

הדס מנטקה 211364542
איתי קנורוביץ 322436601

אלגוריתמים 1 – תרגיל עיוני 1

מבוא לגרפים

לפני תחילת מענה על המטלה והגשתה – עברו על ההוראות
המפורטות שמצוינות במודל. אי הקפדה על צורת המענה ואופן
ההגשה תגרור הורדת ניקוד משמעותית

1. הוכיחו כי בכל גרף לא מכוון $G(V, E)$ קיימים צמתים x ו- y המקיימים
 $\deg(x) = \deg(y)$

פתרון :

יהי $G=(V, E)$, $n=|V| \geq 2$
האפשרויות לדרגות הן $\{0, 1, \dots, n-1\}$.
נבחר בין שתי אפשרויות:
1. ישנו קדקוד עם 1 n -שכנים.
אזי הוא שכן של כולם, ולכן אין קודקוד עם דרגה 0. לכן אנו למעשה מחלקים n
הקודקודים בין 1 n -תאים ועפ"י עקרון שובך היונים יהיו שני קודקודים באותו
התא, כלומר שני קודקודים עם אותה דרגה.
2. אין קדקוד עם דרגה 1. n -
שוב אנו מחלקים n קודקודים בין 1 n -תאים ועפ"י עקרון שובך היונים יהיו שני
קודקודים באותו התא, כלומר עם אותה דרגה.
מש"ל.

2. בור הוא צומת בגרף מכוון $G(V, E)$ דרגת כניסה $n-1$ ודרגת יציאה 0.
רשמו שגרה המקבלת גרף $G(V, E)$ המיוצג על ידי מטריצת שכנים ומוצאת
בור (או לחילופין מודיעה "לא נמצא") בסיבוכיות זמן ריצה $O(n)$.

פתרון:

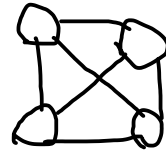
הפונקציה מקבלת מטריצה המייצגת את הגרף ואת מספר הקודקודים בגרף
(n):

```
findBor(mat, n)
    row=1
    col=2
    While (col<=n)
        If(mat[row][col] = 1)
            row=col
            col++

    for i from 1 to n
        if (i != row) AND (mat[row][i]!=0 OR mat[i][row]!=1)
            print("לא נמצא")
            Exit

    return row
```

3. יהי $G=(V,E)$ גרף לא-מכוון פשוט. נסמן $|V|=n$, $|E|=m$.
 נסמן ב- $*$ את התכונה הבאה:
 לכל שתי צמתים x ו- y ב- V מתקיים $\deg(x)+\deg(y)>n$
 א. תנו דוגמא לגרף קשיר המקיים את $*$ ולגרף קשיר שאינו מקיים את $*$



מקיים

מקיים לא

ב. כתבו אלגוריתם יעיל הבודק בהינתן $G=(V,E)$ האם הוא מקיים את התכונה $(*)$. נתחו זמן ריצה.

```
function (G,n)
    deg1=n
    deg2 =n
    for each vertex u
    do p=V[u]
        count=0
        while p!=nil
            count++
            p=p.next

        if count < deg1
            deg2=deg1
            deg1=count
        else if count < deg2
            deg2=count

    if deg1 + deg2 > n
        return true

    return false
```

זמן הריצה הינו $O(n+m)$ כי עוברים על כל הקשתות פעמיים ועל הקודקודים פעם אחת.

ג. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: כל גרף לא-מכוון פשוט המקיים את * הוא גרף קשיר

פתרון:

נניח בשלילה שהגרף לא קשיר ולכן הגרף מחולק למספר רכיבי קשירות. הדרגה המקסימלית בכל רכיב קשירות היא כמות האיברים של אותו רכיב קשירות פחות אחד.

נבחר צומת x מרכיב קשירות אחד וצומת y מרכיב קשירות שני, אז סכום הדרגות שלהם יהיה הגודל של רכיב הקשירות הראשון פחות אחד פלוס הגודל של רכיב הקשירות השני פחות אחד, ידוע שהסכום של 2 רכיבי קשירות קטן שווה m לכן סכום זה קטן מסכום הדרגות של כל הגרף (n) פחות 2.

מכאן קיבלנו סתירה, לכן כל גרף פשוט המקיים את התכונה הוא גרף קשיר.