Script Mathematik

Zusammengetragen von Marc Landolt

Kritik Anregung und Korrekturvorschläge bitte an
(marc.landolt@yetnet.ch)

1 Algebra

1.1 Allgemeines

1.1.1 Arabische Ziffern

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

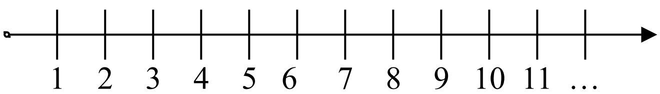
1.1.2 Kardinalzahlen

12, 27, 364, 50...

1.1.3 Ordinalzahlen

3. 5. 7.

1.1.4 Zahlenstrahl



1.1.5 Variabeln

1.1.5.1 Formvariabeln

a,b,c → Die Formvariabeln müssen beim Addieren gleich sein.

1.1.5.2 Variable

x, y, z

1.1.5.3 Winkel

α, β, γ

2 Mengenlehre

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten. Die einzelnen Objekte heissen Elemente der Menge.

$1\text{Ic} = \{\text{x} \mid \text{x ist Student der Klasse 1Ic}\}$ beschreibend

$= \{\text{U.Dere}, \ldots, \text{S.Winter}\}$ aufzählend

$\text{M.Liloia} \in 1\text{Ic} \quad \text{M.Vogel} \notin 1\text{Ic}$

2.1.1 Mengenoperatoren

$\exists$	es existiert, **Partikulator**
$\exists!$	es existiert genau ein
$\forall$	für alle, **Allquantor**
$A(x) \Rightarrow B(x)$	aus Aussage A folgt Aussage B, **Implikation**
$A(x) \Leftarrow B(x)$	aus Aussage B folgt Aussage A
$A(x) \Leftrightarrow B(x)$	aus Aussage A folgt Aussage B und Umgekehrt, **Äquivalenz**
$\in$	Element von
$\notin$	nicht Element von
$\subset$	Teilmenge von
$\not\subset$	nicht Teilmenge von
$\cap$	Schnittmenge von zwei Mengen
$\cup$	Vereinigung von Mengen
$\wedge$	Logisches und, **Konjunktion**
$\vee$	Logisches oder, **Disjunktion**
$\neg$	(logisches) nicht, **Negation**

2.1.1.1 Vereinigung von Mengen:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

2.1.1.2 Durchschnitte von Mengen:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

2.1.1.3 Differenz von Mengen:

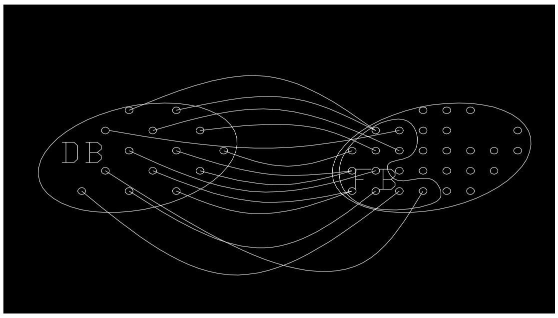
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

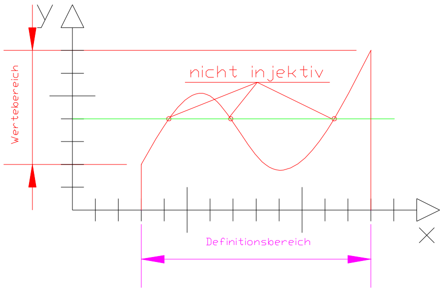
Beispiel

$$\left(A \setminus B\right) \cup \left(B \setminus A\right) = \left(A \cup B\right) \setminus \left(A \cap B\right)$$

2.1.1.4 Russels Anatomit / Paradoxon

2.1.1.5 Definitionsbereich / Wertebereich





Der Definitionsbereich (D) einer Funktion ist der Bereich aller x-Werte (Argumente), für welche die Vorschrift $y = f(x)$ festgelegt ist: z.B. $x = \{x \mid x < 0 < x\}$ oder D =
Der Funktions- oder Wertebereich (W) der Funktion ist der Bereich aller y-Werte (Funktionswerte), welche durch die Vorschrift $x \to f(x)$ ~~und dem festgelegten Definitionsbereich (D)~~ erreicht werden können.

2.1.1.6 Abbildungen der Menge mittels Graphen

Der Graph einer Funktion *f* ist die Kurve, welche mit der Gleichung $y = f(x)$ durch das Einsetzen aller Punkte aus dem Definitionsbereich entsteht. (für alle Punkte der Menge $M = \{y \mid y = f(x)\}$

Eigenschaften von Funktionen / Abbildungen

Eine Abbildungszuordnung *f*: $\begin{array}{l} A \to B \\ x \to y = f(x) \end{array}$ ist injektiv, surjektiv oder bijektiv

2.1.1.6.1 *Injektiv(eineindeutig, 1 zu 1):*

wenn unterschiedliche Elemente von A auch unterschiedliche Bilder haben.
$\forall x_1, x_2 \in A \text{ folgt}: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$x \to x^2$ nicht injektiv, denn f(1) = f(-1) aber 1 ≠ -1
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$x \to x^3$ ist injektiv

Dies ist z.B. dann wichtig, wenn eine eindeutige Umkehrfunktion gesucht ist.

2.1.1.6.2 *surjektiv:*

wenn jedes Element von B ein Bildpunkt der Abbildung A ist.
$\forall y \in W \Rightarrow \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)$
Als Surjektion bezeichnet man eine Funktion in der in welcher jedem Element des Bildbereichs mindestens ein Element des Definitionsbereichs zugeordnet ist.

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ nicht surjektiv, ran f = $[0,\infty) \neq \mathbb{R}$
g: $\mathbb{R} \to [0,\infty)$,$x \to x^2$ surjektiv
sin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nicht surjektiv, ran(sin) = [-1,1]
sin: $\mathbb{R} \to [-1,1]$ ist surjektiv

2.1.1.6.3 *bijektiv:*

wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

f:$[0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \to x^2$ bijektiv
ran f = $[0,\infty)$

exp: $\mathbb{R} \to (0,\infty)$, $x \to e^x$ bijektiv
ran(exp) = $(0,\infty)$

2.1.2 Die verschiedenen Relationen

2.1.2.1 Allgemein

Die Zweistellige **Mengen** Relation von A und B:
$R \subset A \times B$

Schreibweise: $(x, y) \in R \to xRy$
Relation in A: $R \subset A \times A = A^2$
$f : A \to B$ ist eine Relation
$R = A \times B = \{x, y \mid x \in B \wedge y = f(x)\}$ (Implizite Zuordnung)

Die Menge aller Paare (x,y) mit $x \in A$ und $y \in B$ heisst das Kartesische Produkt (Produktmenge) von den Mengen A und B

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ In der Regel ist $A \times B \neq B \times A$

Beispiel:

A={0,1,2,...,23}
B={0,1,2,...,59}
$A \times B$ ist die Menge aller möglichen Zeitangaben
(00:00, 00:01, 00:02...)

2.1.2.2 Elementarrelationen

2.1.2.2.1 symmetrisch:

wenn aus xRy stets yRx folgt (z.B. Bruder von...) oder die primitive Fläche *m x m*
Eine Funktion $f(x)$ ist symmetrisch, wenn sie injektiv und (surijektiv), also bijektiv, ist.

2.1.2.2.2 asymmetrisch:

wenn kein Paar (x,y) vertauschbar ist: d.h. $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$ → nicht egal ob {15:30} oder {30:15} ➔ {14:15} vs.{15:14}
Meine Definition: Eine asymmetrische Relation ist von der Reihenfolge der einzelnen Elemente abhängig. z.B. Zeit, Datum...

2.1.2.2.3 antisymmetrisch(identitiv):

wenn für verschiedene x und y niemals xRy und yRx gleichzeitig gilt das hiesse .
$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ →Beispiel? grösser/ kleiner als

2.1.2.2.4 reflexiv:

wenn für alle x gilt xRx (~~z.B. hat am selben Tag Geburtstag~~) besseres Beispiel: Gleichheitsoperator

2.1.2.2.5 irrreflexiv:

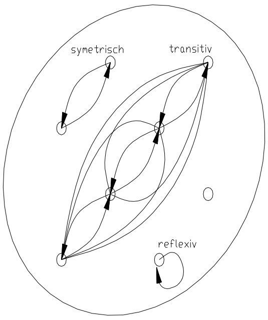
wenn für kein x gilt xRx → nicht reflexiv → Beispiel

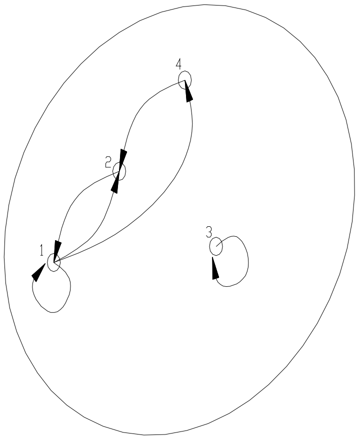
2.1.2.2.6 transitiv:

wenn aus xRy und yRz immer auch xRz folgt d.h. $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (z.B. ist älter als)

Beispielsweise ist die Relation "=" reflexiv, symmetrisch und transitiv, die Relation "<" transitiv, die Relation "≤" reflexiv und transitiv.

Beispiel





M={1,2,3,4}

$R \subset M^2$

R={{1,1},{1,2}{2,1}{2,4}{1,4}{3,3}}

2.1.2.3 Spezialrelationen

2.1.2.3.1 Totale Funktion

Eine (totale) Funktion (~~oder Abbildung~~) ist eine Relation, die jedem Element des Definitionsbereichs genau ein Element des Wertebereichs zuordnet. Für *partielle Funktionen* ist „genau ein" durch „höchstens ein" zu ersetzen

2.1.2.3.2 Äquivalenzrelation ($\leq$?)

$R \subset M^2$ heisst Äquivalenzrelation in M, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist

Beispiel
M: die Menge aller Mensche $xRy \Leftrightarrow x$ hat am gleichen Tag Geburtstag wie y

$M = N_0 = \{0,1,2,3,...\}$
$xRy \Leftrightarrow x$ und y haben bei der Division durch 5 den selben Rest ist eine Äquivalenzrelation

Schreibweise:
$x \equiv y(\%5)$
$4 \equiv 19(\%5)$

Definition
Es sei R eine Äquivalenzrelation in M. Zwei Elemente heissen äquivalent,
$x \sim y \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow yRx$

Die Menge aller zum Element $a \in M$ äquivaltenten Elemente heisst Äquilvalenzklasse mit a als Repräsentanten.

$Ka = \{x \mid x \in M \wedge x \sim a\}$

$K_0 = \{0,5,10,15,20,...\}$
$K_1 = \{1,6,11,16,21,...\}$
$K_2 = \{2,7,12,17,22,...\}$
$K_3 = \{3,8,13,18,23,...\}$
$K_4 = \{4,9,14,19,24,...\}$

diese 5 Mengen nennt man disjunkt d.h. $K_i \cap K_j = \{\} \forall i \neq j$

Definition

Die vom einer Äquivalenzrelation R auf M erzeugten Äquivalenzklassen K_x führen zu einer Zerlegung der Menge M, der Quotientenmenge (Restsystem) M/R
$M = \cup K_x \Leftrightarrow M / R$
$x \in M$
$= \{K_x \mid x \in M\}$
Umgekehrt existiert zu jeder Zerlegung Z von M eine Äquivalenzrelation R, so dass M\R=Z falls für die Zerlegung Z gilt:
$M_1, M_2, M_k, ... \in Z$ mit
1.) $M_i \neq \{\}$
2.) $\bigcup_i M_i = M$
3.) $M_i \cap M_j = \{\}$

Beispiel

M={a,b,3,5,*,?}
Zerlegung: Z={{a},{b,?},{3,5,*}}
Gesucht: Äquivalenzrelation R mit Z=M/R (Quotientenmenge)
R={{a,a},{3,3},{b,b},{5,5},{*,*},{?,?},{b,?},{?,b},{3,5},{5,3}, {3,*},{*,3},{5,*},{*,5}}

Ordnung der Zahlen
<u>Definition:</u> Eine Relation R auf M heisst Ordnungsrelation wenn R reflexiv, identitiv (antisymmetrisch) und transitiv ist.

