Математический анализ

Основа

Корняков Санан

БПМИ223

January 12, 2023

Оглавление

1 Определения

1.1 Точки локального экстремума

Если функция f определена на множестве E, точка $a \in E$ и при всех $x \in U^\circ_\delta(a) \cap E$, выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(a)$, то a называется точкой локального минимума. Если при всех тех же $x \in U^\circ_\delta(a) \cap E$ $f(x) \leqslant f(a)$, то a называется точкой локального максимума. Если неравенство строгое, то a называется точкой строгого локального максимума или минимума соответственно. Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума или, соответственно, строгого локального экстремума.

1.2 Производная функции n-го порядка

Если у функции f в точке a существует производная $n-1$-го порядка $f^{(n-1)}$, причём эта производная представляет собой определённую в некоторой окрестности точки a и дифференцируемую в самой точке a функцию, то производня функции порядка n в точке a - это производня функции $f^{(n-1)}$ в точке a: $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'(a)$. В терминах пределов: $f^{(n)}(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}$.

1.3 Многочлен Тейлора

Многочленом Тейлора n раз дифференцируемой в точке a функции f называется многочлен

$$T_n(x) = T_n(x; f,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

1.4 Ряд Тейлора

Пусть функция f бесконечно дифференцируема в точке a. Рядом Тейлора функции f называется формальная бесконечная сумма $\sum\limits_{\infty}^{n=0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)$..

1.5 Аналитическая функция

Функция вещественной переменной называется аналитической, если она бесконечно дифференцируема в любой точке $a \in E$ и её ряд Тейлора, построенный в этой точке, сходится к ней при всех x из некоторой окрестности точки a.

1.6 Выпуклость функции

Функция f, определённая на интервале (a,b), называется выпуклой (выпуклой вниз) на этом интервале, если для любых точек $x_1,x_2 \in (a,b)$ и любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполнено неравенство:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Если при тех же условиях выполнено противоположное неравенство, то функцию f называют вогнутой (выпуклой вверх) на интервале (a,b).

1.7 Точка перегиба

Пусть функция f имеет n производных в точке a, причём производные со второй по $n-1$-ю равны нулю, а производная порядка n отлична от нуля (о первой производной нет доп. предположений). Запишем локальную формулу Тейлора для функции f в точке a:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x \to a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x \to a$$

Слева стоит разность значений функции f и касательной к графику этой функции в точке a. Аналогично доказательству из теоремы 3.10, в достаточно малой окрестности точки a левая часть не меняет знак при чётном n и этот знак совпадает со знаком $f^{(n)}(a)$. Таким образом, график функции f в достаточно малой окрестности лежит или над касательной, или под ней.

Если же n нечётное, то знак разности меняется при переходе через точку a. Если в некоторых левом и правом интервалах, с общим концом a, направление выпуклости не меняется, то функция f в точке a имеет перегиб, а саму точку a называют точкой перегиба.

1.8 Вертикальная асимптота

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции f, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

1.9 Наклонная асимптота

Прямая $y = \alpha x + \beta$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$, если $f(x) = \alpha x + \beta + o(1),\ x \to +\infty$. При $x \to -\infty$ аналогично.

1.10 Схема построения графика функций

1. Найти область определения.
2. Исследовать функцию на чётность, периодичность, промежутки знакопостоянства. Найти точки пересечения графика с осями координат.
3. Исследовать значения функции на границах области определения, определить характеры точек разрыва и найти вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные асимптоты.
5. Определить промежутки монотонности и найти экстремумы.
6. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
7. Построить график функции.

2 Леммы и Предложения

2.1 1-е следствие теоремы Лагранжа

Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$. Тогда функция f постоянна на (a,b).

Доказательство:

Пусть $x_1,x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$. Тогда на отрезке $[x_1,x_2]$ действует теорема Лагранжа, поэтому $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1,x_2)$. По условию $f'(c) = 0$, поэтому $f(x_1) = f(x_2)$. Так как рассуждение верно для любых точек на интервале (a,b), то, зафиксировав x_1 и беря произвольные точки $x_2 \in (a,b)$, получаем, что во всех точках данного интервала функция f принимает одинаковые значения. ■

2.2 2-е следствие теоремы Лагранжа

Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда верны следующие утверждения:

1) Функция f не убывает на этом интервале $\Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0\ \forall x \in (a,b)$.

2) Функция f не возрастает на этом интервале $\Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0\ \forall x \in (a,b)$.

