f неубывает на интервале (a,b) (иначе рассмотрим $-f$). Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in (a,b)$. Тогда в силу теоремы Вейерштрасса для функций:

  $$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{x > x_0} = \lim_{x \to x_0 +} f(x)$$

  Таким образом, в любой точке интервала существуют односторонние пределы, но они могут не совпадать, что возможно лишь при разрывах первого рода. ■

- **Непрерывность и монотонность элементарных функций**:

  – Отметим, что $f(x) = x$ непрерывна на всей оси, так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a = f(a)$, поэтому функция $f(x) = x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ непрерывна на всей оси как произведение непрерывных функций.

    Отсюда следует непрерывность многочлена на всей оси, так как любой многочлен представляет собой комбинацию непрерывных функций.

    Пусть $x \geq 0$. Докажем, что $f(x) = x^n$ строго возрастает. Пусть $a > b > 0$, тогда $f(a) = a^n = a^{n-1} \cdot a > a^{n-1} \cdot b > a^{n-2} \cdot b^2 > \dots > b^n = f(b)$, а $f(0) < f(c)$ $\forall c > 0$.

    Из непрерывности и строгой монотонности по теореме об обратной функции следует, что для функции $f(x) = x^n$ существует обратная к f функция $g(x) = \sqrt[n]{x}$. При этом в силу этой же теоремы g непрерывна и возрастает при всех $x \geq 0$.

  – Любая рациональная функция непрерывна во всех точках, где знаменатель не обращается в ноль, как отношение двух непрерывных функций.

  – В любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = a^x$ непрерывна.

    Доказательство:

    Пусть $a > 1$. Нам необходими доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x :$ $|x - x_0| < \delta$ $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon \Leftrightarrow |a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon \cdot a^{x_0} = \varepsilon_1$. Допустим $\varepsilon_1 < 1$, тогда для всех больших ε_1 неравенство будет верно.

Пусть $\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{a+1} > 0$. Так как $-\delta_1 < x - x_0 < \delta_1$ и $a > 1$, то $a^{-\delta_1} < a^{x-x_0} < a^{\delta_1} \Leftrightarrow a^{-\delta_1} - 1 < a^{x-x_0} - 1 < a^{\delta_1} - 1$.

Пусть $N = \left[\frac{1}{\delta_1}\right] = \left[\frac{a+1}{\varepsilon_1}\right] \geq \left[\frac{a+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right] = \left[\frac{a}{\varepsilon_1}\right] + 1 > \frac{a}{\varepsilon_1}$. Так как $N = \left[\frac{1}{\delta_1}\right]$, то $N \leq \frac{1}{\delta_1} \Leftrightarrow \frac{1}{N} \geq \delta_1$. По Бернулли $(1+\varepsilon_1)^N \geq 1 + N\varepsilon_1 > 1 + \frac{a}{\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_1 > a$, значит $1 + \varepsilon_1 > a^{\frac{1}{N}} \geq a^{\delta_1}$. Тогда $a^{\delta_1} - 1 < \varepsilon_1$, $a^{-\delta_1} - 1 > \frac{1}{1+\varepsilon_1} - 1 = -\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} > -\varepsilon_1$, откуда $-\varepsilon_1 < a^{-\delta_1} - 1 < a^{x-x_0} < a^{\delta_1} - 1 < \varepsilon_1$.

Таким образом, $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon_1$, чем и доказана непрерывность функции $f(x) = a^x$ в точке x_0. ■

- В любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \sin x$ непрерывна.

  Доказательство:

  Мы знаем, что $|\sin x| \leq |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$. Тогда $|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}| \leq 2|\sin\frac{x-x_0}{2}| \leq |x - x_0|$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon$ и тогда $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \ \forall x : |x - x_0| < \varepsilon$, что и означает, что $\sin \in C(x_0)$. ■

- **Построение некоторых функций**:
  - Так как $f(x) = e^x$ непрерывна и монотонна на всей прямой, то по теореме об обратной функции существует функция $g(x) = f^{-1}(x)$, отображающая луч $(0, +\infty)$ на $\mathbb{R}$. Её называют **натуральным логарифмом** $g(x) := \ln x, \ x > 0$.

    По теореме об обратной функции она непрерывна, возрастает и $x = e^{\ln x}$, откуда следует $e^{\ln xy} = xy = e^{\ln x}e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$, т.е. $\ln xy = \ln x + \ln y$. $x^a = e^{\ln x^a}$, но $x^a = (e^{\ln x})^a \Rightarrow e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$, т.е. $\ln x^a = a \ln x$. Если $\alpha \in \mathbb{I}$ и $x > 0$, то $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Таким образом, все свойства степенной функции следуют из свойств показательной и логарифмической функций.
  - Если $f(x) = \operatorname{tg} x$, то $f \in C((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ и возрастает на этом интервале, $f(x) = \operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$, поэтому по теореме об обратной функции существует обратная функция $g(x) := \operatorname{arctg} x$, определённая при всех $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, непрерывна и монотонно возрастает на $\mathbb{R}$.

- (**Равносильность дифференцируемости и наличия производной**). Функция f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда в точке a существует производная этой функции $f'(a)$. При этом $df(a)(h) = f'(a)h$. (Пусть $f(x) = x$. Тогда $f(a+h) - f(a) = a+h-a = h = 1 \cdot h + 0 \cdot h$. Из этого представления имеем: $A(a) = 1, \alpha(a,h) = 0, dx(a)(h) = h$). Поэтому дифференциал можно записать в виде $df(a)(h) = f'(a)dx(a)(h)$.

Доказательство:

Необходимость.