<u>Zweck:</u> Ordnungsrelationen dienen dazu, Mengen nach bestimmten Kriterien zu „ordnen"

<u>Beispiel:</u> M: Mails
$xRy \Leftrightarrow$ x und y haben den selben Absender
$xRy \Leftrightarrow$ x ist älter als y
$xRy \Leftrightarrow$ x ist nicht jünger als y

<u>Definition:</u> Eine Relation R auf der Menge M heisst strenge (strikte) Ordnungsrelation, wenn diese asymmetrisch und transitiv ist

<u>Beispiele:</u>

1.)M: Mails
$xRy \Leftrightarrow$ x ist älter als y

2.)M: Druckaufträge
$xRy \Leftrightarrow$ Druckauftrag x wird nicht vor y gedruckt.

3.) M=R
$xRy \Leftrightarrow x \leq y$
Ordnungsrelation

$xRy \Leftrightarrow x < y$
strenge Ordnungsrelation

$xRy \Leftrightarrow$ x ist mit y befreundet
$xRy \Leftrightarrow$ x ist fast gleichgut wie y (Notendiff weniger als 0,5)

Wichtige Anwendung $<, \leq, >, \geq$

Ordnungsbezeichnung
$a < b \Rightarrow a + c < b + c \; \forall c \in R$
$\Rightarrow a - c < b - c$
$a < b \Rightarrow a * c < b * c$ für $c > 0$
$\Rightarrow a * c = b * c$ für $c = 0$
$\Rightarrow a * c > b * c$ für $c < 0$

2.1.2.4 Mengenlogik

$A \in B \Leftrightarrow$ jedes Element von A ist auch ein Element von B

$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Beispiel $2 \in N$

$-2 \notin N$

2.1.3 Bezeichnung von Intervallen

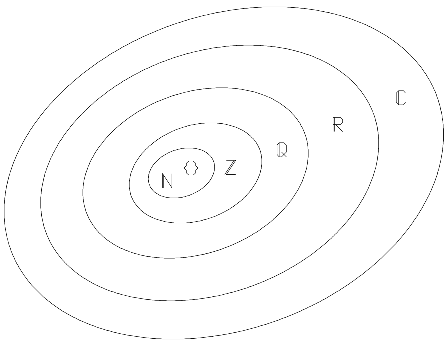
Abgeschlossenes Intervall: $a \le x \le b \Leftrightarrow x \in [a,b]$
Offenes Intervall: $a < x < b \Leftrightarrow x \in]a,b[$
Halboffenes Intervall: $a < x \le b \Leftrightarrow x \in]a,b]$

2.1.4 Relationen (Funktion, Abbildung)

A und B seien zwei Mengen.
Unter einer Funktion (Abbildung) f von A und B verstehen wir eine Vorschrift die jedem Element $x \in A$ genau ein $y \in B$ zuordnet

$y = f(x)$

2.2 Zahlenbereiche, Zahlenmengen



{} = Leere Menge
N = Natürliche Zahlen
Z = Ganze Zahlen
Q = Rationale Zahlen
R = Reelle Zahlen
C = Complexe Zahlen

Jede der Menge ist Teilmenge der Folgenden: $\{\ \} \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

2.3 Die Leere Menge

falsche Annahme: $\exists \mathrm{A}$ mit $\{\} \not\subset \mathrm{A} \Rightarrow \exists \mathrm{a} \in \mathrm{A}$ mit $\mathrm{a} \in \{\}$ das ist der indirekte Beweis dass:
$\{\} \subset \mathrm{M}$ wobei M für jede Menge gilt
Mengenoperationen

2.4 Die natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$N = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$	**Natürliche Zahlen**
$N_0 = \{0,1,2,3,4,5,\ldots\} = N \cup \{0\}$	**inklusive 0**

Es gelten folgende Axiome

1.	$(a+b)+c = a+(b+c)$	Assoziativgesetz der Addition
2.	$(a+b) = (b+a)$	Kommutativgesetz der Addition
3.	$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$	Assoziativgesetz der Multiplikation
4.	$a\cdot b = b\cdot a$	Kommutativgesetz der Multiplikation
5.	$1\cdot a = a\cdot 1 = a$	Existenz eines neutralen Elementes 1 für die Multipilkation bzw. 0 für die Addition
6.	$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$	Distributivitätsgesetz

Folgende Gleichungen in x sind nicht immer in N lösbar:

$a+x=b$ z.B. $3+x=1$

$a\cdot x=b$ z.B. $3\cdot x=5$

Mit anderen Worten: die inversen Operationen der Addition und der Multiplikation sind in N nicht definiert.

→Bei der Multiplikation von 4 Reihen à 5 Apfel, also $4\cdot 5=20$ geht die Information über deren Anordnung verloren. Wollen wird dies nun mit dem menschlichen Gehirn wahrnehmen, fällt uns dies, da wieder der Natur nicht ganz einfach. Sehen wir jedoch die vier mal 5 Öpfel vor uns springt es uns ja gerade zu in die Augen, dass man diese ganz einfach unter 4 oder 5 Leuten verteilen kann. (Wahrnehmungspsychologie)

2.5 Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ Ganze Zahlen

Addition: abgeschlossen
Subtraktion: abgeschlossen
Multiplikation: abgeschlossen
Division: nicht abgeschlossen, es fehlen Werte

Es gelten folgende Axiome

1.	$(a+b)+c = a+(b+c)$	Assoziativgesetz der Addtion
2.	$(a+b) = (b+a)$	Kommutativgesetz der Addition
3.	$a+0 = a = 0+a$	Existenz eines neutralen Elementes für die Addition
4.	$\forall a \in Z\ \exists \tilde{a}\ mit\ a + \tilde{a} = 0$	Existenz eines inversen Elementes bezüglich der Addition
5.	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Assoziativgesetz der Multiplikation
6.	$a \cdot b = b \cdot a$	Kommutativgesetz der Multiplikation
7.	$1 \cdot a = a = a \cdot 1$	Existenz eines neutralen Elementes 1 für die Multiplikation
8.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	Distributivgesetz

$\tilde{a}$, das inverse Element von a bezüglich der Addition, wird negativ a genannt und mit –a bezeichnet. Man sagt gewöhnlich „minus a“.

Bemerkung: Eine Menge **G,** welche gegenüber einer binären Operation * abgeschlossen ist, und wo die ersten vier Axiome für diese Operation gelten, hat eine algebraische Struktur, welche in der Mathematik *abelsche Gruppe* genannt wird. $\langle Z,+\rangle$ ist damit eine abelsche Gruppe.

$a + x = b$ ist immer lösbar für x, jedoch nicht $a \cdot x = b$: $2 \cdot x = 1$ ist in Z nicht lösbar.

Bemerkung: N ist eine Teilmenge von Z. $N \subset Z$

Um in einer Menge zu operieren, wo die Gleichung, wo die Gleichung $a \cdot x = b$ (für $a \neq 0$) immer lösbar ist (d.h. wo die inverse Operation der Multiplikation definiert ist), muss Z erweitert werden.

2.6 Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

$Q=\left\{\frac{p}{q}\middle|\left(p\in \text{¢}\right)\wedge\left(q\in \text{¢}\setminus\{0\}\right)\right\}$ TODO: REPAIR BROKEN LINK

$Q=\left\{x \mid x=\frac{p}{q},\left(p\in \text{¢}\right)\wedge\left(q\in \text{¥}\right)\right\}$ oder $Q=\left\{\frac{p}{q}\middle|\left(p\in \text{¢}\right)\wedge\left(q\in \text{¢}\setminus\{0\}\right)\right\}$

Die Zahlen $\frac{3}{4},\frac{6}{8}$ und $\frac{-12}{-16}$ sind verschiedene Elemente von Q. Sie sind äquivalent („gleich“).

Es gelten folgende Axiome

1.	$(a+b)+c=a+(b+c)$	Assoziativgesetz der Addtion
2.	$(a+b)=(b+a)$	Kommutativgesetz der Addition
3.	$a+0=a=0+a$	Existenz eines neutralen Elementes für die Addition
4.	$\forall a\in Z\ \exists\widetilde{a}\ mit\ a+\widetilde{a}=0$	Existenz eines inversen Elementes bezüglich der Addition
5.	$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$	Assoziativgesetz der Multiplikation
6.	$a\times b=b\times a$	Kommutativgesetz der Multiplikation
7.	$1\times a=a=a\times 1$	Existenz eines neutralen Elementes 1 für die Multiplikation
8.	$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$	Distributivgesetz
9.	$\forall a\in$ ¤ mit $q\neq 0\ \exists!\widetilde{a}$ mit $\widetilde{a}\times a=1$	Existenz eines inversen Elements für die Multiplikation

Also im sogenannten Körper der rationalen Zahlen können alle Divisionen durchgeführt werden mit einer wichtigen Ausnahme: die Division durch 0 ist und bleibt unausführbar.

Es fehlen die irrationalen Zahlen den $d^2=2$ ist in Q nicht lösbar, anders gesagt $\sqrt{2}$ ist auf dem Zahlenstrahl zwischen zwei rationalen Zahlen:

1. x sei eine gekürzte rationale Zahl, also $x=\frac{p}{q}$ mit $ggT(p,q)=1$
2. $x^2=2$ daraus folgt $\frac{p^2}{q^2}=2$
3. formt man den Term nach p^2 um erhält man $p^2=2q^2$ was bedeutet p^2 ist gerade
4. ist p^2 gerade ist auch p gerade
5. daraus folgt, es gibt eine Zahl, $m\in Z$ mit $p=2m$ rechnen wir zurück gibt das für $p^2=4m^2$
6. setzen wir nun die beiden Gleichungen $p^2=2q^2$ und $p^2=4m^2$ gleich erhalten wir für $q^2=2m^2$ womit q^2 und somit auch q eine gerade Zahl sein muss
7. somit sind p und q beide durch 2 teilbar, dies steht aber in Wiederspruch zu Punkt 1, denn p und q müssten mit $ggT(p,q)$ ja eigentlich teilerfremd sein.

→ Somit gibt es einen weiteren Zahlenbereich dem Zahlenstrahl, der durch die rationalen Zahlen nicht dargestellt werden kann, wir ergänzen den Zahlenstrahl mit den irrationalen Zahlen und bekommen eine neue Menge: die reellen Zahlen

2.7 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Die reellen Zahlen können im Rechner nicht exakt dargestellt werden, sie werden mit Rekursionsgleichungen durch rationale Zahlen (beliebig gut) approximiert:

$$x_1 = 1$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

$x_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$	$(x_2)^2 \approx 2{,}25$
$x_3 = \frac{17}{12} = 1{,}4166...$	$(x_3)^2 \approx 2{,}00694...$
$x_4 = \frac{577}{408} = 1{,}414215...$	$(x_4)^2 \approx 2{,}0000060...$
$x_5 = \frac{665857}{470832} = 1{,}41421356...$	$(x_5)^2 \approx 2{,}000000000...$
$x_6 = ...$	

Addition: abgeschlossen
Subtraktion: abgeschlossen
Multiplikation: abgeschlossen
Division: ausser durch 0 sind alle durchführbar.
Radizieren: ausser durch negative Zahlen sind alle durchführbar, für die Wurzel einer negativen Zahl müssen wir auf die komplexen Zahlen zurückgreifen

2.7.1 Addition

$$\overbrace{4+7}^{Summe} = \overbrace{11}^{Summe}$$

Summand

Es gilt, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz, Neutrales Element

2.7.2 Subtraktion

Kommutativ- und Assoziativgesetz gilt nicht
0 ist neutrales Element

$$\overbrace{4-7}^{Differenz} = \overbrace{11}^{Differenz}$$

Subtrahend
Minuend

2.7.2.1 Günstiges Rechnen

50c-16c-32c-18c+27c
=50c+27 -16c -32c-18c
=77c -16c -50c
=77c -66c
=11c

2.7.2.2 Klammern

Klammern regeln die Vorfahrt
5-(+2)=5-2=3

-Bei positiven Klammern bleiben die Rechen- und Vorzeichen unverändert

85+(15+70)=(85+15)+70

-Bei negativen Klammern ändern sich bei allen Gliedern die Vorzeichen

a-(b-c)=a-b+c
a-(b+c)=a-b-c

2.7.2.3 Rechnen mit verschachtelten Klammern

Von innen nach aussen

a-{b-(c+d)-[a+(b-c)]}
a-{b-c-d-[a+b-c]}
a-{b-c-d-a-b+c}
a-b+c+d+a+b-c
2a+d

2.7.3 Multiplikation

$$\underbrace{4+4+4+4+4}_{5\cdot 4=20}$$

$$\overbrace{a\cdot b}^{Produkt} = \overbrace{c}^{Produkt}$$

Faktoren
Multiplikand
Multiplikator

$a\cdot b = ab$
$2\cdot 3!$
$3\cdot a = 3a$
$3\cdot(a+b) = 3(a+b)$

Es gilt: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz, Neutrales Element