Доказательство:

Проведём доказательство для неубывающей функции.

$(\Rightarrow)$: Для любых точек $x_1,x_2 \in (a,b)$ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant 0$. Зафиксировав точку x_1, получим по предельному переходу в неравенствах, что

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) = 0$$

В силу произвольности точки x_1 получаем, что f' неотрицательна в каждой точке интервала.

$(\Leftarrow)$: По теореме Лагранжа $\forall x_1,x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2\ f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0$. ■

2.3 Обобщённое правило Лейбница

Пусть функции u и v n раз дифференцируемы в точке a. Тогда их произведение также n раз дифференцируемо в точке a, и

$$(u \cdot v)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(a) v^{(n-k)}(a)$$

2.4 Остаточные члены формулы Тейлора

Определение: $R_n(x; f,a) := f(x) - T_n(x; f,a)$.

- **Форма Пеано**:
$$o((x-a)^n),\ x \to a$$

- **Общая форма**:
$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n! g'(c)} (g(x) - g(a))(x-c)^n$$
где c - точка из интервала с концами a и x.

- **Форма Шлёмильха-Роша**, $g(t) = (x-t)^p$, где t лежит на отрезке с концами a и x.
$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{-n! p (x-c)^{p-1}} (-(x-a)^p)(x-c)^n =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{n! p} (1-\theta)^{n+1-p} (x-a)^{n+1}$$
где $a + \theta(x-a) := c,\ \theta \in (0,1)$.

- **Форма Коши**, $p = 1$:
$$\frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{n! p} (1-\theta)^{n+1-p} (x-a)^{n+1}$$

- **Форма Лагранжа**, $p = n+1$:
$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a^{n+1})$$

Также её можно записать в виде:

$$f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

2.5 Пример Коши не аналитической функции

Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$. Тогда f бесконечно дифференцируема на прямой и при всех натуральных n $f^{(n)}(0) = 0$.

Доказательство:

Мы хотим доказать, что $f^{(n)} = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$, где $P_n(t)$ - некоторый многочлен степени не выше $3n$.

Доакжем по индукции. База индукции: При $x \neq 0$ $f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ по теореме о производной сложной функции. Производная в нуле вычисляется по определению:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \left| \begin{matrix} t := \frac{1}{x} \\ x \to 0, \ t \to \infty \end{matrix} \right| = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

Переход. Пусть при $n = k$ $f^{(k)} = \begin{cases} P_k(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$, где $P_k(t)$ - некоторый многочлен степени не выше $3k$.

При $n = k+1$ и $x \neq 0$ получаем:

$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})' = (P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}})' = -\frac{1}{x^2} \cdot P_k'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3} \cdot P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $P_{k+1}(t) = 2t^3 P_k(t) - t^2 P_k(t)$, откуда следует, что степень P_{k+1} не больше $3k+3$ по предположению индукции. Если $x = 0$, то:

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \left| \begin{matrix} t := \frac{1}{x} \\ x \to 0, \ t \to \infty \end{matrix} \right| = \lim_{t \to \infty} \frac{tP_k(t)}{e^{t^2}} = 0$$

У этой функции ряд Тейлора в точке $a = 0$ состоит только из нулей, а сама функция f не равна нулю ни в какой проколотой окрестности точки $a = 0$. Таким образом, ряд Тейлора функции f сходится к f только в точке 0, то есть f не совпадает со своим рядом Тейлора ни в какой проклотой окрестности нуля, а поэтому f не является аналитической. ■

2.6 Необходимое и достаточное условие выпуклости функций

Функция f выпукла на интервале $(a,b) \Leftrightarrow \forall x_1, y, x_2 \in (a,b)\colon x_1 < y < x_2$ выполнено неравенство:

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}$$

Доказательство:

Необходимость.

Если функция выпукла, то для неё выполнено неравенство $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\ \forall x_1,x_2 \in (a,b)$. Любая точка $y \in (x_1,x_2)$ может быть записана в виде $y = \lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ при некотором $\lambda \in (0,1)$. Тогда выразим λ через x_1,x_2 и y и подставим её в неравенство выше:

$$\lambda = \frac{y - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$f(y) \leqslant \frac{y - x_2}{x_1 - x_2}f(x_1) + (1 - \frac{y - x_2}{x_1 - x_2})f(x_2) = \frac{y - x_2}{x_1 - x_2}f(x_1) + \frac{x_1 - y}{x_1 - x_2}f(x_2)$$

Заметим, что $0 > x_1 - x_2 = x_1 - y + y - x_2$. Домножим обе части неравенства на $x_1 - y + y - x_2$, развернув знак:

$$(x_1 - y)f(y) + (y - x_2)f(y) \geqslant (y - x_2)f(x_1) + (x_1 - y)f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(y) - f(x_2))(x_1 - y) \geqslant (f(x_1) - f(y))(y - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(y) - f(x_2)}{y - x_2} \geqslant \frac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} \geqslant \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1}$$

Достаточность.

