نظریه نایقینی

ترجمه ویرایش پنجم

بائودینگ لیو

ترجمه: بهروز فتحی واجارگاه ــ علیرضا غفاری حدیقه

فهرست

درخواست مولف برای ترجمه

Here by, I inform that my Iranian friends and colleagues Professor Behrouz Fathi-Vajargah and Professor Alireza Ghaffari-Hadigheh those the only persons I asked them to translate my book “Uncertainty Theory” to Farsi under Uncertainty Theory Lab, Tsinghua university support.

I sincerely appreciate these translators and trust them to do this important. In my view they are totally eligible to translate under my permission and copyright law.

August 2019
Baoding Liu

مقدمه مترجمین

به نام خدا

با در نظر گرفتن وقایع پیچیده دنیای بشری، معرفی نظریه نایقینی توسط پروفسور بادینگ لیو در سال ۲۰۰۷، یک تولد بزرگ در علم امروزی محسوب می‌گردد. این نظریه، علیرغم جوان بودن، خیلی زود در زمینه‌های پر مطالعه علوم نظیر ریاضیات کاربردی، آمار، مدیریت مالی و اقتصاد و همچنین در رشته‌های مختلف مهندسی نظیر برق، صنایع، مکانیک، کامپیوتر و هوش مصنوعی جایگاه ویژه‌ای یافته و روز بروز استفاده‌های آن گسترده‌تر و فزاینده‌تر شده است. ایده پردازی و حسابان معرفی شده در نظریه نایقینی بخوبی توانسته است برخی از گره‌های خاص بی پاسخ را گشوده و نتایج بسیارخوبی در بهینه سازی نایقین، فرایندهای تصادفی نایقین، آمار نایقینی و مهندسی داشته باشد که نمونه‌های بارز آن در این کتاب آورده شده است.

مترجمان این اثر ارزنده با هدف معرفی سریعتر این ایده به دانشجویان، محققین و اساتید گرامی که علاقمند به مطالعه و تحقیق در این حیطه از علم و فن هستند و مطالعه برگردان فارسی آن را ترجیح می‌دهند، مهیا کرده اند. درخواست کتبی مولف با حمایت لازم از این ترجمه، موکد تمایل ایشان از انجام این ترجمه توسط مترجمان می‌باشد.

این ترجمه به صورت رایگان در اختیار علاقمندان قرار دارد و تکثیر آن برای انتشار علم بلامانع است. هر گونه سوء استفاده مادی از این اثر، با توجه به حقوق معنوی مولف و مترجمین ممنوع بوده و موجب پیگرد قانونی خواهد بود.

در پایان بدین وسیله مترجمین این کتاب صریحاً اعلام می‌دارند که کلیه حقوق علمی، مادی ومعنوی حاصل از این ترجمه به سهم مساوی متعلق به آنها می‌باشد.

مرداد ۱۳۹۸

بهروز فتحی واجارگاه علی رضا غفاری حدیقه

مقدمه

وقتی نمونه‌ای برای تقریب تابع توزیع در اختیار نداشته باشیم، یا برخی موقعیت‌های اضطراری (مانند جنگ، سیل، زلزله، تصادف و یا حتی شایعه) پیش می‌آید، از متخصصین این حوزه‌ها دعوت می‌شود تا درجه باور خود را درمورد وقوع چنین رویدادی بیان کنند. شاید برخی چنین فکر می‌کنند که درجه باور باید با نظریه احتمال و یا نظریه مجموعه‌های فازی مدل بندی شود. در حالی که اغلب چنین کاری نامناسب است، زیرا هر دو نظریه ممکن است به نتایجی منجر شود که با شهود متناقض هستند. برای برخورد منطقی با درجه باور اشخاص، نظریه نایقینی در سال ۲۰۰۷ توسط لیو پایه گذاری شد و در ادامه، مبنای تحقیق بسیاری از پژوهشگران شده است. امروزه، این نظریه به شاخه‌ای از ریاضیات تبدیل شده است.

اندازه نایقین

مهم‌ترین مفهوم، اندازه نایقین است که از نوع تابع مجموعه‌ای بوده که در اصول موضوعه نظریه نایقینی صدق می‌کند. از این اندازه برای نشان دادن درجه باور به حادث شدن یک رویداد نایقین استفاده می‌شود. در فصل ۱، اصول موضوعه نرمال بودن، دوگانی، زیرجمعی بودن و ضرب تعریف می‌شوند. با استفاده از این اصول موضوعه، اندازه نایقین، اندازه نایقین ضرب و اندازه نایقین شرطی نیز تعریف می‌شوند.

متغیر نایقین

متغیر نایقین یک تابع اندازه‌پذیر از یک فضای نایقین به مجموعه اعداد حقیقی است. از این متغیر برای نشان دادن مقدارهای کمّی به صورت نایقین استفاده می‌شود. فصل ۲ به متغیر نایقین، توزیع نایقین، استقلال، قاعده‌های عملگری، مقدار مورد انتظار (امید ریاضی)، پراش، گشتاورها، فاصله، آنتروپی، توزیع نایقین شرطی، دنباله نایقین و بردار نایقین اختصاص داده شده است.

برنامه‌ریزی نایقین

برنامه‌ریزی نایقین نوعی از برنامه‌ریزی ریاضی است که متغیرهای نایقین را شامل می‌شود. فصل ۳ ابزار مدل برنامه‌ریزی نایقین را با کاربردهایی در برنامه‌ریزی ماشین، مساله مسیریابی خودرو و مساله برنامه‌ریزی پروژه را فراهم می‌کند. همچنین، برنامه‌ریزی چند هدفی نایقین، برنامه‌ریزی آرمانی نایقین و برنامه‌ریزی چندسطحی نیز مطرح شده‌اند.

تحلیل ریسک نایقین

کلمه «ریسک» به معنی‌های متفاوتی استفاده شده است. در این کتاب، ریسک به عنوان ضرر اتفاقی به همراه اندازه نایقین چنین ضرری استفاده می‌شود، و شاخص ریسک به عنوان یک اندازه نایقین که ضرری حادث شود، تعریف می‌شود. فصل ۴، تحلیل ریسک نایقین را به عنوان ابزاری برای اندازه

گیری ریسک در نظریه نایقینی را معرفی خواهد کرد. به عنوان کاربردهایی از تحلیل ریسک، فصل ۴ در مورد تحلیل ریسک ساختاری و تحلیل ریسک سرمایه گذاری نیز بحث می‌کند.

تحلیل اطمینان پذیری نایقین

شاخص اطمینان پذیری به عنوان یک اندازه نایقین که یک سیستم به کار خود ادامه خواهد داد، تعریف می‌شود. فصل ۵ تحلیل اطمینان پذیری نایقین را معرفی می‌کندکه ابزاری برای کارکردن با سیستم‌های اطمینان پذیری با استفاده از نظریه نایقینی است.

منطق گزاره‌ای نایقین

منطق گزاره‌ای نایقین یک تعمیم از منطق گزاره‌ای است که در آن هر گزاره به عنوان یک متغیر دودویی نایقین در نظر گرفته می‌شود و مقدار درستی گزاره به عنوان یک اندازه نایقین تعریف می‌شود که میزان درستی گزاره را نشان می‌دهد. فصل ۶ منطق گزاره‌ای نایقین و منطق مُسند نایقین را معرفی می‌کند. همچنین ، وقتی که مقدار درستی سایر گزاره‌های نایقین معلوم است، استنتاج نایقین یک روش برای ارزش گذاری گزاره نایقین با استفاده از «اصل نایقین بیشینه» است. فصل ۷ مدل استنتاج نایقین را مطرح می‌کند که از آن قیاس استثنایی نایقین[۱] ، نفی تالی نایقین[۲] و قیاس منطقی نایقین[۳] نتیجه می‌شود.

مجموعه نایقین

مجموعه نایقین یک تابع مجموعه‌ـ مقدار روی یک فضای نایقین است، و می‌خواهد مفاهیم غیرشفاف مانند «جوان»، «قدبلند»، «گرم» و «بیشترین» را مدل بندی کند. تفاوت اساسی مجموعه نایقین با متغیر نایقین این است که اولی در مورد مقدار صحبت می‌کند در حالی که دومی مقادیری از یک نقطه را اختیار می‌کند. نظریه مجموعه نایقین در فصل ۸ معرفی می‌شود.

منطق نایقین

برخی از دانش‌های ذهن بشر یک مجموعه نایقین است. این واقعیت ما را ترغیب می‌کند تا منطق نایقین را که روشی برای مشخص کردن ارزش درستی گزاره‌های نایقین با استفاده از نظریه مجموعه نایقین است، طراحی کنیم. منطق نایقین ابزارهای انعطاف پذیری برای استخراج خلاصه زبانی[۴] از گردایه‌ای از داده‌های خام فراهم می‌کند. فصل ۹ به منطق نایقین و خلاصه‌سازهای زبانی اختصاص داده شده است.

استنتاج نایقین

استنتاج نایقین فرایند نتیجه گیری از دانش بشر با استفاده از نظریه نایقینی است. فصل ۱۰ مجموعه‌ای از قواعد استنتاج نایقین، سیستم نایقین، و کنترل نایقین را همراه با کاربردی در یک «سیستم آونگ معکوس» را ارائه می‌کند.

[۱] modus ponens
[۲] modus tollens
[۳] hypothetical syllogism
[۴] linguistic summary

فرایند نایقین

فرایند نایقین اساساً دنباله‌ای از متغیرهای نایقین است که برحسب زمان اندیس گذاری شده‌اند. بنابراین، یک فرایند نایقین اغلب برای مدل بندی پدیده‌های نایقین که در طی زمان تغییر می‌کنند، به کار می‌رود. فصل ۱۱ به بیان مفاهیم پایه‌ای فرایند نایقین و توزیع نایقینی اختصاص داده شده است. همچنین ، قضیه مقدار فرین، زمان اولین وقوع و تجمیع زمانی فرایندهای نایقین نیز بیان می‌شوند. در این فصل، فرایند نایقین تجدید، فرایند پاداش تجدید و فرایند تجدید متناوب نیز تعریف می‌شوند. فصل ۱۲ همچنین ، مفاهیم سیاست تعویض بلوک، سیاست تعویض عمر و مدل بیمه نایقین را فراهم می‌کند.

حسابان نایقین

حسابان نایقین شاخه‌ای از ریاضیات است که با مشتق گیری و انتگرال گیری فرایندهای نایقین سروکار دارد. فصل ۱۳ فرایند لیو را معرفی می‌کند که یک فرایند رشد مستقل ایستایی است که رشد آنها یک متغیر نایقین نرمال است، و انتگرال لیو را مطرح می‌کند که نوعی انتگرال نایقین نسبت به فرایند لیو است. همچنین ، قضیه اساسی حسابان نایقین در این فصل اثبات خواهد شد که از آن، روش‌هایی مانند قاعده زنجیری، تغییر متغیر و انتگرال‌گیری جزء به جزء نیز نتیجه خواهد شد.

معادله دیفرانسیل نایقین

معادله دیفرانسیل نایقین نوعی از معادله دیفرانسیل است که با فرایندهای نایقین سر و کار دارد. فصل ۱۴ با وجود، یکتایی و پایداری جواب‌های معادلات دیفرانسیل نایقین را مطرح می‌کند و فرمول یائو- چِن را معرفی خواهد کرد که جواب یک معادله دیفرانسیل نایقین را به صورت خانواده‌ای از جواب‌های معادله دیفرانسیل معمولی نمایش می‌دهد. بر اساس این فرمول، برخی فرمول‌ها برای محاسبه مقدار فرین، زمان اولین مشاهده، و تجمیع زمان جواب‌ها فراهم خواهد شد. علاوه بر این، برخی روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل نایقین عمومی طراحی خواهد شد.

مالیه نایقین

به عنوان کاربردی از معادله دیفرانسیل نایقین، فصل ۱۵ مدل سهام نایقین، مدل نرخ بهره نایقین را معرفی خواهد کرد. بر اساس اصل قیمت منصقانه، این فصل همچنین اختیار معامله اروپایی، اختیار معامله آمریکایی، اختیار معامله آسیایی، اوراق کوپن- صفر، سقف نرخ بهره و کف نرخ بهره را قیمت گذاری خواهد کرد.

آمار نایقین

آمار نایقین یک روش برای جمع‌آوری و تفسیر داده‌های تجربی متخصص با استفاده از نظریه نایقینی است. فصل ۱۶ روش پرسشنامه‌ای برای جمع‌آوری داده‌های تجربی متخصص را ارائه می‌کند. برای مشخص کردن توزیع‌های نایقین از روی داده‌های تجربی متخصص، فصل ۱۶ روش درونیابی خطی، روش کمترین مربعات، روش گشتاورها و روش دلفی را معرفی می‌کند. همچنین ، تحلیل رگرسیون نایقین و تحلیل سری زمانی نایقین برای وقتی که مشاهدات نادقیق برحسب متغیرهای نایقین بیان می‌شود، معرفی می‌شوند.

قانون بقای درستی

قانون طرد ثالث می‌گوید که یک گزاره یا درست یا نادرست است، و قانون تناقض می‌گوید که یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد. در وضعیت نایقینی، برخی می‌گویند که قانون طرد ثالث و

قانون تناقض دیگر برقرار نیستند، زیرا میزان درستی یک گزاره دیگر فقط ۰ یا ۱ نیست. چنین دیدگاهی را تا حدودی نمی‌توانیم انکار کنیم. ولی به این معنی نیست که «هر طور مطلوب شماست عمل کنید». *مجموع ارزش درستی و نادرستی یک گزاره باید یک باشد.* این همان قانون بقای درستی است که از قانون طرد ثالث ضعیفتر است. علاوه بر این، وقتی نایقینی کمرنگ شود، قانون بقای درستی در توافق با قانون طرد ثالث و قانون تناقض است.

اصل نایقینی بیشینه

یک رویداد، وقتی اندازه نایقین آن ۱ باشد، نایقینی ندارد، زیرا باور داریم که این رویداد اتفاق می‌افتد. همچنین اگر اندازه نایقین یک رویداد صفر باشد، آن رویداد نایقینی ندارد، زیرا باور داریم که چنین رویدادی اتفاق نمی‌افتد. یک رویداد بیشترین نایقینی را دارد اگر اندازه نایقین آن ۰٫۵ باشد، زیرا رویداد و مکمل آن امکان وقوع یکسان دارند. در عمل، اگر اطلاعاتی در اختیار نداشته باشیم باید ۰٫۵ را به آن نسبت دهیم. در چنین حالتی، مقدار اندازه نایقین ممکن است در محدوده‌ای مشخص شود. مقدار اندازه نایقین ممکن است چقدر باشد؟ *برای هر رویداد، اگر اندازه نایقین متناظر بتواند چند مقدار منطقی اختیار کند، آنگاه آن مقدار که به ۰٫۵ نزدیکترین است را به آن رویداد نسبت می‌دهیم.* چنین بیانی مفهوم «اصل نایقینی بیشینه» است.

اسلایدهای آموزشی

کسانی که به اسلایدهای آموزشی برای نظریه نایقینی نیاز دارند می‌توانند از آدرس زیر دانلود کنند. http://orsc.edu.cn/liu/resources.htm.

سایر منابع برای مطالعه بیشتر

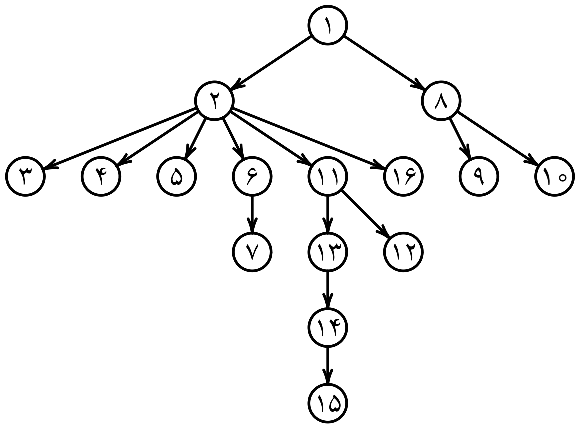
اگر به خواندن کتاب‌های بیشتر، رساله‌ها و پایان نامه‌ها و مقالات مرتبط با نظریه نایقینی علاقمند باشید می‌توانید از آدرس زیر استفاده کنید.http://orsc.edu.cn/online.

هدف

هدف این کتاب آماده کردن خواننده است تا بتواند با شاخه‌ای ریاضیات با درجه باور کار کند. این کتاب برای پژوهشگران، مهندسین، و دانشجویان در رشته‌های ریاضی، علوم اطلاعات، پژوهش عملیاتی، مهندسی صنایع، هوش مصنوعی، اتوماسیون، اقتصاد، و علوم مدیریت مناسب است.

راهنمایی برای مطالعه کتاب

لازم نیست که خواننده این کتاب، آن را صفحه به صفحه پشت سر هم مطالعه کند. ارتباط منطقی بین فصل‌ها در شکل زیر توصیف شده است.



تشکر و قدردانی

این اثر توسط بنیاد علوم طبیعی ملی چین با شماره پژوهانه ۶۱۸۷۳۳۲۹ حمایت شده است.

بائودینگ لیو
دانشگاه چینهوا
liu@tsinghua.edu.cn

برای اغلب افراد؛ نایقینی به مفهوم نشناختن و ندانستن است. با این حال نایقینی با موضوعاتی سروکار دارد که می‌توان آنها را تا حدودی شناخت.

فصل ۰

پیشگفتار

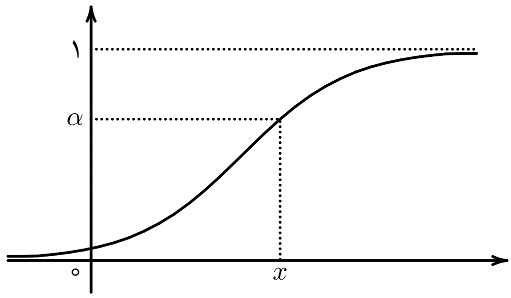
تصمیم‌های واقعی معمولاً در وضعیت نامعلوم اتخاذ می‌شوند. به طور منطقی در برخورد با حالت نامعلوم دو سیستم ریاضی وجود دارند؛ نظریه احتمال (کلموگروف۱۹۳۳) و نظریه نایقینی (لیو ۲۰۰۷). نظریه احتمال شاخه‌ای از ریاضیات برای مدل سازی فراوانی‌ها است. در حالی که نظریه نایقینی شاخه‌ای از ریاضیات برای مدل سازی درجه یقین است.

۱.۰ تابع توزیع

نامعلومی به پدیده‌هایی اطلاق می‌شود که نتایج آن را نمی‌توان دقیقاً از شواهد پیش بینی کرد. به عنوان مثال قبل از پرتاپ تاس نمی‌توانیم پیش بینی کنیم کدام وجه ظاهر خواهد شد، بنابراین پرتاپ تاس یک نوع نامعلومی است. مثال دیگر آن که نمی‌توانیم دقیقاً قیمت سهام فردا را پیش بینی کنیم، یعنی قیمت سهام نیز یک نوع نامعلومی است. برخی دیگر از موارد نامعلوم مانند «چرخیدن رولت»، «طول عمر محصول»، «تقاضای بازار»، «زمان سفر»، «هزینه ساخت» و غیره است.

توجه کنید نامعلومی مطلق است اما یقینی نسبی است. به همین دلیل است که می‌گوییم تصمیمات واقعی معمولاً در وضعیت نامعلوم اتخاذ می‌شوند. به این ترتیب، چگونگی مدل نامعلوم یک موضوع پژوهشی مهم نه تنها در ریاضیات بلکه در علوم و مهندسی نیز است. برای کار کردن با یک مقدار نامعلوم (مثلاً قیمت سهام)، اولین اقدام این است که تابع توزیعی که نشان دهنده درجه α که مقدار قرار داشتن در سمت چپ نقطه فعلی x است، را ارائه کنیم. شکل ۱ را ببینید. وقتی نقطه فعلی از چپ به راست حرکت کند، چنین تابعی همیشه مقادیر بزرگتری خواهد داشت. اگر مقدار تابع توزیع صفر باشد، آنگاه امکان قرار گرفتن مقدار در سمت چپ نقطه فعلی، کاملاً ناممکن است. اگر تابع توزیع مقدار ۱ را بگیرد این که مقدار در سمت راست نقطه فعلی قرار گیرد، کاملاً ممکن است. اگر تابع توزیع مقدار ۰٫۶ بگیرد آنگاه ٪۶۰ اطمینان داریم که این مقدار در سمت چپ و ٪۴۰ اطمینان داریم که این مقدار در سمت راست قرار گیرد.

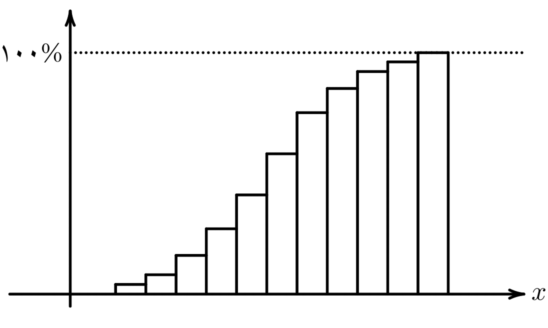
برای به دست آوردن تابع توزیع برای برخی از کمیت‌های نامعلوم، تنها دو رروش وجود دارد، یکی فراوانی تولید شده توسط نمونه‌ها (داده‌های تاریخی) و دیگری ارزیابی درجه یقین توسط متخصص آن حوزه. آیا می‌توانید راه سومی را تصور کنید؟



شکل ۱: یک تابع توزیع.

۲.۰ چگونه فراوانی‌ها را دسته‌بندی کنیم؟

فرض می‌کنیم مجموعه ای از نمونه‌ها را برای مقدار نامشخص جمع آوری کرده ایم (مثل قیمت سهام). به درصد تمام نمونه‌هایی که در سمت چپ از نقطه فعلی می‌افتد، با فراوانی تجمعی معنا می‌بخشیم. واضح است که فراوانی تجمعی در شکل ۲ مانند یک تابع پله‌ای به نظر می‌رسد.



شکل ۲: هیستوگرام فراوانی تجمعی

فراوانی یک ویژگی واقعی از کمیت نامعلوم است و با وضعیت دانش و ترجیح تغییر نمی‌کند. زمانی که اندازه نمونه به مقدار کافی بزرگ است و هیچ اضطراری (مثل جنگ، سیل، زلزله، تصادف و حتی شایعه) رخ ندهد این امکان وجود دارد که تابع توزیع را که به اندازه کافی به فراوانی نزدیک است، بیابیم. در چنین موردی، شکی نیست که نظریه احتمال تنها رویکرد قانونمند برای مطالعه مسئله است.

با این حال در بسیاری از موارد، نمونه‌ای در دسترس نداریم و یا مواردی اضطراری رخ می‌دهد. بنابراین تابع توزیع برآورد شده ممکن است دور از فراوانی، که در حال حاضر برای ما نامعلوم است، باشد. اگر این تابع توزیع مورد استفاده قرار گیرد، آنگاه قانون اعداد بزرگ دیگر معتبر نیست و نظریه احتمال ممکن است منجر به نتایج غیر منتظره [و نامطلوب] شود.

۳.۰ چگونه با درجه باور کار کنیم؟

درجه باور برای همه موضوع شناخته شده‌ای است، موضوع باور وقوع یک رویداد است. به عنوان مثال «فردا خورشید طلوع خواهد کرد»، «هفته بعد هوا آفتابی خواهد بود»، «جان یک مرد جوان است» همه نمونه‌هایی از یک رویداد هستند. درجه باور قدرتی را نشان می‌دهد که باور دارید که این رویداد اتفاق خواهد افتاد. اگر به طور کامل باور دارید که رویدادی اتفاق می‌افتد پس درجه باور ۱ (باور کامل) است و اگر فکر می‌کنید که کاملا غیرممکن است؛ درجه باور شما ۰ است (نایقینی کامل). در حالت کلی، یک عدد بین ۰ و ۱ را به عنوان درجه یقین برای هر رویداد اختصاص می‌دهید. زیرا نمی‌توانید باوری بیشتر نسبت به «باور کامل» و نایقینی بیشتری نسبت به «نایقینی کامل» داشته باشید. بالاترین درجه باور قویترین باور است که معتقدید رویداد اتفاق افتد.

درجه باور یک رویداد را می‌توان به عنوان نرخ شرط بندی عادلانه (قیمت/سهام) برای رویداد تفسیر کرد. فرض کنید یک شرط بندی بدین صورت است که اگر رویدادی اتفاق افتد ۱ دلار داده شود، در غیر این صورت چیزی پرداخت نشود. با چه قیمتی این شرط بندی معقول است؟ اگر فکر می‌کنید شرط به ارزش ۱ دلار است، پس درجه باور شما به این وقوع رویداد ٪۱۰۰ است و اگر فکر می‌کنید شرط ارزش ندارد (با ارزش صفر)، درجه باور شما ٪۰ است و اگر فکر می‌کنید شرط به ارزش ۶۰ سنت است درجه باور شما ٪۶۰ است. در اینجا کلمه منصفانه به این معنی است که شما مایل به خرید یا فروش این شرط بندی با این قیمت هستید. درجه باور به شدت روی دانش و ترجیح شخصی مربوط به این رویداد بستگی دارد. وقتی دانش و ترجیح شخص تغییرکند، درجه باور او نیز تغییر می‌کند. به عنوان مثال فرض کنید تاریخ تولدم را در نظر بگیرم، کسی که من را نمی‌شناسد فقط ٪۸ (یعنی $\frac{۱}{۱۲}$) مطمئن است که من در ماه فوریه متولد شده‌ام. ممکن است دوستان اصلی‌ام ٪۸۰ اطمینان داشته باشند؛ در حالی که مادرم ممکن است ٪۱۰۰ مطمئن باشد که من در ماه فوریه به دنیا آمده ام. افراد مختلف با توجه به دانش و ترجیحات مختلف خود باورهای مختلفی بیان می‌کنند.

شاید برخی بپرسند که کدام درجه باور درست است. باید اذعان کنیم که همه‌ی درجه باورها اشتباه هستند، اما بعضی از آنها مفید هستند. بر اساس نظرسنجی‌های زیاد، کوهنمن و تورسکی [۷۲] نشان دادند که انسان‌ها معمولاً در رویدادهای نامطلوب زیاده‌روی دارند. از سوی دیگر، لیو [۱۰۲] نشان داد که انسان‌ها معمولاً محدوده بسیار وسیع‌تری از ارزش‌هایی که موضوع هدف واقع می‌شود، برآورد می‌کنند. این دیدگاه محافظه کارانه انسان‌ها باعث می‌شود درجه‌های باور از فراوانی فاصله داشته باشند. در نتیجه تمام درجه‌های باور در مقایسه با فراوانی آنها اشتباه هستند. با این حال نمی‌توان انکار کرد که این درجه‌های باور واقعاً برای تصمیم گیری مفید هستند. درجه باور فقط زمانی درست تلقی می‌شود که با فراوانی همخوانی داشته باشد. اگر چه معمولاً نمی‌توانیم درجه باور را این گونه ایجاد کنیم.

به منظور توصیف یک کمیت نایقین، آنچه نیاز داریم یک تابع درجه باور است و نشان دهنده این است که با چه درجه‌ای معتقدیم کمیت در سمت چپ نقطه کنونی قرار می‌گیرد. به طور کلی یک تابع درجه باور مقادیری بین ۰ و ۱ می‌گیرد، و هرگاه که از سمت چپ نقطه کنونی به راست حرکت کند مقدار آن بزرگتر می‌شود.

تابع درجه باور یک نوع تابع توزیع برای کمیت نایقین است. چون معمولاً این تابع با فراوانی مطابقت ندارد، لذا استفاده از نظریه احتمال ممکن است منجر به نتایج غیرمنتظره شود.

۴.۰ مسئله کیسه : یک آزمون معیار

فرض کنید ۱۰۰ کیسه را با ۱۰۰ مهره در کیسه که قرمز یا سیاه هستند، پر کرده‌ایم. به شما گفته می‌شود که ترکیبات (قرمز در مقابل سیاه) در این کیسه‌ها مستقل و همتوزیع هستند، اما تابع توزیع

برای شما کاملاً نامعلوم است. سه مسئله زیر را در نظر بگیرید:

۱. فکر می‌کنید چند تا از مهره‌ها در اولین کیسه قرمز هستند؟

۲. فکر می‌کنید چند تا از مهره‌ها در ۱۰۰ کیسه قرمز هستند؟

۳. فکر می‌کنید احتمال این که تعداد مهره‌های قرمز ۱۰۰۰۰ تا باشد، چقدر است ؟

چگونه با استفاده از نظریه احتمال مسئله کیسه را حل کنیم؟

چون تعداد مهره‌های قرمز را به طور کامل نمی‌دانیم، معیار لاپلاس امکان می‌دهد که احتمال‌های برابر به تعدادهای ممکن از مهره‌های قرمز، $۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰۰$ اختصاص دهید. بنابراین، برای هر i $(۱ \le i \le ۱۰۰)$ i ، تعداد مهره‌های قرمز در iـامین کیسه یک متغیر تصادفی است:

$$\xi_i = k \text{ با احتمال } \frac{۱}{۱۰۱}, \quad k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰۰.$$

توجه کنید که $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع هستند. لذا، تعداد کل مهره‌های قرمز در ۱۰۰ کیسه

$$\xi = \xi_۱ + \xi_۲ + \cdots + \xi_{۱۰۰}$$

است که ممکن است هر عدد صحیحی بین ۰ و ۱۰۰۰۰ باشد. چون، تعداد کل مهره‌های قرمز ۱۰۰۰۰ است اگر و تنها اگر ۱۰۰ کیسه هر کدام ۱۰۰ مهره قرمز داشته باشند، احتمال ۱۰۰۰۰ بودن تعداد کل مهره‌های قرمز

$$\begin{aligned}\Pr\{\xi = ۱۰,۰۰۰\} &= \Pr\{\xi_i = ۱۰۰, i = ۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}\\ &= \prod_{i=۱}^{۱۰۰} \Pr\{\xi_i = ۱۰۰\} = \prod_{i=۱}^{۱۰۰} \frac{۱}{۱۰۱}\\ &\approx ۳/۶ \times ۱۰^{-۲۰۱}\end{aligned}$$

است. در اینجا $\Pr\{\cdot\}$ نشان دهنده اندازه احتمال است.

چگونه با استفاده از نظریه نایقینی مسئله کیسه را حل کنیم؟

وقتی تعداد مهره‌های قرمز را به طور کامل نمی‌دانید باید درجه‌های باور برابر با تعداد ممکن مهره‌های قرمز $۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰۰$ اختصاص دهید، بنابراین برای هر i با $۱ \le i \le ۱۰۰$ و تعداد مهره‌های قرمز در iـامین کیسه یک متغیر نایقین

$$\eta_i = k, \text{ با درجه باور } \frac{۱}{۱۰۱} \quad k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰۰$$

است.

توجه داشته باشید که $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n$ متغیرهای نایقین مستقل و همتوزیع هستند. تعداد کل مهره‌های قرمز در ۱۰۰ کیسه

$$\eta = \eta_۱ + \eta_۲ + \cdots + \eta_{۱۰۰}$$

است که ممکن است هر عدد صحیح بین ۰ و ۱۰۰۰۰ باشد. چون تعداد کل مهره‌های قرمز ۱۰۰۰۰ است اگر و فقط اگر ۱۰۰ کیسه هر کدام ۱۰۰ مهره قرمز داشته باشند، درجه باور وجود ۱۰۰۰۰ مهره قرمز

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{\eta = ۱۰,۰۰۰\} &= \mathcal{M}\left\{\eta_i = ۱۰۰, i = ۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\right\} \\ &= \bigwedge_{i=۱}^{۱۰۰} \mathcal{M}\{\eta_i = ۱۰۰\} = \bigwedge_{i=۱}^{۱۰۰} \frac{۱}{۱۰۱} \\ &= \frac{۱}{۱۰۱}\end{aligned}$$

است. اینجا $\mathcal{M}\{\cdot\}$ درجه باور را نشان می‌دهد (یعنی اندازه نایقینی).

کدام نتیجه منطقی‌تر است؟

نظریه احتمال می‌گوید که احتمال داشتن ۱۰۰۰۰ مهره‌های قرمز $۳/۶ \times ۱۰^{-۲۰۱}$ است. در حالی که نظریه نایقینی بیان می‌کند که درجه باور این رویداد $\frac{۱}{۱۰۱}$ است. کدام نتییجه معقول‌تر است؟ به منظور پاسخ به این سوال دو گزینه زیر را مطرح می‌کنیم:

A: اگر تعداد کل مهره‌های قرمز ۱۰۰۰۰ است ۱۰۰۰۰۰۰ دلار از دست می‌دهید و در غیر این صورت یک دلار دریافت می‌کنید.

B: در شرط بندی شرکت نکنید.

انتخاب شما بین A و B چیست؟ اگر از نظریه احتمال استفاده شود، احتمال اینکه تعداد مهره‌های قرمز ۱۰۰۰۰ باشد برابر با $۳/۶ \times ۱۰^{-۲۰۱}$ است و مقدار مورد انتظار بازده گزینه A

$$A = ۱ \times (۱ - ۳/۶ \times ۱۰^{-۲۰۱}) - ۱۰۰۰۰۰۰ \times ۳/۶ \times ۱۰^{-۲۰۱} \approx ۱$$

است. چون بازده B همیشه ۰ است داریم

$$A > B.$$

یعنی نظریه احتمال باعث می‌شود که A را انتخاب کنید. اگر از نظریه نایقینی استفاده شود، درجه باور ۱۰۰۰۰ بودن تعداد مهره‌های قرمز $\frac{۱}{۱۰۱}$ است و مقدار مورد انتظار بازده A

$$A = ۱ \times \left(۱ - \frac{۱}{۱۰۱}\right) - ۱۰۰۰۰۰۰ \times \frac{۱}{۱۰۱} \approx -۹۹۰۰.$$

است. چون بازده B همیشه ۰ است، داریم

$$A < B.$$

یعنی نظریه نایقینی باعث شده شما B را انتخاب کنید. نظریه احتمال و نظریه نایقینی دو انتخاب متضاد پیشنهاد می‌کنند. فکر می‌کنید انتخاب کدام گزینه بهتر است؟

چگونه ۱۰ کیسه را پر کنم؟

به منظور مقایسه تصمیم‌های نتیجه شده از نظریه احتمال و نظریه نایقینی، می‌خواهم نشان دهم چگونه ۱۰۰ کیسه را پر کرده‌ام. ابتدا یک تابع توزیع در نظر گرفتم:

$$\Upsilon(x)=\begin{cases} 0, & x<100 \text{ اگر} \\ 1, & x\ge 100 \text{ اگر} \end{cases}$$

که همان مقدار ثابت ۱۰۰ است. (توجه کنید که من در انتخاب تابع توزیع آزاد هستم). بعد من یک عدد تصادفی k را از تابع توزیع Υ تولید کرده‌ام، و اولین کیسه را با k مهره قرمز و $100-k$ مهره سیاه پر کردم. سپس یک عدد تصادفی جدید k از Υ تولید کردم و دومین کیسه را با k مهره قرمز و $100-k$ مهره سیاه پر کردم. این فرایند را مکرراً انجام می‌دهم تا ۱۰۰ کیسه پر شوند. توجه داشته باشید که $100, 100, \ldots, 100$ در واقع مستقل و همتوزیع هستند و تعداد کل مهره‌ها ۱۰۰۰۰ است.

اگر از نظریه احتمال استفاده کنید ۱۰۰۰۰۰۰ دلار از دست می‌دهید (یعنی A را انتخاب می‌کنید). اگر این آزمایش تکرار شود باید مجدداً A را انتخاب کنید و از دست دادن ۱۰۰۰۰۰۰ دلار تا زمانی که از نظریه احتمال استفاده می‌کنید، همچنان ادامه می‌یابد.

چرا نظریه احتمال شکست می‌خورد؟

دلیل اصلی این است که تابع توزیع یکنواخت (تقریباً) تعداد مهره‌های قرمز در هر کیسه

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ اگر} \\ x/100, & 0\le x\le 100 \text{ اگر} \\ 1, & x>100 \text{ اگر} \end{cases}$$

به فراوانی واقعی

$$\Upsilon(x)=\begin{cases} 0, & x<100 \text{ اگر} \\ 1, & x\ge 100 \text{ اگر} \end{cases}$$

نزدیک نیست. در این مورد نظریه احتمال به نتایج غیرمنتظره و نامعقول منجر می‌شود. در حالی که ثابت شد نظریه نایقینی در برخورد با مسائل مربوط به کیسه موفق است.

۵.۰ چگونه ابزار ریاضی خود را انتخاب کنید؟

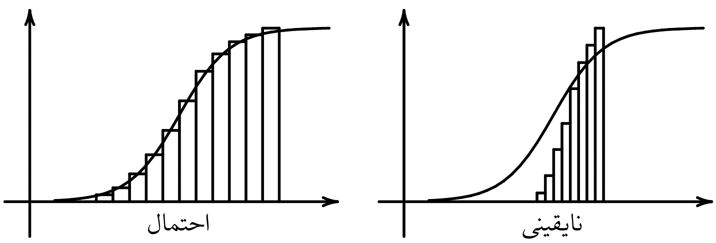
در برخورد منطقی با نامعلومی دو سیستم ریاضی وجود دارد، یکی نظریه احتمال و دیگری نظریه نایقینی. لیو [۹۳] ادعا کرد که نظریه احتمال را می‌توان در مدل‌سازی فراوانی‌ها استفاده کرد و نظریه نایقینی در مدل‌سازی درجه باورها مفید است. به عبارت دیگر، فراوانی پایه تجربی نظریه احتمال است درحالی که درجه باور پایه نظریه نایقینی است. استفاده از نظریه نایقینی برای مدل بندی فراوانی ممکن است نتیجه نادرست تولید کند، همچنین استفاده از نظریه احتمال برای مدل بندی درجه باور ممکن است به یک فاجعه بزرگ منجر شود.

شاید بعضی ایراد بگیرند که درعمل نمی‌توانند بین فراوانی و درجه باور تفاوت قائل شوند. این موضوع چندان مهم نیست زیرا می‌توانید به سرعت با این مشکل به این روش برخورد کنید. اگر برای

یک کمیت معتقدید تابع توزیع (مهم نیست که چگونه آن را به دست آورده اید) به اندازه کافی به فراوانی واقعی نزدیک است، پس باید کمیت را به عنوان یک متغیر تصادفی تلقی کنید. در غیر این صورت باید آن کمیت را یک متغیر نایقین در نظر بگیرید. بنابراین ممکن است ابزار ریاضی خود را با معیار زیر انتخاب کنید:

> اگر تابع توزیع به اندازه کافی به فراوانی نزدیک است از نظریه احتمال استفاده کنید در غیر این صورت از نظریه نایقینی استفاده کنید.

شاید برخی هنوز بپرسند که چطور بررسی کنند که آیا تابع توزیع به اندازه کافی به فراوانی نزدیک است یا نه. در این مورد هیچ نظری ندارم، اما به نظر من، متاسفانه تابع توزیع به دست آمده در اکثر مسائل کاربردی به اندازه کافی به فراوانی نزدیک نیست. بنابراین باید در این مورد به جای نظریه احتمال از نظریه نایقینی استفاده کنید. آیا مایل به یادگیری نظریه نایقینی هستید؟



شکل ۳: هنگامی‌که تابع توزیع (منحنی سمت چپ) به اندازه کافی به فراوانی نزدیک است (هیستوگرام چپ)، باید از نظریه احتمال استفاده کنید. وقتی تابع توزیع (منحنی راست) از فراوانی دور شود (هیستوگرام راست اما نامعلوم) باید از نظریه نایقینی استفاده کنید.

فصل ۱

اندازه نایقین

نظریه نایقینی در سال ۲۰۰۷ توسط لیو [۸۴] پایه گذاری شد و به دنبال آن، توسط محققین زیادی مطالعه شد. امروزه نظریه نایقینی به شاخه‌ای از ریاضیات برای مدل بندی درجه‌های باور تبدیل شده است. این فصل، اصول موضوعه نرمال بودن، دوگانی، زیرخطی بودن و ضرب را در نظریه نایقینی بیان می‌کند. بر اساس این چهار اصل موضوعه، اندازه نایقین نیز معرفی می‌شود که یک مفهوم بنیادی در نظریه نایقینی است. همچنین، اندازه نایقین ضرب و اندازه نایقین شرطی در پایان فصل بررسی خواهد شد.

۱.۱ فضای اندازه‌پذیر

از دیدگاه ریاضی، اساساً نظریه نایقینی یک جایگزین برای نظریه اندازه است. بنابراین، نظریه نایقینی باید با نظریه اندازه شروع شود. برای این کار، ابتدا جبر، σـ جبر، جبر بورل، مجموعه بورل و تابع اندازه‌پذیر را معرفی می‌کنیم. نتایج اصلی این بخش شناخته شده هستند و بنابر این مرجعی برای آنها معرفی نشده است. اشخاصی که با این مفاهیم آشنا هستند می‌توانند از مطالعه این بخش صرف نظر کنند.

تعریف ۱.۱ *فرض کنید Γ یک مجموعه ناتهی (معمولا مجموعه مرجع نامیده می‌شود) است. گردایه $\mathcal{L}$ شامل زیرمجموعه‌های Γ یک جبر روی Γ است اگر سه شرط زیر برقرار باشند: (الف) $\Gamma \in \mathcal{L}$؛ (ب) اگر $\Lambda \in \mathcal{L}$، آنگاه $\Lambda^c \in \mathcal{L}$؛ و (پ) اگر $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n \in \mathcal{L}$، آنگاه*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i \in \mathcal{L}. \tag{1.1}$$

گردایه $\mathcal{L}$ یک σـ جبر روی Γ است اگر شرط (پ) با بستار تحت اجتماع شمارا برقرار باشد، یعنی وقتی $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \in \mathcal{L}$، آنگاه داشته باشیم

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i \in \mathcal{L}. \tag{2.1}$$

مثال ۱.۱: گردایه $\{\varnothing, \Gamma\}$ کوچک‌ترین σ ـ جبر روی Γ، و مجموعه توان (یعنی مجموعه تمامی زیرمجموعه‌های Γ) بزرگترین σـ جبر است.

مثال ۲.۱: مجموعه Λ را یک زیرمجموعه ناتهی سره از Γ در نظر بگیرید. آنگاه، $\{\varnothing, \Lambda, \Lambda^c, \Gamma\}$ یک σـ جبر روی Γ است.

مثال ۳.۱: فرض کنید $\mathcal{L}$ گردایه تمامی اجتماع مجزای متناهی از زیرمجموعه‌هایی به شکل

$$(-\infty, a], \quad (a, b], \quad (b, \infty), \quad \varnothing \tag{۳.۱}$$

هستند. آنگاه $\mathcal{L}$ یک جبر روی $\Re$ (مجموعه اعداد حقیقی) است ولی یک σـ جبر نیست. زیرا، $\Lambda_i = (۰, (i-۱)/i] \in \mathcal{L}$ برای هر i، در حالی که

$$\bigcup_{i=۱}^{\infty} \Lambda_i = (۰, ۱) \notin \mathcal{L}. \tag{۴.۱}$$

مثال ۴.۱: σـ جبر $\mathcal{L}$ تحت عمل‌های اجتماع شمارا، اشتراک شمارا، تفاضل و حد بسته است. یعنی اگر $\Lambda_۱, \Lambda_۲, \ldots \in \mathcal{L}$، آنگاه

$$\bigcup_{i=۱}^{\infty} \Lambda_i \in \mathcal{L}; \quad \bigcap_{i=۱}^{\infty} \Lambda_i \in \mathcal{L}; \quad \Lambda_۱ \setminus \Lambda_۲ \in \mathcal{L}; \quad \lim_{i\to\infty} \Lambda_i \in \mathcal{L}. \tag{۵.۱}$$

تعریف ۲.۱ *فرض کنید Γ یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{L}$ یک σـ جبر روی Γ است. در این صورت، $(\Gamma, \mathcal{L})$ فضای اندازه‌پذیر نامیده شده و به هر عضو $\mathcal{L}$ یک مجموعه اندازه‌پذیر گویند.*

مثال ۵.۱: مجموعه اعداد حقیقی $\Re$ را در نظر بگیرید. آنگاه $\mathcal{L} = \{\varnothing, \Re\}$ یک σـ جبر روی $\Re$ است. پس $(\Re, \mathcal{L})$ یک فضای اندازه‌پذیر است. در این فضا دو مجموعه اندازه‌پذیر وجود دارد. یکی از آنها $\varnothing$ و دیگری $\Re$ است. در حالی که بازه‌های $[۰, ۱]$ و $(۰, +\infty)$ در این فضا اندازه‌پذیر نیستند.

مثال ۶.۱: برای مجموعه $\Gamma = \{a, b, c\}$، $\mathcal{L} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, \Gamma\}$ یک σـ جبر روی Γ است. بنابراین، $(\Gamma, \mathcal{L})$ یک فضای اندازه‌پذیر است. هم چنین $\{a\}$ و $\{b, c\}$ در این فضا مجموعه‌های اندازه‌پذیر هستند، ولی مجموعه‌های $\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ اندازه‌پذیر نیستند.

تعریف ۳.۱ *کوچک‌ترین σـ جبر $\mathcal{B}$ شامل همه بازه‌ها، جبر بورل روی مجموعه اعداد حقیقی نامیده می‌شود و هر عضو $\mathcal{B}$ یک مجموعه بورل است.*

مثال ۷.۱: ثابت شده است که بازه‌ها، مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، اعداد گویا و اعداد اصم مجموعه‌های بورل هستند.

مثال ۸.۱: مجموعه‌ای که روی $\Re$ بورل نباشد هم وجود دارد. فرض کنید $[a]$ نشان دهنده مجموعه تمامی اعداد گویا است که a هم به آن اضافه شده است. توجه کنید که اگر $a_۱ - a_۲$ گویا نباشند، آنگاه $[a_۱]$ و $[a_۲]$ دو مجموعه جدا از هم هستند. در این صورت، $\Re$ به تعداد نامتناهی از چنین مجموعه‌های جدا از هم تقسیم می‌شود. فرض کنید A یک مجموعه جدید است که یک عضو از هر کدام از این مجموعه‌ها تنها را دارد. در این صورت A یک مجموعه بورل نیست.

تعریف ۴.۱ *تابع ξ از فضای اندازه‌پذیر $(\Gamma, \mathcal{L})$ به مجموعه اعداد حقیقی را اندازه‌پذیر گویند اگر برای هر مجموعه بورل B داشته باشیم*

$$\xi^{-1}(B) = \{\gamma \in \Gamma \,|\, \xi(\gamma) \in B\} \in \mathcal{L} \tag{۶.۱}$$

تابع‌های پیوسته و تابع‌های یکنوا نمونه‌هایی از تابع‌های اندازه‌پذیر هستند. فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots$ دنباله ای از تابع‌های اندازه‌پذیر هستند. در این صورت، تابع‌های زیر نیز اندازه‌پذیر هستند.

$$\sup_{1 \le i < \infty} \xi_i(\gamma); \quad \inf_{1 \le i < \infty} \xi_i(\gamma); \quad \limsup_{i \to \infty} \xi_i(\gamma); \quad \liminf_{i \to \infty} \xi_i(\gamma). \tag{۷.۱}$$

خصوصاً، اگر برای هر γ؛ حد $\lim_{i \to \infty} \xi_i(\gamma)$ وجود داشته باشد، آنگاه این حد هم یک تابع اندازه‌پذیر است.

۲.۱ اندازه نایقین

فضای اندازه‌پذیر $(\Gamma, \mathcal{L})$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که هر عضو Λ در $\mathcal{L}$ یک مجموعه اندازه‌پذیر است. اولین کاری که در نظریه نایقینی می‌توان انجام داد تغییر نام مجموعه اندازه‌پذیر به *رویداد* است. کار دوم، تعریف اندازه نایقین $\mathcal{M}$ روی σـ جبر $\mathcal{L}$ است. در این صورت، عدد $\mathcal{M}\{\Lambda\}$ به هر رویداد Λ نسبت داده می‌شود که نشان دهنده درجه یقین ما به حادث شدن Λ است. شکی نیست که این نحوه نسبت دادن درجه یقین دلخواه نیست و اندازه نایقین $\mathcal{M}$ باید در خاصیت‌های مشخص ریاضی صدق کند. برای آن که به صورت منطقی با درجه یقین کار کنیم، لیو [۸۴] اصول موضوعه زیر را پیشنهاد کرد.

اصل موضوعه ۱. (*اصل موضوعه نرمال بودن*) *برای مجموعه مرجع Γ، $\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$.*

اصل موضوعه ۲. (اصل موضوعه دوگانی) برای هر رویداد Λ، $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = 1$.

اصل موضوعه ۳.(*اصل موضوعه زیرجمعی*) *برای هر دنباله شمارا از رویدادهای $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$، داریم*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\}. \tag{۸.۱}$$

تذکر ۱.۱: اندازه نایقین به عنوان درجه یقین شخصی (نه فراوانی) حادث شدن یک رویداد نایقین تفسیر می‌شود. بنابر این، اندازه نایقین و درجه یقین هم معنی هستند، و در این کتاب به مفهوم مشترک استفاده خواهند شد.

تذکر ۲.۱: اندازه نایقین (یعنی درجه یقین) به دانش شخصی به رویداد وابسته است و با تغییر سطح دانش شخص نسبت به رویداد تغییر خواهد کرد.

تذکر ۳.۱: چون «۱» به معنی «یقین کامل» است و ما نمی‌توانیم بیش از «یقین کامل» یقین بیشتری داشته باشیم، بنابراین، درجه یقین هیچ رویدادی نمی‌تواند بیشتر از ۱ باشد. همچنین، درجه یقین مجموعه مرجع ۱ است، زیرا کاملاً باورکردنی است. بنابراین، درجه یقین در اصل موضوعه نرمال بودن صدق می‌کند.

تذکر ۴.۱: اصل موضوعه دوگانی در واقع کاربردی از «اصل بقای حقیقت» در نظریه نایقینی است. این خاصیت تضمین می‌کند که نظریه نایقینی با «اصل طرد ثالث» و «اصل تناقض» سازگار است. همچنین،

تفکر انسانی همواره با دوگانی احاطه شده است. برای مثال، اگر شخصی بگوید که یک گزاره با درجه یقین ۰٫۶ درست است، آن گاه همه ما چنین تلقی می‌کنیم که این گزاره با درجه یقین ۰٫۴ نادرست است.

تذکر ۵.۱: دو رویداد با درجه‌های یقین معلوم را در نظر بگیرید. اغلب چنین سوالی مطرح می‌شود که درجه یقین اجتماع این دو چگونه از روی درجه یقین تک تک رویدادها ساخته می‌شود. شخصاً نظرم این است که قاعده‌ای برای ساختن آن وجود ندارد. مطالعات فراوانی نشان داده است که درجه یقین اجتماع دو رویداد نه مجموع درجه یقین تک تک رویدادها است (مانند اندازه احتمال) و نه با مقدار بیشینه آنها برابر است (مانند اندازه امکان). به نظر می‌رسد ارتباط صریح بین درجه یقین اجتماع رویدادها و درجه یقین تک تک رویدادها وجود ندارد، به جز آن که از اصل موضوعه زیرجمعی استفاده کنیم.

تذکر ۶.۱: اگر اصل موضوعه زیرجمعی بودن جزو فرض‌ها نباشد، تناقض‌هایی به وجود می‌آید. به عنوان مثال، فرض کنید مجموعه مرجع ۳ عضو دارد. تابع روی مجموعه‌ها را به این صورت تعریف می‌کنیم. برای مجموعه تک عضوی مقدار صفر را اختیار کند و برای مجموعه‌هایی با حداقل دو عضو مقدار ۱ اختیار کند. این تابع به غیر از اصل موضوعه زیرجمعی بودن در سایر اصول موضوعه صدق می‌کند. آیا عجیب نیست که چنین تابعی بتواند به عنوان یک تابع اندازه در نظر گرفته شود؟

تذکر ۷.۱: هر چند اندازه احتمال در هر سه اصل موضوعه فوق الذکر صدق می‌کند، نظریه احتمال حالت خاصی از نظریه نایقینی نیست، زیرا در اصل موضوعه چهارم، یعنی اصل موضوعه ضرب که در صفحه ۱۷ تعریف می‌شود، صدق نمی‌کند.

تعریف ۵.۱ [۸۴] *تابع مجموعه‌ای $\mathcal{M}$ یک اندازه نایقین نامیده می‌شود هرگاه در اصول موضوعه نرمال بودن، دوگانی و زیرجمعی بودن صدق کند.*

تمرین ۱.۱: فرض کنید Γ یک مجموعه ناتهی است. برای هر زیرمجموعه Λ از Γ، تابع زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{M}\{\Lambda\}=\begin{cases} 0, & \text{اگر } \Lambda=\varnothing \\ 1, & \text{اگر } \Lambda=\Gamma \\ 0.5, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۹.۱}$$

نشان دهید $\mathcal{M}$ یک اندازه نایقین است. (راهنمایی: نشان دهید $\mathcal{M}$ در هر سه اصل موضوعه صدق می‌کند.)

تمرین ۲.۱: فرض کنید $\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2\}$. واضح است که مجموعه توانی Γ شامل ۴ رویداد

$$\mathcal{L}=\{\varnothing,\ \{\gamma_1\},\ \{\gamma_2\},\ \Gamma\}. \tag{۱۰.۱}$$

است. فرض کنید c یک عدد حقیقی $0<c<1$ است و $\mathcal{M}$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$\mathcal{M}\{\varnothing\}=0,\quad \mathcal{M}\{\gamma_1\}=c,\quad \mathcal{M}\{\gamma_2\}=1-c,\quad \mathcal{M}\{\Gamma\}=1.$$

نشان دهید $\mathcal{M}$ یک اندازه نایقین است.

تمرین ۳.۱: مجموعه $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه توانی Γ شامل ۸ رویداد

$$\mathcal{L} = \{\varnothing,\ \{\gamma_1\},\ \{\gamma_2\},\ \{\gamma_3\},\ \{\gamma_1, \gamma_2\},\ \{\gamma_1, \gamma_3\},\ \{\gamma_2, \gamma_3\},\ \Gamma\} \tag{۱۱.۱}$$

است. فرض کنید c_1, c_2, c_3 اعداد نامنفی هستند که در شرط سازگاری

$$c_i + c_j \le 1 \le c_1 + c_2 + c_3, \quad \forall i \neq j. \tag{۱۲.۱}$$

صدق می‌کنند. $\mathcal{M}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\mathcal{M}\{\gamma_1\} = c_1, \quad \mathcal{M}\{\gamma_2\} = c_2, \quad \mathcal{M}\{\gamma_3\} = c_3,$$
$$\mathcal{M}\{\gamma_1, \gamma_2\} = 1 - c_3, \quad \mathcal{M}\{\gamma_1, \gamma_3\} = 1 - c_2, \quad \mathcal{M}\{\gamma_2, \gamma_3\} = 1 - c_1,$$
$$\mathcal{M}\{\varnothing\} = 0, \quad \mathcal{M}\{\Gamma\} = 1.$$

نشان دهید $\mathcal{M}$ یک اندازه نایقین است.

تمرین ۴.۱: مجموعه $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید c یک عدد حقیقی با شرط $0/5 \le c < 1$ است. مجموعه توان شامل ۱۶ رویداد است. برای هر زیرمجموعه Λ، $\mathcal{M}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} 0, & \text{اگر } \Lambda = \varnothing \\ 1, & \text{اگر } \Lambda = \Gamma \\ c, & \text{اگر } \gamma_1 \in \Lambda \neq \Gamma \\ 1 - c, & \text{اگر } \gamma_1 \notin \Lambda \neq \varnothing. \end{cases} \tag{۱۳.۱}$$

نشان دهید $\mathcal{M}$ یک اندازه نایقین است.

تمرین ۵.۱: مجموعه $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ و فرض کنید $c_1, c_2, \ldots$ اعداد نامنفی با خاصیت $c_1 + c_2 + \cdots = 1$ هستند. برای هر زیرمجموعه Λ، $\mathcal{M}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \sum_{\gamma_i \in \Lambda} c_i. \tag{۱۴.۱}$$

نشان دهید $\mathcal{M}$ یک اندازه نایقین است.

تمرین ۶.۱: اندازه لبگ، که بعد از ریاضیدان فرانسوی هنری لبگ نام گذاری شد، یک روش استاندارد برای نسبت دادن طول، مساحت و یا حجم به مجموعه‌ها در فضای اقلیدسی است. به عنوان مثال، اندازه لبگ بازه $[a, b]$، طول بازه $b - a$ است. برای مجموعه $\Gamma = [0, 1]$، فرض کنید $\mathcal{M}$ اندازه لبگ است. نشان دهید $\mathcal{M}$ یک اندازه نایقین است.

تمرین ۷.۱: فرض کنید Γ مجموعه تمامی اعداد حقیقی است و c یک عدد حقیقی با $0 < c \le 0/5$ است. برای هر زیرمجموعه Λ، $\mathcal{M}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} 0, & \text{اگر } \Lambda = \varnothing \\ c, & \text{اگر } \Lambda \text{ از بالا کران دار بوده و } \Lambda \neq \varnothing \\ 0/5, & \text{اگر هر دو رویدار } \Lambda \text{ و } \Lambda^c \text{ از بالا کران دار باشند} \\ 1 - c, & \text{اگر } \Lambda^c \text{ از بالا کران دار بوده و } \Lambda \neq \Gamma \\ 1, & \text{اگر } \Lambda = \Gamma \end{cases} \tag{۱۵.۱}$$

نشان دهید $\mathcal{M}$ یک اندازه نایقین است.

تمرین ۸.۱: فرض کنید $\rho(x)$ یک تابع نامنفی و انتگرال پذیر روی $(-\infty, +\infty)$ است طوری که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\mathrm{d}x \geq ۱. \tag{۱۶.۱}$$

تابع $\mathcal{M}$ برای هر مجموعه بورل Λ از اعداد حقیقی را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} \int_{\Lambda} \rho(x)\mathrm{d}x, & \int_{\Lambda} \rho(x)\mathrm{d}x < ۰/۵ \text{ اگر} \\ ۱ - \int_{\Lambda^c} \rho(x)\mathrm{d}x, & \int_{\Lambda^c} \rho(x)\mathrm{d}x < ۰/۵ \text{ اگر} \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۱۷.۱}$$

نشان دهید $\mathcal{M}$ یک اندازه نایقین است.

قضیه ۱.۱ (قضیه یکنوایی) *اندازه نایقین یک تابع افزایشی یکنواست. یعنی برای هر دو مجموعه $\Lambda_۱$ و $\Lambda_۲$ با $\Lambda_۱ \subset \Lambda_۲$، داریم.*

$$\mathcal{M}\{\Lambda_۱\} \leq \mathcal{M}\{\Lambda_۲\}. \tag{۱۸.۱}$$

برهان: بنا بر اصل موضوعه نرمال بودن $\mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱$، و همچنین بنا بر اصل موضوعه دوگانی داریم $\mathcal{M}\{\Lambda_۱^c\} = ۱ - \mathcal{M}\{\Lambda_۱\}$. چون $\Lambda_۱ \subset \Lambda_۲$، داریم $\Gamma = \Lambda_۱^c \cup \Lambda_۲$. با استفاده از اصل موضوعه زیرجمعی بودن، داریم

$$۱ = \mathcal{M}\{\Gamma\} \leq \mathcal{M}\{\Lambda_۱^c\} + \mathcal{M}\{\Lambda_۲\} = ۱ - \mathcal{M}\{\Lambda_۱\} + \mathcal{M}\{\Lambda_۲\}.$$

پس $\mathcal{M}\{\Lambda_۱\} \leq \mathcal{M}\{\Lambda_۲\}$.

قضیه ۲.۱ *اندازه نایقین مجموعه تهی $\varnothing$ همواره صفر است. یعنی*

$$\mathcal{M}\{\varnothing\} = ۰. \tag{۱۹.۱}$$

برهان: چون $\Gamma^c = \varnothing$ و $\mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱$، از اصل موضوعه دوگانی نتیجه می‌شود

$$\mathcal{M}\{\varnothing\} = ۱ - \mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱ - ۱ = ۰.$$

قضیه ۳.۱ *مقدار اندازه نایقین عددی بین صفر و یک است. یعنی برای هر رویداد Λ، داریم*

$$۰ \leq \mathcal{M}\{\Lambda\} \leq ۱. \tag{۲۰.۱}$$

برهان: از قضیه یکنوایی نتیجه می‌شود که $۰ \leq \mathcal{M}\{\Lambda\} \leq ۱$. زیرا $\varnothing \subset \Lambda \subset \Gamma$ و $\mathcal{M}\{\varnothing\} = ۰$، $\mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱$.

