

האוניברסיטה העברית
הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה לפיזיקה

שם הניסוי

מתנדים

מאת:

ניר גבריאילוב

הדר שרביט

מדריך המעבדה:

שחר אשכנזי

29/03/2019

תוכן עניינים

1. מטרת הניסוי :	2
2. רקע תיאורטי ותיאור המערכת :	2
2.1 רקע תיאורטי	2
2.2 תיאור המערכת	4
2.3 מכשירי המדידה	4
3. ניסוי : ניתוח תנועות מתנד	5
3.1 מהלך הניסוי	5
3.2 תוצאות הניסוי וניתוחן	6
4. דיון ומסקנות כלליות :	13
5. נספחים	16

1. מטרת הניסוי :

מטרת הניסוי היא לחקור את אופי התנועה של מתנד קפיצי הרמוני במצבה הטבעי, תחת אילוף ותחת ריסון. במהלך הניסוי מדדנו את תנועתם של קפיצים תחת אילוף וקפיצים המחוברים למסה, וראינו כיצד גורמים אלו משפיעים על אופי תנועת המערכת.

2. רקע תיאורטי ותיאור המערכת :

2.1 רקע תיאורטי

1. כוח קפיץ (חוק הוק) – חוק המציג את הקשר בין קבוע הקפיץ ואורכו לבין הכוח שקפיץ מפעיל.

$$F = -k(x - x_0) \text{ : (משוואה 1)}$$

2. שקול כוחות במדידת קבוע קפיץ – בחלקו הראשון של הניסוי, מדדנו את קבוע הקפיץ לפי חישוב שקול הכוחות במערכת סטטית תחת השפעת כוח הכבידה וכוח הקפיץ. להלן החישוב :

$$\sum F = mg - k * dy = 0 \quad (dy = y - y_0)$$

מכאן נובעת (משוואה 2) : הקשר בין התארכות קפיץ לבין המסה $y(m)$:

$$dy = \frac{g}{k} m$$

3. משוואת תנועה הרמונית מרוסנת : לפי שקול כוחות וחוק שני של ניוטון

נקבל את (משוואה 3)

$$-kx - \alpha \dot{x} = m\ddot{x}$$

4. פתרון משוואת תנועה הרמונית מרוסנת:

פתרון משוואה 3 הוא $x(t) = Ae^{-\frac{\alpha}{2m}t} \sin(\omega t + \phi)$ (משוואה 4)

תדירות המערכת $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$ (משוואה 4.א)

אמפליטודת התנועה $A = \frac{x_0}{\cos\phi} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\alpha x_0}{2m\omega}\right)^2}$ (משוואה 4.ב)

פאזת המערכת $\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0} - \frac{\alpha}{2m\omega}$ (משוואה 4.ג)

5. מתנד מאולץ ומרוסן:

משוואת הכוחות למתנד מאולץ ומרוסן:

$mx + \alpha x + kx = F_0 \cos(\omega_e t)$ (משוואה 5.א)

למשוואה פתרון הומוגני ופתרון מצב עמיד. שילוב פתרונות אלו יתאר את התנועה לאורך זמן. לאחר זמן ארוך, הפתרון ההומוגני (הנובע מתנאי התחלה) דועך והשפעת הכוח המאלץ תהיה המכרעת ונשאר עם פתרון המצב העמיד:

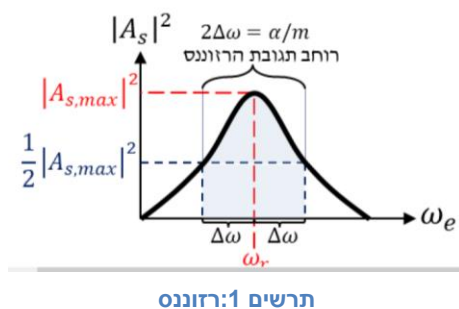
$x_p(t) = A_s \cos(\omega_e t + \phi_s)$ (משוואה 5.ב)

אמפליטודת התנועה: $A_s = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\frac{\alpha\omega_e}{m}\right)^2}}$ (משוואה 5.ג)

פאזת המערכת: $\tan(\phi_s) = \frac{-\frac{\alpha}{m}\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$ (משוואה 5.ד)

כאשר $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ התדר העצמי של המערכת.

6. רזוננס:



תרשים 1 מתאר גרף כללי של אמפליטודת התנועה כפונקציה של תדר העירור החיצוני (במקרה שלנו המתנד החשמלי), נצפה להיגב מקסימלי, כלומר לתהודה -רזוננס- בתדירות העצמית של המערכת

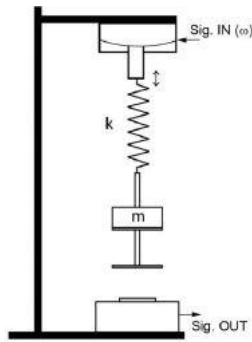
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

7. חישוב סטיות: עבור המדידה ה- i (A_i), כאשר N הוא מספר המדידות

חישוב ממוצע המדידות $\hat{\mu} : \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i$ (נוסחה 6.א)

חישוב סטיית תקן $\hat{\sigma} : \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (A_i - \hat{\mu})^2}$ (נוסחה 6.ב)

שגיאה סטטיסטית: $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$ (נוסחה 6.1)



תרשים 2: תיאור המערכת

ig.IN (ω) - מערכת המתנד ותדירות העירור
 K - קבוע הקפיץ
 m - מסה
 Sig. OUT - מערכת מד המרחק

2.2 תיאור המערכת

נתונה מערכת בעלת מתקן תלייה למשקולת וקפיץ, המאפשרת החלפת קפיצים ושינוי המסה התלויה. בראש המתקן מותקן מתנד אשר מטרתו לנדנד את הקפיץ. מתנד זה נשלט באמצעות אות חשמלי המועבר דרך המחשב על ידי תוכנת CAPSTONE לספק ייעודי. בבסיס המתקן ישנו מד מרחק המודד את גובהה של המסה לאורך זמן בתדירות שניתנת לקביעה מראש (גם כן על ידי המחשב והספק).

2.3 מכשירי המדידה

מסות: מדידת המסות התבצעה על ידי שימוש במד המשקל. שגיאתו $\pm 0.01 \text{ gram}$ (נתון ע"י יצרן המכשיר)

גובה: מדידת הגובה התבצעה על ידי שימוש במערכת מד המרחק. שגיאתו נותחה עפ"י סטיית תקן והיא $\pm 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$

תדירות העירור: נקבעה בעזרת תכנת CAPSTONE, מאפשר דיוק גבוה מאוד, הסתפקנו ב- $\pm 0.001 \text{ Hz}$

תדירות התנודות: חושבה ע"י fit של תכנת CAPSTONE עפ"י נתוני הגובה שהתקבלו ממד המרחק.