Отметим, что при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$ неравенство из определения выпуклости превращается в равенство. При $\lambda \in (0,1)$ любая точка $y \in (x_1,x_2)$ может быть записана в виде $y = \lambda x_1+(1-\lambda)x_2$. Подставив его в данное в условии неравенство и проведя преобразования в обратном порядке, получим неравенство из определения выпуклости. ■

2.7 Связь выпуклости и дифференцируемости функций

Пусть функция f дифференцируема на интервале (a,b). Тогда выпуклость f на этом интервале $\Leftrightarrow$ f' не убывает на (a,b).

Доказательство:

Необходимость.

Так как f выпукла, то для неё выполняется неравенство $\frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$, $\forall x_1,y,x_2 \in (a,b)\colon x_1 < y < x_2$. Перейдём к пределам:

$$\lim_{y\to x_1} \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leqslant \lim_{y\to x_1} \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} \Leftrightarrow f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\lim_{y\to x_2} \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leqslant \lim_{y\to x_2} \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2)$$

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2)$$

Таким образом, f' не убывает на отрезке (a,b).

Достаточность.

На отрезках $[x_1,y],[y,x_2]$ к функции применима теорема Лагранжа, в силу чего найдутся точки $c_1 \in (x_1,y),c_2 \in (y,x_2)\colon f(y) - f(x_1) = f'(c_1)(y - x_1)$ и $f(x_2) - f(y) = f'(c_2)(x_2 - y)$. Так как производная неубывает, то $f'(c_1) \leqslant f'(c_2) \Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y} \Leftrightarrow$ функция f выпукла на интервале (a,b), так как мы берём $\forall x_1,y,x_2 \in (a,b)\colon x_1 < y < x_2$. ■

2.8 Критерий выпуклости дважды дифференцируемых функций

Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a,b). Тогда выпуклость f на этом интервале $\Leftrightarrow$ f'' неотрицательна на (a,b).

2.9 Связь выпуклости, дифференцируемости функций и касательной к ним

Если функция f дифференцируема и выпукла на (a,b), то при всех $x,x_0 \in (a,b)$ $f(x) \geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Доказательство:

На любом отрезке из интервала (a,b) функция удовлетворяет теореме Лагранжа, поэтому найдётся такая точка c, принадлежащая интервалу с концами x и x_0, что $f(x)-f(x_0) = f'(c)(x-x_0)$. В силу предложения 2.7 выражение $(f(c)-f(x_0))(x-x_0)$ всегда неотрицательно, поэтому $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = (f'(c)-f'(x_0))(x-x_0) \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. ■

2.10 Пример использования неравенства Йенсена

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Для положительных $x_1,\dots,x_n$ справедливо неравенство

$$\frac{x_1+\dots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ \dots \ \cdot x_n}$$

Доказательство:

Рассмотрим функцию $f=-\ln x$. Так как $y'' = \frac{1}{x^2} > 0$ при $x>0$, то функция выпукла на промежутке $(0,+\infty)$, поэтому к ней применимо неравенство Йенсена (полагаем, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$):

$$-\ln(\frac{1}{n}x_1+\dots+\frac{1}{n}x_n) \leqslant \frac{1}{n}(-\ln x_1)+\dots+\frac{1}{n}(-\ln x_n) = -\ln(x_1\cdot\dots\cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(\frac{1}{n}x_1+\dots+\frac{1}{n}x_n) \geqslant \ln(x_1\cdot\dots\cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

Беря экспоненту, получаем требуемое (это возможно, так как $y=e^x$ монотонно возрастает: $(e^x)' = e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$). ■

3 Теоремы

3.1 Теорема Ферма

Пусть функция f определена на интервале (a,b), дифференцируема в точке $c \in (a,b)$ и имеет в точке c локальный экстремум. Тогда $f'(c)=0$.

