

האוניברסיטה העברית

הפקולטה לפיזיקה

חשמל ומגנטיות

תרגיל נומרי

מגישים:

ניר גבריאלוב

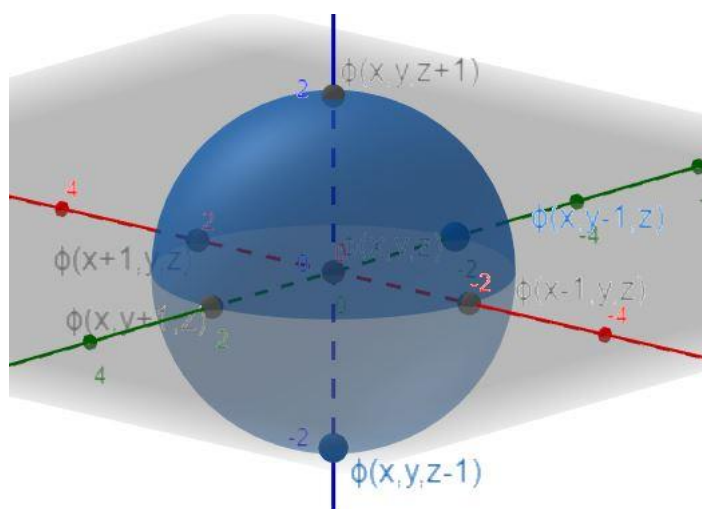
הדר שרביט

תאריך הגשה:

21.6.19

שאלה 1

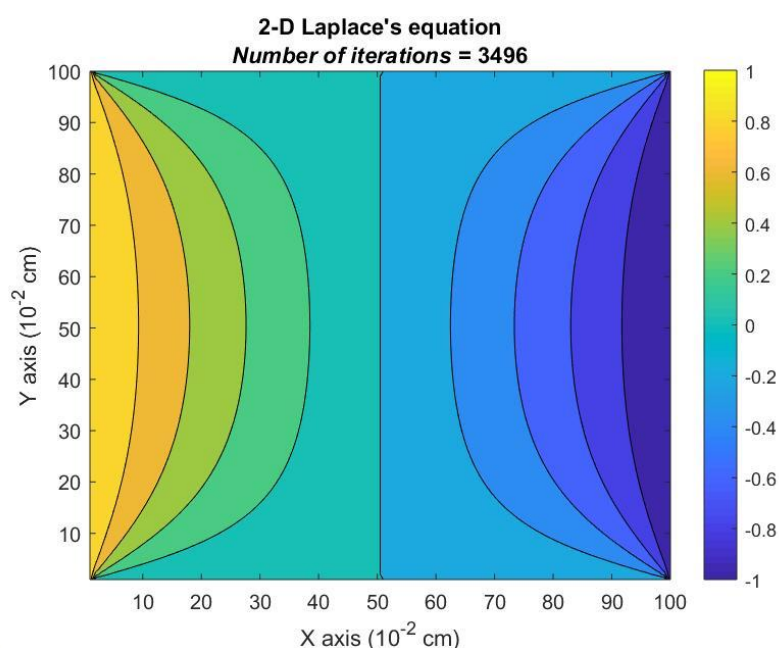
נוסחה (1) מתארת מיצוע של הפוטנציאל בהתאם ל-6 נקודות מדידה שונות במרחב, כך שכל נקודת פוטנציאל $\phi(x, y, z)$ מחושבת לפי שכנותיה בנקודות $(x \pm 1, y \pm 1, z \pm 1)$. משום שהפוטנציאל לאורך ציר \hat{z} קבוע, הרי שאין תרומה לערך הפוטנציאל בנקודה (x, y, z) משכנותיה שבמיקומים $(x, y, z \pm 1)$. לכן, הנוסחה מציגה קשר בין הפוטנציאל בנקודה מסוימת לבין ארבעת שכנותיה על המישור xy . משום שכל מדידה מוכפלת ב- $\Delta x^2, \Delta y^2$ ולבסוף מחלקים בסכום $\Delta x^2 + \Delta y^2$ אנו למעשה מבצעים ממוצע חשבוני, ומשום שהמיצוע מתבצע גם לאורך z , החישוב שקול לממוצע חשבוני של נקודה על גבי ספירה ברדיוס R כללי הממחישה את מרחקי המדידות הקבועים בכל ציר $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.