דרך חישוב שגיאות מדידה וסטיות תקן – באמצעות נוסחאות 6.1, 6.2 ו 6.3

3. ניסוי: ניתוח תנועות מתנד

3.1. מהלך הניסוי

נתאר את שלבי הניסוי:

ניתן לתאר את מהלך הניסוי באופן כללי בצורה הבאה - בחלקו הראשון של הניסוי מדדנו את הקבועים של המערכת – התארכות הקפיץ, מסות המשקלים, קבועי הקפיצים וכדומה. בשלב הבא הוספנו מסה לקפיץ ומדדנו את תנודותיו החופשיות עד שדעך למצב מנוחה כתוצאה מכוח חיכוך. לבסוף תיארנו את תנועת המערכת במצב בו קיים גם כוח מאלץ (מתנד) ועבור מסות שונות.

להלן פירוט השלבים

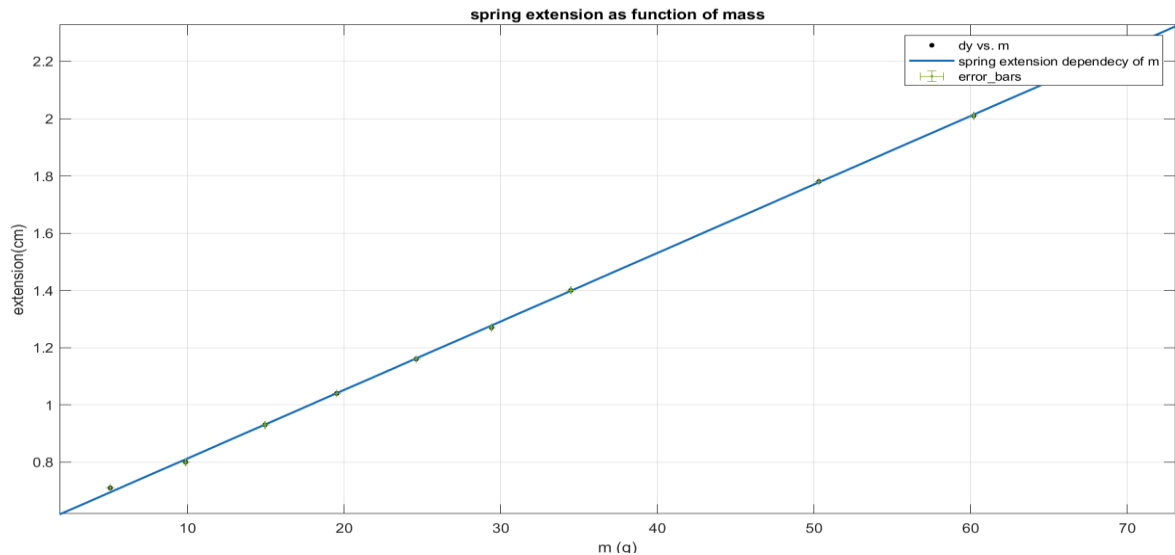
0. ייצוב המערכת: לפני כל מדידה וידאנו שכל המשתנים שעלולים להשפיע על תוצאות המדידה יישארו קבועים עד כמה שניתן. וידאנו שמד המרחק ממוקם במקום קבוע ביחס למסה, כך שמדידתו תייצג רק את תנועת המסה כתוצאה מהקפיץ, וידאנו שבכל מדידה המערכת במצב סטטי ואחיד וכדומה.
1. מדידת קבוע הקפיץ K - תלינו מסות שונות על הקפיץ הרפוי (קפיץ 1), ייצבנו הקפיץ עד למצב סטטי ובדקנו את התארכותו בהתאם למשוואה 1. חילצנו ביטוי של התארכות הקפיץ כפונקציה של מסתו לפי משוואה 2. באמצעות קשר זה נוכל לחלץ את קבוע הקפיץ משיפוע הגרף של התארכות הקפיץ כפונקציה של המסה התלויה (ונעשה שימוש בביטוי זה גם בהמשך הניסוי).
2. הוספנו מסה לקפיץ כך שההתארכות תהיה משמעותית, מתחנו מעט את הקפיץ מעבר לנקודת שיווי המשקל ובשחרורו מדדנו את התנודות של הקפיץ עד התייצבותו בנקודת המנוחה באמצעות המחשב. פיתחנו ביטוי לאופי התנועה בהתאם לנוסחאות 3 ו 4 – תנועה הרמונית מרוסנת בריסון חלש.
3. חזרנו על שלב 2 עבור מסות שונות - מדדנו את התדר העצמי של המערכת בעזרת ובדקנו אם הוא תלוי בזמן, כיוון שתדירות התנודות נתונה ע"י משוואה 4.א ותלויה בקבוע הקפיץ, בריסון ובמסה בלבד – נצפה כי היא לא תשתנה לאורך זמן.
4. תיארנו הסבר לדעיכת התנודות. קבענו מהו הגודל המאפיין דעיכה זו, כלומר, מהי סקלת הדעיכה.
5. מצאנו את קבוע הקפיץ של הקפיצים אותם חיברנו למתנד (קפיצים 2 ו-3) באופן דומה לסעיף 1.
6. הפעלנו את המתנד ומצאנו את תדירות העירור עבורה מתקבלת תגובה משמעותית של הקפיץ. שחררנו את המוט והמסה עבור פרמטרים אלו מתנאי התחלה שונים ותיעדנו את התנועה המתקבלת לאורך זמן. נצפה שהתנודה בזמנים ארוכים תתייצב להיות זהה. ביצענו חלק זה עם קפיץ 1 ועל המוט משקולת של כ-20 גרם.
7. מדדנו את האמפליטודות של התנודות כפונקציה של תדר העירור עבור קפיצים 2 ו-3. לפי הרקע התיאורטי הגרף יהיה דומה לתרשים 3, רוחב ועוצמת תגובת הרזוננס ייקבע לפי קבוע הקפיץ קבוע הדעיכה והמסה התלויה.

3.2. תוצאות הניסוי וניתוחן

בסעיף זה נציג בצורה גרפית את התוצאות של הניסוי בכל אחד משלביו. על מנת לצפות בנתונים המספריים, יש לגשת לנספחים. עיבוד התוצאות יפורט בסעיף 3.3

1. התארכות קפיץ 1 כתלות במסה במצב סטטי

$$\text{slope} = 23.93 \pm 0.13 \frac{\text{cm}}{\text{kg}}, f(0) = 0.57 \pm 0.01 \text{ cm}$$



תרשים 3: גרף תלות התארכות הקפיץ במסה.