Доказательство:

Пусть в точке a функция f имеет локальный максимум (для минимума аналогично). Рассмотрим $x \in U^{\circ}_{\delta}(a) \cap (a,b)$, в котором c является точкой экстремума. Тогда при всех $x > c$ справедливо неравенство $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$, а при всех $x < c$ - неравенство $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$. По определению, так как $f \in D(c)$, то $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$. Значит существуют и равны друг другу односторонние пределы в точке c: $\lim\limits_{x \to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) = \lim\limits_{x \to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Таким образом, $(f'(c))^2 = \lim\limits_{x \to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot \lim\limits_{x \to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$, откуда следует, что $f'(c) = 0$. ■

3.2 Теорема Ролля

Пусть:

1) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$
2) Функция f дифференцируема на интервале (a,b)
3) $f(a) = f(b)$

Тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что $f'(c) = 0$.

Доказательство:

Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по второй теореме Вейерштрасса существуют такие точки $c_1,c_2 \in [a,b]$, что $f(c_1) = m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ и $f(c_2) = M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$. Если при этом $m = M = f(a)$, то функция f на отрезке $[a,b]$ является постоянной, поэтому в любой точке интервала (a,b) её производная равна нулю. Если же $m < M$, то хотя бы одна из точек c_1,c_2 лежит в интервале (a,b), так как $f(a) = f(b)$, и по теореме Ферма производная функции в этой точке равна нулю. ■

3.3 Теорема Лагранжа

Пусть:

1) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$
2) Функция f дифференцируема на интервале (a,b)

Тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Доказательство:

Рассмотрим функцию g, определяемую как

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Эта функция по свойствам непрерывных и дифференцируемых функций непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b) = 0$. Таким образом, все условия теоремы Ролля выполнены, значит $\exists c \in (a,b)\colon g'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

3.4 Теорема Коши

Пусть функции f и g:

1) определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$

2) дифференцируемы на интервале (a,b)

3) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$

Тогда $\exists c \in (a,b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство:

Отметим, что $g(a) \neq g(b)$, иначе выполняются все условия теоремы Ролля, а тогда нарушается третье условие данной теоремы.

Рассмотрим функцию $G(x) = (g(b)-g(a))f(x) - (f(b)-f(a))g(x)$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $G(a) = g(b)f(a) - g(a)f(b) = G(b)$. То есть, все условия теоремы Ролля для данной функции выполнены, тогда

$$\exists c \in (a,b) \colon G'(c) = (g(b)-g(a))f'(c) - (f(b)-f(a))g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

■

3.5 1-е правило Лопиталя, неопределённость вида 0/0

Пусть:

1) Функции f и g определены и дифференцируемы на интервале (a,b)

2) $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0$

3) $g'(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in (a,b)$

4) Существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда справедливо равенство $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство:

Если $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ бесконечен, то можно рассмотреть предел $\lim\limits_{x\to b-} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Поэтому считаем, что $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, где A - конечное число.

Рассмотрим точки $x,y \in (a,b)$, $x < y$. Так как $g'(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in (a,b)$, то $g(y) - g(x) \neq 0$. Таким образом, выполнены все условия теоремы Коши для функций f и g на отрезке $[x,y]$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \ c \in (x,y)$$

Домножим обе части этого равенства на $g(x)-g(y)$, затем разделим на $g(x)$ (вот здесь тонкий момент с тем, что 2 и 3 условие теоремы означают, что $g(x)$ на интервале (a,b) только приближается при $x \to b-$, но не становится нулём). В результате получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

По определению предела, так как $c \in (x,y)$, то

$$\lim_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon \forall x,y\colon b>y>x>b-\delta\ \ \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A\right|<\varepsilon$$

Таким образом

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}-A\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A-\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{g(y)}{g(x)}+\frac{f(y)}{g(x)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\cdot\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

Зафиксировав такое x, чтобы выполнялись неравенства выше и учтя 2-е условие теоремы, получим, что $\lim\limits_{y\to b-}\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| = 0$ и $\lim\limits_{y\to b-}\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| = 0$. Возьмём такое $\delta>0$, что $\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|<\varepsilon$, $\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|<\varepsilon$ и $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A\right|<\varepsilon$. Так как функция, имеющая предел, ограничена, то $\exists C>0\colon \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\leqslant C$. Получаем:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right| \leqslant \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\cdot\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon + C\cdot\varepsilon+\varepsilon = (2+C)\varepsilon$$

откуда $\lim\limits_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)} = A$. ∎

3.6 2-е правило Лопиталя, неопределённость вида ∞/∞

Пусть:

1) Функции f и g определены и дифференцируемы на интервале (a,b)
2) $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \infty$
3) $g'(\xi)\neq 0\ \ \forall\xi\in(a,b)$
4) Существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда справедливо равенство $\lim\limits_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство:

Если $\lim\limits_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ бесконечен, то можно рассмотреть предел $\lim\limits_{x\to b-}\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Поэтому считаем, что $\lim\limits_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, где A - конечное число.