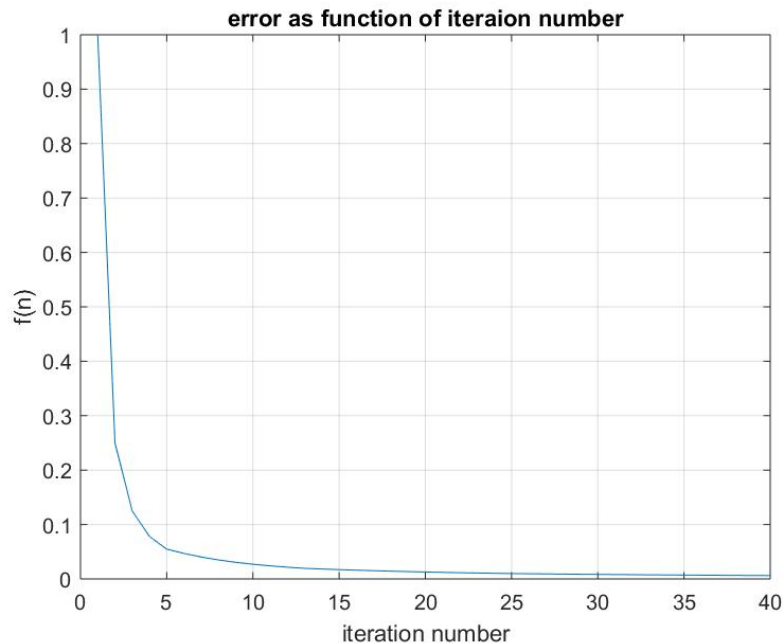
שאלה 2

בהינתן גודל הפוטנציאל בפאות, השתמשנו בשיטת הרלקסציה על מנת לקבוע את גודל הפוטנציאל בתוך התיבה. כפי שתואר בשאלה 1, כל נקודה במרחב חושבה בהתאם לממוצע הפוטנציאל שבסביבתה. כך, באיטרציות המתוארות בתיאור התרגיל, קיבלנו פוטנציאל שהולך לאפס עד אמצע התיבה ונהפך שלילי בצד הקרוב לפאה בעלת הפוטנציאל השלילי.

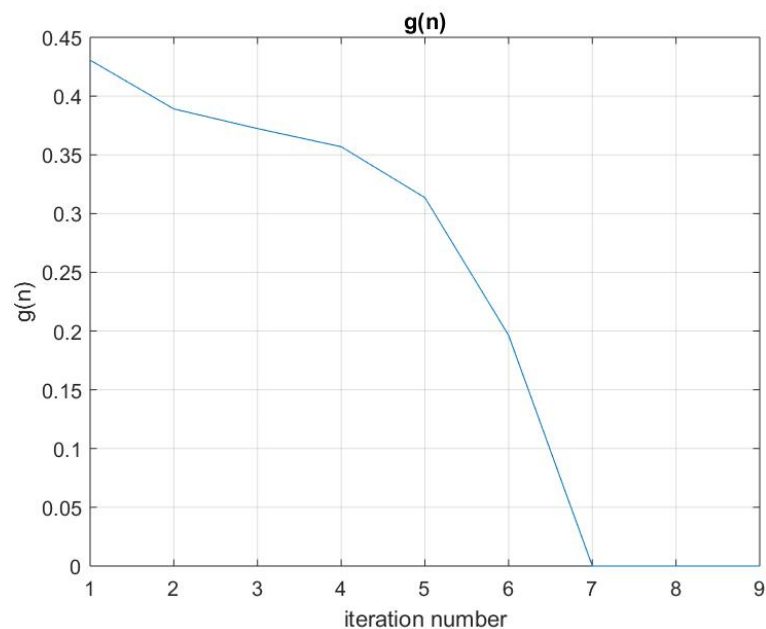
להלן התפלגות הפוטנציאל על משטח בעל גדלים $L_x \times L_y$, כאשר $L_x = L_y = 1\text{cm}$.