$f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)h, \ \lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Так как h принадлежит проколотой окрестности нуля, то мы можем разделить на него: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A + \alpha(h)$. Переходя к пределу при $h \to 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, получим $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A = f'(a)$.

Достаточность.

Если функция f имеет производную, то существует предел: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Значит по определению предела справедливо равенство $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \alpha(h)$, где $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$.

Домножим обе части равенства на h, получим равенство из определения дифференцируемой функции. ■

- Пусть функция f дифференцируема в точке a. Тогда f непрерывна в точке a.

  Доказательство:

  Из определения дифференцируемости имеем: $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + o(x-a) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \to f(a),\ x \to a$, т.е. предел функции в точке a равен её значению в этой точке, что по определению означает непрерывность. ■

- Функция $f(x) = |x|$ недифференцируема в нуле. Действительно, $\lim\limits_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = -1$, а $\lim\limits_{h \to 0+} \frac{|h|}{h} = 1$. Если бы производная в нуле существовала, то эти односторонние пределы были бы равны. Таким образом, у функции $f(x) = |x|$ не существует производной при $x = 0$, что равносильно тому, что эта функция недифференцируема в нуле.

- Пусть $f(x) = e^x$. Найдём $\frac{de^x}{dx}(x)$. По определению:

$$\frac{de^x}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

- Пусть $f(x) = \cos x$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x$$

- (**Пример Вейерштрасса**). Рассмотрим последовательность функций $f_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\sin 8^k x$. При фиксированном x $\sum\limits_{k=0}^{n} |\frac{1}{2^k}\sin 8^k x| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2$, т.е. частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |\frac{1}{2^k}\sin 8^k x|$ ограничены сверху, что по критерию сходимости для рядов с положительными коэффициентами означает сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |\frac{1}{2^k}\sin 8^k x|$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\sin 8^k x$ абсолютно сходится, т.е. по определению сходится его последовательность частичных сумм $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Так как рассуждения справедливы для любого $x \in \mathbb{R}$, то мы можем определить функцию $w(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\sin 8^k x$, определённую для любых вещественных чисел. Кроме того, $|w(x) - f_n(x)| = |\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\sin 8^k x| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = [\log_2(\frac{1}{\varepsilon})]$, что при всех $n > N$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ $|w(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, т.е. $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} w(x)$. Все функции $f_n(x)$ непрерывны, так как представляют собой суммы непрерывных синусов, поэтому по теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности $w(x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$. Можно доказать, что функция $w(x)$ ни в одной точке вещественной прямой не является дифференцируемой.

  Функция $w(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\sin(8^n x)$ называется **функцией Вейерштрасса**.

- (**Правила дифференцирования**). Пусть функции f и g дифференцируемы в точке a. Тогда:

  1. Функция $\alpha f+\beta g$ дифференцируема в точке a при любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и $(\alpha f+\beta g)'(a)=\alpha f'(a)+\beta g'(a)$ (свойство линейности).
  2. $f\cdot g$ дифференцируема в точке a и $(f\cdot g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ (правило Лейбница).
  3. если $g\neq 0$ в некоторой окрестности точки a, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке a и $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

  Доказательство:

  1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\alpha f+\beta g)(a+h)-(\alpha f+\beta g)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}(\alpha\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\beta\frac{g(a+h)-g(a)}{h})=\alpha f'(a)+\beta g'(a)$$

  2)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(g(a+h)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h})=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

  3)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(a+h)g(a)}=$$

$$=\frac{1}{g^2(a)}\cdot\lim_{h\to 0}(g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h})=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

  ■

- $(\operatorname{tg}x)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$.
- $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow(\operatorname{sh}x)'=\frac{1}{2}((e^x)'-(e^{-x})')=\frac{1}{2}(e^x-(\frac{1}{e^x})')=\frac{1}{2}(e^x-\frac{-e^x}{e^{2x}})=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$.
- Пусть $\sin y=x$. Тогда при $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],x\in[-1,1]\quad y=\arcsin x$. Значит по теореме о производной обратной функции: $(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{-\cos(\arcsin x)}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Пусть $e^y=x$, тогда $\ln x=y$. $(\ln x)'=\frac{1}{(e^y)'}=\frac{1}{x}$.

Теоремы:

- На множестве вещественных чисел выполнен принцип полноты.

  Доказательство:

Пусть подмножество A множества вещественных чисел лежит левее подмножества B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B – только из неотрицательных, то эти множества разделяет 0.

Если в A есть положительные числа, то B состоит только из положительных чисел, поэтому минимальное значение целой части десятичных дробей, принадлежащих множеству B, не меньше 0. Выберем среди всех неотрицательных целых чисел, с которых начинаются элементы B в их десятичном представлении, минимальное и обозначим его через b_0. Далее рассмотрим все элементы множества B, начинающиеся с числа b_0, и выберем из чисел в первых разрядах после запятой минимальный. Обозначим его b_1. Теперь рассмотрим все элементы множества B, начинающиеся с $b_0.b_1$ и выберем минимальное из чисел во вторых разрядах (b_2) и т.д.

Построим число $c = c_0.c_1c_2c_3\ldots$, где $c_0 = b_0$,$c_1 = b_1$ и т. д. По построению $c \leqslant b$ для всякого элемента b из B. С другой стороны, если бы нашёлся такой элемент $a \in A$, что $a > c$, то существовал бы разряд k, для которого $a_k > c_k$ и $a_0 = c_0 = b_0, \ldots a_{k-1} = c_{k-1} = b_{k-1}$, что означало бы наличие в A элементов, которые больше элементов из B. Тогда мы бы получили противоречие с тем, что A лежит левее B. Поэтому $a \leqslant c$ для любого $a \in A$, и c разделяет множества A и B. Аналогично для другого случая. ■

- **(Лемма о вложенных отрезках/ Принцип полноты Кантора).**
  1) Пусть дана система M вложенных отрезков. Тогда существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что для любого отрезка $I \in M$ имеем $c \in I$, то есть все отрезки множества M имеют общий элемент c.
  2)Если множество M является последовательностью стягивающихся отрезков, то элемент c единственен.