לפי משוואת הישר המתוארת במשוואה 2, נוכל לחלץ את השיפוע ולהסיק

$$\frac{g}{k} = \text{slope} \rightarrow k = \frac{g}{\text{slope}}$$

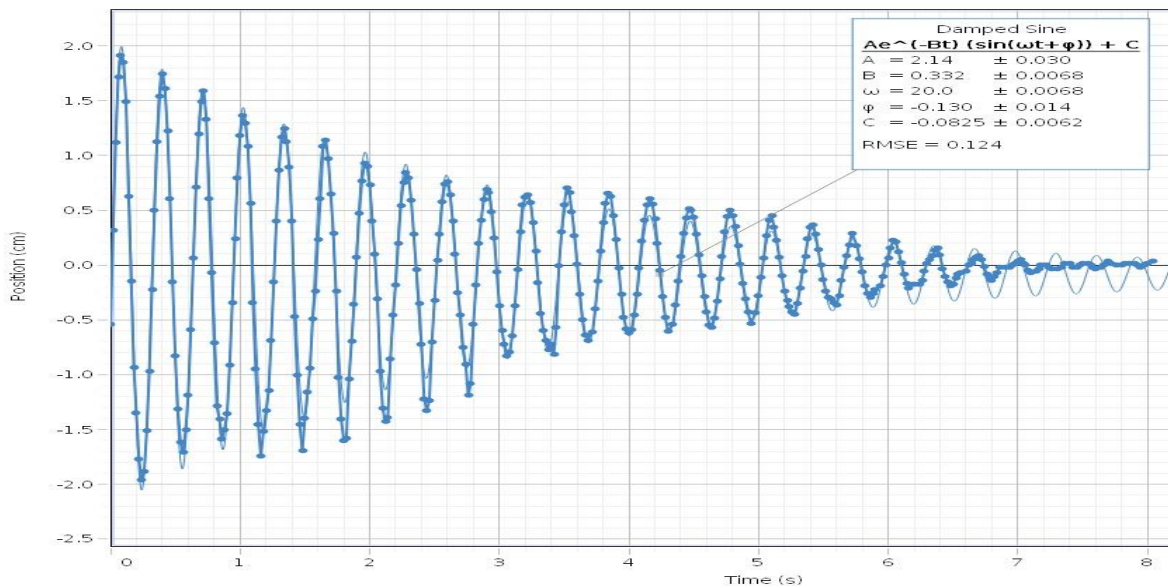
על ידי הצבת הנתונים נקבל לבסוף ביטוי מספרי לקבוע הקפיץ

$$k_1 = \frac{981}{23.93 \pm 0.13} = 40.96 \pm 0.23 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

*הערה - החישוב התיאורטי מציג קשר בו אין חיתוך עם ציר ה-Y. עם זאת, תוצאות הניסוי אכן מעידות על חיתוך שכזה. ההסבר האפשרי לכך הוא באופן מדידת התארכות הקפיץ. את המצב הרפוי של הקפיץ מדדנו בעזרת capstone ולמידה זו התייחסנו כאל עוגן ביחס לשאר המדידות. כלומר, ההתארכות עבור כל מדידה (מסה משתנה) נקבע כהפרש בין האורך הנתון שנמדד בכל מדידה לבין אורך המנוחה שנמדד בראשית. אנו סבורים שסרבול המדידה גרם לטעות שיטתית מסוימת שהובילה לאותו הפרש. נוסיף ונציין שבהמשך הניסוי שיטת מדידה זו שונתה כך שנק' האפס נקבעה בתכנה עבור כל קפיץ כאשר רק המוט תלוי עליו.

2. תנודות מסטייה משיווי משקל ללא אילוץ (גובה המסה כתלות בזמן)

(גרף מיקום כתלות בזמן של מסה מסוימת: $96.41 \pm 0.51 \text{ g}$ על קפיץ 1)



תרשים 4: תיעוד תנודות מסטייה משיווי משקל ללא אילוץ (גובה המסה כתלות בזמן)

ניתן לאפיין את התנועה כתנועה הרמונית תחת ריסון בהשפעת חיכוך (בעל מקדם אלפא) וזאת בהתאם למשוואה 3 המאפיינת את שקול הכוחות במערכת כך שמשוואה 4 מהווה את הפתרון הכללי.

בהתאם לכך נחלץ ביטוי לתדירות המערכת ונקבל $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$. נשים לב שביטוי זה איננו תלוי בזמן ועל כך נפרט בסעיף הבא. המדידה המוצגת היא עבור מסה $96.41 \pm 0.51 \text{ g}$ ועל כן ניתן לחשב באמצעות הנתונים שהתקבלו ביטוי כללי למשוואת התנועה:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + C$$

התדר העצמי של המערכת שהתקבל הוא

$$\omega = 20.0000 \pm 0.007 \frac{\text{rads}}{\text{s}} = 3.180 \pm 1 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{periods}}{\text{sec}} \right]$$

הוא אינו תלוי בזמן, כפי שניתן לראות בגרף התנודות זמן המחזור (ולכן גם התדר) נשאר קבוע והשינוי הוא באמפליטודת התנועה בלבד.