כמו כן, בכל איטרציה מדדנו את ההבדל בין מדידה לבין המדידה שקדמה לה, ביחס לתנאי השפה בנתונים. זאת בהתאם לקשר המתואר בתיאור התרגיל $(\max_{ij} \phi_{ij}^{n+1} - \phi_{ij}^n) / \phi(0, y)$. ראינו שהשגיאה אכן הולכת וקטנה ככל שמגדילים את מספר האיטרציות. עובדה זו נצפתה בבירור בגרף הבא המתאר את השגיאה כתלות במספר האיטרציות. (גרף זה מציג את המדידות עבור $\epsilon = 10^{-4}$)

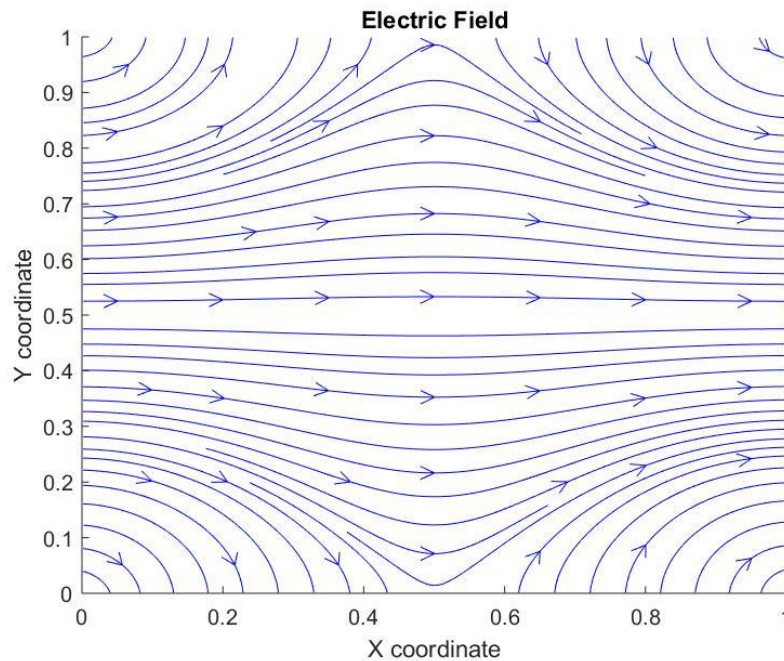


מדידה נוספת שערכנו היא הפרשי ממוצעי הפוטנציאל כפונקציה של גודל החלוקה. ככל שמספר החלוקות יקטן נצפה שההפרש בין כל מדידת פוטנציאל יקטן גם הוא. טענה זו ניתן לראות בגרף הבא, בו רואים את הקשר בין ההפרש בין כל מדידה לבין מספר החלוקות אותו אתחלנו.



שאלה 3

מהקשר הידוע בין השדה לפוטנציאל, ייצרנו גרף של קווי השדה במישור XY. נשים לב לכיוון השדה – הזורם משמאל לימין וזאת כפי שמצופה מאופי התיבה, בה הקצה השמאלי הוא בעל פוטנציאל חיובי ולהפך.



