עיבוד אותות ע"י התמרת פורייה

מעבדה ב

ניר גבריאלוב והדר שרביט

בהדרכת מיקי דיאמנט

התמרת פורייה היא כלי מרכזי באנליזה של פונקציות הרמונית, וניתנת לתיאור בצורה הפשטנית ביותר כהמרה של פונקצייה לרכיבים מחזוריים (אלה הן הפונקציות הטריגונומטריות). להתמרות פורייה שימוש נרחב בפיזיקה והנדסה, וכן בעיבוד אותות ובניתוחיהן. מאמר זה יעסוק באנליזה של אותות אור (שדות אלקטרומגנטיים), בגורמים המשפיעים על עוצמת האור ובהצגה של שדות אלקטרומגנטיים במישור הפאזה ביחס להצגה במישור הזמן. למאמר שני חלקים עיקריים - הראשון יעסוק בקשר שבין המרחק לבין עוצמת האור הנקלט ממקור אור, ויפרט על הקשר הריבועי ההפוך הקיים בין אמפליטודת האור לבין מרחק זה. החלק השני יעסוק בניתוח גלים בתצורות שונות הן במישור הזמן והן במישור התדר, תוך שימוש בכלי העיקרי שיעמוד לרשותנו - התמרת פורייה הדיסקרטית, בה נעשה שימוש על מנת להמיר פונקצייה לערכיה במרחב התדר וכמו כן על מנת לבצע את ההליך ההפוך.

1. מבוא

1.1. מרחב התדר

לפי התורה שפותחה בעיקר ע"י ז'וזף פורייה, כל פונקצייה רציפה של הזמן ניתנת להצגה לפי "אופני תנודה" במרחב התדר.הצגה זו מתבצעת על ידי הטלת הפונקציה, ע"י מכפלה פנימית, על בסיס הפונקציות הטריגונומטריות $e^{i\omega t}$. בצורה זו מציגים כל פונקציה לפי עוצמות אופני התנודה (התדרים) השונים המייצגים את הפונקציה. חישוב זה מתבצע לפי ההגדרה של התמרת פורייה:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \qquad (1)$$

כאשר $\mathcal{F}(\omega), f(t)$ הפונקצייה המקורית והפונקצייה במרחב התדר בהתאמה. ההתמרה ההפוכה, בעזרתה משחזרים פונקציה ממרחב התדר לזמן מחושבת ע"י:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t) e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (2)$$

1.2. תיאוריית הדגימה

ביטויים (1) ו(2) מתייחסים לפונקציה $f(t)$ רציפה, המוגדרת על אינטרוול אינסופי $(-\infty, \infty)$. עם זאת, במדידה של $f(t)$ בתנאי מעבדה, זמן המדידה הכולל T הוא, כמובן, סופי.נתן אם כך ביטוי דיסקרטי לפונקציה f, המתחשב בזמן מדידה סופי זה:

$$f(t) = \mathcal{F}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n e^{-i\omega_n t} \qquad (3)$$

כאשר ω_n הם אופני התנודה הדיסקרטיים המהווים בסיס אורתונורמלי לכל הפונקציות, ומוגדרים להיות

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} \qquad (4)$$

בנסוף לזמן המדידה הסופי T, האינטרוולים בין כל שתי מדידות גם הוא סופי. נניח אם כן שביצענו N מדידות בזמנים $t_1, t_2, \dots t_N$ ושהאינטרוול Δ בין כל שתי מדידות קבוע, דהיינו $\Delta = t_i - t_{i-1}$ (ומכאן ש $T = N\Delta$). דיסקרטיזציה זו מגדירה עבורנו את הפונקציה f רק בנקודות הזמן המדודות, כלומר הערכים הרלוונטיים היחידים הם $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_N)$. הגדרות אלה מאפשרות לנו לתת ביטוי דיסקרטי לנוסחא (1):

$$\mathcal{F}_n(\omega_n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i\omega_n t} \qquad (5)$$

ולנוסחא (2):

$$f(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n(\omega_n) e^{i\omega_n t} \qquad (6)$$