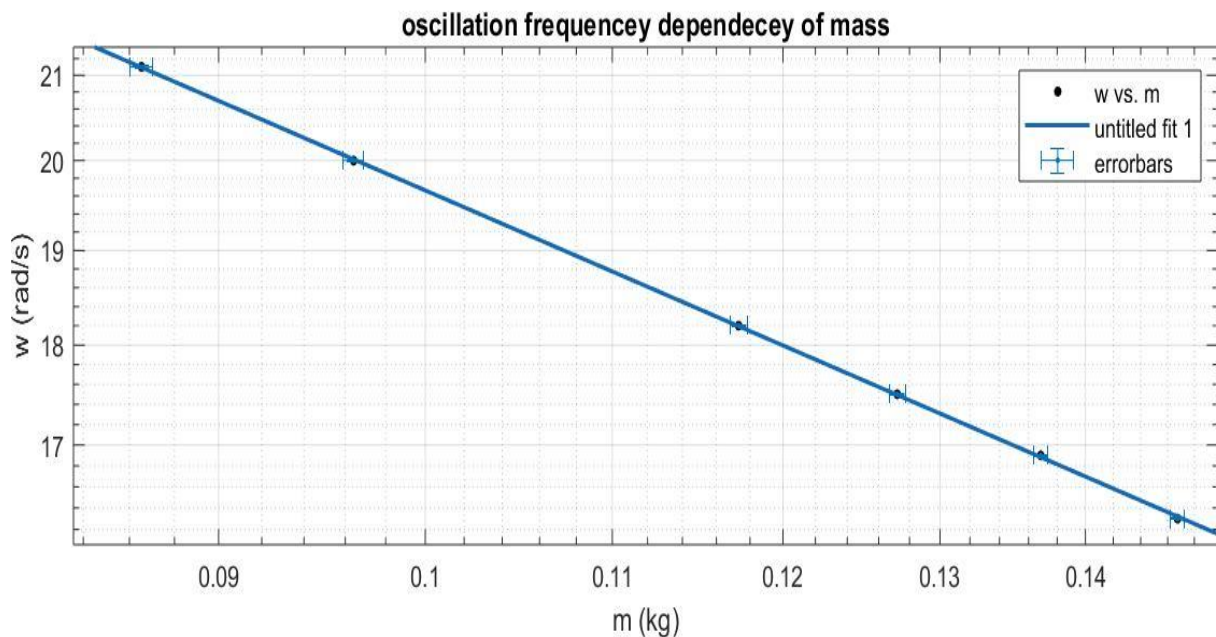
סקלת הדעיכה כפי שחושבה עפ"י ה-FIT של התכנה: $\beta = 0.322 \pm 0.007$

נציב את המסה הרלוונטית ונקבל קבוע הדעיכה לתנועה זו:

$$\alpha = 1.67 \pm 0.04 \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

3. תדירות התנודות ללא אילוף כתלות במסה – סקאלה לוגריתמית

$$\omega(m) = a * m^b, a = 6.424 \pm 0.036 \quad b = -0.490 \pm 3 * 10^{-3}$$



תרשים 5: תדירות התנודות כתלות במסה התלויה

לפי משוואה 4.4 התדירות כתלות במסה נתונה ע"י הקשר $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$.

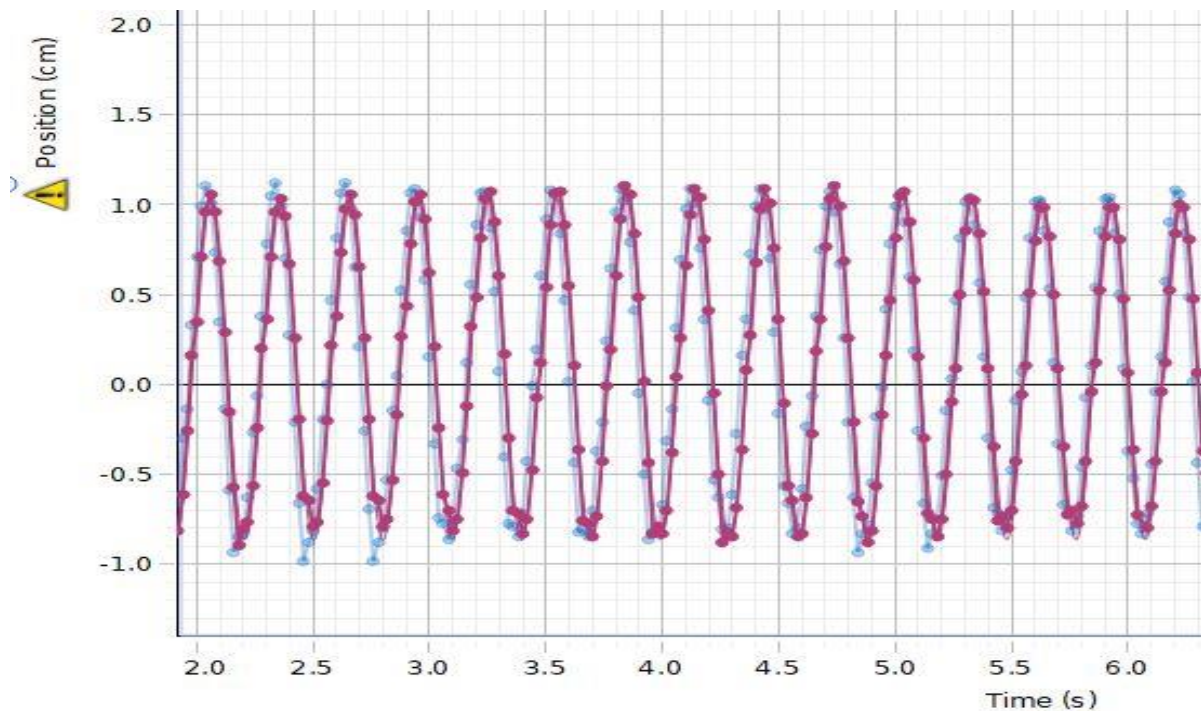
במערכת המעבדה $\frac{k}{m} \gg \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2$ (בכ-2 סדרי גודל) ולכן ניתן לקרב איכותית

$\omega \cong \sqrt{\frac{k}{m}}$ והגרף הלינארי בסקאלה לוגריתמית אכן מעיד על חוק חזקה שכזה. עבור קירוב זה נוכל לחלץ את k:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow a = \sqrt{k_1} = 6.424 \pm 0.036 \rightarrow k_1 = 41.27 \pm 0.46$$

התוצאה שהתקבלה אכן קרובה מאוד לקבוע שאותנו חישבנו עפ"י התארכות הקפיץ, מה שמעיד שהקירוב אכן איכותי.

4. אמפליטודה כפונקציה של הזמן (ממנוחה ועם כוח מאלץ, זמנים ארוכים)
 תיעוד אחרי כ-30 שניות של תנודות קפיץ 1 שעליו משקולת של 20 גרם, תחת עירור,
 משני תנאי התחלה שונים.