2.7.3.1 Das Vorzeichen

$(+3)\cdot(+4) = 3\cdot 4 = 12$
$(+3)\cdot(-4) = 3\cdot(-4) = 12$
$(-3)\cdot(+4) = (-3)\cdot 4 = 12$
$(-3)\cdot(-4) = +12 = 12$

$negativ \cdot negativ = positiv$

$$\begin{cases} 3\cdot(-3) = -9 \\ 2\cdot(-3) = -6 \\ 1\cdot(-3) = -3 \\ 0\cdot(-3) = 0 \\ -1\cdot(-3) = 3 \\ -2\cdot(-3) = 6 \end{cases}$$

2.7.4 Die zuletzt durchgeführte Operation bestimmt die Art der Aufgabe

1) mn + uv Addition
2) m·(uv) Multiplikation
3) m· u + v Addition

2.7.4.1 Multiplikation von Summen (Trimone)

$(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$

die umgekehrte Richtung ist meist komplizierter

$x^2 + 9x + 20$ $(x + 4)(x + 5)$

Vorgehen:

$(x + a)\ (x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + x(a+b) + ab$

$x^2 + \mathbf{9}x + 20$

$1 \cdot 20 \rightarrow$ Summe $(a+b) = 21$
$2 \cdot 10 \rightarrow$ Summe $(a+b) = 12$
$4 \cdot 5 \rightarrow$ Summe $(a+b) =$ **9**

Am schnellsten findet man die alle möglichen Kombinationen von Faktoren durch Primfaktorzerlegung

210 / 2 = 105
105 / 5 = 21
21 / 7 = 3
3

Somit kommen die Primfaktoren 2, 3, 5, 7 vor und damit lassen sich folgende Faktoren erstellen:

$T_{210} = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$

2.7.4.2 Summen als Faktoren

$(a+b)(c+1) \quad = \quad ac + a + bc + b$

und auch umgekehrt

$ac + a + b + bc=$
$a(c+1)+b(c+1)=$
$(a+b)\ (c+1)$

2.7.5 Division

1595 : 319 =
1595 - 319 - 319 -319 …

$$\overbrace{a : b}^{Quotient} = \frac{a}{b}$$

Zähler

Nenner

Divisor

Dividend

Wichtig:

Die Division durch 0 ist nicht erlaubt (definiert)

$\frac{a}{b}\ a, b \in Q; b \neq 0 \quad oder \quad b \notin \{0\}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	Stambrüche
$\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{9}$	echte Brüche
$1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}$	gemischte Zahlen
$\frac{2}{1}, \frac{5}{1}, \frac{7}{1}$	Scheinbrüche

2.7.5.1 Teilbarkeitzregeln

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die letzten 2 Ziffern durch 4 teilbar sind.

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die letzten 3 Ziffern durch 8 teilbar sind.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine null oder eine 5 ist.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist. (Dreierprobe)

Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist und die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist. (Neuenrprobe)

Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Man addiert die Ziffern der Zahl von links nach rechts mit
wechselndem Vorzeichen, beginnend mit +, falls die Zahl eine
ungerade Anzahl von Ziffern hat, andernfalls mit als alternierende Quersumme.
Ist das Ergebnis größer als 10, so bilde man erneut den Elferrest.
78 612 hat man 7 - 8 + 6 - 1 + 2 = 6

2.7.6 Primzahl

Def.: Eine Zahl die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist nennt man Primzahl. Die Zahl 1 ist keine Primzahl.

Die Primzahlen kommen weiter oben weniger vor.

2.7.6.1 Das Sieb des Eratosthenes

	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30

Bild 1: Sieb des Eratosthenes

Man geht beginnend bei 2 und streicht der reihe nach alle vielfache der aktuellen Zahl bis man am Ende des Siebes angelangt ist.

2.7.7 Primfaktorzerlegung

24 $\rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$
63 $\rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$
124 $\rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 31 = 2^2 \cdot 31$

$T_{124} = \{2, 4, 31, 62, 124\}$

2.7.8 Finden der Teiler (T_x)

Bei der Primfaktoren ist es noch relativ leicht, man findet bei 124 leicht alle Teiler:
$T_{124} = \{2, 4, 31, 62, 124\}$

Bei vier wird es bereits komplizierter, aber durch Kombination aller Primfaktoren erhält man die möglichen Teiler, bei vielen Primfaktoren wird das ganze unübersichtlich und es empfiehlt sich die Primfaktoren als Baum (siehe nächste Seite) darzustellen. So lassen sich der Reihe nach alle Produkte bilden. So finden wir alle Lösungen und zweitens sehen alle doppelten Lösungen:

z.B. alle schraffierten sind 42
alle grünen sind 210 und somit die ursprüngliche Zahl (Somit kann man die unterste Zeile im Prinzip auch streichen)

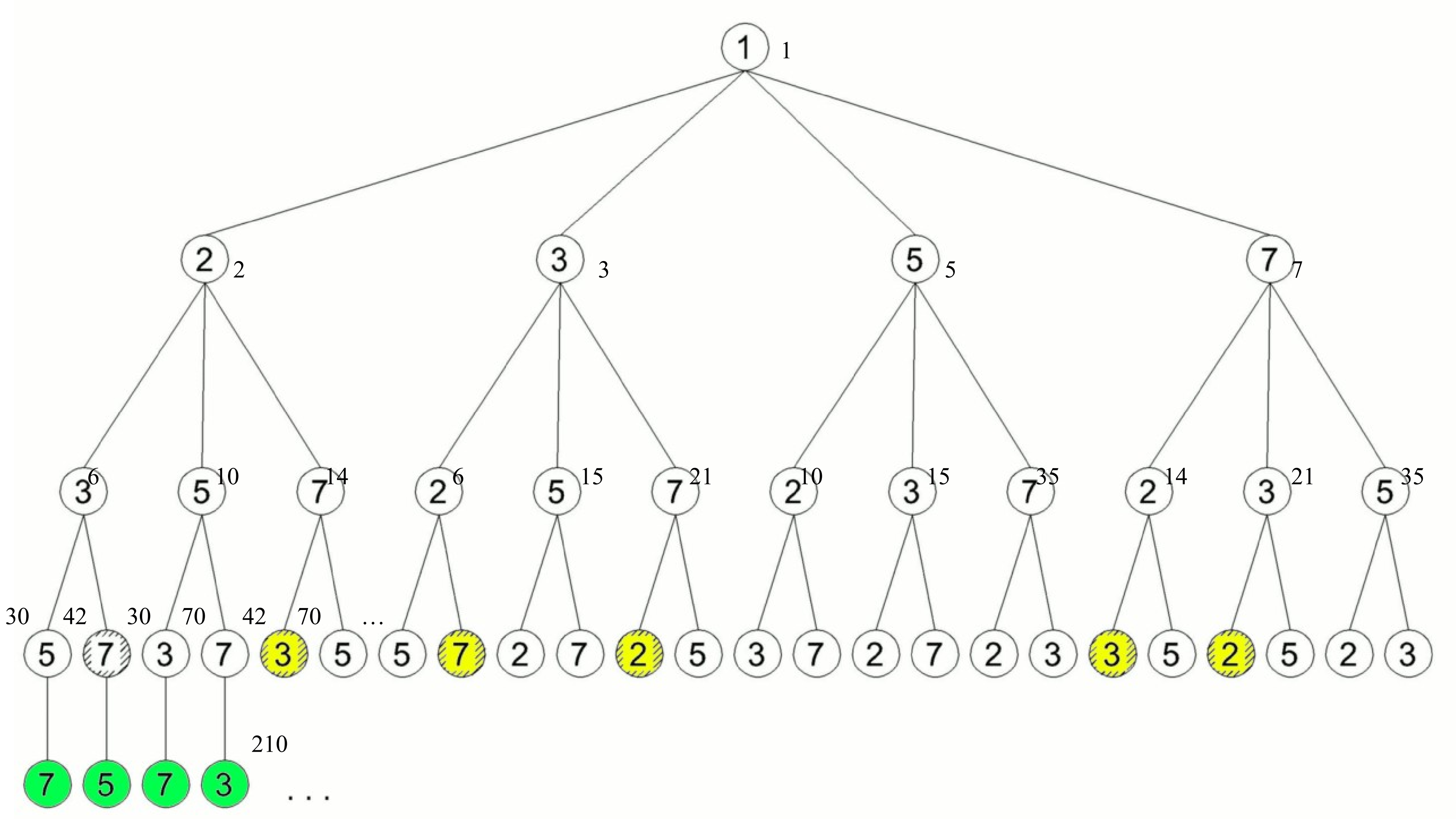


Bild 2: Methode um die Teiler zu finden ohne dabei Fehler zu machen

2.7.8.1 Grösster gemeinsamer Teiler ggT(a,b)

Unter dem grössten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen verstehen wir die grösste Zahl, durch welche man beide ohne Rest teilen kann.

Zuerst werden beide Zahlen in Primfaktoren zerlegt, danach nimmt man die Primfaktoren die in beiden Zahlen vorkommen nach unten. Kommen Primfaktoren in beiden Zahlen mehrmals vor dürfen sie mehrmals nach unten genommen werden, jedoch nur so oft, wie sie in der Zahl mit weniger dieser Primfaktoren vorkommt

ggT(84,56)

```
84 =    2 2      3        7
56 =    2 2 2             7
-----------------------------
        2 2               7        = 2*2*7 = 28
```

ggT(84,56)=28

Weiterführende Literatur: der ggT lässt sich auch mit Hilfe des (modernen) Euklidschen Algorithmus berechnen, dies kommt vor allem dann zu Zuge, wenn man den ggT mit Hilfe eines Computers berechnen will. Noch moderner wird der ggT mit dem erweiterten Euklidschen Algorithmus berechnet.

Euklidscher Algorithmus:
ggT(a,b) = ggT(b,r) wobei für r und q gilt: a=qb+r
pseudocode nach C64 Basic

```
10 a=45, b=20
20 r=a%b
30 a=b
40 b=r
50 if b<>0 goto 10
60 PRINT a
```

2.7.8.2 Kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV(a,b)

Unter dem kleinsten gemeinsamen vielfachen zweier Zahlen verstehen wir die Zahl die sich durch beide anderen ohne Rest teilen lässt

Zuerst werden beide Zahlen wieder in Primfaktoren zerlegt, danach nimmt man von beiden Zahlen von jedem Primfaktor so viele, wie es in der mit mehr dieser Sorte hat. Also jeden Primfaktor in der höchst vorkommenden Potenz.

kgV(42,56)

```
42 =    2        3        7
56 =    2 2 2             7
-----------------------------
        2 2 2    3        7        =  2*2*2*3*7 = 168
```

kgV(42, 56) = 168

Beziehung zwischen kgV und ggT

kgV(a,b) und ggT(a,b) stehen in folgender Beziehung:

$kgV(a,b) \cdot ggT(a,b) = a \cdot b$

somit liesse sich der kgV(a,b) auch folgendermassen berechen: $kgV(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{ggT(a,b)}$

2.7.8.3 Anwendung von kgV und ggT

2.7.9 kgV(a,b)

Der kgV(a,b) wird zum gleichnamig machen von Brüchen gebraucht:

Das kgV($Nenner_1$,$Nenner_2$) entspricht dem Hauptenenner der beiden Brüche haben die beiden Brüchedanach den selben Nenner also den Hauptnenner dürfen sie von einander addiert und subtrahiert werden.

$$\underbrace{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}}_{kgV(2 \cdot 3)=6} \rightarrow \frac{3 \cdot 1}{6} \pm \frac{2 \cdot 1}{6} = \underbrace{\frac{5}{6}}_{+} \Big/ \underbrace{\frac{1}{6}}_{-}$$

2.7.10 ggT(a,b)

Das ggT(Zähler,Nenner) wird zum kürzen von Brüchen gebraucht, man kann Zähler und Nenner jeweils durch den ggT der beiden teilen und erhält so einen gekürzten Burch

$$\frac{26}{39} \Rightarrow ggT(26,39) = 13 \Rightarrow \frac{26:13}{39:13} = \frac{2}{3}$$

2.7.11 Rechnen mit Brüchen

2.7.11.1 Addition und Subtraktion

Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, in dem man ihre Nenner mit Hilfe des kgV gleichnamig macht, und den jeweiligen Zähler mit dem Quotienten des kgV und dem vorherigen Nenner multipliziert.