1.3. תדירות Nyquist

נשאלת השאלה- כמה אופני תנודה נדרשים על מנת לתאר במדויק את המדידות $f(t_n)$. התשובה היא, שמשום שיש בסה"כ N ערכים לפונקציה, אנו זקוקים ל N דרגות חופש במרחב פורייה. עם זאת, משום שכל אופן מוגדר בעזרת $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \cdot \sin(\omega t)$ המספק שתי דרגות חופש, אנו זקוקים למעשה ל-$N/2$ ערכים בסה"כ. מסקנה זו מביאה אותנו לכך שקיימת תדירות "קיטעון", שנסמנה ב-ω_c החוסמת את ω_n באופן הבא:

$$\omega_c = \frac{2\pi N}{T} = \frac{\pi}{\Delta} \qquad (7)$$

$$-\omega_c < \omega_n < \omega_c \qquad (8)$$

ω_c נקראת תדירות נייקוויסט (*Nyquist*) ומשמעותה היא שהתצורה הדיסקרטית של מרווחי הזמן קובעת את התדירות הגבוהה ביותר והנמוכה ביותר האפשריות בהצגת פורייה של המידע אותו מדדנו.

באופן מילולי, תדירות נייקוויסט היא מחצית מתדר הדגימה בו המערכת הדיסקרטית פועלת, וזוהי התדירות הגבוהה ביותר שניתנת לשחזור מתוך אות. קיומה של תדירות זו ממחיש את עקרון אי הוודאות של גלים מכניים, אך במאמר זה לא נכנס לפרטים מעבר לכך.

1.4. תופעת *Aliasing*

כאשר תדירות התדר הנמדד ω גדולה מתדירות נייקוויסט ω_c, נוכל לצפות בתדירויות "כזב" ω_{alias} שיופיע בתוך ספקטרום הפורייה אותו חישבנו. מיקומם של תדירויות אלה במרחב התדר נתון על ידי $\omega_{alias} = \omega - 2n\omega_c$, כאשר n הוא המספר הקטן ביותר עבורו $|\omega_{alias}| < \omega_c$. המשמעות העיקרית של תדירות ω_{alias} זו היא שכאשר אנו מודדים תדר מסוים בתדירות דגימה נמוכה מדי, תוצאת המדידה שלנו לא יהיו מדויקת, ויכילו בתוכן גם תדרים שאינם רלוונטיים לדגימה. דוגמה הממחישה עקרון זה היא התופעה בה נצפים גלגלי מכונית "מסתובבים לאחור", כאשר הם מוארים בתאורת רחוב (שתדירותה היא $\sim 50Hz$)

1.5. דעיכת האור כתלות במרחק

תחת ההנחה של מקור נקודתי, נוכל לבטא את השדה באמצעות $\psi = \frac{A}{r}e^{ikr}$. זאת כאשר A היא האמפליטודה, k הוא מספר הגל והנרמול $1/r$ נובע משיקולי שימור אנרגיה. אם כך, העוצמה המוגדרת לפי $I = |\psi|^2$ פרופורציונית למרחק בריבוע. כלומר יחס הפרופורציה המתקבל הוא

$$I \propto \frac{1}{r^2} \qquad (9)$$

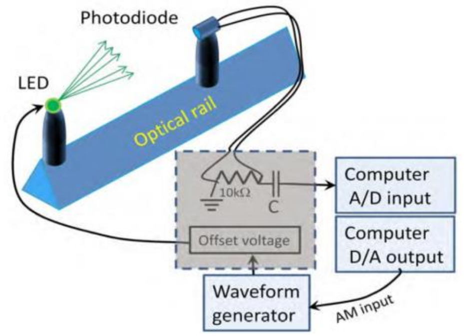
2. מערכת הניסוי

למערכת שני חלקים עיקריים. הפלט והקלט.

הפלט – החלק המשדר את האות מורכב ממנורת LED המחובר לספק מתח. אלה נשלטים באמצעות המחשב ועל ידי תוכנת SignalExpress, המאפשרת שינויים בתדירות האור הנפלט, בעוצמתו ובתצורתו. מבין האפשרויות ישנם תצורת גל סינוסית, מלבנית ועוד.