قضیه ۴.۱ *فرض کنید* $\Lambda_۱, \Lambda_۲, \ldots$ *دنباله‌ای از رویدادها با* $\mathcal{M}\{\Lambda_i\} \to ۰$ *وقتی* $i \to \infty$*. در این صورت برای هر رویداد* Λ*، داریم:*

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda \cup \Lambda_i\} = \lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda \backslash \Lambda_i\} = \mathcal{M}\{\Lambda\}. \quad (۲۱.۱)$$

مخصوصاً، اگر رویداد با اضافه کردن یک رویداد با اندازه صفر بزرگ‌تر شود و یا با کاستن یک رویداد از اندازه صفر کوچک‌تر شود، اندازه نایقین آن تغییر نمی‌کند.

برهان: از قضیه یکنوایی و اصل موضوعه زیرجمعی بودن نتیجه می‌شود که برای هر i

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} \le \mathcal{M}\{\Lambda \cup \Lambda_i\} \le \mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda_i\}.$$

پس با استفاده از $\mathcal{M}\{\Lambda_i\} \to ۰$ داریم $\mathcal{M}\{\Lambda \cup \Lambda_i\} \to \mathcal{M}\{\Lambda\}$. چون

$$(\Lambda \backslash \Lambda_i) \subset \Lambda \subset ((\Lambda \backslash \Lambda_i) \cup \Lambda_i)$$

داریم

$$\mathcal{M}\{\Lambda \backslash \Lambda_i\} \le \mathcal{M}\{\Lambda\} \le \mathcal{M}\{\Lambda \backslash \Lambda_i\} + \mathcal{M}\{\Lambda_i\}.$$

پس با استفاده از $\mathcal{M}\{\Lambda_i\} \to ۰$ داریم $\mathcal{M}\{\Lambda \backslash \Lambda_i\} \to \mathcal{M}\{\Lambda\}$.

قضیه ۵.۱ (*قضیه مجانبی*) *برای رویدادهای* $\Lambda_۱, \Lambda_۲, \ldots$*، داریم*

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} > ۰, \quad \text{اگر } \Lambda_i \uparrow \Gamma, \quad (۲۲.۱)$$

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} < ۱, \quad \text{اگر } \Lambda_i \downarrow \varnothing. \quad (۲۳.۱)$$

برهان: فرض کنید $\Lambda_i \uparrow \Gamma$. چون $\Gamma = \cup_i \Lambda_i$، از اصل موضوعه زیرجمعی بودن نتیجه می‌شود

$$۱ = \mathcal{M}\{\Gamma\} \le \sum_{i=۱}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\}.$$

چون $\mathcal{M}\{\Lambda_i\}$ نسبت به i افزایشی است، داریم $\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} > ۰$. اگر $\Lambda_i \downarrow \varnothing$، آنگاه $\Lambda_i^c \uparrow \Gamma$. از اولین نامساوی و اصل موضوعه دوگانی داریم

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} = ۱ - \lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i^c\} < ۱.$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

مثال ۹.۱: فرض کنید Γ مجموعه اعداد حقیقی است و α یک عدد با خاصیت $۰ < \alpha \le ۰/۵$ است. اندازه نایقین را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } \Lambda = \varnothing \\ \alpha, & \text{اگر } \Lambda \text{ از بالا کراندار است و } \Lambda \ne \varnothing \\ ۰/۵, & \text{اگر هر دو } \Lambda \text{ و } \Lambda^c \text{ از بالا کراندار هستند} \\ ۱ - \alpha, & \text{اگر } \Lambda^c \text{ از بالا کراندار است و } \Lambda \ne \Gamma \\ ۱, & \text{اگر } \Lambda = \Gamma. \end{cases} \quad (۲۴.۱)$$

(الف) برای $i = ۱, ۲, \ldots$، فرض کنید $\Lambda_i = (-\infty, i]$. در این صورت $\Lambda_i \uparrow \Gamma$ و $\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} = \alpha$.

(ب) برای $i = ۱, ۲, \ldots$، فرض کنید $\Lambda_i = [i, +\infty)$. در این صورت

$$\Lambda_i \downarrow \varnothing \text{ و } \lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} = ۱ - \alpha.$$

۳.۱ فضای نایقینی

تعریف ۶.۱ [۸۴] *مجموعه ناتهی Γ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathcal{L}$ یک σـ جبر روی Γ بوده و $\mathcal{M}$ یک اندازه نایقین است. سه‌تایی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را یک فضای نایقینی گویند.*

مثال ۱۰.۱: فرض کنید Γ یک مجموعه دوعضوی $\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$ بوده و $\mathcal{L}$ مجموعه توانی این مجموعه است و $\mathcal{M}$ اندازه نایقین است که با $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = ۰/۶$ و $\mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۴$ تعریف شده است. در این صورت، $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای نایقینی است.

مثال ۱۱.۱: فرض کنید Γ یک مجموعه سه عضوی $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳\}$ بوده و $\mathcal{L}$ مجموعه توانی این مجموعه است و $\mathcal{M}$ اندازه نایقین است که با $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = ۰/۶$، $\mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۳$ و $\mathcal{M}\{\gamma_۳\} = ۰/۲$ تعریف شده است. در این صورت، $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای نایقینی است.

مثال ۱۲.۱: مجموعه Γ را به صورت بازه $[۰, ۱]$ در نظر گرفته و فرض کنید $\mathcal{L}$ جبر بورل روی این بازه بوده و $\mathcal{M}$ اندازه لبگ است. در این صورت، $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای نایقینی است.

برای اهداف کاربردی، مطالعه فضاهای نایقینی معمولاً به فضاهای نایقینی کامل محدود می‌شود.

تعریف ۷.۱ [۱۰۲] *یک فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ کامل گفته می‌شود اگر برای هر $\Lambda_۱, \Lambda_۲ \in \mathcal{L}$ با $\mathcal{M}\{\Lambda_۱\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۲\}$ و برای هر زیرمجموعه A با $\Lambda_۱ \subset A \subset \Lambda_۲$، داریم $A \in \mathcal{L}$. در این حالت، همچنین داریم*

$$\mathcal{M}\{A\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۱\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۲\}. \tag{۲۵.۱}$$

تمرین ۹.۱: فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای نایقینی کامل است و Λ یک رویداد با $\mathcal{M}\{\Lambda\} = ۰$ است. نشان دهید هرگاه $A \subset \Lambda$ ، آنگاه A یک رویداد بوده و $\mathcal{M}\{A\} = ۰$.

تمرین ۱۰.۱: فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای نایقینی کامل است و Λ یک رویداد با $\mathcal{M}\{\Lambda\} = ۱$ است. نشان دهید هرگاه $A \supset \Lambda$، آنگاه A یک رویداد بوده و $\mathcal{M}\{A\} = ۱$.

تعریف ۸.۱ [۴۵] *فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ پیوسته نامیده می‌شود اگر برای رویدادهای $\Lambda_۱, \Lambda_۲, \ldots$ با شرط $\lim_{i\to\infty} \Lambda_i$ داشته باشیم*

$$\mathcal{M}\left\{\lim_{i\to\infty} \Lambda_i\right\} = \lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} \tag{۲۶.۱}$$

تمرین ۱۱.۱: نشان دهید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ همواره پیوسته است هرگاه Γ شامل تعداد متناهی نقطه باشد.

تمرین ۱۲.۱: فرض کنید $\Gamma = [۰, ۱]$، $\mathcal{L}$ جبر بورل روی Γ است و $\mathcal{M}$ اندازه لبگ است. نشان دهید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای نایقینی پیوسته است.

تمرین ۱۳.۱: فرض کنید $\Gamma = [\circ, ۱]$، و $\mathcal{L}$ مجموعه توانی روی Γ است. برای هر زیرمجموعه Λ از Γ، تعریف کنید

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} \circ, & \Lambda = \varnothing \text{ اگر } \\ ۱, & \Lambda = \Gamma \text{ اگر } \\ \circ/۵, & \text{درغیراینصورت}. \end{cases} \quad (۲۷.۱)$$

نشان دهید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای نایقینی ناپیوسته است.

۴.۱ اندازه نایقین ضرب

اندازه نایقین ضرب توسط لیو در سال ۲۰۰۹ تعریف شد [۸۷]، بنابراین اصل موضوعه چهارم نظریه نایقینی به وجود آمد. فرض کنید $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ برای $k = ۱, ۲, \ldots$ فضاهای نایقینی هستند. Γ را که مجموعه چندتایی‌های مرتب به شکل $(\gamma_۱, \gamma_۲, \ldots)$ برای $\gamma_k \in \Gamma_k$ است را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\Gamma = \Gamma_۱ \times \Gamma_۲ \times \cdots \quad (۲۸.۱)$$

یک مستطیل نایقین در Γ مجموعه‌ای به صورت

$$\Lambda = \Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots \quad (۲۹.۱)$$

است که در آن $\Lambda_k \in \mathcal{L}_k$ و $k = ۱, ۲, \ldots$. کوچک‌ترین σـجبر شامل تمامی مستطیل‌های اندازه‌پذیر Γ را σـجبر ضرب نامیده و با

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_۱ \times \mathcal{L}_۲ \times \cdots \quad (۳۰.۱)$$

نشان می‌دهیم. در این صورت، اندازه نایقین $\mathcal{M}$ روی σـجبر $\mathcal{L}$ با اصل موضوعه زیر تعریف می‌شود [۸۷].

اصل موضوعه ۴. (*اصل موضوعه ضرب*) *فرض کنید $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ برای $k = ۱, ۲, \ldots$ فضاهای نایقینی هستند. اندازه نایقین ضرب $\mathcal{M}$ اندازه‌ای است که در شرط زیر صدق می‌کند.*

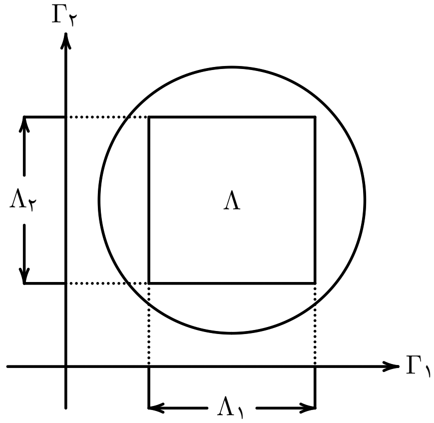
$$\mathcal{M}\left\{\prod_{k=۱}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \bigwedge_{k=۱}^{\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \quad (۳۱.۱)$$

که در آن Λ_k یک رویداد دلخواه از $\mathcal{L}_k$ برای $k = ۱, ۲, \ldots$ است.

تذکر ۸.۱: توجه کنید که اصل موضوعه چهارم (۳۱.۱) اندازه نایقین ضرب را فقط برای مستطیل‌ها تعریف می‌کند. چگونه می‌توان اندازه نایقین $\mathcal{M}$ از کلاس مستطیل‌ها را به σـجبر $\mathcal{L}$ تعمیم داد؟ در

واقع، برای هر رویداد $\Lambda \in \mathcal{L}$، ممکن است چنین گفته شود:

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} \sup\limits_{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots \subset \Lambda} \min\limits_{۱ \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}, & \text{اگر } \sup\limits_{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots \subset \Lambda} \min\limits_{۱ \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > ۰/۵ \\ ۱ - \sup\limits_{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots \subset \Lambda^c} \min\limits_{۱ \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}, & \text{اگر } \sup\limits_{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots \subset \Lambda^c} \min\limits_{۱ \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > ۰/۵ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت.} \end{cases} \quad (۳۲.۱)$$



شکل ۱.۱: تعمیمی از مستطیل‌ها به σـجبر ضرب. اندازه نایقین Λ (قرص) اساساً اگر بیشتر از ۰/۵ باشد ناحیه‌ای است که در مستطیل $\Lambda_۱ \times \Lambda_۲$ محاط شده است. در غیر این صورت باید متمم آن Λ^c را بررسی کنیم. اگر مستطیل محاط Λ^c بزرگ‌تر از ۰/۵ باشد، آنگاه $\mathcal{M}\{\Lambda^c\}$ دقیقاً مستطیل محاط شده است و $\mathcal{M}\{\Lambda\} = ۱ - \mathcal{M}\{\Lambda^c\}$. اگر مستطیل محاط شده Λ وجود نداشته باشد و یا Λ^c برزگ‌تر از ۰/۵ باشد، آنگاه قرار دهید $\mathcal{M}\{\Lambda\} = ۰/۵$.

تذکر ۹.۱: جمع اندازه‌های نایقین بزرگ‌ترین مستطیل‌ها در Λ و Λ^c همواره کوچک‌تر یا مساوی ۱ است، یعنی

$$\sup_{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots \subset \Lambda} \min_{۱ \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} + \sup_{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots \subset \Lambda^c} \min_{۱ \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \le ۱.$$

این مفهوم به این معنی است که حداکثر یکی از

$$\sup_{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots \subset \Lambda} \min_{۱ \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \quad \text{و} \quad \sup_{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots \subset \Lambda^c} \min_{۱ \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}$$

از ۰/۵ بزرگ‌تر است. بنابراین، گزاره (۳۲.۱) منطقی است.

تذکر ۱۰.۱: واضح است که برای هر $\Lambda \in \mathcal{L}$، مقدارهای اندازه نایقین $\mathcal{M}\{\Lambda\}$ تعریف شده با (۳۲.۱) در بازه

$$\left[\sup_{\Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\subset\Lambda}\min_{1\le k<\infty}\mathcal{M}_k\{\Lambda_k\},\ 1-\sup_{\Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\subset\Lambda^c}\min_{1\le k<\infty}\mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}\right],$$

قرار دارند. پس (۳۲.۱) با اصل نایقینی بیشینه [۸۴] مطابقت دارد، یعنی مقادیر $\mathcal{M}\{\Lambda\}$ تا آنجا که امکان داشته باشد در داخل این بازه به ۰/۵ نزدیک هستند.

تذکر ۱۱.۱: اگر جمع دو اندازه نایقین از بزرگترین مستطیل‌ها در Λ و Λ^c یک باشد، یعنی

$$\sup_{\Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\subset\Lambda}\min_{1\le k<\infty}\mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}+\sup_{\Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\subset\Lambda^c}\min_{1\le k<\infty}\mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}=1,$$

آنگاه اندازه نایقین (۳۲.۱) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\mathcal{M}\{\Lambda\}=\sup_{\Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\subset\Lambda}\min_{1\le k<\infty}\mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}. \qquad (۳۳.۱)$$

تذکر ۱۲.۱: اندازه نایقین $\mathcal{M}$ تعریف شده با (۳۱.۱) با نماد

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\wedge\mathcal{M}_2\wedge\cdots \qquad (۳۴.۱)$$

نشان داده خواهد شد.

تمرین ۱۴.۱: فرض کنید $(\Gamma_1,\mathcal{L}_1,\mathcal{M}_1)$ و $(\Gamma_2,\mathcal{L}_2,\mathcal{M}_2)$ بازه‌های $[0,1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ هستند. آنگاه

$$\Lambda=\{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2\mid\gamma_1+\gamma_2\le 1\} \qquad (۳۵.۱)$$

یک رویداد روی فضای نایقینی ضرب $(\Gamma_1,\mathcal{L}_1,\mathcal{M}_1)\times(\Gamma_2,\mathcal{L}_2,\mathcal{M}_2)$ است. نشان دهید

$$\mathcal{M}\{\Lambda\}=\frac{1}{2}. \qquad (۳۶.۱)$$

تمرین ۱۵.۱: فرض کنید $(\Gamma_1,\mathcal{L}_1,\mathcal{M}_1)$ و $(\Gamma_2,\mathcal{L}_2,\mathcal{M}_2)$ بازه‌های $[0,1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ هستند. آنگاه

$$\Lambda=\left\{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2\mid(\gamma_1-0.5)^2+(\gamma_2-0.5)^2\le 0.5^2\right\} \qquad (۳۷.۱)$$

یک رویداد روی فضای نایقینی ضرب $(\Gamma_1,\mathcal{L}_1,\mathcal{M}_1)\times(\Gamma_2,\mathcal{L}_2,\mathcal{M}_2)$ است.
(الف) نشان دهید

$$\mathcal{M}\{\Lambda\}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (۳۸.۱)$$

(ب) از قسمت بالا نتیجه بگیرید $\mathcal{M}\{\Lambda^c\}=1-1/\sqrt{2}$. مستطیل $\Lambda_1\times\Lambda_2$ در Λ^c را چنان بیابید که $\mathcal{M}\{\Lambda_1\times\Lambda_2\}=1-1/\sqrt{2}$.

قضیه ۶.۱ [۱۳۲] *اندازه تعریف شده با (۳۲.۱) یک اندازه نایقین است.*

برهان: برای آن که ثابت کنیم اندازه نایقین ضرب تعریف شده با (۳۲.۱) یک اندازه نایقین است، باید نشان دهیم اندازه نایقین ضرب در اصول موضوعه نرمال بودن، دوگانی و زیرجمعی بودن صدق می‌کند.

گام ۱: به وضوح اندازه نایقین ضرب نرمال است یعنی $\mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱$.

گام ۲: دوگانی را ثابت می‌کنیم: $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = ۱$. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.
حالت ۱: فرض کنید

$$\sup_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\subset\Lambda} \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > ۰/۵.$$

آنگاه بلافاصله نتیجه می‌گیریم

$$\sup_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\subset\Lambda^c} \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} < ۰/۵.$$

از (۳۲.۱) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \sup_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\subset\Lambda} \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\},$$

$$\mathcal{M}\{\Lambda^c\} = ۱ - \sup_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\subset(\Lambda^c)^c} \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} = ۱ - \mathcal{M}\{\Lambda\}.$$

دوگانی ثابت می‌شود.
حالت ۲: فرض کنید

$$\sup_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\subset\Lambda^c} \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > ۰/۵.$$

این حالت نیز به روش مشابه ثابت می‌شود.
حالت ۳: فرض کنید

$$\sup_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\subset\Lambda} \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \leq ۰/۵$$

و

$$\sup_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\subset\Lambda^c} \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \leq ۰/۵.$$

از (۳۲.۱) نتیجه می‌شود که $\mathcal{M}\{\Lambda\} = \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = ۰/۵$ که از آن دوگانی نتیجه می‌شود.

گام ۳: ابتدا ثابت می‌کنیم $\mathcal{M}$ یک تابع مجموعه‌ای افزایشی است. فرض کنید Λ و Δ دو رویداد در $\mathcal{L}$ با $\Lambda \subset \Delta$ هستند. سه حالت در نظر می‌گیریم.
حالت ۱: فرض کنید

$$\sup_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\subset\Lambda} \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > ۰/۵.$$

آنگاه

$$\sup_{\Delta_۱\times\Delta_۲\times\cdots\subset\Delta} \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Delta_k\} \geq \sup_{\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\subset\Lambda} \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > ۰/۵.$$

از (۳۲.۱) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \subset \Lambda} \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\},$$

$$\mathcal{M}\{\Delta\} = \sup_{\Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \subset \Delta} \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Delta_k\}.$$

بنابراین، $\mathcal{M}\{\Lambda\} \le \mathcal{M}\{\Delta\}$.
حالت ۲: فرض کنید

$$\sup_{\Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \subset \Delta^c} \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Delta_k\} > 0/5.$$

آنگاه

$$\sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \subset \Lambda^c} \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \ge \sup_{\Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \subset \Delta^c} \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Delta_k\} > 0/5.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\Lambda\} &= 1 - \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \subset \Lambda^c} \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \\ &\le 1 - \sup_{\Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \subset \Delta^c} \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Delta_k\} = \mathcal{M}\{\Delta\}. \end{aligned}$$

حالت ۳: فرض کنید

$$\sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \subset \Lambda} \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \le 0/5$$

و

$$\sup_{\Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \subset \Delta^c} \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Delta_k\} \le 0/5.$$

از (۳۲.۱) نتیجه می‌شود که $\mathcal{M}\{\Lambda\} \le 0/5$ و $\mathcal{M}\{\Delta\} \ge 0/5$. بنابر این $\mathcal{M}\{\Lambda\} \le \mathcal{M}\{\Delta\}$.

گام ۴: ثابت می‌کنیم $\mathcal{M}$ زیرجمعی است. برای سادگی ادعا را برای فقط دو رویداد Λ و Δ ثابت می‌کنیم. سه حالت زیر را در نظر بگیرید:
حالت ۱: فرض کنید $\mathcal{M}\{\Lambda\} < 0/5$ و $\mathcal{M}\{\Delta\} < 0/5$. برای هر $\varepsilon > 0$، دو مستطیل

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \subset \Lambda^c, \quad \Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \subset \Delta^c$$

وجود دارند که

$$1 - \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} \le \mathcal{M}\{\Lambda\} + \varepsilon/2,$$

$$1 - \min_{1 \le k < \infty} \mathcal{M}_k\{\Delta_k\} \le \mathcal{M}\{\Delta\} + \varepsilon/2.$$

توجه کنید که

$$(\Lambda_1 \cap \Delta_1) \times (\Lambda_2 \cap \Delta_2) \times \cdots \subset (\Lambda \cup \Delta)^c.$$

از دوگانی و زیرجمعی بودن $\mathcal{M}_k$ نتیجه می‌شود که برای هر k

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_k\{\Lambda_k \cap \Delta_k\} &= ۱ - \mathcal{M}_k\{(\Lambda_k \cap \Delta_k)^c\}\\ &= ۱ - \mathcal{M}_k\{\Lambda_k^c \cup \Delta_k^c\}\\ &\geq ۱ - (\mathcal{M}_k\{\Lambda_k^c\} + \mathcal{M}_k\{\Delta_k^c\})\\ &= ۱ - (۱ - \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}) - (۱ - \mathcal{M}_k\{\Delta_k\})\\ &= \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} + \mathcal{M}_k\{\Delta_k\} - ۱\end{aligned}$$

چون قبلا ثابت شد که $\mathcal{M}$ دوگانی بوده و افزایشی است، داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{\Lambda \cup \Delta\} &= ۱ - \mathcal{M}\{(\Lambda \cap \Delta)^c\}\\ &\leq ۱ - \mathcal{M}\{(\Lambda_۱ \cap \Delta_۱) \times (\Lambda_۲ \cap \Delta_۲) \times \cdots\}\\ &= ۱ - \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k \cap \Delta_k\}\\ &\leq ۱ - \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} + ۱ - \min_{۱\leq k<\infty} \mathcal{M}_k\{\Delta_k\}\\ &\leq \mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Delta\} + \varepsilon.\end{aligned}$$

فرض کنید $\varepsilon \to ۰$، داریم

$$\mathcal{M}\{\Lambda \cup \Delta\} \leq \mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Delta\}.$$

حالت ۲: فرض کنید $\mathcal{M}\{\Lambda\} \geq ۰/۵$ و $\mathcal{M}\{\Delta\} < ۰/۵$. برقراری زیرجمعی بودن برای $\mathcal{M}\{\Lambda \cup \Delta\} = ۰/۵$ واضح است. حالت $\mathcal{M}\{\Lambda \cup \Delta\} > ۰/۵$ را در نظر می‌گیریم، یعنی $\mathcal{M}\{\Lambda^c \cap \Delta^c\} < ۰/۵$. با استفاده از $\Lambda^c \cup \Delta = (\Lambda^c \cap \Delta^c) \cup \Delta$ و حالت ۱ داریم

$$\mathcal{M}\{\Lambda^c \cup \Delta\} \leq \mathcal{M}\{\Lambda^c \cap \Delta^c\} + \mathcal{M}\{\Delta\}.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{\Lambda \cup \Delta\} &= ۱ - \mathcal{M}\{\Lambda^c \cap \Delta^c\} \leq ۱ - \mathcal{M}\{\Lambda^c \cup \Delta\} + \mathcal{M}\{\Delta\}\\ &\leq ۱ - \mathcal{M}\{\Lambda^c\} + \mathcal{M}\{\Delta\} = \mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Delta\}.\end{aligned}$$

حالت ۳: اگر $\mathcal{M}\{\Lambda\} \geq ۰/۵$ و $\mathcal{M}\{\Delta\} \geq ۰/۵$، آنگاه زیرجمعی بودن بدیهی است زیرا $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Delta\} \geq ۱ \geq \mathcal{M}\{\Lambda \cup \Delta\}$. قضیه ثابت شد.

تعریف ۹.۱ *فرض کنید $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ برای $k = ۱, ۲, \ldots$ فضاهای نایقینی هستند و*

$$\Gamma = \Gamma_۱ \times \Gamma_۲ \times \cdots \tag{۳۹.۱}$$

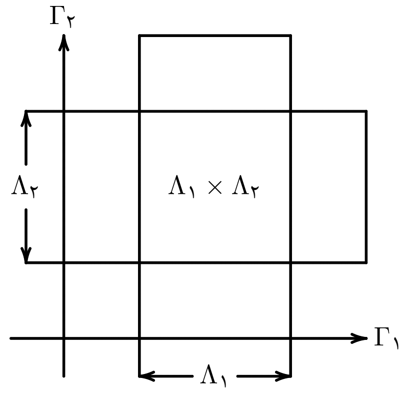
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_۱ \times \mathcal{L}_۲ \times \cdots \tag{۴۰.۱}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_۱ \wedge \mathcal{M}_۲ \wedge \cdots \tag{۴۱.۱}$$

سه تایی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ فضای نایقینی ضرب نامیده می‌شود.

۵.۱ استقلال

ابتدا یادآوری می‌کنیم که هر رویداد اساساً یک مجموعه اندازه‌پذیر است. استقلال دو مجموعه به این معنی است که وقوع یکی از آنها برآورد ما در وقوع دیگری را تغییر نمی‌دهد. چه رویدادهایی در این شرط صدق می‌کنند؟ حالت متداول این است که آنها به فضاهای نایقینی متفاوت متعلق باشند. به عنوان مثال، فرض کنید $\Lambda_۱$ و $\Lambda_۲$ به ترتیب رویدادهایی در فضاهای نایقینی $(\Gamma_۱, \mathcal{L}_۱, \mathcal{M}_۱)$ و $(\Gamma_۲, \mathcal{L}_۲, \mathcal{M}_۲)$ هستند. در این صورت می‌توان گفت که برای $\Lambda_۱$ و $\Lambda_۲$، $\Lambda_۱ \times \Gamma_۲$ و $\Gamma_۱ \times \Lambda_۲$ به ترتیب رویدادهایی در فضای نایقینی ضرب $(\Gamma_۱, \mathcal{L}_۱, \mathcal{M}_۱) \times (\Gamma_۲, \mathcal{L}_۲, \mathcal{M}_۲)$ هستند. شکل ۲.۱ را نگاه کنید.



شکل ۲.۱: $(\Lambda_۱ \times \Gamma_۲) \cap (\Gamma_۱ \times \Lambda_۲) = \Lambda_۱ \times \Lambda_۲$

از اصل موضوعه ضرب نتیجه می‌شود که اندازه نایقین ضرب اشتراک

$$\mathcal{M}\{(\Lambda_۱ \times \Gamma_۲) \cap (\Gamma_۱ \times \Lambda_۲)\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲\} = \mathcal{M}_۱\{\Lambda_۱\} \wedge \mathcal{M}_۲\{\Lambda_۲\}.$$

است. با استفاده از $\mathcal{M}\{\Lambda_۱ \times \Gamma_۲\} = \mathcal{M}_۱\{\Lambda_۱\}$ و $\mathcal{M}\{\Gamma_۱ \times \Lambda_۲\} = \mathcal{M}_۲\{\Lambda_۲\}$ داریم

$$\mathcal{M}\{(\Lambda_۱ \times \Gamma_۲) \cap (\Gamma_۱ \times \Lambda_۲)\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۱ \times \Gamma_۲\} \wedge \mathcal{M}\{\Gamma_۱ \times \Lambda_۲\}.$$

به طور مشابه، می‌توان سه معادله دیگر را به صورت زیر ثابت کرد.

$$\mathcal{M}\{(\Lambda_۱ \times \Gamma_۲)^c \cap (\Gamma_۱ \times \Lambda_۲)\} = \mathcal{M}\{(\Lambda_۱ \times \Gamma_۲)^c\} \wedge \mathcal{M}\{\Gamma_۱ \times \Lambda_۲\},$$
$$\mathcal{M}\{(\Lambda_۱ \times \Gamma_۲) \cap (\Gamma_۱ \times \Lambda_۲)^c\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۱ \times \Gamma_۲\} \wedge \mathcal{M}\{(\Gamma_۱ \times \Lambda_۲)^c\},$$
$$\mathcal{M}\{(\Lambda_۱ \times \Gamma_۲)^c \cap (\Gamma_۱ \times \Lambda_۲)^c\} = \mathcal{M}\{(\Lambda_۱ \times \Gamma_۲)^c\} \wedge \mathcal{M}\{(\Gamma_۱ \times \Lambda_۲)^c\}.$$

برای سادگی، $\Lambda_۱ \times \Gamma_۲$ و $\Gamma_۱ \times \Lambda_۲$ را به ترتیب با $\Lambda_۱$ و $\Lambda_۲$ نشان می‌دهیم. در این صورت چهار معادله فوق الذکر به صورت زیر خواهند بود.

$$\mathcal{M}\{\Lambda_۱ \cap \Lambda_۲\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۱\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda_۲\},$$
$$\mathcal{M}\{\Lambda_۱^c \cap \Lambda_۲\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۱^c\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda_۲\},$$
$$\mathcal{M}\{\Lambda_۱ \cap \Lambda_۲^c\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۱\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda_۲^c\},$$
$$\mathcal{M}\{\Lambda_۱^c \cap \Lambda_۲^c\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۱^c\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda_۲^c\}.$$

پس گوییم دو رویداد $\Lambda_۱$ و $\Lambda_۲$ مستقل هستند اگر و فقط اگر هر چهار معادله برقرار باشند. در حالت کلی استقلال رویدادها را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱۰.۱ [۹۱] *رویدادهای* $\Lambda_۱, \Lambda_۲, \ldots, \Lambda_n$ *را مستقل گویند اگر*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=۱}^{n} \Lambda_i^*\right\} = \bigwedge_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\{\Lambda_i^*\} \tag{۴۲.۱}$$

که در آن Λ_i^* *از* $\{\Lambda_i, \Lambda_i^c, \Gamma\}$ *،* $i = ۱, ۲, \ldots, n$ *به دلخواه انتخاب می‌شوند و* Γ *مجموعه مرجع است.*

مثال ۱۳.۱: رویداد ناممکن $\varnothing$ از هر رویداد دیگر Λ مستقل است زیرا چهار معادله زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{\varnothing \cap \Lambda\} &= \mathcal{M}\{\varnothing\} = \mathcal{M}\{\varnothing\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda\},\\
\mathcal{M}\{\varnothing^c \cap \Lambda\} &= \mathcal{M}\{\Lambda\} = \mathcal{M}\{\varnothing^c\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda\},\\
\mathcal{M}\{\varnothing \cap \Lambda^c\} &= \mathcal{M}\{\varnothing\} = \mathcal{M}\{\varnothing\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda^c\},\\
\mathcal{M}\{\varnothing^c \cap \Lambda^c\} &= \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = \mathcal{M}\{\varnothing^c\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda^c\}.
\end{aligned}$$

مثال ۱۴.۱: رویداد قطعی Γ از هر رویداد دیگر Λ مستقل است زیرا چهار معادله زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{\Gamma \cap \Lambda\} &= \mathcal{M}\{\Lambda\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda\},\\
\mathcal{M}\{\Gamma^c \cap \Lambda\} &= \mathcal{M}\{\Gamma^c\} = \mathcal{M}\{\Gamma^c\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda\},\\
\mathcal{M}\{\Gamma \cap \Lambda^c\} &= \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda^c\},\\
\mathcal{M}\{\Gamma^c \cap \Lambda^c\} &= \mathcal{M}\{\Gamma^c\} = \mathcal{M}\{\Gamma^c\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda^c\}.
\end{aligned}$$

تمرین ۱۶.۱: فرض کنید $\Lambda_۱, \Lambda_۲, \ldots, \Lambda_n$ رویدادهای مستقل هستند. نشان دهید برای هر i و j با $۱ \le i < j \le n$، رویدادهای Λ_i و Λ_j مستقل هستند.

تمرین ۱۷.۱: رویداد Λ را در نظر بگیرید. آیا Λ و Λ^c مستقل هستند؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

تمرین ۱۸.۱: تعداد n رویداد مستقل تعریف کنید. (راهنمایی: آنها را روی فضای نایقینی ضرب $(\Gamma_۱, \mathcal{L}_۱, \mathcal{M}_۱) \times (\Gamma_۲, \mathcal{L}_۲, \mathcal{M}_۲) \times \cdots \times (\Gamma_n, \mathcal{L}_n, \mathcal{M}_n)$ تعریف کنید.)

قضیه ۷.۱ [۹۱] *رویدادهای* $\Lambda_۱, \Lambda_۲, \ldots, \Lambda_n$ *مستقل هستند اگر و فقط اگر*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{n} \Lambda_i^*\right\} = \bigvee_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\{\Lambda_i^*\} \tag{۴۳.۱}$$

که در آن برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$ *،* Λ_i^* *از* $\{\Lambda_i, \Lambda_i^c, \varnothing\}$ *به دلخواه انتخاب شده‌اند و* $\varnothing$ *رویداد ناممکن است.*

برهان: فرض کنید $\Lambda_۱, \Lambda_۲, \ldots, \Lambda_n$ رویدادهای مستقل هستند. از اصل موضوعه دوگانی اندازه نایقین نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{n} \Lambda_i^*\right\} = ۱ - \mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=۱}^{n} \Lambda_i^{*c}\right\} = ۱ - \bigwedge_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\{\Lambda_i^{*c}\} = \bigvee_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\{\Lambda_i^*\}$$

که در آن برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، Λ_i^* از $\{\Lambda_i, \Lambda_i^c, \varnothing\}$ به دلخواه انتخاب می‌شود. معادله (۴۳.۱) ثابت شد. برعکس، اگر معادله (۴۳.۱) برقرار باشد آنگاه

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=۱}^{n} \Lambda_i^*\right\} = ۱ - \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{n} \Lambda_i^{*c}\right\} = ۱ - \bigvee_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\{\Lambda_i^{*c}\} = \bigwedge_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\{\Lambda_i^*\}.$$

که در آن برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، Λ_i^* به دلخواه از $\{\Lambda_i, \Lambda_i^c, \Gamma\}$ انتخاب می‌شود. قضیه ثابت شد.

۶.۱ قضیه چندمستطیلی

تعریف ۱۱.۱ [۹۹] *دو فضای نایقینی* $(\Gamma_۱, \mathcal{L}_۱, \mathcal{M}_۱)$ *و* $(\Gamma_۲, \mathcal{L}_۲, \mathcal{M}_۲)$ *را در نظر بگیرید. یک مجموعه روی* $\Gamma_۱ \times \Gamma_۲$ *چندمستطیلی نامیده می‌شود اگر به شکل*

$$\Lambda = \bigcup_{i=۱}^{m} (\Lambda_{۱i} \times \Lambda_{۲i}) \tag{۴۴.۱}$$

باشد که در آن برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, m$، $\Lambda_{۱i} \in \mathcal{L}_۱$ *و* $\Lambda_{۲i} \in \mathcal{L}_۲$*؛ و*

$$\Lambda_{۱۱} \subset \Lambda_{۱۲} \subset \cdots \subset \Lambda_{۱m}, \tag{۴۵.۱}$$

$$\Lambda_{۲۱} \supset \Lambda_{۲۲} \supset \cdots \supset \Lambda_{۲m}. \tag{۴۶.۱}$$

به وضوح، مستطیل $\Lambda_۱ \times \Lambda_۲$ یک چندمستطیل است. همچنین، یک «صلیب‌ـمانند» هم یک چندمستطیل است. شکل ۳.۱ را نگاه کنید.

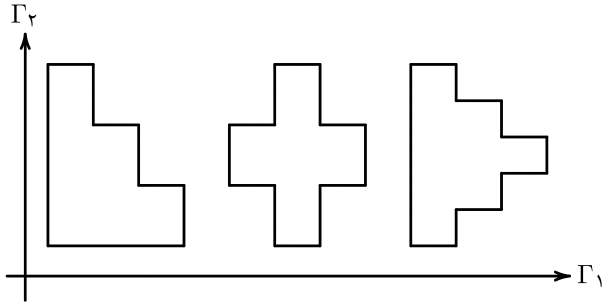
قضیه ۸.۱ (*قصیه چند مستطیلی لیو،* [۹۹]) *دو فضای نایقینی* $(\Gamma_۱, \mathcal{L}_۱, \mathcal{M}_۱)$ *و* $(\Gamma_۲, \mathcal{L}_۲, \mathcal{M}_۲)$ *را در نظر بگیرید. آنگاه، چندمستطیلی*

$$\Lambda = \bigcup_{i=۱}^{m} (\Lambda_{۱i} \times \Lambda_{۲i}) \tag{۴۷.۱}$$

روی فضای نایقینی ضرب $(\Gamma_۱, \mathcal{L}_۱, \mathcal{M}_۱) \times (\Gamma_۲, \mathcal{L}_۲, \mathcal{M}_۲)$ *اندازه نایقین*

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \bigvee_{i=۱}^{m} \mathcal{M}\{\Lambda_{۱i} \times \Lambda_{۲i}\}. \tag{۴۸.۱}$$

دارد.



شکل ۳.۱: سه چندمستطیل.

برهان: واضح است که بزرگترین مستطیل در چندمستطیل Λ، یکی از $\Lambda_{۱i}\times\Lambda_{۲i}$ و $i=۱,۲,\ldots,n$ است. بزرگترین مستطیل را با $\Lambda_{۱k}\times\Lambda_{۲k}$ نشان دهید.
حالت ۱: اگر

$$\mathcal{M}\{\Lambda_{۱k}\times\Lambda_{۲k}\}=\mathcal{M}_۱\{\Lambda_{۱k}\},$$

آنگاه $\Lambda_{۱k}^c\times\Lambda_{۲,k+۱}^c$ بزرگترین مستطیل در Λ^c است و

$$\mathcal{M}\{\Lambda_{۱k}^c\times\Lambda_{۲,k+۱}^c\}=\mathcal{M}_۱\{\Lambda_{۱k}^c\}=۱-\mathcal{M}_۱\{\Lambda_{۱k}\}.$$

پس

$$\mathcal{M}\{\Lambda_{۱k}\times\Lambda_{۲k}\}+\mathcal{M}\{\Lambda_{۱k}^c\times\Lambda_{۲,k+۱}^c\}=۱.$$

حالت ۲: اگر

$$\mathcal{M}\{\Lambda_{۱k}\times\Lambda_{۲k}\}=\mathcal{M}_۲\{\Lambda_{۲k}\},$$

آنگاه $\Lambda_{۱,k-۱}^c\times\Lambda_{۲k}^c$ بزرگترین مستطیل در Λ^c است و

$$\mathcal{M}\{\Lambda_{۱,k-۱}^c\times\Lambda_{۲k}^c\}=\mathcal{M}_۲\{\Lambda_{۲k}^c\}=۱-\mathcal{M}_۲\{\Lambda_{۲k}\}.$$

پس

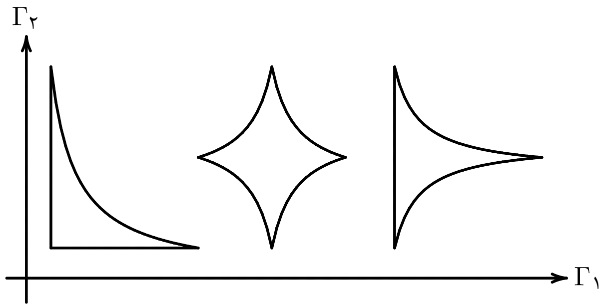
$$\mathcal{M}\{\Lambda_{۱k}\times\Lambda_{۲k}\}+\mathcal{M}\{\Lambda_{۱,k-۱}^c\times\Lambda_{۲k}^c\}=۱.$$

در حالت کلی، جمع اندازه‌های نایقین بزرگترین مستطیلها در Λ و Λ^c همواره ۱ است. از اصل موضوعه ضرب برقراری (۴۸.۱) نتیجه می‌شود.

تذکر ۱۳.۱: چون برای هر i، $\mathcal{M}\{\Lambda_{۱i}\times\Lambda_{۲i}\}=\mathcal{M}_۱\{\Lambda_{۱i}\}\wedge\mathcal{M}_۲\{\Lambda_{۲i}\}$ داریم:

$$\mathcal{M}\{\Lambda\}=\bigvee_{i=۱}^{m}\mathcal{M}_۱\{\Lambda_{۱i}\}\wedge\mathcal{M}_۲\{\Lambda_{۲i}\}. \qquad (۴۹.۱)$$

تذکر ۱۴.۱: توجه کنید که قضیه چندمستطیلی برای چندمستطیل‌هایی که اجتماع تعداد نامتناهی از مستطیل‌ها هستند نیز برقرار است. در این حالت، چند مستطیل‌ها به صورت شکل ۴.۱ خواهند بود.



شکل ۴.۱: سه چندمستطیلی تغییر شکل یافته.

۷.۱ اندازه نایقین شرطی

اندازه نایقین رویداد Λ را بعد از آن که رویدادی مانند A اتفاق افتاده است، در نظر می‌گیریم. این اندازه نایقین جدید از Λ را *اندازه نایقین شرطی* Λ به شرط A گویند.

برای تعریف اندازه نایقین شرطی $\mathcal{M}\{\Lambda|A\}$، ابتدا مجبوریم $\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}$ را بزرگتر کنیم زیرا هرگاه $۱ > \mathcal{M}\{A\}$، برای هر $۱ > \mathcal{M}\{\Lambda\cap A\}$. به نظر می‌رسد جایگزینی به جز تقسیم $\mathcal{M}\{\Lambda\cap A\}$ بر $\mathcal{M}\{A\}$ نداریم. متاسفانه، $\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}/\mathcal{M}\{A\}$ همواره یک اندازه نایقین نیست. با این حال، مقدار $\mathcal{M}\{\Lambda|A\}$ نباید بزرگتر از $\mathcal{M}\{\Lambda\cap A\}/\mathcal{M}\{A\}$ باشد (در غیر این صورت اصل دوگانی برقرار نخواهد بود)، یعنی

$$\mathcal{M}\{\Lambda|A\} \le \frac{\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}. \qquad (۵۰.۱)$$

از طرف دیگر، برای برقراری دوگانی باید داشته باشیم

$$\mathcal{M}\{\Lambda|A\} = ۱ - \mathcal{M}\{\Lambda^c|A\} \ge ۱ - \frac{\mathcal{M}\{\Lambda^c \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}. \qquad (۵۱.۱)$$

همچنین، از $A = (\Lambda \cap A) \cup (\Lambda^c \cap A)$ و با استفاده از اصل موضوعه زیرجمعی بودن داریم $\mathcal{M}\{A\} \le \mathcal{M}\{\Lambda \cap A\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c \cap A\}$. بنابراین

$$\circ \le ۱ - \frac{\mathcal{M}\{\Lambda^c \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} \le \frac{\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} \le ۱. \qquad (۵۲.۱)$$

پس هر عدد بین $\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}/\mathcal{M}\{A\}$ و $۱ - \mathcal{M}\{\Lambda^c \cap A\}/\mathcal{M}\{A\}$ یک مقدار منطقی است که می‌توان به اندازه نایقین شرطی نسبت داد. بنا بر اصل نایقینی بیشینه [۸۴]، اندازه نایقین شرطی زیر را داریم.

تعریف ۱۲.۱ [۸۴] *فرض کنید* $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ *یک فضای نایقینی است و* $\Lambda, A \in \mathcal{L}$. *آنگاه اندازه*

نایقین شرطی Λ به شرط A با $\mathcal{M}\{A\} > ۰$ به صورت

$$\mathcal{M}\{\Lambda|A\} = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}, & if\, \dfrac{\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} < ۰/۵ \text{اگر} \\ ۱ - \dfrac{\mathcal{M}\{\Lambda^c \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}, & \dfrac{\mathcal{M}\{\Lambda^c \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} < ۰/۵ \text{اگر} \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \quad (۵۳.۱)$$

تعریف می‌شود.

تذکر ۱۵.۱: از تعریف اندازه نایقین شرطی بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$۱ - \frac{\mathcal{M}\{\Lambda^c \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} \le \mathcal{M}\{\Lambda|A\} \le \frac{\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}. \quad (۵۴.۱)$$

تذکر ۱۶.۱: اندازه نایقین شرطی $\mathcal{M}\{\Lambda|A\}$ اندازه نایقین بعدی[۱] Λ را بعد از اتفاق افتادن A را مشخص می‌کند.

قضیه ۹.۱ [۸۴] *فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای نایقینی و A یک رویداد با $\mathcal{M}\{A\} > ۰$ است. آنگاه $\mathcal{M}\{\cdot|A\}$ تعریف شده با (۵۳.۱) یک اندازه نایقین است، و $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}\{\cdot|A\})$ یک فضای نایقینی است.*

برهان: کافی است ثابت کنیم $\mathcal{M}\{\cdot|A\}$ در اصول موضوعه نرمال بودن، دوگانی و زیرجمعی بودن صدق می‌کند. ابتدا نشان می‌دهیم در اصل نرمال بودن صدق میکند، یعنی

$$\mathcal{M}\{\Gamma|A\} = ۱ - \frac{\mathcal{M}\{\Gamma^c \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} = ۱ - \frac{\mathcal{M}\{\varnothing\}}{\mathcal{M}\{A\}} = ۱.$$

برای هر رویداد Λ، اگر

$$\frac{\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} \ge ۰/۵, \quad \frac{\mathcal{M}\{\Lambda^c \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} \ge ۰/۵,$$

آنگاه بلافاصله برقراری $\mathcal{M}\{\Lambda|A\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c|A\} = ۰/۵ + ۰/۵ = ۱$ نتیجه می‌شود. در غیر این صورت، بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید

$$\frac{\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} < ۰/۵ < \frac{\mathcal{M}\{\Lambda^c \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}.$$

آنگاه داریم

$$\mathcal{M}\{\Lambda|A\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c|A\} = \frac{\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} + \left(۱ - \frac{\mathcal{M}\{\Lambda \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}\right) = ۱.$$

---

[۱] posterior

به عبارت دیگر $\mathcal{M}\{\cdot|A\}$ در اصل موضوعه دوگانی صدق می‌کند. سرانجام، برای هر دنباله شمارای رویدادهای $\{\Lambda_i\}$، اگر برای هر i، $\mathcal{M}\{\Lambda_i|A\} < ۰/۵$، از (۵۴.۱) و اصل موضوعه زیرجمعی بودن نتیجه می‌شود

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty}\Lambda_i \mid A\right\} \le \frac{\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty}\Lambda_i \cap A\right\}}{\mathcal{M}\{A\}} \le \frac{\sum_{i=۱}^{\infty}\mathcal{M}\{\Lambda_i \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} = \sum_{i=۱}^{\infty}\mathcal{M}\{\Lambda_i|A\}.$$

فرض کنید یکی از جملات از ۰/۵ بزرگتر است، مثلاً

$$\mathcal{M}\{\Lambda_۱|A\} \ge ۰/۵, \quad \mathcal{M}\{\Lambda_i|A\} < ۰/۵, \quad i = ۲, ۳, \ldots$$

اگر $\mathcal{M}\{\cup_i\Lambda_i|A\} = ۰/۵$، آنگاه داریم

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty}\Lambda_i \mid A\right\} \le \sum_{i=۱}^{\infty}\mathcal{M}\{\Lambda_i|A\}.$$

اگر $\mathcal{M}\{\cup_i\Lambda_i|A\} > ۰/۵$، آنگاه نامساوی فوق را می‌توان با استفاده از واقعیت

$$\Lambda_۱^c \cap A \subset \bigcup_{i=۲}^{\infty}(\Lambda_i \cap A) \cup \left(\bigcap_{i=۱}^{\infty}\Lambda_i^c \cap A\right),$$

$$\mathcal{M}\{\Lambda_۱^c \cap A\} \le \sum_{i=۲}^{\infty}\mathcal{M}\{\Lambda_i \cap A\} + \mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=۱}^{\infty}\Lambda_i^c \cap A\right\},$$

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty}\Lambda_i \mid A\right\} = ۱ - \frac{\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=۱}^{\infty}\Lambda_i^c \cap A\right\}}{\mathcal{M}\{A\}},$$

$$\sum_{i=۱}^{\infty}\mathcal{M}\{\Lambda_i|A\} \ge ۱ - \frac{\mathcal{M}\{\Lambda_۱^c \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} + \frac{\sum_{i=۲}^{\infty}\mathcal{M}\{\Lambda_i \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}},$$

ثابت کرد. اگر حداقل دو جمله از ۰/۵ بزرگتر باشند، آنگاه زیرجمعی بودن به وضوح برقرار است. پس $\mathcal{M}\{\cdot|A\}$ در اصل موضوعه زیرجمعی بودن صدق می‌کند. بنابراین، $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}\{\cdot|A\})$ یک فضای نایقینی است.

۸.۱ نکات کتابشناسی

وقتی نمونه‌ای برای برآورد تابع‌های توزیع در اختیار نداریم یا برخی موقعیت‌های اضطراری (مانند جنگ، سیل، زلزله، نصادف و حتی شایعات) پیش می‌آید، مجبور هستیم از چند متخصص در حوزه مربوطه بخواهیم تا درجه یقین حود را در مورد وقوع هر رویداد بیان کنند. شاید برخی بر این نظر باشند که

درجه یقین، احتمال موضوعی[۲] و یا یک مفهوم فازی است. با این حال لیو [۹۳] ادعا کرد که گاهی این کار نامناسب است چون هم نظریه احتمال و هم نظریه فازی ممکن است به نتایج شهودی متناقض منجر شوند.

برای برخورد منطقی با درجه‌های یقین، نظریه نایقینی توسط لیو در سال ۲۰۰۷ پایه ریزی شده [۸۴] و در سال ۲۰۰۹ توسط لیو کامل شد [۸۷]. هسته اصلی نظریه نایقینی، اندازه نایقین است که با اصول موضوعه نرمال بودن، دوگانی، زیرجمعی بودن و ضرب مشخص می‌شود. در عمل، اندازه نایقین به عنوان درجه یقین شخصی بر وقوع یک رویداد نایقین تفسیر می‌شود.

نظریه نایقینی همچنین توسط بسیاری از محققین بررسی و مطالعه شده است به عنوان نمونه از گائو [۴۵]، لیو [۹۱]، ژانگ [۲۱۶]، پنگ و ایوامورا [۱۳۲] و لیو [۹۹] می‌توان نام برد. تاکنون، ابزار اندازه نایقین به اندازه کافی توسعه یافته و به ابزاری قوی در نظریه نایقینی تبدیل شده است.

---
subjective[۲]

فصل ۲

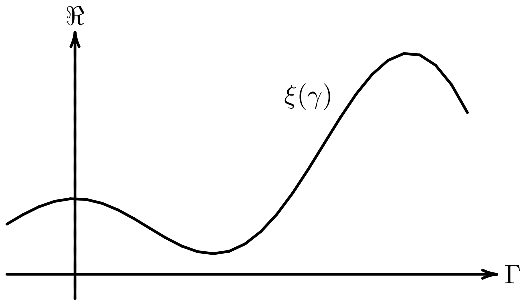
متغیر نایقین

متغیر نایقین یک مفهوم اساسی در نظریه نایقینی است. از این مفهوم برای نمایش کمیت‌های نایقین استفاده می‌شود. تمرکز اصلی این فصل روی متغیر نایقین، توزیع نایقینی، استقلال، قانون عملگری، مقدار مورد انتظار، واریانس، گشتاورها، فاصله، آنتروپی، توزیع نایقینی شرطی، دنباله نایقین و بردار نایقین است.

۱.۲ متغیر نایقین

در تعریف نادقیق، متغیر نایقین یک تابع اندازه‌پذیر روی یک فضای نایقینی است. تعریف رسمی آن در ادامه بیان می‌شود.

تعریف ۱.۲ [۸۴] *متغیر نایقین تابعی مانند ξ از یک فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ به مجموعه اعداد حقیقی است طوری که $\{\xi \in B\}$ یک رویداد برای هر مجموعه بورل از اعداد حقیقی است.*



شکل ۱.۲: یک متغیر نایقین

تذکر ۱.۲: توجه کنید که رویداد $\{\xi \in B\}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه مرجع Γ است، یعنی

$$\{\xi \in B\} = \{\gamma \in \Gamma \,|\, \xi(\gamma) \in B\}. \tag{۱.۲}$$

مثال ۱.۲: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ با مجموعه توانی است و $\mathcal{M}\{\gamma_1\} = 0.6$ و $\mathcal{M}\{\gamma_2\} = 0.4$. پس

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر } \\ 1, & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۲.۲}$$

یک متغیر نایقین است. هم چنین داریم

$$\mathcal{M}\{\xi = 0\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) = 0\} = \mathcal{M}\{\gamma_1\} = 0.6, \tag{۳.۲}$$

$$\mathcal{M}\{\xi = 1\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) = 1\} = \mathcal{M}\{\gamma_2\} = 0.4. \tag{۴.۲}$$

مثال ۲.۲: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[0, 1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. پس

$$\xi(\gamma) = 3\gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma \tag{۵.۲}$$

یک متغیر نایقین است. هم چنین داریم

$$\mathcal{M}\{\xi = 1\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) = 1\} = \mathcal{M}\{1/3\} = 0, \tag{۶.۲}$$

$$\mathcal{M}\{\xi \in [0, 2]\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) \in [0, 2]\} = \mathcal{M}\{[0, 2/3]\} = 2/3, \tag{۷.۲}$$

$$\mathcal{M}\{\xi > 2\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) > 2\} = \mathcal{M}\{(2/3, 1]\} = 1/3. \tag{۸.۲}$$

مثال ۳.۲: عدد حقیقی c را می‌توان به عنوان یک متغیر نایقین خاص در نظر گرفت. در واقع، این متغیر نایقین تابع ثابت

$$\xi(\gamma) \equiv c \tag{۹.۲}$$

روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ است. هم چنین برای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \in B\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) \in B\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} = 1, \quad c \in B \text{ اگر}, \tag{۱۰.۲}$$

$$\mathcal{M}\{\xi \in B\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) \in B\} = \mathcal{M}\{\emptyset\} = 0, \quad c \notin B \text{ اگر}. \tag{۱۱.۲}$$

مثال ۴.۲: متغیر نایقین ξ را در نظر بگیرید و فرض کنید b یک عدد حقیقی است. پس

$$\{\xi = b\}^c = \{\gamma \,|\, \xi(\gamma) = b\}^c = \{\gamma \,|\, \xi(\gamma) \neq b\} = \{\xi \neq b\}.$$

پس $\{\xi = b\}$ و $\{\xi \neq b\}$ رویدادهای متضاد هستند. هم چنین، بنا بر اصل دوگانی، داریم

$$\mathcal{M}\{\xi = b\} + \mathcal{M}\{\xi \neq b\} = 1. \tag{۱۲.۲}$$

تمرین ۱.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین و B یک مجموعه بورل از اعداد حقیقی است. نشان دهید $\{\xi \in B\}$ و $\{\xi \in B^c\}$ رویدادهای متضاد هستند و

$$\mathcal{M}\{\xi \in B\} + \mathcal{M}\{\xi \in B^c\} = ۱. \qquad (۱۳.۲)$$

تمرین ۲.۲: فرض کنید ξ و η دو متغیر نایقین هستند. نشان دهید $\{\xi \geq \eta\}$ و $\{\xi < \eta\}$ رویدادهای متضاد هستند و

$$\mathcal{M}\{\xi \geq \eta\} + \mathcal{M}\{\xi < \eta\} = ۱. \qquad (۱۴.۲)$$

تعریف ۲.۲ *متغیر نایقین ξ روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را*
(الف) نامنفی گویند هرگاه $\mathcal{M}\{\xi < ۰\} = ۰$؛
(ب) مثبت گویند هرگاه $\mathcal{M}\{\xi \leq ۰\} = ۰$.

تعریف ۳.۲ *متغیرهای نایقین ξ و η روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ تعریف شده اند. گوییم $\xi = \eta$ هرگاه برای تقریباً تمامی $\gamma \in \Gamma$، داشته باشیم $\xi(\gamma) = \eta(\gamma)$.*

تعریف ۴.۲ *متغیرهای نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید f یک تابع حقیقی‌ـ مقدار اندازه‌پذیر است. در این صورت، $\xi = f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ یک متغیر نایقین است که با*

$$\xi(\gamma) = f(\xi_۱(\gamma), \xi_۲(\gamma), \ldots, \xi_n(\gamma)), \quad \forall \gamma \in \Gamma. \qquad (۱۵.۲)$$

تعریف می‌شود.

مثال ۵.۲: فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ دو متغیر نایقین هستند. پس جمع $\xi = \xi_۱ + \xi_۲$ یک متغیر نایقین است که با

$$\xi(\gamma) = \xi_۱(\gamma) + \xi_۲(\gamma), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

تعریف می‌شود. ضرب $\xi = \xi_۱\xi_۲$ نیز یک متغیر نایقین است که با

$$\xi(\gamma) = \xi_۱(\gamma) \cdot \xi_۲(\gamma), \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

تعریف می‌شود.
خواننده ممکن است تعجب کند که $\xi(\gamma)$ تعریف شده با (۱۵.۲) چگونه می‌تواند یک متغیرنایقین باشد. قضیه بعدی به این شبهه پاسخ می‌دهد.

قضیه ۱.۲ *فرض کنید $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین هستند و f یک تابع حقیقی اندازه‌پذیر است. پس $f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ یک متغیر نایقین است.*

برهان: چون $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین هستند، بنابراین، تابع‌های اندازه‌پذیر از یک فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ به مجموعه اعداد حقیقی هستند. پس $f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ نیز یک تابع اندازه‌پذیر از فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ است. پس $f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ یک متغیر نایقین است.

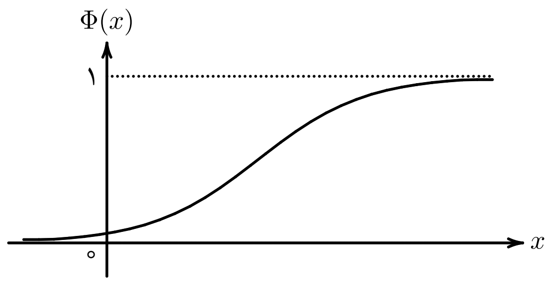
۲.۲ توزیع نایقینی

در این بخش مفهوم توزیع نایقینی برای توصیف متغیر نایقین معرفی می‌شود. توزیع نایقینی حاملی از اطلاعات ناکامل یک متغیر نایقین است. با این حال، در بسیاری از حالت‌ها، به جای خود متغیر نایقین، دانستن توزیع نایقینی کافی است.

تعریف ۵.۲ [۸۴] *توزیع نایقینی Φ از متغیر نایقین ξ با رابطه*

$$\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \le x\} \tag{۱۶.۲}$$

برای هر عدد حقیقی x تعریف می‌شود.



شکل ۲.۲: یک توزیع نایقینی.

تمرین ۳.۲: عدد حقیقی c یک متغیر نایقین $\xi(\gamma) \equiv c$. نشان دهید تابع توزیع این متغیر نایقین به صورت

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < c \quad \text{اگر} \\ 1, & x \ge c \quad \text{اگر} \end{cases}$$

است.

تمرین ۴.۲: فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ فضای نایقینی $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ همراه با مجموعه توانی و

$$\mathcal{M}\{\gamma_1\} = 0/7, \mathcal{M}\{\gamma_2\} = 0/3$$

است. نشان دهید متغیر نایقین

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma = \gamma_1 \quad \text{اگر} \\ 1, & \gamma = \gamma_2 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

تابع توزیع نایقینی

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad \text{اگر} \\ 0/7, & 0 \le x < 1 \quad \text{اگر} \\ 1, & x \ge 1 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

است.

تمرین ۵.۲: فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ فضای نایقینی $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_1\} = ۰/۶$، $\mathcal{M}\{\gamma_2\} = ۰/۳$ و $\mathcal{M}\{\gamma_3\} = ۰/۲$ است. نشان دهید متغیر نایقین

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر } \\ 2, & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر } \\ 3, & \gamma = \gamma_3 \text{ اگر } \end{cases}$$

تابع توزیع نایقینی

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \text{ اگر } \\ 0.6, & 1 \le x < 2 \text{ اگر } \\ 0.8, & 2 \le x < 3 \text{ اگر } \\ 1, & x \ge 3 \text{ اگر } \end{cases}$$

دارد.