$$\boxed{\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \frac{x \cdot \left(\frac{kgV(a,b)}{a}\right)}{kgV(a,b)} \pm \frac{y \cdot \left(\frac{kgV(a,b)}{b}\right)}{kgV(a,b)}}$$

Beispiel:

$$\underbrace{\frac{2}{9} \pm \frac{1}{3}}_{kgV(9,3)=9} = \frac{2 \cdot \left(\frac{9}{9}\right)}{9} \pm \frac{1 \cdot \left(\frac{9}{3}\right)}{9} = \frac{2 \cdot (1)}{9} \pm \frac{1 \cdot (3)}{9} = \frac{2 \pm 3}{9}$$

2.7.11.2 Multiplikation

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, in dem man ihre Zähler mit einander Multipliziert und ihre Nenner miteinander Multipliziert.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ Bsp: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

2.7.11.3 Division

Zwei Brüche werden dividiert, in dem man den ersten mit dem Kehrwert der zweiten multipliziert bzw. jeweils den Zähler der ersten mit dem Nenner der Zweiten und umgekehrt multipliziert.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ Bsp: $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Vorsicht, bei Mehrfachdivisionen:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} = (a:b):(c:d) \neq a:b:c:d = a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{bcd}$$

2.7.11.4 Kürzen von Brüchen

$$\boxed{\frac{\cancel{4}\cdot a\cdot \cancel{b}}{\cancel{4}\cdot \cancel{b}\cdot c}=\frac{a}{c}}$$

Spruch: Aus den Summen kürzen die Dummen

$$\frac{ab+ac}{a}=\frac{\cancel{a}b+ac}{\cancel{a}}=\frac{b+ac}{1}$$

dies ist komplett FALSCH.

$$\frac{ab+ac}{a}=\frac{a(b+c)}{a}=\frac{\cancel{a}(b+c)}{\cancel{a}}=b+c$$

dies ist RICHTIG

2.7.11.5 Erweiterungsmethode für Formvariabeln

$$\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{b}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot ab}{\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot ab}=\frac{a^2-ab}{b^2+a}$$

2.7.11.6 Division von Summen

Eine Summe wird dividiert, in dem man jeden Summanden dividiert

$$\frac{a+b-c}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}-\frac{c}{x}$$

$$\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{z}}}}$$

2.7.11.7 Spezieller Fall

$$\boxed{\frac{a-b}{b-a}=-1}$$

2.7.12 Binome

2.7.12.1 Ausklammern gemeinsamer Faktoren

$2ab+2ac+2ad=2a(b+c+d)$

2.7.12.2 Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b)= a^2-b^2$

2.7.12.3 Trinomische Formel

$(a+b+c)^2 = a^2+ b^2+ c^2+2ab+2ac+2bc$

2.7.12.4 Mehrmaliges Ausklammern

$u^2-uv-uw-3u+3v+3w$
$-u(-u+v+w)+3(-u+v+w)$
$(3-u)(-u+v+w)$ oder besser $(u-3)(u-v-w)$

2.7.12.5 komplexere Binome

$(x^2+2)^2 – (x-2)^2$	a^2-b^2
$[(x^2+2)+ (x-2)][(x^2+2)-(x-2)]$	$[a+b][a-b]$
$[x^2+x][x^2-x+4]$	
$x(x+1)(x^2-x+4)$	

2.7.12.6 Besondere Trinome

$x^2+2x-35 = (x+7)(x-5)$

2.7.13 Potenzen

2.7.13.1 Definition

Potenz

a^n

Exponent

Basis

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}} \quad (n \geq 2)$$

Für $a \in R$ *und* $n \in N$ gilt

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^1 = a$

Sonderfall ist 0^0 = nicht definiert, da es durch verschiedene Annäherungesgleichungen auch verschiedene Werte gibt, jedoch in der Informatik (IEEE 754/C99) wird für numerische Zwecke $0^0=1$ gesetzt. (Quelle: Wikipedia::Potenzen)

2.7.13.2 Erweiterung des Potenzbegriffes (n∈ Z)

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m} \quad \boxed{\frac{a^{-m}}{b^n} = \frac{b^{-n}}{a^m} = \frac{1}{a^m b^n}}$$

2.7.13.3 Addieren und Subtrahieren von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponent dürfen addiert bzw. subtrahiert werden

$$\boxed{b \cdot a^n + c \cdot a^n + d \cdot a^n = (b + c - d)a^n}$$ ⌫

2.7.13.4 Multiplikation von Potenzen

Werden zwei Zahlen mit gleichen Basen aber verschiedenem Exponenten multipliziert, werden die Exponenten addiert.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Werden zwei Zahlen mit gleiche Basen aber verschiedenem Exponenten dividiert wir der Exponent des Divisors vom Exponent des Dividend subtrahiert.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \qquad \frac{a^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^{2-2} = a^0 = 1 \qquad \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^{2-3} = a^{-1}$$

Werden zwei Zahlen mit gleichem Exponent und verschiedener Basis multipliziert werden die Basen miteinander multipliziert und danach mit dem gemeinsamen Exponent potenziert.

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n} \; ab^n \neq (ab)^n \qquad 2ax^{-4} = 2a(x)^{-4} \qquad 2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$$

Aufpassen, bei Anfängern wird häufig dann das Addieren der Exponenten mit dem Addieren von Potenzsummen durcheinander gebracht. $a \cdot x^3 + b \cdot x^3 = ab \cdot x^3$ und nicht etwa $\cancel{ab \cdot x^6}$

2.7.13.5 Division von Potenzen

Brüche mit gleichem Exponenten dürfen als Bruch mit gemeinsamem Exponenten geschrieben werden.

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

2.7.13.6 Potenzierung von Potenzen ≠ Potenzierung des Exponenten

Potenzen werden Potenziert, in dem man ihre Exponenten multipliziert.

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m = a^{mn} \neq a^{m^n}}$$

2.7.13.7 Vorzeichen an der Basis

Ist der Exponent einer negativen Basis gerade wird der Ausdruck positiv.

$$\boxed{(-a)^{2n} = a^{2n}} \quad \boxed{(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}} \quad (-a)^2 \neq -a^2$$

$$\boxed{(-a)^n = (-1 \cdot a)^n = (-1)^n \cdot a^n} \qquad (-x)^{2n-6} = (-1)^{2n-6} \cdot x^{2n-6}$$

2.7.13.8 Vorsicht beim Verwechseln von Summen mit Produkten

Vergleiche $(a^{-2} + b^{-3})^{-2}$ mit $(a^{-2} \cdot b^{-3})^{-2}$ **!!!**

2.7.14 Wurzeln

2.7.14.1 Definition

Radix

$$\sqrt[n]{a}$$

Radikant
Wurzelexponent

$$\boxed{\sqrt[n]{0} = 0} \qquad \boxed{\sqrt[n]{1} = 1}$$

$$\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a} \quad \text{für } a \geq 0$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow a = x^n}$$

Gesprochen: „n-te Wurzel aus a“

$$\boxed{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a}$$

$\sqrt{a}$ ist für $a<0$ in $\mathbb{R}$ nicht definiert jedoch in $\mathbb{C}$

2.7.14.2 Erweiterung des Wurzelbegriffs

Wurzeln können auch als Potenzen geschrieben werden. Der der Kehrwert des Wurzelexponent wird als Exponent genommen.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}} \qquad \boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

$$\boxed{a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{1^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}\right) = \left(\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\right) = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a^m}\right)}}$$

2.7.14.3 Addieren und Subtrahieren von Wurzeln

Wurzeln mit gleichem Radikant und gleichem Wurzelexponent dürfen addiert bzw. subtrahiert werden.

$$\boxed{b \cdot \sqrt[n]{a} + c \cdot \sqrt[n]{a} + d \cdot \sqrt[n]{a} = (b + c - d)\sqrt[n]{a}}$$

2.7.14.4 Multiplikation von Wurzeln

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden multipliziert, in dem man das Produkt der beiden Zahlen unter eine Wurzel schreibt. Wurzeln mit unterschiedlichem Wurzelexponenten werden nach untenstehender Formel berechent.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}} \qquad \boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{m \cdot n}}}$$

2.7.14.5 Division von Wurzeln

Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden dividiert, in dem man den Bruch unter eine gemeinsame Wurzel schreibt.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{\ddot{a}}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

2.7.14.6 Radizieren von Wurzeln

Wurzeln werden Radiziert, in dem man die Wurzelexponenten multipliziert.

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{1}{m}}\right)} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}}$$

2.7.14.7 Betrag einer reellen Zahl

Zieht man die Quadratwurzel aus einem Quadrat erhält man den Betrag der Zahl.

$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$ fur alle $a \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

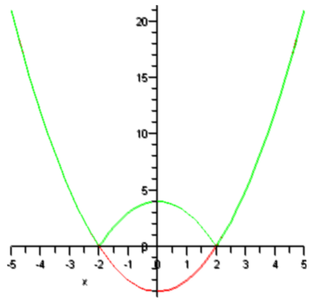
…bzw. der Funktion

$$\boxed{\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|}$$

Beispiel

$f(x) = x^2 - 4$ (rote Kurve)

$|f(x)| = |x^2 - 4|$ (grüne Kurve)



COMING SOON

Höhere Wurzeln aus positiven Zahlen x kann man wie jede Potenz durch Exponentialfunktion und Logarithmus ausdrücken:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right)$$

Logarithmen

Unter **lg a** (oder: $\log_{10}$ a) versteht man den Exponent, mit der man 10 potenzieren muss um a zu erhalten. Es ist die Umkehrfunktion der Exponential Funktion was auch grafisch sehr gut veranschaulicht werden kann in dem man diese an der Geraden *y=x* spiegelt.

2.7.14.8 Definition

$$\boxed{\log_a 1 = 0} \qquad \boxed{\log_a a = 1}$$

$$\boxed{a^n = c} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n = \log_a c}$$

2.7.14.9 Addition von Logarithmen

$$\boxed{\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n}$$

2.7.14.10 Subtraktion von Logarithmen

$$\boxed{\log_a (\frac{m}{n}) = \log_a m - \log_a n}$$

2.7.14.11 Logarithmus einer Potenz

$$\boxed{\log_a (n^m) = m \cdot \log_a n} \qquad \boxed{\log_a (n^{\frac{1}{m}}) = \log_a (\sqrt[m]{n}) = \frac{1}{m} \cdot \log_a n}$$

2.7.15 Lineare Funktion $f(x) = a(x-b)+c$

- Steigung: $a = \Delta y / \Delta x$
- Verschiebung auf x-Achse: b
- Verschiebung auf y-Achse: c
- Zwei-Punkte-Form $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m \quad (x_1 \neq x_2)$
- Achsenabschnittsform einer Geraden: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $\boxed{a \neq 0,\ a \neq 0}$ →Bsp., Steigung gesucht
- Hessesche Normalform einer Geraden $x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha) = p$

2.7.16 Betrag

Ein Betrag ist eine „Fallunterscheidung“

$|a| = \begin{cases} a, \text{ falls } a \geq 0 \\ -a, \text{ falls } a < 0 \end{cases}$ (Für alle $a \in R$)

1. $|a-b| = |b-a|$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|a : b| = |a| : |b|$ (ohne *b=0*)

2.7.17 Betragsfunktion

$y = |x|$

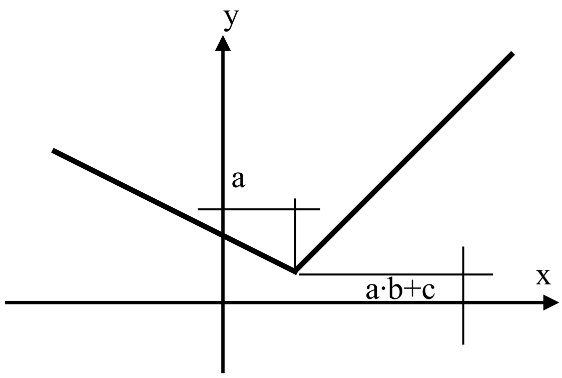
$D[f] = \mathbf{R}$
$W[f] = (0, \infty]$

Überlagerung mit linearer Funktion

$y = f(x) = d\,|x-a| + bx + c$

Steigung:
links: +d-b
rechts: +d+b

$f : x \mapsto |x|$



2.7.18 Ungleichungen

Transitivität

$[a < b \wedge b < c] \Rightarrow a < c$

Addition bzw. Subtraktion von pos. und neg. Zahlen auf beiden Seiten

$$a < b \Leftrightarrow \begin{cases} a + c < b + c \\ a - c < b - c \end{cases}$$