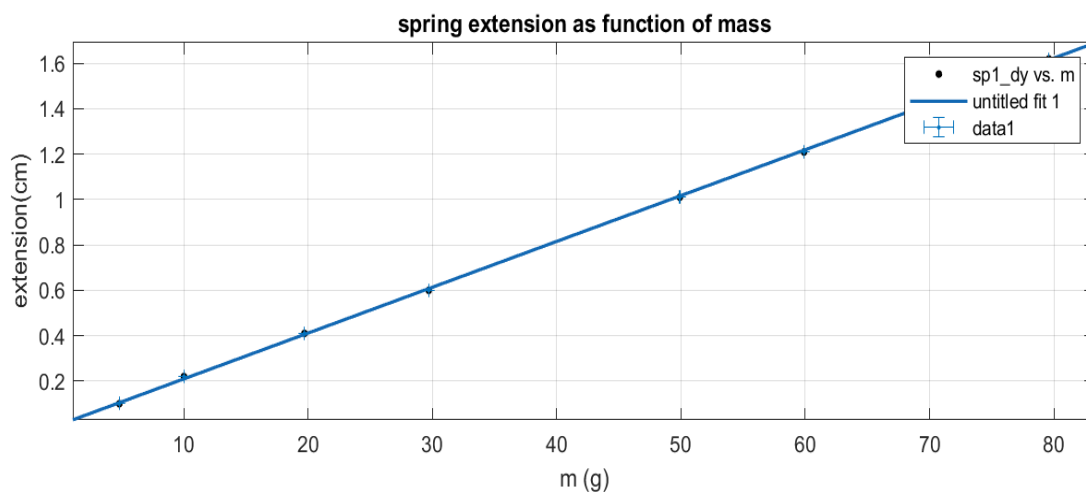
תרשים 6: תנודות אחרי זמן ארוך

התלות הפונקציונאלית לאחר זמן ארוך נתונה על ידי משוואת התנועה

$x_p(t) = A_s \cos(\omega_e t + \phi_s)$ (משוואה 5.א). נשים לב כי אין השפעה בכלל לתנאי ההתחלה השונים, כלומר למהירות ולמיקום מהם שיחררנו את המסה. בתיעוד שצירפנו לפי תרשים 6 מופיעות תנודות של קפיץ ומסה קבועים, אחרי כ-30 שניות, מ-2 מצבי התחלה שונים. משרעת ותדירות התנודות בהם כמעט זהה לחלוטין ויש שינוי פאזה קטן שנוצר מכך שהתחלנו מתנאים שונים. שינוי זה מצטמצם ככל שמתקדם הזמן וגם הוא כמעט נעלם לחלוטין בשניות האחרונות של התיעוד.

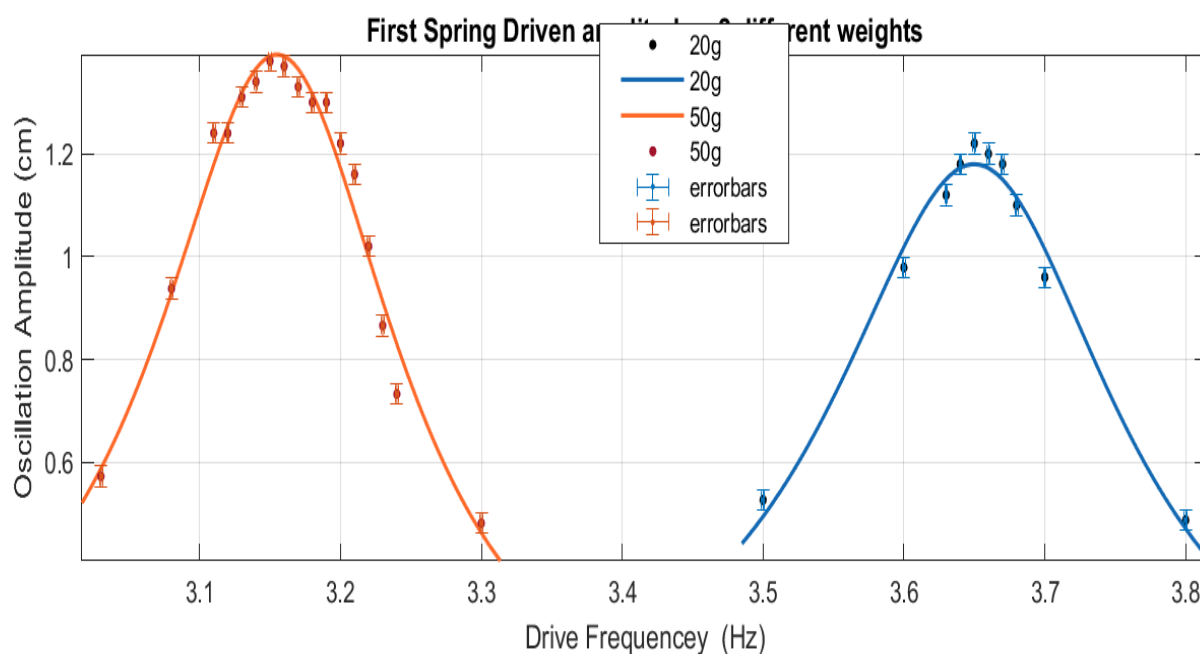
5.1 התארכות קפיץ 2 כתלות במסה התלויה

$$\text{slope} = 20.20 \pm 0.12 \frac{\text{cm}}{\text{kg}}, f(0) = 0.008 \pm 0.006 \text{ cm}$$



תרשים 7: התארכות קפיץ 2 כתלות במסה התלויה

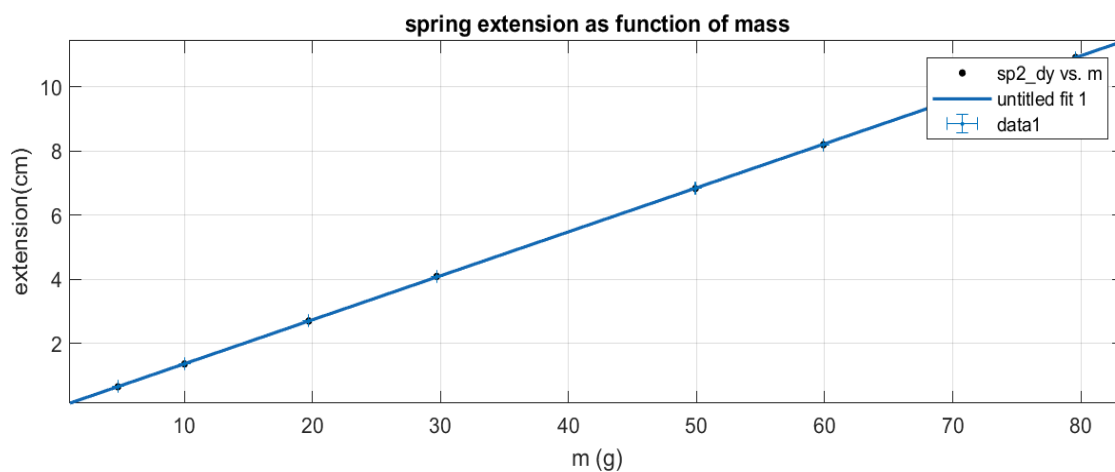
5.2 אמפליטודות תנודות כתלות בתדר העירור (קפיץ 2)