تمرین ۶.۲: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[0, 1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. (الف) نشان دهید متغیر نایقین

$$\xi(\gamma) = \gamma, \quad \forall \gamma \in [0, 1] \tag{۱۷.۲}$$

تابع توزیع نایقینی

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ اگر } \\ x, & 0 < x \le 1 \text{ اگر } \\ 1, & x > 1 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۱۸.۲}$$

دارد. (ب) توزیع نایقینی $\xi(\gamma) = 1 - \gamma$ چیست؟ (ج) این دو تابع توزیع چه چیزی را برای شما تداعی می‌کنند؟ (د) متغیر نایقین دیگری نیز طراحی کنید که توزیع نایقینی آن هم (۱۸.۲) است.

تمرین ۷.۲: فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ فضای نایقینی $[0, 1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. نشان دهید تابع توزیع متغیر نایقین $\xi(\gamma) = \gamma^2$ به صورت

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ اگر } \\ \sqrt{x}, & 0 \le x \le 1 \text{ اگر } \\ 1, & x > 1 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۱۹.۲}$$

است.

تمرین ۸.۲: فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ فضای نایقینی $[0, 1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. تابع توزیع نایقینی $\xi(\gamma) = 1/\gamma$ چیست؟

تمرین ۹.۲: فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ فضای نایقینی $[0, 1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. تابع توزیع نایقینی $\xi(\gamma) = \ln \gamma$ چیست؟

تمرین ۱۰.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با تابع توزیع Φ است و a و b دو عدد حقیقی با $a > ۰$ هستند. نشان دهید تابع توزیع نایقینی $a\xi + b$ به صورت

$$\Psi(x) = \Phi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad \forall x \in \Re, \tag{۲۰.۲}$$

است.

تمرین ۱۱.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با تابع توزیع Φ است و a و b دو عدد حقیقی با $a < ۰$ هستند. نشان دهید تابع توزیع نایقینی $a\xi + b$ به صورت

$$\Psi(x) = ۱ - \Phi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad \forall x \in \Re, \tag{۲۱.۲}$$

است.

تمرین ۱۲.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با تابع توزیع Φ است. نشان دهید تابع توزیع نایقینی $\exp(\xi)$ به صورت

$$\Psi(x) = \Phi(\ln(x)), \quad \forall x > ۰, \tag{۲۲.۲}$$

است.

تمرین ۱۳.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با تابع توزیع Φ است. نشان دهید تابع توزیع نایقینی $۱/\xi$ به صورت

$$\Psi(x) = ۱ - \Phi\left(\frac{۱}{x}\right), \quad \forall x > ۰, \tag{۲۳.۲}$$

است.

تمرین ۱۴.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با تابع توزیع Φ و f یک تابع پیوسته و افزایشی اکید است. نشان دهید تابع توزیع نایقینی $f(\xi)$ به صورت

$$\Psi(x) = \Phi(f^{-۱}(x)), \quad \forall x \in \Re, \tag{۲۴.۲}$$

است.

تمرین ۱۵.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با تابع توزیع پیوسته Φ و f یک تابع پیوسته و کاهشی اکید است. نشان دهید تابع توزیع نایقینی $f(\xi)$ به صورت

$$\Psi(x) = ۱ - \Phi(f^{-۱}(x)), \quad \forall x \in \Re, \tag{۲۵.۲}$$

است.

تعریف ۶.۲ *گوییم متغیرهای نایقین همتوزیع هستند هرگاه توزیع نایقینی آنها یکسان باشد.*

واضح است که متغیرهای نایقین ξ و η همتوزیع هستند اگر $\xi = \eta$. با این حال، وجود توزیع یکسان تضمینی برای $\xi = \eta$ به وجود نمی‌آورد. به عنوان مثال، فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ فضای نایقینی $\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$ با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = \mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۵$ است. متغیرهای نایقین

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} ۱, & \gamma = \gamma_۱ \quad \text{اگر} \\ -۱, & \gamma = \gamma_۲ \quad \text{اگر} \end{cases} \qquad \eta(\gamma) = \begin{cases} -۱, & \gamma = \gamma_۱ \quad \text{اگر} \\ ۱, & \gamma = \gamma_۲ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

را تعریف کنید. در این صورت، ξ و η توزیع نایقینی یکسان

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۰, & x < -۱ \quad \text{اگر} \\ ۰/۵, & -۱ \le x < ۱ \quad \text{اگر} \\ ۱, & x \ge ۱ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

دارند. بنابراین، متغیرهای نایقین ξ و η همتوزیع هستند در حالی که $\xi \neq \eta$.

شرط لازم و کافی

قضیه ۲.۲ [۱۳۱] *تابع* $\Phi(x) : \Re \to [۰, ۱]$ *یک تابع توزیع نایقینی است اگر و فقط اگر به جز در* $\Phi(x) \equiv ۰$ *و* $\Phi(x) \equiv ۱$ *افزایشی باشد.*

برهان: واضح است که تابع توزیع نایقینی افزایشی است. علاوه بر این، $\Phi(x) \not\equiv ۰$ و $\Phi(x) \not\equiv ۱$ از قضیه حدی نتیجه می‌شود. برعکس، فرض کنید Φ یک تابع افزایشی است ولی $\Phi(x) \not\equiv ۰$ و $\Phi(x) \not\equiv ۱$. ثابت می‌کنیم یک متغیر نایقین وجود دارد که تابع توزیع آن Φ است. فرض کنید $\mathcal{C}$ گردایه تمامی بازه‌هایی به شکل $(-\infty, a]$، (b, ∞)، $\varnothing$ و $\Re$ است. تابع مجموعه‌ای روی $\Re$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{(-\infty, a]\} &= \Phi(a), \\ \mathcal{M}\{(b, +\infty)\} &= ۱ - \Phi(b), \\ \mathcal{M}\{\varnothing\} &= ۰, \quad \mathcal{M}\{\Re\} = ۱. \end{aligned}$$

برای یک مجموعه دلخواه بورل B از اعداد حقیقی، دنباله‌ای مانند $\{A_i\}$ در $\mathcal{C}$ چنان موجود است که

$$B \subset \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i.$$

توجه کنید که چنین دنباله‌ای یکتا نیست. تابع مجموعه‌ای $\mathcal{M}\{B\}$ را به صورت

$$\mathcal{M}\{B\} = \begin{cases} \inf\limits_{B \subset \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i} \sum\limits_{i=۱}^{\infty} \mathcal{M}\{A_i\}, & \inf\limits_{B \subset \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i} \sum\limits_{i=۱}^{\infty} \mathcal{M}\{A_i\} < ۰/۵ \quad \text{اگر} \\ ۱ - \inf\limits_{B^c \subset \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i} \sum\limits_{i=۱}^{\infty} \mathcal{M}\{A_i\}, & \inf\limits_{B^c \subset \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i} \sum\limits_{i=۱}^{\infty} \mathcal{M}\{A_i\} < ۰/۵ \quad \text{اگر} \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

تعریف کنید. این تابع الزاماً یک اندازه نایقین روی $\Re$ است و Φ تابع توزیع متغیر نایقین مشخص شده با $\xi(\gamma) = \gamma$ است.

مثال ۶.۲: یک «عدد کاملاً نامعلوم» را می‌توان به عنوان یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی زیر در نظر گرفت.

$$\Phi(x) \equiv ۰/۵. \tag{۲۶.۲}$$

از شرط لازم و کافی نتیجه می‌شود که $\Phi(x) \equiv ۰/۵$ الزاماً یک توزیع نایقینی است. فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه اعداد حقیقی $\Re$ با مجموعه توانی است و

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } \Lambda = \varnothing \\ ۱, & \text{اگر } \Lambda = \Re \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت.} \end{cases} \tag{۲۷.۲}$$

پس (۲۶.۲) توزیع نایقینی متغیر نایقین $\xi(\gamma) = \gamma$ است.

تمرین ۱۶.۲: (الف) یک متغیر نایقین تعریف کنید که توزیع نایقینی آن برای هر عدد حقیقی x به صورت

$$\Phi(x) = ۰/۴ \tag{۲۸.۲}$$

باشد. (ب) یک متغیر نایقین تعریف کنید که توزیع نایقینی آن برای هر عدد حقیقی x به صورت

$$\Phi(x) = ۰/۶ \tag{۲۹.۲}$$

باشد.

تمرین ۱۷.۲: یک متغیر نایقین تعریف کنید که توزیع نایقینی آن برای هر عدد حقیقی x به صورت

$$\Phi(x) = (۱ + \exp(-x))^{-۱} \tag{۳۰.۲}$$

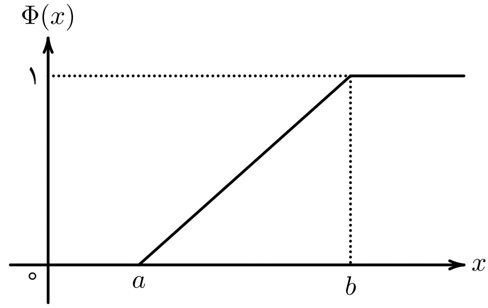
باشد.

برخی توزیع‌های نایقینی خاص

تعریف ۷.۲ *متغیر نایقین ξ را خطی گویند هرگاه توزیع نایقینی خطی به صورت*

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{اگر } a \le x \le b \\ ۱, & \text{اگر } x \ge b \end{cases} \tag{۳۱.۲}$$

داشته باشد که با $\mathcal{L}(a,b)$ نشان داده می‌شود و در آن a و b اعداد حقیقی هستند و $a < b$.



شکل ۳.۲: توزیع نایقینی خطی

مثال ۷.۲: در عمل، برخی کمیت‌ها اغلب با کران‌های بالا و پایین مشخص می‌شوند. به عنوان مثال، شخصی فکر می‌کند که سن «جان» نه کمتر از ۲۴ سال است و نه بیشتر از ۲۸ سال. در این صورت سن «جان» یک متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(۲۴,۲۸)$ است که توزیع نایقینی آن به صورت

$$\Phi(x)=\begin{cases} ۰, & x\le ۲۴ \text{ اگر } \\ (x-۲۴)/۴, & ۲۴\le x\le ۲۸ \text{ اگر } \\ ۱, & x\ge ۲۸ \text{ اگر } \end{cases} \qquad (۳۲.۲)$$

است.

مثال ۸.۲: شخصی فکر می‌کند که قد «جیمز» بین ۱۸۰ و ۱۹۰ سانیمتر است. در این صورت قد «جیمز» یک متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(۱۸۰,۱۹۰)$ با توزیع نایقینی

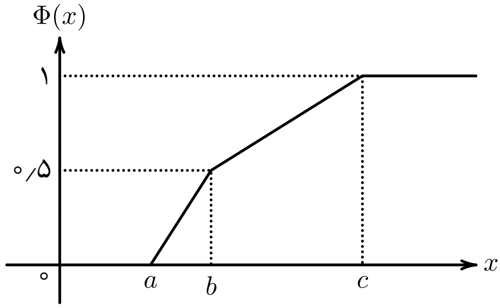
$$\Phi(x)=\begin{cases} ۰, & x\le ۱۸۰ \text{ اگر } \\ (x-۱۸۰)/۱۰, & ۱۸۰\le x\le ۱۹۰ \text{ اگر } \\ ۱, & x\ge ۱۹۰ \text{ اگر } \end{cases} \qquad (۳۳.۲)$$

است.

تعریف ۸.۲ *متغیر نایقین ξ را زیگزاگ نامند اگر توزیع نایقینی زیگزاگ به صورت زیر داشته باشد.*

$$\Phi(x)=\begin{cases} ۰, & x\le a \text{ اگر } \\ \dfrac{x-a}{۲(b-a)}, & \boldsymbol{a}\le x\le b \text{ اگر } \\ \dfrac{x+c-۲b}{۲(c-b)}, & b\le x\le c \text{ اگر } \\ ۱, & x\ge c \text{ اگر } \end{cases} \qquad (۳۴.۲)$$

این توزیع را با $\mathcal{Z}(a,b,c)$ نشان می‌دهند که در آن a,b,c اعداد حقیقی با $a<b<c$ هستند.



شکل ۴.۲: توزیع نایقینی زیگزاگ

مثال ۹.۲: اگر یک متغیر نایقین فقط با مقدار میانه [1] و کران‌های بالا و پایین مشخص شده است. در این صورت، قد «جیمز» یک متغیر نایقین زیگزاگ $\mathcal{Z}(۱۸۰, ۱۸۷, ۱۹۰)$ با توزیع نایقینی

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x \leq ۱۸۰ \\ (x - ۱۸۰)/۱۴, & \text{اگر } ۱۸۰ \leq x \leq ۱۸۷ \\ (x - ۱۸۴)/۶, & \text{اگر } ۱۸۷ \leq x \leq ۱۹۰ \\ ۱, & \text{اگر } x \geq ۱۹۰ \end{cases} \qquad (۳۵.۲)$$

است.

تعریف ۹.۲ *متغیر نایقین ξ را نرمال گویند هرگاه توزیع نایقینی آن به صورت*

$$\Phi(x) = \left(۱ + \exp\left(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۳}\sigma}\right)\right)^{-۱}, \quad x \in \Re \qquad (۳۶.۲)$$

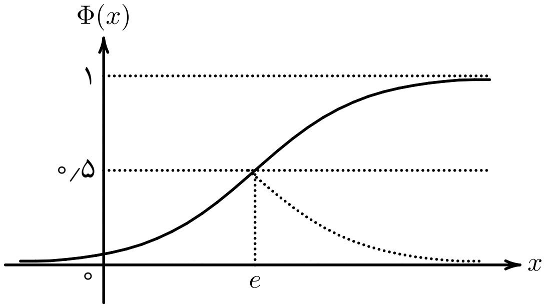
باشد که با $\mathcal{N}(e,\sigma)$ نشان داده می‌شود که در آن e و σ اعداد حقیقی هستند و $\sigma > ۰$.

تعریف ۱۰.۲ *توزیع نایقینی ξ را لوگ- نرمال گویند اگر $\ln \xi$ یک متغیر نایقین نرمال $\mathcal{N}(e,\sigma)$ باشد. به عبارت دیگر، توزیع نایقینی متغیر نایقین نرمال به صورت*

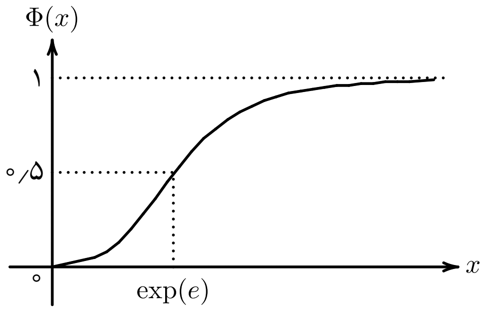
$$\Phi(x) = \left(۱ + \exp\left(\frac{\pi(e-\ln x)}{\sqrt{۳}\sigma}\right)\right)^{-۱}, \quad x \geq ۰ \qquad (۳۷.۲)$$

است و با $\mathcal{LOGN}(e,\sigma)$ نمایش داده می‌شود که در آن e و σ اعداد حقیقی هستند و $\sigma > ۰$.

[1] فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با تابع توزیع Φ است. میانه ξ نقطه‌ای مانند x است که $\Phi(x) = ۰٫۵$. بنابراین، ممکن است میانه به عنوان نقطه «وسط» تعبیر شود. یعنی، ۵۰٪ اطمینان داریم که این کمیت در سمت چپ قرار می گیرد و ۵۰٪ اطمینان داریم که این کمیت در سمت راست این نقطه قرار می‌گیرد.



شکل ۵.۲: توزیع نایقینی نرمال



شکل ۶.۲: توزیع نایقینی لوگ ـ نرمال

تعریف ۱۱.۲ *توزیع نایقینی ξ تجربی نامیده می‌شود هر گاه توزیع نایقینی آن به صورت*

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x < x_1 \\ \alpha_i + \dfrac{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i}, & \text{اگر } x_i \le x \le x_{i+1},\ 1 \le i < n \\ 1, & \text{اگر } x > x_n \end{cases} \tag{۳۸.۲}$$

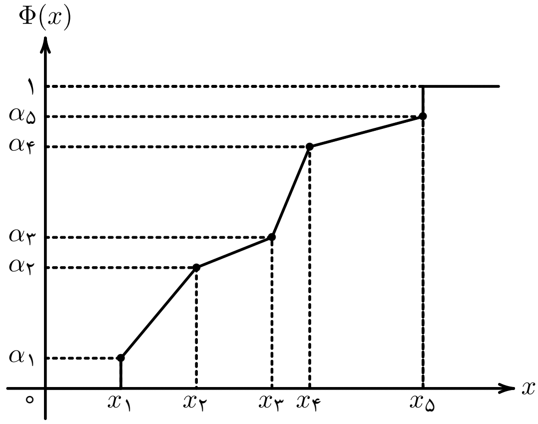
باشد که در آن $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ و $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_n \le 1$.

قضیه معکوس اندازه

قضیه ۳.۲ [۹۱] *(قضیه معکوس اندازه) فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است. پس برای هر عدد حقیقی x، داریم.*

$$\mathcal{M}\{\xi \le x\} = \Phi(x), \quad \mathcal{M}\{\xi > x\} = 1 - \Phi(x). \tag{۳۹.۲}$$

برهان: معادله $\mathcal{M}\{\xi \le x\} = \Phi(x)$ بلافاصله از تعریف توزیع نایقینی نتیجه می‌شود. با استفاده از



شکل ۷.۲: توزیع نایقینی تجربی

دوگانی اندازه نایقین، داریم

$$\mathcal{M}\{\xi > x\} = 1 - \mathcal{M}\{\xi \le x\} = 1 - \Phi(x).$$

قضیه ثابت شد.

تذکر ۲.۲: وقتی توزیع نایقینی Φ پیوسته است، هم چنین داریم

$$\mathcal{M}\{\xi < x\} = \Phi(x), \quad \mathcal{M}\{\xi \ge x\} = 1 - \Phi(x). \qquad (۴۰.۲)$$

تذکر ۳.۲: شاید برخی علاقمند هستند که مقدار اسکالر دقیق توزیع نایقینی $\mathcal{M}\{a \le \xi \le b\}$ را فقط با در دست داشتن توزیع نایقینی مشخص کنند. عموماً این کار غیرممکن است؛ مگر آن که $a = -\infty$ یا $b = +\infty$. سوالی که مطرح می شود این است: آیا واقعا به این کمیت نیاز داریم؟ در واقع برای کاربردهای عملی چنین کاری لازم نیست. امیدوارم شما هم با من هم عقیده باشید.

توزیع نایقینی منظم

تعریف ۱۲.۲ [۹۱] *توزیع نایقین $\Phi(x)$ منظم نامیده می‌شود اگر یک تابع پیوسته و افزایشی اکید نسبت به x باشد طوری که $0 < \Phi(x) < 1$ و*

$$\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1. \qquad (۴۱.۲)$$

به عنوان مثال، توزیع‌های نایقینی خطی، زیگزاگ، نرمال، لوگ‌ـ‌نرمال منظم هستند در حالی که توزیع تجربی $\Phi(x) \equiv 0.5$ منظم نیست.

۳.۲ توزیع نایقینی معکوس

واضح است که توزیع نایقینی منظم تابع معکوس روی برد x با $0 < \Phi(x) < 1$ دارد و تابع معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ روی بازه باز $(0, 1)$ وجود دارد.

تعریف ۱۳.۲ [۹۱] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم $\Phi(x)$ است. پس تابع معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس ξ نامیده می‌شود.*

توجه کنید که توزیع نایقینی معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ روی بازه باز $(0, 1)$ خوش تعریف است. اگر نیاز باشد؛ می‌توان آن را به دامنه $[0, 1]$ با

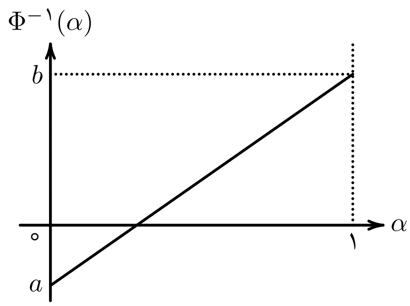
$$\Phi^{-1}(0) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \Phi^{-1}(\alpha), \quad \Phi^{-1}(1) = \lim_{\alpha \uparrow 1} \Phi^{-1}(\alpha). \qquad (۴۲.۲)$$

تعمیم داد.

مثال ۱۰.۲: توزیع نایقینی معکوس متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ به صورت

$$\Phi^{-1}(\alpha) = (1-\alpha)a + \alpha b, \qquad (۴۳.۲)$$

است.



شکل ۸.۲: توزیع نایقینی خطی معکوس

مثال ۱۱.۲: توزیع نایقینی معکوس متغیر نایقین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a, b, c)$ به صورت

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1-2\alpha)a + 2\alpha b, & \text{اگر } \alpha < 0/5 \\ (2-2\alpha)b + (2\alpha - 1)c, & \text{اگر } \alpha \geq 0/5 \end{cases} \qquad (۴۴.۲)$$

مثال ۱۲.۲: توزیع نایقینی معکوس متغیر نایقین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ به صورت

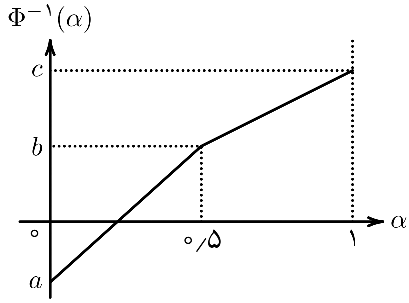
$$\Phi^{-1}(\alpha) = e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}, \qquad (۴۵.۲)$$

است.

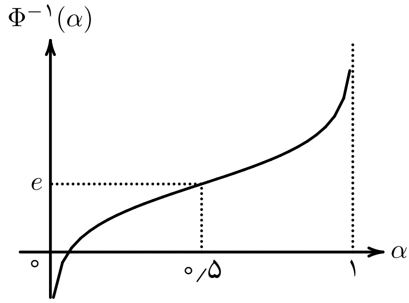
مثال ۱۳.۲: توزیع نایقینی معکوس نایقین لوگ‌ـ نرمال $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ به صورت

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}\right), \qquad (۴۶.۲)$$

است.



شکل ۹.۲: توزیع نایقینی زیگزاگ معکوس



شکل ۱۰.۲: توزیع نایقینی نرمال معکوس

قضیه ۴.۲ *تابع* $\Phi^{-1} : (0, 1) \to \Re$ *توزیع نایقینی معکوس یک متغیر نایقین* ξ *است اگر و فقط برای هر* $\alpha \in (0, 1)$

$$\mathcal{M}\{\xi \leq \Phi^{-1}(\alpha)\} = \alpha. \tag{۴۷.۲}$$

برهان: فرض کنید Φ^{-1} توزیع نایقینی معکوس ξ است. پس برای هر α داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \leq \Phi^{-1}(\alpha)\} = \Phi(\Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha.$$

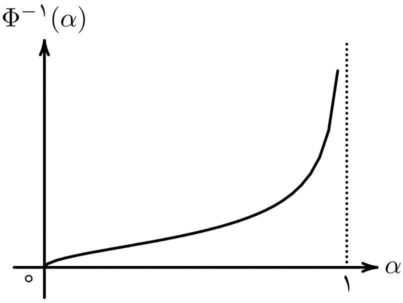
برعکس، فرض کنید Φ^{-1} در شرایط (۴۷.۲) صدق می‌کند. تعریف کنید $x = \Phi^{-1}(\alpha)$. پس $\alpha = \Phi(x)$ و

$$\mathcal{M}\{\xi \leq x\} = \alpha = \Phi(x).$$

یعنی Φ توزیع نایقینی ξ است و Φ^{-1} توزیع نایقینی معکوس آن است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۱۸.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ است و فرض کنید a و b اعداد حقیقی با $a > 0$ هستند. نشان دهید $a\xi + b$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = a\Phi^{-1}(\alpha) + b, \tag{۴۸.۲}$$



شکل ۱۱.۲: توزیع نایقینی لوگ‌ـ نرمال معکوس

دارد.

تمرین ۱۹.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ است و a و b اعداد حقیقی با $a < 0$ هستند. نشان دهید $a\xi + b$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = a\Phi^{-1}(1-\alpha) + b. \tag{۴۹.۲}$$

دارد.

تمرین ۲۰.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ است. نشان دهید $\exp(\xi)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \exp(\Phi^{-1}(\alpha)), \tag{۵۰.۲}$$

دارد.

تمرین ۲۱.۲: فرض کنید ξ متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ است. نشان دهید $1/\xi$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\Phi^{-1}(1-\alpha)}, \tag{۵۱.۲}$$

دارد.

تمرین ۲۲.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ و f یک تابع افزایشی اکید است. نشان دهید $f(\xi)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi^{-1}(\alpha)), \tag{۵۲.۲}$$

دارد.

تمرین ۲۳.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ و f یک تابع کاهشی اکید است. نشان دهید $f(\xi)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi^{-1}(1-\alpha)), \tag{۵۳.۲}$$

دارد.

قضیه ۵.۲ *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ است. پس*

$$\mathcal{M}\{\xi \le c\} \ge \alpha \qquad (۵۴.۲)$$

اگر و فقط اگر

$$\Phi^{-1}(\alpha) \le c \qquad (۵۵.۲)$$

که در آن α و c اعداد ثابت با خاصیت $۰ < \alpha < ۱$ هستند.

برهان: از $\mathcal{M}\{\xi \le c\} = \Phi(c)$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{M}\{\xi \le c\} \ge \alpha$ اگر و فقط اگر $\Phi(c) \ge \alpha$، یعنی $\Phi^{-1}(\alpha) \le c$. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۲۴.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$. نشان دهید

$$\mathcal{M}\{\xi \ge c\} \ge \alpha \qquad (۵۶.۲)$$

اگر و فقط اگر

$$\Phi^{-1}(۱-\alpha) \ge c \qquad (۵۷.۲)$$

که در آن α و c اعداد ثابت با خاصیت $۰ < \alpha < ۱$ هستند.

قضیه ۶.۲ [۹۶]، *(شرط لازم و کافی) تابع $\Phi^{-1}(\alpha) : (۰,۱) \to \Re$ یک توزیع نایقینی معکوس است اگر و فقط اگر پیوسته و افزایشی اکید نسبت به α باشد.*

برهان: فرض کنید $\Phi^{-1}(\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس است. از تعریف توزیع نایقینی معکوس نتیجه می‌شود که $\Phi^{-1}(\alpha)$ یک تابع پیوسته و افزایشی اکید نسبت به $\alpha \in (۰,۱)$ است.
برعکس، فرض کنید $\Phi^{-1}(\alpha)$ یک تابع پیوسته و افزایشی اکید روی $(۰,۱)$ است. تعریف کنید

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۰, & x \le \lim_{\alpha \downarrow ۰} \Phi^{-1}(\alpha) \text{ اگر } \\ \alpha, & x = \Phi^{-1}(\alpha) \text{ اگر } \\ ۱, & x \ge \lim_{\alpha \uparrow ۱} \Phi^{-1}(\alpha) \text{ اگر } \end{cases}$$

از قضیه پنگ- ایوامورا نتیجه می‌شود که $\Phi(x)$ توزیع نایقینی برای یک متغیر نایقین ξ است. پس برای هر $\alpha \in (۰,۱)$ داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \le \Phi^{-1}(\alpha)\} = \Phi(\Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha.$$

بنابراین، $\Phi^{-1}(\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس متغیر نایقین ξ است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۴.۲ استقلال

یادآوری می‌کنیم که یک متغیر نایقین یک تابع اندازه‌پذیر از یک فضای نایقینی به مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. استقلال دو تابع به این معنی است که دانستن مقدار یکی از آنها تقریب ما از مقدار تابع دیگر را تغییر نمی‌دهد[۲]. سوال این است: کدام متغیرهای نایقین در چنین شرایطی صدق می‌کنند؟ حالت مشخص این است که آنها در فضای نایقینی مختلف تعریف شوند. به عنوان مثال، فرض کنید $\xi_1(\gamma_1)$ و $\xi_2(\gamma_2)$ متغیرهای نایقین به ترتیب در فضاهای $(\Gamma_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1)$ و $(\Gamma_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2)$ هستند. واضح است که آنها متغیرهای نایقین در فضای نایفینی ضربی $(\Gamma_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1) \times (\Gamma_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2)$ هستند. پس برای مجموعه‌های بورل B_1 و B_2 از اعداد حقیقی داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{(\xi_1 \in B_1) \cap (\xi_2 \in B_2)\} &= \mathcal{M}\{(\gamma_1, \gamma_2) \,|\, \xi_1(\gamma_1) \in B_1,\ \xi_2(\gamma_2) \in B_2\} \\
&= \mathcal{M}\{(\gamma_1 \,|\, \xi_1(\gamma_1) \in B_1) \times (\gamma_2 \,|\, \xi_2(\gamma_2) \in B_2)\} \\
&= \mathcal{M}_1\{\gamma_1 \,|\, \xi_1(\gamma_1) \in B_1\} \wedge \mathcal{M}_2\{\gamma_2 \,|\, \xi_2(\gamma_2) \in B_2\} \\
&= \mathcal{M}\{\xi_1 \in B_1\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_2 \in B_2\}.
\end{aligned}$$

یعنی،

$$\mathcal{M}\{(\xi_1 \in B_1) \cap (\xi_2 \in B_2)\} = \mathcal{M}\{\xi_1 \in B_1\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_2 \in B_2\}. \qquad (۵۸.۲)$$

بنابراین، گوییم دو متغیر نایقین مستقل هستند اگر معادله‌های (۵۸.۲) برقرار باشند. در حالت کلی، استقلال را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱۴.۲ [۸۷] *متغیرهای نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ را مستقل گویند اگر برای مجموعه های بورل $B_1, B_2, \ldots, B_n$ از اعداد حقیقی داشته باشیم*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(\xi_i \in B_i)\right\} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}. \qquad (۵۹.۲)$$

تمرین ۲۵.۲: نشان دهید یک مقدار ثابت (به عنوان یک متغیر نایقین خاص) همواره مستقل از هر متغیر نایقین دیگر است.

تمرین ۲۶.۲: «جان» دو دلار به «تام» می‌دهد. بنابر این جان «۲− دلار» و تام «۲+ دلار» می‌گیرد. آیا «جان ۲− دلار می‌گیرد» و «تام ۲+ می‌گیرد» مستقل هستند؟ چرا؟

تمرین ۲۷.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل هستند. نشان دهید ξ_i و ξ_j برای هر دو اندیس i و j با $1 \le i < j \le n$ مستقل هستند.

تمرین ۲۸.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین است. آیا ξ و $\xi - 1$ مستقل هستند؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

تمرین ۲۹.۲: n متغیر نایقین مستقل بسازید.
(راهنمایی: آنها در فضای نایقینی ضربی $(\Gamma_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1) \times (\Gamma_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2) \times \cdots \times (\Gamma_n, \mathcal{L}_n, \mathcal{M}_n)$ تعریف کنید.)

[۲] به عنوان مثال، در دستگاه مختصات مستطیلی (x, y, z)، به وضوح دو تابع $z = f(x)$ و $z = g(y)$ برای هر دو تابع یک متغیره f و g مستقل هستند، در حالی که تابع‌های $z = x + 1$ و $z = x - y$ مستقل نیستند.

قضیه ۷.۲ [۸۷] *متغیرهای نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ مستقل هستند اگر و فقط اگر برای مجموعه‌های بورل دلخواه $B_1, B_2, \ldots, B_n$ از اعداد حقیقی داشته باشیم:*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(\xi_i \in B_i)\right\} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}\left\{\xi_i \in B_i\right\}. \tag{۶۰.۲}$$

برهان: از دوگانی اندازه نایقین نتیجه می‌شود که $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ مستقل هستند اگر و فقط اگر

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(\xi_i \in B_i)\right\} = 1 - \mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(\xi_i \in B_i^c)\right\}$$
$$= 1 - \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i^c\} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}\left\{\xi_i \in B_i\right\}.$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۸.۲ *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل هستند و فرض کنید $f_1, f_2, \ldots, f_n$ تابع‌های اندازه‌پذیر هستند. پس $f_1(\xi_1), f_2(\xi_2), \ldots, f_n(\xi_n)$ متغیرهای نایقین مستقل هستند.*

برهان: برای مجموعه‌های بورل $B_1, B_2, \ldots, B_n$، از تعریف استقلال نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(f_i(\xi_i) \in B_i)\right\} = \mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(\xi_i \in f_i^{-1}(B_i))\right\}$$
$$= \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{\xi_i \in f_i^{-1}(B_i)\} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{f_i(\xi_i) \in B_i\}.$$

پس $f_1(\xi_1), f_2(\xi_2), \ldots, f_n(\xi_n)$ متغیرهای نایقین مستقل هستند.

۵.۲ قانون عملگری: توزیع معکوس

در این بخش برخی قوانین عملگری برای محاسبه توزیع‌های نایقینی معکوس از تابع افزایشی اکید، تابع کاهشی اکید و تابع یکنوا ارائه می‌شوند.

تابع افزایشی اکید از متغیرهای نایقین

تابع حقیقی‌ـ مقدار $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را افزایشی اکید گویند اگر برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ با $x_i \leq y_i$ داشته باشیم

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{۶۱.۲}$$

و وقتی برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ با $x_i < y_i$، داشته باشیم

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < f(y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{۶۲.۲}$$

تابع‌های زیر افزایشی اکید هستند.

$$\begin{aligned} f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) &= x_۱ \vee x_۲ \vee \cdots \vee x_n, \\ f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) &= x_۱ \wedge x_۲ \wedge \cdots \wedge x_n, \\ f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) &= x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n, \\ f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) &= x_۱ x_۲ \cdots x_n, \quad x_۱, x_۲, \ldots, x_n \geq ۰. \end{aligned}$$

قضیه ۹.۲ [۹۱] *فرض کنید $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر f یک تابع افزایشی اکید باشد، آنگاه*

$$\xi = f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) \tag{۶۳.۲}$$

توزیع معکوس

$$\Psi^{-۱}(\alpha) = f(\Phi_۱^{-۱}(\alpha), \Phi_۲^{-۱}(\alpha), \ldots, \Phi_n^{-۱}(\alpha)), \tag{۶۴.۲}$$

را دارد.

برهان: برای سادگی، فرض می‌کنیم $n = ۲$. ابتدا، همواره داریم

$$\{\xi \leq \Psi^{-۱}(\alpha)\} \equiv \{f(\xi_۱, \xi_۲) \leq f(\Phi_۱^{-۱}(\alpha), \Phi_۲^{-۱}(\alpha))\}.$$

از طرف دیگر، چون f یک تابع افزایشی اکید است، داریم

$$\{\xi \leq \Psi^{-۱}(\alpha)\} \supset \{\xi_۱ \leq \Phi_۱^{-۱}(\alpha)\} \cap \{\xi_۲ \leq \Phi_۲^{-۱}(\alpha)\}.$$

با استفاده از استقلال $\xi_۱$ و $\xi_۲$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\xi \leq \Psi^{-۱}(\alpha)\} &\geq \mathcal{M}\{(\xi_۱ \leq \Phi_۱^{-۱}(\alpha)) \cap (\xi_۲ \leq \Phi_۲^{-۱}(\alpha))\} \\ &= \mathcal{M}\{\xi_۱ \leq \Phi_۱^{-۱}(\alpha)\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_۲ \leq \Phi_۲^{-۱}(\alpha)\} \\ &= \alpha \wedge \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

از طرف دیگر، چون f یک تابع افزایشی اکید است، داریم

$$\{\xi \leq \Psi^{-۱}(\alpha)\} \subset \{\xi_۱ \leq \Phi_۱^{-۱}(\alpha)\} \cup \{\xi_۲ \leq \Phi_۲^{-۱}(\alpha)\}.$$

با استفاده از استقلال $\xi_۱$ و $\xi_۲$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\xi \leq \Psi^{-۱}(\alpha)\} &\leq \mathcal{M}\{(\xi_۱ \leq \Phi_۱^{-۱}(\alpha)) \cup (\xi_۲ \leq \Phi_۲^{-۱}(\alpha))\} \\ &= \mathcal{M}\{\xi_۱ \leq \Phi_۱^{-۱}(\alpha)\} \vee \mathcal{M}\{\xi_۲ \leq \Phi_۲^{-۱}(\alpha)\} \\ &= \alpha \vee \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

پس $\mathcal{M}\{\xi \leq \Psi^{-۱}(\alpha)\} = \alpha$. یعنی، $\Psi^{-۱}$، توزیع نایقینی معکوس ξ است. قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۳۰.۲: فرض کنید $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ هستند. نشان دهید مجموع

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \tag{۶۵.۲}$$

توزیع نایقینی معکوس به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) + \cdots + \Phi_n^{-1}(\alpha), \tag{۶۶.۲}$$

دارد.

تمرین ۳۱.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. نشان دهید ضرب

$$\xi = \xi_1 \times \xi_2 \times \cdots \times \xi_n \tag{۶۷.۲}$$

توزیع نایقینی معکوس به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) \times \Phi_2^{-1}(\alpha) \times \cdots \times \Phi_n^{-1}(\alpha), \tag{۶۸.۲}$$

دارد.

تمرین ۳۲.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. نشان دهید کمینه

$$\xi = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n \tag{۶۹.۲}$$

توزیع نایقینی معکوس به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) \wedge \Phi_2^{-1}(\alpha) \wedge \cdots \wedge \Phi_n^{-1}(\alpha), \tag{۷۰.۲}$$

دارد.

تمرین ۳۳.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. نشان دهید بیشینه

$$\xi = \xi_1 \vee \xi_2 \vee \cdots \vee \xi_n \tag{۷۱.۲}$$

توزیع نایقینی معکوس به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) \vee \Phi_2^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \Phi_n^{-1}(\alpha), \tag{۷۲.۲}$$

دارد.

مثال ۱۴.۲: شرط استقلال را نمی‌توان در قضیه ۹.۲ حذف کرد. برای مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[0, 1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. آنگاه $\xi_1(\gamma) = \gamma$ یک متغیر نایقین خطی با توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_1^{-1}(\alpha) = \alpha, \tag{۷۳.۲}$$

است و $\xi_2(\gamma) = 1 - \gamma$ نیز یک متغیر نایقین خطی با توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_2^{-1}(\alpha) = \alpha, \tag{۷۴.۲}$$

است. توجه کنید که ξ_1 و ξ_2 مستقل نیستند و $\xi_1+\xi_2 \equiv 1$ که توزیع نایقینی معکوس آن $\Psi^{-1}(\alpha) \equiv 1$ است. پس

$$\Psi^{-1}(\alpha) \neq \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha). \tag{۷۵.۲}$$

بنابراین، شرط استقلال را نمی‌توان حذف کرد.

قضیه ۱۰.۲ *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب متغیرهای نایقین خطی $\mathcal{L}(a_1, b_1)$ و $\mathcal{L}(a_2, b_2)$ هستند. پس مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ است، یعنی*

$$\mathcal{L}(a_1, b_1) + \mathcal{L}(a_2, b_2) = \mathcal{L}(a_1 + a_2, b_1 + b_2). \tag{۷۶.۲}$$

ضرب متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ در عدد $k > 0$ نیز متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(ka, kb)$ است، یعنی

$$k \cdot \mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(ka, kb). \tag{۷۷.۲}$$

برهان: فرض کنید توزیع‌های نایقینی ξ_1 و ξ_2 به ترتیب Φ_1 و Φ_2 هستند. پس

$$\Phi_1^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)a_1 + \alpha b_1,$$
$$\Phi_2^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)a_2 + \alpha b_2.$$

از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که توزیع نایقینی معکوس $\xi_1 + \xi_2$ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)(a_1 + a_2) + \alpha(b_1 + b_2),$$

است. پس مجموع نیز یک متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ است. قسمت اول ثابت شد. حال فرض کنید Φ توزیع نایقینی $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ است. از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که وقتی $k > 0$، توزیع نایقینی معکوس $k\xi$ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = k\Phi^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)(ka) + \alpha(kb),$$

است. پس $k\xi$ نیز یک متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(ka, kb)$ است.

تمرین ۳۴.۲: نشان دهید ضرب متغیرهای نایقین خطی الزاماً خطی نیست حتی اگر آنها متغیرهای مثبت و مستقل باشند. یعنی

$$\mathcal{L}(a_1, b_1) \times \mathcal{L}(a_2, b_2) \neq \mathcal{L}(a_1 \times a_2, b_1 \times b_2). \tag{۷۸.۲}$$

تمرین ۳۵.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین خطی مستقل روی $[0, 1]$ هستند. نشان دهید توزیع نایقینی معکوس $\xi_1 \times \xi_2 \times \cdots \times \xi_n$ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \alpha^n, \tag{۷۹.۲}$$

است. آیا رابطه برای $n \to \infty$ نیز برقرار است؟

قضیه ۱۱.۲ *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب متغیرهای نایقین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a_1, b_1, c_1)$ و $\mathcal{Z}(a_2, b_2, c_2)$ هستند. پس مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نایقین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ است، یعنی*

$$\mathcal{Z}(a_1, b_1, c_1) + \mathcal{Z}(a_2, b_2, c_2) = \mathcal{Z}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2). \tag{۸۰.۲}$$

ضرب متغیر نایقین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a, b, c)$ در عدد $k > 0$ نیز یک متغیر نایقین زیگزاگ $\mathcal{Z}(ka, kb, kc)$ است، یعنی

$$k \cdot \mathcal{Z}(a, b, c) = \mathcal{Z}(ka, kb, kc). \tag{۸۱.۲}$$

برهان: فرض کنید متغیرهای نایقین ξ_1 و ξ_2 به ترتیب توزیع‌های نایقینی Φ_1 و Φ_2 دارند. پس

$$\Phi_1^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a_1 + 2\alpha b_1, & \alpha < 0/5 \quad \text{اگر} \\ (2 - 2\alpha)b_1 + (2\alpha - 1)c_1, & \alpha \geq 0/5 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

$$\Phi_2^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a_2 + 2\alpha b_2, & \alpha < 0/5 \quad \text{اگر} \\ (2 - 2\alpha)b_2 + (2\alpha - 1)c_2, & \alpha \geq 0/5 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که توزیع نایقینی معکوس $\xi_1 + \xi_2$ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)(a_1 + a_2) + 2\alpha(b_1 + b_2), & \alpha < 0/5 \quad \text{اگر} \\ (2 - 2\alpha)(b_1 + b_2) + (2\alpha - 1)(c_1 + c_2), & \alpha \geq 0/5 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

است. پس مجموع نیز یک متغیر نایقین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ است. قسمت اول ثابت شد. حال فرض کنید Φ توزیع نایقینی $\xi \sim \mathcal{Z}(a, b, c)$ است. از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که وقتی $k > 0$، توزیع نایقینی معکوس $k\xi$ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = k\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)(ka) + 2\alpha(kb), & \alpha < 0/5 \quad \text{اگر} \\ (2 - 2\alpha)(kb) + (2\alpha - 1)(kc), & \alpha \geq 0/5 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

است. پس $k\xi$ نیز یک متغیر نایقین $\mathcal{Z}(ka, kb, kc)$ است.

قضیه ۱۲.۲ *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب متغیرهای نایقین نرمال $\mathcal{N}(e_1, \sigma_1)$ و $\mathcal{N}(e_2, \sigma_2)$ هستند. پس مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نایقین نرمال به صورت $\mathcal{N}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2)$ است، یعنی*

$$\mathcal{N}(e_1, \sigma_1) + \mathcal{N}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{N}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2). \tag{۸۲.۲}$$

ضرب توزیع نایقینی نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ در عدد $k > 0$ نیز یک متغیر نایقین نرمال $\mathcal{N}(ke, k\sigma)$ است، یعنی

$$k \cdot \mathcal{N}(e, \sigma) = \mathcal{N}(ke, k\sigma). \tag{۸۳.۲}$$

برهان: فرض کنید توزیع نایقینی ξ_1 و ξ_2 به ترتیب Φ_1 و Φ_2 هستند. پس

$$\Phi_1^{-1}(\alpha) = e_1 + \frac{\sigma_1\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1 - \alpha},$$

$$\Phi_2^{-1}(\alpha) = e_2 + \frac{\sigma_2\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که توزیع نایقینی معکوس $\xi_1+\xi_2$ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) = (e_1+e_2) + \frac{(\sigma_1+\sigma_2)\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha},$$

است. پس مجموع نیز یک متغیر نایقین نرمال $\mathcal{N}(e_1+e_2, \sigma_1+\sigma_2)$ است. قسمت اول ثابت شد. حال فرض کنید که Φ توزیع نایقینی متغیر نایقین نرمال $\xi \sim \mathcal{N}(e,\sigma)$ است. از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که وقتی $k > 0$، توزیع نایقینی معکوس $k\xi$ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = k\Phi^{-1}(\alpha) = (ke) + \frac{(k\sigma)\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha},$$

است. پس $k\xi$ نیز یک متغیر نایقین نرمال $\mathcal{N}(ke, k\sigma)$ است.

قضیه ۱۳.۲ *فرض کنید ξ_1 و ξ_2 متغیرهای نایقین لوگ‌ـ نرمال به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\mathcal{LOGN}(e_1,\sigma_1)$ و $\mathcal{LOGN}(e_2,\sigma_2)$ هستند. پس ضرب $\xi_1 \cdot \xi_2$ نیز متغیر نایقین لوگ‌ـ نرمال $\mathcal{LOGN}(e_1+e_2, \sigma_1+\sigma_2)$ است، یعنی*

$$\mathcal{LOGN}(e_1,\sigma_1)\cdot\mathcal{LOGN}(e_2,\sigma_2) = \mathcal{LOGN}(e_1+e_2,\sigma_1+\sigma_2). \qquad (۸۴.۲)$$

ضرب یک متغیر نایقین لوگ‌ـ نرمال $\mathcal{LOGN}(e,\sigma)$ و یک عدد $k > 0$ نیز یک متغیز نایقین لوگ‌ـ نرمال $\mathcal{LOGN}(e+\ln k, \sigma)$ است. یعنی

$$k\cdot\mathcal{LOGN}(e,\sigma) = \mathcal{LOGN}(e+\ln k,\sigma). \qquad (۸۵.۲)$$

برهان: فرض کنید متغیرهای نایقین ξ_1 و ξ_2 به ترتیب توزیع‌های Φ_1 و Φ_2 دارند. پس

$$\Phi_1^{-1}(\alpha) = \exp\left(e_1 + \frac{\sigma_1\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right),$$

$$\Phi_2^{-1}(\alpha) = \exp\left(e_2 + \frac{\sigma_2\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right).$$

از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که توزیع نایقینی معکوس $\xi_1\cdot\xi_2$ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha)\cdot\Phi_2^{-1}(\alpha) = \exp\left((e_1+e_2) + \frac{(\sigma_1+\sigma_2)\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right),$$

است. پس ضرب یک توزیع نایقینی لوگ‌ـ نرمال $\mathcal{LOGN}(e_1+e_2,\sigma_1+\sigma_2)$ است. قسمت اول ثابت شد. حال فرض کنید Φ توزیع نایقینی متغیر نایقین $\xi \sim \mathcal{LOGN}(e,\sigma)$ است. از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که وقتی $k > 0$، توزیع نایقینی معکوس $k\xi$ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = k\Phi^{-1}(\alpha) = \exp\left((e+\ln k) + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right),$$

است. پس $k\xi$ یک متغیر نایقین لوگ‌ـ نرمال $\mathcal{LOGN}(e+\ln k,\sigma)$ است.

تذکر ۴.۲: به خاطر داشته باشید مجموع دو متغیر نایقین لوگ‌ـ نرمال یک متغیر نایقین لوگ‌ـ نرمال نیست.

تابع‌های کاهشی اکید از متغیرهای نایقین

تابع حقیقی‌ـ مقدار $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ کاهشی اکید گفته می‌شود هرگاه وقتی $x_i \le y_i$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$،

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{86.2}$$

و وقتی $x_i < y_i$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > f(y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{87.2}$$

اگر $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک تابع کاهشی اکید باشد، آنگاه

$$-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

یک تابع افزایشی اکید است و با فرض مثبت بودن f،

$$\frac{1}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

نیز افزایشی اکید است.

قضیه ۱۴.۲ [۹۱] *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر f یک تابع کاهشی اکید باشد آنگاه*

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \tag{88.2}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(1-\alpha), \Phi_2^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)), \tag{89.2}$$

را دارد.

برهان: برای سادگی فرض کنید $n = 2$. ابتدا، همواره داریم

$$\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} \equiv \{f(\xi_1, \xi_2) \le f(\Phi_1^{-1}(1-\alpha), \Phi_2^{-1}(1-\alpha))\}.$$

از طرف دیگر، چون f یک تابع کاهشی اکید است، داریم

$$\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} \supset \{\xi_1 \ge \Phi_1^{-1}(1-\alpha)\} \cap \{\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha)\}.$$

با استفاده از استقلال ξ_1 و ξ_2، داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} &\ge \mathcal{M}\{(\xi_1 \ge \Phi_1^{-1}(1-\alpha)) \cap (\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha))\}\\ &= \mathcal{M}\{\xi_1 \ge \Phi_1^{-1}(1-\alpha)\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha)\}\\ &= \alpha \wedge \alpha = \alpha.\end{aligned}$$

از طرف دیگر، چون f یک تابع کاهشی اکید است، داریم

$$\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} \subset \{\xi_1 \ge \Phi_1^{-1}(1-\alpha)\} \cup \{\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha)\}.$$

با استفاده از استقلال ξ_1 و ξ_2، داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} &\le \mathcal{M}\{(\xi_1 \ge \Phi_1^{-1}(1-\alpha)) \cup (\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha))\}\\ &= \mathcal{M}\{\xi_1 \ge \Phi_1^{-1}(1-\alpha)\} \vee \mathcal{M}\{\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha)\}\\ &= \alpha \vee \alpha = \alpha.\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که $\mathcal{M}\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} = \alpha$. یعنی، Ψ^{-1} توزیع نایقینی معکوس ξ. به این ترتیب قضیه اثبات شد.

تمرین ۳۶.۲: فرض کنید ξ_1 و ξ_2 متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم Φ_1 و Φ_2 هستند. نشان دهید

$$\xi = \frac{1}{\xi_1 + \xi_2} \tag{۹۰.۲}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\Phi_1^{-1}(1-\alpha) + \Phi_2^{-1}(1-\alpha)}, \tag{۹۱.۲}$$

دارد.

تمرین ۳۷.۲: نشان دهید شرط استقلال را نمی‌توان در قضیه ۱۴.۲ حذف کرد.

تابع یکنوای اکید از متغیرهای نایقین

تابع حقیقی‌ـ مقدار $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یکنوای اکید گفته می‌شود اگر نسبت به $x_1, x_2, \ldots, x_m$ افزایشی اکید و نسبت به $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ کاهشی اکید باشد، یعنی

$$f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \le f(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_n) \tag{۹۲.۲}$$

که در آن $x_i \le y_i$ برای $i = 1, 2, \ldots, m$ و $x_i \ge y_i$ برای $i = m+1, m+2, \ldots, n$، و

$$f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) < f(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_n) \tag{۹۳.۲}$$

که در آن $x_i < y_i$ برای $i = 1, 2, \ldots, m$ و $x_i > y_i$ برای $i = m+1, m+2, \ldots, n$. تابع‌های زیر یکنوای اکید هستند.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 - x_2, & \\ f(x_1, x_2) &= x_1 / x_2, & x_1, x_2 > 0, \\ f(x_1, x_2) &= x_1 / (x_1 + x_2), & x_1, x_2 > 0. \end{aligned}$$

توجه کنید که تابع‌های افزایشی اکید و کاهشی اکید حالت‌های خاص از تابع یکنوای اکید هستند.

قضیه ۱۵.۲ [۹۱] *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ افزایشی اکید نسبت به $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ و کاهشی اکید نسبت به $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots, \xi_n$ باشد، آنگاه*

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \tag{۹۴.۲}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)), \tag{۹۵.۲}$$

دارد.

برهان: فقط حالت $m = 1$ و $n = 2$ را ثابت می‌کنیم. ابتدا، همواره داریم

$$\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} \equiv \{f(\xi_1, \xi_2) \le f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(1-\alpha))\}.$$

از طرف دیگر، چون تابع $f(x_1, x_2)$ نسبت به x_1 افزایشی اکید و نسبت به x_2 کاهشی اکید است، داریم

$$\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} \supset \{\xi_1 \le \Phi_1^{-1}(\alpha)\} \cap \{\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha)\}.$$

با استفاده از استقلال ξ_1 و ξ_2، داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} &\ge \mathcal{M}\{(\xi_1 \le \Phi_1^{-1}(\alpha)) \cap (\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha))\} \\
&= \mathcal{M}\{\xi_1 \le \Phi_1^{-1}(\alpha)\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha)\} \\
&= \alpha \wedge \alpha = \alpha.
\end{aligned}$$

از طرف دیگر، چون تابع $f(x_1, x_2)$ نسبت به x_1 افزایشی اکید و نسبت به x_2 کاهشی اکید است، داریم

$$\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} \subset \{\xi_1 \le \Phi_1^{-1}(\alpha)\} \cup \{\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha)\}.$$

با استفاده از استقلال ξ_1 و ξ_2، داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} &\le \mathcal{M}\{(\xi_1 \le \Phi_1^{-1}(\alpha)) \cup (\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha))\} \\
&= \mathcal{M}\{\xi_1 \le \Phi_1^{-1}(\alpha)\} \vee \mathcal{M}\{\xi_2 \ge \Phi_2^{-1}(1-\alpha)\} \\
&= \alpha \vee \alpha = \alpha.
\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود $\mathcal{M}\{\xi \le \Psi^{-1}(\alpha)\} = \alpha$. یعنی Ψ^{-1} توزیع نایقینی معکوس ξ است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۳۸.۲: فرض کنید ξ_1 و ξ_2 متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم Φ_1 و Φ_2 هستند. نشان دهید توزیع نایقینی معکوس تفاضل $\xi_1 - \xi_2$ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) - \Phi_2^{-1}(1-\alpha), \tag{۹۶.۲}$$

است.

تمرین ۳۹.۲: فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ به ترتیب متغیرهای نایقین خطی مستقل $\mathcal{L}(a_۱, b_۱)$ و $\mathcal{L}(a_۲, b_۲)$ هستند. نشان دهید تفاضل $\xi_۱ - \xi_۲$ متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(a_۱ - b_۲, b_۱ - a_۲)$ است، یعنی

$$\mathcal{L}(a_۱, b_۱) - \mathcal{L}(a_۲, b_۲) = \mathcal{L}(a_۱ - b_۲, b_۱ - a_۲). \tag{۹۷.۲}$$

تمرین ۴۰.۲: فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ به ترتیب متغیرهای نایقین زیگزاگ مستقل $\mathcal{Z}(a_۱, b_۱, c_۱)$ و $\mathcal{Z}(a_۲, b_۲, c_۲)$ هستند. نشان دهید تفاضل $\xi_۱ - \xi_۲$ متغیر نایقین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a_۱ - c_۲, b_۱ - b_۲, c_۱ - a_۲)$ است، یعنی

$$\mathcal{Z}(a_۱, b_۱, c_۱) - \mathcal{Z}(a_۲, b_۲, c_۲) = \mathcal{Z}(a_۱ - c_۲, b_۱ - b_۲, c_۱ - a_۲). \tag{۹۸.۲}$$

تمرین ۴۱.۲: فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ به ترتیب متغیرهای نایقین نرمال مستقل $\mathcal{N}(e_۱, \sigma_۱)$ و $\mathcal{N}(e_۲, \sigma_۲)$ هستند. نشان دهید تفاضل $\xi_۱ - \xi_۲$ متغیر نایقین نرمال $\mathcal{N}(e_۱ - e_۲, \sigma_۱ + \sigma_۲)$ است، یعنی

$$\mathcal{N}(e_۱, \sigma_۱) - \mathcal{N}(e_۲, \sigma_۲) = \mathcal{N}(e_۱ - e_۲, \sigma_۱ + \sigma_۲). \tag{۹۹.۲}$$

تمرین ۴۲.۲: فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ به ترتیب متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ هستند. نشان دهید توزیع نایقینی معکوس نسبت $\xi_۱/\xi_۲$ به صورت

$$\Psi^{-۱}(\alpha) = \frac{\Phi_۱^{-۱}(\alpha)}{\Phi_۲^{-۱}(۱ - \alpha)}, \tag{۱۰۰.۲}$$

است.

تمرین ۴۳.۲: فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ به ترتیب متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ هستند. نشان دهید توزیع نایقینی معکوس $\xi_۱/(\xi_۱ + \xi_۲)$ به صورت

$$\Psi^{-۱}(\alpha) = \frac{\Phi_۱^{-۱}(\alpha)}{\Phi_۱^{-۱}(\alpha) + \Phi_۲^{-۱}(۱ - \alpha)}, \tag{۱۰۱.۲}$$

است.

تمرین ۴۴.۲: نشان دهید نمی‌توان شرط استقلال را در قضیه ۱۵.۲ حذف کرد.

۶.۲ قانون عملگری: توزیع معکوس

این بخش برخی قانون‌های عملیاتی برای محاسبه توزیع‌های نایقینی تابع افزایشی اکید، تابع کاهشی اکید و تابع یکنوای اکید از متغیرهای نایقین را فراهم می‌کند.

تابع افزایشی اکید از متغیرهای نایقین

قضیه ۱۶.۲ [۹۱] *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر f یک تابع پیوسته و افزایشی اکید باشد، آنگاه*

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \tag{۱۰۲.۲}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \sup_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x} \min_{1\le i\le n} \Phi_i(x_i), \tag{۱۰۳.۲}$$

دارد.

برهان: برای سادگی، قضیه را فقط برای حالت $n = 2$ ثابت می‌کنیم. چون f یک تابع پیوسته و افزایشی اکید است، رابطه

$$\{f(\xi_1, \xi_2) \le x\} = \bigcup_{f(x_1,x_2)=x} (\xi_1 \le x_1) \cap (\xi_2 \le x_2),$$

برقرار است. بنابراین، توزیع نایقینی به صورت

$$\Psi(x) = \mathcal{M}\{f(\xi_1, \xi_2) \le x\} = \mathcal{M}\left\{\bigcup_{f(x_1,x_2)=x} (\xi_1 \le x_1) \cap (\xi_2 \le x_2)\right\},$$

است. توجه کنید که برای x معلوم، رویداد

$$\bigcup_{f(x_1,x_2)=x} (\xi_1 \le x_1) \cap (\xi_2 \le x_2)$$

یک چندمستطیل است. از قضیه چندمستطیلی نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \sup_{f(x_1,x_2)=x} \mathcal{M}\{(\xi_1 \le x_1) \cap (\xi_2 \le x_2)\}\\ &= \sup_{f(x_1,x_2)=x} \mathcal{M}\{\xi_1 \le x_1\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_2 \le x_2\}\\ &= \sup_{f(x_1,x_2)=x} \Phi_1(x_1) \wedge \Phi_2(x_2).\end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تذکر ۵.۲: ممکن است معادله $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$ برای برخی x ریشه نداشته باشد. در این حالت اگر برای هر $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < x \tag{۱۰۴.۲}$$

قرار می‌دهیم $\Psi(x) = 1$؛ و اگر برای هر $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > x \tag{۱۰۵.۲}$$

قرار می‌دهیم $\Psi(x) = 0$.

تمرین ۴۵.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نایقین هم‌توزیع با توزیع نایقینی یکسان Φ هستند. نشان دهید مجموع

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \tag{۱۰۶.۲}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \Phi\left(\frac{x}{n}\right), \tag{۱۰۷.۲}$$

دارد.

تمرین ۴۶.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نایقین هم‌توزیع با توزیع نایقینی یکسان Φ هستند. نشان دهید ضرب

$$\xi = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n \tag{۱۰۸.۲}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \Phi\left(\sqrt[n]{x}\right), \tag{۱۰۹.۲}$$

دارد.

تمرین ۴۷.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نایقین به ترتیب با توزیع‌های نایقینی یکسان $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ هستند. نشان دهید کمینه

$$\xi = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n \tag{۱۱۰.۲}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \Phi_1(x) \vee \Phi_2(x) \vee \cdots \vee \Phi_n(x), \tag{۱۱۱.۲}$$

دارد.

تمرین ۴۸.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نایقین به ترتیب با توزیع‌های نایقینی یکسان $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ هستند. نشان دهید بیشینه

$$\xi = \xi_1 \vee \xi_2 \vee \cdots \vee \xi_n \tag{۱۱۲.۲}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x) \wedge \cdots \wedge \Phi_n(x),. \tag{۱۱۳.۲}$$

مثال ۱۵.۲: شرط استقلال در قضیه ۱۶.۲ را نمی‌توان حذف کرد. به عنوان مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[0, 1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. پس $\xi_1(\gamma) = \gamma$ یک متغیر نایقین خطی با توزیع نایقینی

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ اگر} \\ x, & 0 < x \le 1 \text{ اگر} \\ 1, & x > 1 \text{ اگر} \end{cases} \tag{۱۱۴.۲}$$

است و $\xi_2(\gamma) = 1 - \gamma$ نیز یک متغیر نایقین خطی با توزیع نایقینی

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x \le 0 \\ x, & \text{اگر } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{اگر } x > 1 \end{cases} \tag{۱۱۵.۲}$$

است. توجه کنید که ξ_1 و ξ_2 مستقل نیستند و $\xi_1 + \xi_2 \equiv 1$ که توزیع نایقینی آن

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x < 1 \\ 1, & \text{اگر } x \ge 1 \end{cases} \tag{۱۱۶.۲}$$

است. پس

$$\Psi(x) \neq \sup_{x_1 + x_2 = x} \Phi_1(x_1) \wedge \Phi_2(x_2). \tag{۱۱۷.۲}$$

بنابراین، شرط استقلال را نمی‌توان حذف کرد.