Multiplikation und Division von pos. Zahlen auf beiden Seiten

$$\begin{cases} a < b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases}$$

Multiplikation und Division von neg. Zahlen auf beiden Seiten und Umkehren der Ordnungsrelation

$$\begin{cases} a < b \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$$

Betragsungleichung

Beispiel

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{x+3} \Rightarrow \frac{1-x}{(x+1)(x+3)} \leq 0$$

Vorgehen:

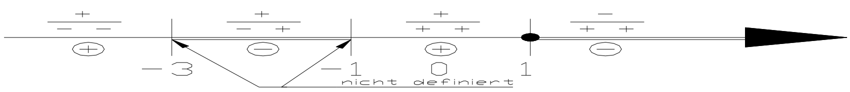
alle Terme auf 1 Seite

Gleichung machen (Produk)

Kritische Punkte suchen (Zähler oder Nenner=0)

mit Nullen vergleichen

kritische Punkte des Zählers prüfen



$$L = \{x \mid -3 < x < -1 \vee x \geq 1\}$$

Ungleichungen

Beispiel

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{x+3} \Rightarrow \frac{1-x}{(x+1)(x+3)} \leq 0$$

$$\boxed{\frac{(x^2 - 36)(2x - 5)}{(x^2 + 3)} \leq 0}$$

trial und error algi: annäherung an null in relationaler darstellung, transitiv oder lösung als matrix

2.7.19 Quadratische Gleichung / Funktion

Haben wir eine Gleichung 2. Grades, das heisst, die unabhängige Variabel kommt in der 2. Potenz vor $x^2 + px + q = 0$ oder $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ können wir diese Gleichung mit Hilfe der Quadratischen Gleichung lösen, in dem wir die Parameter p und q bzw. a, b und c in die Lösungsformel einsetzen.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{bzw.:} \qquad \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Der Vollständigkeithalber hier noch rasch die Herleitung der 2. Formel (gelb):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Big| : a$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \quad \Big| -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \Big| \sqrt{\ }$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c \cdot (4a)}{a \cdot (4a)}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Big| -\frac{b}{2a}$$

Nun nehmen wir an, dass das Glied $\frac{bx}{a}$ dem $2ab$ eines Binoms entspricht und x^2 dem a^2

Teilen wir durch 2ab durch $2a$ so erhalten wir b.

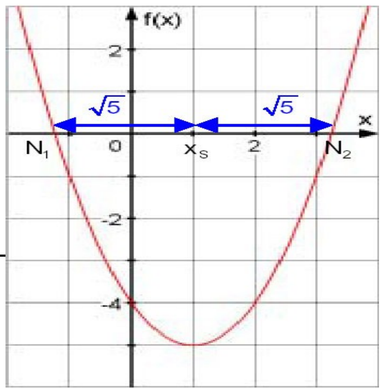
Selbes gilt für unsere Quadratische Gleichung Also teilen wir $\frac{bx}{a}$ durch 2x und erhalten so $\frac{b}{2a}$ für b des Binoms setzen wir das nun in die Binomische Formel ein $(a+b)^2$ so erhalten wir $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ rechnen wir nun zurück sehen wir:

$$x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

dass wir $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ zu viel haben, deshalb zählen wir dies auf der anderen Seite auch dazu, damit wir das Gleichheitszeichen behalten dürfen. Danach muss man nur ein bisschen umformen und erhält so die Lösung $x_{1,2}$.

Das selbe gilt für die p,q – Formel: Als kleine Übung wäre es nun möglich das selbe für die p-q Formel zu tun und zu sehen ob man auf das selbe Resultat kommt.

2.7.20 Parabel



- $x = 0$ → c: Schnittpunkt mit der y-Achse, d.H. jede Parabel ohne c geht durch [0/0]
- $y = 0$ → Linearfaktoren
- ausschliesslich a ist für die Form der Parabel verantwortlich
- Darstellung eines Punktes: $P_n(x_p/y_p) \in p$; $y_p=x_p^2$
- Verschiebung allgemein: $y - y_0 = f(x - x_0)$ → Parabelscheitelform: $y - \Delta y = (x - \Delta x)^2$
- Satz von Vieta: $x^2 + px + q = 0 = (x - x_1)(x - x_2)$ gilt $x_1 \cdot x_2 = q$, $x_1 \cdot x_2 = q$
- $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ → Scheitel bei $\dfrac{-b}{2a}$ da die Parabel symmetrisch ist.
- $\dfrac{-b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ → $t = \dfrac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot x}}{2 \cdot a} \Rightarrow ... \Delta t = \dfrac{\Delta v}{\Delta a}$

$$\boxed{S(x/y) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)}$$

- $x_s = \dfrac{-b}{2a}$, $r = c - as^2 = c - \dfrac{b^2}{4a}$ $\left(x + \dfrac{b}{2a} \right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow | x + \dfrac{b}{2a} | = \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{2|a|}}$
  Parabelverschiebung separat
- $x^2 : a = a$ Substitution: $x^8 - 3x^6 + 2x^4 = 0$
- $x^1 : b = -2ax_s$ $x^4(x^4 - 3x^2 + 2) = 0$
- $x^0 : c = ax_s^2 + r$ $x^4(x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0$

$$x^4(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 1)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$L_x = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, -1\}$$

- $x_1 + x_1 = \dfrac{-b}{a}$ $x_1 \cdot x_1 = \dfrac{c}{a}$
- $\dfrac{x^2}{a^2} + ?\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ → a = ½ r, Brennpunkt?

2.7.21 Polynome

TODO: Binomialkoeffizient, Pascalsches Dreieck, etc

2.7.21.1 Horner Schema

	a_3	a_2	a_1	a_0
X_0		$a_3\,x_0$	$(a_2 + a_3\,x_0)\,x_0$	$(a_1 + a_2\,x_0\,a_3\,x_0^2)\,x_0$

4. Durch Addition erhält man die zweite Zahl dann der dritten Zeile, usw

Gesucht ist der Wert des Polynoms an der Stelle *x=-2* bezeichnet.

```
p:=a[n];
  for i from n to 1 by –1 do
    p= p*x+a[i-1]
  od;
```

Satz: Falls ein Polynom an der Stelle *(x=a)* den Wert Null annimmt, dann ist es durch *(x-a)* ohne Rest teilbar

2.7.21.2 Signum Funktion

$$\mathrm{signum}: \mathrm{x} \mapsto \frac{|\mathrm{x}|}{x}$$

$$D[signum] = R \setminus \{0\}$$

$$sig(x) = \begin{cases} 1 \, f\ddot{u}rx > 0 \\ -1 \, f\ddot{u}rx < 0 \end{cases}$$

2.7.21.3 Heavyside Funktion

$$H_0 : x \mapsto \frac{signum(x)+1}{2}$$

$$D[H_0] = R \setminus \{0\}$$

$$H_a(x) = H_0(x-a)$$

$$H_0(x) = \begin{cases} 1 \, f\ddot{u}rx > a \\ 0 \, f\ddot{u}rx < a \end{cases}$$

Rechtecksfunktion

$f : x \mapsto H_0(x) - H_1(x)$

$$D[f] = R \setminus \{0{,}1\}$$

Graph von $f : x \mapsto \frac{|\sin(x)|}{\sin(x)}$

tangente in sin(x)=|1

|

$$|a| = \begin{cases} af\ddot{u}ra > 0 \\ -af\ddot{u}ra < 0 \end{cases} adurch \sin x\ddot{a}ndern$$

2.7.22 Operatoren und Konstanten

2.7.23 Summenoperator:

COMING SOON

2.7.24 Produktoperator

$$\prod_{Start}^{Endzahl} x_n$$

Beispiel:

$$\prod_{k=3}^{6} n = 3*4*5*6$$

2.7.25 Fakultäts-Operator (engl. factorial):

Anzahl Permutationen von n objekten
0! =1, separat definiert
n!=n(n-1)!

2.7.25.1 Fibonacci

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …
$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$

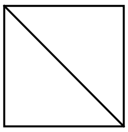
2.7.26 Binomialkoeffizienten (engl. Binomialcoeff., n choose m)

BeispieleLotto: 6 aus 42

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{m-1}\binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$$

$$\boxed{\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}} \qquad \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n_m)}{m!}$$

$$\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x}$$



Die Koeffizienten lassen sich auch aus dem Pascalschen Dreieck berechnen, unten ein Pascalsches Dreieck welches mit Hilfe dieses Algorithmus auf dem Computer gerechnet wurde. Wobei n der Zeile entspricht, beginnend bei 0 und m der „Spalte“

Beispiel: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot \cancel{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10$

$$\boxed{\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

n

m

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1
1 17 136 680 2380 6188 12376 19448 24310 24310 19448 12376 6188 2380 680 136 17 1
1 18 153 816 3060 8568 18564 31824 43758 48620 43758 31824 18564 8568 3060 816 153 18 1
1 19 171 969 3876 11628 27132 50388 75582 92378 92378 75582 50388 27132 11628 3876 969 171 19 1
1 20 190 1140 4845 15504 38760 77520 125970 167960 184756 167960 125970 77520 38760 15504 4845 1140 190 20 1

2.7.26.1 Polynom in Binomialdarstellung

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n-k)} \cdot b^k \qquad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{(n-k)} \cdot b^k$$

2.7.27 Modulo-Operator (%)

COMING SOON

2.8 Naturkonstanten

2.8.1 Eulersche Zahl

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Die Folge lautet $\langle e_n \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle = 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27} \dots$ die Folge konvergiert bei e^1

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Die Folge lautet $\langle e_n \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right\rangle = 2^x, \left(\frac{9}{4}\right)^x, \left(\frac{64}{27}\right)^x \dots$ die Folge konvergiert bei e^x

```
Compi-Algi für e, Genauigkeit abhängig von n und konvergiert
schneller als obenstehende Folgen
```

$$e := \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{n!}$$

2.8.2 Die Zahl π (oder die Quadratur des Kreises)

Agypten 1850 v.Chr. „Moskoauer Papyrus“ und 1650 v. Chr. “Papyrus Rhind” man vermutet, dass man von wassergefüllten Zylindern und Quadern herleitete. Hierzu: die Formel für den flächeninhalt war den Ägyptern bekannt...
Babylonien um die selbe zeit Approximation auf π=~3
Bibel ca. 550 v.Chr und Talmud ca. 500 v.Chr
Bibel: „Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum anderen zehn Ellen…, und eine Schnr von dreissig Ellen war das Mass ringsherum"
Talmud: „Was im Umfange drei Handbreiten hat, ist eine Hand breit.“
Indien(ca. 800 v. Chr.), Priesterhandbücher „Sulba-sûtras“: 3,088326
Griechenland: Antiphon (430 v.Chr) begann Vielecke mit immer grösserer Seitenzahl einem Kreis einzubeschreiben. Idee: Jedes Polygon lässt sich in ein Quadrat verwandeln.
Hippias von Elis (ca, 425 v.Chr.) Quadratrix …
Hippokrates von Chios (5. Jahrhundert v.Chr.) wies nach, das der Flächeninhalt von Kreisen immer im selben Verhältnis zum Quadrat des Durchmessers steht.
Archimedes (287 – 212 v. Chr.) $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$
Archimedes zerteilte einen Einheitskreis in Sektoren und legte diese jeweils abwechselnd zu einem „Rechteck“
von Tsu Chu'ung-Chi (430-501) und seinem Sohn:
355/113 (Sechs gültige Stellen, also 3.14159)
Die Methode von Archipels
Dann wäre die Leibnizreihe, die jedoch nur sehr sehr sehr langsam konvergiert: bei 20000 Summanden stimmen grad mal 5 Stellen (→3.1415)

Leibnizreihe

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 1}{2\,n+1}$$

Da Leibnizreihe sehr langsam ist besserer Algorithmus gesucht: COMING SOON

Ansatz: $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Buffon'sches Problem COMING SOON

Funktionen
Koordinatensysteme
Kartesische Koordinaten
Beliebiger Punkt P(x,y)
COMING SOON

3 Matrix Rechnen TODO

Themen

Beispiel: Ermittlung zukünftiger Spielleistungen von Teams an Hand der vergangenen Spiele. Daten sollen auf der Basis von eigener Spielstärke und der Stärke der anderen Mitspieler errechnet werden.