  Доказательство:

  1)Допустим множества A и B - это множества левых и правых концов отрезов из множества M соответственно. Тогда $a \leqslant b\ \forall a \in A, b \in B$, так как либо отрезок с левым концом a содержится внутри отрезка с правым концом b, либо наоборот. Таким образом, A лежит левее B, поэтому по принципу полноты существует число $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенствам $a \leqslant c \leqslant b$ при всех $a \in A, b \in B$, поэтому c принадлежит всем отрезам из M.

  2)Уже доказано, что общая точка c есть. Предположим, что существует общая точка $c' < c$(если наоборот, то переименуем точки). Тогда длины всех отрезов не могут быть меньше числа $\varepsilon := c - c' > 0$, что противоречит определению последовательности стягивающихся отрезков. Поэтому у стягивающихся отрезков ровно одна общая точка. ■

- **(Арифметика пределов)**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,. Тогда:

  1. $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ \ \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha A + \beta B$
  2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$
  3. Если $B \neq 0$ и $b_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$

  Доказательство:

1),2)-очев. 3) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \implies \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1\ |b_n - B| < \varepsilon; \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2\ |b_n| > \frac{|B|}{2}$

$\implies \forall n > max(N_1,N_2)\ |\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}| = \frac{|B-b_n|}{|B||b_n|} < \frac{2|B-b_n|}{|B|^2} < \frac{2\varepsilon}{|B|^2}$ ■

- **(Лемма о зажатом пределе)**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$ и $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, начиная с некоторого натурального n. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

- Пусть множество A непусто и ограниченно сверху. Тогда существует $\sup A$.

  Доказательство:

  Пусть B - множество всех верхних граней множества A. Оно не пусто, так как множество A ограничено сверху по условию. Из определения ограниченности сверху A левее B. Тогда по принципу полноты существует $c \in \mathbb{R}$, разделяющее A и B, т.е. $a \leq c \leq b\ \forall a \in A, b \in B$, в частности c - наименьшая из верхних граней, что по определению означает, что c - точная верхняя грань. ■

- **(Теорема Вейерштрасса для последовательностей)**. Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

  Доказательство:

  Допустим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ неубывает и множество $A = \{a_1,a_2,a_3,\dots\}$ - множество всех его значений. Так как оно ограниченно сверху, то $\exists a : \forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N} : a_k > a - \varepsilon$ и $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant a < a + \varepsilon$. Так как последовательность неубывает, то при всех $n > k\ \ a_n \geqslant a_k > a - \varepsilon$.

  Таким образом, $\forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k\ \ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, что является определением предела для $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

  Для невозрастающей последовательности рассматриваем $\{-a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, доказываем наличие у неё предела как выше, а тогда существование предела у $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ следует из арифметики пределов. ■

- Последовательность $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ имеет предел.

  Доказательство:

  Ограниченность:

$$(1+\frac{1}{n})^n = C_n^0(\frac{1}{n})^0 + C_n^1(\frac{1}{n})^1 + C_n^2(\frac{1}{n})^2 + \dots + C_n^n(\frac{1}{n})^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{n^n} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})$$

$$\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}) \leqslant \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\Longrightarrow a_n \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 3$$

Монотонность:

$$(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}) \leqslant (1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\dots(1-\frac{k-1}{n+1})$$

$$\Longrightarrow a_n = 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}) \leqslant 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\dots(1-\frac{k-1}{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\dots(1-\frac{k-1}{n+1}) = a_{n+1}$$

Доказано неубывание и ограниченность сверху.

Тогда по теореме Вейерштрасса у последовательности есть предел. ■

- **(Теорема Больцано-Вейерштрасса)**. Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство:

Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена, то:

$$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \; |a_n| \leqslant C$$

Значит, все элементы последовательности содержатся в отрезке $[-C,C]$. Разделим этот отрезок пополам. Хотя бы в одном из получившихся отрезков содержится бесконечно много элементов нашей последовательности. Выберем отрезок, в котором содержится бесконечно много элементов, и назовём его I_1. Выберем какой-либо элемент $a_{n_1} \in I_1$ и положим $b_1 = a_{n_1}$. Разобъём отрезок I_1 пополам и выберем половину, которая содержит бесконечно много элементов последовательности. Назовём его I_2 и выберем $a_{n_2} \in I_2$ так, чтобы $n_2 > n_1$, и положим $b_2 = a_{n_2}$. Разобъём отрезок I_2 пополам и выберем половину, которая содержит бесконечно много элементов последовательности. Назовём его I_3 и выберем $a_{n_3} \in I_3$ так, чтобы $n_3 > n_2$, и положим $b_3 = a_{n_3}$. Продолжая этот процесс, построим последовательность вложенных отрезков $\{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$ и последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$, причём $b_k \in I_k$ и $\{b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

При этом $|I_k| = \frac{2C}{2^k} \to 0, k \to +\infty$, поэтому последовательность вложенных отрезков $\{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$ является стягивающейся и имеет единственную общую точку, назовём её b, причём для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших k выполнены неравенства:

$$|b_k - b| \leqslant \frac{2C}{2^k} < \frac{2C}{2^{k-1}} < \varepsilon$$

поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$. Таким образом, мы выбрали подпоследовательность последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, имеющую предел. ■

- Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ являются частичными пределами этой последовательности и все частичные пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ принадлежат отрезку $[\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n]$

  Доказательство:

  $M_n = \sup\limits_{k>n} a_k$. Выберем $b_1 = a_{n_1} = a_1$. Пусть выбран элемент $b_k = a_{n_k}$. Выберем элемент $a_{n_{k+1}}$:
$$M_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leqslant M_{n_k}$$
  При этом $1 = n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_m < \ldots$. По определению верхнего предела, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} M_n = M$, а тогда любые подпоследовательности последовательности $\{M_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходятся к тому же пределу. Таким образом:
$$M = \lim_{k\to+\infty} M_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} (M_{n_k} - \frac{1}{k+1})$$
  Тогда по лемме о зажатом пределе $M = \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k}$, то есть верхний предел является частичным пределом последовательности. Доказательство для нижнего предела полностью аналогично.