תרשים 8: אמפליטודות תנודות כתלות בתדר העירור (קפיץ 2)

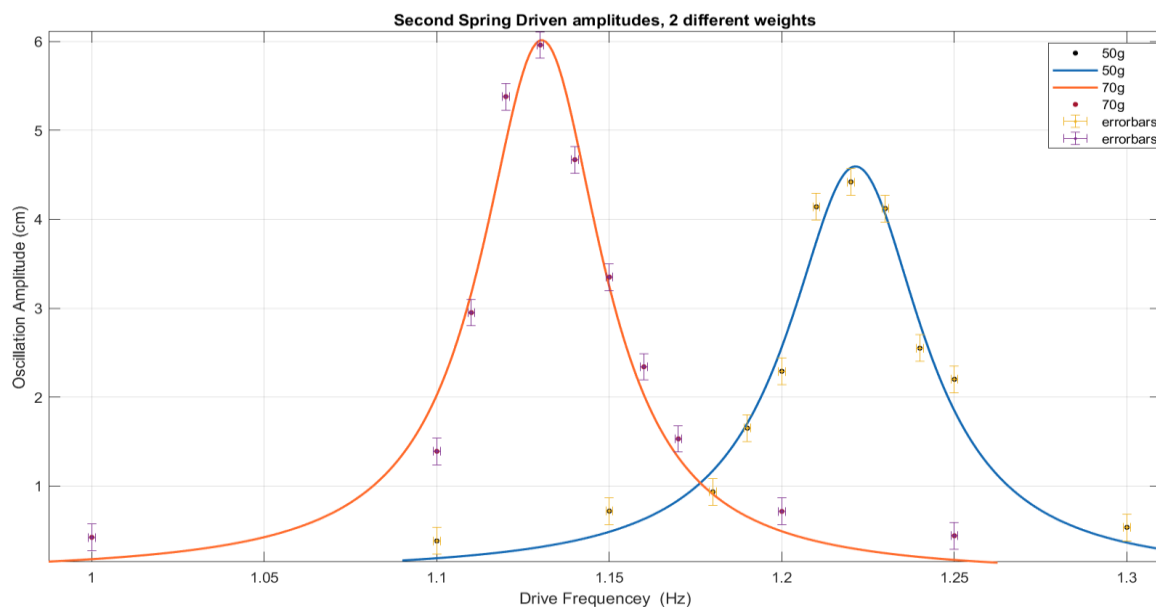
6.1 התארכות קפיץ 3 כתלות במסה התלויה

$$\text{slope} = 137.2 \pm 0.2 \frac{\text{cm}}{\text{kg}}, f(0) = -0.006 \pm 0.009 \text{ cm}$$



תרשים 9: התארכות קפיץ 3 כתלות במסה התלויה

6.2 אמפליטודות תנודות כתלות בתדר העירור (קפיץ 3)



תרשים 8: אמפליטודות תנודות כתלות בתדר העירור (קפיץ 3)

5. אמפליטודת עירור כפונקציה של תדירות המאלץ (עבור קפיץ 2 ו 3)

אמפליטודת התנודות תלוייה בתדר העירור לפי משוואה 5.5 ומקיים

$$A_s = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\frac{\alpha\omega}{m}\right)^2}} . \text{ נמצא את תדר ואמפליטודת הרזוננס לפי התדר בו}$$

ההיגב מקסימלי. מדדנו את היגב המערכת עבור תדרי עירור שונים ועשינו התאמה לנוסחה זו. התוצאות מוצגות בתרשימים 8 ו-10, נשים לב כי צורת הגרף שהתקבלה אכן תואמת את הגרף לו ציפינו לפי תרשים 1. הפרמטרים הפיזיקליים המאפיינים את הגרפים הינם המסה התלויה, כוח המתנד המאלץ (במקרה שלנו המתח למכשיר) והתדירות העצמית של המערכת אשר מושפעת גם מהמסה ומקבוע הקפיץ.

קפיץ 2:

לפי החישוב שתואר בסעיף 3.3.1 למציאת קבוע הקפיץ נקבל את קבוע הקפיץ

$$k_2 = 48.57 \pm 0.28 \left[\frac{N}{m} \right]$$

עבור מסה של $19.70 \pm 0.01 \text{ g}$ מצאנו כי תדר העירור המקסימלי, כלומר תדר הרזוננס הוא $3.650 \pm 0.001 \text{ Hz}$ והאמפליטודה המקסימלית היא $1.22 \pm 0.02 \text{ cm}$.

עבור מסה של $49.90 \pm 0.01 \text{ g}$ מצאנו כי תדר העירור המקסימלי, כלומר תדר הרזוננס הוא $3.150 \pm 0.001 \text{ Hz}$ והאמפליטודה המקסימלית היא $1.38 \pm 0.02 \text{ cm}$.

נשים לב כי עבור המסה הכבדה היותר תדר התרזוננס היה נמוך יותר ומשרעת התנודות גדלה.

קפיץ 3:

קבוע הקפיץ שחושב עפ"י ההתארכות הוא: $k_3 = 7.14 \pm 0.01 \left[\frac{N}{m} \right]$

עבור מסה של $69.60 \pm 0.01 \text{ g}$ מצאנו כי תדר העירור המקסימלי, כלומר תדר הרזוננס הוא $1.220 \pm 0.001 \text{ Hz}$ והאמפליטודה המקסימלית היא $4.48 \pm 0.15 \text{ cm}$.

עבור מסה של $49.90 \pm 0.01 \text{ g}$ מצאנו כי תדר העירור המקסימלי, כלומר תדר הרזוננס הוא $1.130 \pm 0.001 \text{ Hz}$ והאמפליטודה המקסימלית היא $5.96 \pm 0.15 \text{ cm}$.

בדומה לתוצאות שהתקבלו בקפיץ 2, עבור המסה הכבדה יותר הרזוננס היה גבוה יותר ובתדר נמוך יותר. בנוסף, תדרי הרזוננס של קפיץ זה היו קטנים יותר והמשרעת בהם הייתה גדולה יותר.

