Optimización de un modelo de Probabilidad de Default

Modelización de problemas de la Empresa

Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid

Índice

1. Introducción

La **Probabilidad de Default** de un préstamo a un año (PD) se define como la probabilidad de que el deudor incumpla las obligaciones de deuda de dicho préstamo en un año. La estimación de la PD es, probablemente, el elemento clave del sector bancario, ya que les permite conocer el nivel de riesgo y de rentabilidad de sus posiciones de crédito (su principal activo y fuente de ingresos). También es importante para que los organismos de supervisión y regulación bancarios (como el Banco Central Europeo) puedan monitorizar y asegurar la estabilidad del sistema financiero frente a posibles crisis.

En este problema, disponemos del histórico de un conjunto de préstamos con cierta información asociada a ellos, y proporcionamos un modelo que permite asignar un valor de la PD para cada préstamo. Este modelo, sin embargo, depende de un vector de parámetros que debe ser convenientemente elegido para obtener la mejor PD posible. El objetivo principal del problema es idear e implementar un algoritmo que seleccione los valores de los parámetros del modelo de forma fiable y eficaz. Al ser una cuestión que surge en multitud de modelos de PD en distintas entidades financieras, la relevancia de este problema es enorme, y tener una solución robusta impacta positivamente en la gestión de riesgos de estas compañías.

En detalle, los **inputs** fijos que se reciben son los siguientes:

1. **Tabla de préstamos** (ver figura 1). Contiene la fecha del préstamo en ese momento (snapshot), el identificador asociado al préstamo (id), flag que permite conocer si el préstamo está en default en ese momento o no (b default), flag de si el préstamo ha sufrido una reestructuración de sus condiciones (b reestructured), y la puntuación crediticia asociada (score).
2. **Mapping Rating - PD** (ver figura 2). Permite asignar un valor de la PD a cada préstamo una vez el rating ha sido asignado.

snapshot	id	b_default	b_reestructured	score
201112	AA01399799	0	0	6.38
201212	AA01399799	0	0	6.37
201312	AA01399799	0	0	7
201412	AA01399799	0	0	6.5
201012	AA01399843	0	0	7.96
201112	AA01399843	0	1	8.51
201212	AA01399843	1	1	8.51

Figura 1: Tape de préstamos e información asociada

La **metodología** es la siguiente:

1. **Asignación de rating inicial**. Score-to-rating mapping. Definiendo una relación entre intervalos de score y rating (e.g. Figura 3), podemos asignar un rating para todos los préstamos. Por ejemplo, si un préstamo tiene score= 4, según la Figura 3 le correspondería un rating de BBB.
2. **Asignación de rating final**. Reglas y penalizaciones adicionales. En este problema, la única regla adicional es la **regla de reestructurado**, que dice que los préstamos reestructurados tienen rating grade 1 notch peor al asignado por el score-to-rating mapping. En el ejemplo anterior, si b reestructured = 1, su rating final será 1 notch peor, es decir BBB- (en lugar de BBB)

Rating	PD Scale
AAA	0.03%
AA+	0.03%
AA	0.03%
AA-	0.03%
A+	0.03%
A	0.05%
A-	0.07%
BBB+	0.10%
BBB	0.13%
BBB-	0.19%
BB+	0.27%
BB	0.45%
BB-	0.78%
B+	1.58%
B	2.69%
B-	5.44%
CCC+	10.90%
CCC	21.84%
LCCC	45.44%

Figura 2: Mapping de rating final a PD

3. **Asignación de PD**. Haciendo uso del mapping rating final - PD. Siguiendo el mismo ejemplo, y según la figura 2, una BBB- correspondería a una 0,19 % de PD.

De este modo, eligiendo un cierto score-to-rating mapping (por ejemplo el dado en la Figura 3), y siguiendo la metodología dada anteriormente, se llega a una PD asignada por préstamo.

2. Objetivos

El objetivo es, simplemente, **elegir el score-to-rating mapping para que el modelo sea el mejor posible**. Esto se da cuando:

1. La PD y el Long-Run Average Default Rate (LRA DR) para cada rating es lo más parecido posible. La PD media por rating es simplemente:

$$PD_\alpha = \frac{\sum_{t,i} PD_{\alpha,t,i}}{n_\alpha}$$

donde $PD_{\alpha,t,i}$ es la PD del préstamo i en el snapshot t y con rating grade α, y n_α es el total de préstamos con rating grade α. Por otro lado, el Default Rate por rating (DR) y snapshot es:

$$DR_{\alpha,t} = \frac{\sum_i \text{b default}_{\alpha,t,i}}{n_{\alpha,t}}$$

con b default el flag de default por préstamo (puede ser 0 o 1) y $n_{\alpha,t}$ el número de préstamos con rating grade α y snapshot t. Así, la LRA DR por rating grade se define como la media (a lo largo de los snapshots) del DR, es decir:

$$\text{LRA DR}_\alpha = \frac{\sum_t DR_{\alpha,t}}{n_{\text{years}}}$$

con n_{years} el número de snapshots.