تعریف ۱۵.۲ ([۵۳]، *آماره ترتیب*) *فرض کنید* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *متغیرهای نایقین هستند، و* k *یک اندیس با* $1 \le k \le n$ *است. پس*

$$\xi = k\text{-}\min[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \tag{۱۱۸.۲}$$

آماره ترتیب k*ـام* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *نامیده می‌شود که در آن* $k\text{-}\min$ *نشان دهنده* k*ـامین کوچکترین مقدار است.*

قضیه ۱۷.۲ [۵۳] *متغیرهای نایقین مستقل* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *به ترتیب با توزیع‌های* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ *را در نظر بگیرید. پس* k*ـامین آماره ترتیب* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *توزیع نایقینی*

$$\Psi(x) = k\text{-}\max[\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x)] \tag{۱۱۹.۲}$$

دارد که در آن $k\text{-}\max$ *نشان دهنده* k*ـامین بزرگترین مقدار است.*

برهان: چون $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\text{-}\min[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ یک تابع افزایشی اکید است، از قضیه ۱۶.۲ نتیجه می‌شود که kـامین آماره ترتیب توزیع نایقینی

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \sup_{k\text{-}\min[x_1, x_2, \ldots, x_n] = x} \Phi_1(x_1) \wedge \Phi_2(x_2) \wedge \cdots \wedge \Phi_n(x_n) \\ &= k\text{-}\max[\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x)],\end{aligned}$$

دارد. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۴۹.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. پس

$$\xi = k\text{-}\max[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \tag{۱۲۰.۲}$$

$(n - k + 1)$ـامین آماره ترتیب است. نشان دهید ξ توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = k\text{-}\min[\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x)], \tag{۱۲۱.۲}$$

دارد.

قضیه ۱۸.۲ ([۹۷]، *قضیه مقدار فرین) فرض کنید* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *متغیرهای نایقین مستقل هستند. فرض کنید*

$$S_i = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i \tag{۱۲۲.۲}$$

برای $i = 1, 2, \ldots, n$ *توزیع‌های نایقینی* Ψ_i *دارند. پس بیشینه*

$$S = S_1 \vee S_2 \vee \cdots \vee S_n \tag{۱۲۳.۲}$$

توزیع نایقینی

$$\Upsilon(x) = \Psi_1(x) \wedge \Psi_2(x) \wedge \cdots \wedge \Psi_n(x); \tag{۱۲۴.۲}$$

دارد و کمینه

$$S = S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n \tag{۱۲۵.۲}$$

توزیع نایقینی

$$\Upsilon(x) = \Psi_1(x) \vee \Psi_2(x) \vee \cdots \vee \Psi_n(x), \tag{۱۲۶.۲}$$

دارد.

برهان: فرض کنید توزیع‌های نایقینی متغیرهای نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ به ترتیب $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. از قضیه ۱۶.۲ نتیجه می‌شود که برای $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\Psi_i(x) = \sup_{x_1+x_2+\cdots+x_i=x} \Phi_1(x_1) \wedge \Phi_2(x_2) \wedge \cdots \wedge \Phi_i(x_i).$$

تعریف کنید

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee (x_1 + x_2) \vee \cdots \vee (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

پس f یک تابع افزایشی اکید است و

$$S = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

از قضیه ۱۶.۲ نتیجه می‌شود که S توزیع نایقینی

$$\begin{aligned}
\Upsilon(x) &= \sup_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x} \Phi_1(x_1) \wedge \Phi_2(x_2) \wedge \cdots \wedge \Phi_n(x_n) \\
&= \min_{1\le i\le n} \sup_{x_1+x_2+\cdots+x_i=x} \Phi_1(x_1) \wedge \Phi_2(x_2) \wedge \cdots \wedge \Phi_i(x_i) \\
&= \min_{1\le i\le n} \Psi_i(x),
\end{aligned}$$

دارد. پس (۱۲۴.۲) برقرار است. به طور مشابه، تعریف کنید

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \wedge (x_1 + x_2) \wedge \cdots \wedge (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

پس f یک تابع افزایشی اکید است و

$$S = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

از قضیه ۱۶.۲ نتیجه می‌شود که S توزیع نایقینی

$$\begin{aligned}\Upsilon(x) &= \sup_{f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x} \Phi_1(x_1) \wedge \Phi_2(x_2) \wedge \cdots \wedge \Phi_n(x_n) \\ &= \max_{1\le i\le n} \sup_{x_1+x_2+\cdots+x_i=x} \Phi_1(x_1) \wedge \Phi_2(x_2) \wedge \cdots \wedge \Phi_i(x_i) \\ &= \max_{1\le i\le n} \Psi_i(x),\end{aligned}$$

دارد. به این ترتیب برقراری (۱۲۶.۲) بررسی شد.

تابع کاهشی اکید از متغیرهای نایقین

قضیه ۱۹.۲ [۹۱] *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نایقین به ترتیب با توزیع نایقینی پیوسته $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ هستند. اگر f یک تابع کاهشی اکید و پیوسته باشد، آنگاه*

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \tag{۱۲۷.۲}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \sup_{f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x} \min_{1\le i\le n} (1 - \Phi_i(x_i)), \tag{۱۲۸.۲}$$

دارد.

برهان: برای سادگی فقط حالت $n = 1$ را ثابت می‌کنیم. چون f یک تابع پیوسته و کاهشی اکید است، پس رابطه

$$\{f(\xi_1, \xi_2) \le x\} = \bigcup_{f(x_1,x_2)=x} (\xi_1 \ge x_1) \cap (\xi_2 \ge x_2),$$

برقرار است. بنابراین توزیع نایقینی آن

$$\Psi(x) = \mathcal{M}\{f(\xi_1, \xi_2) \le x\} = \mathcal{M}\left\{ \bigcup_{f(x_1,x_2)=x} (\xi_1 \ge x_1) \cap (\xi_2 \ge x_2) \right\},$$

است. توجه کنید که برای هر x، رویداد

$$\bigcup_{f(x_1,x_2)=x} (\xi_1 \ge x_1) \cap (\xi_2 \ge x_2)$$

یک چندمستطیل است. از قضیه چندمستطیلی داریم

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \sup_{f(x_۱,x_۲)=x} \mathcal{M}\{(\xi_۱ \ge x_۱) \cap (\xi_۲ \ge x_۲)\} \\ &= \sup_{f(x_۱,x_۲)=x} \mathcal{M}\{\xi_۱ \ge x_۱\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_۲ \ge x_۲\} \\ &= \sup_{f(x_۱,x_۲)=x} (۱ - \Phi_۱(x_۱)) \wedge (۱ - \Phi_۲(x_۲)).\end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۵۰.۲: فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ هستند. نشان دهید

$$\xi = \frac{۱}{\xi_۱ + \xi_۲} \qquad (۱۲۹.۲)$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \sup_{y>۰} (۱ - \Phi_۱(y)) \wedge \left(۱ - \Phi_۲\left(\frac{۱}{x} - y\right)\right), \qquad (۱۳۰.۲)$$

دارد.

تمرین ۵۱.۲: نشان دهید نمی‌توان شرط استقلال را در قضیه ۱۹.۲ حذف کرد.

تابع یکنوای اکید از متغیرهای نایقین

قضیه ۲۰.۲ [۹۱] *فرض کنید $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی پیوسته $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر $f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ یک تابع پیوسته و افزایشی اکید نسبت به متغیرهای $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_m$ و کاهشی اکید نسبت به متغیرهای $\xi_{m+۱}, \xi_{m+۲}, \ldots, \xi_n$ باشد، آنگاه*

$$\xi = f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) \qquad (۱۳۱.۲)$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=x} \left(\min_{۱\le i\le m} \Phi_i(x_i) \wedge \min_{m+۱\le i\le n} (۱ - \Phi_i(x_i))\right), \qquad (۱۳۲.۲)$$

دارد.

برهان: برای سادگی فقط حالت $m = ۱$ و $n = ۲$ را ثابت می‌کنیم. چون $f(x_۱, x_۲)$ یک تابع پیوسته و افزایشی اکید نسبت به $x_۱$ و کاهشی اکید نسبت به $x_۲$ است، رابطه

$$\{f(\xi_۱, \xi_۲) \le x\} = \bigcup_{f(x_۱,x_۲)=x} (\xi_۱ \le x_۱) \cap (\xi_۲ \ge x_۲),$$

برقرار است. پس توزیع نایقینی آن

$$\Psi(x) = \mathcal{M}\{f(\xi_۱, \xi_۲) \le x\} = \mathcal{M}\left\{ \bigcup_{f(x_۱, x_۲) = x} (\xi_۱ \le x_۱) \cap (\xi_۲ \ge x_۲) \right\},$$

است. توجه کنید که برای مقدار معلوم x، رویداد

$$\bigcup_{f(x_۱, x_۲) = x} (\xi_۱ \le x_۱) \cap (\xi_۲ \ge x_۲)$$

یک چندمستطیل است. از قضیه چندمستطیلی نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sup_{f(x_۱, x_۲) = x} \mathcal{M}\left\{(\xi_۱ \le x_۱) \cap (\xi_۲ \ge x_۲)\right\} \\ &= \sup_{f(x_۱, x_۲) = x} \mathcal{M}\{\xi_۱ \le x_۱\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_۲ \ge x_۲\} \\ &= \sup_{f(x_۱, x_۲) = x} \Phi_۱(x_۱) \wedge (۱ - \Phi_۲(x_۲)). \end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۵۲.۲: فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ هستند. نشان دهید $\xi_۱ - \xi_۲$ توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \sup_{y \in \Re} \Phi_۱(x + y) \wedge (۱ - \Phi_۲(y)), \qquad (۱۳۳.۲)$$

دارد.

تمرین ۵۳.۲: فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ هستند. نشان دهید $\xi_۱/\xi_۲$ توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \sup_{y > ۰} \Phi_۱(xy) \wedge (۱ - \Phi_۲(y)), \qquad (۱۳۴.۲)$$

دارد.

تمرین ۵۴.۲: فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ هستند. نشان دهید $\xi_۱/(\xi_۱ + \xi_۲)$ توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \sup_{y > ۰} \Phi_۱(xy) \wedge (۱ - \Phi_۲(y - xy)), \qquad (۱۳۵.۲)$$

دارد.

تمرین ۵۵.۲: نشان دهید نمی‌توان شرط استقلال را در قضیه ۲۰.۲ حذف کرد.

۷.۲ قانون عملگری: سیستم بولی

یک نگاشت از $\{۰,۱\}^n$ به $\{۰,۱\}$ را تابع بولی گویند به عنوان مثال،

$$f(x_۱,x_۲,x_۳)=x_۱\vee x_۲\wedge x_۳ \tag{۱۳۶.۲}$$

یک تابع بولی است. یک متغیر نایقین را بولی گویند هرگاه یکی از دو مقدار یک یا صفر را اختیار کند. به عنوان مثال، متغیر نایقین زیر بولی است.

$$\xi=\begin{cases} ۱ \text{ با اندازه نایقین } a \\ ۰ \text{ با اندازه نایقین } ۱-a \end{cases} \tag{۱۳۷.۲}$$

که در آن a عددی بین صفر و یک است. این بخش قانون عملیاتی برای سیستم بولی را ارائه می‌کند.

قضیه ۲۱.۲ [۹۱] *فرض کنید متغیرهای نایقین بولی مستقل هستند، یعنی برای* $i=۱,۲,\ldots,n$

$$\xi_i=\begin{cases} ۱ \text{ با اندازه نایقین } a_i \\ ۰ \text{ با اندازه نایقین } ۱-a_i \end{cases} \tag{۱۳۸.۲}$$

اگر f یک تابع بولی (الزاماً یکنوا نیست) باشد، آنگاه $\xi=f(\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_n)$ یک متغیر نایقین بولی است که

$$\mathcal{M}\{\xi=۱\}=\begin{cases} \displaystyle\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱}\ \min_{۱\le i\le n}\nu_i(x_i), \\ \qquad \text{اگر } \displaystyle\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱}\ \min_{۱\le i\le n}\nu_i(x_i)<۰/۵ \\ ۱-\displaystyle\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۰}\ \min_{۱\le i\le n}\nu_i(x_i), \\ \qquad \text{اگر } \displaystyle\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱}\ \min_{۱\le i\le n}\nu_i(x_i)\ge ۰/۵ \end{cases} \tag{۱۳۹.۲}$$

که در آن x_i مقدار صفر یا یک را اختیار می‌کند و ν_i برای $i=۱,۲,\ldots,n$ به صورت

$$\nu_i(x_i)=\begin{cases} a_i, & x_i=۱ \text{ اگر} \\ ۱-a_i, & x_i=۰ \text{ اگر} \end{cases} \tag{۱۴۰.۲}$$

تعریف شده اند.

برهان: فرض کنید $B_۱,B_۲,\ldots,B_n$ زیرمجموعه‌های ناتهی از $\{۰,۱\}$ هستند. به عبارت دیگر، یکی از مجموعه‌های $\{۰\}$، $\{۱\}$ یا $\{۰,۱\}$ هستند. برای $i=۱,۲,\ldots,n$ قرار دهید

$$\Lambda=\{\xi=۱\},\quad \Lambda^c=\{\xi=۰\},\quad \Lambda_i=\{\xi_i\in B_i\}.$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که

$$\Lambda_۱\times\Lambda_۲\times\cdots\times\Lambda_n=\Lambda \text{ اگر و تنها اگر } f(B_۱,B_۲,\ldots,B_n)=\{۱\},$$

$$\Lambda_۱ \times \Lambda_۲ \times \cdots \times \Lambda_n = \Lambda^c \text{ اگر و تنها اگر } f(B_۱, B_۲, \ldots, B_n) = \{۰\}.$$

از اصل موضوعه ضرب نتیجه می‌شود که

(۱۴۱.۲)

$$\mathcal{M}\{\xi = ۱\} = \begin{cases} \sup\limits_{f(B_۱,B_۲,\ldots,B_n)=\{۱\}} \min\limits_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}, & \\ \qquad \text{اگر } \sup\limits_{f(B_۱,B_۲,\ldots,B_n)=\{۱\}} \min\limits_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\} > ۰/۵ & \\ ۱ - \sup\limits_{f(B_۱,B_۲,\ldots,B_n)=\{۰\}} \min\limits_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}, & \\ \qquad \text{اگر } \sup\limits_{f(B_۱,B_۲,\ldots,B_n)=\{۰\}} \min\limits_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\} > ۰/۵ & \\ ۰/۵, \qquad \text{درغیراینصورت}. & \end{cases}$$

توجه داشته باشید که برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$

$$\nu_i(۱) = \mathcal{M}\{\xi_i = ۱\}, \quad \nu_i(۰) = \mathcal{M}\{\xi_i = ۰\}.$$

برهان به چهار حالت تفکیک می‌شود. حالت ۱: فرض کنید

$$\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) < ۰/۵.$$

پس داریم

$$\sup_{f(B_۱,B_۲,\ldots,B_n)=\{۰\}} \min_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\} = ۱ - \sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) > ۰/۵.$$

از (۱۴۱.۲) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\xi = ۱\} = \sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i).$$

حالت ۲: فرض کنید

$$\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) > ۰/۵.$$

پس داریم

$$\sup_{f(B_۱,B_۲,\ldots,B_n)=\{۱\}} \min_{۱\le i\le n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\} = ۱ - \sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۰} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) > ۰/۵.$$

از (۱۴۱.۲) نتیجه می‌شود

$$\mathcal{M}\{\xi = ۱\} = ۱ - \sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۰} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i).$$

حالت ۳: فرض کنید

$$\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) = ۰/۵,$$

$$\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۰} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) = ۰/۵.$$

پس داریم
$$\sup_{f(B_1,B_2,\ldots,B_n)=\{1\}}\min_{1\le i\le n}\mathcal{M}\{\xi_i\in B_i\}=0/5,$$
$$\sup_{f(B_1,B_2,\ldots,B_n)=\{0\}}\min_{1\le i\le n}\mathcal{M}\{\xi_i\in B_i\}=0/5.$$
از (۱۴۱.۲) نتیجه می‌شود که
$$\mathcal{M}\{\xi=1\}=0/5=1-\sup_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0}\min_{1\le i\le n}\nu_i(x_i).$$
حالت ۴: فرض کنید
$$\sup_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1}\min_{1\le i\le n}\nu_i(x_i)=0/5,$$
$$\sup_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0}\min_{1\le i\le n}\nu_i(x_i)<0/5.$$
پس داریم
$$\sup_{f(B_1,B_2,\ldots,B_n)=\{1\}}\min_{1\le i\le n}\mathcal{M}\{\xi_i\in B_i\}=1-\sup_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0}\min_{1\le i\le n}\nu_i(x_i)>0/5.$$
از (۱۴۱.۲) نتیجه می‌شود
$$\mathcal{M}\{\xi=1\}=1-\sup_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0}\min_{1\le i\le n}\nu_i(x_i).$$
پس معادله (۱۳۹.۲) برای هر چهار حالت ثابت می‌شود.

مثال ۱۶.۲: شرط استقلال را نمی‌توان در قضیه ۲۱.۲ حذف کرد. برای مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_1,\gamma_2\}$ با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_1\}=\mathcal{M}\{\gamma_2\}=0/5$ است. پس

$$\xi_1(\gamma)=\begin{cases}0, & \gamma=\gamma_1 \quad \text{اگر}\\ 1, & \gamma=\gamma_2 \quad \text{اگر}\end{cases} \tag{۱۴۲.۲}$$

یک متغیر نایقین بولی با

$$\mathcal{M}\{\xi_1=1\}=0/5, \tag{۱۴۳.۲}$$

و

$$\xi_2(\gamma)=\begin{cases}1, & \gamma=\gamma_1 \quad \text{اگر}\\ 0, & \gamma=\gamma_2 \quad \text{اگر}\end{cases} \tag{۱۴۴.۲}$$

نیز یک متغیر نایقین بولی با

$$\mathcal{M}\{\xi_2=1\}=0/5, \tag{۱۴۵.۲}$$

است. توجه کنید که $\xi_۱$ و $\xi_۲$ مستقل نیستند، و $\xi_۱ \wedge \xi_۲ \equiv ۰$ که از آن داریم

$$\mathcal{M}\{\xi_۱ \wedge \xi_۲ = ۱\} = ۰. \tag{۱۴۶.۲}$$

با این حال با استفاده از (۱۳۹.۲) داریم

$$\mathcal{M}\{\xi_۱ \wedge \xi_۲ = ۱\} = ۰/۵. \tag{۱۴۷.۲}$$

بنابراین، شرط استقلال را نمی‌توان حذف کرد.

قضیه ۲۲.۲ [۹۱]، *(آماره ترتیب) فرض کنید $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین بولی مستقل هستند، یعنی برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$*

$$\xi_i = \begin{cases} ۱ & \text{با اندازه نایقین } a_i \\ ۰ & \text{با اندازه نایقین } ۱ - a_i \end{cases} \tag{۱۴۸.۲}$$

آن گاه kـ امین آماره ترتیب

$$\xi = k\text{-}\min\left[\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n\right] \tag{۱۴۹.۲}$$

یک متغیر نایقین بولی است که

$$\mathcal{M}\{\xi = ۱\} = k\text{-}\min\left[a_۱, a_۲, \ldots, a_n\right]. \tag{۱۵۰.۲}$$

برهان: تابع بولی متناظر برای kـ امین آماره ترتیب به صورت

$$f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = k\text{-}\min\left[x_۱, x_۲, \ldots, x_n\right], \tag{۱۵۱.۲}$$

است. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $a_۱ \le a_۲ \le \cdots \le a_n$. آن گاه داریم

$$\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) = a_k \wedge \min_{۱\le i<k}(a_i \vee (۱-a_i)),$$

$$\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۰} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) = (۱-a_k) \wedge \min_{k<i\le n}(a_i \vee (۱-a_i))$$

که در آن برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$؛ $\nu_i(x_i)$ با (۱۴۰.۲) تعریف می‌شود. وقتی $a_k \ge ۰/۵$ داریم

$$\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) \ge ۰/۵,$$

$$\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۰} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) = ۱ - a_k.$$

از قضیه ۲۱.۲ نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\xi = ۱\} = ۱ - \sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۰} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) = ۱ - (۱ - a_k) = a_k.$$

وقتی $a_k < ۰/۵$ داریم

$$\sup_{f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)=۱} \min_{۱\le i\le n} \nu_i(x_i) = a_k < ۰/۵.$$

از قضیه ۲۱.۲ نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\xi = 1\} = \sup_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min_{1\le i\le n} \nu_i(x_i) = a_k.$$

بنابراین، $\mathcal{M}\{\xi = 1\}$ همواره برابر a_k است، یعنی kـامین کوچکترین مقدار $a_1, a_2, \ldots, a_n$. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۵۶.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین بولی مستقل هستند که با (۱۴۸.۲) تعریف شده‌اند. پس کمینه

$$\xi = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n \tag{۱۵۲.۲}$$

اولین آماره ترتیب است. نشان دهید

$$\mathcal{M}\{\xi = 1\} = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n. \tag{۱۵۳.۲}$$

تمرین ۵۷.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین بولی مستقل هستند که با (۱۴۸.۲) تعریف شده‌اند. پس بیشینه

$$\xi = \xi_1 \vee \xi_2 \vee \cdots \vee \xi_n \tag{۱۵۴.۲}$$

nـامین آماره ترتیب است. نشان دهید

$$\mathcal{M}\{\xi = 1\} = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n. \tag{۱۵۵.۲}$$

تمرین ۵۸.۲: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین بولی مستقل هستند که با (۱۴۸.۲) تعریف شده‌اند. پس

$$\xi = k\text{-}\max[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \tag{۱۵۶.۲}$$

$(n - k + 1)$ـامین آماره ترتیب است. نشان دهید

$$\mathcal{M}\{\xi = 1\} = k\text{-}\max[a_1, a_2, \ldots, a_n]. \tag{۱۵۷.۲}$$

۸.۲ مقدار مورد انتظار

مقدار مورد انتظار مقدار میانگین متغیر نایقین به مفهوم اندازه نایقین است و بیانگر میزان بزرگی متغیر نایقین است.

تعریف ۱۶.۲ [۸۴] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین است. مقدار مورد انتظار ξ با*

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \ge x\}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \le x\}\mathrm{d}x \tag{۱۵۸.۲}$$

تعریف می‌شود به شرط آن که حداقل یکی از انتگرال‌ها متناهی باشد.

قضیه ۲۳.۲ [۸۴] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است. پس*

$$E[\xi] = \int_{\circ}^{+\infty} (\text{۱} - \Phi(x))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\circ} \Phi(x)\mathrm{d}x. \quad (\text{۱۵۹.۲})$$

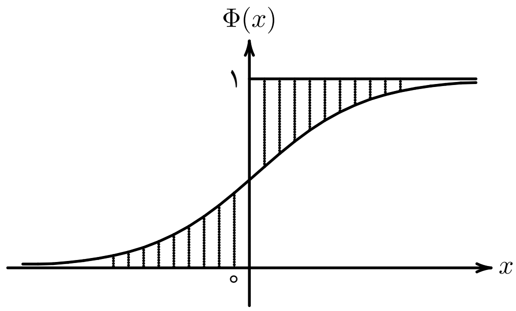
برهان: از قضیه معکوس اندازه نتیجه می‌شود که برای تقریباً همه اعداد x، داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \geq x\} = \text{۱} - \Phi(x), \mathcal{M}\{\xi \leq x\} = \Phi(x).$$

با استفاده از تعریف عملگر مقدار مورد انتظار، داریم

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_{\circ}^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq x\}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\circ} \mathcal{M}\{\xi \leq x\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\circ}^{+\infty} (\text{۱} - \Phi(x))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\circ} \Phi(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

شکل ۱۲.۲ را نگاه کنید. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.



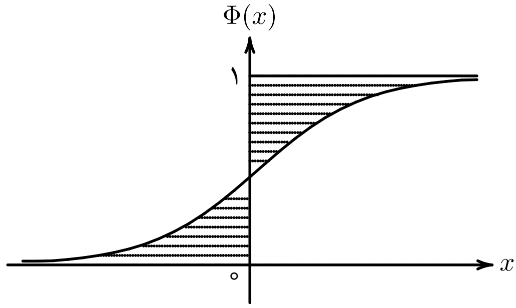
شکل ۱۲.۲: $E[\xi] = \int_{\circ}^{+\infty} (\text{۱} - \Phi(x))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\circ} \Phi(x)\mathrm{d}x$

قضیه ۲۴.۲ [۹۱] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است. پس*

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}\Phi(x). \quad (\text{۱۶۰.۲})$$

برهان: از انتگرال گیری جزء به جزء و قضیه ۲۳.۲ نتیجه می‌شود که مقدار مورد انتظار با

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_{\circ}^{+\infty} (\text{۱} - \Phi(x))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\circ} \Phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\circ}^{+\infty} x\mathrm{d}\Phi(x) + \int_{-\infty}^{\circ} x\mathrm{d}\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}\Phi(x), \end{aligned}$$



شکل ۱۳.۲: $E[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}\Phi(x)=\int_{\circ}^{\text{۱}}\Phi^{-\text{۱}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$

برابر است. شکل ۱۳.۲ را نگاه کنید. قضیه ثابت می‌شود.

تذکر ۶.۲: اگر $\phi(x)$ مشتق توزیع نایقین $\Phi(x)$ باشد، بلافاصله نتیجه می‌گیریم

$$E[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\phi(x)\mathrm{d}x. \qquad (۱۶۱.۲)$$

با این حال، در نظر گرفتن $\phi(x)$ به عنوان تابع چگالی نایقین مناسب‌تر است، زیرا اندازه نایقین خاصیت جمعی ندارد، یعنی در حالت کلی

$$\mathcal{M}\{a\le\xi\le b\}\neq\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x. \qquad (۱۶۲.۲)$$

قضیه ۲۵.۲ [۹۱] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ است. پس*

$$E[\xi]=\int_{\circ}^{\text{۱}}\Phi^{-\text{۱}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha. \qquad (۱۶۳.۲)$$

برهان: با تغییر متغیر $\Phi(x)$ با α و x با $\Phi^{-\text{۱}}(\alpha)$، از تغییر متغیرهای انتگرال و قضیه ۲۴.۲ نتیجه می‌شود که مقدار مورد انتظار برابر با

$$E[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}\Phi(x)=\int_{\circ}^{\text{۱}}\Phi^{-\text{۱}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha,$$

است. شکل ۱۳.۲ را نگاه کنید. قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۵۹.۲: نشان دهید مقدار مورد انتظار متغیر نایقین خطی $\xi\sim\mathcal{L}(a,b)$ با

$$E[\xi]=\frac{a+b}{\text{۲}} \qquad (۱۶۴.۲)$$

برابر است.

تمرین ۶۰.۲: نشان دهید مقدار مورد انتظار متغیر نایقین زیگزاگ $\xi \sim \mathcal{Z}(a,b,c)$ با

$$E[\xi] = \frac{a+2b+c}{4} \tag{۱۶۵.۲}$$

برابر است.

تمرین ۶۱.۲: نشان دهید مقدار مورد انتظار متغیر نایقین نرمال $\xi \sim \mathcal{N}(e,\sigma)$ با

$$E[\xi] = e \tag{۱۶۶.۲}$$

برابر است.

تمرین ۶۲.۲: نشان دهید مقدار مورد انتظار متغیر نایقین لوگ- نرمال $\xi \sim \mathcal{LOGN}(e,\sigma)$ با

$$E[\xi] = \begin{cases} \sigma\sqrt{3}\exp(e)\csc(\sigma\sqrt{3}), & \text{اگر } \sigma < \pi/\sqrt{3} \\ +\infty, & \text{اگر } \sigma \geq \pi/\sqrt{3} \end{cases} \tag{۱۶۷.۲}$$

برابر است. این فرمول ابتدا توسط گین ژانگ فِنگ با استفاده از نرم افزار Maple محاسبه شد و دوباره بعداً توسط کای با استفاده از محاسبات پیچیده ریاضی تحقیق شد.

تمرین ۶۳.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی تجربی

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x < x_1 \\ \alpha_i + \dfrac{(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i}, & \text{اگر } x_i \leq x \leq x_{i+1},\ 1 \leq i < n \\ 1, & \text{اگر } x > x_n \end{cases}$$

است که در آن $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ و $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq 1$. نشان دهید

$$E[\xi] = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1 + \sum_{i=2}^{n-1}\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}}{2}x_i + \left(1 - \frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2}\right)x_n. \tag{۱۶۸.۲}$$

مقدار مورد انتظار تابع از متغیرهای نایقین

قضیه ۲۶.۲ [۱۱۱] *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ یک تابع افزایشی اکید نسبت به $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ و کاهشی اکید نسبت به $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots, \xi_n$ باشد، آنگاه مقدار مورد انتظار*

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \tag{۱۶۹.۲}$$

با

$$E[\xi] = \int_0^1 f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha))\mathrm{d}\alpha \tag{۱۷۰.۲}$$

برابر است.

برهان: چون تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نسبت به $x_1, x_2, \ldots, x_m$ افزایشی اکید بوده و نسبت به $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ کاهشی اکید است، از قضیه ۱۵.۲ نتیجه می‌شود که توزیع نایقینی معکوس ξ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)),$$

است. با استفاده از قضیه ۲۵.۲، فرمول (۱۷۰.۲) نتیجه می‌شود. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۶۴.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ است، و $f(x)$ یک تابع یکنوای اکید (کاهشی یا افزایشی) است. نشان دهید

$$E[f(\xi)] = \int_0^1 f(\Phi^{-1}(\alpha))\mathrm{d}\alpha. \tag{۱۷۱.۲}$$

تمرین ۶۵.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است، و فرض کنید $f(x)$ یک تابع یکنوای اکید (کاهشی یا افزایشی) است. نشان دهید

$$E[f(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}\Phi(x). \tag{۱۷۲.۲}$$

تمرین ۶۶.۲: فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ هستند. نشان دهید

$$E[\xi\eta] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha)\Psi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{۱۷۳.۲}$$

تمرین ۶۷.۲: فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ هستند. نشان دهید

$$E\left[\frac{\xi}{\eta}\right] = \int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\Psi^{-1}(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha. \tag{۱۷۴.۲}$$

تمرین ۶۸.۲: فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ هستند. نشان دهید

$$E\left[\frac{\xi}{\xi+\eta}\right] = \int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\Phi^{-1}(\alpha)+\Psi^{-1}(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha. \tag{۱۷۵.۲}$$

خطی بودن عملگر مقدار مورد انتظار

قضیه ۲۷.۲ [۹۱] *فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مستقل با مقدار مورد انتظار متناهی هستند. پس برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم*

$$E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta]. \tag{۱۷۶.۲}$$

برهان: بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید ξ و η به ترتیب توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ دارند. در غیر این صورت می‌توان پریشیدگی جزیی در آنها ایجاد کرد تا منظم شوند.

گام ۱: ابتدا ثابت می‌کنیم $E[a\xi] = aE[\xi]$. اگر $a = ۰$ آنگاه معادله به وضوح برقرار است. اگر $a > ۰$، آنگاه توزیع نایقینی معکوس $a\xi$ به صورت

$$\Upsilon^{-۱}(\alpha) = a\Phi^{-۱}(\alpha),$$

است. از قضیه ۲.۲۵ نتیجه می‌شود که

$$E[a\xi] = \int_۰^۱ a\Phi^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha = a\int_۰^۱ \Phi^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha = aE[\xi].$$

اگر $a < ۰$، آنگاه توزیع نایقینی معکوس $a\xi$ به صورت

$$\Upsilon^{-۱}(\alpha) = a\Phi^{-۱}(۱-\alpha),$$

است. از قضیه ۲.۲۵ نتیجه می‌شود که

$$E[a\xi] = \int_۰^۱ a\Phi^{-۱}(۱-\alpha)\mathrm{d}\alpha = a\int_۰^۱ \Phi^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha = aE[\xi].$$

پس همواره رابطه $E[a\xi] = aE[\xi]$ برقرار است.

گام ۲: ثابت می‌کنیم $E[\xi+\eta] = E[\xi] + E[\eta]$. توزیع نایقین معکوس $\xi + \eta$ به صورت

$$\Upsilon^{-۱}(\alpha) = \Phi^{-۱}(\alpha) + \Psi^{-۱}(\alpha),$$

است. از قضیه ۲.۲۵ نتیجه می‌شود که

$$E[\xi+\eta] = \int_۰^۱ \Upsilon^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_۰^۱ \Phi^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_۰^۱ \Psi^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha = E[\xi] + E[\eta].$$

گام ۳: نهایتا برای هر دو عدد حقیقی a و b، از گام‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود

$$E[a\xi + b\eta] = E[a\xi] + E[b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta].$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

مثال ۲.۱۷: در حالت کلی، اگر شرط استقلال را حذف کنیم، عملگر مقدار مورد انتظار الزاماً خطی نیست. به عنوان مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳\}$ با مجموعه توانی است و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = ۰/۶$، $\mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۳$ و $\mathcal{M}\{\gamma_۳\} = ۰/۲$. دو متغیر نایقین زیر را تعریف کنید.

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} ۱, & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ ۰, & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ ۲, & \gamma = \gamma_۳ \text{ اگر } \end{cases} \qquad \eta(\gamma) = \begin{cases} ۰, & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ ۲, & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ ۳, & \gamma = \gamma_۳ \text{ اگر } \end{cases}$$

توجه کنید که ξ و η مستقل نیستند و مجموع آنها

$$(\xi+\eta)(\gamma)=\begin{cases} ۱, & \gamma=\gamma_۱ \quad \text{اگر} \\ ۲, & \gamma=\gamma_۲ \quad \text{اگر} \\ ۵, & \gamma=\gamma_۳ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

است. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $E[\xi]=۰/۹$، $E[\eta]=۱$ و $E[\xi+\eta]=۲$. بنابراین داریم

$$E[\xi+\eta]>E[\xi]+E[\eta].$$

اگر متغیرهای نایقین به صورت زیر تعریف شوند

$$\xi(\gamma)=\begin{cases} ۰, & \gamma=\gamma_۱ \quad \text{اگر} \\ ۱, & \gamma=\gamma_۲ \quad \text{اگر} \\ ۲, & \gamma=\gamma_۳ \quad \text{اگر} \end{cases} \qquad \eta(\gamma)=\begin{cases} ۰, & \gamma=\gamma_۱ \quad \text{اگر} \\ ۳, & \gamma=\gamma_۲ \quad \text{اگر} \\ ۱, & \gamma=\gamma_۳ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

آنگاه

$$(\xi+\eta)(\gamma)=\begin{cases} ۰, & \gamma=\gamma_۱ \quad \text{اگر} \\ ۴, & \gamma=\gamma_۲ \quad \text{اگر} \\ ۳, & \gamma=\gamma_۳ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $E[\xi]=۰/۶$، $E[\eta]=۱$ و $E[\xi+\eta]=۱/۵$. پس داریم

$$E[\xi+\eta]<E[\xi]+E[\eta].$$

بنابراین نمی‌توان شرط استقلال را حذف کرد.

تابع‌های همنوا از متغیرهای نایقین

دو تابع حقیقی مقدار f و g را *همنوا* گویند اگر برای هر x و y رابطه

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geq ۰, \qquad (۱۷۷.۲)$$

برقرار باشد. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که (الف) توابع افزایشی یکنوا، همنوا هستند؛ (ب) توابع کاهشی یکنوا، همنوا هستند.

قضیه ۲۸.۲ [۱۷۶] *فرض کنید f و g توابع همنوا هستند. پس برای هر متغیر نایقین ξ داریم*

$$E[f(\xi)+g(\xi)]=E[f(\xi)]+E[g(\xi)]. \qquad (۱۷۸.۲)$$

برهان: بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $f(\xi)$ و $g(\xi)$ به ترتیب توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ دارند. در غیر این صورت، می‌توانیم پریشیدگی کوچکی روی توزیع‌ها به وجود آوریم تا منظم شوند. چون f و g توابع همنوا هستند حداقل یکی از دو رابطه زیر درست است

$$\{f(\xi)\leq\Phi^{-۱}(\alpha)\}\subset\{g(\xi)\leq\Psi^{-۱}(\alpha)\},$$

$$\{f(\xi) \le \Phi^{-1}(\alpha)\} \supset \{g(\xi) \le \Psi^{-1}(\alpha)\}.$$

از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f(\xi)+g(\xi) \le \Phi^{-1}(\alpha)+\Psi^{-1}(\alpha)\} & \\ &\ge \mathcal{M}\{(f(\xi) \le \Phi^{-1}(\alpha)) \cap (g(\xi) \le \Psi^{-1}(\alpha))\} \\ &= \mathcal{M}\{f(\xi) \le \Phi^{-1}(\alpha)\} \wedge \mathcal{M}\{g(\xi) \le \Psi^{-1}(\alpha)\} \\ &= \alpha \wedge \alpha = \alpha.\end{aligned}$$

هم چنین داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f(\xi)+g(\xi) \le \Phi^{-1}(\alpha)+\Psi^{-1}(\alpha)\} & \\ &\le \mathcal{M}\{(f(\xi) \le \Phi^{-1}(\alpha)) \cup (g(\xi) \le \Psi^{-1}(\alpha))\} \\ &= \mathcal{M}\{f(\xi) \le \Phi^{-1}(\alpha)\} \vee \mathcal{M}\{g(\xi) \le \Psi^{-1}(\alpha)\} \\ &= \alpha \vee \alpha = \alpha.\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{f(\xi)+g(\xi) \le \Phi^{-1}(\alpha)+\Psi^{-1}(\alpha)\} = \alpha$$

برای هر α برقرار است. یعنی $\Phi^{-1}(\alpha)+\Psi^{-1}(\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس $f(\xi)+g(\xi)$ است. با استفاده از قضیه ۲۵.۲، داریم

$$\begin{aligned}E[f(\xi)+g(\xi)] &= \int_0^1 (\Phi^{-1}(\alpha)+\Psi^{-1}(\alpha))\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_0^1 \Psi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &= E[f(\xi)] + E[g(\xi)].\end{aligned}$$

به این ترتیب حکم برقرار است.

تمرین ۶۹.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین مثبت است. نشان دهید $\ln x$ و $\exp(x)$ روی $(0, +\infty)$ تابع‌های همنوا هستند و

$$E[\ln\xi + \exp(\xi)] = E[\ln\xi] + E[\exp(\xi)]. \tag{۱۷۹.۲}$$

تمرین ۷۰.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین مثبت است. نشان دهید $x, x^2, \ldots, x^n$ تابع‌های همنوا روی $[0, +\infty)$ هستند و

$$E[\xi + \xi^2 + \cdots + \xi^n] = E[\xi] + E[\xi^2] + \cdots + E[\xi^n]. \tag{۱۸۰.۲}$$

قدرمطلق یک متغیر نایقین

فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است. آنگاه مقدار مورد انتظار $|\xi|$ به صورت

$$\begin{aligned}E[|\xi|] &= \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{|\xi| \geq x\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi \geq x) \cup (\xi \leq -x)\}\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{۰}^{+\infty} (\mathcal{M}\{\xi \geq x\} + \mathcal{M}\{\xi \leq -x\})\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi(x) + \Phi(-x))\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

است. پس قرارداد زیر را داریم.

قرارداد ۱.۲ [۱۰۲] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است. مقدار مورد انتظار $|\xi|$ به صورت*

$$E[|\xi|] = \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi(x) + \Phi(-x))\mathrm{d}x, \tag{۱۸۱.۲}$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۲۹.۲ [۱۰۲] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است. پس مقدار مورد انتظار $|\xi|$ به صورت*

$$E[|\xi|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\mathrm{d}\Phi(x), \tag{۱۸۲.۲}$$

است.

برهان: این قضیه بر قرارداد ۱.۲ استوار است. تغییر متغیرها و انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}E[|\xi|] &= \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi(x) + \Phi(-x))\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} x\mathrm{d}\Phi(x) - \int_{۰}^{+\infty} x\mathrm{d}\Phi(-x) \\ &= \int_{۰}^{+\infty} |x|\mathrm{d}\Phi(x) + \int_{-\infty}^{۰} |x|\mathrm{d}\Phi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\mathrm{d}\Phi(x).\end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت شد.

قضیه ۳۰.۲ [۱۰۲] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ است. پس مقدار مورد انتظار $|\xi|$ به صورت*

$$E[|\xi|] = \int_0^1 |\Phi^{-1}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha, \tag{۱۸۳.۲}$$

است.

برهان: با جایگذاری $\Phi(x)$ با α و x با $\Phi^{-1}(\alpha)$، از تغییر متغیرها و قضیه ۲۹.۲ نتیجه می‌شود که مقدار مورد انتظار به صورت

$$E[|\xi|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\mathrm{d}\Phi(x) = \int_0^1 |\Phi^{-1}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha,$$

است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۷۱.۲: فرض کنید ξ متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(a,b)$ است. نشان دهید مقدار مورد انتظار $|\xi|$ به صورت

$$E[|\xi|] = \begin{cases} \dfrac{|a+b|}{2}, & 0 \notin [a,b] \quad \text{اگر} \\ \dfrac{a^2+b^2}{2(b-a)}, & 0 \in [a,b] \quad \text{اگر} \end{cases} \tag{۱۸۴.۲}$$

است.

برخی نامساوی ها

قضیه ۳۱.۲ [۸۴] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین است و f را یک تابع زوج نامنفی فرض کنید. اگر f روی $(-\infty, 0]$ کاهشی و روی $[0,\infty)$ افزایشی باشد، پس برای هر عدد معلوم $t > 0$ داریم*

$$\mathcal{M}\{|\xi| \ge t\} \le \frac{E[f(\xi)]}{f(t)}. \tag{۱۸۵.۲}$$

برهان: واضح است که $\mathcal{M}\{|\xi| \ge f^{-1}(r)\}$ یک تابع کاهشی یکنوا از r روی $[0,\infty)$ است. از نامنفی بودن $f(\xi)$ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} E[f(\xi)] &= \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{f(\xi) \ge x\}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{|\xi| \ge f^{-1}(x)\}\mathrm{d}x \\ &\ge \int_0^{f(t)} \mathcal{M}\{|\xi| \ge f^{-1}(x)\}\mathrm{d}x \ge \int_0^{f(t)} \mathcal{M}\{|\xi| \ge f^{-1}(f(t))\}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{f(t)} \mathcal{M}\{|\xi| \ge t\}\mathrm{d}x = f(t) \cdot \mathcal{M}\{|\xi| \ge t\} \end{aligned}$$

که برقراری نامساوی را ثابت می‌کند.

قضیه ۳۲.۲ ([۸۴]، *نامساوی مارکف) فرض کنید ξ یک متغیر نایقین است. برای هر عدد معلوم* $t > 0$ *و* $p > 0$*، داریم*

$$\mathcal{M}\{|\xi| \geq t\} \leq \frac{E[|\xi|^p]}{t^p}. \qquad (۱۸۶.۲)$$

برهان: این قضیه یک حالت خاص از قضیه ۳۱.۲ است که در آن $f(x) = |x|^p$.

مثال ۱۸.۲: برای هر عدد حقیقی معلوم t، متغیر نایقین را به صورت

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{با اندازه نایقین } ۱/۲ \\ t & \text{با اندازه نایقین } ۱/۲ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. پس $E[\xi^p] = t^p/۲$ و $\mathcal{M}\{\xi \geq t\} = ۱/۲ = E[\xi^p]/t^p$.

قضیه ۳۳.۲ ([۸۴]، *نامساوی هولدر) فرض کنید* p *و* q *اعداد مثبت با* $۱/p + ۱/q = ۱$ *هستند و فرض کنید* ξ *و* η *متغیرهای نایقین مستقل هستند. پس*

$$E[|\xi\eta|] \leq \sqrt[p]{E[|\xi|^p]}\,\sqrt[q]{E[|\eta|^q]}. \qquad (۱۸۷.۲)$$

برهان: اگر یکی از ξ و η تقریباً قطعی صفر باشد؛ حکم بدیهی است. حال فرض کنید $E[|\xi|^p] > 0$ و $E[|\eta|^q] > 0$. به سادگی می‌توان ثابت کرد که تابع $f(x,y) = \sqrt[p]{x}\sqrt[q]{y}$ روی $\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ مقعر است. پس برای هر نقطه (x_0, y_0) با $x_0 > 0$ و $y_0 > 0$، اعداد حقیقی a و b موجودند طوری که

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq a(x-x_0) + b(y-y_0), \quad \forall x \geq 0, y \geq 0.$$

با فرض $x_0 = E[|\xi|^p]$ و $y_0 = E[|\eta|^q]$، $x = |\xi|^p$ و $y = |\eta|^q$، داریم

$$f(|\xi|^p, |\eta|^q) - f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^q]) \leq a(|\xi|^p - E[|\xi|^p]) + b(|\eta|^q - E[|\eta|^q]).$$

با محاسبه مقدار مورد انتظار هر دو طرف داریم

$$E[f(|\xi|^p, |\eta|^q)] \leq f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^q]).$$

به این ترتیب نامساوی (۱۸۷.۲) ثابت می‌شود.

قضیه ۳۴.۲ ([۸۴]، *نامساوی مینکوفسکی) فرض کنید* p *یک عدد حقیقی با* $p \geq ۱$ *است و* ξ *و* η *متغیرهای نایقین مستقل هستند. پس*

$$\sqrt[p]{E[|\xi+\eta|^p]} \leq \sqrt[p]{E[|\xi|^p]} + \sqrt[p]{E[|\eta|^p]}. \qquad (۱۸۸.۲)$$

برهان: اگر یکی از ξ و η تقریباً قطعی صفر باشد؛ حکم بدیهی است. حال فرض کنید $E[|\xi|^p] > 0$ و $E[|\eta|^q] > 0$. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که تابع $f(x,y) = (\sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y})^p$ روی $\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ مقعر است. پس برای هر (x_0, y_0) با $x_0 > 0$ و $y_0 > 0$ ، اعداد حقیقی a و b موجودند طوری که

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq a(x-x_0) + b(y-y_0), \quad \forall x \geq 0, y \geq 0.$$

با قرار دادن $x_\circ = E[|\xi|^p]$، $y_\circ = E[|\eta|^p]$، $x = |\xi|^p$ و $y = |\eta|^p$، داریم

$$f(|\xi|^p, |\eta|^p) - f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^p]) \leq a(|\xi|^p - E[|\xi|^p]) + b(|\eta|^p - E[|\eta|^p]).$$

با محاسبه مقدار مورد انتظار هر دو طرف، داریم

$$E[f(|\xi|^p, |\eta|^p)] \leq f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^p]).$$

به این ترتیب برفراری نامساوی (۱۸۸.۲) ثابت می‌شود.

قضیه ۳۵.۲ ([۸۴]، *نامساوی ینسن) فرض کنید ξ یک متغیر نایقین و f یک تابع محدب است. پس*

$$f(E[\xi]) \leq E[f(\xi)]. \tag{۱۸۹.۲}$$

مخصوصا وقتی $f(x) = |x|^p$ و $p \geq 1$، داریم $|E[\xi]|^p \leq E[|\xi|^p]$.

برهان: چون تابع f محدب است، برای هر y، عددی مانند k موجود است طوری که

$$f(x) - f(y) \geq k \cdot (x - y).$$

با جایگزینی x با ξ و y با $E[\xi]$، داریم

$$f(\xi) - f(E[\xi]) \geq k \cdot (\xi - E[\xi]).$$

با محاسبه مقدار مورد انتظار دو طرف نامساوی داریم

$$E[f(\xi)] - f(E[\xi]) \geq k \cdot (E[\xi] - E[\xi]) = 0$$

که برقراری نامساوی ینسن را ثابت می‌کند.

تمرین ۷۲.۲: [۲۱۶] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل هستند، و f یک تابع محدب است. نشان دهید

$$f(E[\xi_1], E[\xi_2], \ldots, E[\xi_n]) \leq E[f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)]. \tag{۱۹۰.۲}$$

۹.۲ واریانس

واریانس یک متغیر نایقین، درجه پراکندگی توزیع در اطراف مقدار مورد انتظار آن را نشان می‌دهد. مقدار کوچک واریانس نشان می‌دهد که متغیر نایقین بیشتر در اطراف مقدار مورد انتظار متمرکز شده است؛ و مقدار بزرگتر واریانس بیانگر پراکندگی گسترده تر متغیر نایقین از اطراف مقدار مورد انتظار است.

تعریف ۱۷.۲ [۸۴] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با مقدار مورد انتظار متناهی e است. واریانس ξ به صورت*

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^2], \tag{۱۹۱.۲}$$

تعریف می‌شود.
این تعریف می‌گوید که واریانس همان مقدار مورد انتظار $(\xi - e)^۲$ است. چون $(\xi - e)^۲$ یک متغیر نایقین نامنفی است، هم چنین داریم

$$V[\xi] = \int_۰^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \geq x\}\mathrm{d}x. \qquad (۱۹۲.۲)$$

قضیه ۳۶.۲ [۸۴] *اگر ξ یک متغیر نایقین با مقدار مورد انتظار متناهی باشد و a و b اعداد حقیقی باشند، آنگاه*

$$V[a\xi + b] = a^۲ V[\xi]. \qquad (۱۹۳.۲)$$

برهان: فرض کنید e مقدار مورد انتظار ξ است. پس $a\xi + b$ مقدار مورد انتظار $ae + b$ دارد. از تعریف واریانس نتیجه می‌شود که

$$V[a\xi + b] = E\left[(a\xi + b - (ae + b))^۲\right] = a^۲ E[(\xi - e)^۲] = a^۲ V[\xi].$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۳۷.۲ [۸۴] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با مقدار مورد انتظار e است. پس $V[\xi] = ۰$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}\{\xi = e\} = ۱$. یعنی متغیر نایقین ξ مقدار ثابت e است.*

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $V[\xi] = ۰$. از معادله (۱۹۲.۲) نتیجه می‌شود که

$$\int_۰^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \geq x\}\mathrm{d}x = ۰$$

که برای هر $x > ۰$ نتیجه می‌دهد $\mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \geq x\} = ۰$. پس داریم

$$\mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ = ۰\} = ۱.$$

یعنی $\mathcal{M}\{\xi = e\} = ۱$. برعکس، فرض کنید $\mathcal{M}\{\xi = e\} = ۱$. پس برای هر $x > ۰$ داریم $\mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ = ۰\} = ۱$ و $\mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \geq x\} = ۰$. پس

$$V[\xi] = \int_۰^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \geq x\}\mathrm{d}x = ۰.$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۳۸.۲ [۱۸۷] *فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین هستند که واریانس آنها موجود است. پس*

$$\sqrt{V[\xi + \eta]} \leq \sqrt{V[\xi]} + \sqrt{V[\eta]}. \qquad (۱۹۴.۲)$$

برهان: این قضیه یک حالت خاص از قضیه ۳۴.۲ است که در آن $p = ۲$ و متغیرهای نایقین ξ و η به ترتیب با $\xi - E[\xi]$ و $\eta - E[\eta]$ جایگزین می‌شوند.

قضیه ۳۹.۲ ([۸۴]، *نامساوی چبیشف) فرض کنید ξ یک متغیر نایقین است که واریانس آن موجود است. پس برای هر مقدار معلوم $t > ۰$ داریم*

$$\mathcal{M}\left\{|\xi - E[\xi]| \geq t\right\} \leq \frac{V[\xi]}{t^۲}. \qquad (۱۹۵.۲)$$

برهان: این قضیه یک حالت خاص از قضیه ۳۱.۲ است که در آن متغیر نایقین ξ با $\xi - E[\xi]$ جایگزین می‌شود و $f(x) = x^۲$.

مثال ۱۹.۲: برای هر عدد مثبت t، متغیر نایقین زیر را تعریف کنید

$$\xi = \begin{cases} -t & \text{با اندازه نایقین } ۱/۲ \\ t & \text{با اندازه نایقین } ۱/۲ \end{cases}$$

در این صورت $V[\xi] = t^۲$ و $\mathcal{M}\{|\xi - E[\xi]| \geq t\} = ۱ = V[\xi]/t^۲$.

چگونه واریانس را از توزیع نایقینی به دست آوریم؟

فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با مقدار مورد انتظار e است. اگر فقط از توزیع نایقینی این متغیر اطلاع داشته باشیم، آنگاه واریانس آن به صورت

$$\begin{aligned} V[\xi] &= \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \geq x\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi \geq e + \sqrt{x}) \cup (\xi \leq e - \sqrt{x})\}\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{۰}^{+\infty} (\mathcal{M}\{\xi \geq e + \sqrt{x}\} + \mathcal{M}\{\xi \leq e - \sqrt{x}\})\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi(e + \sqrt{x}) + \Phi(e - \sqrt{x}))\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

است. پس قرارداد زیر را داریم.

قرارداد ۲.۲ [۹۱] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ و مقدار مورد انتظار e است. پس*

$$V[\xi] = \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi(e + \sqrt{x}) + \Phi(e - \sqrt{x}))\mathrm{d}x. \qquad (۱۹۶.۲)$$

قضیه ۴۰.۲ [۱۰۲] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ و مقدار مورد انتظار e است. پس*

$$V[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - e)^۲ \mathrm{d}\Phi(x). \qquad (۱۹۷.۲)$$

برهان: این قضیه بر قرارداد ۲.۲ استوار است که بیان می‌کند واریانس ξ به صورت

$$V[\xi] = \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi(e + \sqrt{y}))\mathrm{d}y + \int_{۰}^{+\infty} \Phi(e - \sqrt{y})\mathrm{d}y,$$

است. با جایگذاری $e+\sqrt{y}$ با x و y با $(x-e)^2$، تغییر متغیرها و انتگرال گیری جر به جز نتیجه می‌شود

$$\int_0^{+\infty}(1-\Phi(e+\sqrt{y}))\mathrm{d}y=\int_e^{+\infty}(1-\Phi(x))\mathrm{d}(x-e)^2=\int_e^{+\infty}(x-e)^2\mathrm{d}\Phi(x).$$

به طور مشابه، جایگذاری $e-\sqrt{y}$ با x و y با $(x-e)^2$ داریم

$$\int_0^{+\infty}\Phi(e-\sqrt{y})\mathrm{d}y=\int_e^{-\infty}\Phi(x)\mathrm{d}(x-e)^2=\int_{-\infty}^{e}(x-e)^2\mathrm{d}\Phi(x).$$

نتیجه می‌شود که واریانس به صورت

$$V[\xi]=\int_e^{+\infty}(x-e)^2\mathrm{d}\Phi(x)+\int_{-\infty}^{e}(x-e)^2\mathrm{d}\Phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-e)^2\mathrm{d}\Phi(x),$$

است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۴۱.۲ [۱۸۷] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ و مقدار مورد انتظار متناهی e است. پس*

$$V[\xi]=\int_0^1(\Phi^{-1}(\alpha)-e)^2\mathrm{d}\alpha. \tag{۱۹۸.۲}$$

برهان: با جایگذاری $\Phi(x)$ با α و x با $\Phi^{-1}(\alpha)$، از تغییر متغیرها انتگرال و قضیه ۴۰.۲ نتیجه می‌شود که واریانس به صورت

$$V[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-e)^2\mathrm{d}\Phi(x)=\int_0^1(\Phi^{-1}(\alpha)-e)^2\mathrm{d}\alpha,$$

است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۷۳.۲: نشان دهید واریانس متغیر نایقین خطی $\xi\sim\mathcal{L}(a,b)$ به صورت

$$V[\xi]=\frac{(b-a)^2}{12}, \tag{۱۹۹.۲}$$

است.

تمرین ۷۴.۲: نشان دهید واریانس متغیر نایقین نرمال $\xi\sim\mathcal{N}(e,\sigma)$ به صورت

$$V[\xi]=\sigma^2, \tag{۲۰۰.۲}$$

است.

تمرین ۷۵.۲: فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ هستند. فرض کنید دو عدد حقیقی a و b چنان موجودند که برای هر $\alpha\in(0,1)$ داریم

$$\Phi^{-1}(\alpha)=a\Psi^{-1}(\alpha)+b \tag{۲۰۱.۲}$$

نشان دهید به مفهوم قرارداد ۲.۲ رابطه

$$\sqrt{V[\xi+\eta]} = \sqrt{V[\xi]} + \sqrt{V[\eta]} \tag{۲۰۲.۲}$$

برقرار است.

تذکر ۷.۲: اگر ξ و η متغیرهای نایقین خطی باشند، آنگاه شرط (۲۰۱.۲) برقرار است. اگر متغیرهای نایقین نرمال باشند آنگاه نیز شرط (۲۰۱.۲) برقرار است.

۱۰.۲ گشتاور

تعریف ۱۸.۲ [۸۴] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین و k یک عدد صحیح مثبت است. $E[\xi^k]$ را kـ امین گشتاور ξ گویند.*

قضیه ۴۲.۲ [۱۰۲] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است و k یک عدد فرد است. پس kـ امین گشتاور ξ به صورت*

$$E[\xi^k] = \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi(\sqrt[k]{x}))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{۰} \Phi(\sqrt[k]{x})\mathrm{d}x, \tag{۲۰۳.۲}$$

است.

برهان: چون k یک عدد فرد است، از تعریف عملگر مقدار مورد انتظار نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} E[\xi^k] &= \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi^k \geq x\}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{۰} \mathcal{M}\{\xi^k \leq x\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq \sqrt[k]{x}\}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{۰} \mathcal{M}\{\xi \leq \sqrt[k]{x}\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi(\sqrt[k]{x}))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{۰} \Phi(\sqrt[k]{x})\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

وقتی k یک عدد زوج باشد، kـ امین گشتاور را می‌توان به صورت یکتا با استفاده از توزیع نایقینی Φ مشخص کرد. در این حالت داریم

$$\begin{aligned} E[\xi^k] &= \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi^k \geq x\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi \geq \sqrt[k]{x}) \cup (\xi \leq -\sqrt[k]{x})\}\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{۰}^{+\infty} (\mathcal{M}\{\xi \geq \sqrt[k]{x}\} + \mathcal{M}\{\xi \leq -\sqrt[k]{x}\})\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi(\sqrt[k]{x}) + \Phi(-\sqrt[k]{x}))\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

بنابراین، برای عدد زوج k، قرارداد زیر را داریم.

قرارداد ۳.۲ [۱۰۲] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است، و k یک عدد زوج است. پس kـ امین گشتاور ξ به صورت*

$$E[\xi^k] = \int_{0}^{+\infty} (1 - \Phi(\sqrt[k]{x}) + \Phi(-\sqrt[k]{x}))\mathrm{d}x, \tag{۲۰۴.۲}$$

است.

قضیه ۴۳.۲ [۱۰۲] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ و k یک عدد مثبت است. پس kـ امین گشتاور ξ به صورت*

$$E[\xi^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}\Phi(x), \tag{۲۰۵.۲}$$

است.

برهان: وقتی k فرد است، قضیه ۴۲.۲ می‌گوید که kـ امین گشتاور به صورت

$$E[\xi^k] = \int_{0}^{+\infty} (1 - \Phi(\sqrt[k]{y}))\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} \Phi(\sqrt[k]{y})\mathrm{d}y,$$

است. با جایگذاری $\sqrt[k]{y}$ با x و y با x^k، تغییر متغیرها و انتگرال گیری جزء به جزء نشان می‌دهد که

$$\int_{0}^{+\infty} (1 - \Phi(\sqrt[k]{y}))\mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty} (1 - \Phi(x))\mathrm{d}x^k = \int_{0}^{+\infty} x^k \mathrm{d}\Phi(x)$$

و

$$\int_{-\infty}^{0} \Phi(\sqrt[k]{y})\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{0} \Phi(x)\mathrm{d}x^k = -\int_{-\infty}^{0} x^k \mathrm{d}\Phi(x).$$

بنابر این داریم

$$E[\xi^k] = \int_{0}^{+\infty} x^k \mathrm{d}\Phi(x) + \int_{-\infty}^{0} x^k \mathrm{d}\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}\Phi(x).$$

وقتی k زوج باشد، قضیه بر قرارداد ۳.۲ استوار است که می‌گوید kـ امین گشتاور به صورت

$$E[\xi^k] = \int_{0}^{+\infty} (1 - \Phi(\sqrt[k]{y}) + \Phi(-\sqrt[k]{y}))\mathrm{d}y,$$

است. با جایگذاری $\sqrt[k]{y}$ با x و y با x^k، تغییر متغیرها و انتگرال گیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد

$$\int_{0}^{+\infty} (1 - \Phi(\sqrt[k]{y}))\mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty} (1 - \Phi(x))\mathrm{d}x^k = \int_{0}^{+\infty} x^k \mathrm{d}\Phi(x).$$

به طور مشابه، جایگذاری $-\sqrt[k]{y}$ با xو y با x^k، داریم

$$\int_{0}^{+\infty} \Phi(-\sqrt[k]{y})\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{0} \Phi(x)\mathrm{d}x^k = \int_{-\infty}^{0} x^k \mathrm{d}\Phi(x).$$

پس kـامین گشتاور به صورت

$$E[\xi^k] = \int_0^{+\infty} x^k \mathrm{d}\Phi(x) + \int_{-\infty}^0 x^k \mathrm{d}\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}\Phi(x),$$

است. پس قضیه برای هر عدد صحیح مثبت برقرار است.