4. דיון ומסקנות כלליות:

1. **חוק הוק:** כאשר הצגנו גרפים של התארכות הקפיצים השונים כפונקציה של המסה (וכתוצאה מכך הכוח המופעל) על הקפיצים קיבלנו שהקשר הינו לינארי. כלומר הקפיץ מתארך מתכונתית לכוח המופעל עליו לפי פקטור קבוע, הוא k קבוע הקפיץ. בכך ראינו שאכן חוק הוק להתארכות קפיצים התאים לתוצאות הניסוי שלנו.
2. **תנודה הרמונית מרוסנת:**

בתנועה הרמונית מרוסנת, אנו מצפים שהאמפליטודה תדעך מעריכית. זאת מתוך הבנת הקשר התיאורטי שתואר בסעיף 3.3.2 בו הראינו את משוואת התנועה לתנועה הרמונית מרוסנת המקיימת

$$x(t) = Ae^{-\frac{\alpha}{2m}t} \sin(\omega t + \varphi) + C$$

בגרף 2 הצגנו ביטוי לתנודת המערכת, כפי שנמדדה במעבדה. אכן ניתן היה לזהות את הקשר בין דעיכת התנודות להתקדמות הזמן שהרי אמפליטודת התנודה קיבלה את ערכה המקסימלי ברגע תחילת התנועה ומיד החלה לדעוך עד שהתאפסה כמעט לחלוטין. מבחינת התאמת הגרף לתבנית של גל סינוס דועך התגלה הקשר הנתון לעיל כמתאים ביותר. שילוב אלה הביא אותנו למסקנה שאכן הקשר הוא של דעיכה אקספוננציאלית.

בנוסף, ראינו מתוצאות הניסוי שהתדירות המתקבלת קבועה ואיננה תלויה

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} \quad \text{א.4 במשוואה}$$

בזמן. זאת בהתאם להנחה שמתוארת במשוואה 4.4. הקושרת בין התדירות לקבוע הקפיץ, למסה ולקבוע הדעיכה אלפא, אך לא לזמן. דעיכת התנודות, אם כן, אופיינה על ידי גורמי החיכוך במערכת ובניהם חיכוך האוויר וחיכוך קינטי שקיים בין חלקי המערכת. בסעיף 3.3.2 חישבנו גורם זה.

***הערה:** לאורך מדידות תדירויות התנודות השונות עבור מסות שונות התלויות על הקפיץ קיבלנו קבועי דעיכה שונים זה מזה. לפי המשוואות המתארות את הדעיכה α , קבוע הדעיכה, אמור להיות קבוע למערכת נתונה כלשהי. אנו משערים כי השוני נובע מכך שהניסוי נערך תוך כדי שינויים קטנים בסביבה, לדוג' שינוי מסוים בזרם האוויר בכיתה או הזזה קטנה של המוט כך שהחיכוך עם מסגרת הברזל דרכו עובר המוט ישתנה. ניסוי מעניין שהיה ניתן לעשות הוא לחקור את קבועי הדעיכה עבור תנודות של מסות שונות ולבדוק כמה השוני משמעותי, והאם אכן החיכוך מתנגד בצורה לינארית למהירות.

3. תדירות התנודות כתלות במסה

כאמור, הראנו שניתן להביע את ω בקירוב טוב על ידי הקשר $\omega \cong \sqrt{\frac{k}{m}}$ ובהצגה נוספת מתקיים $\omega = \sqrt{k} \cdot m^{-0.5}$ כלומר התלות המצופה

מהתיאוריה היא הופכית לשורש. המחשה טובה לכך ניתנת באמצעות הגרף בתצוגה הלוגריתמית. הגרף הלוגריתמי שהתקבל הינו לינארי מה שאכן מעיד על חוק חזקה. בנוסף, הצלחנו לחשב את קבוע הקפיץ מתוצאות סעיף זה ואכן קיבלנו תוצאה דומה לזו שחושבה עפ"י חוק הוק. המסקנה המתבקשת היא שהתדירות קטנה ביחס שורש הופכי למסה לפי הקשר המתאר את התדר העצמי של המערכת.

4. תנודה הרמונית מאולצת ומרוסנת

הרקע התיאורטי מגדיר את הקשר בין האמפליטודה והזמן אחרי זמנים ארוכים על ידי משוואת התנועה $x_p(t) = A_s \cos(\omega_e t + \phi_s)$ (משוואה 5.5) כאשר אמפליטודת התנועה והפאזה ניתנות בהתאם למשוואות 5.5 ו 5.5. ד. כלומר, בזמן קצר לאחר תחילת התנועה הפתרון ההומוגני משפיע על אופייה, כלומר התנודות מושפעות מתנאי ההתחלה. בזמנים ארוכים, הפתרון ההומוגני דועך (כפי שראינו במסקנה 2) והכוח המאלץ נשאר המכריע על מיקום הגוף כפונקציה של הזמן כך שאמפליטודת המערכת מתאימה עצמה לתדירות הכוח המאלץ. במובן המעשי, נצפה שבזמנים ארוכים כל אופי התנועה, כלומר תדירותה משרעתה ופאזתה ייקבעו ע"י אלו של הכוח המאלץ. תוצאות הניסוי (תרשים 4) הראו שאכן כך הדבר. במדידה לאחר כ-30 שניות, משני תנאי התחלה שונים, התנועה נראית כמעט זהה לחלוטין. לכן, תיאור תיאורטי זה של התנועה ניבא נכונה את התוצאות.

5. היגב המערכת כתלות בתדר העירור ורזוננס

משרעת התנודות תלויה בתדר העירור כפי שתיארנו במשוואה 5.5. גרף של פוני' זו הוא גרף הדומה לפעמון, גרף מהצורה של הגרף בתרשים 1. עבור 4 התדרים העצמיים השונים (2 קפיצים ו-2 מסות) שעבורם ביצענו את החלק הזה בניסוי קיבלנו התאמה טובה לגרף שכזה. בנוסף, ראינו כי לרוב הרזוננס הוא מאוד מאוד "צר", כלומר בתחום תדרים מאוד מסוים מתקבל היגב משמעותי במערכת, כאשר התדר המאלץ שווה לתדר העצמי. כפי שראינו במהלך התנודות החופשיות הריסון במערכת חלש מאוד לכן נזניח החיכוך מהתדר העצמי ונקבל שהתדר מקסימלי כ נוכל להתייחס למשרעת התנודות לפי הקירוב הבא:

$$\omega_{drive} = \omega_0^2 \cong \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow A_r^2 = \frac{F_0^2 m}{\alpha^2 k}$$

פרמטרים פיסיקיים אלו קובעים את התלות שקיבלנו. ראשית נשים לב שתדר הרזוננס יגדל עבור קפיצים גדולים יותר ועבור מסות קטנות יותר. אכן, ניתן לראות בתרשימים 8 ו-10 שכשני תנאים אלו השפיעו על התוצאות הממשיות. בכל המקרים שמרנו את מתח המתנד על 2V, לכן הכוח המאלץ נותר קבוע, כאשר הגדלנו את המסה משרעת הרזוננס גדלה בהתאמה ובאופן הפוך לקפיץ. בנוסף, ניתן להגדיר פרמטר נוסף במערכת, גורם האיכות והוא

$Q \equiv \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$. גורם זה משפיע על חדות תגובת הרזונס, כמה "צרה" ו"גבוהה" היא תהיה. ואכן עבור קפיץ 3, לו מדדנו קבוע קפיץ קטן משמעותית קיבלנו תגובה חדה הרבה יותר.