  Докажем, что любой частичный предел a лежит на отрезке $[\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n]$.

  По определению найдётся такая подпоследовательность $\{a_{n_l}\}_{l=1}^{+\infty}$, которая сходится к a. Тогда $m_{n_{l-1}} \leqslant a_{n_l} \leqslant M_{n_{l-1}}$, поэтому по теореме о предельном переходе в неравенствах: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \leqslant a \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$

  Таким образом, если последовательность ограничена, то у неё есть верхний и нижний пределы, которые являются частичными пределами, то есть найдутся подпоследовательности, сходящиеся к ним. Это рассуждение может служить ещё одним доказательством **теоремы Больцано-Вейерштрасса**. ■

- Ограниченная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда у неё только один частичный предел.

- **(Критерий Коши)**. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

  Доказательство:

  $(\Rightarrow)$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при любых $n,m > N$: $|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leqslant |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, то есть для $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ выполнено определение фундаментальностой последовательности.

  $(\Leftarrow)$: При $\varepsilon = 1$ найдётся $N \in \mathbb{N}$, что при $n = N+1, m > N$ $|a_m - a_{N+1}| < 1 \Leftrightarrow a_{N+1} - 1 < a_m < a_{N+1} + 1$. Так как N - фиксированное число, то можно утверждать, что, начиная с номера $N+1$, наша последовательность ограничена числом $|a_{N+1} + 1|$. Тогда при всех натуральных n элементы последовательности $|a_n| \leqslant max\{|a_1|,|a_2|,|a_3|,\ldots,|a_{N-1}|,|a_N|,|a_{N+1}+1|\}$. Значит, последовательность ограничена.

В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса найдётся сходящаяся подпоследовательность $b_k = a_{n_k}$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Обозначим её предел A.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \;\; |b_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Для этого же ε $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n,m > N_2 \;\; |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $M := max\{N_1, N_2\}$, тогда при всех $n > M$ и $n_k > M$:

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказывает равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. ■

- **(Критерий Коши сходимости ряда)**. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что при любом $n > N$ и любом $p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

- **(Признак сравнения)**. Пусть при всех натуральных n, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

  Доказательство:

  Так как любое конечное число элементов не влияет на сходимость, будем считать, что условия выполнены уже с $n = 1$. Тогда $A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = B_n$ при всех натуральных n. В силу критерия сходимости для положительных рядов:

  – Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то последовательность его частичных сумм $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена, а тогда ограничена и последовательность частичных сумм $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

  – Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то последовательность его частичных сумм $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ не ограничена, а тогда не ограничена и последовательность частичных сумм $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty}$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

  ■

- **(Признак разрежения Коши)**. Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ не возрастает и $a_n \geq 0$ при любом натуральном n, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

  Доказательство:

В силу невозрастания последовательности:

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n} \le a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{2^n} \le 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^n a_{2^n}$$

Таким образом, ограниченность частичных сумм одного из рядов в условии равносильна ограниченности частичных сумм и другого, то есть они или вместе сходятся, или вместе расходятся. ■

- **(Признак Даламбера)**. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$. Тогда:

  1. Если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.
  2. Если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.
  3. Если $q = 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как абсолютно сходится, так и расходится.

Доказательство:

1) Если $q < 1$, то существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $q < \alpha < 1$, и по определению предела существует такое $N \in \mathbb{N}$, что что при всех $n > N$ $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \alpha$. Так как отбрасывание любого числа первых элементов ряда не влияет на сходимость, то будем считать, что уже при $n = 1$ выполнено неравенство $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \alpha$. Тогда:

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1}| = |\frac{a_{n+1}}{a_1}| < \alpha^n$$

Таким образом, при любом $n \ge 1$ выполнено неравенство $|a_{n+1}| < |a_1|\alpha^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_1|\alpha^n$ сходится, так как это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, а значит по признаку сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2) В этом случае существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, откуда $|a_{n+1}| > |a_n|$, поэтому общий член ряда не стремится к 0, то есть не выполнен необходимый признак и ряд расходится.

3) Примеры рядов, которые сходятся и расходятся: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1})^2 = 1$, причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. ■

- **(Радикальный признак Коши)**. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. Тогда:

  1. Если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.
  2. Если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

3. Если $q = 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как абсолютно сходится, так и расходится.

Доказательство:

1) Если $q < 1$, то существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $q < \alpha < 1$, и по определению верхнего предела существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ $|a_n| < \alpha^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ сходится, так как это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, а тогда по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2) В этом случае существует подпоследовательность последовательности $\{|a_n|\}_{n=1}^{+\infty}$, сходящаяся к числу $q > 1$, поэтому существует бесконечно много элементов $|a_{n_k}|$ последовательности $\{|a_n|\}_{n=1}^{+\infty}$, которые больше 1, откуда следует, что не выполнен необходимый признак($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$), поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

3) Приведём примеры рядов, которые сходятся или расходятся при данных условиях:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$

Причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. ■

- **(Теорема Штольца)**. Пусть $y_{n+1} > y_n > 0$ при всех натуральных n и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, а также $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.
- **(Принцип Больцано-Вейерштрасса)**. Любое бесконечное ограниченное числовое множество имеет хотя бы одну предельную точку.