قضیه ۴۴.۲ [۱۴۹] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ و k یک عدد مثبت است. پس kـ اکین گشتاور ξ به صورت*

$$E[\xi^k] = \int_0^1 (\Phi^{-1}(\alpha))^k \mathrm{d}\alpha, \tag{۲۰۶.۲}$$

است.

برهان: با جایگذاری $\Phi(x)$ با α و x با $\Phi^{-1}(\alpha)$، از تغییر متغیرهای انتگرال و قضیه ۴۳.۲ نتیجه می‌شود که kـامین گشتاور به صورت

$$E[\xi^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}\Phi(x) = \int_0^1 (\Phi^{-1}(\alpha))^k \mathrm{d}\alpha,$$

است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۷۶.۲: نشان دهید گشتاور مرتبه دوم متغیر نایقین خطی $\xi \sim \mathcal{L}(a,b)$ به صورت

$$E[\xi^2] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}, \tag{۲۰۷.۲}$$

است.

تمرین ۷۷.۲: نشان دهید گشتاور مرتبه دوم متغیر نایقین نرمال $\xi \sim \mathcal{N}(e,\sigma)$ به صورت

$$E[\xi^2] = e^2 + \sigma^2, \tag{۲۰۸.۲}$$

است.

۱۱.۲ فاصله

تعریف ۱۹.۲ [۸۴] *فاصله بین دو متغیر نایقین ξ و η به صورت*

$$d(\xi,\eta) = E[|\xi - \eta|], \tag{۲۰۹.۲}$$

تعریف می‌شود.

به عبارت دیگر، فاصله بین دو متغیر نایقین ξ و η همان مقدار مورد انتظار $|\xi - \eta|$ است. چون $|\xi - \eta|$ یک متغیر نایقین نامنفی است، همواره داریم

$$d(\xi,\eta) = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{|\xi - \eta| \geq x\} \mathrm{d}x. \tag{۲۱۰.۲}$$

قضیه ۴۵.۲ [۸۴] *فرض کنید ξ, η, τ متغیرهای نایقین هستند و فرض کنید $d(\cdot, \cdot)$ فاصله را نشان دهد. پس داریم*
(الف) (نامنفی بودن) $d(\xi, \eta) \geq 0$؛
(ب) (تشخیص) $d(\xi, \eta) = 0$ اگر و فقط اگر $\xi = \eta$؛
(ج) (تقارن) $d(\xi, \eta) = d(\eta, \xi)$؛
(د) (نامساوی مثلث) $d(\xi, \eta) \leq 2d(\xi, \tau) + 2d(\eta, \tau)$.

برهان: قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شوند. حال قسمت (د) را ثابت می‌کنیم. از اصل موضوعه زیرجمعی بودن نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} d(\xi, \eta) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{|\xi - \eta| \geq x\} \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{|\xi - \tau| + |\tau - \eta| \geq x\} \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{(|\xi - \tau| \geq x/2) \cup (|\tau - \eta| \geq x/2)\} \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^{+\infty} (\mathcal{M}\{|\xi - \tau| \geq x/2\} + \mathcal{M}\{|\tau - \eta| \geq x/2\}) \,\mathrm{d}x \\ &= 2E[|\xi - \tau|] + 2E[|\tau - \eta|] = 2d(\xi, \tau) + 2d(\tau, \eta). \end{aligned}$$

مثال ۲۰.۲: فرض کنید $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. برای هر زیرمجموعه Λ (به جز $\emptyset$ و Γ) تعریف کنید $\mathcal{M}\{\emptyset\} = 0$، $\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$ و $\mathcal{M}\{\Lambda\} = 1/2$. متغیرهای نایقین ξ، η و τ را به صورت

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر} \\ 1, & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر} \\ 0, & \gamma = \gamma_3 \text{ اگر} \end{cases} \qquad \eta(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر} \\ -1, & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر} \\ -1, & \gamma = \gamma_3 \text{ اگر} \end{cases} \qquad \tau(\gamma) \equiv 0,$$

در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $d(\xi, \tau) = d(\tau, \eta) = 0/5$ و $d(\xi, \eta) = 1/5$. پس

$$d(\xi, \eta) = 1/5(d(\xi, \tau) + d(\tau, \eta)).$$

یک حدس این است که برای متغیرهای نایقین دلخواه ξ، η و τ رابطه

$$d(\xi, \eta) \leq 1/5(d(\xi, \tau) + d(\tau, \eta))$$

برقرار است. این هنوز یک مساله باز است.

قضیه ۴۶.۲ [۱۰۲] *فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی Φ و Ψ هستند. پس فاصله بین ξ و η به صورت*

$$d(\xi, \eta) = \int_0^{+\infty} (1 - \Upsilon(x) + \Upsilon(-x))\mathrm{d}x \qquad (۲۱۱.۲)$$

است که در آن $\Upsilon(x)$ توزیع نایقینی $\xi - \eta$ است و

$$\Upsilon(x) = \sup_{y \in \Re} \Phi(x + y) \wedge (1 - \Psi(y)). \qquad (۲۱۲.۲)$$

برهان: معادله (۲۱۱.۲) از $d(\xi,\eta)=E[|\xi-\eta|]$ و قرارداد ۱.۲ بلافاصله نتیجه می‌شود.

قضیه ۴۷.۲ [۱۰۲] *فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی Φ و Ψ هستند. پس فاصله بین ξ و η به صورت*

$$d(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\mathrm{d}\Upsilon(x) \qquad (۲۱۳.۲)$$

است که در آن $\Upsilon(x)$ توزیع نایقینی $\xi-\eta$ است که با (۲۱۲.۲) *مشخص می‌شود.*

برهان: معادله (۲۱۳.۲) از $d(\xi,\eta)=E[|\xi-\eta|]$ و قضیه ۲۹.۲ بلافاصله نتیجه می‌شود.

تمرین ۷۸.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است و فرض کنید c یک مقدار ثابت است. نشان دهید فاصله ξ و c به صورت

$$d(\xi,c)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-c|\mathrm{d}\Phi(x), \qquad (۲۱۴.۲)$$

است.

قضیه ۴۸.۲ [۱۰۲] *فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ هستند. پس فاصله بین ξ و η به صورت*

$$d(\xi,\eta)=\int_{۰}^{۱}|\Upsilon^{-۱}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha \qquad (۲۱۵.۲)$$

است که در آن $\Upsilon^{-۱}(\alpha)$، توزیع نایقینی معکوس $\xi-\eta$ است و

$$\Upsilon^{-۱}(\alpha)=\Phi^{-۱}(\alpha)-\Psi^{-۱}(۱-\alpha). \qquad (۲۱۶.۲)$$

برهان: معادله (۲۱۵.۲) از $d(\xi,\eta)=E[|\xi-\eta|]$ و قضیه ۳۰.۲ بلافاصله نتیجه می‌شود.

تمرین ۷۹.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ است و c یک مقدار ثابت است. نشان دهید فاصله بین ξ و c به صورت

$$d(\xi,c)=\int_{۰}^{۱}|\Phi^{-۱}(\alpha)-c|\mathrm{d}\alpha, \qquad (۲۱۷.۲)$$

است.

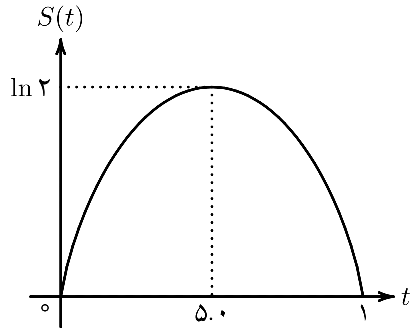
۱۲.۲ آنتروپی

در این بحث مفهوم آنتروپی به عنوان درجه سختی پیش بینی وقوع یک متغیر نایقین تعریف می‌شود.

تعریف ۲۰.۲ [۸۷] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Φ است. آنتروپی این متغیر به صورت*

$$H[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty}S(\Phi(x))\mathrm{d}x \qquad (۲۱۸.۲)$$

تعریف می‌شود که در آن $S(t)=-t\ln t-(۱-t)\ln(۱-t)$.



شکل ۱۴.۲: تابع $S(t) = -t\ln t - (۱-t)\ln(۱-t)$. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $S(t)$ یک تابع متقارن با محور تقارن $t = ۰/۵$ است، روی بازه $[۰, ۰/۵]$ کاهشی اکید و روی بازه $[۰/۵, ۱]$ افزایشی اکید است و مقدار بیشینه آن $\ln ۲$ در نقطه $t = ۰/۵$ است.

مثال ۲۱.۲: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۰, & x < a \quad \text{اگر} \\ ۱, & x \geq a \quad \text{اگر} \end{cases} \tag{۲۱۹.۲}$$

است. در واقع ξ مقدار ثابت a است. ار تعریف آنتروپی نتیجه می‌شود که

$$H[\xi] = -\int_{-\infty}^{a} (۰ \ln ۰ + ۱ \ln ۱)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{+\infty} (۱ \ln ۱ + ۰ \ln ۰)\,\mathrm{d}x = ۰.$$

به عبارت دیگر، آنتروپی مقدار ثابت صفر است.

مثال ۲۲.۲: فرض کنید ξ متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(a,b)$ است. پس آنتروپی آن به صورت

$$H[\xi] = -\int_{a}^{b} \left(\frac{x-a}{b-a}\ln\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a}\ln\frac{b-x}{b-a}\right)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{۲}, \tag{۲۲۰.۲}$$

است.

تمرین ۸۰.۲: نشان دهید آنتروپی متغیر نایقین زیگزاگ $\xi \sim \mathcal{Z}(a,b,c)$ به صورت

$$H[\xi] = \frac{c-a}{۲}, \tag{۲۲۱.۲}$$

است.

تمرین ۸۱.۲: نشان دهید آنتروپی متغیر نایقین نرمال $\xi \sim \mathcal{N}(e,\sigma)$ به صورت

$$H[\xi] = \frac{\pi\sigma}{\sqrt{۳}}, \tag{۲۲۲.۲}$$

است.

قضیه ۴۹.۲ *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین است. پس $H[\xi] \geq ۰$ و تساوی برقرار است اگر ξ یک مقدار ثابت باشد.*

برهان: نامنفی بودن بدیهی است. هم چنین، وقتی متغیر نایقین به مقدار ثابت میل کند، آنتروپی آن به صفر نزدیک می‌شود.

قضیه ۵۰.۲ *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین است که مقادیر آن در بازه $[a, b]$ است. پس*

$$H[\xi] \leq (b-a)\ln ۲ \tag{۲۲۳.۲}$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر توزیع آن روی $[a, b]$ به صورت $\Phi(x) = ۰/۵$ باشد.

برهان: قضیه از این واقعیت ناشی می‌شود که مقدار بیشینه تابع $S(t)$ برابر $\ln ۲$ در نقطه $t = ۰/۵$ است.

قضیه ۵۱.۲ *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین و c یک عدد حقیقی است. پس*

$$H[\xi + c] = H[\xi]. \tag{۲۲۴.۲}$$

یعنی آنتروپی تحت انتفال پایا است.

برهان: فرض کنید Φ توزیع نایقینی ξ است. پس $\Phi(x-c)$ توزیع نایقینی $\xi + c$ است. از تعریف آنتروپی نتیجه می‌شود که

$$H[\xi + c] = \int_{-\infty}^{+\infty} S\left(\Phi(x-c)\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\Phi(x))\mathrm{d}x = H[\xi].$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۵۲.۲ [۲۱] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Φ است. پس*

$$H[\xi] = \int_{۰}^{۱} \Phi^{-۱}(\alpha) \ln \frac{\alpha}{۱-\alpha} \mathrm{d}\alpha. \tag{۲۲۵.۲}$$

برهان: واضح است که $S(\alpha)$ مشتق پذیر است و مشتق آن به صورت

$$S'(\alpha) = -\ln \frac{\alpha}{۱-\alpha},$$

است. چون

$$S(\Phi(x)) = \int_{۰}^{\Phi(x)} S'(\alpha)\mathrm{d}\alpha = -\int_{\Phi(x)}^{۱} S'(\alpha)\mathrm{d}\alpha,$$

داریم

$$H[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\Phi(x))\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{۰} \int_{۰}^{\Phi(x)} S'(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x - \int_{۰}^{+\infty} \int_{\Phi(x)}^{۱} S'(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x.$$

از قضیه فوبینی نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} H[\xi] &= \int_0^{\Phi(0)} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{0} S'(\alpha)\mathrm{d}x\mathrm{d}\alpha - \int_{\Phi(0)}^{1} \int_0^{\Phi^{-1}(\alpha)} S'(\alpha)\mathrm{d}x\mathrm{d}\alpha \\ &= -\int_0^{\Phi(0)} \Phi^{-1}(\alpha)S'(\alpha)\mathrm{d}\alpha - \int_{\Phi(0)}^{1} \Phi^{-1}(\alpha)S'(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &= -\int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha)S'(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha)\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۵۳.۲ [۲۱] *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر تابع $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ نسبت به $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ افزایشی اکید و نسبت به $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots, \xi_n$ کاهشی اکید باشد، آنگاه آنتروپی*

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \tag{۲۲۶.۲}$$

به صورت

$$H[\xi] = \int_0^1 f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha))\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

است.

برهان: چون تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نسبت به متغیرهای $x_1, x_2, \ldots, x_m$ افزایشی اکید و نسبت به متغیرهای $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ کاهشی اکید است، از قضیه ۱۵.۲ نتیجه می‌شود که توزیع نایقینی معکوس ξ به صورت

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)),$$

است. با استفاده از قضیه ۵۲.۲، فرمول آنتروپی به دست می‌آید.

تمرین ۸۲.۲: فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی Φ و Ψ هستند. نشان دهید

$$H[\xi\eta] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha)\Psi^{-1}(\alpha)\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

تمرین ۸۳.۲: فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی Φ و Ψ هستند. نشان دهید

$$H\left[\frac{\xi}{\eta}\right] = \int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\Psi^{-1}(1-\alpha)}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

تمرین ۸۴.۲: فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مثبت و مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ هستند. نشان دهید

$$H\left[\frac{\xi}{\xi+\eta}\right] = \int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\Phi^{-1}(\alpha)+\Psi^{-1}(1-\alpha)}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

قضیه ۵۴.۲ [۲۱] *فرض کنید ξ و η متغیرهای نایقین مستقل هستند. پس برای اعداد حقیقی a و b داریم*

$$H[a\xi + b\eta] = |a|H[\xi] + |b|H[\eta]. \qquad (۲۲۷.۲)$$

برهان: بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید ξ و η به ترتیب توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ دارند. در غیر این صورت ، می‌توان پریشیدگی جزیی در توزیع‌ها به وجود آورد تا منظم شوند.

گام ۱: ثابت می‌کنیم $H[a\xi] = |a|H[\xi]$. اگر $a > ۰$، آنگاه توزیع نایقینی معکوس $a\xi$ به صورت

$$\Upsilon^{-۱}(\alpha) = a\Phi^{-۱}(\alpha),$$

است. از قضیه ۵۲.۲ نتیجه می‌شود که

$$H[a\xi] = \int_۰^۱ a\Phi^{-۱}(\alpha)\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\mathrm{d}\alpha = a\int_۰^۱ \Phi^{-۱}(\alpha)\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\mathrm{d}\alpha = |a|H[\xi].$$

اگر $a = ۰$، حکم به وضوح برقرار است و داریم $H[a\xi] = ۰ = |a|H[\xi]$. اگر $a < ۰$، آنگاه توزیع نایقینی معکوس $a\xi$ به صورت

$$\Upsilon^{-۱}(\alpha) = a\Phi^{-۱}(۱-\alpha),$$

است. از قضیه ۵۲.۲ نتیجه می‌شود

$$H[a\xi] = \int_۰^۱ a\Phi^{-۱}(۱-\alpha)\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\mathrm{d}\alpha = (-a)\int_۰^۱ \Phi^{-۱}(\alpha)\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\mathrm{d}\alpha = |a|H[\xi].$$

پس همواره رابطه $H[a\xi] = |a|H[\xi]$ برقرار است.

گام ۲: ثابت می‌کنیم $H[\xi+\eta] = H[\xi] + H[\eta]$. توجه کنید که توزیع نایقینی معکوس $\xi+\eta$ به صورت

$$\Upsilon^{-۱}(\alpha) = \Phi^{-۱}(\alpha) + \Psi^{-۱}(\alpha),$$

است. از قضیه ۵۲.۲ نتیجه می‌شود که

$$H[\xi+\eta] = \int_۰^۱ (\Phi^{-۱}(\alpha) + \Psi^{-۱}(\alpha))\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\mathrm{d}\alpha = H[\xi] + H[\eta].$$

گام ۳: نهایتا، برای هر دو عدد حقیقی a و b، از گام‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که

$$H[a\xi + b\eta] = H[a\xi] + H[b\eta] = |a|H[\xi] + |b|H[\eta].$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

مثال ۲۳.۲: شرط استقلال را نمی‌توان در قضیه ۵۴.۲ حذف کرد. به عنوان مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[۰, ۱]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. پس $\xi(\gamma) = \gamma$ توزیع نایقینی خطی $\mathcal{L}(۰, ۱)$ با آنتروپی

$$H[\xi] = ۰/۵, \qquad (۲۲۸.۲)$$

است و $\eta(\gamma) = ۱ - \gamma$ نیز یک توزیع نایقینی خطی $\mathcal{L}(۰, ۱)$ با آنتروپی

$$H[\eta] = ۰/۵, \tag{۲۲۹.۲}$$

است. توجه کنید که ξ و η مستقل نیستند و $\xi + \eta \equiv ۱$ با آنتروپی

$$H[\xi + \eta] = ۰, \tag{۲۳۰.۲}$$

است. پس

$$H[\xi + \eta] \neq H[\xi] + H[\eta]. \tag{۲۳۱.۲}$$

بنابراین، شرط استقلال را نمی‌توان حذف کرد.

اصل آنتروپی بیشینه

با مشخص بودن برخی مقادیر مانند مقدار مورد انتظار و واریانس، توزیع‌های نایقین زیادی هستند که با این پارامترها مطابقت دارند. کدام توزیع را باید انتخاب کنیم؟ *اصل آنتروپی بیشینه* تلاش می‌کند آن توزیع نایقینی را انتخاب کنند که آنتروپی بیشینه دارد و در محدودیت‌های مشخصی صدق می‌کنند.

قضیه ۵۵.۲ [۹] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین است که توزیعی نایقین آن دلخواه است ولی مقدار مورد انتظار آن e و واریانس آن $\sigma^۲$ است. پس*

$$H[\xi] \leq \frac{\pi\sigma}{\sqrt{۳}} \tag{۲۳۲.۲}$$

و تساوی برقرار است اگر ξ متغیر نایقین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ باشد.

برهان: فرض کنید $\Phi(x)$ توزیع نایقینی ξ است و برای $x \geq e$ قرار دهید $\Psi(x) = \Phi(۲e - x)$. از قرارداد ۲.۲ و تغییر متغیرهای انتگرال نتیجه می‌شود که واریانس به صورت

$$V[\xi] = ۲\int_e^{+\infty}(x-e)(۱-\Phi(x))\mathrm{d}x + ۲\int_e^{+\infty}(x-e)\Psi(x)\mathrm{d}x = \sigma^۲,$$

است. بنابراین عدد حقیقی κ چنان موجود است که

$$۲\int_e^{+\infty}(x-e)(۱-\Phi(x))\mathrm{d}x = \kappa\sigma^۲,$$

$$۲\int_e^{+\infty}(x-e)\Psi(x)\mathrm{d}x = (۱-\kappa)\sigma^۲.$$

با در نظر گرفتن دو محدودیت فوق الذکر، توزیع آنتروپی بیشینه Φ باید مقدار آنتروپی

$$H[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\Phi(x))\mathrm{d}x = \int_e^{+\infty} S(\Phi(x))\mathrm{d}x + \int_e^{+\infty} S(\Psi(x))\mathrm{d}x$$

را بیشینه کند. لاگرانژی به صورت

$$\begin{aligned} L = &\int_e^{+\infty} S(\Phi(x))\mathrm{d}x + \int_e^{+\infty} S(\Psi(x))\mathrm{d}x \\ &-\alpha\left(۲\int_e^{+\infty}(x-e)(۱-\Phi(x))\mathrm{d}x - \kappa\sigma^۲\right) \\ &-\beta\left(۲\int_e^{+\infty}(x-e)\Psi(x)\mathrm{d}x - (۱-\kappa)\sigma^۲\right) \end{aligned}$$

است. توزیع آنتروپی بیشینه در معادلات اویلر_لاگرانژ زیر صدق می‌کند.

$$\ln\Phi(x) - \ln(۱-\Phi(x)) = ۲\alpha(x-e),$$

$$\ln\Psi(x) - \ln(۱-\Psi(x)) = ۲\beta(e-x).$$

پس Φ و Ψ به شکل زیر هستند

$$\Phi(x) = (۱+\exp(۲\alpha(e-x)))^{-۱},$$

$$\Psi(x) = (۱+\exp(۲\beta(x-e)))^{-۱}.$$

با جایگذاری آنها در قید واریانس داریم

$$\Phi(x) = \left(۱+\exp\left(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{۶\kappa}\sigma}\right)\right)^{-۱},$$

$$\Psi(x) = \left(۱+\exp\left(\frac{\pi(x-e)}{\sqrt{۶(۱-\kappa)}\sigma}\right)\right)^{-۱}.$$

پس آنتروپی برابر است با

$$H[\xi] = \frac{\pi\sigma\sqrt{\kappa}}{\sqrt{۶}} + \frac{\pi\sigma\sqrt{۱-\kappa}}{\sqrt{۶}}$$

که بیشینه آن وقتی است که $\kappa = ۱/۲$. پس توزیع آنتروپی بیشینه همان توزیع نایقینی نرمال $\mathcal{N}(e,\sigma)$ است.

۱۳.۲ توزیع نایقینی شرطی

تعریف ۲۱.۲ [۸۴] *توزیع نایقینی شرطی Φ برای متغیر نایقین ξ به شرط A با فرض $\mathcal{M}\{A\} > ۰$ به صورت*

$$\Phi(x|A) = \mathcal{M}\{\xi \le x|A\} \tag{۲۳۳.۲}$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۵۶.۲ [۹۱] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی $\Phi(x)$ است و فرض کنید t یک عدد حقیقی است که $\Phi(t) < ۱$. پس توزیع نایقینی شرطی ξ با فرض $\xi > t$ به صورت*

$$\Phi(x|(t,+\infty)) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر} \quad \Phi(x) \le \Phi(t) \\ \dfrac{\Phi(x)}{۱-\Phi(t)} \wedge ۰/۵, & \text{اگر} \quad \Phi(t) < \Phi(x) \le (۱+\Phi(t))/۲ \\ \dfrac{\Phi(x)-\Phi(t)}{۱-\Phi(t)}, & \text{اگر} \quad (۱+\Phi(t))/۲ \le \Phi(x) \end{cases}$$

است.

برهان: از $\Phi(x|(t,+\infty)) = \mathcal{M}\{\xi \le x | \xi > t\}$ و تعریف نایقینی شرطی نتیجه می‌گیریم که

$$\Phi(x|(t,+\infty)) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi \le x)\cap(\xi > t)\}}{\mathcal{M}\{\xi > t\}}, & \text{اگر} \quad \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi \le x)\cap(\xi > t)\}}{\mathcal{M}\{\xi > t\}} < ۰/۵ \\ ۱ - \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi > x)\cap(\xi > t)\}}{\mathcal{M}\{\xi > t\}}, & \text{اگر} \quad \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi > x)\cap(\xi > t)\}}{\mathcal{M}\{\xi > t\}} < ۰/۵ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت}. \end{cases}$$

وقتی $\Phi(x) \le \Phi(t)$، آنگاه $x \le t$ و

$$\frac{\mathcal{M}\{(\xi \le x)\cap(\xi > t)\}}{\mathcal{M}\{\xi > t\}} = \frac{\mathcal{M}\{\varnothing\}}{۱-\Phi(t)} = ۰ < ۰/۵.$$

پس

$$\Phi(x|(t,+\infty)) = \frac{\mathcal{M}\{(\xi \le x)\cap(\xi > t)\}}{\mathcal{M}\{\xi > t\}} = ۰.$$

وقتی $\Phi(t) < \Phi(x) \le (۱+\Phi(t))/۲$، آنگاه داریم $x > t$ و

$$\frac{\mathcal{M}\{(\xi > x)\cap(\xi > t)\}}{\mathcal{M}\{\xi > t\}} = \frac{۱-\Phi(x)}{۱-\Phi(t)} \ge \frac{۱-(۱+\Phi(t))/۲}{۱-\Phi(t)} = ۰/۵$$

و

$$\frac{\mathcal{M}\{(\xi \le x)\cap(\xi > t)\}}{\mathcal{M}\{\xi > t\}} \le \frac{\Phi(x)}{۱-\Phi(t)}.$$

از اصل نایقینی بیشینه نتیجه می‌شود که

$$\Phi(x|(t,+\infty)) = \frac{\Phi(x)}{۱-\Phi(t)} \wedge ۰/۵.$$

وقتی $(۱+\Phi(t))/۲ \le \Phi(x)$، آنگاه داریم $x \ge t$ و

$$\frac{\mathcal{M}\{(\xi > x)\cap(\xi > t)\}}{\mathcal{M}\{\xi > t\}} = \frac{۱-\Phi(x)}{۱-\Phi(t)} \le \frac{۱-(۱+\Phi(t))/۲}{۱-\Phi(t)} \le ۰/۵.$$

پس

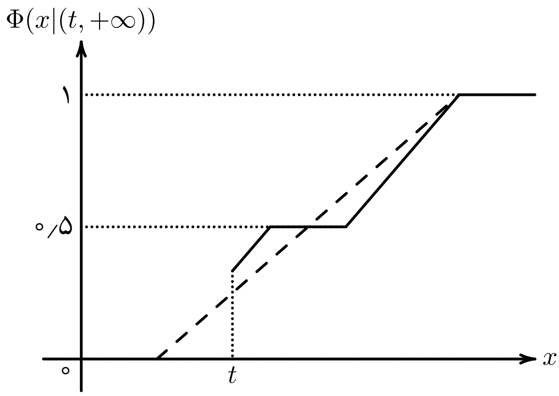
$$\Phi(x|(t,+\infty)) = ۱ - \frac{\mathcal{M}\{(\xi > x) \cap (\xi > t)\}}{\mathcal{M}\{\xi > t\}} = ۱ - \frac{۱ - \Phi(x)}{۱ - \Phi(t)} = \frac{\Phi(x) - \Phi(t)}{۱ - \Phi(t)}.$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۸۵.۲: فرض کنید ξ متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(a,b)$ است و t یک عدد حقیقی با $a < t < b$ است. نشان دهید توزیع شرطی نایقین ξ با شرط $\xi > t$ به صورت

$$\Phi(x|(t,+\infty)) = \begin{cases} ۰, & x \le t \quad \text{اگر} \\ \dfrac{x-a}{b-t} \wedge ۰/۵, & t < x \le (b+t)/۲ \quad \text{اگر} \\ \dfrac{x-t}{b-t} \wedge ۱, & (b+t)/۲ \le x \quad \text{اگر} \end{cases}$$

است.



شکل ۱۵.۲: توزیع نایقینی شرطی $\Phi(x|(t,+\infty))$.

قضیه ۵۷.۲ [۹۱] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی $\Phi(x)$ است و t یک عدد حقیقی با $\Phi(t) > ۰$ است. پس توزیع نایقینی شرطی ξ با شرط $\xi \le t$ به صورت*

$$\Phi(x|(-\infty,t]) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(x)}{\Phi(t)}, & \Phi(x) \le \Phi(t)/۲ \quad \text{اگر} \\ \dfrac{\Phi(x)+\Phi(t)-۱}{\Phi(t)} \vee ۰/۵, & \Phi(t)/۲ \le \Phi(x) < \Phi(t) \quad \text{اگر} \\ ۱, & \Phi(t) \le \Phi(x) \quad \text{اگر} \end{cases}$$

است.

برهان: از $\Phi(x|(-\infty,t]) = \mathcal{M}\{\xi \le x|\xi \le t\}$ و تعریف نایقینی شرطی نتیجه می‌شود که

$$\Phi(x|(-\infty,t])=\begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi\le x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}, & \text{اگر } \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi\le x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}<۰/۵ \\ ۱-\dfrac{\mathcal{M}\{(\xi> x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}, & \text{اگر } \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi> x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}<۰/۵ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت.} \end{cases}$$

وقتی $\Phi(x) \le \Phi(t)/۲$، آنگاه داریم $x < t$ و

$$\frac{\mathcal{M}\{(\xi\le x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}=\frac{\Phi(x)}{\Phi(t)}\le\frac{\Phi(t)/۲}{\Phi(t)}=۰/۵.$$

پس

$$\Phi(x|(-\infty,t])=\frac{\mathcal{M}\{(\xi\le x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}=\frac{\Phi(x)}{\Phi(t)}.$$

وقتی $\Phi(t)/۲ \le \Phi(x) < \Phi(t)$، آنگاه داریم $x < t$ و

$$\frac{\mathcal{M}\{(\xi\le x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}=\frac{\Phi(x)}{\Phi(t)}\ge\frac{\Phi(t)/۲}{\Phi(t)}=۰/۵$$

و

$$\frac{\mathcal{M}\{(\xi> x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}\le\frac{۱-\Phi(x)}{\Phi(t)},$$

یعنی،

$$۱-\frac{\mathcal{M}\{(\xi> x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}\ge\frac{\Phi(x)+\Phi(t)-۱}{\Phi(t)}.$$

از اصل نایقینی بیشینه نتیجه می‌شود که

$$\Phi(x|(-\infty,t])=\frac{\Phi(x)+\Phi(t)-۱}{\Phi(t)}\vee ۰/۵.$$

وقتی $\Phi(t) \le \Phi(x)$، آنگاه داریم $x \ge t$ و

$$\frac{\mathcal{M}\{(\xi> x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}=\frac{\mathcal{M}\{\varnothing\}}{\Phi(t)}=۰<۰/۵.$$

پس

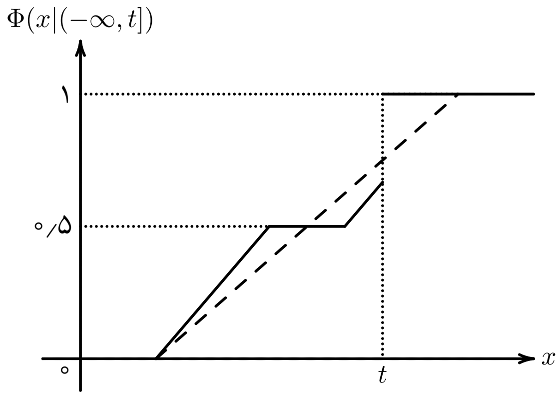
$$\Phi(x|(-\infty,t])=۱-\frac{\mathcal{M}\{(\xi> x)\cap(\xi\le t)\}}{\mathcal{M}\{\xi\le t\}}=۱-۰=۱.$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۸۶.۲: فرض کنید ξ متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(a,b)$ و t یک عدد حقیقی با $a < t < b$ است. نشان دهید توزیع نایقینی شرطی ξ به شرط $\xi \le t$ به صورت

$$\Phi(x|(-\infty,t])=\begin{cases} \dfrac{x-a}{t-a}\vee ۰, & \text{اگر } x\le (a+t)/۲ \\ \left(۱-\dfrac{b-x}{t-a}\right)\vee ۰/۵, & \text{اگر } (a+t)/۲\le x<t \\ ۱, & \text{اگر } x\ge t \end{cases}$$

است.



شکل ۱۶.۲: توزیع نایقینی شرطی $\Phi(x|(-\infty,t])$.

۱۴.۲ دنباله نایقین

دنباله نایقین دنباله‌ای از متغیرهای نایقین است که با اعداد صحیح اندیس گذاری شده است. این بخش چهار مفهوم همگرایی دنباله نایقین را معرفی می‌کند: همگرایی تقریباً قطعی، همگرایی در اندازه، همگرایی در میانگین و همگرایی در توزیع.

جدول ۱.۲: رابطه بین مفهوم‌های همگرایی

همگرایی در میانگین	$\Rightarrow$	همگرایی در اندازه	$\Rightarrow$	همگرایی در توزیع

همگرایی تقریباً قطعی

تعریف ۲۲.۲ [۸۴] *دنباله نایقین* $\{\xi_i\}$ *را همگرای تقریباً قطعی به* ξ *گویند اگر رویدادی مانند* Λ *با* $\mathcal{M}\{\Lambda\} = 1$ *موجود باشد طوری که برای هر* $\gamma \in \Lambda$

$$\lim_{i\to\infty} |\xi_i(\gamma) - \xi(\gamma)| = 0 \tag{۲۳۴.۲}$$

در این حالت می‌نویسیم $\xi_i \to \xi$ *(تقریباً قطعی).*

تعریف ۲۳.۲ [۸۴] *دنباله نایقین* $\{\xi_i\}$ *را همگرا در اندازه به* ξ *گویند اگر برای هر* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} = 0. \tag{۲۳۵.۲}$$

تعریف ۲۴.۲ [۸۴] *دنباله نایقین* $\{\xi_i\}$ *همگرا در میانگین به* ξ *گویند هرگاه*

$$\lim_{i\to\infty} E[|\xi_i - \xi|] = \circ. \qquad (۲۳۶.۲)$$

تعریف ۲۵.۲ [۸۴] *فرض کنید* $\Phi, \Phi_۱, \Phi_۲, \ldots$ *توزیع‌های نایقینی به ترتیب برای متغیرهای نایقین* $\xi, \xi_۱, \xi_۲, \ldots$ *هستند. گوییم دنباله* $\{\xi_i\}$ *در توزیع به* ξ *همگرا است اگر برای هر* x *که* $\Phi(x)$ *پیوسته است، داشته باشیم*

$$\lim_{i\to\infty} \Phi_i(x) = \Phi(x) \qquad (۲۳۷.۲)$$

همگرایی میانگین در مقابل همگرایی اندازه

قضیه ۵۸.۲ [۸۴] *اگر دنباله نایقین* $\{\xi_i\}$ *به* ξ *همگرا در میانگین باشد، آنگاه* $\{\xi_i\}$ *به* ξ *همگرا در اندازه است.*

برهان: چون $\{\xi_i\}$ همگرا در میانگین به ξ است، وقتی $i \to \infty$ داریم $E[|\xi_i - \xi|] \to \circ$. برای عدد معلوم $\varepsilon > \circ$، از نامساوی مارکف نتیجه می‌شود که وقتی $i \to \infty$ آنگاه

$$\mathcal{M}\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E[|\xi_i - \xi|]}{\varepsilon} \to \circ.$$

پس $\{\xi_i\}$ همگرا در اندازه به ξ است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

مثال ۲۴.۲: همگرایی در اندازه، همگرایی در میانگین را موجب نمی‌شود. فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \ldots\}$ با مجموعه توانی و

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \sum_{\gamma_j \in \Lambda} \frac{۱}{۲^j},$$

است. متغیرهای نایقین زیر را برای $i = ۱, ۲, \ldots$ و $\xi \equiv \circ$ تعریف کنید

$$\xi_i(\gamma_j) = \begin{cases} ۲^i, & \text{اگر} \quad j = i \\ \circ, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

برای هر $\varepsilon > \circ$ کوچک، وقتی $i \to \infty$، داریم

$$\mathcal{M}\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} = \frac{۱}{۲^i} \to \circ.$$

یعنی دنباله $\{\xi_i\}$ در اندازه به ξ همگرا است. در حالی که برای هر i، داریم

$$E[|\xi_i - \xi|] = ۱.$$

یعنی دنباله $\{\xi_i\}$ همگرا در میانگین به ξ نیست.

همگرایی در اندازه در مقابل همگرایی در توزیع

قضیه ۵۹.۲ [۸۴] *اگر دنباله $\{\xi_i\}$ همگرا در اندازه به ξ باشد، آنگاه $\{\xi_i\}$ همگرا در توزیع به ξ است.*

برهان: فرض کنید x نقطه پیوستگی توزیع Φ است. از طرف دیگر، برای هر $y > x$، داریم

$$\{\xi_i \le x\} = \{\xi_i \le x, \xi \le y\} \cup \{\xi_i \le x, \xi > y\} \subset \{\xi \le y\} \cup \{|\xi_i - \xi| \ge y - x\}.$$

از اصل موضوعه زیرجمعی بودن نتیجه می‌شود که

$$\Phi_i(x) \le \Phi(y) + \mathcal{M}\{|\xi_i - \xi| \ge y - x\}.$$

چون $\{\xi_i\}$ در اندازه به ξ همگرا است، وقتی $i \to \infty$، داریم $\mathcal{M}\{|\xi_i - \xi| \ge y - x\} \to ۰$. پس برای هر $y > x$ داریم $\limsup_{i\to\infty} \Phi_i(x) \le \Phi(y)$. با فرض $y \to x$ داریم

$$\limsup_{i\to\infty} \Phi_i(x) \le \Phi(x). \qquad (۲۳۸.۲)$$

از طرف دیگر برای هر $x > x$ داریم

$$\{\xi \le z\} = \{\xi_i \le x, \xi \le z\} \cup \{\xi_i > x, \xi \le z\} \subset \{\xi_i \le x\} \cup \{|\xi_i - \xi| \ge x - z\}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\Phi(z) \le \Phi_i(x) + \mathcal{M}\{|\xi_i - \xi| \ge x - z\}.$$

چون $\mathcal{M}\{|\xi_i - \xi| \ge x - z\} \to ۰$، برای هر $x > z$ داریم $\Phi(z) \le \liminf_{i\to\infty} \Phi_i(x)$. با فرض $z \to x$ داریم

$$\Phi(x) \le \liminf_{i\to\infty} \Phi_i(x). \qquad (۲۳۹.۲)$$

از (۲۳۸.۲) و (۲۳۹.۲) نتیجه می‌شود که برای $i \to \infty$ داریم $\Phi_i(x) \to \Phi(x)$. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

مثال ۲۵.۲: همگرایی در توزیع همگرایی در اندازه را موجب نمی‌شود. فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$ با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = \mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۱/۲$ است. متغیرهای نایقین را به صورت زیر تعریف کنید

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} -۱, & \gamma = \gamma_۱ \quad \text{اگر} \\ ۱, & \gamma = \gamma_۲ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

و برای $i = ۱, ۲, \ldots$، $\xi_i = -\xi$. پس ξ_i و ξ توزیع‌های یکسان دارند پس $\{\xi_i\}$ در توزیع به ξ همگرا است. در حالی که برای برخی اعداد کوچک $\varepsilon > ۰$ داریم

$$\mathcal{M}\{|\xi_i - \xi| \ge \varepsilon\} = ۱.$$

یعنی دنباله $\{\xi_i\}$ در اندازه به ξ همگرا نیست.

همگرایی تقریباً قطعی در مقابل همگرایی در اندازه

مثال ۲.۲۶: همگرایی تقریباً قطعی همگرایی در اندازه را موجب نمی‌شود. فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \ldots\}$ با مجموعه توانی و

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} ۰, & \Lambda = \varnothing \quad \text{اگر} \\ ۱, & \Lambda = \Gamma \quad \text{اگر} \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت}. \end{cases}$$

در نظر بگیرید. متغیرهای نایقین زیر را برای $i = ۱, ۲, \ldots$ و $\xi \equiv ۰$ تعریف کنید.

$$\xi_i(\gamma_j) = \begin{cases} i, & j = i \quad \text{اگر} \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

پس $\{\xi_i\}$ تقریباً قطعی به ξ همگرا است. در حالی که برای عدد کوچک $\varepsilon > ۰$، برای هر i داریم

$$\mathcal{M}\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} = ۰/۵$$

یعنی دنباله $\{\xi_i\}$ همگرا در اندازه به ξ نیست.

مثال ۲.۲۷: همگرایی در اندازه همگرایی تقریباً قطعی را موجب نمی‌شود. فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[۰, ۱]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. برای هر عدد صحیح مثبت i، عدد صحیح j موجود است که $i = ۲^j + k$ و k عدد صحیح بین ۰ و $۲^j - ۱$ است. متغیرهای نایقین زیر را برای $i = ۱, ۲, \ldots$ و $\xi \equiv ۰$ تعریف کنید.

$$\xi_i(\gamma) = \begin{cases} ۱, & k/۲^j \leq \gamma \leq (k+۱)/۲^j \quad \text{اگر} \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

برای هر عدد کوچک $\varepsilon > ۰$ ، وقتی $i \to \infty$ داریم

$$\mathcal{M}\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} = \frac{۱}{۲^j} \to ۰$$

یعنی دنباله $\{\xi_i\}$ همگرا در اندازه به ξ است. در حالی که برای هر $\gamma \in [۰, ۱]$، تعداد نامتناهی بازه به شکل $[k/۲^j, (k+۱)/۲^j]$ است که γ را شامل هستند. پس $\xi_i(\gamma)$ به صفر همگرا نیست. به عبارت دیگر، دنباله $\{\xi_i\}$ همگرای تقریباً قطعی به ξ نیست.

همگرایی تقریباً قطعی در مقابل همگرایی در میانگین

مثال ۲.۲۸: همگرایی تقریباً قطعی همگرایی در میانگین را موجب نمی‌شود. فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \ldots\}$ با مجموعه توانی و

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \sum_{\gamma_j \in \Lambda} \frac{۱}{۲^j},$$

است. متغیرهای نایقین زیر را برای $i = ۱,۲,\ldots$ و $\xi \equiv ۰$ تعریف کنید

$$\xi_i(\gamma_j) = \begin{cases} ۲^i, & \text{اگر } j = i \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

پس ξ_i همگرای تقریباً قطعی به ξ است. در حالی که دنباله $\{\xi_i\}$ همگرا در میانگین به ξ نیست زیرا برای هر i داریم $E[|\xi_i - \xi|] \equiv ۱$.

مثال ۲۹.۲: همگرایی در میانگین همگرایی تقریباً قطعی را موجب نمی‌شود. فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[۰,۱]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. برای هر عدد صحیح مثبت i عددی صحیح مانند j وجود دارد که $i = ۲^j + k$ و k یک عدد صحیح بین ۰ و $۲^j - ۱$ است. متغیرهای نایقین

$$\xi_i(\gamma) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } k/۲^j \le \gamma \le (k+۱)/۲^j \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

را برای هر $i = ۱,۲,\ldots$ و $\xi \equiv ۰$ تعریف کنید. در این صورت، وقتی $i \to \infty$، داریم

$$E[|\xi_i - \xi|] = \frac{۱}{۲^j} \to ۰.$$

یعنی دنباله $\{\xi_i\}$ همگرا در میانگین به ξ است. در حالی که برای هر $\gamma \in [۰,۱]$، تعداد نامتناهی بازه به صورت $[k/۲^j, (k+۱)/۲^j]$ شامل γ وجود دارد. پس $\xi_i(\gamma)$ به صفر همگرا نیست. به عبارت دیگر، دنباله $\{\xi_i\}$ همگرای تقریباً قطعی به ξ نیست.

همگرایی تقریباً قطعی در مقابل همگرایی در توزیع

مثال ۳۰.۲: همگرایی در توزیع موجب همگرایی تقریباً قطعی نمی‌شود. فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = \mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۱/۲$ است. متغیرهای نایقین را به صورت

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} -۱, & \text{اگر } \gamma = \gamma_۱ \\ ۱, & \text{اگر } \gamma = \gamma_۲ \end{cases}$$

و برای هر $i = ۱,۲,\ldots$ ، $\xi_i = -\xi$ تعریف کنید. پس ξ_i و ξ همتوزیع هستند. در حالی که دنباله $\{\xi_i\}$ همگرای تقریباً قطعی به ξ نیست.

مثال ۳۱.۲: همگرایی تقریباً قطعی موجب همگرای در توزیع نمی‌شود. فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \ldots\}$ همراه با مجموعه توانی و

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } \Lambda = \emptyset \\ ۱, & \text{اگر } \Lambda = \Gamma \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت}. \end{cases}$$

است. متغیرهای نایقین زیر را برای $i = ۱,۲,\ldots$ و $\xi \equiv ۰$

$$\xi_i(\gamma_j) = \begin{cases} i, & \text{اگر } j = i \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

تعریف کنید. در این صورت، دنباله $\{\xi_i\}$ همگرای تقریباً قطعی به ξ است. در حالی که توزیع‌های نایقینی $\{\xi_i\}$ برای هر $i = ۱, ۲, \ldots$ به صورت

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} ۰, & x < ۰ \quad \text{اگر} \\ ۰/۵, & ۰ \le x < i \quad \text{اگر} \\ ۱, & x \ge i \quad \text{اگر} \end{cases}$$

هستند و توزیع نایقینی ξ به صورت

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۰, & x < ۰ \quad \text{اگر} \\ ۱, & x \ge ۰ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

است. واضح است که $\Phi_i(x)$ در $x > ۰$ به $\Phi(x)$ همگرا نیست. یعنی $\{\xi_i\}$ همگرای در توزیع به ξ نیست.

۱۵.۲ بردار نایقین

به عنوان یک تعمیم از متغیر نایقین، این بخش مفهوم بردار نایقین که مولفه‌های آن متغیر نایقین هستند را معرفی می‌کند.

تعریف ۲۶.۲ [۸۴] *یک بردار نایقین k بعدی یک تابع $\boldsymbol{\xi}$ از یک فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ به مجموعه بردارهای حقیقی k بعدی است طوری که $\{\boldsymbol{\xi} \in B\}$ یک رویداد برای هر مجموعه B از بردارهای k بعدی حقیقی است.*

قضیه ۶۰.۲ [۸۴] *بردار $(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_k)$ یک بردار نایقین است اگر و فقط اگر $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_k$ متغیرهای نایقین باشند.*

برهان: قرار دهید $\boldsymbol{\xi} = (\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_k)$. فرض کنید $\boldsymbol{\xi}$ یک بردار نایقین روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ است. برای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی، مجموعه $B \times \Re^{k-۱}$ یک مجموعه بورل k بعدی از بردارهای حقیقی است. پس مجموعه

$$\{\xi_۱ \in B\} = \{\xi_۱ \in B, \xi_۲ \in \Re, \ldots, \xi_k \in \Re\} = \{\boldsymbol{\xi} \in B \times \Re^{k-۱}\}$$

یک رویداد است. بنابراین $\xi_۱$ یک متغیر نایقین است. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که $\xi_۲, \xi_۳, \ldots, \xi_k$ نیز متغیرهای نایقین هستند.

برعکس، فرض کنید $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_k$ متغیرهای نایقین روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ هستند. $\mathcal{B}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{B} = \left\{B \subset \Re^k \mid \{\boldsymbol{\xi} \in B\} \text{ یک رویداد است} \right\}.$$

بردار $\boldsymbol{\xi} = (\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_k)$ یک متغیر نایقین خواهد بود اگر بتوانیم ثابت کنیم $\mathcal{B}$ شامل تمامی مجموعه‌های بورل از بردارهای حقیقی k بعدی است. ابتدا، کلاس $\mathcal{B}$ شامل تمامی بازه‌های باز در $\Re^k$ است، زیرا

$$\left\{\boldsymbol{\xi} \in \prod_{i=۱}^{k}(a_i, b_i)\right\} = \bigcap_{i=۱}^{k} \{\xi_i \in (a_i, b_i)\}$$

یک رویداد است. بعد، کلاس $\mathcal{B}$ یک σـ جبر روی $\Re^k$ است، زیرا (الف) چون $\Gamma = \{\boldsymbol{\xi} \in \Re^k\}$، داریم $\Re^k \in \mathcal{B}$؛ (ب) اگر $B \in \mathcal{B}$، آنگاه $\{\boldsymbol{\xi} \in B\}$ یک رویداد است و

$$\{\boldsymbol{\xi} \in B^c\} = \{\boldsymbol{\xi} \in B\}^c$$

یک رویداد است. یعنی $B^c \in \mathcal{B}$؛ (ج) اگر $B_i \in \mathcal{B}$ برای $i = ۱, ۲, \ldots$ ، آنگاه $\{\boldsymbol{\xi} \in B_i\}$ رویداد هستند و

$$\left\{\boldsymbol{\xi} \in \bigcup_{i=۱}^{\infty} B_i\right\} = \bigcup_{i=۱}^{\infty}\{\boldsymbol{\xi} \in B_i\}$$

یک رویداد است. یعنی $\cup_i B_i \in \mathcal{B}$. چون کوچکترین σـ جبر شامل تمامی بازه‌های باز $\Re^k$ همان جبر بورل روی $\Re^k$ است، کلاس $\mathcal{B}$ شامل تمامی مجموعه‌های بورل از بردارهای حقیقی k بعدی است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تعریف ۲۷.۲ [۹۹] *بردارهای نایقین k بعدی $\boldsymbol{\xi}_۱, \boldsymbol{\xi}_۲, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ را مستقل گویند اگر برای مجموعه‌های بورل $B_۱, B_۲, \ldots, B_n$ از بردارهای حقیقی k بعدی داشته باشیم*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=۱}^{n}(\boldsymbol{\xi}_i \in B_i)\right\} = \bigwedge_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\{\boldsymbol{\xi}_i \in B_i\}. \qquad (۲۴۰.۲)$$

تمرین ۸۷.۲: فرض کنید $(\xi_۱, \xi_۲, \xi_۳)$ و $(\eta_۱, \eta_۲, \eta_۳)$ بردارهای نایقین مستقل هستند. نشان دهید $\xi_۱$ و $\eta_۲$ متغیرهای نایقین مستقل هستند.

تمرین ۸۸.۲: فرض کنید $(\xi_۱, \xi_۲, \xi_۳)$ و $(\eta_۱, \eta_۲, \eta_۳)$ بردارهای نایقین مستقل هستند. نشان دهید $(\xi_۱, \xi_۲)$ و $(\eta_۲, \eta_۳)$ بردارهای نایقین مستقل هستند.

قضیه ۶۱.۲ [۹۹] *بردارهای نایقین kـ بعدی $\boldsymbol{\xi}_۱, \boldsymbol{\xi}_۲, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ مستقل هستند اگر و فقط اگر برای هر مجموعه‌های بورل $B_۱, B_۲, \ldots, B_n$ از بردارهای حقیقی kـ بعدی داشته باشیم*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{n}(\boldsymbol{\xi}_i \in B_i)\right\} = \bigvee_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\left\{\boldsymbol{\xi}_i \in B_i\right\} \qquad (۲۴۱.۲)$$

برهان: از دوگانی اندازه نایقین نتیجه می‌شود که $\boldsymbol{\xi}_۱, \boldsymbol{\xi}_۲, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ مستقل هستند اگر و فقط اگر

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{n}(\boldsymbol{\xi}_i \in B_i)\right\} &= ۱ - \mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=۱}^{n}(\boldsymbol{\xi}_i \in B_i^c)\right\} \\ &= ۱ - \bigwedge_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\{\boldsymbol{\xi}_i \in B_i^c\} = \bigvee_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\left\{\boldsymbol{\xi}_i \in B_i\right\}.\end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۶۲.۲ *فرض کنید $\boldsymbol{\xi}_۱, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ بردارهای نایقین مستقل هستند و فرض کنید $f_۱, \ldots, f_n$ تابع‌های بردار ـ مقدار اندازه‌پذیر هستند. پس $f_۱(\boldsymbol{\xi}_۱), \ldots, f_n(\boldsymbol{\xi}_n)$ نیز بردارهای نایقین مستقل هستند.*

برهان: برای مجموعه‌های بورل $B_۱, B_۲, \ldots, B_n$ از بردارهای حقیقی k بعدی، از تعریف استقلال نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=۱}^{n}(f_i(\boldsymbol{\xi}_i) \in B_i)\right\} = \mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=۱}^{n}(\boldsymbol{\xi}_i \in f_i^{-۱}(B_i))\right\}$$
$$= \bigwedge_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\{\boldsymbol{\xi}_i \in f_i^{-۱}(B_i)\} = \bigwedge_{i=۱}^{n} \mathcal{M}\{f_i(\boldsymbol{\xi}_i) \in B_i\}.$$

پس $f_۱(\boldsymbol{\xi}_۱), \ldots, f_n(\boldsymbol{\xi}_n)$ بردارهای نایقین مستقل هستند.

۱۶.۲ نکات کتابشناسی

متغیر نایقین یک مفهوم اساسی در نظریه نایقینی است که توسط لیو در سال ۲۰۰۷ معرفی شد[۸۴]. برای توصیف متغیر نایقین، لیو هم چنین توزیع نایقینی را معرفی کرد [۸۴]. بعداً، پنگ-ایوامورا [۱۳۱] شرط لازم و کافی برای توزیع نایقینی را ثابت کردند. هم چنین، لیو توزیع نایقینی معکوس را پیشنهاد کرد [۹۱] و شرط لازم و کافی را برای آن بررسی کرد [۹۶]. علاوه بر این، لیو توزیع نایقینی شرطی را پیشنهاد کرد [۸۴] و فرمول‌هایی را برای محاسبه آن استخراج کرد.

در ادامه، مفهوم استقلال متغیرهای نایقین توسط لیو مطرح شد [۸۷]، قانون عملیاتی برای محاسبه توزیع نایقینی و توزیع نایقینی معکوس تابع‌های یکنوا از متغیرهای مستقل توسط لیو مطرح شد [۹۱].

برای رتبه بندی متغیرهای نایقین، لیو عملگر مقدار مورد انتظار را پیشنهاد کرد [۸۴]. خطی بودن عملگر مقدار مورد انتظار نیز توسط لیو بررسی شد [۹۱]. به عنوان یک نتیجه مهم لیو-ها [۱۱۱] فرمول‌های مفیدی را برای محاسبه مقدار مورد انتظار تابع‌های یکنوای اکید از متغیرهای نایقین مستقل را فراهم آوردند. بر مبنای عملگر مقدار مورد انتظار، لیو مفهوم واریانس، گشتاورها و فاصله بین متغیرهای نایقین را مطرح کرد [۸۴].

آنتروپی توسط لیو به عنوان درجه سختی پیش بینی وقوع یک متغیر نایقین پیشنهاد شد [۸۷]. چن-دای اصل آنتروپی بیشینه را برای انتخاب توزیع نایقینی که آنتروپی بیشینه دارد و در شرط‌های خاص صدق می‌کند را مطرح کردند [۹]. مخصوصا ثابت شد که توزیع نایقینی نرمال، وقتی مقدار مورد انتظار و واریانس معلوم باشند، آنتروپی بیشینه دارد.

دنباله‌های نایقین همراه با همگرایی تقریباً قطعی، همگرایی در اندازه، همگرایی در میانگین و همگرایی در توزیع توسط لیو معرفی شد [۸۴]. علاوه بر آن؛ گائو [۴۵]، یو [۲۰۱]، ژانگ [۲۱۶] و چن-لی-رالسکو [۱۶] مفهوم‌های دیگری از همگرایی را توسعه دادند و خواص ریاضی آنها را بررسی کردند.

بردار نایقین توسط لیو به عنوان یک تابع اندازه‌پذیر از یک فضای نایقینی به مجموعه بردارهای حقیقی توسط لیو تعریف شد [۸۴]. هم چنین لیو استقلال بردارهای نایقین را هم مطرح کرد [۹۹].

فصل ۳

برنامه‌ریزی نایقین

برنامه‌ریزی نایقین توسط لیو در سال ۲۰۰۹ معرفی شد [۸۶]. این فصل نظریه برنامه‌ریزی نایقین را بیان کرده و برخی مدل‌های برنامه‌ریزی نایقین برای مساله برنامه‌ریزی ماشین، مساله مسیربندی خودرو و مساله برنامه‌ریزی پروژه را ارائه می‌کند.

۱.۳ برنامه‌ریزی نایقین

برنامه‌ریزی نایقین نوعی از برنامه‌ریزی ریاضی شامل متغیرهای نایقین است. فرض کنید $\boldsymbol{x}$ یک بردار تصمیم، و $\boldsymbol{\xi}$ یک بردار نایقین است. چون نمی‌توان تابع هدف نایقین $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ را مستقیماً کمینه کرد، می‌توان به جای آن مقدار مورد انتظار را کمینه کرد، یعنی

$$\min_{\boldsymbol{x}} E[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]. \tag{۱.۳}$$

علاوه بر آن، چون قیدهای نایقین $g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \leq ۰, j = ۱,۲,\ldots,p$ ناحیه شدنی خاصی را مشخص نمی‌کنند، طبیعی است که برقراری قید نایقین را با سطح اطمینان $\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_p$ را مد نظر قرار دهیم. پس مجموعه ای از قیدهای شانس به صورت زیر داریم.

$$\mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \leq ۰\} \geq \alpha_j, \quad j = ۱,۲,\ldots,p. \tag{۲.۳}$$

برای مشخص کردن تصمیم با کمینه سازی مقدار هدف مورد انتظار که در مجموعه‌ای از قیدهای شانس صدق می‌کنند، لیو [۸۶] مدل برنامه‌ریزی نایقین زیر را پیشنهاد کرد.

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} E[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \leq ۰\} \geq \alpha_j, \quad j = ۱,۲,\ldots,p. \end{cases} \tag{۳.۳}$$

تعریف ۱.۳ [۸۶] *بردار $\boldsymbol{x}$ را برای مدل برنامه‌ریزی (۳.۳) یک جواب شدنی گویند اگر برای هر $j = ۱,۲,\ldots,p$ داشته باشیم.*

$$\mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \leq ۰\} \geq \alpha_j. \tag{۴.۳}$$

تعریف ۲.۳ *[۸۶] جواب شدنی $\boldsymbol{x}^*$ را جواب بهینه مدل برنامه‌ریزی نایقین (۳.۳) گویند هرگاه برای هر جواب شدنی $\boldsymbol{x}$ داشته باشیم.*

$$E[f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\xi})] \leq E[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})]. \tag{۵.۳}$$

قضیه ۱.۳ *فرض کنید تابع هدف $f(\boldsymbol{x}, \xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ نسبت به $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_m$ افزایشی اکید و نسبت به $\xi_{m+۱}, \xi_{m+۲}, \ldots, \xi_n$ کاهشی اکید است. اگر $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ باشند، در این صورت مقدار مورد انتظار $E[f(\boldsymbol{x}, \xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)]$ با*

$$\int_۰^۱ f(\boldsymbol{x}, \Phi_۱^{-۱}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-۱}(\alpha), \Phi_{m+۱}^{-۱}(۱-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-۱}(۱-\alpha))\mathrm{d}\alpha \tag{۶.۳}$$

برابر است.

برهان: از قضیه ۲۶.۲ بلافاصله نتیجه می‌شود.