הקלט – החלק הקולט את האור המגיע ממנורת הLED. מורכב מפוטו-דיודה(קולטן) המחוברת למעגל חשמלי. את האות המתקבל מהדיודה ניתן לנתח ולעבד באמצעות המחשב המחובר למעגל החשמלי.

קלט ופלט אלה ממוקמים על מסילה אופטית המאפשרת את תזוזת החלקים, ובכך מכניסה משתנה נוסף - מדידת מרחק.



איור 1: תיאור סכמטי של חלקי המערכת- מנורת LED ממוקמת על מסילה אופטית וניתנת לשינוע לאורך המסילה. האור אותה פולטת המנורה נקלט על ידי פוטו-דיודה, אשר מחוברת לממיר A/D. הפלט של מנורת ה-LED ניתן לשינוי באמצעות המחשב ועל ידי ה Waveform generator. למעגל החשמלי המתואר באיור שני תפקידים עיקריים – הראשון הוא לספק מתח offset ל-LED והשני הוא לפצות על תדרי DC ולספק טווח רחב של קליטה.

3. מהלך הניסוי

הניסוי שערכנו התחלק ל-2 חלקים עיקריים:

חלק ראשון - מדדנו את הקשר בין עוצמת האור הנקלט לבין המרחק. התחלנו ממרחק מינימלי, שם העוצמה הנקלטת היא מירבית, והתחלנו להרחיק את מנורת ה-LED מן הקולטן במרחקים קבועים על מנת למדוד עד כמה דועכת העוצמה כשהמרחק בין הקלט והפלט גדל. הפסקנו את המדידות כאשר העוצמה המגיעה ישירות מן ה-LED בלתי ניתנת לאבחנה ביחס לעוצמת האור המגיעה מהסביבה, קרי – רעש. (למשל מהמנורות שבמעבדה). לצורך ביצוע ניסוי זה, יצרנו גל סינוסידיאלי רציף, ושמרנו על כך לאורך כל המדידות. את הגל שידרנו בתדירות $100Hz$ ואמפליטודה קבועה ביחידות ארביטראריות. בהתאם לתיאוריה המפורטת בחלק המבוא (דעיכת האור כתלות במרחק) ולפי נוסחא (9) בהקשר זה, ציפינו לדעיכה שהולכת כמו $\sim r^{-2}$. כלומר, ציפינו שככל שנרחיק את מנורת ה-LED מהקולטן, העוצמה תקטן בריבוע.

חלק שני - ניתחנו את התמרות פורייה המתקבלות עבור תצורות שונות של גל הנפלט מה-LED. בחנו גלים דוגמת גל מרובע, סינוסי, משולש ועוד וראינו מהם התדרים הבאים לידי ביטוי במרחב פורייה של אותן פונקציות. כמו כן, ניסינו לשחזר מתוך התמונה במרחב התדר את פונקציית המקור ממנה התחלנו.

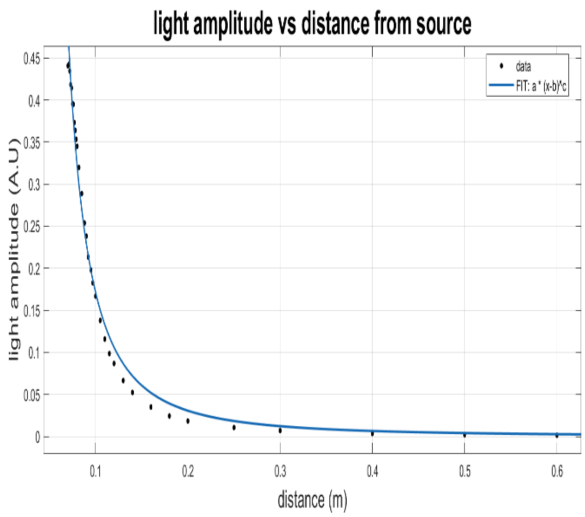
ניסוי זה התבצע בעיקר בעזרת MATLAB (ראה קוד בנספחים), ובאמצעות תוכנת ה SignalExpress שבעזרתה