Доказательство:

Два способа доказательства:

– Прямое следствие из теоремы Больцано-Вейерштрасса, так как можно выделить последовательность из элементов этого множества, тогда эта последовательность будет ограничена.

– Пусть X - данное подмножество $\mathbb{R}$. Из определения ограниченности множества X следует, что X содержится в некотором отрезке $[a,b] = I \subset \mathbb{R}$.

  Если X не имеет предельных точек, то каждая точка $x \in I$ имела бы окрестность $U(x)$, в которой либо вообще нет точек, либо их там конечное число. Совокупность таких окрестностей, построенных для каждой точки $x \in I$, образует покрытие отрезка I интервалами $U(x)$, из которого по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему $U(x_1), \ldots, U(x_n)$ интервалов, покрывающую отрезок I. Но поскольку $X \subset I$, эта же система покрывает всё множество X. Однако в каждом интервале $U(x_i)$ только конечное количество точек множества X, значит, в их объединении тоже конечное число точек X, то есть X - конечное множество. Противоречие.

■

- **Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны**.

  Доказательство:

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A.$

  1) Коши $\Rightarrow$ Гейне.

  По Коши $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)\ \ |f(x) - A| < \varepsilon.$ Рассмотрим $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$: $a_n \in E \setminus \{a\}\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \to a$ при $n \to +\infty$. Так как $a_n \to a$ при $n \to +\infty$, то найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N\ \ a_n \in E\cap\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, тогда $|f(a_n)-A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = A$. Так как мы взяли произвольную последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ с нужными свойствами и показали, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = A$, то это и означает наличие того же предела A по Гейне.

  2) Гейне $\Rightarrow$ Коши.

  По Гейне $\forall\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} : a_n \in E\setminus\{a\}\ \forall n \in \mathbb{N}\wedge \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a\ \ \ \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = A$. Будем рассуждать от противного: пусть A не является пределом функции по Коши, то есть $\exists\varepsilon > 0 :$ $\forall\delta > 0\ \ \exists x \in E\cap\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, для которого $|f(x)-A| \geq \varepsilon$. Пусть $\delta_n = \frac{1}{n}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $b_n \in E\cap\overset{\circ}{U}_{\delta_n}(a)$, что $|f(b_n)-A| \geq \varepsilon$. Таким образом, мы можем построить такую последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ (если какие-то b_n совпали, то просто вычёркиваем их, они не могут совпасть все, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ и $b_n \neq a$, поэтому по лемме об отделимости и т.д.), что $b_n \in E \setminus \{a\}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ и при этом $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$. Тогда по Гейне $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = A$. Тогда мы можем перейти к пределу в неравенстве $|f(b_n) - A| \geq \varepsilon$ при $n \to +\infty$, получим $|A-A| = 0 \geq \varepsilon$ - противоречие. Значит определение предела по Коши выполняется, ч.т.д. ■

- (**Свойства пределов**). Пусть функции f,g,h определены на некотором множестве $E \subseteq \mathbb{R}$, a - предельная точка множества E. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда:

  1. A - единственный предел функции f (**единственность предела**).
  2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B,\ \ \lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B,\ \ \lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}\ \ (g(x) \neq 0\ \ \forall x \in E, B \neq 0)$ (**арифметика пределов**).
  3. Если $f(x) \leq g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a (из множества E), то $A \leq B$ (**предельный переход в неравенствах**).
  4. Если существует такая $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, что $f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \ \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ и $A = B$, то $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$ (**лемма о зажатом пределе**).
  5. Существуют такие $\delta > 0$ и $C \geq 0$, что $|f(x)| \leq C\ \ \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ (**ограниченность функции, имеющей предел**).
  6. Если $A \neq 0$, то существует такая $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, что $|f(x)| \geq \frac{|A|}{2}\ \ \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ (**лемма об отделимости**).

Доказательство:

Свойства 1) - 4) следуют из определения предела по Гейне.

5) Из определения по Коши следует, что при $\varepsilon = 1$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ ||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + |A|$$

6) Из определения по Коши следует, что при $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |f(x)| > \frac{|A|}{2}$$

■

- *(**Теорема о пределе композиции**). Пусть функция g определена на множестве D, b - предельная точка множества D и $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A \ \ (y \in D)$. Пусть также функция $f : E \to D \setminus \{b\}$, a - предельная точка множества E и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \ \ (x \in E)$. Пусть для любого множества $D \cap \overset{\circ}{U}_\tau(b) \ \ (\tau > 0)$ найдётся множество $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ (\delta > 0)$, образ которого $f(E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)) \ \ (\delta > 0)$ при функции f содержится в $D \cap \overset{\circ}{U}_\tau(b) \ \ (\tau > 0)$. Тогда сложная функция $g \circ f$ определена на множестве E и $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = A$.

Доказательство:

Так как g определена на множестве D, а $f : E \to D \backslash b$, то $g \circ f$ определена на множестве E.

Так как $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A \ \ (y \in D)$, то $\forall \, V_\varepsilon(A) \ \ \exists \overset{\circ}{U}_\tau(b) : \forall y \in D \cap \overset{\circ}{U}_\tau(b) \ \ g(y) \in V_\varepsilon(A)$. По условию найдётся множество $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ (\delta > 0)$, образ которого $f(E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ (\delta > 0))$ при функции f содержится в $D \cap \overset{\circ}{U}_\tau(b) \ \ (\tau > 0)$. Таким образом, $\forall \, V_\varepsilon(A) \ \ \exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ g(f(x)) \in V_\varepsilon(A)$, т.е. по определению $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = A$. ■

* вне коллка.