تمرین ۱.۳: فرض کنید $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = h_۱(\boldsymbol{x})\xi_۱ + h_۲(\boldsymbol{x})\xi_۲ + \cdots + h_n(\boldsymbol{x})\xi_n + h_۰(\boldsymbol{x})$ که در آن $h_۱(\boldsymbol{x}), h_۲(\boldsymbol{x}), \ldots, h_n(\boldsymbol{x}), h_۰(\boldsymbol{x})$ تابع‌های حقیقی‌ـ مقدار و $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل هستند. نشان دهید

$$E[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})] = h_۱(\boldsymbol{x})E[\xi_۱] + h_۲(\boldsymbol{x})E[\xi_۲] + \cdots + h_n(\boldsymbol{x})E[\xi_n] + h_۰(\boldsymbol{x}). \tag{۷.۳}$$

قضیه ۲.۳ *فرض کنید تابع پیوسته $g(\boldsymbol{x}, \xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ نسبت به $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_k$ افزایشی اکید و نسبت به $\xi_{k+۱}, \xi_{k+۲}, \ldots, \xi_n$ کاهشی اکید است. اگر $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ باشند، آنگاه قید شانس*

$$\mathcal{M}\{g(\boldsymbol{x}, \xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) \leq ۰\} \geq \alpha \tag{۸.۳}$$

برقرار است اگر و تنها اگر

$$g(\boldsymbol{x}, \Phi_۱^{-۱}(\alpha), \ldots, \Phi_k^{-۱}(\alpha), \Phi_{k+۱}^{-۱}(۱-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-۱}(۱-\alpha)) \leq ۰. \tag{۹.۳}$$

برهان: از قانون عملیاتی متغیرهای نایقین نتیجه می‌شود که توزیع نایقینی معکوس $g(\boldsymbol{x}, \xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ به صورت

$$\Psi^{-۱}(\alpha) = g(\boldsymbol{x}, \Phi_۱^{-۱}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-۱}(\alpha), \Phi_{m+۱}^{-۱}(۱-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-۱}(۱-\alpha))$$

است. پس (۸.۳) برقرار است اگر و تنها اگر $\Psi^{-۱}(\alpha) \leq ۰$. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۲.۳: فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ متغیرهای تصمیم نامنفی و $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n, \xi$ به ترتیب متغیرهای نایقین خطی مستقل $\mathcal{L}(a_۱, b_۱), \mathcal{L}(a_۲, b_۲), \ldots, \mathcal{L}(a_n, b_n), \mathcal{L}(a, b)$ هستند. نشان دهید برای هر سطح اطمینان $\alpha \in (۰, ۱)$، قید شانس

$$\mathcal{M}\left\{\sum_{i=۱}^{n} \xi_i x_i \leq \xi\right\} \geq \alpha \tag{۱۰.۳}$$

برقرار است اگر و تنها اگر

$$\sum_{i=1}^{n}((1-\alpha)a_i+\alpha b_i)x_i \le \alpha a+(1-\alpha)b. \tag{۱۱.۳}$$

تمرین ۳.۳: فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغیرهای تصمیم نامنفی و $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi$ به ترتیب متغیرهای نایقین نرمال مستقل $\mathcal{N}(e_1,\sigma_1)$، $\mathcal{N}(e_2,\sigma_2), \dots, \mathcal{N}(e_n,\sigma_n), \mathcal{N}(e,\sigma)$ هستند. نشان دهید برای هر سطح اطمینان $\alpha \in (0,1)$، قید شانس

$$\mathcal{M}\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i \le \xi\right\} \ge \alpha \tag{۱۲.۳}$$

برقرار است اگر و تنها اگر

$$\sum_{i=1}^{n}\left(e_i+\frac{\sigma_i\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)x_i \le e-\frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{۱۳.۳}$$

تمرین ۴.۳: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ هستند و $h_1(\boldsymbol{x}), h_2(\boldsymbol{x}), \dots, h_n(\boldsymbol{x}), h_0(\boldsymbol{x})$ تابع‌های حقیقی‌ـ مقدار هستند. نشان دهید

$$\mathcal{M}\left\{\sum_{i=1}^{n}h_i(\boldsymbol{x})\xi_i \le h_0(\boldsymbol{x})\right\} \ge \alpha \tag{۱۴.۳}$$

برقرار است اگر و تنها اگر

$$\sum_{i=1}^{n}h_i^{+}(\boldsymbol{x})\Phi_i^{-1}(\alpha)-\sum_{i=1}^{n}h_i^{-}(\boldsymbol{x})\Phi_i^{-1}(1-\alpha) \le h_0(\boldsymbol{x}) \tag{۱۵.۳}$$

که در آن برای هر $i=1,2,\dots,n$

$$h_i^{+}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} h_i(\boldsymbol{x}), & h_i(\boldsymbol{x})>0 \text{ اگر } \\ 0, & h_i(\boldsymbol{x})\le 0 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۱۶.۳}$$

$$h_i^{-}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} -h_i(\boldsymbol{x}), & h_i(\boldsymbol{x})<0 \text{ اگر } \\ 0, & h_i(\boldsymbol{x})\ge 0 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۱۷.۳}$$

قضیه ۳.۳ *فرض کنید $f(\boldsymbol{x}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ نسبت به متغیرهای $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ افزایشی اکید و نسبت به متغیرهای $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots, \xi_n$ کاهشی اکید است، و $g_j(\boldsymbol{x}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ برای هر $j=1,2,\dots,p$ نسبت به $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ افزایشی اکید و نسبت به متغیرهای $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n$*

کاهشی اکید است اگر $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ باشند، آنگاه برنامه‌ریزی نایقین

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} E[f(\boldsymbol{x}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)] \\ \textit{subject to:} \\ \qquad \mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \le 0\} \ge \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \tag{18.3}$$

با مساله برنامه‌ریزی ریاضی قطعی

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} \int_0^1 f(\boldsymbol{x}, \Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)) \mathrm{d}\alpha \\ \textit{subject to:} \\ \qquad g_j(\boldsymbol{x}, \Phi_1^{-1}(\alpha_j), \dots, \Phi_k^{-1}(\alpha_j), \Phi_{k+1}^{-1}(1-\alpha_j), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha_j)) \le 0 \\ \qquad j = 1, 2, \dots, p, \end{cases}$$

معادل است.
برهان: از قضیه‌های ۱.۳ و ۲.۳ بلافاصله نتیجه می‌شود.

۲.۳ روش عددی

وقتی تابع هدف و قیدها نسبت به پارامترهای نایقین یکنوا باشند، مدل برنامه‌ریزی نایقین به برنامه‌ریزی ریاضی قطعی تبدیل می‌شود.
خوشبختانه اغلب تابع‌های هدف و قیدهای مساله‌های کاربردی نسبت به پارامترهای نایقین (نه متغیرهای تصمیم) یکنوا هستند.

از دیدگاه ریاضی، هیچ تفاوتی بین برنامه‌ریزی ریاضی قطعی و برنامه‌ریزی ریاضی بجز در انتگرال وجود ندارد. بنابراین می‌توان از روش‌هایی مانند روش سادک، روش شاخه و کران، روش صفحه برش، روش گرادیان، الگوریتم ژنتیک، بهینه‌سازی تجمع ذرات، شبکه‌های عصبی، روش جستجوی ممنوعه و ... استفاده کرد.

مثال۱.۳: فرض کنید x_1, x_2, x_3 متغیرهای نامنفی هستند. همچنین فرض کنید ξ_1, ξ_2, ξ_3 متغیرهای نایقین خطی مستقل $\mathcal{L}(1,2), \mathcal{L}(2,3), \mathcal{L}(3,4)$، و η_1, η_2, η_3 متغیرهای نایقین زیگزاگ مستقل $\mathcal{Z}(1,2,3)$، $\mathcal{Z}(2,3,4), \mathcal{Z}(3,4,5)$ هستند. مساله برنامه‌ریزی نایقین

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1, x_2, x_3} E\left[\sqrt{x_1 + \xi_1} + \sqrt{x_2 + \xi_2} + \sqrt{x_3 + \xi_3}\right] \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathcal{M}\{(x_1 + \eta_1)^2 + (x_2 + \eta_2)^2 + (x_3 + \eta_3)^2 \le 100\} \ge 0/9 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. توجه کنید که $\sqrt{x_1 + \xi_1} + \sqrt{x_2 + \xi_2} + \sqrt{x_3 + \xi_3}$ یک تابع افزایشی اکید نسبت به ξ_1, ξ_2, ξ_3 و $(x_1 + \eta_1)^2 + (x_2 + \eta_2)^2 + (x_3 + \eta_3)^2$ کاهشی اکید نسبت به η_1, η_2, η_3

است. به سادگی ثابت می‌شود که مدل برنامه‌ریزی نایقین را می‌توان به مدل قطعی

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2,x_3} \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x_1+\Phi_1^{-1}(\alpha)}+\sqrt{x_2+\Phi_2^{-1}(\alpha)}+\sqrt{x_3+\Phi_3^{-1}(\alpha)}\right)\mathrm{d}\alpha \\ \text{subject to:} \\ \qquad (x_1+\Psi_1^{-1}(0/9))^2+(x_2+\Psi_2^{-1}(0/9))^2+(x_3+\Psi_3^{-1}(0/9))^2 \le 100 \\ \qquad x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{cases}$$

تبدیل کرد که در آن $\Phi_1^{-1},\Phi_2^{-1},\Phi_3^{-1},\Psi_1^{-1},\Psi_2^{-1},\Psi_3^{-1}$ به ترتیب توزیع‌های نایقینی معکوس متغیرهای نایقین $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\eta_1,\eta_2,\eta_3$ هستند. جواب بهینه به صورت

$$(x_1^*,x_2^*,x_3^*)=(2/9735,\ 1/9735,\ 0/9735)$$

است و مقدار تابع هدف ۶/۳۴۱۹ است.

مثال ۲.۳: فرض کنید x_1 و x_2 متغیرهای تصمیم، ξ_1 و ξ_2 متغیرهای نایقین خطی با توزیع نایقینی خطی با توزیع یکسان $\mathcal{L}(0,\pi/2)$ هستند. مساله برنامه‌ریزی نایقین

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1,x_2} E\left[x_1\sin(x_1-\xi_1)-x_2\cos(x_2+\xi_2)\right] \\ \text{subject to:} \\ \qquad 0\le x_1\le \dfrac{\pi}{2},\quad 0\le x_2\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. واضح است که $x_1\sin(x_1-\xi_1)-x_2\cos(x_2+\xi_2)$ نسبت به ξ_1 افزایشی اکید و نسبت به ξ_2 کاهشی اکید است. بنابراین، این برنامه‌ریزی نایقین با مدل قطعی

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1,x_2} \displaystyle\int_0^1 \left(x_1\sin(x_1-\Phi_1^{-1}(1-\alpha))-x_2\cos(x_2+\Phi_2^{-1}(\alpha))\right)\mathrm{d}\alpha \\ \text{subject to:} \\ \qquad 0\le x_1\le \dfrac{\pi}{2},\quad 0\le x_2\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

معادل است که در آن Φ_1^{-1},Φ_2^{-1} به ترتیب توزیع‌های نایقینی معکوس ξ_1,ξ_2 هستند. جواب بهینه

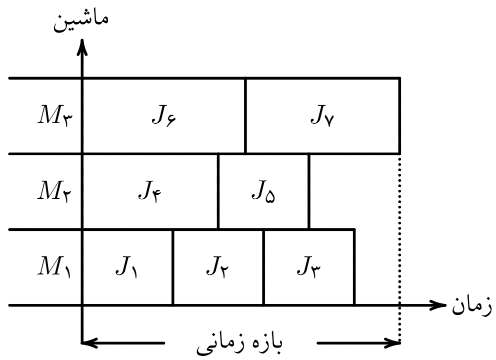
$$(x_1^*,x_2^*)=(0/4026,\ 0/4026)$$

و مقدار تابع هدف ۰/۲۷۰۸− است.

۳.۳ مساله برنامه‌ریزی ماشین

مساله برنامه‌ریزی ماشین با یافتن برنامه موثر در طی زمان بی‌وقفه برای یک سری ماشین که تعدادی کار را انجام می‌هد، سروکار دارد. تحقیقات زیادی روی این نوع از مساله‌ها انجام شده است. مطالعه مساله برنامه‌ریزی ماشین با زمان‌های انجام کار نایقین در سال ۲۰۱۰ توسط لیو شروع شد [۹۱].

در مساله برنامه‌ریزی ماشین، فرض می‌کنیم (الف) هر کار را می‌توان بی‌وقفه روی هر ماشین انجام داد؛ (ب) در هر زمان، هر ماشین تنها می‌تواند یکی از کارها را انجام دهد؛ (ج) زمان انجام کارها متغیرهای نایقین با توزیع‌های معلوم است. همچنین اندیس‌ها و پارامترهای زیر را استفاده می‌کنیم:



شکل ۱.۳: یک برنامه ماشین با ۳ ماشین و ۷ کار.

$i = ۱, ۲, \ldots, n$: کارها؛
$k = ۱, ۲, \ldots, m$: ماشین‌ها؛
ξ_{ik}: زمان نایقین انجام کار i روی ماشین k؛
Φ_{ik}: توزیع نایقینی ξ_{ik}.

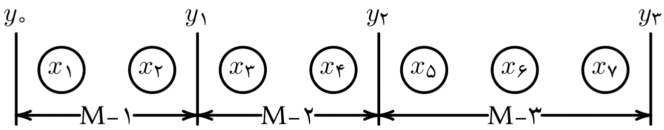
برنامه را چگونه نشان دهیم؟

لیو پیشنهاد کرد [۸۲] که برنامه انجام کار را می‌توان با دو بردار تصمیم $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ نشان داد، که در آن $\boldsymbol{x} = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$: بردار تصمیم صحیح بیانگر n کار با $۱ \le x_i \le n$ و $x_i \ne x_j$ برای تمامی $i \ne j$ و $i, j = ۱, ۲, \ldots, n$. یعنی دنباله $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ یک بازترتیب $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است؛
$\boldsymbol{y} = (y_۱, y_۲, \ldots, y_{m-۱})$: بردار تصمیم صحیح با

$$y_۰ \equiv ۰ \le y_۱ \le y_۲ \le \cdots \le y_{m-۱} \le n \equiv y_m.$$

توجه کنید که برنامه انجام کارها به طور کامل با بردارهای تصمیم $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ به ترتیب زیر مشخص می‌شود. برای هر k ($۱ \le k \le m$) اگر $y_k = y_{k-۱}$، آنگاه ماشین k استفاده نمی‌شود؛ اگر $y_k > y_{k-۱}$، آنگاه ماشین k کار می‌کند و کارهای $x_{y_{k-۱}+۱}, x_{y_{k-۱}+۲}, \ldots, x_{y_k}$ را پشت سر هم انجام می‌دهد. بنابراین، برنامه تمام ماشین‌ها به صورت زیر است.

$$\begin{array}{ll} \text{ماشین } ۱: & x_{y_۰+۱} \to x_{y_۰+۲} \to \cdots \to x_{y_۱}; \\ \text{ماشین } ۲: & x_{y_۱+۱} \to x_{y_۱+۲} \to \cdots \to x_{y_۲}; \\ \cdots & \\ \text{ماشین } m: & x_{y_{m-۱}+۱} \to x_{y_{m-۱}+۲} \to \cdots \to x_{y_m}. \end{array} \qquad (۱۹.۳)$$



شکل ۲.۳: فرمول بندی برنامه طوری که ماشین ۱ کارهای x_1, x_2، ماشین ۲ کارهای x_3, x_4 و ماشین ۳ کارهای x_5, x_6, x_7 را انجام می‌دهد.

زمان‌های تکمیل

فرض کنید $C_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$ به ترتیب زمان‌های تکمیل کارهای i و $i = 1, 2, \cdots, n$ هستند. برای هر k با $1 \le k \le m$، اگر ماشین k استفاده شود (یعنی $y_k > y_{k-1}$)، آنگاه داریم

$$C_{x_{y_{k-1}+1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}) = \xi_{x_{y_{k-1}+1}k} \tag{۲۰.۳}$$

و

$$C_{x_{y_{k-1}+j}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}) = C_{x_{y_{k-1}+j-1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}) + \xi_{x_{y_{k-1}+j}k} \tag{۲۱.۳}$$

برای $2 \le j \le y_k - y_{k-1}$.

اگر ماشین k استفاده شود، آنگاه زمان تکمیل $C_{x_{y_{k-1}+1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$ برای کار $x_{y_{k-1}+1}$ یک متغیر نایقین است که توزیع معکوس آن

$$\Psi^{-1}_{x_{y_{k-1}+1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha) = \Phi^{-1}_{x_{y_{k-1}+1}k}(\alpha) \tag{۲۲.۳}$$

است. در حالت کلی، فرض کنید زمان تکمیل نایقین $C_{x_{y_{k-1}+j-1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$ توزیع نایقینی معکوس $\Psi^{-1}_{x_{y_{k-1}+j-1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha)$ دارد. در این صورت زمان تکمیل $C_{x_{y_{k-1}+j}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}_{x_{y_{k-1}+j}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha) = \Psi^{-1}_{x_{y_{k-1}+j-1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha) + \Phi^{-1}_{x_{y_{k-1}+j}k}(\alpha) \tag{۲۳.۳}$$

دارد. فرایند بازگشتی، تمامی توزیع‌های نایقینی معکوس زمان تکمیل تمام کارها را تولید می‌کند.

بازه زمانی

توجه کنید که برای هر k ($1 \le k \le m$)، مقدار $C_{x_{y_k}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$ همان زمانی است که ماشین k انجام تمامی کارهایی را که به آن محول کرده‌اند، خاتمه می‌دهد. بنابراین، بازه زمانی برنامه $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ با رابطه

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}) = \max_{1 \le k \le m} C_{x_{y_k}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}) \tag{۲۴.۳}$$

مشخص می‌شود که توزیع نایقینی معکوس آن

$$\Upsilon^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha) = \max_{1 \le k \le m} \Psi^{-1}_{x_{y_k}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha) \tag{۲۵.۳}$$

است.

مدل برنامه‌ریزی ماشین

برای کمینه کردن بازه زمانی مورد انتظار $E[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})]$، مدل برنامه‌ریزی ماشین زیر را داریم

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} E[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})] \\ \text{subject to:} \\ \qquad ۱ \le x_i \le n, \quad i = ۱,۲,\ldots,n \\ \qquad x_i \ne x_j, \quad i \ne j,\ i,j = ۱,۲,\ldots,n \\ \qquad ۰ \le y_۱ \le y_۲ \cdots \le y_{m-۱} \le n \\ \qquad x_i, y_j, \quad i = ۱,۲,\ldots,n, \quad j = ۱,۲,\ldots,m-۱, \quad \text{صحیح اعداد}. \end{cases} \tag{۲۶.۳}$$

چون $\Upsilon^{-۱}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$ است، مدل برنامه‌ریزی ماشین به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \int_۰^۱ \Upsilon^{-۱}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ \text{subject to:} \\ \qquad ۱ \le x_i \le n, \quad i = ۱,۲,\ldots,n \\ \qquad x_i \ne x_j, \quad i \ne j,\ i,j = ۱,۲,\ldots,n \\ \qquad ۰ \le y_۱ \le y_۲ \cdots \le y_{m-۱} \le n \\ \qquad x_i, y_j, \quad i = ۱,۲,\ldots,n, \quad j = ۱,۲,\ldots,m-۱, \quad \text{صحیح اعداد}. \end{cases} \tag{۲۷.۳}$$

تجربه عددی

فرض کنید ۳ ماشین داریم و ۷ کار با زمان انجام نایقین خطی

$$\xi_{ik} \sim \mathcal{L}(i, i+k), \quad i = ۱,۲,\ldots,۷,\ k = ۱,۲,۳$$

که در آن i اندیس کارها و k اندیس ماشین‌ها است، وجود دارند. جواب بهینه

$$\boldsymbol{x}^* = (۱,۴,۵,۳,۷,۲,۶), \quad \boldsymbol{y}^* = (۳,۵) \tag{۲۸.۳}$$

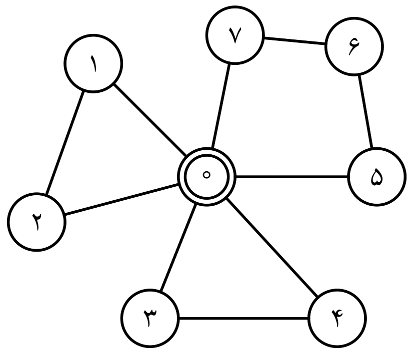
است. به عبارت دیگر، برنامه ماشین بهینه

ماشین ۱: ۵ $\to$ ۴ $\to$ ۱
ماشین ۲: ۷ $\to$ ۳
ماشین ۳: ۶ $\to$ ۲

و بازه زمانی مورد انتظار ۱۲ است.

۴.۳ مساله مسیریابی خودرو

مساله مسیریابی خودرو با یافتن مسیرهای موثر برای یک ناوگان از خودروهایی که به تعدادی مشتری خدمات ارائه می‌کنند و از یک مرکز شروع و به همان مرکز ختم می‌شوند، سرو کار دارد.



شکل ۳.۳: طرح مسیرهای خودرو با یک ایستگاه و هفت مشتری

با توجه به وسعت کاربرد و اهمیت اقتصادی، مساله مسریابی خودرو به طور گسترده‌ای مطالعه شده است. این مساله اولین بار توسط لیو [۹۱] در نظریه نایقینی در حوزه تحقیقات مساله مسیریابی خودرو در سال ۲۰۱۰ مطرح شد. در این بخش، مساله مسیریابی خودور با برنامه‌ریزی نایقین مدل بندی خواهد شد که در آن زمان‌های مسافرت متغیرهای نایقین با توزیع‌های نایقینی معلوم هستند.

فرض‌های زیر را داریم (الف) هر خودرو فقط به یک مسیر اختصاص داده می‌شود که در این مسیر ممکن است بیش از یک مشتری وجود داشته باشد؛ (ب) به هر مشتری فقط توسط یک خودرو خدمت ارائه خواهد شد؛ (ج) هر مسیر از ایستگاه شروع و در ایستگاه خاتمه می‌یابد؛ و (د) هر مشتری بازه زمانی را مشخص می‌کند که ارائه خدمت در آن بازه مجاز است و یا شروع ارائه خدمت در آن باز مطلوب‌تر است.

ابتدا اندیس‌ها و پارامترهای مدل را معرفی می‌کنیم:

$i = ۰$: ایستگاه؛

$i = ۱, ۲, \ldots, n$:مشتریان؛

$k = ۱, ۲, \ldots, m$: خودروها؛

D_{ij}: فاصله سفر از مشتری i به مشتری j، $i, j = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$؛

T_{ij}: زمان سفر نایقین از مشتری i به مشتری j، $i, j = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$؛ رمان

Φ_{ij}: توزیع نایقینی T_{ij}، $i, j = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$؛

$[a_i, b_i]$: پنجره زمانی برای مشتری i، $i = ۱, ۲, \ldots, n$؛

طرح عملیاتی

لیو پیشنهاد کرد که طرح عملیاتی باید با سه بردار تصمیم $\boldsymbol{x}$، $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{t}$ نمایش داده شود [۸۲] که

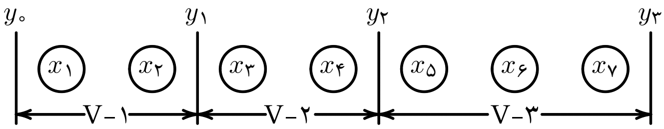
$\boldsymbol{x} = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$: بردار تصمصم صحیح و نشانگر n مشتری با $۱ \leq x_i \leq n$ و $x_i \neq x_j$ برای هر $i \neq j$، $i, j = ۱, ۲, \ldots, n$. یعنی دنباله $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ یک بازترتیب از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است؛

$\boldsymbol{y} = (y_۱, y_۲, \ldots, y_{m-۱})$: بردار تصمیم صحیح با $y_۰ \equiv ۰ \leq y_۱ \leq y_۲ \leq \cdots \leq y_{m-۱} \leq n \equiv y_m$ است؛

$\boldsymbol{t} = (t_۱, t_۲, \ldots, t_m)$: هر t_k نشانگر زمان شروع حرکت خودروی k از ایستگاه و $k = ۱, ۲, \ldots, m$ است.

توجه کنید که طرح عملیاتی به طور کامل با بردارهای تصمیم $\boldsymbol{x}$، $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{t}$ به صورت زیر مشخص می‌شود. برای هر k ($1 \le k \le m$)، اگر $y_k = y_{k-1}$، ان گاه خودروی k استفاده نمی‌شود، اگر $y_k > y_{k-1}$، آنگاه خودروی k استفاده می‌شود و حرکت خود را از ایستگاه در زمان t_k شروع می‌کند، و مسیر خودروی k به صورت $0 \to x_{y_{k-1}+1} \to x_{y_{k-1}+2} \to \cdots \to x_{y_k} \to 0$ است. بنابراین مسیر تمام خودروها به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\text{خودروی } 1: 0 \to x_{y_0+1} \to x_{y_0+2} \to \cdots \to x_{y_1} \to 0;\\
&\text{خودروی } 2: 0 \to x_{y_1+1} \to x_{y_1+2} \to \cdots \to x_{y_2} \to 0;\\
&\quad\vdots\\
&\text{خودروی } m: 0 \to x_{y_{m-1}+1} \to x_{y_{m-1}+2} \to \cdots \to x_{y_m} \to 0.
\end{aligned}
$$



شکل ۴.۳: فرمول بندی طرح عملیاتی که در آن خودوری ۱ مشتری‌های x_1, x_2 را ملاقات می‌کند، خودروی ۲ مشتری‌های x_3, x_4 را ملاقات می‌کند و خودروی ۳ مشتری‌های x_5, x_6, x_7 را ملاقات می‌کند.

واضح است که این نوع نمایش شهودی است و تعداد کل متغیرهای تصمیم $n + 2m - 1$ است. همچنین توجه کنید که متغیرهای تصمیم $\boldsymbol{x}$، $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{t}$ تضمین می‌کنند که: (الف) هر خودرو حداکثر یک بار استفاده می‌شود؛ (ب) هر مسیر از ایستگاه شروع شده و در ایستگاه خاتمه می‌یابد؛ (ج) هر مشتری فقط توسط یک خودرو ملاقات می‌شود؛ و (د) زیرمسیر وجود ندارد.

زمان‌های رسیدن

فرض کنید $f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t})$ تابع زمان رسیدن یکی از خودروها به مشتری‌های i، برای $i = 1, 2, \ldots, n$ است. یادآوری می‌کینم که $f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t})$ برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، با هر بردارهای تصمیم $\boldsymbol{x}$، $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{t}$ مشخص می‌شود. چون تخلیه محموله ممکن است بلافاصله بعد از رسیدن خودرو به مکان مشتری و یا پس از آن انجام شود، محاسبه مقدار $f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t})$ کاملاً به راهبرد عملیاتی وابسته است. اینجا فرض می‌کنیم هیچ کدام از مشتری‌ها اجازه تخلیه را قبل از پنجره زمانی نمی‌دهند. اگر خودرویی قبل از پنجره زمانی به محل مشتری برسد باید برای تخلیه بار منتظر شروع پنجره زمانی باشد. اگر خودرو پس از شروع بازه زمانی به محل مشتری برسد، تخلیه بلافاصله شروع می‌شود. برای هر k با $1 \le k \le m$، اگر خودروی k استفاده شود (یعنی $y_k > y_{k-1}$)، آنگاه داریم

$$f_{x_{y_{k-1}+1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}) = t_k + T_{0 x_{y_{k-1}+1}}$$

و

$$f_{x_{y_{k-1}+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}) = f_{x_{y_{k-1}+j-1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}) \vee a_{x_{y_{k-1}+j-1}} + T_{x_{y_{k-1}+j-1} x_{y_{k-1}+j}}$$

برای $2 \leq j \leq y_k - y_{k-1}$. اگر خودروی k استفاده شود یعنی $y_k > y_{k-1}$، آنگاه زمان رسیدن $f_{x_{y_{k-1}+1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t})$ به مشتری $x_{y_{k-1}+1}$ یک متغیر نایقین است که توزیع نایقینی معکوس آن به صورت

$$\Psi^{-1}_{x_{y_{k-1}+1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}, \alpha) = t_k + \Phi^{-1}_{0x_{y_{k-1}+1}}(\alpha),$$

است. در حالت کلی، فرض کنید زمان رسیدن نایقین $f_{x_{y_{k-1}+j-1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t})$، توزیع نایقینی معکوس $\Psi^{-1}_{x_{y_{k-1}+j-1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}, \alpha)$ دارد. در این صورت برای $2 \leq j \leq y_k - y_{k-1}$، $f_{x_{y_{k-1}+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t})$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}_{x_{y_{k-1}+j}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}, \alpha) = \Psi^{-1}_{x_{y_{k-1}+j-1}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}, \alpha) \vee a_{x_{y_{k-1}+j-1}} + \Phi^{-1}_{x_{y_{k-1}+j-1}x_{y_{k-1}+j}}(\alpha)$$

دارد. با این فرایند بازگشتی، تمامی توزیع‌های نایقینی معکوس رسیدن به همه مشتریان مشخص می‌شوند.

فاصله سفر

فرض کنید $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ کل فاصله طی شده توسط همه خودروها را نشان دهد. آنگاه داریم

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{m} g_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad (۲۹.۳)$$

که در آن برای $k = 1, 2, \ldots, m$،

$$g_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} D_{0x_{y_{k-1}+1}} + \sum\limits_{j=y_{k-1}+1}^{y_k-1} D_{x_j x_{j+1}} + D_{x_{y_k}0}, & \text{اگر } y_k > y_{k-1} \\ 0, & \text{اگر } y_k = y_{k-1} \end{cases}$$

مدل مسیریابی خودرو

اگر امیدوار باشیم که مشتری i $(1 \leq i \leq n)$ در بازه زمانی خودش $[a_i, b_i]$ با سطح اطمینان α_i ملاقات می‌شود (یعنی خودرو به مشتری i قبل از زمان b_i می‌رسد)، آنگاه قید شانس زیر را داریم،

$$\mathcal{M}\{f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}) \leq b_i\} \geq \alpha_i. \qquad (۳۰.۳)$$

اگر بخواهیم کل مسافت طی شده توسط همه خودروها را کمینه کنیم طوری که قیدهای مساله هم برقرار باشند، مدل مسیریابی خودرو زیر را داریم،

(۳۱.۳)

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathcal{M}\{f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}) \leq b_i\} \geq \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \qquad 1 \leq x_i \leq n, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \qquad x_i \neq x_j, \quad i \neq j, \; i, j = 1, 2, \ldots, n \\ \qquad 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{m-1} \leq n \\ \qquad x_i, y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \quad \text{اعداد صحیح} \end{cases}$$

این مساله با مساله

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \text{subject to:} \\ \qquad \Psi_i^{-۱}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t},\alpha_i) \le b_i, \quad i = ۱,۲,\ldots,n \\ \qquad ۱ \le x_i \le n, \quad i = ۱,۲,\ldots,n \\ \qquad x_i \ne x_j, \quad i \ne j,\ i,j = ۱,۲,\ldots,n \\ \qquad ۰ \le y_۱ \le y_۲ \le \cdots \le y_{m-۱} \le n \\ \qquad x_i, y_j, \quad i = ۱,۲,\ldots,n, \quad j = ۱,۲,\ldots,m-۱, \quad \text{اعداد صحیح} \end{cases} \tag{۳۲.۳}$$

معادل است و $\Psi_i^{-۱}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t},\alpha)$ توزیع‌های نایقینی معکوس $f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t})$ برای $i = ۱,۲,\ldots,n$ هستند.

تجربه عددی

سه خودرو و ۷ مشتری با پنجره زمانی ارائه شده در جدول ۱.۳ را در نظر بگیرید، و هر مشتری با سطح اطمینان ۰٫۹۰ در بازه زمانی خودش ملاقات می‌شود.

جدول ۱.۳: پنجره زمانی مشتریان

گره	پنجره	گره	پنجره
۱	$[۷:۰۰, ۹:۰۰]$	۵	$[۱۵:۰۰, ۱۷:۰۰]$
۲	$[۷:۰۰, ۹:۰۰]$	۶	$[۱۹:۰۰, ۲۱:۰۰]$
۳	$[۱۵:۰۰, ۱۷:۰۰]$	۷	$[۱۹:۰۰, ۲۱:۰۰]$
۴	$[۱۵:۰۰, ۱۷:۰۰]$		

همچنین فرض می‌کنیم برای $i,j = ۰,۱,۲,\ldots,۷$، فاصله‌ها $D_{ij} = |i-j|$ هستند و زمان‌های سفر توزیع نایقینی نرمال

$$T_{ij} \sim \mathcal{N}(۲|i-j|, ۱), \quad i,j = ۰,۱,۲,\ldots,۷$$

دارند. جواب بهینه

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= (۱,۳,۲,۵,۷,۴,۶), \\ \boldsymbol{y}^* &= (۲,۵), \\ \boldsymbol{t}^* &= (۶:۱۸, ۴:۱۸, ۸:۱۸). \end{aligned} \tag{۳۳.۳}$$

است. به عبارت دیگر طرح عملیاتی بهینه

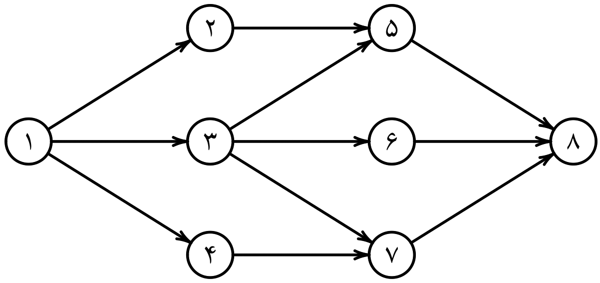
خودروی ۱: ایستگاه $\to$ ۳ $\to$ ۱ $\to$ ایستگاه (دیرترین زمان حرکت ۶:۱۸ است.)
خودوری ۲: ایستگاه $\to$ ۷ $\to$ ۵ $\to$ ۲ $\to$ ایستگاه (دیرترین زمان حرکت ۴:۱۸ است.)
خودروی ۳: ایستگاه $\to$ ۶ $\to$ ۴ $\to$ ایستگاه (دیرترین زمان حرکت ۸:۱۸ است.)

کل زمان سفر ۳۲ است.

۵.۳ مساله زمان‌بندی پروژه

مساله زمان‌بندی پروژه عبارت است از مشخص کردن زمان اختصاص منابع طوری که بین کل هزینه و زمان اتمام پروژه تعادلی برقرار باشد. مطالعه مساله زمان‌بندی پروژه با عوامل نایقین توسط لیو در سال ۲۰۱۰ شروع شد [۹۱]. این بخش مدل برنامه‌ریزی نایقین برای مساله زمان‌بندی پروژه ارائه می‌کند که در آن زمان‌های انجام کارها متغیرهای نایقین با توزیع‌های نایقینی معلوم هستند.

زمان‌بندی پروژه اغلب با شبکه بی‌دور جهت‌دار نمایش داده می‌شود که در آن گره‌ها متناظر با مرحله مهمی از پروژه است، و کمان‌ها فعالیت‌ها را نشان می‌دهند که اساسا زمان و هزینه آنها را شامل هستند.



شکل ۵.۳: یک پروژه با ۸ مرحله مهم و ۱۱ فعالیت.

فرض کنید $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ یک گراف بی‌دور است که در آن $\mathcal{V} = \{۱, ۲, \ldots, n, n+۱\}$ مجموعه گره‌ها و $\mathcal{A}$ مجموعه کمان‌ها است، $(i, j) \in \mathcal{A}$ کمانی در گراف $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ از گره i به گره j است. متداول است که اندیس‌های گره‌ها در $\mathcal{V}$ چنان مرتب کنیم که برای هر $(i, j) \in \mathcal{A}$، $i < j$.

قبل از مطالعه مساله زمان‌بندی پروژه با زمان‌های اجرای نایقین، ابتدا چند فرض را در نظر می‌گیریم: (الف) تمامی هزینه با وام با نرخ مشخص بازپرداخت تامین می‌شوند؛ (ب) هر فعالیت تنها زمانی اجرا می‌شود که وام مورد نیاز آن اختصاص داده شده و تمامی فعالیت‌های قبل از آن به اتمام رسیده باشند.

برای مدل‌بندی مساله زمان‌بندی پروژه، اندیس‌ها و پارامترهای زیر را تعریف می‌کنیم:

ξ_{ij}: زمان اجرای نایقین فعالیت (i, j) در $\mathcal{A}$؛

Φ_{ij}: توزیع نایقینی ξ_{ij}؛

c_{ij}: هزینه فعالیت (i, j) در $\mathcal{A}$؛

r: نرخ بازپرداخت؛

x_i: متغیر تصمیم صحیح بیانگر زمان اختصاص وام لازم برای فعالیت (i, j) در $\mathcal{A}$.

زمان‌های شروع

برای سادگی، می‌نویسیم $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_{ij} : (i, j) \in \mathcal{A}\}$ و $\boldsymbol{x} = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$. فرض کنید $T_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ نشان دهنده زمان شروع فعالیت (i, j) در $\mathcal{A}$ است. با توجه به فرض‌ها، زمان شروع کل پروژه (یعنی زمان شروع همه فعالیت‌های $(۱, j)$ در $\mathcal{A}$) باید در رابطه

$$T_۱(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = x_۱ \tag{۳۴.۳}$$

صدق کند که در آن توزیع نایقینی معکوس به صورت

$$\Psi_۱^{-۱}(\boldsymbol{x}, \alpha) = x_۱ \tag{۳۵.۳}$$

است. با توجه به زمان شروع $T_۱(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$، نتیجه می‌گیریم که زمان شروع فعالیت $(۲,۵)$ عبارت است از

$$T_۲(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = x_۲ \vee (x_۱ + \xi_{۱۲}) \tag{۳۶.۳}$$

که در آن توزیع نایقینی معکوس را می‌توان به صورت

$$\Psi_۲^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha) = x_۲ \vee (x_۱ + \Phi_{۱۲}^{-۱}(\alpha)) \tag{۳۷.۳}$$

نوشت.

در حالت کلی، فرض کنید زمان شروع $T_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ فعالیت (k,i) در $\mathcal{A}$ توزیع نایقینی معکوس $\Psi_k^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha)$ دارد. در این صورت زمان شروع $T_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ فعالیت (i,j) در $\mathcal{A}$ باید در رابطه زیر صدق کند

$$T_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = x_i \vee \max_{(k,i)\in\mathcal{A}} (T_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) + \xi_{ki}) \tag{۳۸.۳}$$

که توزیع نایقینی معکوس آن به صورت

$$\Psi_i^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha) = x_i \vee \max_{(k,i)\in\mathcal{A}} \left(\Psi_k^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha) + \Phi_{ki}^{-۱}(\alpha)\right) \tag{۳۹.۳}$$

است. این رابطه بازگشتی توزیع نایقینی معکوس زمان‌های شروع همه فعالیت‌ها را مشخص می‌کند.

زمان تکمیل

زمان تکمیل کل پروژه $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ (یعنی زمان خاتمه تمامی فعالیت‌های $(k,n+۱)$ در $\mathcal{A}$) به صورت

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \max_{(k,n+۱)\in\mathcal{A}} (T_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) + \xi_{k,n+۱}) \tag{۴۰.۳}$$

است که توزیع نایقینی معکوس آن

$$\Psi^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha) = \max_{(k,n+۱)\in\mathcal{A}} \left(\Psi_k^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha) + \Phi_{k,n+۱}^{-۱}(\alpha)\right) \tag{۴۱.۳}$$

است.

هزینه کل

بر اساس زمان تکمیل پروژه $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$، هزینه کل پروژه به صورت

$$C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}\,(۱+r)^{\lceil T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - x_i\rceil} \tag{۴۲.۳}$$

نوشته می‌شود که در آن $\lceil a\rceil$ نشانگر کمترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی a است. توجه کنید که $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ یک متغیر نایقین گسسته است که برای هر $۰ < \alpha < ۱$، توزیع نایقینی معکوس آن

$$\Upsilon^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}\,(۱+r)^{\lceil \Psi^{-۱}(\boldsymbol{x};\alpha) - x_i\rceil} \tag{۴۳.۳}$$

است.

مدل برنامه‌ریزی پروژه

برای کمینه کردن هزینه مورد انتظار پروژه با محدودیت زمان تکمیل، می‌توان مدل زمان‌بندی پروژه زیر را طراحی کرد.

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} E[C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathcal{M}\{T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le T_۰\} \ge \alpha_۰ \\ \qquad \boldsymbol{x} \ge ۰, \text{بردار صحیح} \end{cases} \tag{۴۴.۳}$$

که در آن $T_۰$ زمان تعیین شده برای تکمیل پروژه، $\alpha_۰$ سطح اطمینان از قبل مشخص شده، $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ زمان تکمیل پروژه است که با رابطه (۴۰.۳) تعریف شده است، و $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ هزینه کل است که با (۴۲.۳) تعریف می‌شود. این مدل با

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} \int_۰^۱ \Upsilon^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ \text{subject to:} \\ \qquad \Psi^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha_۰) \le T_۰ \\ \qquad \boldsymbol{x} \ge ۰, \text{بردار صحیح} \end{cases} \tag{۴۵.۳}$$

معادل است که در آن $\Psi^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ تعریف شده با (۴۱.۳) و $\Upsilon^{-۱}(\boldsymbol{x},\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ تعریف شده با (۴۳.۳) است.

تجربه عددی

مساله زمان‌بندی پروژه که با شکل ۵.۳ نشان داده شده است را در نظر بگیرید که ۸ مرحله مهم و ۱۱ فعالیت را شامل است. فرض کنید زمان اجرای فعالیت‌ها متغیرهای نایقین خطی هستند،

$$\xi_{ij} \sim \mathcal{L}(۳i, ۳j), \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$

و هزینه فعالیت‌ها

$$c_{ij} = i + j, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$

هستند. همچنین، نرخ بازپرداخت وام را $r = ۰/۰۲$ ، زمان خاتمه را $T_۰ = ۶۰$، و سطح اطمینان را $\alpha_۰ = ۰/۸۵$ در نظر می‌گیریم. جواب بهینه

$$\boldsymbol{x}^* = (۷, ۲۴, ۱۷, ۱۶, ۳۵, ۳۳, ۳۰). \tag{۴۶.۳}$$

است. زمان‌های بهینه تخصیص وام‌های مورد نیاز برای هر فعالیت در جدول ۲.۳ نشان داده شده است و مقدار هزینه مورد انتظار ۱۹۰/۶ و

$$\mathcal{M}\{T(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\xi}) \le ۶۰\} = ۰/۸۸$$

است.

جدول ۲.۳: زمان تخصیص بهینه وام‌ها

روز	۷	۱۶	۱۷	۲۴	۳۰	۳۳	۳۵
گره	۱	۴	۳	۲	۷	۶	۵
وام	۱۲	۱۱	۲۷	۷	۱۵	۱۴	۱۳

۶.۳ برنامه‌ریزی چندهدفی نایقین

به وضوح مشخص است که بسیاری از مساله‌های تصمیم گیری در دنیای واقعی چندین هدف متضاد و مقایسه ناپذیر دارند که باید به طور همزمان مد نظر باشند. برای بهینه سازی چند هدف، برنامه‌ریزی چندهدفی توسعه یافته و کاربردهای وسیعی دارد. برای مدل‌بندی مساله‌های تصمیم گیری چند هدفی با پارامترهای نایقین، لیو و چِن [۱۰۳] برنامه‌ریزی چند هدفی نایقین زیر را معرفی کردند.

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} \left(E[f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})], E[f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})], \ldots, E[f_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]\right) \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le 0\} \ge \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p \end{cases} \tag{۴۷.۳}$$

که در آن برای $i = 1, 2, \ldots, m$، $f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ تابع‌های هدف هستند، و برای $j = 1, 2, \ldots, p$، $g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ تابع‌های قید و α_j سطح‌های اطمینان هستند.

چون اهداف اغلب با هم در تضاد هستند، جواب بهینه‌ای وجود ندارد که همه تابع‌های هدف را به طور همزمان کمینه کند. در این حالت، مفهوم *جواب پارتو* معرفی می‌شود، که به این معنی است که امکان ندارد مقدار یکی از هدف‌ها را بهبود دهیم بدون آن که حداقل یکی دیگر از اهداف بدتر شود.

تعریف ۳.۳ *جواب شدنی $\boldsymbol{x}^*$ برای برنامه‌ریزی چندهدفی نایقین (۴۷.۳) را پارتو گویند اگر جواب شدنی دیگری مانند $\boldsymbol{x}$ وجود نداشته باشد که*

$$E[f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] \le E[f_i(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\xi})], \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{۴۸.۳}$$

و حداقل برای یک اندیس j، $E[f_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] < E[f_j(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\xi})]$.

اگر تصمیم گیرنده تابع حقیقی‌ـ مقدار ترجیح داشته باشد که m تابع هدف را با هم ترکیب کند، آنگاه می‌توان تابع هدف ترکیب شده را بر اساس قیدهای شانس مساله کمینه کرد. این مدل را *مدل توافقی* می‌نامیم و جواب آن را هم *جواب توافقی* گوییم. ثابت شده است که جواب توافقی یک جواب پارتو برای مدل چندهدفی اصلی است.

اولین مدل توافقی مشهور، با قرار دادن وزن برای تابع‌های هدف به وجود می‌آید، یعنی

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i E[f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le 0\} \ge \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p \end{cases} \tag{۴۹.۳}$$

که در آن وزن‌های $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ اعداد نامنفی هستند و $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$، به عنوان مثال برای $i = 1, 2, \ldots, m$، $\lambda_i \equiv 1/m$.

دومین روش به کمینه‌سازی *تابع فاصله* جواب از یک بردار ایده‌ال $(f_1^*, f_2^*, \dots, f_m^*)$ مربوط است،

$$(E[f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})], E[f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})], \dots, E[f_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]) \tag{۵۰.۳}$$

که در آن برای $i = 1, 2, \dots, m$، f_i^* مقدار بهینه مساله برای iامین هدف بدون در نظر گرفتن سایر هدف‌ها است. یعنی

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i (E[f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] - f_i^*)^2 \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le 0\} \ge \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \tag{۵۱.۳}$$

که در آن وزن‌های $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ اعداد نامنفی با $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$ هستند، به عنوان مثال برای هر $i = 1, 2, \dots, m$، $\lambda_i \equiv 1/m$.

در سومین روش، جواب توافقی با *رویکرد تعاملی* مشخص می‌شود که شامل دنباله‌ای از مراحل تصمیم و مراحل محاسباتی است. رویکردهای تعاملی مختلفی در عمل توسعه داده شده اند.

۷.۳ برنامه‌ریزی آرمانی نایقین

مفهوم برنامه‌ریزی آرمانی توسط چارنز و کوپر در سال ۱۹۶۱ معرفی شد [۴] و در ادامه محققین زیادی آن را مطالعه کردند. برنامه‌ریزی آرمانی را می‌توان به عنوان حالت خاصی از مدل توافقی در نظر گرفت و کاربردهای وسیعی در مساله‌های جهان واقعی دارد.

در مساله‌های تصمیم گیری چند هدفی، فرض می‌کنیم تصمیم گیرنده قادر است برای هر هدفی سطح آرمانی نسبت دهد و ایده اساسی کمینه کردن انحراف‌ها (مثبت، منفی و یا هر دو) از سطح آرمان است. در موقعیت‌های جهان واقعی، اهداف تنها زمانی قابل حصول هستند که هزینه حصول به سایر اهداف بیشتر شود و این اهداف معمولاً در تعارض با هم هستند. برای ایجاد تعادل بین اهداف معارض، تصمیم گیرنده معمولاً ترتیب اولویتی بین اهداف معارض ایجاد می‌کند و تا آنجا که امکان داشته باشد اهداف را در ترتیب اولویت ارضا کنند. برای مساله‌های تصمیم گیری چند هدفی با پارامترهای نایقین لیو و چِن برنامه ریزی آرمانی نایقین را پیشنهاد کردند [۱۰۳]،

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} \sum\limits_{j=1}^{l} P_j \sum\limits_{i=1}^{m} (u_{ij} d_i^+ + v_{ij} d_i^-) \\ \text{subject to:} \\ \qquad E[f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] + d_i^- - d_i^+ = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \qquad \mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le 0\} \ge \alpha_j, \qquad j = 1, 2, \dots, p \\ \qquad d_i^+, d_i^- \ge 0, \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \tag{۵۲.۳}$$

که در آن P_j عامل‌های اولویت پیشگیرانه ، u_{ij} و v_{ij} وزن‌های عامل‌ها، d_i^+ها انحراف‌های مثبت، d_i^-ها انحراف‌های منفی، f_i ها تابع‌ها در قیدهای آرمانی، g_jها تابع‌هایی در قیدهای حقیقی، b_iها مقادیر آرمانی، α_jها سطح اطمینان، l تعداد اولویت‌ها، m تعداد قیدهای هدف، و p تعداد قیدهای

حقیقی است. توجه کنید که انحرافهای مثبت و منفی برای هر i به صورت

$$d_i^+ = \begin{cases} E[f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] - b_i, & E[f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] > b_i \text{ اگر } \\ \circ, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۵۳.۳}$$

و

$$d_i^- = \begin{cases} b_i - E[f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})], & E[f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] < b_i \text{ اگر } \\ \circ, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۵۴.۳}$$

محاسبه می‌شوند اغلب، تابع هدف مدل برنامه‌ریزی آرمانی به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\text{lexmin}\left\{\sum_{i=۱}^{m}(u_{i۱}d_i^+ + v_{i۱}d_i^-), \sum_{i=۱}^{m}(u_{i۲}d_i^+ + v_{i۲}d_i^-), \cdots, \sum_{i=۱}^{m}(u_{il}d_i^+ + v_{il}d_i^-)\right\}$$

که در آن lexmin نشان دهنده کمینه سازی قاموسی بردار هدف است.

۸.۳ برنامه‌ریزی چندسطحی نایقین

برنامه ریزی چندسطحی ابزاری را برای مطالعه سیستم تصمیم گیری غیرمتمرکز پیشنهاد می‌کند که در آن فرض می‌کنیم یک پیشرو و پیروها تصمیمات خودشان را بر اساس تابع هدف خودشان می‌گیرند، پیشرو می‌تواند بر تصمیمات پیروها تاثیر گذار باشد، در حالی که پیروها اختیار کامل در اخذ تصمیمات خود برای بهینه سازی هدفشان با در نظر گرفتن تصمیمات پیشرو و سایر پیروها دارند.

فرض کنید در یک سیستم تصمیم دو سطحی غیرمتمرکز، یک پیشرو و m پیرو وجود دارند. فرض کنید $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}_i$ برای $i = ۱, ۲, \dots, m$، به ترتیب بردارهای کنترل پیشرو و پیرو iام است. همچنین فرض می‌کنیم تابع‌های هدف پیشرو و پیرو iام $i = ۱, ۲, \dots, m$ به ترتیب $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_۱, \dots, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{\xi})$ و $f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_۱, \dots, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{\xi})$ هستند که در آنها $\boldsymbol{\xi}$ یک بردار نایقین است.

فرض کنید مجموعه شدنی بردار کنترل $\boldsymbol{x}$ برای پیشرو با قید شانس

$$\mathcal{M}\{G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le \circ\} \ge \alpha \tag{۵۵.۳}$$

تعریف شود که در آن G تابع ثابت است، و α سطح اطمینان از قبل مشخص شده است. در این صورت برای هر تصمیم $\boldsymbol{x}$ انتخاب شده توسط پیشرو، شدنی بودن بردار کنترل $\boldsymbol{y}_i$ برای پیرو iام نه تنها باید به $\boldsymbol{x}$ وابسته باشد، بلکه به $\boldsymbol{y}_۱, \dots, \boldsymbol{y}_{i-۱}, \boldsymbol{y}_{i+۱}, \dots, \boldsymbol{y}_m$ نیز وابسته است و معمولاً با قید شانس

$$\mathcal{M}\{g_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_۱, \boldsymbol{y}_۲, \dots, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{\xi}) \le \circ\} \ge \alpha_i \tag{۵۶.۳}$$

نشان داده می‌شود که در آن g_i تابع قید است و α_i برای $i = ۱, ۲, \dots, m$ سطح‌های اطمینان از قبل مشخص شده هستند.

فرض کنید ابتدا پیشرو بردار کنترل خودش $\boldsymbol{x}$ را مشخص می‌کند، و سپس پیروها آرایه کنترل خود $(\boldsymbol{y}_۱, \boldsymbol{y}_۲, \dots, \boldsymbol{y}_m)$ را تعیین می‌کنند. برای کمینه کردن هدف مورد انتظار پیشرو؛ لیو و یائو [۱۰۴]

برنامه‌ریزی چندسطحی نایقین زیر را پیشنهاد کردند.

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} E[F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \dots, \boldsymbol{y}_m^*, \boldsymbol{\xi})] \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathcal{M}\{G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \le 0\} \ge \alpha \\ \qquad (\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \dots, \boldsymbol{y}_m^*) \text{مساله های زیر را حل می‌کند} (i = 1, 2, \dots, m) \\ \qquad \begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{y_i}} E[f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{\xi})] \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathcal{M}\{g_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{\xi}) \le 0\} \ge \alpha_i. \end{cases} \end{cases} \tag{۵۷.۳}$$

تعریف ۴.۳ *فرض کنید $\boldsymbol{x}$ بردار کنترل شدنی پیشرو است. یک تعادل نش برای پیروها آرایه شدنی $(\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \dots, \boldsymbol{y}_m^*)$ نسبت به $\boldsymbol{x}$ است اگر برای هر آرایه شدنی $(\boldsymbol{y}_1^*, \dots, \boldsymbol{y}_{i-1}^*, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_{i+1}^*, \dots, \boldsymbol{y}_m^*)$ و $i = 1, 2, \dots, m$*

$$\begin{aligned} & E[f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1^*, \dots, \boldsymbol{y}_{i-1}^*, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_{i+1}^*, \dots, \boldsymbol{y}_m^*, \boldsymbol{\xi})] \\ & \quad \ge E[f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1^*, \dots, \boldsymbol{y}_{i-1}^*, \boldsymbol{y}_i^*, \boldsymbol{y}_{i+1}^*, \dots, \boldsymbol{y}_m^*, \boldsymbol{\xi})] \end{aligned} \tag{۵۸.۳}$$

تعریف ۵.۳ *فرض کنید $\boldsymbol{x}^*$ یک بردار کنترل شدنی برای پیشرو و $(\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \dots, \boldsymbol{y}_m^*)$ یک تعادل نش برای پیروها نسبت به $\boldsymbol{x}^*$ است. آرایه $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \dots, \boldsymbol{y}_m^*)$ را تعادل نش‌ـ استکلبرگ برای برنامه‌ریزی چندسطحی (۵۷.۳) گوییم اگر برای هر بردار کنترل شدنی $\overline{\boldsymbol{x}}$ و تعادل نش $(\overline{\boldsymbol{y}}_1, \overline{\boldsymbol{y}}_2, \dots, \overline{\boldsymbol{y}}_m)$ نسبت به $\overline{\boldsymbol{x}}$ داشته باشیم:*

$$E[F(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}_1, \overline{\boldsymbol{y}}_2, \dots, \overline{\boldsymbol{y}}_m, \boldsymbol{\xi})] \ge E[F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \dots, \boldsymbol{y}_m^*, \boldsymbol{\xi})]. \tag{۵۹.۳}$$

۹.۳ نکات کتابشناسی

برنامه‌ریزی نایقین توسط لیو در سال ۲۰۰۹ پایه ریزی شد [۸۶] و در سال ۲۰۱۰ توسط لیو در مساله زمان‌بندی ماشین، مساله مسیریابی خودرو و مساله زمان‌بندی پروژه استفاده شد.

به عنوان تعمیم نظریه برنامه‌ریزی نایقین، لیو و چن برنامه‌ریزی چندهدفی نایقین و برنامه‌ریزی آرمانی نایقین را توسعه دادند [۱۰۳]. همچنین، لیو و یائو برنامه‌ریزی چندسطحی نایقین را برای مدل بندی سیستم‌های تصمیم غیرمتمرکز با عوامل نایقین را پیشنهاد دادند [۱۰۴]. بعداً، برنامه‌ریزی نایقین نتایج مفیدی را در نظریه و عمل به وجود آوردند.

فصل ۴

تحلیل ریسک نایقین

واژه ریسک به معانی ادبی مختلفی استفاده شده است. در اینجا ریسک به عنوان «زیان تصادفی» با توجه به «اندازه نایقین چنین زیانی» تعریف شده است. تحلیل ریسک نایقین یک ابزار برای تعیین مقدارریسک از طریق نظریه نایقینی است. یکی از ویژگی‌های اصلی این موضوع برای مدل بندی پیشامدهایی است که تقریباً هرگز رخ نمی‌دهد. این فصل یک تعریف، از شاخص ریسک معرفی می‌کند و چند فرمول مفید برای محاسبه شاخص ریسک ارائه می‌دهد. در این فصل همچنین تحلیل ریسک سازه‌ای و تحلیل ریسک سرمایه گذاری در محیط‌های نایقین بحث خواهد شد.

۱.۴ تابع زیان

یک سیستم معمولاً شامل عوامل $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ است که ممکن است طول عمر، مقاومت، تقاضا، نرخ تولید، هزینه، سود و منبع سیستم باشند. به بیان کلیتر، یک زیان مشخص وابسته به عوامل است. چون زیان یک مفهوم وابسته به مساله است، معمولاً چنین زیانی با یک تابع زیان نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۴ *یک سیستم با عوامل $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ را در نظر بگیرید. تابع f برای یک زیان مشخص نامیده می‌شود اگر و تنها اگر*

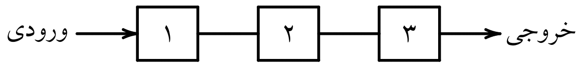
$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > 0. \tag{۱.۴}$$

مثال ۱.۴: یک سیستم سری با n عنصر که طول عمر آنها متغیرهای نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ هستند، در نظر بگیرید. چنین سیستمی زمانی کار می‌کند که تمام عناصرآن همزمان کار کنند. بنابراین طول عمر سیستم به صورت زیر است:

$$\xi = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n. \tag{۲.۴}$$

اگر زیان به عنوان موردی که سیستم قبل از زمان T از کار افتاد لحاظ شود، آن گاه یک تابع توزیع زیان به صورت

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = T - \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n. \tag{۳.۴}$$



شکل ۱.۴: یک سیستم سری

داریم. پس سیستم از کار می‌افتد اگر و تنها اگر $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > 0$.

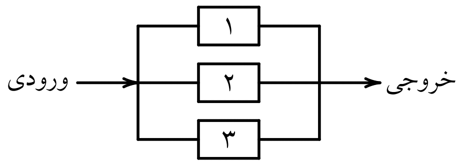
مثال ۲.۴: یک سیستم موازی با n عنصر در نظر بگیرید که در آن طول عمر عناصر متغیرهای نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ هستند. چنین سیستمی کار می‌کند هرگاه حداقل یک عنصر آن کار کند. بنابراین، طول عمر سیستم به صورت

$$\xi = \xi_1 \vee \xi_2 \vee \cdots \vee \xi_n \tag{۴.۴}$$

است. اگر زیان به عنوان موردی که سیستم قبل از زمان T از کار افتاده لحاظ شود آن گاه تابع زیان به صورت

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = T - \xi_1 \vee \xi_2 \vee \cdots \vee \xi_n \tag{۵.۴}$$

است. پس سیستم از کار می‌افتد اگر و تنها اگر $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > 0$.



شکل ۲.۴: یک سیستم موازی

مثال ۳.۴: یک سیستم kـ‌ازـn عنصر را در نظر بگیرید که در آن n عنصر وجود دارد که طول عمر آنها متغیرهای نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ هستند. چنین سیستمی کار می‌کند هر گاه حداقل k عنصر از n عنصر کار کند. بنابراین طول عمر سیستم عبارت است از

$$\xi = k\text{-}\max\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]. \tag{۶.۴}$$

اگر زیان به عنوان موردی که سیستم قبل از زمان T از کار می‌افتد لحاظ شود، آن گاه تابع زیان به صورت

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = T - k\text{-}\max\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \tag{۷.۴}$$

است. پس سیستم از کار می‌افتد اگر و تنها اگر $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > 0$. توجه داشته باشید که سیستم سری، یک سیستم nـ‌ازـn است و سیستم موازی، یک سیستم تک خروجی از n است.

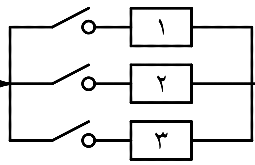
مثال ۴.۴: یک سیستم آماده‌ـ‌به‌ـ‌کار که در آن n عنصر آماده به کار وجود دارد در نظر بگیرید که طول عمر آنها $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ هستند. برای این سیستم، تنها یک عنصر فعال است و یکی از عناصر ذخیره تنها زمانی شروع به کارکند که عنصر فعال از کار بیفتد. بنابراین طول عمر سیستم عبارت است از

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n. \tag{۸.۴}$$

اگر زیان به عنوان موردی که سیستم قبل از زمان T از کار بیفتد در نظرگرفته شود، آن گاه تابع زیان به صورت

$$f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) = T - (\xi_۱ + \xi_۲ + \cdots + \xi_n) \tag{۹.۴}$$

است. پس سیستم از کار می‌افتد اگر و تنها اگر $f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) > ۰$.



شکل ۳.۴: یک سیستم آماده_ به_ کار

۲.۴ شاخص ریسک

درعمل، عوامل $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ از یک سیستم، معمولاً متغیرهای نایقین، به جای ثابت‌های معلوم، هستند. بنابراین شاخص ریسک به عنوان اندازه نایقین که زیان معینی رخ می‌دهد، تعریف شده است.