פלטנו גלים בצורות שונות. נציין שלפני תחילת הניסוי זיהינו מנתוני המערכת מהי תדירות נייקוויסט (ראה נוסחה 7) ובמסגרת תדירות זו ביצענו את המדידות. במרחב התדר צפינו לראות דלתאות (או קירוב שלהן) עבור התדירויות בהן שידרנו את הגל. כל למשל עבור פונקציית סינוס $\sin(\omega_0 t)$ ציפינו לפונקצית δ הממוקמת ב-ω_0. ועבור פונקציית multi-tone ציפינו למצבור דלתאות המתאימות לאוסף התדירויות שהכילה פונקציית מקור זו. מעבר לכך, צפינו שהרעש מהסביבה יביא לכך שתדירויות נוספות יופיע במרחב התדר. חלק זה של הניסוי התבצע בהנתן תנאי ההתחלה המפורטים בנספח (ראה נספח חלק ב)

4. תוצאות

4.1 דעיכת עוצמת האות

בחלק זה בחנו את השפעת המרחק שהאות עבר על עוצמתו כפי שנקלט בפוטודיודה. שידרנו אות סינודיאלי ממנורת הLED ואספנו נתוני עוצמה ביחס למרחק כפי שמתואר בתרשים 1



תרשים 1: עוצמת האור הנקלט כתלות במרחק בין נורת הלד לפוטודיודה הקולטת. בשחור נק' הדגימה ובכחול התאמה לדעיכה ריבועית ($\sim r^{-2}$) שביצענו לנתונים.

ביצענו התאמה לפי ההנחה שהאות מתפשט מנורת הלד בדומה למקור כדורי, לכן עוצמת האור בנק' מסוימת דועכת ביחס ישר לשטח הפנים של הכדור המתפזר. שטח זה הוא כמובן מתכונתי למרחק בריבוע(ראה נוסחא 9). את ההתאמה לנתונים ביצענו באמצעות הקשר הבא

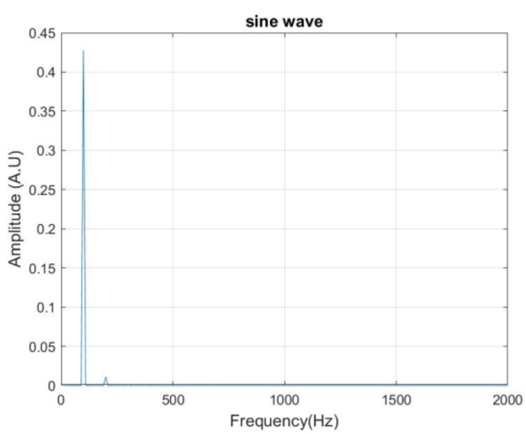
$$I = I_0 \cdot \frac{1}{(r+b)^2} \qquad (10)$$

כאשר I עוצמת האות I_0 עוצמה התחלתית שרירותים(פרמטר) , r המרחק שהאות עבר ממנורת ה-LED לקולטן (פוטו-דיודה) ו - a, b פרמטרים. הפרמטר b הינו הזזה ממרחק 0. הסיבה להוספתו היא מכיוון שציוד הניסוי לא אפשר למדוד מרחק השואף ל-0 בין הנורה לחיישן, ובמדידות המרחק כולן ישנה הזזה מסוימת.

לפי נתוני ההתאמה הזזה זו נתונה ע"י $b = 2.6 \pm 0.2_{cm}$. ניכר כי ההתאמה איכותית ורלוונטית לנתונים, נתון המאשש זאת הינו $R^2 = 0.9901$ ואכן המודל המתאר דעיכה ריבועית מתאר בצורה איכותית את עוצמת האות כתלות במרחק מהמקור. נוסיף ונאמר כי הסיבה לאי-דיוקים כאלה ואחרים במהלך הניסוי ובתוצאות המתוארות בתרשים 1 יכולות לנבוע מקיומו של רעש במערכת. רעש שמתווסף למערכת בהקשר של ניסוי זה הוא אור נוסף המגיע אל הקולטן מהמנורות במעבדה. עם זאת, עוצמת רעש זה בקירוב קבועה(הקולטן והמנורות במעבדה יציבים במקומם) ועל כן, השפעתה היא לכל היותר בהוספת קבוע לערך I הנמדד.