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}$$

Gewichtung der Manschaft i mit der Stärke des jeweiligen Gegners.

$$r_i = (a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \ldots + a_{iN}r_N)/n_i, i = 1,2,\ldots,N.$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2N} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \cdots & \alpha_{NN} \end{pmatrix}$$

4 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

4.1 Erweiterung der Reellen Zahlen

Es gibt noch eine weitere Zahlenmenge: Die Menge der Komplexen Zahlen. Diese sind ein nützliches Werkzeug in der komplexen Wechselstromrechung. Zuerst müssen wir aber sehen, was eine Komplexe Zahl überhaupt ist:

Bsp:
Wir haben die Gleichunng $x^2 - 4x + 13$. Lösen wir sie mit der Formel für die Quadratische Gleichung erhalten wir $2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}$. Da die Wurzel aus negativen Zahlen in den Reellen Zahlen nicht definiert ist, müssen wir uns etwas einfallen lassen: Wir definieren die Imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$
Somit erhalten wir für den oberen Term:
$2 \pm \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 2 \pm \sqrt{9} \cdot i = 2 \pm 3 \cdot i$

Quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

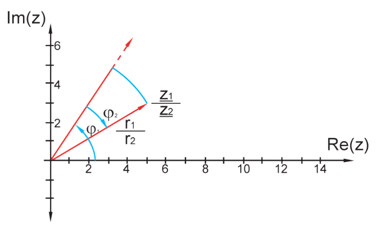
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

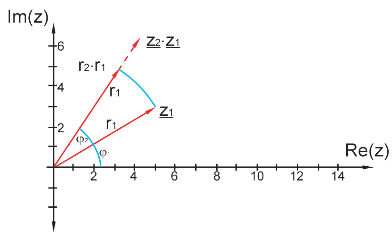
Definition: Als komplexe Zahl verstehen wir eine Summe aus einer reelen Zahl (x) und einer imaginären Zahl (y).

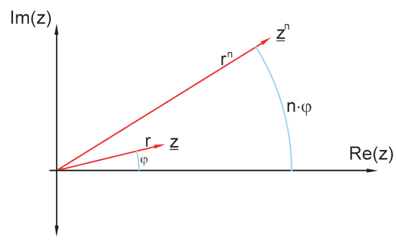
$$\boxed{z = x + yi}$$

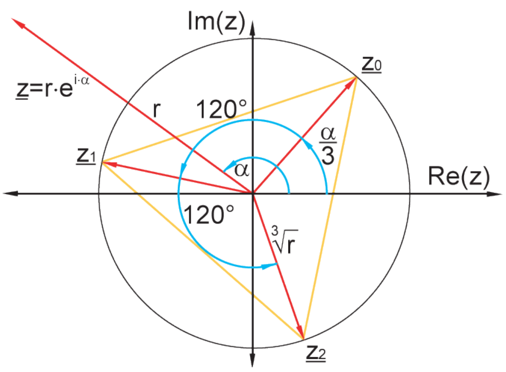
$$C = \{z \mid z = x + yi; x, y \in R\}$$

Die Guasssche Zahlenebene









5 Limes

5.1 Was ist der Grenzwert einer Funktion

Als Grenzwert bezeichnen wir den Wert der eine Funktion bekommt wenn man sich einem wert der nicht erlaubt ist so weit nähert wie möglich.

z.B. $\frac{1}{x}$ ist an der stelle 0 nicht definiert, da eine Division durch 0 nicht erlaubt ist. Wir dürfen uns jedoch beliebig nahe an den Wert 0 nähern und sehen dabei, dass wir immer grössere Zahlen bekommen. Wir schreiben diesen Sachverhalt folgendermassen:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ nun stellt sich noch die frage ob es $-\infty$ oder ∞ ist dies können wir folgendermassen beantworten $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

5.2 Rechenregeln

$$\lim_{x \to x_0} \left(C \cdot f(x) \right) = C \cdot \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) \right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)}{\cdot \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \right)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^n$$

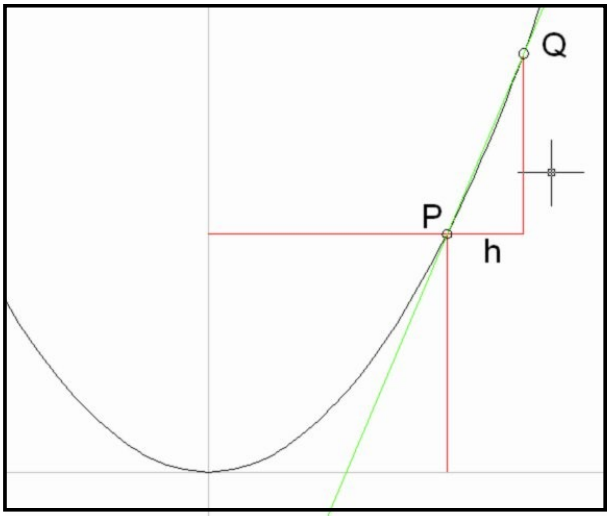
$$\lim_{x \to x_0} \left(a^{f(x)} \right) = a^{\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\log_a f(x) \right) = \log_a \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)$$

6 Differenzieren

6.1 Was ist Differenzieren

Unter Differenzieren einer Funktion f(x) an der Stelle x, versteht man das Berechnen der Steigung der Tangente an diese Funktion im Punkt P(x, f(x)).



Man sagt diesem Grenzwert, falls vorhanden, Ableitung der Funktion y=f(x) an der Stelle z.B. x=1:

y'(x), $f'(1)$ oder $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

Dies geschieht folgendermassen:
Mann nimmt einen zweiten Punkt Q in der Nähe des Punktes P an. Dieser hat die Koordinaten $x_Q=x_P+h$ $y_Q=f(x_P+h)$ Lässt man nun den Punkt Q gegen P wandern, nähert sich die Sekante PQ immer mehr der Tangente in P.

Die Steigung $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Sekante(PQ) dieser Potenzfunktion ist

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_P+h)-f(x_P)}{h}=\frac{(x_P+h)^n-x_p^n}{h} \quad \textit{für} \quad f(x)=x^n$$

6.2 Differenzieren an der Stelle x=0

Wir lassen nun den Punkt P z.B. (1,1) auf dem Graphen von x^2 Richtung Q(1+h,f(1+h)) wandern. $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(1+h)^2-1}{h}$ daraus folgt $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2+2h+1-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h+2=2$
somit ist die Steigung der Tangente an die Kurve $y=x^2$ 2.

Dies lässt sich genau so auch für $f(x)=x^3$, $f(x)=x^4$… durchführen. Wobei einem das Pascalsche Dreieck nützliche dienste erweist beim ausmultiplizieren von $(1+h)^n$.
Setzen wir $q=1+h$ gilt ausserdem

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^n-1}{h}=\lim_{q\to 1}\frac{q^n-1}{q-1}=n$$

6.3 Allgemein

Wir drücken das nun allgemein aus:

x sei P_x
Δx sei Q_x-P_x

So ergibt $f'(x)$ für $f(x)=x^n$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\frac{\left(x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x^1+\binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\binom{n}{3}x^{n-3}\Delta x^3\ldots\Delta x^n\right)-x^n}{\Delta x}$$

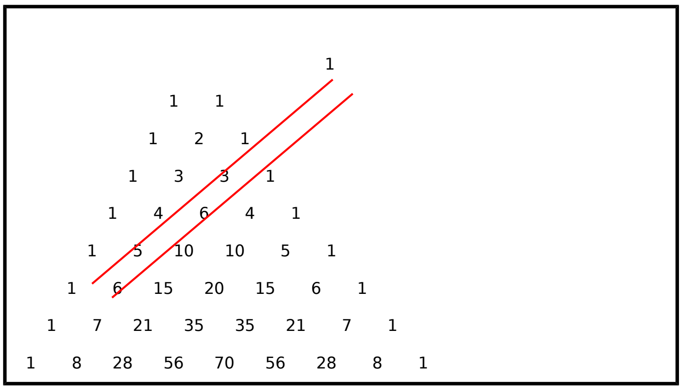
$$=\frac{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\Delta x^k\right)-x^n}{\Delta x}=\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x^1+\binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\binom{n}{3}x^{n-3}\Delta x^3\ldots\Delta x^n}{\Delta x}$$

$$=\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^1+\binom{n}{3}x^{n-3}\Delta x^2\ldots\Delta x^n$$

Nun bestimmen wir den Grenzwert für Δx gegen 0:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^1+\binom{n}{3}x^{n-3}\Delta x^2\ldots\Delta x^n$$

wir sehen leicht, dass alle Glieder bis auf das erste verschwinden
$\binom{n}{1}x^{n-1}$



Auf dem Pascalschen Dreieck ist deutlich zu sehen, dass das $\binom{n}{1}=n$ ist und daraus folgt nun für unsere Gleichung $\binom{n}{1}x^{n-1}$ =
$n\cdot x^{n-1}$

6.4 Ableitungen

Auf ähnliche weise lassen sich auch die Ableitungen anderer Funktionen herleiten.

f(x)	*f´(x)*
c = konstante	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
sin x	cos x
cos x	-sin x
tan x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
cot x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctan x	$\frac{1}{1+x^2}$
arccot x	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
sinh x	cosh x
cosh x	-sinh x
tanh x	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
coth x	$\frac{1}{\sinh^2 x}$
arsinh	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
arcosh	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
artanh x	$\frac{1}{1-x^2}$
arcoth x	$\frac{1}{1-x^2}$

6.5 Rechenregeln

6.5.1 Faktorregel

Konstante Faktoren bleiben beim Differenzieren erhalten

$$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x) \qquad \text{(C: Konstante)}$$

6.5.2 Summenregel

Bei Summen von Funktionen darf gliedweise differenziert werden

$$y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \ldots f_n(x) \Rightarrow$$
$$y' = f'_1(x) + f'_2(x) + f'_3(x) + f'_4(x) + \ldots f'_n(x)$$

6.5.3 Produkteregel

Ein Produkt von Summen $y = u(x) \cdot v(x)$ wird nach der Produkteregel abgeleitet

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

6.5.4 Produkteregel bei drei Faktoren

$$\frac{d}{dx}(uvw) = u'vw + uv'w + uvw'$$

6.5.5 Quotientenregel

Quotienten von Funktionen werden nach der Quotientenregel abgeleitet

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

6.5.6 Kettenregel

Das Ableiten verketteter Funktionen $y = F(u(x)) = f(x)$ erhält man als Produkt der inneren und äusseren Ableitung:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

oder anders ausgedrückt

$$x \to h(x) \to g(h(x))$$
$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = g'(g(x)) \cdot h'(x)$$

Beispiel:

$$y = \sqrt{x^4 + x} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad u = x^4 + x$$

$$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad u' = 4x^3 + 1$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (4x^3 + 1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot (3x^2 + 1) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}$$

Geometrie

6.6 Grundlegende Begriffe

1) Punkte . x A, B, C	A_{bel}	beliebiger Punkt A
2) Strecken	a, b, c	Strecken a, b, c
3) Strecken	$\overline{AB}$	Strecke von A nach B
4) $\lvert a \rvert$	$\lvert\overline{AB}\rvert = \lvert a \rvert$	Länge der Strecke $\overline{AB}$ bzw. a, z.B. $\lvert a \rvert$ =4cm
5) g Gerade	g	Gerade
6) AB	AB	Gerade durch die Punkte A und B
7) $\overline{AB}$	$\overline{AB}$	Strahl (Halbgerade) von A aus
8) $A \in g$		A ist Punkt auf der Geraden G
9) $g \cap h = S$		Die Geraden g und h schneiden sich in S
10) $g \parallel h$		g ist parallel zu h
11) $\overline{AB} > \overline{CD}$		$\overline{AB}$ ist grösser als $\overline{CD}$
12) $\angle\alpha$		Winkel α
13) $\angle CAB$		Winkel durch C, A, B
14) $\angle(b;c)$		Winkel zwischen b und c
15) f.s.v. α		Freier Schenkel von α
16) $\overset{\frown}{AB}$		Bogen von A nach B
17) R, ⦝		Rechter Winkel, 90° Winkel
18) ⊙(M, r= $\overline{AB}$)		Kreis um M mit Radius $\overline{AB}$
19) $\angle\alpha$ in A → g		Gerade von Punkt A aus mit Winkel α

Das griechische Alphabet:

αA	βB	γΓ	δΔ	εE	ζZ	ηH	ϑΘ	ιI	κK	λΛ	μM	νN
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta	Jota	Kappa	Lambda	My	Ny
ξΞ	oO	πΠ	ρP	σΣ	τT	υY	φΦ	χX	ψΨ	ωΩ		
Xi	Omikron	Pi	Rho ϱ	Sigma	Tau	Ypsilon	Phi	Chi	Psi	Omega		

6.7 *Winkel*

Grundkonstruktion

Übertragen eines Winkels CAB

1. g von A
2. $\odot$ (A', r= $\overline{AB}$)=K
3. g$\cap\odot$ K=B'
4. $\odot$ (B, r= $\overline{BC}$)$\cap$=C'
5. h: A'C' $=\angle\alpha$

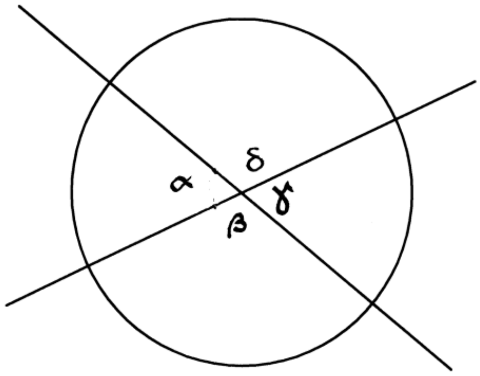
6.7.1 Verschiedene Winkel

Spitzer Winkel	$0^\circ<\alpha<90^\circ$
Rechter Winkel	$\alpha=90^\circ$
Stumpfer Winkel	$180^\circ<\alpha<90^\circ$
Gestreckter Winkel	$\alpha=180^\circ$
Überstumpfer Winkel	$180^\circ<\alpha<360^\circ$
Vollwinkel	$\alpha=360^\circ$

Positiver Drehwinkel ist gegen den Urzeigersinn.