تعریف ۲.۴ [۹۰] *فرض کنید که یک سیستم شامل عوامل نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \cdots, \xi_n$ با تابع زیان f است. پس شاخص ریسک، اندازه نایقینی است که سیستم زیان مثبت دارد، یعنی:*

$$Risk = \mathcal{M}\{f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) > ۰\}. \tag{۱۰.۴}$$

قضیه ۱.۴ *فرض کنید که یک سیستم شامل عوامل نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \cdots, \xi_n$ و تابع زیان f است. اگر $f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ توزیع نایقینی Φ داشته باشد، آن گاه شاخص ریسک به صورت زیراست:*

$$Risk = ۱ - \Phi(۰). \tag{۱۱.۴}$$

برهان: از تعریف شاخص ریسک و اصل موضوع دوگانی نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} Risk &= \mathcal{M}\{f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) > ۰\} \\ &= ۱ - \mathcal{M}\{f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) \le ۰\} \\ &= ۱ - \Phi(۰). \end{aligned}$$

قضیه ثابت شده است.

قضیه ۲.۴ ([۹۰]، *قضیه شاخص ریسک) فرض کنید یک سیستم شامل متغیرهای نایقین مستقل $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ است. همچنین، فرض کنید تابع زیان $f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ یک تابع پیوسته و افزایشی اکید برحسب $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_m$ و کاهشی اکید برحسب $\xi_{m+۱}, \xi_{m+۲}, \cdots$، ξ_n است. پس شاخص ریسک همان ریشه α از معادله*

$$f(\Phi_۱^{-۱}(۱-\alpha), \ldots, \Phi_m^{-۱}(۱-\alpha), \Phi_{m+۱}^{-۱}(\alpha), \ldots, \Phi_n^{-۱}(\alpha)) = ۰ \tag{۱۲.۴}$$

است.

برهان: از قضیه ۱۵.۲ $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha))$$

دارد. چون $Risk = 1 - \Phi(0)$ جواب α از معادله $\Phi^{-1}(1-\alpha) = 0$ است . لذا این قضیه ثابت می‌شود.

تذکر ۱.۴: چون $f(\Phi_1^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(1-\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(\alpha))$ یک تابع پیوسته و کاهشی اکید برحسب α است، ریشه آن را می‌توان با روش دو بخشی تقریب زد :

گام ۱. قرار دهید $a = 0$ و $b = 1$ و $c = (a+b)/2$.

گام ۲. اگر $f(\Phi_1^{-1}(1-c), \ldots, \Phi_m^{-1}(1-c), \Phi_{m+1}^{-1}(c), \ldots, \Phi_n^{-1}(c)) > 0$ آنگاه قرار دهید $a = c$. در غیر این صورت قرار دهید $b = c$.

گام ۳. اگر $|b-a| > \varepsilon$ (دقت پیش تعیین شده) آنگاه قرار دهید $c = (b-a)/2$ و برو به مرحله۲. در غیر این صورت c را به عنوان ریشه در خروجی نمایش دهید.

تذکر ۲.۴: به خاطر داشته باشید که گاهی اوقات معادله (۱۲.۴) ممکن است ریشه نداشته باشد. در این حالت، اگر برای تمام α ها

$$f(\Phi_1^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(1-\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(\alpha)) < 0 \qquad (۱۳.۴)$$

آنگاه $\alpha = 0$ قرار می‌دهیم، و اگر برای تمام α ها

$$f(\Phi_1^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(1-\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(\alpha)) > 0 \qquad (۱۴.۴)$$

آنگاه $\alpha = 1$ قرار می‌دهیم.

۳.۴ سیستم سری

یک سیستم سری با n عنصر را در نظر بگیرید که طول عمر آنها متغیرهای نایقین مستقل $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر زیان به عنوان موردی که سیستم قبل از زمان T از کار افتد مشخص شود، آنگاه تابع زیان به صورت:

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = T - \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n \qquad (۱۵.۴)$$

و شاخص ریسک به صورت

$$Risk = \mathcal{M}\{f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > 0\} \qquad (۱۶.۴)$$

است. چون f یک تابع کاهشی اکید برحسب $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ است، قضیه شاخص ریسک می‌گوید که شاخص ریسک همان ریشه α از معادله

$$\Phi_1^{-1}(\alpha) \wedge \Phi_2^{-1}(\alpha) \wedge \cdots \wedge \Phi_n^{-1}(\alpha) = T. \qquad (۱۷.۴)$$

است. به آسانی بررسی می‌شود که

$$Risk = \Phi_1(T) \vee \Phi_2(T) \vee \cdots \vee \Phi_n(T) \qquad (۱۸.۴)$$

برقرار است.

۴.۴ سیستم موازی

یک سیستم موازی با n عنصر را در نظر بگیرید که طول عمر آنها متغیرهای نایقین مستقل $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر زیان به عنوان موردی که سیستم قبل از زمان T از کاربیفتد لحاظ شود آنگاه تابع زیان به صورت

$$f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) = T - \xi_۱ \vee \xi_۲ \vee \cdots \vee \xi_n \tag{۱۹.۴}$$

و شاخص ریسک:

$$Risk = \mathcal{M}\{f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) > ۰\} \tag{۲۰.۴}$$

است. چون f یک تابع کاهشی اکید بر حسب $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ است، قضیه شاخص ریسک می‌گوید که شاخص ریسک همان ریشه α از معادله

$$\Phi_۱^{-۱}(\alpha) \vee \Phi_۲^{-۱}(\alpha) \vee \cdots \vee \Phi_n^{-۱}(\alpha) = T. \tag{۲۱.۴}$$

است. به آسانی بررسی می‌شود که

$$Risk = \Phi_۱(T) \wedge \Phi_۲(T) \wedge \cdots \wedge \Phi_n(T) \tag{۲۲.۴}$$

برقرار است.

۵.۴ سیستم kـ ازـ n

یک سیستم kـ ازـ n را در نظر بگیرید که درآن n عنصر وجود دارد که طول عمر آنها متغیرهای نایقین مستقل $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ به ترتیب با توزیع‌های نایقین منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر زیان به این صورت باشد که سیستم قبل از زمان T از کار بیفتد، آنگاه تابع زیان به صورت

$$f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) = T - k\text{\_}\max[\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n] \tag{۲۳.۴}$$

و شاخص ریسک

$$Risk = \mathcal{M}\{f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) > ۰\}. \tag{۲۴.۴}$$

است. چون f یک تابع کاهشی اکید برحسب $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ است، قضیه شاخص ریسک می‌گوید که شاخص ریسک همان ریشه α معادله

$$k\text{\_}\max[\Phi_۱^{-۱}(\alpha), \Phi_۲^{-۱}(\alpha), \cdots, \Phi_n^{-۱}(\alpha)] = T. \tag{۲۵.۴}$$

به آسانی بررسی می‌شود که

$$Risk = k\text{\_}\min[\Phi_۱(T), \Phi_۲(T), \ldots, \Phi_n(T)] \tag{۲۶.۴}$$

برقرار است. توجه داشته باشید که یک سیستم سری اساساً یک سیستم nـ ازـ n است. در این مورد فرمول شاخص ریسک از (۲۶.۴) به (۱۸.۴) تبدیل می‌شود. بعلاوه یک سیستم موازی اساساً یک سیستم تک خروجی از n است. در این مورد فرمول شاخص ریسک از (۲۶.۴) به (۲۲.۴) تبدیل می‌شود.

۶.۴ سیستم آماده‌ـ به‌ـ کار

یک سیستم آماده‌ـ به‌ـ کار که در آن n عنصر آماده به کار وجود دارد در نظر بگیرید که طول عمر آنها متغیرهای نایقین مستقل $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ هستند. اگر زیان به عنوان موردی که سیستم قبل از زمان T از کار می‌افتد آنگاه تابع زیان به صورت

$$f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) = T - (\xi_۱ + \xi_۲ + \cdots + \xi_n) \tag{۲۷.۴}$$

و شاخص ریسک به صورت

$$Risk = \mathcal{M}\{f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) > ۰\}. \tag{۲۸.۴}$$

است. چون f یک تابع کاهشی اکید بر حسب $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ است، قضیه شاخص ریسک می‌گوید که شاخص ریسک همان ریشه α از معادله

$$\Phi_۱^{-۱}(\alpha) + \Phi_۲^{-۱}(\alpha) + \cdots + \Phi_n^{-۱}(\alpha) = T. \tag{۲۹.۴}$$

است.

۷.۴ تحلیل ریسک سازه‌ای

تحلیل ریسک سازه‌ای نایقین اولین بار توسط لیو مطالعه شد [۱۰۲]. یک سیستم سازه‌ای را در نظر بگیرید که در آن نقاط مقاومت و بار متغیرهای نایقین هستند. فرض می‌کنیم که یک سیستم سازه‌ای هر زمان برای هر میله از کار افتد متغیر بار بیش از متغیر مقاومت آن است. اگر شاخص ریسک سازه‌ای، به عنوان اندازه نایقینی باشد که سیستم سازه‌ای از کار افتاده است، آنگاه ریسک به صورت

$$Risk = \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{n}(\xi_i < \eta_i)\right\} \tag{۳۰.۴}$$

است که در آن $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ متغیرهای مقاومت و $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n$ متغیرهای بار n میله هستند.

مثال ۵.۴: (ساده ترین مورد) فرض کنید فقط یک متغیر مقاومت ξ و یک بار η به ترتیب با توزیع نایقینی منظم Φ و Ψ وجود دارند. در این مورد، شاخص ریسک سازه‌ای

$$Risk = \mathcal{M}\{\xi < \eta\}.$$

است. از قضیه شاخص ریسک نتیجه می‌شود که شاخص ریسک ریشه α معادله

$$\Phi^{-۱}(\alpha) = \Psi^{-۱}(۱ - \alpha) \tag{۳۱.۴}$$

است. بخصوص اگر متغیر مقاومت ξ توزیع نایقینی نرمال $\mathcal{N}(e_s, \sigma_s)$ و متغیر بار η توزیع نایقینی نرمال $\mathcal{N}(e_l, \sigma_l)$ داشته باشند، آنگاه شاخص ریسک سازه‌ای

$$Risk = \left(۱ + \exp\left(\frac{\pi(e_s - e_l)}{\sqrt{۳}(\sigma_s + \sigma_l)}\right)\right)^{-۱} \tag{۳۲.۴}$$

است.

مثال ۶.۴: (بارهای ثابت) فرض کنید متغیرهای نایقین مقاومت $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ مستقل و به ترتیب توزیع‌های نایقینی پیوسته $\Phi_۱$، $\Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ دارند. در بسیاری از موارد، متغیرهای بار $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n$ به ترتیب مقادیر قطعی $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ در نظر گرفته می‌شوند (به عنوان مثال، محدودیت‌های وزن مجاز بر اساس قانون نیرو). در این حالت، از (۳۰.۴) و استقلال نتیجه می‌شود که شاخص ریسک سازه‌ای به صورت

$$Risk = \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{n}(\xi_i < c_i)\right\} = \bigvee_{i=۱}^{n}\mathcal{M}\{\xi_i < c_i\}$$

است. یعنی

$$Risk = \Phi_۱(c_۱) \vee \Phi_۲(c_۲) \vee \cdots \vee \Phi_n(c_n). \tag{۳۳.۴}$$

مثال ۷.۴: (متغیرهای بار مستقل) فرض کنید متغیرهای نایقین مقاومت $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ مستقل و به ترتیب توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ دارند. همچنین فرض کنید، متغیرهای بار نایقین مستقل $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n$ به ترتیب توزیع‌های نایقینی منظم $\Psi_۱, \Psi_۲, \ldots, \Psi_n$ دارند. در این حالت، از (۳۰.۴) و استقلال نتیجه می‌شود که شاخص ریسک سازه‌ای

$$Risk = \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{n}(\xi_i < \eta_i)\right\} = \bigvee_{i=۱}^{n}\mathcal{M}\{\xi_i < \eta_i\}$$

است. یعنی

$$Risk = \alpha_۱ \vee \alpha_۲ \vee \cdots \vee \alpha_n \tag{۳۴.۴}$$

که برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، α_iها به ترتیب ریشه معادله‌های

$$\Phi_i^{-۱}(\alpha) = \Psi_i^{-۱}(۱ - \alpha) \tag{۳۵.۴}$$

هستند. در حالت کلی، متغیرهای بار $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n$ نه ثابت و نه مستقل هستند. به عنوان مثال متغیرهای بار $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n$ ممکن است توابعی از متغیرهای نایقین مستقل $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_m$ باشند. در این صورت، فرمول (۳۴.۴) دیگر معتبر نیست. بنابراین باید با چنین سیستم‌های سازه‌ای مورد به مورد برخورد کنیم.

مثال ۸.۴: (سیستم سری) یک سیستم سازه‌ای نشان دهنده داده شده در شکل ۴.۴ را در نظر بگیرید که شامل n میله در سری و یک شی است. فرض کنید که متغیرهای مقاومت n میله، متغیرهای نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ هستند. همچنین فرض کنید وزن جسم، یک متغیر نایقین η با توزیع نایقینی منظم Ψ است. برای هر i $(۱ \le i \le n)$ متغیر بار از میله i همان وزن جسم، η جسم است. بنابراین سیستم سازه‌ای از کار می‌افتد هرگاه متغیر بار η بیش از حداقل یکی از متغیرهای مقاومت $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ باشد. پس شاخص ریسک سازه‌ای به صورت

$$Risk = \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{n}(\xi_i < \eta)\right\} = \mathcal{M}\{\xi_۱ \wedge \xi_۲ \wedge \cdots \wedge \xi_n < \eta\}$$

تعریف می‌شود. تابع زیان به صورت

$$f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n, \eta) = \eta - \xi_۱ \wedge \xi_۲ \wedge \cdots \wedge \xi_n$$

است. پس

$$Risk = \mathcal{M}\{f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n, \eta) > ۰\}.$$

چون تابع زیان f برحسب η افزایشی اکید و برحسب $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ کاهشی اکید است، از قضیه شاخص ریسک نتیجه می‌گیریم که شاخص ریسک ریشه α از معادله

$$\Psi^{-۱}(۱ - \alpha) - \Phi_۱^{-۱}(\alpha) \wedge \Phi_۲^{-۱}(\alpha) \wedge \cdots \wedge \Phi_n^{-۱}(\alpha) = ۰ \qquad (۳۶.۴)$$

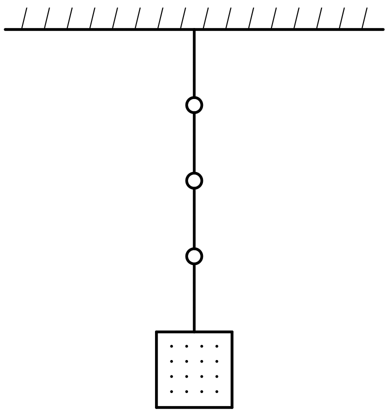
است. یا به طور معادل، فرض کنید α_i برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$ به ترتیب ریشه معادله‌های

$$\Psi^{-۱}(۱ - \alpha) = \Phi_i^{-۱}(\alpha) \qquad (۳۷.۴)$$

هستند. آنگاه شاخص ریسک سازه‌ای به صورت

$$Risk = \alpha_۱ \vee \alpha_۲ \vee \cdots \vee \alpha_n \qquad (۳۸.۴)$$

است.



شکل ۴.۴: یک سیستم سازه‌ای با n میله و یک شی

مثال ۹.۴: یک سیستم سازه‌ای نشان داده شده در شکل ۵.۴ را در نظر بگیرید که شامل ۲ میله و یک شی است. فرض کنید که متغیرهای مقاومت از چپ و راست میله، متغیرهای نایقین $\xi_۱$ و $\xi_۲$ به ترتیب با توزیع نایقینی $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ هستند. همچنین فرض کنید که وزن جسم یک متغیر نایقین η با توزیع نایقینی منظم Ψ است. در این مورد، متغیرهای بار از چپ و راست میله‌ها به ترتیب با

$$\frac{\eta \sin\theta_۲}{\sin(\theta_۱ + \theta_۲)}, \quad \frac{\eta \sin\theta_۱}{\sin(\theta_۱ + \theta_۲)}$$

است. بنابراین، سیستم سازه‌ای از کار می‌افتد هرگاه برای هر میله، متغیربار بیش از متغیر مقاومت آن باشد. پس شاخص ریسک سازه‌ای به صورت

$$\begin{aligned} Risk &= \mathcal{M}\left\{\left(\xi_۱ < \frac{\eta \sin\theta_۲}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)}\right) \cup \left(\xi_۲ < \frac{\eta \sin\theta_۱}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)}\right)\right\} \\ &= \mathcal{M}\left\{\left(\frac{\xi_۱}{\sin\theta_۲} < \frac{\eta}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)}\right) \cup \left(\frac{\xi_۲}{\sin\theta_۱} < \frac{\eta}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)}\right)\right\} \\ &= \mathcal{M}\left\{\frac{\xi_۱}{\sin\theta_۲} \wedge \frac{\xi_۲}{\sin\theta_۱} < \frac{\eta}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)}\right\} \end{aligned}$$

است. تابع زیان به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(\xi_۱,\xi_۲,\eta) = \frac{\eta}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)} - \frac{\xi_۱}{\sin\theta_۲} \wedge \frac{\xi_۲}{\sin\theta_۱}.$$

آنگاه

$$Risk = \mathcal{M}\{f(\xi_۱,\xi_۲,\eta) > ۰\}.$$

چون تابع زیان f برحسب η افزایشی اکید و برحسب $\xi_۱,\xi_۲$ کاهشی اکید است، از قضیه شاخص ریسک نتیجه می‌گیریم که شاخص ریسک ریشه α از معادله

$$\frac{\Psi^{-۱}(۱-\alpha)}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)} - \frac{\Phi_۱^{-۱}(\alpha)}{\sin\theta_۲} \wedge \frac{\Phi_۲^{-۱}(\alpha)}{\sin\theta_۱} = ۰ \tag{۳۹.۴}$$

است. یا به طورمعادل، فرض کنید $\alpha_۱$ ریشه معادله

$$\frac{\Psi^{-۱}(۱-\alpha)}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)} = \frac{\Phi_۱^{-۱}(\alpha)}{\sin\theta_۲} \tag{۴۰.۴}$$

و $\alpha_۲$ ریشه معادله

$$\frac{\Psi^{-۱}(۱-\alpha)}{\sin(\theta_۱+\theta_۲)} = \frac{\Phi_۲^{-۱}(\alpha)}{\sin\theta_۱} \tag{۴۱.۴}$$

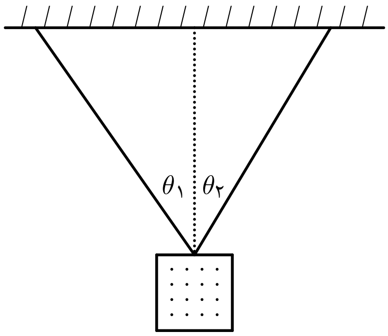
است. پس شاخص ریسک سازه‌ای به صورت

$$Risk = \alpha_۱ \vee \alpha_۲. \tag{۴۲.۴}$$

است.

۸.۴ تحلیل ریسک سرمایه گذاری

تحلیل ریسک سرمایه گذاری نایقین برای اولین بار توسط لیو [۱۰۲] مطالعه شد. فرض کنید یک سرمایه گذاری n پروژه دارد که بازده آنها متغیرهای نایقین $\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_n$ هستند. اگر زیان به منزله



شکل ۵.۴: یک سیستم سازه‌ای با ۲ میله و یک شی

آن باشد که مجموع بازده $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$ کمتر از یک مقدار مشخص c باشد (به عنوان مثال، نرخ بهره) آنگاه شاخص ریسک سرمایه گذاری

$$Risk = \mathcal{M}\{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n < c\} \qquad (۴۳.۴)$$

است. اگر $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقین $\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_n$ باشند، آنگاه شاخص ریسک سرمایه گذاری، ریشه α از معادله

$$\Phi_1^{-1}(\alpha)+\Phi_2^{-1}(\alpha)+\cdots+\Phi_n^{-1}(\alpha)=c \qquad (۴۴.۴)$$

است.

۹.۴ دارایی در خطر

به عنوان جایگزین شاخص ریسک (۱۰.۴) مفهوم دارایی در خطر با تعریف زیر داده شده است.

تعریف ۳.۴ [۱۳۰] *فرض کنید که یک سیستم شامل عوامل نایقین $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ است و تابع زیان f دارد. آنگاه دارایی در خطر به صورت*

$$\mathrm{VaR}(\alpha)=\sup\{x \mid \mathcal{M}\{f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\ge x\}\ge\alpha\} \qquad (۴۵.۴)$$

تعریف می‌شود.

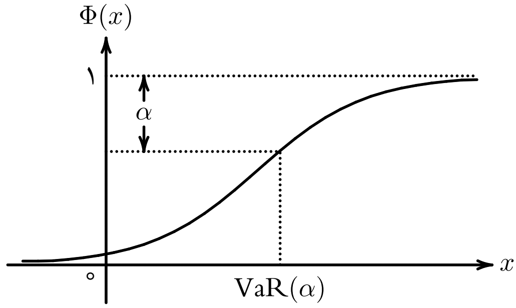
توجه داشته باشید که $\mathrm{VaR}(\alpha)$ حداکثر زیان ممکن، وقتی α درصد از توزیع چولگی راست نادیده گرفته شود، را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، زیان $f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ تجاوزکردن $\mathrm{VaR}(\alpha)$ با اندازه نایقین α است. شکل ۶.۴ را ببینید. اگر توزیع نایقینی $f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ پیوسته باشد آنگاه

$$\mathrm{VaR}(\alpha)=\sup\{x \mid \Phi(x)\le 1-\alpha\}. \qquad (۴۶.۴)$$

اگر $\Phi^{-1}(\alpha)$ توزیع معکوس نایقینی آن وجود داشته باشد آنگاه

$$\mathrm{VaR}(\alpha)=\Phi^{-1}(1-\alpha). \qquad (۴۷.۴)$$

همچنین به آسانی می‌توان نشان داد که $\mathrm{VaR}(\alpha)$ یک تابع کاهشی یکنوا بر حسب α است.



شکل ۶.۴: دارایی در خطر

قضیه ۳.۴ *([۱۳۰]، قضیه دارایی در خطر) یک سیستم شامل متغیرهای نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع زیان $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ برحسب $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ افزایشی اکید و برحسب $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \cdots, \xi_n$ کاهشی اکید است، پس*

$$\mathrm{VaR}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(1-\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(\alpha)). \quad (۴۸.۴)$$

برهان: از قانون عملیاتی متغیرهای نایقین نتیجه می‌گیریم که زیان $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha))$$

دارد. حکم قضیه بلافاصله از (۴۷.۴) نتیجه می‌شود.

۱۰.۴ زیان مورد انتظار

لیو – رالسکو [۱۱۹] مفهوم زیان مورد انتظار را مطرح کردند، که همان مقدار مورد انتظار زیان $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ با فرض $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > 0$ است. یک تعریف قراردادی در زیر داده شده است.

تعریف ۴.۴ *[۱۱۹] فرض کنید یک سیستم شامل عامل‌های نایقین $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ است و تابع زیان f دارد. آنگاه زیان مورد انتظار به صورت*

$$L = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \geq x\} \mathrm{d}x \quad (۴۹.۴)$$

تعریف می‌شود.

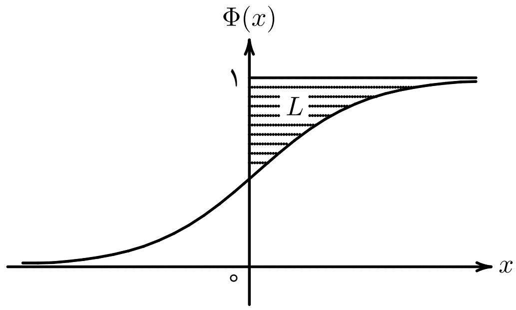
اگر $\Phi(x)$ توزیع نایقینی زیان $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ باشد، داریم

$$L = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x)) \mathrm{d}x. \quad (۵۰.۴)$$

اگرتوزیع نایقینی معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ وجود داشته باشد آنگاه زیان مورد انتظار

$$L = \int_{0}^{1} \left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)^{+} \mathrm{d}\alpha \tag{۵۱.۴}$$

است.



شکل ۷.۴: زیان مورد انتظار

قضیه ۴.۴ ([۱۱۹]، *قضیه زیان مورد انتظار*) *فرض کنید یک سیستم شامل متغیرهای نایقین مستقل* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ *است. فرض کنید تابع زیان* $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *افزایشی اکید برحسب* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ *و کاهشی اکید برحسب* ξ_{m+1}، $\xi_{m+2}, \ldots, \xi_n$ *است، در این صورت مقدار زیان مورد انتظار به صورت*

$$L = \int_{0}^{1} f^{+}(\Phi_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha))\mathrm{d}\alpha \tag{۵۲.۴}$$

است.

برهان: از قانون عملیاتی متغیرهای نایقین حاصل می‌شود که زیان $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)).$$

دارد . حکم قضیه مستقیماً از (۵۱.۴) حاصل می‌شود.

۱۱.۴ توزیع خطر

فرض کنید ξ طول عمر تعدادی عنصر است. اکنون فرض می‌کنیم آن یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی پیشین Φ باشد. در برخی از زمان‌های t مشاهده می‌شود که عنصر در حال کار کردن است، طول مانده عمر عنصر چیست؟ تعریف زیر این سوال را پاسخ می‌دهد.

تعریف ۵.۴ [۹۰] *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین نامنفی، نشان دهنده طول عمر تعدادی عنصر است. اگر ξ توزیع نایقینی پیشین Φ داشته باشد، آنگاه توزیع خطر در زمان t*

$$\Phi(x|t)=\begin{cases} ۰, & \text{اگر } \Phi(x)\le\Phi(t) \\ \dfrac{\Phi(x)}{۱-\Phi(t)}\wedge ۰/۵, & \text{اگر } \Phi(t)<\Phi(x)\le(۱+\Phi(t))/۲ \\ \dfrac{\Phi(x)-\Phi(t)}{۱-\Phi(t)}, & \text{اگر } (۱+\Phi(t))/۲\le\Phi(x) \end{cases} \quad (۵۳.۴)$$

است، که همان توزیع نایقینی شرطی ξ با شرط $\xi>t$ است.

توزیع خطر در واقع همان توزیع نایقینی پسین، زمان مانده از عمر عنصر بعد از زمان t با این فرض که در لحظه t در حال کار کردن است، می‌باشد.

تمرین ۱.۴: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(a,b)$ و t یک عدد حقیقی با $a<t<b$ باشد. نشان دهید توزیع خطر در زمان t

$$\Phi(x|t)=\begin{cases} ۰, & \text{اگر } x\le t \\ \dfrac{x-a}{b-t}\wedge ۰/۵, & \text{اگر } t<x\le(b+t)/۲ \\ \dfrac{x-t}{b-t}\wedge ۱, & \text{اگر } (b+t)/۲\le x \end{cases}$$

است.

قضیه ۵.۴ ([۹۰]، *قضیه شاخص ریسک شرطی) فرض کنید یک سیستم شامل عامل‌های نایقین $\xi_۱,\xi_۲,\cdots,\xi_n$ است و تابع زیان f دارد. فرض کنید $\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Phi_۱,\Phi_۲,\ldots,\Phi_n$ و $f(\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_n)$ افزایشی اکید بر حسب $\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_m$ و کاهشی اکید بر حسب $\xi_{m+۱},\xi_{m+۲},\ldots,\xi_n$ است. اگر مشاهده شود که همه عناصر در برخی زمان t در حال کار کردن هستند، آنگاه شاخص ریسک ریشه α از معادله*

$$f(\Phi_۱^{-۱}(۱-\alpha|t),\ldots,\Phi_m^{-۱}(۱-\alpha|t),\Phi_{m+۱}^{-۱}(\alpha|t),\ldots,\Phi_n^{-۱}(\alpha|t))=۰ \quad (۵۴.۴)$$

است که $\Phi_i(x|t)$ برای $i=۱,۲,\ldots,n$ توزیع‌های خطر هستند و با

$$\Phi_i(x|t)=\begin{cases} ۰, & \text{اگر } \Phi_i(x)\le\Phi_i(t) \\ \dfrac{\Phi_i(x)}{۱-\Phi_i(t)}\wedge ۰/۵, & \text{اگر } \Phi_i(t)<\Phi_i(x)\le(۱+\Phi_i(t))/۲ \\ \dfrac{\Phi_i(x)-\Phi_i(t)}{۱-\Phi_i(t)}, & \text{اگر } (۱+\Phi_i(t))/۲\le\Phi_i(x) \end{cases} \quad (۵۵.۴)$$

مشخص می‌شوند.

برهان: از تعریف ۵.۴ نتیجه می‌گیریم که توزیع خطر هر عنصر به وسیله (۵۵.۴) تعیین می‌شود. بنابراین شاخص ریسک شرطی مستقیماً از قضیه ۲.۴ به دست می‌آید.

تمرین ۲.۴: قضیه مقدار در معرض خطر شرطی و قضیه مقدار زیان مورد انتظار شرطی را تعریف و ثابت کنید.

۱۲.۴ نکات کتابشناسی

تحلیل ریسک نایقین توسط لیو [۹۰] در ۲۰۱۰ که در آن شاخص ریسک به عنوان اندازه نایقینی که یک زیان مشخص رخ می‌دهد و یک قضیه شاخص ریسک ثابت شده است، مطرح شد. این ابزار همچنین به طور موفقیت آمیزی توسط لیو [۱۰۲] برای تحلیل ریسک سازه‌ای و تحلیل ریسک سرمایه گذاری استفاده شد. به عنوان یک جایگزین شاخص ریسک، پنگ [۱۳۰] مفهوم دارایی در خطر را پیشنهاد کرد. به این معنا که حداکثر زیان ممکن، وقتی توزیع چولگی راست نادیده گرفته می‌شود. همچنین لیو- رالسکو [۱۱۹] مفهوم زیان مورد انتظار را مطالعه کردند که نه تنها اندازه نایقین زیان بلکه شدت آن را نیز در نظر می‌گیرد.

فصل ۵

تحلیل اطمینان نایقین

تجزیه و تحلیل اطمینان نایقین ابزاری برای بررسی اطمینان‌پذیری سیستم با استفاده از نظریه نایقینی است. در این فصل تعریفی از اطمینان‌پذیری ارائه و برخی فرمول‌های مفید برای محاسبه شاخص اطمینان‌پذیری ارائه می‌شود.

۱.۵ تابع ساختار

بسیاری از سیستم‌های واقعی ممکن است به یک سیستم دودویی ساده شوند که هر عضو (شامل خود سیستم) دو حالت سالم و معیوب دارد. حالت‌های i امین عنصر برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$ را با متغیرهای دودویی مشخص می‌کنیم

$$x_i = \begin{cases} ۱, & \text{اگر عنصر } i \text{ کار کند} \\ ۰, & \text{اگر عنصر } i \text{ از کار افتد} . \end{cases} \qquad (۱.۵)$$

همچنین وضعیت سیستم را با متغیر دودویی

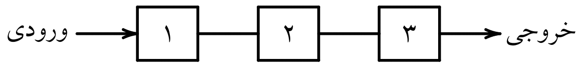
$$X = \begin{cases} ۱, & \text{اگر سیستم کار کند} \\ ۰, & \text{اگر سیستم از کار افتد} \end{cases} \qquad (۲.۵)$$

نشان می‌دهیم. معمولاً، وضعیت سیستم به طور کامل به وسیله وضعیت اعضایش که به تابع ساختار معروف است، مشخص می‌شود.

تعریف ۱.۵ *فرض کنید X یك سیستم دودویی شامل عناصر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ با شد. تابع f یك تابع ساختار از X نامیده می‌شود هرگاه*

$$X = ۱ \text{ اگر و تنها اگر } f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = ۱. \qquad (۳.۵)$$

واضح است که $X = ۰$ اگر و تنها اگر $f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = ۰$، که در آن f تابع ساختار سیستم است.



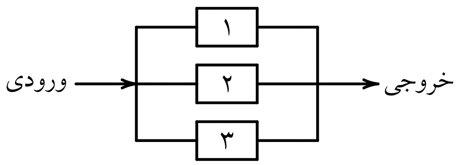
شکل ۱.۵: یک سیستم سری.

مثال ۱.۵: برای یك سیستم سری تابع ساختار نگاشتی از $\{0,1\}^n$ به $\{0,1\}$ است، یعنی

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n. \tag{۴.۵}$$

مثال ۲.۵: برای یك سیستم موازی، تابع ساختار نگاشتی از $\{0,1\}^n$ به $\{0,1\}$ است.، یعنی

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n. \tag{۵.۵}$$



شکل ۲.۵: یک سیستم موازی.

مثال ۳.۵: تابع ساختار برای یك سیستم kـ از ـn تا زمانی که حداقل k عنصر از n عنصر کار کند، نگاشتی از $\{0,1\}^n$ به $\{0,1\}$ است، یعنی

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\text{-}\max\,[x_1, x_2, \ldots, x_n]. \tag{۶.۵}$$

بخصوص وقتی که $k = 1$ سیستم kـ از ـn یك سیستم موازی و وقتی که $k = n$ یك سیستم سری است.

۲.۵ شاخص اطمینان‌پذیری

هر عنصر از یك سیستم دودویی معمولاً با متغیر نایقین دودویی نمایش داده می‌شود، یعنی

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{با اندازه نایقین } a \\ 0 & \text{با اندازه نایقین } 1-a \end{cases} \tag{۷.۵}$$

در این حالت، می‌گوییم ξ یك متغیر نایقین با اطمینان‌پذیری a است. شاخص اطمینان‌پذیری به عنوان اندازه نایقین سیستمی که کار می‌کند، تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۵ [۹۰] *فرض کنید یك سیستم دودویی دارای عناصر نایقین $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ و یك تابع ساختار f است. در این صورت شاخص اطمینان‌پذیری، یك اندازه نایقین از سیستمی که کار می‌کند، است. یعنی*

$$\text{اطمینان‌پذیری} = \mathcal{M}\{f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 1\}. \tag{۸.۵}$$

قضیه ۱.۵ [۹۰] *فرض کنید یک سیستم شامل عناصر نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$، و تابع ساختار f است. اگر $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ عناصر نایقین مستقل و به ترتیب با اطمینان‌پذیری $a_1, a_2, \ldots, a_n$ باشند، آنگاه شاخص اطمینان به صورت*

$$\text{اطمینان‌پذیری} = \begin{cases} \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i), & \\ \quad \text{اگر } \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i) < 0.5 & \\ 1 - \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i), & \\ \quad \text{اگر } \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i) \ge 0.5 & \end{cases} \tag{9.5}$$

است ، که درآن x_iها صفر یا یك می‌باشند و ν_i برای $i = 1, 2, \ldots, n$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nu_i(x_i) = \begin{cases} a_i, & \text{اگر } x_i = 1 \\ 1 - a_i, & \text{اگر } x_i = 0 \end{cases} \tag{10.5}$$

برهان: چون $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای نایقین و مستقل هستند و f یك تابع ساختار می‌باشد، معادله (۹.۵) بلافاصله از تعریف ۲.۵ و قضیه ۲۱.۲ نتیجه می‌شود.

۳.۵ سیستم سری

یک سیستم سری با عناصر نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ به ترتیب با اطمینان‌پذیری $a_1, a_2, \ldots, a_n$ در نظر بگیرید. توجه کنید که تابع ساختار آن به صورت

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n. \tag{11.5}$$

است. بر اساس قضیه شاخص اطمینان‌پذیری، شاخص آن به صورت

$$\text{اطمینان‌پذیری} = \mathcal{M}\{\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n = 1\} = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n. \tag{12.5}$$

است.

۴.۵ سیستم موازی

یك سیستم موازی با عناصر نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$، به ترتیب با اطمینان‌پذیری $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که تابع ساختار آن به صورت

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n. \tag{13.5}$$

است. بر اساس قضیه شاخص اطمینان‌پذیری، شاخص آن به صورت

$$\text{اطمینان‌پذیری} = \mathcal{M}\{\xi_1 \vee \xi_2 \vee \cdots \vee \xi_n = 1\} = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n. \tag{14.5}$$

است.

۵.۵ سیستم kــ ازــ n

یك سیستم شامل k عنصر از n عنصر، شامل عناصر نایقین مستقل $\xi_۱, \xi_۲$، $\cdots, \xi_n$ به ترتیب با اطمینان‌پذیری $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که تابع ساختار شکل دودویی دارد

$$f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = k\text{\_}\max\,[x_۱, x_۲, \ldots, x_n]. \qquad (۱۵.۵)$$

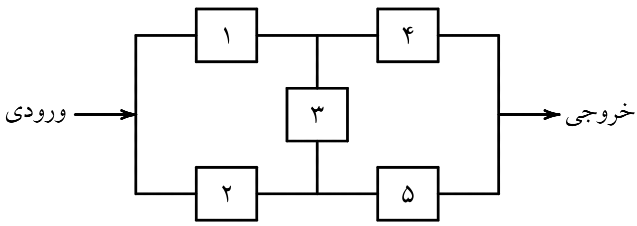
این از قضیه شاخص اطمینان‌پذیری kــ امین بزرگترین مقدار از $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ نتیجه می‌شود، یعنی

$$\text{اطمینان‌پذیری} = k\text{\_}\max[a_۱, a_۲, \ldots, a_n]. \qquad (۱۶.۵)$$

توجه کنید که سیستم سری اساساً یك سیستم nــ ازــ n است. در این حالت، فرمول شاخص اطمینان‌پذیری (۱۶.۵) به (۱۲.۵) تبدیل می‌شود. همچنین، سیستم موازی اساساً یك سیستم ۱ــ ازــ n است. در این حالت فرمول (۱۶.۵)، به (۱۴.۵) تبدیل می‌شود.

۶.۵ سیستم کلی

پیدا کردن یك فرمول تحلیلی از ریسك اطمینان‌پذیری برای سیستم‌های عمومی تقریباً امری ناممکن است. در این صورت باید از روش‌های عددی استفاده کنیم. یك سیستم پل که در شکل نشان داده



شکل ۳.۵: یک سیستم پل

شده است، را در نظر بگیرید که شامل ۵ عنصر نایقین مستقل که وضعیت آنها با $\xi_۱, \xi_۲, \xi_۳, \xi_۴, \xi_۵$ مشخص می‌شود. فرض کنید هر مسیر آن کار می‌کند اگر و تنها اگر تمام عناصر آن کار کنند، و سیستم کار می‌کند اگر و تنها اگر یك مسیر وجود داشته باشد که عناصر آن کار می‌کنند. پس تابع ساختار سیستم پل به صورت

$$f(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) = (x_۱ \wedge x_۴) \vee (x_۲ \wedge x_۵) \vee (x_۱ \wedge x_۳ \wedge x_۵) \vee (x_۲ \wedge x_۳ \wedge x_۴).$$

است. فرض کنید که ۵ عنصر مستقل و نایقین اطمینان‌پذیری

$$۰/۹۱,\ ۰/۹۲,\ ۰/۹۳,\ ۰/۹۴,\ ۰/۹۵$$

بر حسب اندازه نایقین دارند. شاخص اطمینان‌پذیری به صورت

$$\text{اطمینان‌پذیری} = \mathcal{M}\{f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_۵) = ۱\} = ۰/۹۲$$

در اندازه نایقین است.

۷.۵ نکات کتابشناسی

تحلیل اطمینان نایقین در سال ۲۰۱۰ توسط لیو [۹۰] معرفی شد که در آن شاخص اطمینان‌پذیری به عنوان معیار اطمینان سیستمی که کار می‌کند تعریف شده و قضیه شاخص اطمینان ثابت شده است. پس از آن، اطمینان‌پذیری نایقین توسط زِنگ‌ـ وِن‌ـ کانگ [۲۰۶]، گائوـ یائو [۳۸]، زِنگ‌ـ کانگ‌ـ وِنگ‌ـ زیو[۲۰۷][۲۰۸]، زووـ کانگ‌ـ وِن‌ـ ژانگ [۲۲۲] گائوـ یائوـ ژووـ کِ [۳۵] مطالعه شد.

فصل ۶

منطق گزاره‌ای نایقین

منطق گزاره‌ای، که از کار ارسطو (۳۸۴ـ۳۲۲ پیش از میلاد) شروع می‌شود، شاخه‌ای از منطق است که خواص جملات پیچیده‌ای را که از گزاره‌های ساده‌تر و رابطه‌های منطقی ایجاد شده اند، بررسی می‌کند. توجه داشته باشید که گزاره‌هایی که در منطق گزاره‌ای در نظر گرفته می‌شوند، عبارت‌های دلخواه نیستند، اما آنهایی هستند که درست یا نادرست هستند و نه هر دو.

منطق گزاره‌ای نایقین، تعمیم منطق گزاره‌ای است که در آن هر گزاره با یک متغیر نایقین بولی نشان داده می‌شود و ارزش درستی آن به عنوان اندازه نایقینی درستی گزاره بیان می‌شود. این فصل با منطق گزاره‌ای نایقین، از جمله گزاره نایقین، تعریف ارزش درستی، و قضیه ارزش درستی خواهد پرداخت. این فصل همچنین منطق گزاره‌نمای نایقین را معرفی می‌کند.

۱.۶ گزاره نایقین

تعریف ۱.۶ [۷۹] *یک گزاره نایقین عبارتی است که ارزش درستی آن با یک اندازه نایقین اندازه گیری می‌شود.*

به این معنی که اگر X یک گزاره نایقین باشد و از α برای بیان ارزش درستی آن در اندازه نایقین استفاده شود، آنگاه گزاره نایقین X اساساً یک متغیر نایقین بولی است.

$$X = \begin{cases} ۱ & \text{با اندازه نایقین } \alpha \\ ۰ & \text{با اندازه نایقین } ۱-\alpha \end{cases} \qquad (۱.۶)$$

که در آن $X = ۱$ بدان معنی است که X درست است و $X = ۰$ یعنی X نادرست است.

مثال ۱.۶: «تام با ارزش درستی ۰٫۷ قد بلند است.» یک گزاره نایقین است، که در آن « تام قد بلند است» یک گزاره است، و ارزش درستی آن در اندازه نایقین ۰٫۷ است.

مثال ۲.۶: «جان با ارزش درستی ۰٫۸ جوان است.» یک گزاره نایقین است، که در آن «جان جوان است»، گزاره و ارزش درستی آن ۰٫۸ در اندازه نایقین است.

مثال ۳.۶: «پکن یک شهر بزرگ با ارزش درستی ۰٫۹ است» گزاره‌ای نایقین است که در آن «پکن یک شهر بزرگ است» یک گزاره است که ارزش درستی آن در اندازه نایقین ۰٫۹ است.

نمادهای ارتباطی

علاوه بر نماد گزاره‌ای X و Y، به نماد نفی $\neg$، نماد عطف $\wedge$ ، نماد فصل $\vee$، نماد شرطی $\rightarrow$ ، و نماد دوشرطی $\leftrightarrow$ نیاز داریم. توجه داشته باشید که

$$\neg X \text{ یعنی } X \text{ " نیست که " چنین} \tag{۲.۶}$$

$$X \wedge Y \text{ یعنی } \text{“} X \text{ و } Y \text{”} \tag{۳.۶}$$

$$X \vee Y \text{ یعنی } \text{“} X \text{ یا } Y \text{”} \tag{۴.۶}$$

$$X \rightarrow Y = (\neg X) \vee Y \text{ یعنی “اگر } x \text{ آن گاه } Y \text{”}, \tag{۵.۶}$$

$$X \leftrightarrow Y = (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \text{ یعنی “} X \text{ اگر و تنها اگر } Y \text{”}. \tag{۶.۶}$$

تابع بولی از گزاره‌های نایقین

فرض $X_1, X_2, \ldots, X_n$ گزاره‌های نایقین هستند. پس تابع بولی آنها

$$Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{۷.۶}$$

متغیر نایقین بولی است. به همین ترتیب Z نیز گزاره‌ای نایقین است به شرط آن که جمله‌ای معقول باشد. معمولاً چنین تابع بولی یک دنباله از گزاره‌های نایقین و نمادهای رابط است. مثلا،

$$Z = \neg X_1, \quad Z = X_1 \wedge (\neg X_2), \quad Z = X_1 \rightarrow X_2 \tag{۸.۶}$$

همه گزاره‌های نایقین هستند.

استقلال گزاره‌های نایقین

گزاره‌های نایقین مستقل نامیده می‌شوند اگر آنها متغیرهای نایقین مستقل باشند. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ گزاره‌های نایقین مستقل هستند. پس

$$f_1(X_1),\ f_2(X_2)\ \ldots, f_n(X_n) \tag{۹.۶}$$

نیز گزاره‌های نایقین مستقل برای هر تابع بولی f_1, f_2، f_n، $\cdots$, هستند. مثلاً اگر $X_1, X_2, \ldots, X_5$ گزاره‌های نایقین مستقل باشند، آنگاه $\neg X_1, X_2 \vee X_3, X_4 \rightarrow X_5$ نیز مستقل هستند.

۲.۶ ارزش درستی

ارزش درستی یک مفهوم کلیدی در منطق گزاره‌ای نایقین است و به عنوان اندازه ی درستی گزاره نایقین تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۶ [۷۹] *فرض کنید X یک گزاره نایقین است. پس ارزش درستی X به عنوان اندازه نایقین درستی x تعریف می‌شود. به عنوان مثال*

$$T(X) = \mathcal{M}\{X = 1\}. \quad (۱۰.۶)$$

مثال ۴.۶: فرض کنید X یک گزاره نایقین با ارزش درستی α است . پس

$$T(\neg X) = \mathcal{M}\{X = 0\} = 1 - \alpha. \quad (۱۱.۶)$$

مثال ۵.۶: فرض کنید X و Y دو گزاره مستقل نایقین به ترتیب با ارزش‌های درستی α و β هستند، پس

$$T(X \wedge Y) = \mathcal{M}\{X \wedge Y = 1\} = \mathcal{M}\{(X = 1) \cap (Y = 1)\} = \alpha \wedge \beta, \quad (۱۲.۶)$$

$$T(X \vee Y) = \mathcal{M}\{X \vee Y = 1\} = \mathcal{M}\{(X = 1) \cup (Y = 1)\} = \alpha \vee \beta, \quad (۱۳.۶)$$

$$T(X \to Y) = T(\neg X \vee Y) = (1 - \alpha) \vee \beta. \quad (۱۴.۶)$$

قضیه ۱.۶ (*قانون طرد ثالث*) *فرض کنید X یک گزاره نایقین است. پس $X \vee \neg X$ یک گزاره همواره درست است، یعنی*

$$T(X \vee \neg X) = 1. \quad (۱۵.۶)$$

برهان: از تعریف ارزش درستی و خاصیت اندازه نایقین نتیجه می‌شود که

$$T(X \vee \neg X) = \mathcal{M}\{X \vee \neg X = 1\} = \mathcal{M}\{(X = 1) \cup (X = 0)\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$$

و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۲.۶ (*قانون تناقض*) *فرض کنید X یک گزاره نایقین است. پس $X \wedge \neg X$ یک تناقض است، یعنی*

$$T(X \wedge \neg X) = 0. \quad (۱۶.۶)$$

برهان: از تعریف ارزش درستی و خاصیت اندازه نایقین نتیجه می‌شود که

$$T(X \wedge \neg X) = \mathcal{M}\{X \wedge \neg X = 1\} = \mathcal{M}\{(X = 1) \cap (X = 0)\} = \mathcal{M}\{\emptyset\} = 0$$

و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۳.۶ (*قانون بقای درستی*) *فرض کنید X یک گزاره نایقین است. پس داریم*

$$T(X) + T(\neg X) = 1. \quad (۱۷.۶)$$

برهان: از اصل دوگانی اندازه نایقین نتیجه می‌شود که

$$T(\neg X) = \mathcal{M}\{\neg X = ۱\} = \mathcal{M}\{X = ۰\} = ۱ - \mathcal{M}\{X = ۱\} = ۱ - T(X)$$

و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۴.۶ *فرض کنید X یک گزاره نایقین است. پس $X \to X$ یک گزاره همواره درست است، یعنی*

$$T(X \to X) = ۱. \tag{۱۸.۶}$$

برهان: از تعریف نماد شرطی و قانون طرد ثالث نتیجه می‌شود که

$$T(X \to X) = T(\neg X \vee X) = ۱$$

و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۵.۶ *فرض کنید X یک گزاره نایقین است. پس داریم*

$$T(X \to \neg X) = ۱ - T(X). \tag{۱۹.۶}$$

برهان: از تعریف نماد شرطی و قانون طرد ثالث نتیجه می‌شود

$$T(X \to \neg X) = T(\neg X \vee \neg X) = T(\neg X) = ۱ - T(X)$$

و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۶.۶ *(قانون دِ مورگان) برای هر دو گزاره نایقین X و Y داریم*

$$T(\neg(X \wedge Y)) = T((\neg X) \vee (\neg Y)), \tag{۲۰.۶}$$

$$T(\neg(X \vee Y)) = T((\neg X) \wedge (\neg Y)). \tag{۲۱.۶}$$

برهان: از خواص اساسی اندازه نایقین نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} T(\neg(X \wedge Y)) &= \mathcal{M}\{X \wedge Y = ۰\} = \mathcal{M}\{(X = ۰) \cup (Y = ۰)\} \\ &= \mathcal{M}\{(\neg X) \vee (\neg Y) = ۱\} = T((\neg X) \vee (\neg Y)) \end{aligned}$$

که برابری اول را ثابت می‌کند. به روش مشابه برابری دوم نیز برقرار است.

قضیه ۷.۶ *(قانون نقیض گزاره) برای گزاره‌های دلخواه نایقین X و Y داریم*

$$T(X \to Y) = T(\neg Y \to \neg X). \tag{۲۲.۶}$$

برهان: از تعریف نماد شرطی و خواص اساسی اندازه نایقین نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} T(X \to Y) &= \mathcal{M}\{(\neg X) \vee Y = ۱\} = \mathcal{M}\{(X = ۰) \cup (Y = ۱)\} \\ &= \mathcal{M}\{Y \vee (\neg X) = ۱\} = T(\neg Y \to \neg X) \end{aligned}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

۳.۶ قضیه چن_ رالسکو

قضیه چن_ رالسکو سهم مهمی در منطق گزاره‌ای نایقین دارد و یک روش عددی برای محاسبه ارزش درستی گزاره‌ها فراهم می‌کند.

قضیه ۸.۶ *(قضیه چن_ رالسکو[۸]) فرض کنید که $X_1, X_2, \ldots, X_n$ گزاره‌های نایقین مستقل به ترتیب با ارزش درستی $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ هستند. پس برای یک تابع بولی f، گزاره نایقین*

$$Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{۲۳.۶}$$

ارزش درستی دارد.

$$T(Z) = \begin{cases} \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i), \\ \quad \text{اگر} \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i) < 0/5 \\ 1 - \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i), \\ \quad \text{اگر} \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i) \ge 0/5 \end{cases} \tag{۲۴.۶}$$

که در آن برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ به ترتیب، x_i مقدار ۰ یا ۱ را می‌گیرد و ν_i توسط

$$\nu_i(x_i) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{اگر } x_i = 1 \\ 1 - \alpha_i, & \text{اگر } x_i = 0 \end{cases} \tag{۲۵.۶}$$

تعریف می‌شود.

برهان: چون $Z = 1$ اگر و تنها اگر $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1$، ما بلافاصله داریم

$$T(Z) = \mathcal{M}\{f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1\}.$$

بنابراین معادله (۲۴.۶) مستقیماً از قضیه ۲۱.۲ نتیجه می‌شود.

مثال ۶.۶: فرض کنید X_1 و X_2 مستقل و گزاره‌های نایقین به ترتیب با ارزش درستی α_1 و α_2 هستند. پس

$$Z = X_1 \leftrightarrow X_2 \tag{۲۶.۶}$$

یک گزاره نایقین است. واضح است $Z = f(X_1, X_2)$ اگر تعریف کنیم

$$f(1,1) = 1, \quad f(1,0) = 0, \quad f(0,1) = 0, \quad f(0,0) = 1.$$

ابتدا داریم

$$\sup_{f(x_1,x_2)=1} \min_{1\le i\le 2} \nu_i(x_i) = \max\{\alpha_1 \wedge \alpha_2, (1-\alpha_1) \wedge (1-\alpha_2)\},$$

$$\sup_{f(x_1,x_2)=0} \min_{1\le i\le 2} \nu_i(x_i) = \max\{(1-\alpha_1)\wedge\alpha_2, \alpha_1\wedge(1-\alpha_2)\}.$$

وقتی $\alpha_1 \ge 0/5$ و $\alpha_2 \ge 0/5$ داریم

$$\sup_{f(x_1,x_2)=1} \min_{1\le i\le 2} \nu_i(x_i) = \alpha_1\wedge\alpha_2 \ge 0/5.$$

از قضیه چن‌ـ رالسکو نتیجه می‌شود که

$$T(Z) = 1 - \sup_{f(x_1,x_2)=0} \min_{1\le i\le 2} \nu_i(x_i) = 1-(1-\alpha_1)\vee(1-\alpha_2) = \alpha_1\wedge\alpha_2.$$

وقتی $\alpha_1 \ge 0/5$ و $\alpha_2 < 0/5$، داریم

$$\sup_{f(x_1,x_2)=1} \min_{1\le i\le 2} \nu_i(x_i) = (1-\alpha_1)\vee\alpha_2 \le 0/5.$$

از قضیه چن‌ـ رالسکو نتیجه می‌شود که

$$T(Z) = \sup_{f(x_1,x_2)=1} \min_{1\le i\le 2} \nu_i(x_i) = (1-\alpha_1)\vee\alpha_2.$$

وقتی $\alpha_1 < 0/5$ و $\alpha_2 \ge 0/5$ داریم

$$\sup_{f(x_1,x_2)=1} \min_{1\le i\le 2} \nu_i(x_i) = \alpha_1\vee(1-\alpha_2) \le 0/5.$$

از قضیه چن‌ـ رالسکو نتیجه می‌شود که

$$T(Z) = \sup_{f(x_1,x_2)=1} \min_{1\le i\le 2} \nu_i(x_i) = \alpha_1\vee(1-\alpha_2).$$

وقتی $\alpha_1 < 0/5$ و $\alpha_2 < 0/5$، داریم

$$\sup_{f(x_1,x_2)=1} \min_{1\le i\le 2} \nu_i(x_i) = (1-\alpha_1)\wedge(1-\alpha_2) > 0/5.$$

از قضیه چن‌ـ رالسکو نتیجه می‌شود که

$$T(Z) = 1 - \sup_{f(x_1,x_2)=0} \min_{1\le i\le 2} \nu_i(x_i) = 1-\alpha_1\vee\alpha_2 = (1-\alpha_1)\wedge(1-\alpha_2).$$

پس داریم

$$T(Z) = \begin{cases} \alpha_1\wedge\alpha_2, & \text{اگر } \alpha_1 \ge 0/5 \text{ و } \alpha_2 \ge 0/5 \\ (1-\alpha_1)\vee\alpha_2, & \text{اگر } \alpha_1 \ge 0/5 \text{ و } \alpha_2 < 0/5 \\ \alpha_1\vee(1-\alpha_2), & \text{اگر } \alpha_1 < 0/5 \text{ و } \alpha_2 \ge 0/5 \\ (1-\alpha_1)\wedge(1-\alpha_2), & \text{اگر } \alpha_1 < 0/5 \text{ و } \alpha_2 < 0/5 \end{cases} \qquad (۲۷.۶)$$

مثال ۷.۶: شرط استقلال در قضیه ۸.۶ را نمی‌توان حذف کرد. به عنوان مثال، فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را به صورت $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ با مجموعه توان و $\mathcal{M}\{\gamma_1\} = \mathcal{M}\{\gamma_2\} = 0/5$ در نظر بگیرید. پس

$$X_1(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر } \\ 1, & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۲۸.۶}$$

یک گزاره نایقین با ارزش درستی

$$T(X_1) = 0/5, \tag{۲۹.۶}$$

است. همچنین

$$X_2(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر } \\ 0, & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۳۰.۶}$$

یک گزاره نایقین با ارزش درستی

$$T(X_2) = 0/5 \tag{۳۱.۶}$$

است، توجه داشته باشید که اگر X_1 و X_2 مستقل نباشند و $X_1 \vee X_2 \equiv 1$ داریم

$$T(X_1 \vee X_2) = 1. \tag{۳۲.۶}$$

با این حال، با استفاده از (۲۴.۶) نتیجه می‌گیریم

$$T(X_1 \vee X_2) = 0/5. \tag{۳۳.۶}$$

بنابراین شرط استقلال را نمی‌توان حذف کرد.

تمرین ۱.۶: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ گزاره‌های مستقل نایقین به ترتیب با ارزش درستی $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ هستند. پس

$$Z = X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n \tag{۳۴.۶}$$

یک گزاره نایقین است، نشان دهید ارزش درستی Z

$$T(Z) = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \tag{۳۵.۶}$$

است.

تمرین ۲.۶: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ گزاره‌های مستقل نایقین به ترتیب با ارزش درستی $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ هستند. پس

$$Z = X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_n \tag{۳۶.۶}$$

یک گزاره نایقین است، نشان دهید ارزش درستی Z

$$T(Z) = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n. \tag{۳۷.۶}$$

است.