4.2 אות במרחב התדר

כפי שתיארנו במבוא לניסוי, כל סיגנל של מידע ניתן לתאר באמצעות התדרים אותם הוא מכיל, כלומר לפרוש אותו במרחב התדר על אופני תנודה שונים. העברנו אות של גל סינוס (בתדר 100 Hz) במערכת הניסוי, קלטנו אותו בפוטודיודה ואת המידע המרנו למרחב התדר (בעזרת סקריפט MATLAB שבנספחים). בתרשים 2 מוצגת התוצאה כפי שהתקבלה במרחב התדר.



תרשים 2: אות סינוסודיאלי במרחב התדר

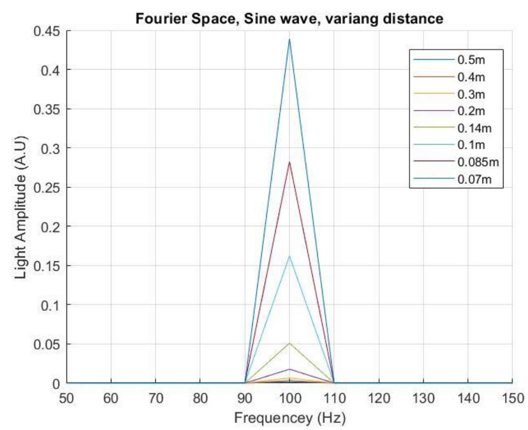
בתוצאה שהתקבלה נראה בבירור כי ישנו רכיב אחד משמעותי סביב תדר 100 Hz. תוצאה זו מסתדרת עם התיאוריה המפורטת במבוא – במרחב הזמן שידרנו גל שתצורתו $\psi \sim \sin(\omega_0 t)$, זאת עבור $\omega_0 = 100Hz$. בעזרת נוסחא (1), או מקבילתה הדיסקרטית (5), נגלה לאחר חישוב קצר כי מתקיים

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)](\omega) =$$

$$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega-\omega_0)-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega+\omega_0)$$

כלומר, העוצמה המתקבלת היא דלתא הממוקמת ב= ω_0 $100Hz$ במישור הפאזה, כפי שאכן קיבלנו במציאות כמתואר בתרשים 2.

כעת נבחן את השפעת המרחק שהאות עובר על עוצמתו במרחב התדר. באופן דומה לזה שתיארנו בפרק על דעיכת העוצמה, לקחנו דגימות של הגל במרחקים שונים בין הנורה לחיישן, ואח"כ המרנו אותם למרחב התדר. קיבלנו דעיכה של עוצמת האור גם במרחב התדר כמצופה, כפי שניתן לראות בתרשים 3

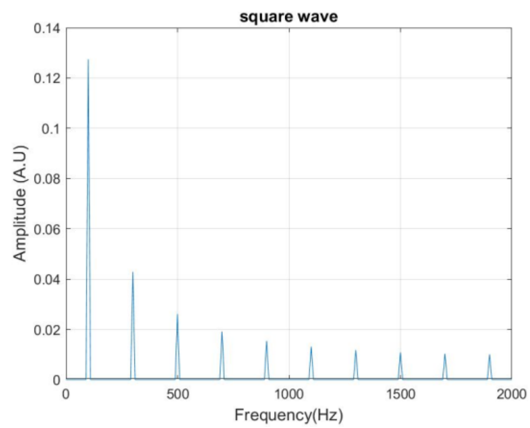


תרשים 3: דעיכת עוצמת האות במרחב התדר. דגימות של אותות במרחקים שונים, הגרף ממורכז סביב תדר Hz 100 הרלוונטי.