Erhebungswinkel = Winkel beim Beobachter der z.B. auf einen Turm hinauf blickt
Tiefenwinkel = Winkel beim Beobachter, der z.B. von einem Ballon herunter blickt
Sehwinkel = Winkel beim Beobachter in der Ebene.

Winkel an zwei sich schneidenden Geraden



4 Winkel α, β, γ, δ

Definition Nebenwinkel

Sie haben einen Schenkel und den Scheitelpunkt gemeinsam. Die freien Schenkel bilden eine Gerade.

Du Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180° = 2R
Sind Nebenwinkel einander gleich so ist jeder 90°
α und β β und γ γ und δ δ und α

Definition Scheitelwinkel

Sie haben den Scheitelpunkt gemeinsam. Die Schenkel bilden paarweise eine Gerade.

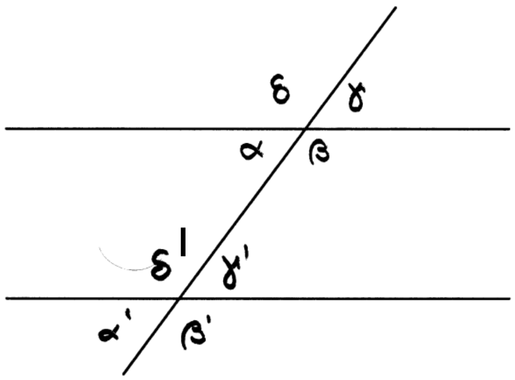
α und γ β und δ

Scheitelwinkel sind einander gleich

Komplementwinkel sind Winkel die zusammen 90° ergeben

Supplementwinkel sind Winkel die zusammen 180° ergeben

6.7.2 Winkel an geschnittene Parallelen



Stufenwinkel

Sind gleich liegende und gleich grosse Winkel:

α und α'   β und β'   γ und γ'   δ und δ'

Wechselwinkel

Sind gleich gross

α und γ'   β und δ'   γ und α'   δ und β'

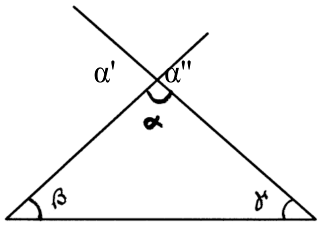
Entgegengesetzte Winkel = Gegenwinkel (Frommenweiler)

Sind zusammen 180°

α und δ'   β und γ'   γ und β'   δ und α'

6.7.3 Winkel am Dreieck

Allgemeines Dreieck

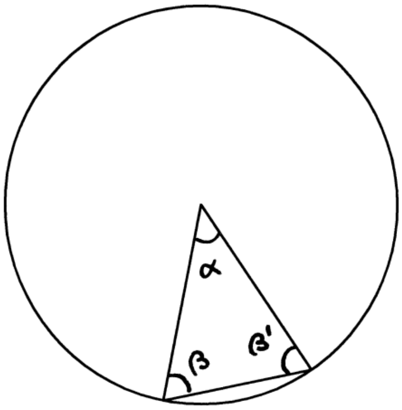


$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\beta + \gamma = \alpha' = \alpha''$$

Die Summe aller Innenwinkel beträgt 180°
Die Summe aller Aussenwinkel beträgt 380°

Gleichschenkliges Dreieck



$$\alpha + \beta + \beta' = 180°$$

$$\beta = \beta' = \frac{180° - \alpha}{2}$$

6.8 Seiten und Winkel im Dreieck

- a+b > c

Satz: Die Summe zweier Seiten ist immer grösser als die Gegenüberliegende Seite

Satz: In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

Satz: Der grösste Winkel liegt gegenüber der längsten Seite

- **Gleichheit – Ähnlichkeit – Kongruenz (Flächengleichheit)**

Zwei Flächen heissen kongruent (Flächengleich) wenn sie in der Grösse und Form übereinstimmen.

Bei ähnlichen Dreiecken stimmt nur die Form überein z.B. alle die Winkel gleich sind.

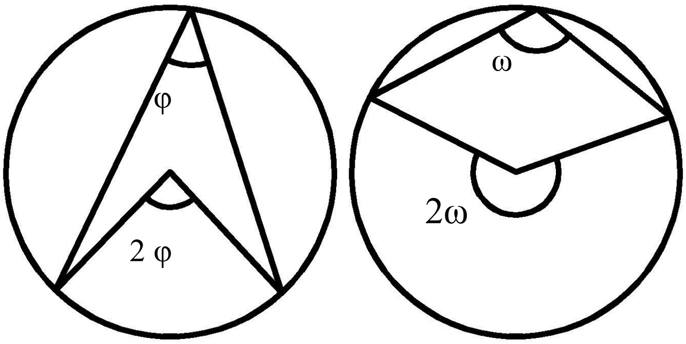
6.8.1 Die vier Kongurenzsätze

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt ist:

- Zwei Winkel der Dreiecke stimmen überein
- Das Verhältnis zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels stimmen überein
- Das Verhältnis zweier Seiten und der Winkel gegenüber der längeren Seite stimmt überein
- Das Verhältnis aller Seiten stimmt überein

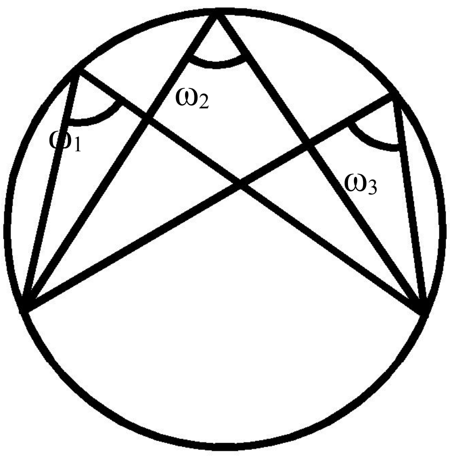
6.8.2 Winkel am Kreis

Zentriwinkel und Periferiewinkel



Ein Peripheriewinkel ist hab so gross wie der zugehörige Zentriwinkel.

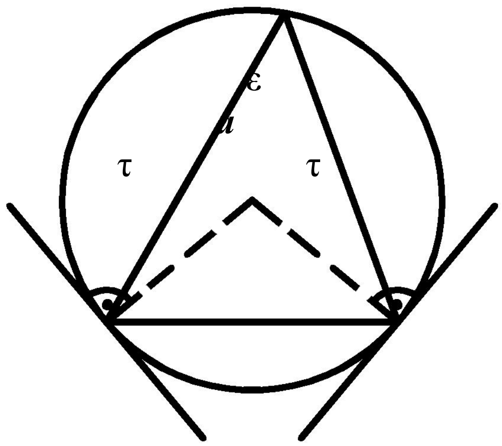
Periferienwinkel



Alle Periferienwinkel auf dem selben Kreisbogen haben den gleichen Winkel

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_2$

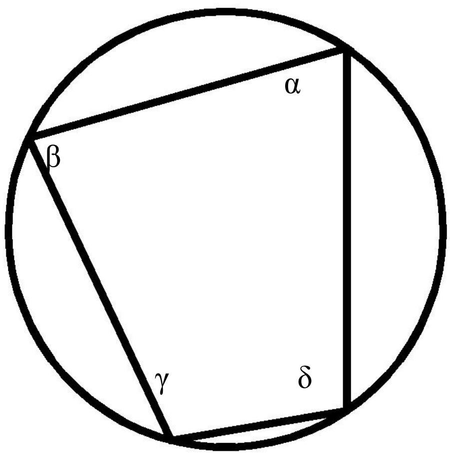
Sehnentangentenwinkel



Die beiden Sehnentangentenwinkel τ sind jeweils jeder so gross wie der dazugehörige Periferiewinkel ε.

Ein üblicher **Beweis** dafür ist, dass wenn wir die Sehne ***a*** gegen den Kreis wandern lassen streben ε und τ gegen 0° und wenn wir ***a*** nach oben verschoben wird streben die drei Winkel alle gegen 180°. Wenn wir ***a*** auf dem Zentrum des Kreises halten bekommen wir einen Thaleskreis mit einem ε von 90° und dem dazugehörigen τ auch mit 90°. Somit kann angenommen werden, dass wenn 3 Punkten stimmen, dass auch alle anderen Punkte stimme.

Sehnenviereck



Ein Viereck, dass einen Umkreis hat, heisst Sehnenviereck und darin gegenüberliegende Winkel sind zusammen jeweils 180°.

$\alpha + \gamma = 180°$

$\beta + \delta = 180°$

7 Trigonometrie

7.1 Polarkoordinaten

Beliebiger Punkt: Q(r, φ)

$\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$ $\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$ $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$

Wobei x,y Koordinaten des Kartesischen Koordinatensystems sind und φ der Winkel beim Nullpunkt ist. Dabei ist der Quadrant zu beachten und entsprechend zu berechen

7.2 Winkelfunktionen

Algorithmus: zuerst auf 360° „kürzen" auch wegen der Prozessorregister(...) und auch wegen und/oder Berechnungszeit, wenn kein Abbruch des Floats, danach berechnen z.B. mit dem Sinus Algorithmus (z.B. Taylor)

HERLEITUNG!

sin(x)=sin(x „mod" (2π))

$$\sin(\varphi) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{(n\,2+1)}}{(n\,2+1)!}$$

TODO: Mac Laurinsche Reihe von SIN

$\varphi_0 = k * \pi \Leftrightarrow \varphi_0 = k * 180° \quad k \in Z$

$$\cos(\varphi) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{(2\,n)}}{(2\,n)!}$$

TODO: Mac Laurinsche Reihe von COS

$\varphi_0 = k * \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi_0 = k * 180° + 90 \quad k \in Z$

arcsin, arccos COMING SOON

$$\tan(\varphi) := \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}(-1)^n = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Herleitungen der Winkelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen

Maple bzw. (fast) jeder Taschenrechner kann das, somit ist dies für den stolzen Besitzer eines Taschenrechners irrelevant.