- (**Критерий Коши для предела функций**). Пусть функция f определена на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и пусть a - предельная точка множества E. Функция f имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых чисел $x, y \in E$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - a| < \delta, \ \ 0 < |y - a| < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Через кванторы:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Доказательство:

Необходимость.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ \ |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $y \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то $|f(x) - f(y)| = |f(x) - A + A - f(y)| \leq |f(x) - A| + |f(y) - A| < \varepsilon$.

Достаточность.

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такова, что $a_n \in E \setminus \{a\}\ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Тогда при любом $\delta > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ при всех $n > N$, из чего в силу условия следует, что последовательность $\{f(a_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ фундаментальна, а тогда существует предел этой последовательности, назовём его $A = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$, для которой выполнены те же условия: $b_n \in E \setminus \{a\}\ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$. Если мы докажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = A$, то мы получим, что для всех последовательностей с заданными условиями предел равен A, что по определению по Гейне означает, что предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен A. Отметим, что последовательность $\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\ldots,a_n,b_n,\ldots\}$ также сходится к числу a, поэтому при любом $\delta > 0$ найдётся такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что и a_n, и b_n принадлежат множеству $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ при всех $n > N_1$, поэтому последовательность $\{f(a_1),f(b_1),f(a_2),f(b_2),\ldots,f(a_n),f(b_n),\ldots\}$ фундаментальна, значит у неё есть предел. Поэтому у этой последовательности все частичные пределы совпадают с пределом последовательности. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = A$, то все частичные пределы равны A, поэтому подпоследовательность $\{f(b_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к тому же пределу, что и завершает доказательство. ■

- (**Теорема Вейерштрасса для функций**).

  1) Пусть функция f неубывающая и ограниченная на множестве E. Пусть a - предельная точка множества E_a^-. Тогда существует предел слева функции f в точке a и имет место равенство $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \sup\limits_{x\in E_a^-} f(x)$.

  2) Пусть функция f неубывающая и ограниченная на множестве E. Пусть a - предельная точка множества E_a^+. Тогда существует предел справа функции f в точке a и имет место равенство $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \inf\limits_{x\in E_a^+} f(x)$.

  3) Пусть функция f невозрастающая и ограниченная на множестве E. Пусть a - предельная точка множества E_a^-. Тогда существует предел слева функции f в точке a и имет место равенство $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \inf\limits_{x\in E_a^-} f(x)$.

  4) Пусть функция f невозрастающая и ограниченная на множестве E. Пусть a - предельная точка множества E_a^+. Тогда существует предел справа функции f в точке a и имет место равенство $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \sup\limits_{x\in E_a^+} f(x)$.

Доказательство:

1) По определению супремума, $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in E_a^- : M - \varepsilon < f(x_0) \leq M$, где $M := \sup\limits_{x\in E_a^-} f(x)$. Так как f неубывающая, то $\forall x \in E_a^- : x > x_0$ выполнены неравенства $M - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq M \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - M \leq 0 \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - M < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$, т.е. при любом $\varepsilon > 0$ мы нашли такое $\delta := a - x_0 > 0$, что при всех $x \in E_a^- \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполнено неравенство $|f(x) - M| < \varepsilon$, что по определению означает $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \sup\limits_{x\in E_a^-} f(x)$.

2,3,4) Аналогично. ■

- (**Теорема о нуле непрерывной функции**). Пусть функция $f \in C([a,b])$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in [a,b] : f(c) = 0$.

- (**1-я теорема Вейерштрасса**). Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда она ограниченна на этом отрезке.

  Доказательство:

  Допустим функция не ограничена. Тогда для каждого натурального n существует такая точка $x_n \in [a,b]$, что $|f(x_n)| > n$.

  Все элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ принадлежат отрезку $[a,b]$, то есть последовательность ограниченна, а значит по теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся к некоторому числу c подпоследовательность $c_k = x_{n_k}$, причём $c \in [a,b]$ в силу предельного перехода в неравенствах.

  При этом $|f(c_k)| > n_k$ по построению, поэтому в точке c у функции не существует конечного предела, что противоречит непрерывности этой функции.

  Замечание.

  Также можно провести доказательство через принцип Бореля-Лебега, так как у каждой точки есть интервал, в котором функция ограничена, по определению непрерывности, и т.д. ■

- (**2-я теорема Вейерштрасса**). Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a,b]$, что $f(x_1) = m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$ и $f(x_2) = M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$.

  Доказательство:

  Проведём доказательство для супремума.

  Допустим точка x_2 не найдётся. Тогда $M - f(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$. Рассмотрим функцию g, которая в каждой точке $x \in [a,b]$ принимает значение $\frac{1}{M - f(x)}$. В силу локальных свойств непрерывных функций g непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]$, тогда она непрерывна на всём отрезке по определению, тогда по 1-ой теореме Вейерштрасса g ограничена на отрезке $[a,b]$.

  По определению супремума $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in [a,b] : f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$. При $\varepsilon = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N} \ f(x_{\frac{1}{n}}) > M - \frac{1}{n} \Leftrightarrow g(x_{\frac{1}{n}}) > n$, т.е. функция g не ограничена на отрезке - противоречие.

  Аналогично для инфимума. ■

- (**Теорема Коши о непрерывной функции**). Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $= M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$. Тогда для любого числа $C \in [m,M]$ существует такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = C$.