לסיכום, בניסוי זה בחנו אספקטים שונים של תנועה עם קפיצים בפרט ותנודה הרמונית בכלל. רוב תוצאות הניסוי אותן מדדנו תאמו היטב לחוקי הפיזיקה המנבאים תופעות אלו. ראינו אישוש מדויק לחוק הוק להתארכות, בחנו תנועה תחת ריסון ואת השפעת המסה על תדירות התנודות. בנוסף, בתנועה מרוסנת, אחרי זמן ארוך פתרון המצב העמיד יקבע את אופי התנועה. לתדירות הגורם המאלץ יש חשיבות גדולה עבור היגב המערכת ובחנו את כוחה של תופעת הרזוננס.

5. נספחים

נספח א': תוצאות לגרפים 1 ו-3 :

<u>מסת משקולות (g)</u>	<u>התארכות קפיץ סטטית (cm)</u>	<u>מסה (כולל המוט) (g)</u>	<u>תדירות התנודות החופשיות ($\frac{1}{min}$)</u>
5.07 ± 0.01	0.71 ± 0.01	86.53 ± 0.51	21.10 ± 0.01
9.88 ± 0.01	0.8 ± 0.01	96.41 ± 0.51	20.00 ± 0.01
14.95 ± 0.01	0.93 ± 0.01	117.32 ± 0.51	18.20 ± 0.01
19.53 ± 0.01	1.04 ± 0.01	127.2 ± 0.51	17.50 ± 0.01
24 ± 0.01	1.16 ± 0.01	136.85 ± 0.51	16.90 ± 0.01
29.41 ± 0.01	1.27 ± 0.01	146.73 ± 0.51	16.30 ± 0.01
34.48 ± 0.01	1.4 ± 0.01		
50.32 ± 0.01	1.78 ± 0.01		
60.2 ± 0.01	2.01 ± 0.01		
69.85 ± 0.01	2.25 ± 0.01		

נספח ב': מדידות לצורך קביעת קבועי קפיץ :

<u>מסת משקולות (g)</u>	<u>התארכות קפיץ 2 (cm)</u>	<u>התארכות קפיץ 3 (cm)</u>
4.80 ± 0.01	0.10 ± 0.01	0.65 ± 0.01
10.00 ± 0.01	0.22 ± 0.01	1.36 ± 0.01
19.70 ± 0.01	0.41 ± 0.01	2.70 ± 0.01
29.70 ± 0.01	0.60 ± 0.01	4.09 ± 0.01
49.90 ± 0.01	1.01 ± 0.01	6.83 ± 0.01
59.90 ± 0.01	1.21 ± 0.01	8.20 ± 0.01
69.60 ± 0.01	1.42 ± 0.01	9.55 ± 0.01
79.60 ± 0.01	1.62 ± 0.01	10.92 ± 0.01

נספח ג': מדידות רזוננס קפיץ 1

<u>Mass \cong 50g</u>		<u>Mass \cong 20g</u>	
<u>אמפליטודת תנודות</u> (cm)	<u>תדר עירור</u> (Hz)	<u>אמפליטודת תנודות</u> (cm)	<u>תדר עירור</u> (Hz)
0.57 ± 0.02	3.030 ± 0.001	0.53 ± 0.02	3.500 ± 0.001
0.94 ± 0.02	3.080 ± 0.001	0.98 ± 0.02	3.600 ± 0.001
1.24 ± 0.02	3.110 ± 0.001	1.12 ± 0.02	3.630 ± 0.001
1.24 ± 0.02	3.120 ± 0.001	1.18 ± 0.02	3.640 ± 0.001
1.31 ± 0.02	3.130 ± 0.001	1.22 ± 0.02	3.650 ± 0.001
1.34 ± 0.02	3.140 ± 0.001	1.20 ± 0.02	3.660 ± 0.001
1.38 ± 0.02	3.150 ± 0.001	1.18 ± 0.02	3.670 ± 0.001
1.37 ± 0.02	3.160 ± 0.01	1.10 ± 0.02	3.680 ± 0.001
1.33 ± 0.02	3.170 ± 0.01	0.96 ± 0.02	3.700 ± 0.01
1.30 ± 0.02	3.180 ± 0.001	0.49 ± 0.02	3.800 ± 0.01
1.30 ± 0.02	3.190 ± 0.001		
1.22 ± 0.02	3.200 ± 0.001		
1.16 ± 0.02	3.210 ± 0.001		
1.02 ± 0.02	3.220 ± 0.001		
0.87 ± 0.02	3.230 ± 0.01		
0.73 ± 0.02	3.240 ± 0.01		
0.48 ± 0.02	3.300 ± 0.001		

נספח ד': מדידות רזוננס קפיץ 2

<u>Mass \cong 70g</u>		<u>Mass \cong 50g</u>	
<u>אמפליטודת תנודות</u> (cm)	<u>תדר עירור</u> (Hz)	<u>אמפליטודת תנודות</u> (cm)	<u>תדר עירור</u> (Hz)
0.38 ± 0.15	1.100 ± 0.001	0.42 ± 0.15	1.000 ± 0.001
0.72 ± 0.15	1.150 ± 0.001	1.39 ± 0.15	1.100 ± 0.001
0.93 ± 0.15	1.180 ± 0.001	2.95 ± 0.15	1.110 ± 0.001
1.65 ± 0.15	1.190 ± 0.001	5.38 ± 0.15	1.120 ± 0.001
2.29 ± 0.15	1.200 ± 0.001	5.96 ± 0.15	1.130 ± 0.001
4.14 ± 0.15	1.210 ± 0.001	4.67 ± 0.15	1.140 ± 0.001
4.42 ± 0.15	1.220 ± 0.001	3.35 ± 0.15	1.150 ± 0.001
4.12 ± 0.15	1.230 ± 0.001	2.34 ± 0.15	1.160 ± 0.001
2.55 ± 0.15	1.240 ± 0.001	1.53 ± 0.15	1.170 ± 0.001
2.20 ± 0.15	1.250 ± 0.001	0.71 ± 0.15	1.200 ± 0.001
0.53 ± 0.15	1.300 ± 0.001	0.44 ± 0.15	1.250 ± 0.001