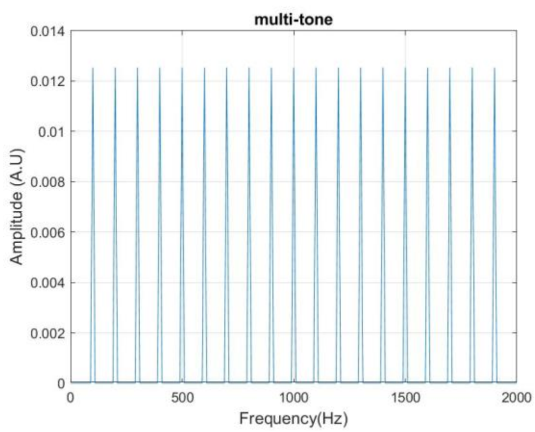
בנוסף, לקחנו את נתוני האותות מפרק דעיכת העוצמה והמרנו אותם למרחב התדר. יצרנו גרף של דעיכת העוצמה כפי שהופיעה במרחב התדר. הגרף שהתקבל זהה לחלוטין לתרשים 1 .נסיק כי בהצגה זו במרחב התדר נשמר המידע של עוצמת האותות במרחקים השונים.

4.3. סיגנלים בעלי מאפיינים שונים

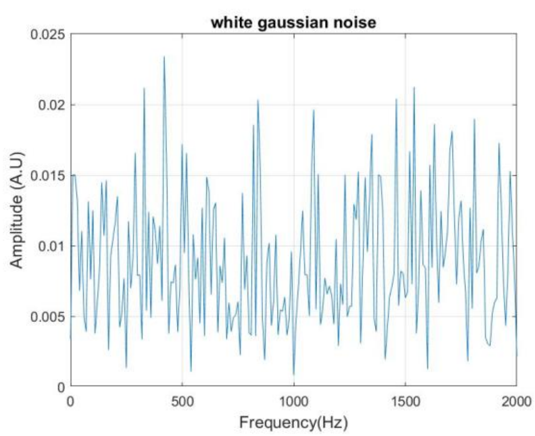
בעזרת תוכנה ייעודית, שידרנו מנורת הלד אותות שונים, בעלי מאפיינים שונים – אות ריבועי (דיגיטלי) רעש לבן, אות בעל רכיבי תדר רבים באותה עוצמה (multi-tone) ועוד. בצורה דומה לזו שתיארנו על הגל הסינוסדיואלי המרנו את האותות שהתקבלו למרחב התדר. בתרשים 4: $(a)\rightarrow(e)$ ניתן לראות את האותות השונים כפי שהתקבלו.



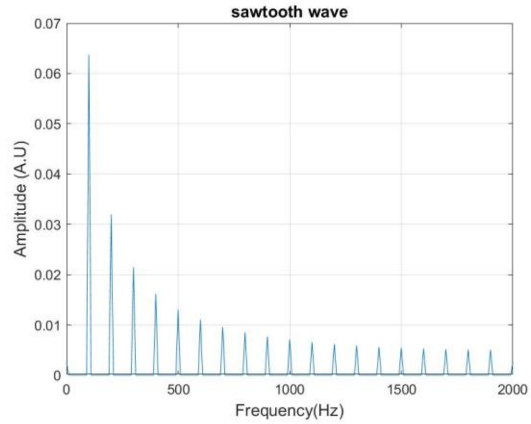
(a)



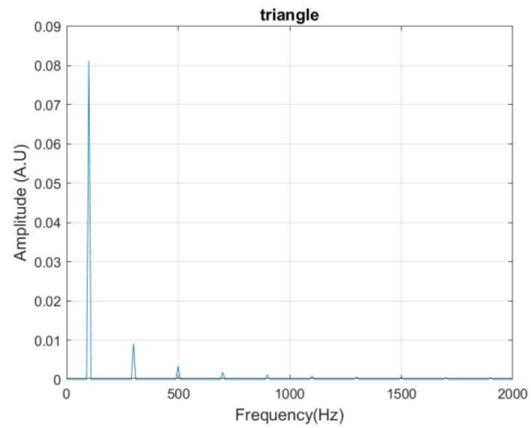
(b)



4 (c)



(d)



(e)

תרשים 4: האותות השונים שהתקבלו במרחב התדר. האותות מלמעלה למטה הינם גל ריבועי, גל multi-tone, רעש לבן, גל מסורי, וגל משולשי.