  Доказательство:

Если $C = m$ или $C = M$, то доказано по 2-й теореме Вейерштрасса. Если $C \in (m,M)$, то функция $g := f - C$ непрерывна на отрезке $[x_1,x_2]$ (неориентированный, x_1,x_2 - точки минимума и максимума функции f соответственно) и $g(x_1) = m - C < 0$, а $g(x_2) = M - C > 0$, т.е. для функции g на отрезке $[x_1,x_2]$ выполнены условия теоремы о нуле непрерывной функции, значит найдётся такая точка $c \in [x_1,x_2]$, что $g(c) = 0$, т.е. $f(c) = C$. ■

- (**Теорема Гейне-Кантора о равномерной непрерывности**). Функция f, непрерывная на отрезке $[a,b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство:

1. **Через принцип Бореля-Лебега.**

   Так как функция f непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]$, то она имеет предел в каждой точке, значит в силу критерия Коши для предела функций при всяком $\varepsilon > 0$ для каждой точки $x_0 \in [a,b]$ найдётся такая окрестность $U_\delta(x_0)$, что при всех $x,y \in U_\delta(x_0)$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (пояснение: в критерии Коши берётся проколотая окрестность, но здесь её можно опустить, так как при $x = y = x_0$ неравенство верно всегда, а при $y = x_0,\ x \neq x_0$ имеем предел, который выполнен по непрерывности). Отметим, что δ зависит от выбранной точки x_0. Все окрестности вида $U_{\delta/2}(x)$ покрывают отрезок $[a,b]$, так как каждая точка принадлежит своей окрестности.

   По принципу Бореля-Лебега из системы всех окрестностей можно выделить конечную систему, также покрывающую отрезок $[a,b]$. Обозначим эти окрестности: $U_{\delta_i/2}(x_i)$, где $i = 1,2,\ldots,n$.

   Положим $\delta = min\{\frac{\delta_1}{2},\frac{\delta_2}{2},\ldots,\frac{\delta_n}{2}\}$ и докажем, что для любых таких точек $x',x'' \in [a,b]$, что $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Так как система интервалов покрывает весь отрезок, то найдётся $U_{\delta_j/2}(x_j) : x' \in U_{\delta_j/2}(x_j)$.

   Тогда $|x'' - x_j| \leq |x' - x_j| + |x'' - x'| < \delta_j/2 + \delta/2 \leq \delta_j$, т.е. $x'' \in U_{\delta_j}(x_j)$, но и $x' \in U_{\delta_j/2}(x_j) \subset U_{\delta_j}(x_j)$, значит для них выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, ч.т.д.

2. **Через теорему Больцано-Вейерштрасса.**

   Допустим функция f не является равномерно непрерывной на отрезке $[a,b]$. Тогда существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любого натурального числа n найдутся такие точки $x_n \in [a,b]$ и $y_n \in [a,b]$, что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, но $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

   Так как все элементы последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty},\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ принадлежат отрезку $[a,b]$, то последовательности ограниченны, значит по теореме Больцано-Вейерштрасса из них можно выбрать сходящиеся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty},\{y_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$. Так как при $n \to +\infty$ $|x_n - y_n| \to 0$, то пределы этих подпоследовательностей при $k \to +\infty$ совпадают. Пусть эти пределы равны $x_0 \in [a,b]$ по предельному переходу в неравенствах. Значит функция f непрерывна в точке x_0, тогда в силу определения по Гейне непрерывной функции при любом $\varepsilon > 0$ $|f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f(y_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если взять $\varepsilon = \varepsilon_1$, то

   $$\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} > |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(y_{n_k}) - f(x_0)| \geq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_1$$

   противоречие.

■

- (**Критерий непрерывности монотонной функции**). Монотонная на отрезке $[a,b]$ функция f, непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда множеством её значений является отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.

  Доказательство:

  Необходимость.

  Если $c \in [a,b]$, то $f(c)$ лежит между $f(a)$ и $f(b)$ в силу монотонности. Тогда по теореме Коши о непрерывной функции функция f принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Тем самым доказано, что область значения функции f - это отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.

  Достаточность.

  Допустим f неубывает и разрывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то существуют правый и левый предел соответственно, а значит это разрыв первого рода. Если $x_0 \in (a,b)$, то по лемме о разрыве монотонной на интервале функции это разрыв первого рода, т.е. в точке разрыва существуют левый и правый пределы, но они не равны между собой, и хоть один не равен $f(x_0)$: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = A \neq B = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$. Тогда хоть один интервал $(A,f(x_0)),(f(x_0),B)$ непуст и в нём нет значений функции f. В силу монотонности функции f этот интервал содержится в отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, поэтому этот отрезок не входит целиком в область значений функции f - противоречие. $\blacksquare$

- (**Теорема об обратной функции**). Непрерывная и строго монотонная на отрезке $[a,b]$ функция f биективно отображает этот отрезок на отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$, а функция f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, причём характер монотонности функций f и f^{-1} одинаковый.

  Доказательство:

  Образом функции f является отрезок с концами $f(a), f(b)$ по критерию непрерывности монотонной функции, а биекция происходит в силу строгой монотонности: двум разным значениям функции соответствуют два разных аргумента. Таким образом $\exists f^{-1}$.

  Если f возрастает, то $\forall x_1,x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \;\; f(x_1) < f(x_2)$, но $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2))$, т.е. $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)$, значит f^{-1} тоже возрастает, аналогично с убыванием. По определению функция f^{-1} определена на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, а областью значений является отрезок $[a,b]$, поэтому по критерию непрерывности монотонной функции она непрерывна на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$. $\blacksquare$

- (**Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности**). Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \;\; f_n(x) \in C(x_0) \;\; x_0 \in X$. Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Тогда $f(x) \in C(x_0)$.