Funktionstabellen im Formelbuch (z.B. Brandenberger)

7.2.1 Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Für Tangens und Kotangens gilt: $\forall \varphi \neq 0$

$\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\varphi)$ $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\varphi)$

$\sin(\alpha) \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\cos(\alpha) \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\varphi)$ $\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \sin(\varphi)$

$\sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$ $\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$

$\sin(\varphi - \pi) = -\sin(\varphi) = \sin(-\varphi)$ $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\varphi)$

$\tan(\alpha) \equiv \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\cot(\alpha) \equiv \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ $\cos(2\alpha) \equiv \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$\cos(2\alpha) \equiv 2\cos^2(\alpha) - 1$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \frac{a}{r} = \frac{b}{r} + \frac{c}{r} = \frac{a}{e} \cdot \frac{e}{r} + \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{r}}$$

Beweis nur für $0° < \alpha < 90°$ →Complex Numbers

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(101^n \cdot x)}{100^n}$$

Weierstrassfunktion by Karl Weierstrass
Zitat von Weierstrass
"Es ist unmöglich, ein Mathematiker zu sein, ohne die Seele eines Dichters zu haben"

$\left(\frac{g}{h}\right)^2 + \left(\frac{a}{h}\right) = \frac{g^2 + a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2}$ $\frac{g}{a} = \frac{\frac{g}{h}}{\frac{a}{h}} = \frac{g \cdot h}{h \cdot a}$

$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ $1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
$\sin(\alpha) =$		$\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$	$\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}$
$\cos(\alpha) =$	$\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	$\frac{\cot(\alpha)}{\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}$
$\tan(\alpha) =$	$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$		$\frac{1}{\cot(\alpha)}$
$\cot(\alpha) =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha)}$	$\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\tan(\alpha)}$	

$$1+\tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} - 1$$

$$\tan^2(\alpha) = \frac{1-\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\sin^2(\alpha)}{1-\sin^2(\alpha)}$$

$$\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{y}{r} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{x}{r} \text{ einsetzen}$$

Spezielle Winkel

φ	0° 0	30° π/6	45° π/4	60° π/3	90° π/2	120° 2π/3	135° 3π/4	150° 5π/6	180° π
Sin(φ)	0	1/2	(2^1/2)/2	(3^1/2)/2	1	(3^1/2)/2	(2^1/2)/2	1/2	0
cos(φ)	1	(3^1/2)/2	(2^1/2)/2	1/2	0	-1/2	-(2^1/2)/2	-(3^1/2)/2	-1
tan(φ)	0	1/(3^1/2)	1	3^(1/2)	nicht def.	-3^(1/2)	-1	-1/(3^1/2)	0
cot(φ)	nicht def.	3^(1/2)	1	1/(3^1/2)	0	-1/(3^1/2)	-1	-3^(1/2)	nicht def.

φ	180° π	210° 7π/6	225° 5π/4	240° 4π/3	270° 3π/2	300° 5π/3	315° 7π/4	330* 11π/6	360° 2π
sin(φ)	0	-1/2	-(2^1/2)/2	-(3^1/2)/2	-1	-(3^1/2)/2	-(2^1/2)/2	-1/2	0
cos(φ)	-1	-(3^1/2)/2	-(2^1/2)/2	-1/2	0	1/2	(2^1/2)/2	(3^1/2)/2	1
tan(φ)	0	1/(3^1/2)	1	3^(1/2)	nicht def.	-3^(1/2)	-1	-1/(3^1/2)	0
cot(φ)	nicht def.	3^(1/2)	1	1/(3^1/2)	0	-1/(3^1/2)	-1	-3^(1/2)	nicht def.

Eselsbrücke:

$$\sin(0°)=\frac{\sqrt{0}}{2} \quad \sin(30°)=\frac{\sqrt{1}}{2}$$
$$\sin(45°)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin(90°)=\frac{\sqrt{4}}{2}$$

7.2.2 Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1=(\frac{y}{r})^2+(\frac{x}{r})^2$$

7.3 Winkelfunktionen am allgemeinen Dreieck

Sinussatz

$$\frac{2r}{1}=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

r: Umkreisradius man zeichne ihn in. Spezialfall sin(90)=1

Wie folgt(?) daraus die Winkelhalbierende im Dreieck $\varphi_1=\varphi_2 \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{m}{n}$

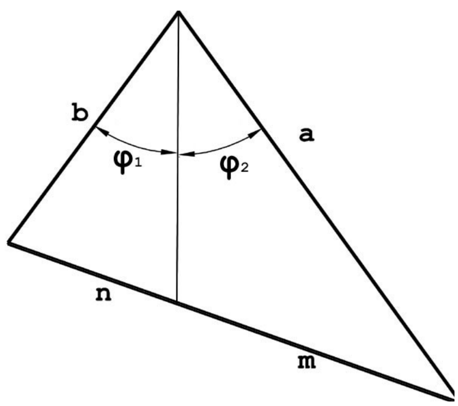


Fig 1: Winkelhalbierende im Dreieck

Cosinussatz
Im allgemeinen Dreieck gilt:
$x^2 = u^2 + w^2 - 2uw \cdot \cos\varphi$

Herleitung

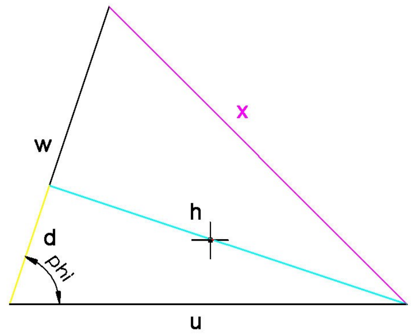
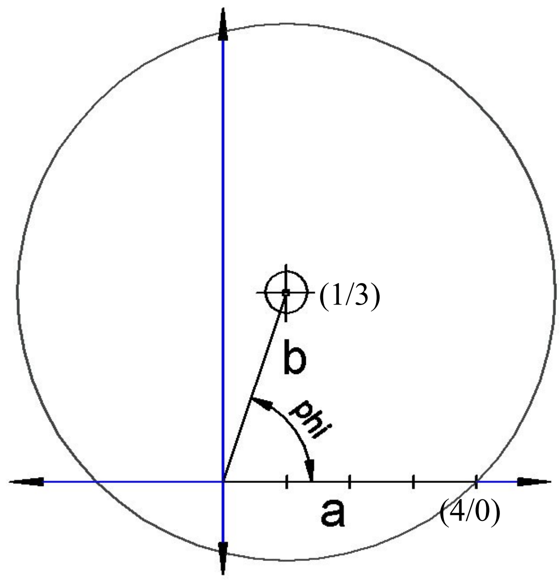


Fig x: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ muss hier Bekannt und auch hergeleitet werden.(?)

$$x = \sqrt{h^2 + (w-d)^2}$$
$$= \sqrt{u^2 \cdot \sin^2\varphi + (w - u\cdot\cos\varphi)^2}$$
$$= \sqrt{u^2 \cdot \sin^2\varphi + w^2 - 2uw\cdot\cos\varphi + u^2\cdot\cos^2\varphi}$$
$$= \sqrt{u^2 \cdot (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + w^2 - 2uw\cdot\cos\varphi}$$

ndere Ansatz einer Herleitung:



Mein (ich bin ja bestimmt der erste...) Ansatz:
man nehme a, b und φ und wandle alles in kartesche Koordinaten um, um danach $|\vec{r_a} - \vec{r_b}|$ mit der Kreisgleichung aus dem Papula (III-96) vergleichen zu können.(?)

Additionstheoreme (Herleitung1?)

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} + \frac{\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} = 1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)$$

$$\frac{tan(x)}{sin(2\$x)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos(x)^2}$$

Kommentar: Der Erfinder dieser Gleichung muss bis zu einem bestimmten grad sadistisch veranlagt gewesen sein.

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)\equiv\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(-)$$

$$\cos(\alpha)=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}$$

7.3.1 Harmonische Schwingung

Punkt P führt einem Kreis eine Bewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω: $[\omega]=s^{-1}$
$\Rightarrow P_y$ führt eine harmonische Schwingung aus. Die Auslenkung P_y (vom Nullpunkt) liegt bei:

$$y=a*\sin(\omega t+\varphi)$$

a: Amplitude

ω: Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit

φ : Phasenverschiebung

t: Zeit

P: Periode (Schwingungsdauer) $P=\frac{2\pi}{\omega}$

f: [Hz]=$\frac{1}{s}\Rightarrow f=\frac{1}{P}=\frac{\omega}{2\pi}\Rightarrow\omega=2\pi f$

Huygenssches Prinzip
Akustik, Metall-Kristallgitter, amorphe Materialien...
(gehört allweg nicht hier hin)

8 Nützliche Software

8.1 Maple (Computer Algebra Software)

Mit Maple können diverse Aufgaben erledigt werden, unter anderem Vektoren, Matrizen, Differential und Integral Rechnung unten ein kleines Beispiel: Übungsblatt Bruchrechnung Aufgabe Nummer 38.

1. Eingabe:

```
y:=(2*n-3*x)/(3*a+3)-(5*x+2*n)/(5*b-5)-x*(a+b)/((a+1)*(b-1))
```

2. Automatische Darstellung

$$y := \frac{2\cdot n-3\cdot x}{3\cdot(a+1)}-\frac{5\cdot x+2\cdot n}{5\cdot(b-1)}-\frac{x\cdot(a+b)}{(a+1)\cdot(b-1)}$$

3. Aufforderung zum Vereinfachen (engl: simplify):

```
simplify(y);
```

4. Die Lösung $-\frac{2}{15}\,\frac{-5\,n\,b+8\,n+15\,x\,b+15\,x\,a+3\,n\,a}{(a+1)\,(b-1)}$

8.2 Microsoft Visual Studio

Komplette Entwicklungslösung von Microsoft gut, aber relative teuer. Zum entwickeln von C, C++, C# und so weiter, auch beinhaltet es einen handlichen Editor für HTML, XML, CSS, ASP, SQL, ect.

8.3 Microsoft Mathtype

Erweiterter Formeleditor für Word, Vorsicht nach der Installation und Deinstallation der Demoversion von Math Type lassen sich die veränderten Formeln nicht mehr bearbeiten…

8.4 Sharpdevelop

http://www.sharpdevelop.net

Gratis Entwicklungsumgebung für Microsoft (.NET V1.0, V1.1, V2.0) C#, VisualBasic .NET, Mono und Boo. Damit lassen sich relativ einfach kleine Programme erstellen und ausführen.

```
using System;
namespace ggT-kgV
{

      public class ggT-kgV
      {
            public static bool debug=false;


// Moderner euklidscher Algorithmus zur Berechnung des ggT(a,b)
            public static long ggT(long a, long b)
            {
                  a=Math.Abs(a);
                  b=Math.Abs(b);
                  long temp = 0;
                  while(a%b!=0)
                  {
                        temp = b;
                        b = a%b;
                        a = temp;
                        if (debug) Console.WriteLine(a + " " + b + " "
                                                  + temp + " " +);

                  }
                  return b;
            }
// Berechnung des kgV(a,b) mit Hilfe der Formel a*b=kgV(a,b)*ggT(a,b)
            public static long kgV(long a, long b)
            {
                  return (a*b)/ggT(a,b);
            }

      }
}
```

Hier ein kleines Beispiel was man damit so alles anstellen kann:

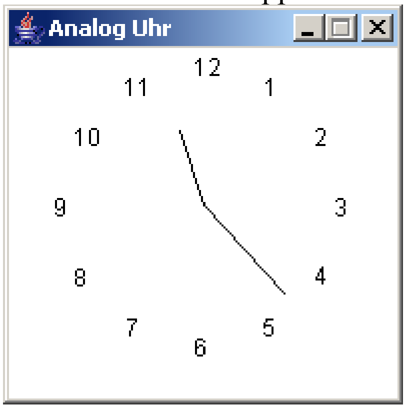
Visitenkarte.exe Visitenkarte.zip

(Voraussetzung ist, dass das .NET Framework 2.0 oder höher von Microsoft installiert ist: http://www.microsoft.com/downloads/details.aspx?familyid=0856EACB-4362-4B0D-8EDD-AAB15C5E04F5&displaylang=de

8.5 J-Builder Foundation

http://www.borland.com/downloads/download_jbuilder.html

Gratis Entwicklungsumgebung für Java mit vielen nützlichen Funktionen zum schnelleren erstellen von Java Applets und Java Applikationen.



Uhr3.zip

8.6 Total Commander

http://www.ghisler.com/deutsch.htm

Handlicher Filemanager für das schnelle „handlen" von Dateien, suchen von Inhalten, sichern von Verzeichnissen.

8.7 Notepad++

http://notepad-plus.sourceforge.net/de/site.htm

- Syntax Highlighting für:
  C, C++, SQL, VisualBasic, ASP, HTML, PHP, Java und Java-Script
- Unterstützung von Unicode
- Lässt sich in Total Commander einbinden
- Makros

8.8 Gimp

http://www.gimp.org/

Gutes Grafikprogramm, ähnlich Adobe Photoshop, nur gratis (GPL).

8.9 Tiny Hexer

http://www.mirkes.de/de/freeware/tinyhex.php

Gratis Hex-Editor mit vielen Funktionen.

8.10 Pdf Creator

http://www.pdfforge.org/products/pdfcreator/

Gratis Tool zum erstellen von Adobe Acrobat Dateien, das Programm installiert sich als Druckwer, danach kann man einfach auf diesen Drucker drucken von jedem beliebigen Programm und erhält danach eine PDF Datei des Gewünschten Dokumentes.