Rating	Min score	Max score
AAA	0.28	0.60
AA+	0.60	0.74
AA	0.74	1.25
AA-	1.25	2.33
A+	2.33	2.73
A	2.73	3.01
A-	3.01	3.29
BBB+	3.29	3.87
BBB	3.87	4.47
BBB-	4.47	5.12
BB+	5.12	6.22
BB	6.22	7.01
BB-	7.01	7.40
B+	7.40	7.68
B	7.68	8.05
B-	8.05	8.46
CCC+	8.46	9.67
CCC	9.67	10.50
LCCC	10.50	1000.00

Figura 3: Ejemplo de score-to-rating mapping

2. Se satisfacen las siguientes condiciones de regularidad:

   2.1. Los scores (i.e. los extremos de los intervalos) que definen el score-to-rating mapping deben ser mayores cuanto peor es el rating grade (monotonía). Vease por ejemplo la Figura 3.

   2.2. Unimodalidad de las observaciones. El número de préstamos a lo largo de los rating grades debe tener un único máximo. Por ejemplo, en la columna Obs. de la Figura 4, el único máximo es en BB. Sin embargo, en la Figura 5, hay dos máximos: BBB- y B+.

   2.3. Poca concentración. No debe haber más de un 30-40 % de préstamos con un mismo rating grade asignado.

   2.4. Parsimonia. No debe haber demasiados rating grades sin ningun préstamo asociado.

La siguiente tabla (Figura 4) muestra una buena calibración. El score-to-rating mapping se ha elegido de tal forma que se cumplen todas las condiciones anteriores.

Rating	Min score	Obs.	Defaults	PD Scale	LRA DR
AAA	**0.28**	0	0	0.03%	0.00%
AA+	**0.60**	0	0	0.03%	0.00%
AA	**0.74**	0	0	0.03%	0.00%
AA-	**1.25**	0	0	0.03%	0.00%
A+	**2.33**	0	0	0.03%	0.00%
A	**2.73**	17	0	0.05%	0.00%
A-	**3.01**	18	0	0.07%	0.00%
BBB+	**3.29**	120	0	0.10%	0.00%
BBB	**3.87**	242	0	0.13%	0.00%
BBB-	**4.47**	873	2	0.19%	0.19%
BB+	**5.12**	1947	6	0.27%	0.28%
BB	**6.22**	2565	13	0.45%	0.46%
BB-	**7.01**	1562	11	0.78%	0.66%
B+	**7.40**	1527	28	1.58%	1.49%
B	**7.68**	1425	40	2.69%	2.74%
B-	**8.05**	736	40	5.44%	5.59%
CCC+	**8.46**	511	49	10.90%	10.63%
CCC	**9.67**	28	7	21.84%	21.11%
LCCC	**10.50**	4	0	45.44%	0.00%
TOTAL		11575	196	1.70%	1.58%

Figura 4: Ejemplo de buena calibración. Vemos que el DR y la PD son muy parecidas, el score es monótono, la distribución de préstamos es unimodal, está poco concentrado en un rating grade y muy disperso a lo largo de los rating grades.

Sin embargo, la siguiente tabla (Figura 5) muestra una mala calibración:

Rating	Min score	Obs.	Defaults	PD Scale	LRA DR
AAA	**1.00**	0	0	0.03%	0.00%
AA+	**1.50**	0	0	0.03%	0.00%
AA	**2.00**	0	0	0.03%	0.00%
AA-	**2.50**	0	0	0.03%	0.00%
A+	**3.00**	12	0	0.03%	0.00%
A	**3.50**	66	0	0.05%	0.00%
A-	**4.00**	169	0	0.07%	0.00%
BBB+	**4.50**	474	0	0.10%	0.00%
BBB	**5.00**	450	0	0.13%	0.00%
BBB-	**5.20**	1381	6	0.19%	0.36%
BB+	**6.00**	1303	4	0.27%	0.29%
BB	**6.50**	1742	7	0.45%	0.37%
BB-	**7.00**	2079	18	0.78%	0.75%
B+	**7.50**	2202	46	1.58%	1.81%
B	**8.00**	1175	60	2.69%	4.96%
B-	**8.50**	397	35	5.44%	9.44%
CCC+	**9.00**	68	12	10.90%	20.11%
CCC	**9.50**	29	1	21.84%	1.23%
LCCC	**10.00**	28	7	45.44%	24.44%
TOTAL		11575	196	1.26%	1.58%