Рассмотрим точки $x,y\in(a,b),\ x>y$. Так как $g'(\xi)\neq 0\ \forall\xi\in(a,b)$, то $g(y)-g(x)\neq 0$. Таким образом, выполнены все условия теоремы Коши для функций f и g на отрезке $[y,x]$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},\ c\in(y,x)$$

Домножим обе части этого равенства на $g(x)-g(y)$, затем разделим на $g(x)$. В результате получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}$$

По определению предела, так как $c \in (y,x)$, то

$$\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \forall x,y \colon b > x > y > b - \delta \quad \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

Таким образом

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)} \right) + \frac{f(y)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \cdot \left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(y)}{g(x)} \right|$$

Зафиксировав такое y, чтобы выполнялись неравенства выше и учтя 2-е условие теоремы, получим, что $\lim\limits_{x \to b-} \left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| = 0$ и $\lim\limits_{x \to b-} \left| \frac{f(y)}{g(x)} \right| = 0$. Возьмём такое $\delta > 0$, что $\left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| < \varepsilon$ и $\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \varepsilon$. Так как функция, имеющая предел, ограничена, то $\exists C > 0 \colon \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \leqslant C$. Получаем:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leqslant \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \cdot \left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(y)}{g(x)} \right| < \varepsilon + C \cdot \varepsilon + \varepsilon = (2 + C)\varepsilon$$

откуда $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. ∎

3.7 Приближение функции многочленом Тейлора

Пусть функция f n раз дифференцируема в точке a. Тогда

$$f(x) - T_n(x) = o((x-a)^n), \ x \to a$$

Доказательство:

По определению нужно доказать, что

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Применяя к этому отношению правило Лопиталя $(n-1)$ раз, получим

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a) \cdot (x-a)}{n!(x-a)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} - f^{(n)}(a) \right) = \frac{1}{n!} (f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)) = 0$$

∎

3.8 Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме

Пусть в каждой точке отрезка с концами a и x функция f имеет n непрерывных производных, а в каждой точке интервала с концами a и x f дифференцируема $n+1$ раз. Пусть функция g непрерывна на отрезке с концами a и x и дифференцируема в каждой точке интервала с концами a и x, причём $g'(t) \neq 0$ в любой точке t данного интервала. Если определить $R_n(x; f,a) := f(x) - T_n(x; f,a)$, то

$$R_n(x; f,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!g'(c)}(g(x) - g(a))(x-c)^n$$

где c - точка из интервала с концами a и x.

Доказательство:

Рассмотрим функцию

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

которая удовлетворяет условиям теоремы Коши на отрезке с концами a и x.

Вычислим производную этой функции:

$$G'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \right) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Применяя к функциям $G(t)$ и $g(t)$ теорему Коши на отрезке с концами a и x, получим:

$$\frac{G(x) - G(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{G'(c)}{g'(c)}$$

где c - точка из интервала с концами a и x. При этом $G(x) = f(x),\ G(a) = T_n(x; f,a)$, поэтому

$$\frac{G(x) - G(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - T_n(x; f,a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \cdot \frac{1}{g'(c)} \Leftrightarrow R_n(x; f,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!g'(c)}(g(x)-g(a))(x-c)^n$$

■

3.9 Достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора

Пусть $r > 0$ и функция f дифференцируема на интервале $(a-r,a+r)$. Пусть существуют такие положительные константы C и M, что $|f^{(n)}(x)| \leq C \cdot M^n$ при всех $x \in (a-r,a+r)$ и всех натуральных n. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a) \text{ при всех } x \in (a-r,a+r).$$

Доказательство:

Докажем, что при любом фиксированном $x \in (a-r,a+r)$ частичные суммы ряда Тейлора стремятся к значению $f(x)$. По остаточному члену в форме Лагранжа получим:

$$\left| f(x) - \sum_{x=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leqslant \frac{C(rM)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,\ n \to +\infty$$

■

3.10 Достаточное условие экстремума

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки a и дифференцируема n раз в точке a, причём $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, а $f^{(n)}(a) \neq 0$. Тогда если $n = 2k$ и $f^{(n)}(a) < 0$, то a - точка максимума, если $n = 2k$ и $f^{(n)}(a) > 0$, то a - точка минимума, а если $n = 2k - 1$, то экстремума нет.