כפי שכבר ראינו, בגל הסינודיאלי ישנו רכיב תדר אחד. מהגרפים ניתן לראות כי ככל שהגל "מסובך" יותר, מבחינת הפרדה לתדרים, ישנם רכיבי תדר נוספים. בגל המשולשי מופיעים עוד מס' רכיבים, במסור ובריבוע אף יותר וברעש הלבן (המון תדרים מעורבבים יחדיו) כאוס מוחלט. בגל ה-multi-tone ישנם רכיבים רבים באותה עוצמה, כלומר גל המרכיב מס' מוגדר של תדרים בהפרש קבוע כמצופה.

נתעכב לשם השלמות בפונקצית המלבן, הניתנת לניתוח פורייה פשוט למדי. כפי שניתן לראות, העוצמה המתקבלת במרחב הפאזה עבור פונקצייה זו הולכת וקטנה. נוכל למצוא את ההסבר לכך בעזרת התמרת פורייה הרציפה, הניתנת לנו בנוסחא (1). בהנתן פונקציית מלבן בעלת עובי a, מתקיים

$$\mathcal{F}\left[rect\left(\frac{t}{a}\right)\right] \propto Sinc\left(\frac{a\omega}{2}\right)$$

כלומר, התמרת הפורייה של פונקציית המלבן היא למעשה פונקציית $sinc(\omega) = \sin(\omega)/\omega$ במרחב הפאזה, ומכאן הדעיכה המתקבלת בתרשים $4(a)$.

5. מסקנות

במהלך הניסוי חקרנו את התהגות האותות האלקטרומגנטיים וניתחנו אותם במרחב התדר. התוצאות שקיבלנו מתאימות איכותית להנחה ממנה התחלנו, שעוצמת האור דועכת כמו $\sim r^{-2}$, כאשר r המרחק מהמקור.

הצגנו את אנליזת פורייה ככלי לניתוח אותות מכל הסוגים. גילינו כי ההמרה למרחב התדר משמרת את המידע על עוצמת האות, ומאפשרת ללמוד עליו המון. כפי שראינו, בעזרת כלי זה ניתן לבודד את התדרים המרכיבים את האות ולקבל תמונה טובה יותר על מאפייניו. בעזרתו פירקנו את האותות בעלי המאפיינים השונים לאופני התנודה שלהם, ומכך למדנו על תכונותיהם.

נספחים

נספח א' – סקריפט להמרת אות למרחב התדר

עבור תדר דגימה של 4000Hz

```
%% constants
sample_frequency = 4000;
sample_period = 1/sample_frequency;
filename = 'diff_waveforms.xlsx';
[~,sheets] = xlsfinfo(filename);

%% calculate fourier
for i=1:length(sheets)
    data = readtable(filename,'Sheet',i,'ReadVariableNames',false);
    voltage = data.Var2;
    time = data.Var1;
    len_of_signal = length(time);

    %% compute fft
    fft_data= fft(voltage);
    P2=abs(fft_data/len_of_signal);
    P1 = P2(1:len_of_signal/2+1);
    P1(2:end-1)=2*P1(2:end-1);
    frequency = sample_frequency*(0:(len_of_signal/2))/len_of_signal;
plot(frequency, P1);
end
```

נספח ב' – נתוני התחלה עבור חלק ב' בניסוי

<u>Create Analog Signal</u>
Frequency: 1000hz
Amplitude: 100mV
Sample rate: 100k(Samples/Sec)
Block size: 1000 (samples)

<u>DAQmx Generate and Acquire</u>
Samples to Write: 1000
Rate: 100khz

בפרט עבור גל סינוסי: שודר בתדר $100Hz$ והגל הנושא(הנובע מלקיחת הדגימות) בתדר $4kHz$.