Figura 5: Ejemplo de mala calibración. DR y la PD no son tan parecidas y la distribución de préstamos no es unimodal (BBB- y B+ son máximos)

3. Posibles vías de desarrollo

El problema puede plantearse como la minimización de una función

$$\boldsymbol{J} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

donde n es el número de rating grades, y $\boldsymbol{J}$ es una función de coste cuyo input es el score-to-rating mapping (Min score de la Figura 3) y cuyo output es el error asociado a la calibración dada por ese mapping. Esta función de coste podría escribirse como

$$J = \sum_i \boldsymbol{J}_i$$

con $\boldsymbol{J}_i$ es el error asociado a cada punto a tener en cuenta. Así, $\boldsymbol{J}_1$ da cuenta del error entre la PD y el DR, $\boldsymbol{J}_2$ es una penalización en el caso de que el score no sea monótono, y así sucesivamente. Definir correctamente la función de coste es clave en la obtención de un buen resultado.

Una forma de reducir la complejidad del problema es resolverla en $\mathbb{Z}^n$ en lugar de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si un portfolio tiene 10000 préstamos, y 500 scores distintos, entonces basta con probar combinaciones de esos scores existentes, pasando a un problema con un número finito de posibilidades.

$\boldsymbol{J}$ es una función discontinua, con lo que los métodos de optimización usuales no son adecuados, y otros métodos como algoritmos genéticos (e.g. la librería de geneticalgorithm) o métodos bayesianos (e.g. librería optuna) pueden ser buenas alternativas. Siempre puede usarse fuerza bruta, pero dista de ser una solución escalable y falla cuando el número de préstamos o de rating grades es suficientemente grande. En cualquier caso, elegir convenientemente el siguiente score-to-rating-mapping que la función de coste va a evaluar es fundamental en lograr una solución que converja eficazmente, y requiere conocer bien la función de coste y la dinámica del problema. La Figura 6 muestra la minimización que resultó en la Figura 4, usando algoritmos genéticos.

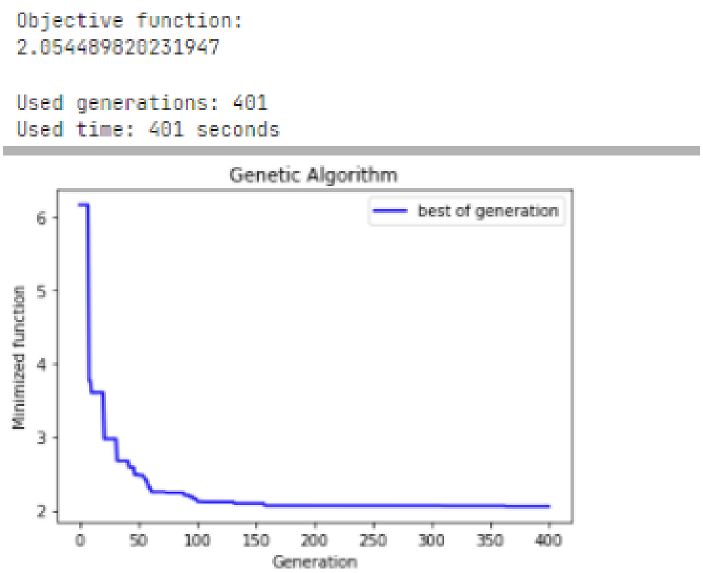

Figura 6: Minimización de la función de coste usando algoritmos genéticos con modificaciones adicionales. En 400 segundos se consiguió calibrar correctamente un portfolio de más de 10000 préstamos

En definitiva, para solucionar bien el problema es preciso conocer bien técnicas de optimización de funciones discontinuas con múltiples restricciones, codificar el problema de forma eficiente en un lenguaje de programación, y entender bien la función de coste que se define para lograr una buena calibración. Es un problema completo, con interés matemático y de gran relevancia para la gestión de riesgos financieros en particular, y para el sector bancario en general.