Доказательство:

В силу условий для функции f мы можем записать локальную формулу Тейлора в точке a, которая с учётом равенства нулю производных будет равна:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x \to a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x \to a$$

В достаточно малой окрестности точки a $o((x-a)^n)$ будет пренебрежимо мала по сравнению с $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, поэтому знак разности $f(x) - f(a)$ совпадёт со знаком выражения $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Если n чётное, то $(x-a)^n \geqslant 0$, поэтому при $f^{(n)}(a) < 0$ в достаточно малой окрестности точки a $f(x) \leqslant f(a)$, то есть в точке a максимум, а при $f^{(n)}(a) > 0$ в достаточно малой окрестности точки a $f(x) \geqslant f(a)$, то есть в точке a минимум. Если n нечётное, то выражение $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ меняет знак при переходе через точку a, а тогда (в достаточно малой окрестности точки a) знак меняет и разность $f(x) - f(a)$, поэтому экстремума в точке a нет. ■

3.11 (Experimental) Достаточное условие экстремума в терминах первой производной

Пусть функция f определена и дифференцируема в некоторой окрестности $U_\delta(a)$. Если $\exists r > 0, r \leqslant \delta$: $f'(x) \geqslant 0\ \forall x \in (a-r, a); f'(x) \leqslant 0\ \forall x \in (a, a+r); f'(a) = 0$, то в точке a функция имеет локальный максимум. Если $\exists r > 0, r \leqslant \delta$: $f'(x) \leqslant 0\ \forall x \in (a-r, a); f'(x) \geqslant 0\ \forall x \in (a, a+r); f'(a) = 0$, то в точке a функция имеет локальный минимум. Иначе в точке a нет экстремума.

Доказательство:

Пруфов не будет) ■

3.12 Критерий существования наклонной асимптоты

Наклонная асимптота функции f при $x \to +\infty$ существует $\Leftrightarrow$ одновременно выполняются два условия:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta,\ \beta \in \mathbb{R}$

3.13 Неравенство Йенсена

Пусть функция f выпукла на интервале (a,b). Тогда при любых $x_1,x_2,\dots,x_n \in (a,b)$ и всех таких $\lambda_1 \geqslant 0,\lambda_2 \geqslant 0,\dots,\lambda_n \geqslant 0$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, выполняется неравенство $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Доказательство:

Индукция по n.

При $n = 2$ неравенство справедливо по определению.

Пусть верно для $n = k$, то есть

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) \leqslant \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$$

Докажем, для $n = k + 1$.

Пусть $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$. Точка $\frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda}x_k$ принадлежит интервалу (a,b) (проверяется индукцией по k, подставляя вместо x_i a или b для получения неравенств). Кроме того, $\frac{\lambda_i}{\lambda} \geqslant 0$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda} = 1$, поэтому в силу выпуклости f и предположения индукции получим:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = f(\lambda(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k) + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda f(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \leqslant \lambda(\frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda} f(x_k)) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) =$$
$$= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1})$$

■

4 Факты и задачи

4.1 Утверждения

- Если $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, то f строго возрастает на интервале (a,b).
- При $x \to +\infty$ экспонента растёт быстрее степени, а степень растёт быстрее логарифма как следствия теоремы Лопиталя.
- Из существования предела отношения функций не следует существование предела отношения их производных.

4.2 Замечания

- В правилах Лопиталя можно заменить условие $x \to b-$ на $x \to a+$. При этом для нового доказательства достаточно сделать замену переменной: $t = a+b-x$. С учётом этого можно рассмотреть двустороннюю окрестность точки a и сформулировать правило Лопиталя для обычного предела.

4.3 Факты

- Разложение в ряд Тейлора некоторых функций:

  1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

  2. $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

  3. $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

  4. $$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n},\ x \in (-1,1]$$

  5. $$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(\alpha-n+1)\cdot x^n}{n!},\ x \in (-1,1)$$