שאלה 4

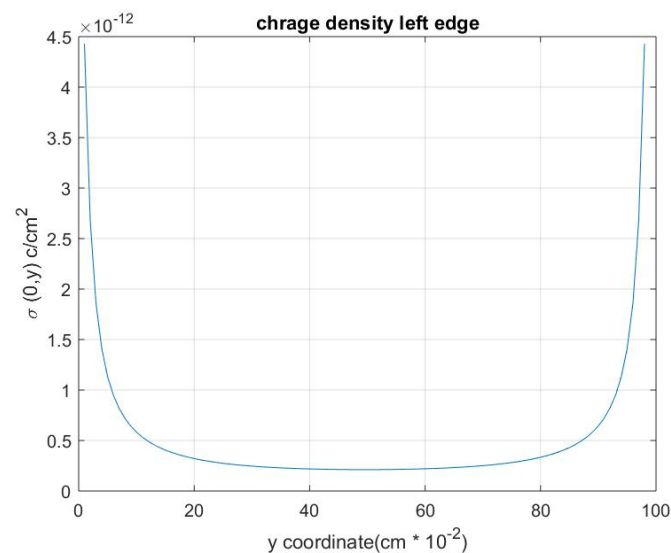
את התפלגות המטען על שפת התיבה ($x = 0$) נוכל לחשב לפי קפיצת השדה על השפה. קפיצת השדה בכיוון הניצב למשטח הטעון נתונה על ידי הקשר

$$\hat{n}(\bar{E}_{x=0} - \bar{E}_{out}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

משום שהשדה בחוץ הוא אפס נוכל לחלץ את σ ולקבל:

$$\sigma = \epsilon_0 \bar{E}_{x=0} \hat{n}$$

באיטרציה על הוקטור הראשון מתוך המטריצה המייצגת את השדה, קיבלנו את הגרף הבא המתאר את התלות של התפלגות המטען בקואורדינטה Y



שאלה 5

בהרצאה הראנו ביטוי לאנרגיה של מערכת עם N חלקיקים בצורתה הדיסקרטית:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i^N q_i \phi(\vec{r}_i)$$

כאשר משאיפים לאינסוף ולוקחים את התפלגות המטען $\rho(\vec{r})$ במקום המטענים הבודדים מתקבל

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V dV \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r})$$

נעבור לאינטגרל משטחי על המעטפת של V , ∂V ולהתפלגות המשטחית $\sigma(\vec{r})$, (משום שכל המטען בפנים הוא 0) כך נקבל:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\partial V} \sigma(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dS$$

(כנדרש)

כעת נחזור לנוסחה (2) ונציב בה את הקשר

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V dV \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) = \frac{-\epsilon_0}{2} \iiint_V dV \phi \nabla^2 \phi$$

נשתמש בזהות ידועה (בדומה לנגזרת מכפלה)

$$\nabla(\phi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \nabla \phi \Rightarrow \phi \nabla^2 \phi = \nabla(\phi \nabla \phi) - \nabla \phi \nabla \phi$$

כעת נוכל להציב את הזהות בפיתוח ולקבל:

$$U = \frac{-\epsilon_0}{2} \iiint_V dV \phi \nabla^2 \phi = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla(\phi \nabla \phi) dV$$

אם נשתמש במשפט גאוס ונקבע את המעטפת להיות ב- ∞ נקבל שהאינטגרל השני מתאפס. כמו כן נוכל להציב את הקשר:

$$\nabla \phi = E$$

כך שלבסוף נקבל

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (E \cdot E) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E(\vec{r})^2 dV$$

(כנדרש)

שאלה 6

להלן האנרגיה שהתקבלה עבור שתי המדידות השונות:

$$U_1 = 8.0053 \cdot 10^{-12} [J]$$

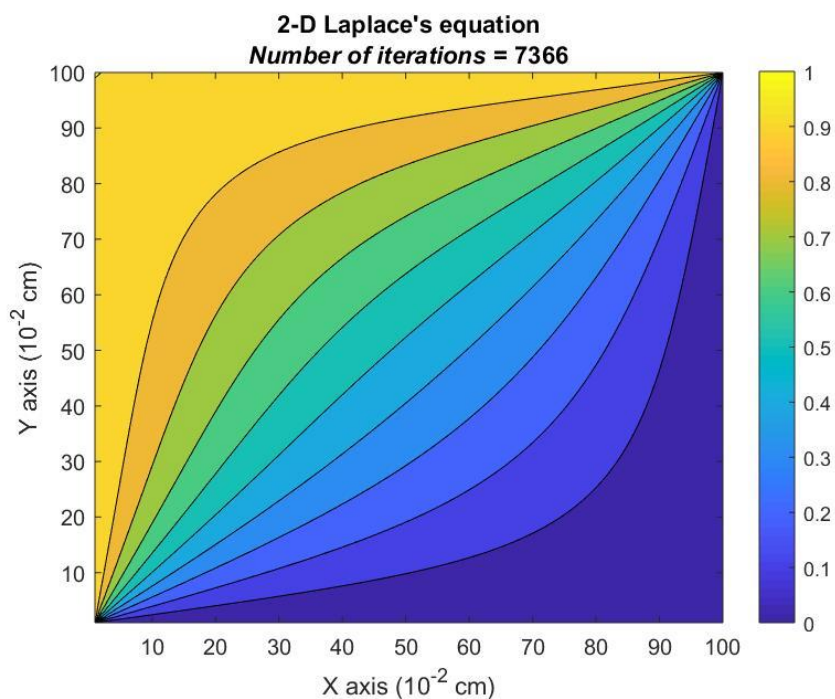
$$U_2 = 2.0680 \cdot 10^{-12} [J]$$

שאלה 9

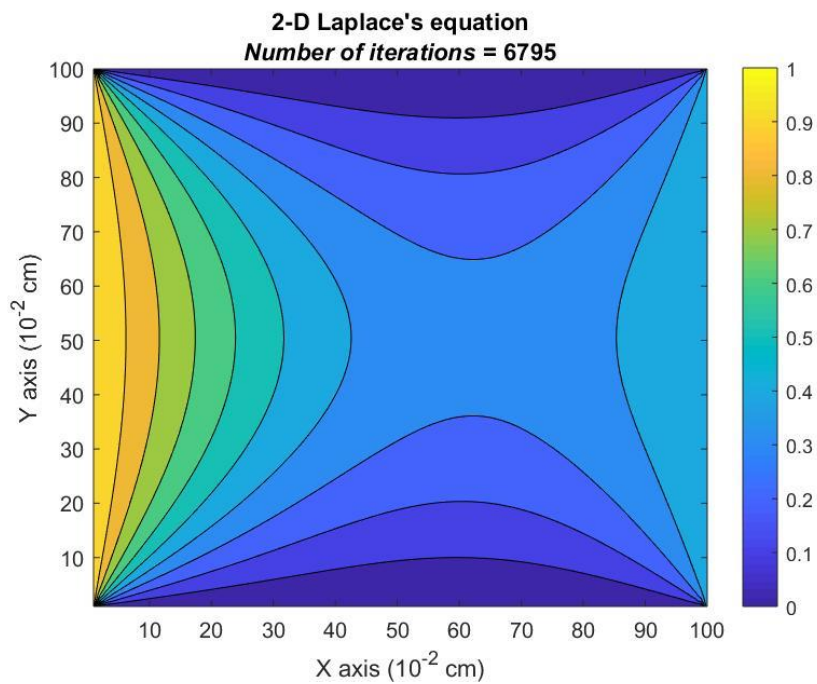
בחלק זה חילצנו את הפוטנציאל על מישור XY עבור שני מקרים.

מקרה 1: המערכת נשארה זהה אך הפאה ה"עליונה" של התיבה הוטענה וכעת הפוטנציאל בה הוא $1V$

להלן הגרף שהתקבל:



מקרה 2: במקרה זה הקטנו את הפוטנציאל בפאה הימנית של התיבה ל- $\frac{1}{2}$. להלן הגרף שהתקבל:



function that calculates the potential in the box, given initial value and accuracy

```
function p = calc_potential (nx, ny, initial_value, epsilon)

    %Specifying parameters
    dx = 1 / (nx-1);           %Width of space step(x)
    dy = 1 / (ny-1);           %Width of space step(y)
    it = 1;                     % iterations counter
    fn = ones(1,100);          % f(n) results

    %Initial Conditions
    p=zeros(ny,nx);             %Preallocating p
    pn=zeros(ny,nx);            %Preallocating pn
    diff = ones(ny, nx);        %preallocating difference matrix

    %Boundary conditions
    p(:,1) = initial_value;
    p(:,nx) = -initial_value;

    %Explicit iterative scheme
    j=2:nx-1;
    i=2:ny-1;
    while fn(it) / initial_value >= epsilon
        pn = p;
        p(i,j)=((dy^2*(pn(i+1,j)+pn(i-1,j)))+(dx^2*(pn(i,j)
+1)+pn(i,j-1))))/(2*(dx^2+dy^2));
        diff = (p - pn);
        diff = diff(2:nx-1, 2:ny-1);
        it = it + 1;
        fn(it) = max(max(abs(diff))) / initial_value;
    end

    %Plotting the solution
    figure(1);
    contourf(p);
    title({'2-D Laplace''s equation';['{\itNumber of iterations} = '
,num2str(it-1)]});
    xlabel('X axis (10^{-2} cm)');
    ylabel('Y axis (10^{-2} cm)');
    colorbar;
    figure(2);
    plot(fn(1,1:40));
    grid on;
    title('error as function of iteraion number');
    xlabel('iteration number');
    ylabel('f(n)');

end
```

Published with MATLAB® R2018b

calculates the field and charge density in the box

Table of Contents

setting parameters	1
iterating over the potential to create the field variables	1
calculating the charge on each edge	1
plotting	1
calculating the energy in the system	2

setting parameters

```
n = 100; %number of intervals
p = calc_potential(n, n ,1, 0.000001); %obtaining the potential
matrix
dx=1/n; %Width of space step(x)
Ex=zeros(n);
Ey=zeros(n);
e0=8.854*10^-12; %dielectricity of the vaccum
```

iterating over the potential to create the field variables

```
for i = [2:n-1]
    for j = [2:n-1]
        Ex(i,j)=(p(i,j)-p(i,j-1))/dx;
        Ey(i,j)=(p(i,j)-p(i-1,j))/dx;
    end
end
Ex=-Ex(2:n-1,2:n-1);
Ey=-Ey(2:n-1,2:n-1);
```

calculating the charge on each edge

```
sigma_left = e0 * Ex(:,1);
sigma_right = -e0 * Ex(:,n-2);
```

plotting

```
figure(3);
[X,Y]=meshgrid(linspace(0,1,n-2),linspace(0,1,n-2));
axis([0 1 0 1])
streamslice(X,Y,Ex,Ey);
xlabel("X coordinate")
```



```
ylabel("Y coordinate")
title("Electric Field")

figure(4);
plot(sigma_left);
xlabel("y coordinate(cm * 10^{-2})")
ylabel("\sigma (0,y) c/cm^2")
grid on;
title("charge density left edge")
```

calculating the energy in the system

```
E_squared = Ex^2 + Ey^2;
energy1=(e0/2)*sum(sum(E_squared(11:n-10,11:n-10)));
energy2=(1/2)*(sum(sum(sigma_left .* p(1, 2:n-1))) +
sum(sum(sigma_right .* p(n-1, 2:n-1))));
```

Published with MATLAB® R2018b

calculating the potential, incrementing partition until sufficient accuracy

```
        setting parameters

epsilon = 0.0001;      % convergence condition, has to be smaller than
1
diff_epsilon = 0.3;    % g(n)
epsilon
n = 4;                 %number of steps, nx = ny =
n
size_func = zeros(1,10); % will hold
g(n)
it = 2;                % iterations
counter
initial_value = 1;     % initial potential
value
p = calc_potential(n, n, initial_value, epsilon); % calcs
potential
size_func(it) = sum(sum(abs(p)))/ (initial_value * n^2); % calcs first
g(n)

actual iterative loop

while abs(size_func(it) - size_func(it-1)) >= diff_epsilon
    n = n * 2;
    p = calc_potential(n, n, initial_value, epsilon);
    size_func(it) = sum(sum(abs(p)))/ (initial_value * n^2);
    it = it + 1;
end

plotting result

figure(3);
plot(size_func(2:10));
grid on;
title('g(n)');
xlabel('n');
ylabel('g(n)');
```

Published with MATLAB® R2018b