- (**Теорема о производной сложной функции**). Пусть функция f дифференцируема в точке a, а функция g дифференцируема в точке $f(a)$. Тогда функция $g \circ f$ дифференцируема в точке a и $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Доказательство:

$g(f(a)+q)-g(f(a)) = g'(f(a))q+\beta(q)q,\ \lim\limits_{q\to 0}\beta(q) = 0$. Так как q - произвольное приращение, которое стремится к нулю, мы можем положить $q = f(a+h)-f(a)$. Для того чтобы равенство не нарушилось, если приращение f равно нулю, доопределим $\beta(0) := 0$, т.е. доопределим функцию β в нуле по непрерывности. Это можно сделать, так как о значении бесконечно малой в определении дифференцируемости ничего не сказано, поэтому такое доопределение не нарушает определение.

Тогда в силу дифференцируемости функции f (из которой вытекает, что $f(a+h)-f(a) = f'(a)h+\alpha(h)h,\ \lim\limits_{h\to 0}\alpha(h) = 0$) в точке a получим:

$$g(f(a+h))-g(f(a)) = g'(f(a))(f(a+h)-f(a))+(\beta(f(a+h)-f(a)))\cdot(f(a+h)-f(a)) =$$

$$= g'(f(a))(f'(a)h+\alpha(h)h)+(\beta(f'(a)h+\alpha(h)h))\cdot(f'(a)h+\alpha(h)h) =$$

$$= g'(f(a))f'(a)h+g'(f(a))\alpha(h)h+(\beta(f'(a)h+\alpha(h)h))\cdot(f'(a)h+\alpha(h)h) =$$

$$= g'(f(a))f'(a)h+\delta(h)h$$

Мы использовали обозначение $\delta(h) = g'(f(a))\alpha(h)h+(\beta(f'(a)h+\alpha(h)h))\cdot(f'(a)h+\alpha(h)h)$, а отсюда по арифметике пределов из-за того, что α и β бесконечно малые при $h\to 0$, следует, что $\lim\limits_{h\to 0}\delta(h) = 0$. Таким образом, для функции $g\circ f$ получим при достаточно малых h:

$$g(f(a+h))-g(f(a)) = g'(f(a))f'(a)h+\delta(h)h$$

что даёт дифференцируемость функции $g\circ f$ в точке a по определению. Так как существование производной и дифференцируемость функции в точке равносильны, то $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

■

- (**Инвариантность формы первого дифференциала**). В точке y мы можем записать дифференциал функции f в виде $df(y) = f'(y)dy$, а теорема о производной сложной функции тогда в терминах дифференциалов запишется так (в точке x):
$df(x)(g) = f'(g(x))g'(x)dx = f'(g(x))dg(x) = f'(y)dy$, где мы положили $y = g(x)$. Таким образом, вне зависимости от того, является ли y независимой переменной или функцией, форма (то есть вид) первого дифференциала внешне не меняется.

- (**Теорема о производной обратной функции**). Пусть f - непрерывная и строго монотонная функция, отображающая интервал I в интервал J. Пусть также f дифференцируема в точке $a\in I$ и $f'(a)\neq 0$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $b = f(a)$ и $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Доказательство:

Существование, непрерывность и монотонность следуют из теоремы об обратной функции. Воспользуемся определением производной, считая, что аргумент функции f^{-1} получает приращение q, а затем положим $q = f(a+h)-f(a)$ и воспользуемся теоремой о пределе композиции, а также арифметикой пределов:

$$\lim_{q\to 0}\frac{f^{-1}(f(a)+q)-f^{-1}(f(a))}{q} = \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(f(a+h))-f^{-1}(f(a))}{f(a+h)-f(a)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{f(a+h)-f(a)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{f(a+h)-f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

При этом $f(a+h)-f(a)\neq 0$ при $h\neq 0$, так как функция f строго монотонна. ■

Факты:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},\ p \leqslant 1$ - расходится.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},\ p > 1$ - сходится.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то:
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n} = a$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = a,\ a_n > 0$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\alpha_n}{n \cdot n!},\ 0 < \alpha_n < 1$
- - Если $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $b_n = (1+\frac{1}{n})^n$, то a_n не возрастает, b_n не убывает и $a_k \geq b_m$ при всех натуральных k,m, а также $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$.
  - Если $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$, то a_n не возрастает, b_n не убывает и $a_k \geq b_m$ при всех натуральных k,m, а также $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
  - Если $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$, $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$, то a_n не возрастает, b_n не убывает и $a_k \geq b_m$ при всех натуральных k,m, а также $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
- Если $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$
- Если $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ выполнено $|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|,\ q \in (0,1)$, то последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится.
- Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, то её множество частичных пределов: $[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n, \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n]$.
- $|\sin x| \leq |x|,\ x \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^a - 1}{ax} = \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$
- Асимптотические равенства при $x \to 0$:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{2n-2}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n})$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\cdot x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n + o(x^n),\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Равенства верны также для $t = \alpha(x) \to 0,\ x \to 0$ по теореме о пределе композиции.

- $\{x^n\}_{n=1}^{+\infty}$ - неравномерно сходящаяся последовательность функций.
- $\{\frac{x^n}{n}\}_{n=1}^{+\infty}$ - равномерно сходящаяся последовательность функций.
- Таблица производных:

  1. $C' = 0\ \forall C = const$
  2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
  3. $(e^x)' = e^x$
  4. $(a^x)' = a^x \ln a$
  5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
  6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
  7. $(\sin x)' = \cos x$
  8. $(\cos x)' = -\sin x$
  9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
  10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}^2 x - 1$
  11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
  14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
  15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
  16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$