تمرین ۳.۶: فرض کنید که $X_۱$ و $X_۲$ گزاره‌های مستقل به ترتیب با ارزش درستی $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ هستند.
الف. ارزش درستی $(X_۱ \wedge X_۲) \to X_۲$ چیست؟
ب. ارزش درستی $(X_۱ \vee X_۲) \to X_۲$ چیست؟
ج. ارزش درستی $X_۱ \to (X_۱ \wedge X_۲)$ چیست؟
د. ارزش درستی $X_۱ \to (X_۱ \vee X_۲)$ چیست؟

تمرین ۴.۶: فرض کنید که $X_۱, X_۲, X_۳$ گزاره‌های مستقل به ترتیب با ارزش درستی $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳$ هستند. ارزش درستی

$$X_۱ \wedge (X_۱ \vee X_۲) \wedge (X_۱ \vee X_۲ \vee X_۳) \qquad (۳۸.۶)$$

چیست؟

۴.۶ منطق سوری نایقین

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید: «پکن یک شهر بزرگ است»، و «تیانجین یک شهر بزرگ است ». منطق گزاره‌ای نایقین آنها را به عنوان گزاره‌های غیر مرتبط در نظر می‌گیرد. با این حال، منطق سوری نایقین، آنها را با یک گزاره‌نما $X(a)$ نشان می‌دهد. اگر a نشان دهنده پکن باشد، آنگاه

$$X(a) = \text{پکن یک شهر بزرگ است.} \qquad (۳۹.۶)$$

اگر a نشان دهنده تیانجین باشد، آنگاه

$$X(a) = \text{تیانجین یک شهر بزرگ است.} \qquad (۴۰.۶)$$

تعریف ۳.۶ [۲۱۴] *گزاره گزاره‌نمای نایقین یک دنباله از گزاره‌های نایقین است که با یک یا چند پارامتر اندیس گذاری شده اند.*

برای مطالعه گزاره‌نمای نایقین، به سور عمومی $\forall$ و سور وجودی $\exists$ نیاز داریم. اگر $X(a)$ نشان دهنده یک گزاره‌نمای نایقین تعریف شده بر اساس (۳۹.۶) و (۴۰.۶) باشد، آنگاه

$$(\forall a)X(a) = \text{پکن و تیانجین یک شهرهای بزرگ هستند ,} \qquad (۴۱.۶)$$

$$(\exists a)X(a) = \text{حداقل یکی از شهرهای پکن یا تیانجین بزرگ است .} \qquad (۴۲.۶)$$

قضیه ۹.۶ ([۲۱۴]، *قانون طرد ثالث*) *فرض کنید $X(a)$ یک گزاره‌نمای نایقین است. پس*

$$T((\forall a)X(a) \vee (\exists a)\neg X(a)) = ۱. \qquad (۴۳.۶)$$

برهان: چون $\neg(\forall a)X(a) = (\exists a)\neg X(a)$، از تعریف ارزش درستی و خاصیت اندازه نایقین نتیجه می‌شود

$$T((\forall a)X(a) \vee (\exists a)\neg X(a)) = \mathcal{M}\{((\forall a)X(a) = ۱) \cup ((\forall a)X(a) = ۰)\} = ۱$$

و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۱۰.۶ ([۲۱۴]، *قانون تناقض*) *فرض کنید* $X(a)$ *یک گزاره‌نمای نایقین است. پس*

$$T((\forall a)X(a) \wedge (\exists a)\neg X(a)) = ۰. \qquad (۴۴.۶)$$

برهان: چون $\neg(\forall a)X(a) = (\exists a)\neg X(a)$، از تعریف ارزش درستی و خاصیت اندازه نایقین داریم

$$T((\forall a)X(a) \wedge (\exists a)\neg X(a)) = \mathcal{M}\{((\forall a)X(a) = ۱) \cap ((\forall a)X(a) = ۰)\} = ۰$$

و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۱۱.۶ ([۲۱۴]، *قانون بقای درستی*) *فرض کنید* $X(a)$ *گزاره‌نمای نایقین است. پس*

$$T((\forall a)X(a)) + T((\exists a)\neg X(a)) = ۱. \qquad (۴۵.۶)$$

برهان: چون $\neg(\forall a)X(a) = (\exists a)\neg X(a)$، از تعریف ارزش درستی و خاصیت اندازه نایقین داریم

$$T((\exists a)\neg X(a)) = ۱ - \mathcal{M}\{(\forall a)X(a) = ۱\} = ۱ - T((\forall a)X(a))$$

و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۱۲.۶ [۲۱۴] *فرض کنید* $X(a)$ *یک گزاره‌نمای نایقین است. پس برای هر* b *داریم*

$$T((\forall a)X(a) \to X(b)) = ۱. \qquad (۴۶.۶)$$

برهان: برهان به دو حالت تقسیم می‌شود. حالت ۱: اگر $X(b) = ۰$، پس $(\forall a)X(a) = ۰$ و $\neg(\forall a)X(a) = ۱$ بنابراین

$$(\forall a)X(a) \to X(b) = \neg(\forall a)X(a) \vee X(b) = ۱.$$

حالت ۲: اگر $X(b) = ۱$، بلافاصله داریم

$$(\forall a)X(a) \to X(b) = \neg(\forall a)X(a) \vee X(b) = ۱.$$

بنابراین همواره (۴۶.۶) را داریم و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۱۳.۶ [۲۱۴] *فرض کنید* $X(a)$ *یک گزاره‌نمای نایقین است. پس برای هر* b *داریم*

$$T(X(b) \to (\exists a)X(a)) = ۱. \qquad (۴۷.۶)$$

برهان: برهان به دو حالت تقسیم می‌شود. حالت۱: اگر $X(b) = ۰$، آنگاه $\neg X(b) = ۱$ و

$$X(b) \to (\forall a)X(a) = \neg X(b) \vee (\exists a)X(a) = ۱.$$

حالت ۲: اگر X (b) = ۱، ، آنگاه $(\exists a)X(a) = ۱$ و

$$X(b) \to (\exists a)X(a) = \neg X(b) \vee (\exists a)X(a) = ۱.$$

بنابراین همواره (۴۷.۶) را داریم و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۱۴.۶ [۲۱۴] *فرض کنید $X(a)$ یک گزاره‌نمای نایقین است. پس*

$$T((\forall a)X(a) \to (\exists a)X(a)) = ۱. \tag{۴۸.۶}$$

برهان: برهان به دو حالت تقسیم می‌شود. حالت ۱: اگر $(\forall a)X(a) = ۰$، آنگاه $\neg(\forall a)X(a) = ۱$ و

$$(\ forall a)X(a) \to (\exists a)X(a) = \neg(\forall a)X(a) \vee (\exists a)X(a) = ۱.$$

حالت ۲: اگر $(\forall a)X(a) = ۱$ ، آنگاه $(\exists a)X(a) = ۱$ و

$$(\forall a)X(a) \to (\exists a)X(a) = \neg(\forall a)X(a) \vee (\exists a)X(a) = ۱.$$

بنابراین همواره (۴۸.۶) را داریم، و قضیه ثابت شده است.

قضیه ۱۵.۶ [۲۱۴] *فرض کنید $X(a)$ یک گزاره‌نمای نایقین است به طوری که $\{X(a)|a \in A\}$ کلاسی از گزاره‌های نایقین مستقل است. پس*

$$T((\forall a)X(a)) = \inf_{a\in A} T(X(a)), \tag{۴۹.۶}$$

$$T((\exists a)X(a)) = \sup_{a\in A} T(X(a)). \tag{۵۰.۶}$$

برهان: برای هر گزاره‌نمای نایقین $X(a)$، به استفاده از مفهوم سور عمومی داریم

$$T((\forall a)X(a)) = \mathcal{M}\{(\forall a)X(a) = ۱\} = \mathcal{M}\left\{\bigcap_{a\in A}(X(a) = ۱)\right\}.$$

چون $\{X(a)|a \in A\}$ یک کلاس از گزاره‌های نایقین مستقل است، داریم

$$T((\forall a)X(a)) = \inf_{a\in A} \mathcal{M}\{X(a) = ۱\} = \inf_{a\in A} T(X(a)).$$

تساوی اول برقرار است. به همین ترتیب، با استفاده از سور وجودی داریم

$$T((\exists a)X(a)) = \mathcal{M}\{(\exists a)X(a) = ۱\} = \mathcal{M}\left\{\bigcup_{a\in A}(X(a) = ۱)\right\}.$$

چون $\{X(a)|a \in A\}$ یک کلاس از گزاره‌های نایقین مستقل است، داریم

$$T((\exists a)X(a)) = \sup_{a\in A} \mathcal{M}\{X(a) = ۱\} = \sup_{a\in A} T(X(a)).$$

تساوی دوم نیز ثابت می‌شود.

قضیه ۱۶.۶ [۲۱۴] *فرض کنید $X(a,b)$ یک گزاره‌نمای نایقین است طوری که $\{X(a,b)|a \in A, b \in B\}$ یک کلاس ازگزاره‌های نایقین مستقل است. پس*

$$T((\forall a)(\exists b)X(a,b)) = \inf_{a\in A}\sup_{b\in B} T(X(a,b)), \tag{۵۱.۶}$$

$$T((\exists a)(\forall b)X(a,b)) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} T(X(a,b)). \tag{۵۲.۶}$$

برهان: چون $\{X(a,b)|a\in A, b\in B\}$ یک کلاس از گزاره‌های نایقین مستقل است، آنگاه دو مجموعه $\{(\exists b)X(a,b)|a\in A\}$ و $\{(\forall b)X(a,b)|a\in A\}$ کلاس‌های گزاره‌های نایقین مستقل هستند. از قضیه ۱۵.۶ داریم

$$T((\forall a)(\exists b)X(a,b)) = \inf_{a\in A} T((\exists b)X(a,b)) = \inf_{a\in A}\sup_{b\in B} T(X(a,b)),$$

$$T((\exists a)(\forall b)X(a,b)) = \sup_{a\in A} T((\forall b)X(a,b)) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} T(X(a,b))$$

و قضیه ثابت می‌شود.

۵.۶ نکات کتابشناسی

منطق گزاره‌ای نایقین توسط لی- لیو [۷۹] مطرح شد که در آن هر گزاره با یک متغیر نایقین بولی مشخص می‌شود و ارزش درستی آن به عنوان مقدار نایقینی است که برای درستی گزاره تعریف می‌شود. یک نکته مهم، قضیه چن- رالسکو [۸] است که یک روش عددی برای محاسبه ارزش درستی گزاره‌های نایقین است.

موضوع دیگر منطق گزاره‌نمای نایقین است که توسط ژانگ- لی [۲۱۴] ارائه شده است که در آن یک گزاره‌نمای نایقین به عنوان دنباله‌ای از گزاره‌های نایقین نشان داده و با یک یا چند پارامتر تعریف شده است.

فصل ۷

استلزام نایقین

استلزام نایقین روشی برای محاسبه ارزش درستی یک فرمول نایقین از طریق حداکثر نایقینی است، زمانی که ارزش‌های درستی دیگر فرمول‌های نایقین معلوم باشد. به برخی از معانی، منطق گزاره ای نایقین و استلزام نایقین در تقابل هم هستند، اولی تلاش می کند تا یک گزاره پیچیده تر را از ساده ترآن بسازد، در حالی که دومی تلاش می کند که گزاره پیچیده را به ساده تر تجزیه کند.
این فصل یک مدل استلزام نایقین را ارائه می دهد. علاوه بر این، قیاس استثنائی نایقین، نفی تالی نایقین و قیاس منطقی نایقین، از مدل استلزام نایقین نتیجه می‌شوند.

۱.۷ مدل استلزام نایقین

فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ گزاره‌های نایقین مستقل به ترتیب با ارزش درستی نامعلوم $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n$ هستند. همچنین فرض کنید

$$Y_j = f_j(X_۱, X_۲, \ldots, X_n) \tag{۱.۷}$$

گزاره‌های نایقین به ترتیب با ارزش‌های درستی معلوم c_j، $j = ۱, ۲, \ldots, m$ هستند. حال فرض کنید

$$Z = f(X_۱, X_۲, \ldots, X_n) \tag{۲.۷}$$

یک گزاره دیگر نایقین است. ارزش درستی Z چیست؟ این سوال یک مساله استلزام نایقین است. برای پاسخ گویی به آن، بررسی می کنیم که$\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n$ چه مقادیر ممکن است اختیار کنند. اولین محدودیت به صورت

$$۰ \le \alpha_i \le ۱, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \tag{۳.۷}$$

است. دومین محدودیت به صورت

$$T(Y_j) = c_j \tag{۴.۷}$$

است که در آن $T(Y_j)$ با $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ برای $j = 1, 2, \ldots, m$ از طریق

$$T(Y_j) = \begin{cases} \sup\limits_{f_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i), & \text{اگر } \sup\limits_{f_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i) < 0/5 \\ 1 - \sup\limits_{f_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i), & \text{اگر } \sup\limits_{f_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i) \ge 0/5 \end{cases} \quad (5.7)$$

تعیین می‌شود و برای $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\nu_i(x_i) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{اگر } x_i = 1 \\ 1 - \alpha_i, & \text{اگر } x_i = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

توجه داشته باشید که گزاره نایقین $Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ارزش درستی

$$T(Z) = \begin{cases} \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i), & \text{اگر } \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i) < 0/5 \\ 1 - \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i), & \text{اگر } \sup\limits_{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1} \min\limits_{1\le i\le n} \nu_i(x_i) \ge 0/5 \end{cases} \quad (7.7)$$

دارد.

چون ارزش‌های درستی $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ منحصربفرد نیستند، پس ارزش درستی $T(Z)$ نیزیکتا نیست. در این حالت، ما باید از حداکثر نایقینی برای تعیین ارزش درستی $T(Z)$ استفاده کنیم. به این معنی است که ارزش $T(Z)$ باید تا آنجا که امکان دارد به $0/5$ نزدیک باشد. به عبارت دیگر باید مقدار $|T(Z) - 0/5|$ را با انتخاب مقادیر $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ به حداقل برسانیم. بنابراین مدل استلزام نایقین توسط لیو [۸۸] به صورت

$$\begin{cases} \min |T(Z) - 0/5| \\ \text{subject to:} \\ \qquad 0 \le \alpha_i \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \qquad T(Y_j) = c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \quad (8.7)$$

معرفی شد، که در آن برای هر $T(Z), T(Y_j), j = 1, 2, \ldots, m$ تابع‌هایی با ارزش درستی نامعلوم $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ هستند.

مثال ۱.۷: فرض کنید A و B گزاره‌های مستقل نایقین هستند. واضح است که

$$T(A \vee B) = a, \quad T(A \wedge B) = b. \quad (9.7)$$

ارزش درستی $A \to B$ چیست؟ ارزش‌های درستی A و B را به ترتیب با $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ بیان نموده و می‌نویسیم

$$Y_۱ = A \vee B, \quad Y_۲ = A \wedge B, \quad Z = A \to B.$$

واضح است که

$$T(Y_۱) = \alpha_۱ \vee \alpha_۲ = a,$$
$$T(Y_۲) = \alpha_۱ \wedge \alpha_۲ = b,$$
$$T(Z) = (۱ - \alpha_۱) \vee \alpha_۲.$$

در این حالت، مدل استلزام نایقین (۸.۷) به

$$\begin{cases} \min |(۱ - \alpha_۱) \vee \alpha_۲ - ۰/۵| \\ \text{subject to:} \\ \qquad ۰ \le \alpha_۱ \le ۱ \\ \qquad ۰ \le \alpha_۲ \le ۱ \\ \qquad \alpha_۱ \vee \alpha_۲ = a \\ \qquad \alpha_۱ \wedge \alpha_۲ = b. \end{cases} \tag{۱۰.۷}$$

تبدیل می‌شود. وقتی $a \ge b$، تنها دو جواب شدنی $(\alpha_۱, \alpha_۲) = (a, b)$ و $(\alpha_۱, \alpha_۲) = (b, a)$ وجود دارند. اگر $a + b < ۱$، جواب بهینه

$$T(Z) = (۱ - \alpha_۱^*) \vee \alpha_۲^* = ۱ - a;$$

است، اگر $a + b = ۱$، جواب بهینه

$$T(Z) = (۱ - \alpha_۱^*) \vee \alpha_۲^* = a \text{ یا } b;$$

است، و اگر $a + b > ۱$، جواب بهینه

$$T(Z) = (۱ - \alpha_۱^*) \vee \alpha_۲^* = b.$$

است. وقتی $a < b$، جواب شدنی ندارد و ارزش درستی بدوضع تعیین می‌شود. به طور خلاصه، از $T(A \vee B) = a$ و $T(A \wedge B) = b$ نتیجه می‌گیریم که

$$T(A \to B) = \begin{cases} ۱ - a, & \text{اگر } a + b < ۱ \text{ و } a \ge b \\ a \text{ یا } b, & \text{اگر } a + b = ۱ \text{ و } a \ge b \\ b, & \text{اگر } a + b > ۱ \text{ و } a \ge b \\ \text{بدوضع}, & \text{اگر } a < b \end{cases} \tag{۱۱.۷}$$

تمرین ۱.۷: فرض کنید A, B, C گزاره‌های نایقین مستقل هستند و

$$T(A \to C) = a, \quad T(B \to C) = b, \quad T(A \vee B) = c. \tag{۱۲.۷}$$

داده شده است، ارزش درستی C چیست؟

تمرین ۲.۷: فرض کنید A, B, C, D گزاره‌های نایقین مستقل هستند و

$$T(A \to C) = a, \quad T(B \to D) = b, \quad T(A \vee B) = c. \tag{۱۳.۷}$$

داده شده است، ارزش درستی $C \vee D$ چیست؟

تمرین ۳.۷: فرض کنید A, B, C گزاره‌های نایقین مستقل هستند و

$$T(A \vee B) = a, \quad T(\neg A \vee C) = b. \tag{۱۴.۷}$$

داده شده است، ارزش درستی $B \vee C$ چیست؟

۲.۷ قیاس استثنائی نایقین

قیاس استثنائی نایقین توسط لیو[۸۸] ارائه شد. فرض کنید A و B گزاره‌های نایقین و مستقل هستند و A و $A \to B$ ارزش درستی a و b دارند. ارزش درستی B چیست؟ ارزش‌های درستی A و B را به ترتیب با $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ نشان داده و قرار دهید

$$Y_۱ = A, \quad Y_۲ = A \to B, \quad Z = B.$$

واضح است که

$$T(Y_۱) = \alpha_۱ = a,$$
$$T(Y_۲) = (۱ - \alpha_۱) \vee \alpha_۲ = b,$$
$$T(Z) = \alpha_۲.$$

در این حالت، مدل استلزام نایقین (۸.۷) به

$$\begin{cases} \min |\alpha_۲ - ۰/۵| \\ \text{subject to:} \\ \qquad ۰ \le \alpha_۱ \le ۱ \\ \qquad ۰ \le \alpha_۲ \le ۱ \\ \qquad \alpha_۱ = a \\ \qquad (۱ - \alpha_۱) \vee \alpha_۲ = b. \end{cases} \tag{۱۵.۷}$$

تبدیل می شود. وقتی $a + b > ۱$، یک جواب شدنی یکتا وجود دارد و لذا جواب

$$\alpha_۱^* = a, \quad \alpha_۲^* = b$$

بهینه است بنابراین $T(B) = \alpha_۲^* = b$. وقتی$a + b = ۱$، مجموعه شدنی $\{a\} \times [۰, b]$ است و جواب بهینه به صورت

$$\alpha_۱^* = a, \quad \alpha_۲^* = ۰/۵ \wedge b$$

است. بنابراین $T(B) = \alpha_۲^* = ۰/۵ \wedge b$. وقتی $a + b < ۱$، جواب شدنی وجود ندارد و ارزش‌های نایقین بدوضع تشخیص داده می‌شوند. به طور خلاصه، از

$$T(A) = a, \quad T(A \to B) = b \tag{۱۶.۷}$$

نتیجه می گیریم که

$$T(B) = \begin{cases} b, & a+b > ۱ \text{ اگر } \\ ۰/۵ \wedge b, & a+b = ۱ \text{ اگر } \\ \text{بدوضع}, & a+b < ۱ \text{ اگر } \end{cases} \tag{۱۷.۷}$$

این نتیجه با استلزام کلاسیک همخوانی دارد که اگر A و $A \to B$ درست باشند، B نیز درست است.

۳.۷ نفی تالی نایقین

نفی تالی نایقین توسط لیو [۸۸] ارائه شد. فرض کنید A و B گزاره‌های مستقل نایقین هستند و $A \to B$ و B ارزش درستی a و b دارند. ارزش درستی A چیست؟ ارزش‌های درستی A و B را به ترتیب با $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ نشان کنید و بنویسید

$$Y_۱ = A \to B, \quad Y_۲ = B, \quad Z = A.$$

واضح است که

$$T(Y_۱) = (۱ - \alpha_۱) \vee \alpha_۲ = a,$$
$$T(Y_۲) = \alpha_۲ = b,$$
$$T(Z) = \alpha_۱.$$

در این حالت مدل استلزام تایقین (۸.۷) به

$$\begin{cases} \min |\alpha_۱ - ۰/۵| \\ \text{subject to:} \\ \qquad ۰ \le \alpha_۱ \le ۱ \\ \qquad ۰ \le \alpha_۲ \le ۱ \\ \qquad (۱ - \alpha_۱) \vee \alpha_۲ = a \\ \qquad \alpha_۲ = b. \end{cases} \tag{۱۸.۷}$$

تبدیل می شود. وقتی $a > b$، یک جواب شدنی یکتا وجود دارد و لذا جواب بهینه به صورت

$$\alpha_۱^* = ۱ - a, \quad \alpha_۲^* = b$$

است. بنابراین $T(A) = \alpha_۱^* = ۱ - a$. وقتی $a = b$، جواب شدنی به صورت $[۱ - a, ۱] \times \{b\}$ است و

$$\alpha_۱^* = (۱ - a) \vee ۰/۵, \quad \alpha_۲^* = b$$

جواب بهینه است. بنابراین $T(A) = \alpha_۱^* = (۱ - a) \vee ۰/۵$. وقتی $a < b$ ، جواب شدنی وجود ندارد و ارزش درستی بدوضع تعیین می‌شود. به طور خلاصه، از

$$T(A \to B) = a, \quad T(B) = b \tag{۱۹.۷}$$

نتیجه می شود

$$T(A) = \begin{cases} ۱ - a, & a > b \text{ اگر } \\ (۱ - a) \vee ۰/۵, & a = b \text{ اگر } \\ \text{بدوضع}, & a < b \text{ اگر } \end{cases} \quad (۲۰.۷)$$

این نتیجه با قانون نفی تالی کلاسیک همخوانی دارد که اگر $B \to A$ درست و B نادرست باشد، آنگاه A نیز نادرست است.

۴.۷ قیاس منطقی نایقین

قیاس منطقی نایقین توسط لیو [۸۸]معرفی شد. فرض کنید A, B, C گزاره‌های نایقین مستقل هستند و $A \to B$ و $B \to C$ به ترتیب ارزش درسای a و b دارند. ارزش درستی $A \to C$ چیست؟ ارزش درستی A, B, C را به ترتیب با $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳$ نشان دهید و بنویسید

$$Y_۱ = A \to B, \quad Y_۲ = B \to C, \quad Z = A \to C.$$

واضح است که

$$T(Y_۱) = (۱ - \alpha_۱) \vee \alpha_۲ = a,$$
$$T(Y_۲) = (۱ - \alpha_۲) \vee \alpha_۳ = b,$$
$$T(Z) = (۱ - \alpha_۱) \vee \alpha_۳.$$

در این حالت، مدل استلزام نایقین (۸.۷) به

$$\begin{cases} \min |(۱ - \alpha_۱) \vee \alpha_۳ - ۰/۵| \\ \text{subject to:} \\ \qquad ۰ \le \alpha_۱ \le ۱ \\ \qquad ۰ \le \alpha_۲ \le ۱ \\ \qquad ۰ \le \alpha_۳ \le ۱ \\ \qquad (۱ - \alpha_۱) \vee \alpha_۲ = a \\ \qquad (۱ - \alpha_۲) \vee \alpha_۳ = b \end{cases} \quad (۲۱.۷)$$

تبدیل می شود. جواب بهینه را با $(\alpha_۱^*, \alpha_۲^*, \alpha_۳^*)$ نشان دهید. وقتی $a \wedge b \ge ۰/۵$، داریم

$$T(A \to C) = (۱ - \alpha_۱^*) \vee \alpha_۳^* = a \wedge b.$$

وقتی $a + b \ge ۱$ و $a \wedge b < ۰/۵$، داریم

$$T(A \to C) = (۱ - \alpha_۱^*) \vee \alpha_۳^* = ۰/۵.$$

وقتی $a + b < ۱$، جواب شدنی وجود ندارد و ارزش درستی بدوضع است. به طور خلاصه، از

$$T(A \to B) = a, \quad T(B \to C) = b \quad (۲۲.۷)$$

نتیجه می گیریم

$$T(A \to C) = \begin{cases} a \wedge b, & \text{اگر } a \geq ۰/۵ \text{ و } b \geq ۰/۵ \\ ۰/۵, & \text{اگر } a \wedge b < ۰/۵ \text{ و } a + b \geq ۱ \\ \text{بدوضع}, & \text{اگر } a + b < ۱ \end{cases} \quad (۲۳.۷)$$

این نتیجه با قانون قیاس منطقی کلاسیک همخوانی دارد که اگر $A \to B$ و $B \to C$ درست باشند، آنگاه $A \to C$ نیز درست است.

۵.۷ نکات کتابشناسی

استلزام نایقین توسط لیو [۸۸] برای تعیین ارزش درستی یک گزاره نایقین از طریق اصل نایقینی بیشینه، زمانی که ارزش درستی سایر گزاره‌های نایقین معلوم باشند، معرفی شد.

از مدل استلزام نایقین، لیو [۸۸] قیاس استثنائی نایقین، نفی تالی نایقین و قیاس منطقی نایقین را نتیجه گرفت. بعد از آن، یانگ‌ـ گائوـ نی [۱۷۴]، اصل وضوح نایقینی را مطرح کردند.

فصل ۸

مجموعه نایقین

مجموعه نایقین اولین بار در سال ۲۰۱۰ توسط لیو برای مدل بندی مفاهیم مبهم مطرح شد [۸۹]. این فصل مفاهیم مجموعه نایقین، تابع عضویت، استقلال، مقدار مورد انتظار، واریانس، فاصله، و آنتروپی را معرفی می‌کند. همچنین قاعده عملیاتی برای مجموعه‌های نایقین با استفاده از تابع‌های عضویت یا تابع‌های عضویت معکوس را مطرح می‌کند. در پایان، مجموعه نایقین شرطی و تابع عضویت نایقین بیان می‌شود.

۱.۸ مجموعه نایقین

در نگاه اجمالی، مجموعه نایقین یک تابع مجموعه‌ـ مقدار روی فضای نایقینی است؛ و هدف آن مدل بندی « مفاهیم نادقیق است که ذاتاً مجموعه هستند ولی مرزهای آن دقیق بیان نشده است (به دلیل ابهام در گفتار بشری). برخی مثال‌های نوعی عبارتند از «جوان»، «بلند قد»، «گرم» و «اغلب». تعریف رسمی آن در ادامه بیان می‌شود.

تعریف ۱.۸ [۸۹] *مجموعه نایقین یک تابع ξ از یک فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ به گردایه‌ای از مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی است طوری که $\{B \subset \xi\}$ و $\{\xi \subset B\}$ برای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی یک رویداد است.*

تذکر ۱.۸: توجه کنید که رویدادهای $\{B \subset \xi\}$ و $\{\xi \subset B\}$ زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع Γ است، یعنی

$$\{B \subset \xi\} = \{\gamma \in \Gamma \,|\, B \subset \xi(\gamma)\}, \tag{۱.۸}$$

$$\{\xi \subset B\} = \{\gamma \in \Gamma \,|\, \xi(\gamma) \subset B\}. \tag{۲.۸}$$

تذکر ۲.۸: واضح است که مجموعه نایقین [۸۹] کاملاً از مجموعه تصادفی([۱۳۹] و [۱۲۰]) را نگاه کنید) و مجموعه فازی [۲۰۳] متمایز است. تفاوت اساسی این مجموعه‌ها اندازه‌های متفاوتی

است که آنها استفاده می‌کنند. مجموعه‌های تصادفی از اندازه احتمال و مجموعه‌های فازی از اندازه امکان‌پذیری استفاده می‌کنند در حالی که مجموعه نایقین از اندازه نایقین استفاده می‌کند.

تذکر ۳.۸: چه تفاوتی بین متغیر نایقین و مجموعه نایقین وجود دارد؟ هر دو مفهوم به یک حوزه گستره از مفاهیم نایقین تعلق دارند. با این حال، آنها بر اساس تعریف‌های ریاضی از هم تفکیک می‌شوند: اولی به یک مقدار اشاره دارد در حالی که دومی به گردایه‌ای از مقدارها ارجاع می‌دهد. اساساً، تفاوت بین متغیر نایقین و مجموعه نایقین بر خاصیت *عدم‌شمول* متمرکز است. اگر این مفهوم عدم شمول است، آنگاه آن موضوع یک متغیر نایقین، است، در غیر این صورت یک مجموعه نایقین است. گزاره «جان یک مرد جوان است» را در نظر بگیرید. اگر تمرکز ما روی سن واقعی جان است، آنگاه «جوان» یک متغیر نایقین است، زیرا این مفهوم، غیرشمولی است (سن جان بیشتر از یک مقدار نیست). مثلاً اگر جان ۲۰ ساله باشد، آنگاه امکان ندارد که ۲۵ ساله هم باشد. به عبارت دیگر، «جان ۲۰ ساله است» امکان «جان ۲۵ ساله است» را منتفی می‌کند. در مقابل، اگر بخواهیم بدانیم بودن در کدام سن «جوانی» تلقی می‌شود، آنگاه «جوان» یک مجموعه نایقین است، زیرا در این حالت، مفهوم جوانی، عدم شمولی است. مثلا هم ۲۰ ساله و هم ۲۵ ساله، هر دو جوان محسوب می‌شوند. به عبارت دیگر «شخص ۲۰ ساله جوان است» امکان «شخص ۲۵ ساله جوان است» را منتفی نمی‌کند.

مثال ۱.۸: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$، مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳\}$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = ۰/۶,\ \mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۳,\ \mathcal{M}\{\gamma_۳\} = ۰/۲$ است. آنگاه

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} [۱, ۳], & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۲, ۴], & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ [۳, ۵], & \gamma = \gamma_۳ \text{ اگر } \end{cases} \tag{۳.۸}$$

یک مجموعه نایقین است (شکل ۱.۸ را نگاه کنید). همچنین داریم

$$\mathcal{M}\{۲ \in \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, ۲ \in \xi(\gamma)\} = \mathcal{M}\{\gamma_۱, \gamma_۲\} = ۰/۸, \tag{۴.۸}$$

$$\mathcal{M}\{[۳, ۴] \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, [۳, ۴] \subset \xi(\gamma)\} = \mathcal{M}\{\gamma_۲, \gamma_۳\} = ۰/۴, \tag{۵.۸}$$

$$\mathcal{M}\{\xi \subset [۱, ۵]\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) \subset [۱, ۵]\} = \mathcal{M}\{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳\} = ۱. \tag{۶.۸}$$

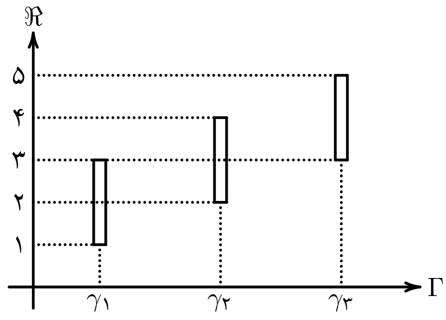
مثال ۲.۸: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[۰, ۱]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. آنگاه

$$\xi(\gamma) = [۰, ۳\gamma], \quad \forall \gamma \in \Gamma \tag{۷.۸}$$

یک مجموعه نایقین است. همچنین داریم

$$\mathcal{M}\{۲ \in \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, ۲ \in \xi(\gamma)\} = \mathcal{M}\{[۲/۳, ۱]\} = ۱/۳, \tag{۸.۸}$$

$$\mathcal{M}\{[۰, ۱] \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, [۰, ۱] \subset \xi(\gamma)\} = \mathcal{M}\{[۱/۳, ۱]\} = ۲/۳, \tag{۹.۸}$$



شکل ۱.۸: یک مجموعه نایقین

$$\mathcal{M}\{\xi \subset [۰,۳)\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) \subset [۰,۳)\} = \mathcal{M}\{[۰,۱)\} = ۱. \qquad (۱۰.۸)$$

مثال ۳.۸: مجموعه قطعی A از اعداد حقیقی یک مجموعه نایقین خاص روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ است که با

$$\xi(\gamma) \equiv A, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \qquad (۱۱.۸)$$

تعریف می‌شود. همچنین، برای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی، داریم

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, B \subset \xi(\gamma)\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱, \quad B \subset A \text{ اگر }, \qquad (۱۲.۸)$$

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, B \subset \xi(\gamma)\} = \mathcal{M}\{\varnothing\} = ۰, \quad B \not\subset A \text{ اگر }, \qquad (۱۳.۸)$$

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) \subset B\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱, A \subset B \text{ اگر }, \qquad (۱۴.۸)$$

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = \mathcal{M}\{\gamma \,|\, \xi(\gamma) \subset B\} = \mathcal{M}\{\varnothing\} = ۰, \quad A \not\subset B \text{ اگر } \qquad (۱۵.۸)$$

مثال ۴.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین و x یک عدد حقیقی است. آنگاه

$$\{x \in \xi\}^c = \{\gamma \,|\, x \in \xi(\gamma)\}^c = \{\gamma \,|\, x \notin \xi(\gamma)\} = \{x \notin \xi\}.$$

پس $\{x \in \xi\}$ و $\{x \notin \xi\}$ رویدادهای متضاد هستند. همچنین بنا بر اصل موضوعه دوگانی، داریم

$$\mathcal{M}\{x \in \xi\} + \mathcal{M}\{x \notin \xi\} = ۱. \qquad (۱۶.۸)$$

تمرین ۱.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین و B یک مجموعه بورل از اعداد حقیقی است. نشان دهید $\{\xi \subset B\}$ و $\{\xi \not\subset B\}$ رویدادهای متضاد هستند و

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} + \mathcal{M}\{\xi \not\subset B\} = ۱. \qquad (۱۷.۸)$$

تمرین ۲.۸: فرض کنید ξ و η دو مجموعه نایقین هستند. نشان دهید $\{\xi \subset \eta\}$ و $\{\xi \not\subset \eta\}$ رویدادهای متضاد هستند و

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} + \mathcal{M}\{\xi \not\subset \eta\} = ۱. \tag{۱۸.۸}$$

تمرین ۳.۸: مجموعه $\varnothing$ را در نظر بگیرید و فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین است. نشان دهید

$$\mathcal{M}\{\varnothing \subset \xi\} = ۱. \tag{۱۹.۸}$$

تمرین ۴.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین و $\Re$ مجموعه اعداد حقیقی است. نشان دهید

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \Re\} = ۱. \tag{۲۰.۸}$$

تمرین ۵.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین است. نشان دهید ξ همواره شامل خودش است، یعنی

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \xi\} = ۱. \tag{۲۱.۸}$$

قضیه ۱.۸ ([۱۰۵]، *رابطه بنیادی*) *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین و B یک مجموعه قطعی از اعداد حقیقی است. آنگاه*

$$\{B \subset \xi\} = \bigcap_{x \in B} \{x \in \xi\}, \tag{۲۲.۸}$$

$$\{\xi \subset B\} = \bigcap_{x \in B^c} \{x \not\in \xi\}. \tag{۲۳.۸}$$

برهان: برای هر $\gamma \in \{B \subset \xi\}$، داریم $B \subset \xi(\gamma)$. پس $x \in \xi(\gamma)$ که در آن $x \in B$. یعنی $\gamma \in \{x \in \xi\}$ و آنگاه برای $x \in B$ داریم $\{B \subset \xi\} \subset \{x \in \xi\}$. پس

$$\{B \subset \xi\} \subset \bigcap_{x \in B} \{x \in \xi\}. \tag{۲۴.۸}$$

از طرف دیگر، برای هر

$$\gamma \in \bigcap_{x \in B} \{x \in \xi\},$$

داریم $x \in \xi(\gamma)$ که در آن $x \in B$. پس $B \subset \xi(\gamma)$، یعنی $\gamma \in \{B \subset \xi\}$. به عبارت دیگر

$$\{B \subset \xi\} \supset \bigcap_{x \in B} \{x \in \xi\}. \tag{۲۵.۸}$$

از (۲۴.۸) و (۲۵.۸) برقراری (۲۲.۸) نتیجه می‌شود. رابطه اول ثابت شد. حال برقراری رابطه دوم را تحقیق می‌کنیم. برای هر $\gamma \in \{\xi \subset B\}$، داریم $\xi(\gamma) \subset B$. پس $x \not\in \xi(\gamma)$ که در آن $x \in B^c$. یعنی $\gamma \in \{x \not\in \xi\}$ و بنابر این برای هر $x \in B^c$ داریم $\{\xi \subset B\} \subset \{x \not\in \xi\}$. پس

$$\{\xi \subset B\} \subset \bigcap_{x \in B^c} \{x \not\in \xi\}. \tag{۲۶.۸}$$

از طرف دیگر برای هر

$$\gamma \in \bigcap_{x\in B^c} \{x \not\in \xi\},$$

داریم $x \not\in \xi(\gamma)$ که در آن $x \in B^c$. پس $\xi(\gamma) \subset B$، یعنی $\gamma \in \{\xi \subset B\}$. به عبارت دیگر

$$\{\xi \subset B\} \supset \bigcap_{x\in B^c} \{x \not\in \xi\}. \qquad (۲۷.۸)$$

از رابطه‌های (۲۶.۸) و (۲۷.۸) برقراری (۲۳.۸) ثابت می‌شود. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تعریف ۲.۸ *مجموعه نایقین ξ روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ (الف) ناتهی است اگر برای هر $\gamma \in \Gamma$*

$$\xi(\gamma) \neq \varnothing \qquad (۲۸.۸)$$

(ب) تهی است اگر برای تقریباً تمامی $\gamma \in \Gamma$

$$\xi(\gamma) = \varnothing \qquad (۲۹.۸)$$

و (ج) در غیر این صورت نیم‌ـ تهی است.

مثال ۵.۸: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[۰, ۱]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. آنگاه

$$\xi(\gamma) = [۰, \gamma], \quad \forall\gamma \in \Gamma \qquad (۳۰.۸)$$

یک مجموعه نایقین ناتهی است،

$$\xi(\gamma) = \varnothing, \quad \forall\gamma \in \Gamma \qquad (۳۱.۸)$$

یک مجموعه نایقین تهی است و

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} \varnothing, & \gamma > ۰/۸ \text{ اگر } \\ [۰, \gamma], & \gamma \leq ۰/۸ \text{ اگر } \end{cases} \qquad (۳۲.۸)$$

یک مجموعه نایقین نیم‌ـ تهی است.

اجتماع، اشتراک و مکمل

تعریف ۳.۸ *فرض کنید ξ و η دو مجموعه نایقین روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ هستند. آنگاه (الف) اجتماع $\xi \cup \eta$ از مجموعه‌های ξ و η به صورت*

$$(\xi \cup \eta)(\gamma) = \xi(\gamma) \cup \eta(\gamma), \quad \forall\gamma \in \Gamma; \qquad (۳۳.۸)$$

است. (ب) اشتراک $\xi \cap \eta$ از مجموعه‌های ξ و η به صورت

$$(\xi \cap \eta)(\gamma) = \xi(\gamma) \cap \eta(\gamma), \quad \forall\gamma \in \Gamma; \qquad (۳۴.۸)$$

است. (ج) مکمل ξ^c از مجموعه نایقین ξ به صورت

$$\xi^c(\gamma) = \xi(\gamma)^c, \quad \forall\gamma \in \Gamma, \qquad (۳۵.۸)$$

است.

مثال ۶.۸: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_2\} = ۰/۳$، $\mathcal{M}\{\gamma_3\} = ۰/۲$ و $\mathcal{M}\{\gamma_1\} = ۰/۶$ است. فرض کنید ξ و η دو مجموعه نایقین هستند،

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} [۱,۲], & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر} \\ [۱,۳], & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر} \\ [۱,۴], & \gamma = \gamma_3 \text{ اگر}, \end{cases} \qquad \eta(\gamma) = \begin{cases} (۲,۳), & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر} \\ (۲,۴), & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر} \\ (۲,۵), & \gamma = \gamma_3. \text{ اگر} \end{cases}$$

آنگاه اجتماع آنها

$$(\xi \cup \eta)(\gamma) = \begin{cases} [۱,۳), & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر} \\ [۱,۴), & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر} \\ [۱,۵), & \gamma = \gamma_3, \text{ اگر} \end{cases}$$

اشتراک آنها

$$(\xi \cap \eta)(\gamma) = \begin{cases} \varnothing, & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر} \\ (۲,۳], & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر} \\ (۲,۴], & \gamma = \gamma_3, \text{ اگر} \end{cases}$$

و مکمل آنها

$$\xi^c(\gamma) = \begin{cases} (-\infty,۱) \cup (۲,+\infty), & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر} \\ (-\infty,۱) \cup (۳,+\infty), & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر} \\ (-\infty,۱) \cup (۴,+\infty), & \gamma = \gamma_3, \text{ اگر} \end{cases}$$

$$\eta^c(\gamma) = \begin{cases} (-\infty,۲] \cup [۳,+\infty), & \gamma = \gamma_1 \text{ اگر} \\ (-\infty,۲] \cup [۴,+\infty), & \gamma = \gamma_2 \text{ اگر} \\ (-\infty,۲] \cup [۵,+\infty), & \gamma = \gamma_3 \text{ اگر} \end{cases}$$

هستند.

قضیه ۲.۸ *(قاعده طرد ثالث و قاعده تناقض) فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین و ξ^c مکمل آن است. آنگاه*

$$\xi \cup \xi^c \equiv \Re, \quad \xi \cap \xi^c \equiv \varnothing. \tag{۳۶.۸}$$

برهان: برای هر $\gamma \in \Gamma$، از تعریف مجموعه نایقین نتیجه می‌شود که اجتماع آنها به صورت زیر است.

$$(\xi \cup \xi^c)(\gamma) = \xi(\gamma) \cup \xi^c(\gamma) = \xi(\gamma) \cup \xi(\gamma)^c \equiv \Re.$$

پس داریم $\xi \cup \xi^c \equiv \Re$. همچنین، اشتراک آنها به صورت زیر است

$$(\xi \cap \xi^c)(\gamma) = \xi(\gamma) \cap \xi^c(\gamma) = \xi(\gamma) \cap \xi(\gamma)^c \equiv \varnothing.$$

پس داریم $\xi \cap \xi^c \equiv \varnothing$.

قضیه ۳.۸ *(قاعده نقیض مضاعف) فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین است. آنگاه داریم*

$$(\xi^c)^c = \xi. \tag{۳۷.۸}$$

برهان: برای هر $\gamma \in \Gamma$، از تعریف مکمل نتیجه می‌شود که

$$(\xi^c)^c(\gamma) = (\xi^c(\gamma))^c = (\xi(\gamma)^c)^c = \xi(\gamma).$$

پس داریم $(\xi^c)^c = \xi$.

قضیه ۴.۸ *(قاعده دمورگان) فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین هستند. آنگاه داریم*

$$(\xi \cup \eta)^c = \xi^c \cap \eta^c, \quad (\xi \cap \eta)^c = \xi^c \cup \eta^c. \tag{۳۸.۸}$$

برهان: برای هر $\gamma \in \Gamma$، از تعریف مکمل نتیجه می‌شود که

$$(\xi \cup \eta)^c(\gamma) = ((\xi(\gamma) \cup \eta(\gamma))^c = \xi(\gamma)^c \cap \eta(\gamma)^c = (\xi^c \cap \eta^c)(\gamma).$$

پس داریم $(\xi \cup \eta)^c = \xi^c \cap \eta^c$. همچنین، چون

$$(\xi \cap \eta)^c(\gamma) = ((\xi(\gamma) \cap \eta(\gamma))^c = \xi(\gamma)^c \cup \eta(\gamma)^c = (\xi^c \cup \eta^c)(\gamma),$$

داریم $(\xi \cap \eta)^c = \xi^c \cup \eta^c$.

تمرین ۶.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین و x یک عدد حقیقی است. نشان دهید

$$\{x \in \xi^c\} = \{x \not\in \xi\} \tag{۳۹.۸}$$

و

$$\mathcal{M}\{x \in \xi^c\} = \mathcal{M}\{x \not\in \xi\}. \tag{۴۰.۸}$$

تمرین ۷.۸: فرض کنید ξ یک متغیر نایقین و x یک عدد حقیقی است. نشان دهید $\{x \in \xi\}$ و $\{x \in \xi^c\}$ رویدادهای متضاد هستند، و

$$\mathcal{M}\{x \in \xi\} + \mathcal{M}\{x \in \xi^c\} = ۱. \tag{۴۱.۸}$$

تمرین ۸.۸: فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین هستند. نشان دهید $\{\xi \subset \eta\}$ و $\{\eta^c \subset \xi^c\}$ رویدادهای یکسان هستند، یعنی

$$\{\xi \subset \eta\} = \{\eta^c \subset \xi^c\}. \tag{۴۲.۸}$$

تمرین ۹.۸: فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین هستند. نشان دهید $\{\xi \subset \eta\}$ و $\{\xi \subset \eta^c\}$ الزاماً رویدادهای متضاد نیستند.

تابع از مجموعه‌های نایقین

تعریف ۴.۸ *فرض کنید ξ_n, $\xi_۱, \xi_۲, \cdots$ مجموعه‌های نایقین روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ هستند و f یک تابع اندازه‌پذیر است. آنگاه $\xi = f(\xi_۱, \xi_۲, \cdots, \xi_n)$ یک مجموعه نایقین است که با*

$$\xi(\gamma) = f(\xi_۱(\gamma), \xi_۲(\gamma), \cdots, \xi_n(\gamma)), \quad \forall\gamma \in \Gamma \qquad (۴۳.۸)$$

تعریف می‌شود.

مثال ۷.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ است و A یک مجموعه قطعی از اعداد حقیقی است. آنگاه $\xi + A$ نیز یک مجموعه نایقین است که با

$$(\xi + A)(\gamma) = \xi(\gamma) + A, \quad \forall\gamma \in \Gamma \qquad (۴۴.۸)$$

مشخص می‌شود.

مثال ۸.۸: توجه داشته باشید که مجموعه تهی $\varnothing$ پوچساز هر مجموعه دیگر است. به عنوان مثال، $A + \varnothing = \varnothing$ و $A \times \varnothing = \varnothing$. فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳\}$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = ۰/۶$، $\mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۳$، $\mathcal{M}\{\gamma_۳\} = ۰/۲$ است. دو مجموعه نایقین زیر را تعریف کنید

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} \varnothing, & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۱, ۳], & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ [۱, ۴], & \gamma = \gamma_۳, \text{ اگر } \end{cases} \qquad \eta(\gamma) = \begin{cases} (۲, ۳), & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ (۲, ۴), & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ (۲, ۵), & \gamma = \gamma_۳. \text{ اگر } \end{cases}$$

آنگاه مجموع آنها به صورت

$$(\xi + \eta)(\gamma) = \begin{cases} \varnothing, & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ (۳, ۷), & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ (۳, ۹), & \gamma = \gamma_۳, \text{ اگر } \end{cases}$$

و ضرب آنها به صورت

$$(\xi \times \eta)(\gamma) = \begin{cases} \varnothing, & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ (۲, ۱۲), & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ (۲, ۲۰), & \gamma = \gamma_۳, \text{ اگر } \end{cases}$$

است.

تمرین ۱۰.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین است. (الف) نشان دهید $\xi + \xi \not\equiv ۲\xi$. (ب) آیا این رابطه برای مجموعه قطعی هم برقرار است؟

۲.۸ تابع عضویت

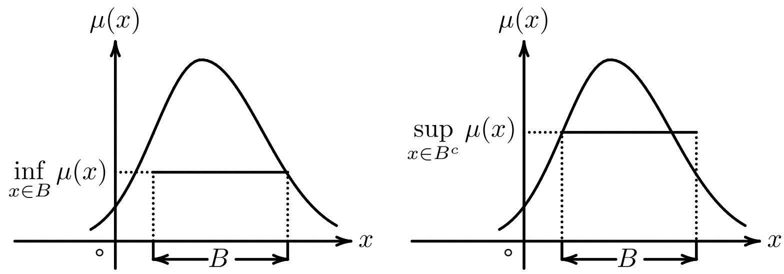
نشان دادن یک مجموعه قطعی با استفاده از تابع شاخص متداول است. به عنوان یک تعمیم از تابع شاخص، تابع عضویت برای توصیف مجموعه نایقین استفاده خواهد شد.

تعریف ۵.۸ [۹۵] *یک مجموعه نایقین ξ تابع عضویت μ دارد اگر برای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی، داشته باشیم*

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \inf_{x\in B} \mu(x), \tag{۴۵.۸}$$

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = ۱ - \sup_{x\in B^c} \mu(x). \tag{۴۶.۸}$$

معادله‌های فوق فرمول‌های معکوس اندازه نامیده می‌شوند.



شکل ۲.۸: $\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \inf_{x\in B} \mu(x)$ و $\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = ۱ - \sup_{x\in B^c} \mu(x)$

قضیه ۵.۸ *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین است که تابع عضویت آن μ موجود است. آنگاه برای هر x*

$$\mu(x) = \mathcal{M}\{x \in \xi\}. \tag{۴۷.۸}$$

برهان: برای هر عدد x؛ از اولین فرمول معکوس اندازه نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{x \in \xi\} = \mathcal{M}\{\{x\} \subset \xi\} = \inf_{y\in\{x\}} \mu(y) = \mu(x).$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تذکر ۴.۸: مقدار $\mu(x)$ دقیقا درجه عضویت x به مجموعه نایقین ξ است. اگر $\mu(x) = ۱$، آنگاه x کاملاً متعلق به ξ است؛ اگر $\mu(x) = \circ$، آنگاه x اصلاً در ξ قرار ندارد. پس هرچه مقدار $\mu(x)$ بزرگتر باشد تعلق x به ξ درست تر است.

قضیه ۶.۸ *فرض کنید ξ یک متغیر نایقین با تابع عضویت μ است. در این صورت برای هر x*

$$\mathcal{M}\{x \not\in \xi\} = ۱ - \mu(x). \tag{۴۸.۸}$$

برهان: چون $\{x \not\in \xi\}$ و $\{x \in \xi\}$ رویدادهای متضاد هستند، از اصل موضوعه دوگانی اندازه نایقین نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{x \not\in \xi\} = ۱ - \mathcal{M}\{x \in \xi\} = ۱ - \mu(x).$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تذکر ۵.۸: قضیه ۶.۸ بیان می‌کند که اگر x به یک مجموعه نایقین با درجه عضویت α متعلق باشد؛ آنگاه x با درجه عضویت $۱ - \alpha$ به این مجموعه نایقین متعلق نیست.

قضیه ۷.۸ *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت μ است. آنگاه برای هر عدد x*

$$\mathcal{M}\{x \in \xi^c\} = ۱ - \mu(x). \tag{۴۹.۸}$$

برهان: چون $\{x \in \xi^c\}$ و $\{x \in \xi\}$ رویدادهای متضاد هستند، از اصل موضوعه دوگانی اندازه نایقین نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{x \in \xi^c\} = ۱ - \mathcal{M}\{x \in \xi\} = ۱ - \mu(x).$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تذکر ۶.۸: قضیه ۷.۸ بیان می‌کند که اگر x با درجه عضویت α به یک مجموعه نایقین متعلق باشد، آن گاه x با درجه عضویت $۱ - \alpha$ به مکمل آن مجموعه نایقین متعلق است.

تذکر ۷.۸: برای هر تابع عضویت μ، واضح است که $۰ \le \mu(x) \le ۱$. همواره فرض می‌کنیم

$$\inf_{x\in\varnothing} \mu(x) = ۱, \quad \sup_{x\in\varnothing} \mu(x) = ۰. \tag{۵۰.۸}$$

بنابراین

$$\mathcal{M}\{\varnothing \subset \xi\} = ۱ = \inf_{x\in\varnothing} \mu(x). \tag{۵۱.۸}$$

به عبارت دیگر، فرمول عکس اندازه همواره برای $B = \varnothing$ برقرار است. همچنین داریم،

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \Re\} = ۱ = ۱ - \sup_{x\in\varnothing} \mu(x). \tag{۵۲.۸}$$

یعنی؛ فرمول دوم عکس اندازه همواره برای $B = \Re$ برقرار است.

مثال ۹.۸: مجموعه اعداد حقیقی $\Re$ یک مجموعه نایقین خاص $\xi(\gamma) \equiv \Re$ است. تابع عضویت این مجموعه نایقین به صورت

$$\mu(x) \equiv ۱ \tag{۵۳.۸}$$

است که همان تابع مشخصه $\Re$ است. برای اثبات این ادعا، باید نشان دهیم $\Re$ و μ به طور همزمان در دو فرمول عکس اندازه (۴۵.۸) و (۴۶.۸) صدق می‌کنند. فرض کنید B یک مجموعه بورل از اعداد حقیقی است. آن گاه

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱ = \inf_{x\in B} \mu(x).$$

به این ترتیب اولین فرمول عکس اندازه برقرار است. حال برقراری فرمول دوم عکس اندازه را ثابت می‌کنیم. وقتی $B = \Re$، فرمول دوم عکس اندازه با در نظر گرفتن (۵۲.۸) برقرار است. وقتی $B \ne \Re$ داریم،

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = \mathcal{M}\{\varnothing\} = ۰ = ۱ - \sup_{x\in B^c} \mu(x).$$

پس فرمول دوم عکس اندازه برای هر مجموعه بورل B برقرار است. بنابراین، $\mu(x) \equiv ۱$ تابع عضویت مجموعه نایقین $\xi(\gamma) \equiv \Re$ است.

مثال ۱۰.۸: مجموعه $\varnothing$ یک مجموعه نایقین $\xi(\gamma) \equiv \varnothing$ است. تابع عضویت این مجموعه نایقین

$$\mu(x) \equiv ۰ \tag{۵۴.۸}$$

است که همان تابع مشخصه مجموعه $\varnothing$ است. برای اثبات این ادعا، باید نشان دهیم $\varnothing$ و μ همزمان در فرمول‌های عکس اندازه (۴۵.۸) و (۴۶.۸) صدق می‌کنند. فرض کنید B یک مجموعه بورل از اعداد حقیقی است. وقتی $B = \varnothing$، فرمول اول عکس اندازه با استفاده از (۵۱.۸) برقرار است. وقتی $B \neq \varnothing$، داریم

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\varnothing\} = ۰ = \inf_{x \in B} \mu(x).$$

بنابراین فرمول اول عکس اندازه برای هر مجموعه بورل B برقرار است. حال برقراری فرمول دوم عکس اندازه را ثابت می‌کنیم. برای هر مجموعه بورل B داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱ = ۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x).$$

به این ترتیب فرمول دوم عکس اندازه نیز برقرار است. بنابراین $\mu(x) \equiv ۰$ تابع عضویت مجموعه نایقین $\xi(\gamma) \equiv \varnothing$ است.

تمرین ۱۱.۸: مجموعه قطعی A از اعداد حقیقی یک مجموعه نایقین خاص $\xi(\gamma) \equiv A$ است. نشان دهید تابع عضویت این مجموعه نایقین به صورت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & x \in A \text{ اگر} \\ ۰, & x \notin A \text{ اگر} \end{cases} \tag{۵۵.۸}$$

است. یعنی این تابع عضویت همان تابع مشخصه A است.

تمرین ۱۲.۸: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = ۰/۴$ ، $\mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۶$ است. نشان دهید مجموعه نایقین

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} \varnothing, & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر} \\ A, & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰/۶, & x \in A \text{ اگر} \\ ۰, & x \notin A \text{ اگر} \end{cases} \tag{۵۶.۸}$$

دارد که در آن A یک مجموعه قطعی از اعداد حقیقی است.

تمرین ۱۳.۸: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[۰, ۱]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. (۱) نشان دهید تابع عضویت مجموعه نایقین

$$\xi(\gamma) = [-\gamma, \gamma], \quad \forall \gamma \in [۰, ۱] \tag{۵۷.۸}$$

به صورت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱ - |x|, & -۱ \le x \le ۱ \text{ اگر} \\ ۰, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases} \tag{۵۸.۸}$$

است. (۲) تابع عضویت $\xi(\gamma)=[\gamma-۱,۱-\gamma]$ چیست؟ (۳) این دو تابع عضویت چه دیدگاهی در شما ایجاد می‌کند؟ (۴) مجموعه نایقین دیگری طراحی کنید که تابع عضویت آن نیز به صورت (۵۸.۸) باشد.

تمرین ۱۴.۸: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱,\gamma_۲,\gamma_۳\}$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\}=۰/۶$، $\mathcal{M}\{\gamma_۲\}=۰/۳$ و $\mathcal{M}\{\gamma_۳\}=۰/۲$ است. مجموعه نایقین

$$\xi(\gamma)=\begin{cases}[۲,۳], & \gamma=\gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۰,۵], & \gamma=\gamma_۲ \text{ اگر } \\ [۱,۴], & \gamma=\gamma_۳ \text{ اگر }\end{cases}$$

را تعریف کنید. (۱) تابع عضویت ξ چیست؟ (۲) پاسخ خود را توجیه کنید. (راهنمایی: اگر ξ تابع عضویت داشته باشد باید رابطه $\mu(x)=\mathcal{M}\{x\in\xi\}$ برقرار باشد.)

تمرین ۱۵.۸: فرض کنید $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})$ بازه $[۰,۱]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. مجموعه نایقین

$$\xi(\gamma)=\left(\gamma^۲,+\infty\right), \tag{۵۹.۸}$$

را تعریف کنید. (۱) تابع عضویت ξ چیست؟ (۲) تابع عضویت مجموعه مکمل ξ^c چیست؟ (۳) این دو تابع عضویت چه دیدگاهی در شما ایجاد می‌کند؟

تمرین ۱۶.۸: هر مجموعه نایقین تابع عضویت ندارد. فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱,\gamma_۲\}$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\}=۰/۴$، $\mathcal{M}\{\gamma_۲\}=۰/۶$ است. نشان دهید مجموعه نایقین

$$\xi(\gamma)=\begin{cases}[۱,۳], & \gamma=\gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۲,۴], & \gamma=\gamma_۲ \text{ اگر }\end{cases} \tag{۶۰.۸}$$

تابع عضویت ندارد.
(راهنمایی: اگر ξ تابع عضویت داشته باشد، آنگاه با استفاده از $\mu(x)=\mathcal{M}\{x\in\xi\}$ داریم

$$\mu(x)=\begin{cases}۰/۴, & ۱\le x<۲ \text{ اگر } \\ ۱, & ۲\le x\le ۳ \text{ اگر } \\ ۰/۶, & ۳<x\le ۴ \text{ اگر } \\ ۰, & \text{درغیراینصورت.}\end{cases} \tag{۶۱.۸}$$

نشان دهیدکه ξ و μ به طور همزمان در دو فرمول عکس اندازه (۴۵.۸) و (۴۶.۸) صدق نمی‌کنند.)

تمرین ۱۷.۸: فرض کنید $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})$ بازه $[۰,۱]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. نشان دهید مجموعه نایقین

$$\xi(\gamma)=[\gamma,\gamma+۱], \quad \forall\gamma\in\Gamma \tag{۶۲.۸}$$

تابع عضویت ندارد.

تعریف ۶.۸ *مجموعه نایقین ξ مثلثی نامیده می‌شود اگر تابع عضویت آن به صورت*

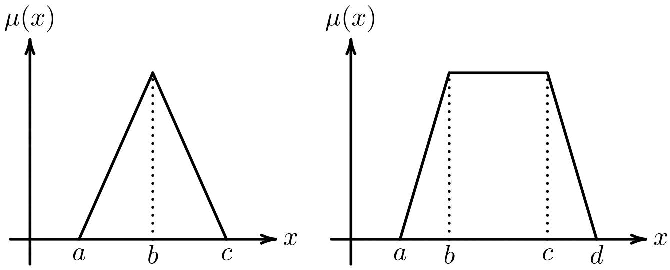
$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \text{ اگر} \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & b \le x \le c \text{ اگر} \end{cases} \tag{۶۳.۸}$$

باشد. این مجموعه نایقین با (a, b, c) نشان داده می‌شود که در آن a, b, c اعداد حقیقی با $a < b < c$ هستند.

تعریف ۷.۸ *مجموعه نایقین ξ ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود اگر تابع عضویت آن به صورت*

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \text{ اگر} \\ ۱, & b \le x \le c \text{ اگر} \\ \dfrac{x-d}{c-d}, & c \le x \le d \text{ اگر} \end{cases} \tag{۶۴.۸}$$

باشد. این مجموعه نایقین با (a, b, c, d) نشان داده می‌شود که در آن a, b, c, d با $a < b < c < d$ اعداد حقیقی هستند.



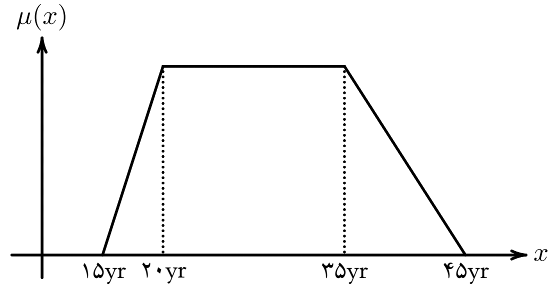
شکل ۳.۸: تابع‌های عضویت مثلثی و ذوزنقه‌ای.

جوان چیست؟

گاهی می‌گوییم «این دانشجویان جوان هستند.» چه سنی را به عنوان «جوان» در نظر می‌گیریم؟ در این حالت «جوان» را می‌توان به عنوان یک مجموعه نایقین با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & x \le ۱۵ \text{ اگر} \\ (x - ۱۵)/۵, & ۱۵ \le x \le ۲۰ \text{ اگر} \\ ۱, & ۲۰ \le x \le ۳۵ \text{ اگر} \\ (۴۵ - x)/۱۰, & ۳۵ \le x \le ۴۵ \text{ اگر} \\ ۰, & x \ge ۴۵ \text{ اگر} \end{cases} \tag{۶۵.۸}$$

در نظر گرفت. توجه کنید که به افراد زیر ۱۵ سال جوان نمی‌گوییم.



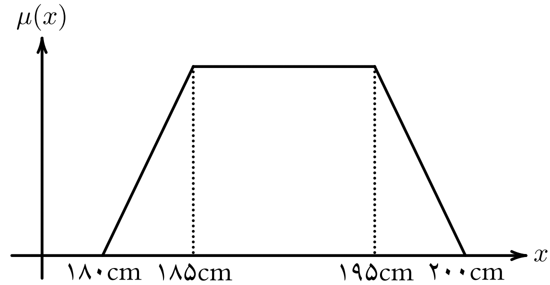
شکل ۴.۸: تابع عضویت «جوان».

قد بلند چیست؟

گاهی می‌گوییم «این ورزشکاران قدبلند هستند.» چه قدی (بر حسب سانتیمتر) «بلند» درنظر گرفته می‌شود؟ در این حالت، «بلند» را می‌توان به عنوان یک مجموعه نایقین با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x \leq ۱۸۰ \\ (x - ۱۸۰)/۵, & \text{اگر } ۱۸۰ \leq x \leq ۱۸۵ \\ ۱, & \text{اگر } ۱۸۵ \leq x \leq ۱۹۵ \\ (۲۰۰ - x)/۵, & \text{اگر } ۱۹۵ \leq x \leq ۲۰۰ \\ ۰, & \text{اگر } x \geq ۲۰۰ \end{cases} \quad (۶۶.۸)$$

در نظر گرفت. توجه کنید که با این تعریف، قد بیشتر از ۲۰۰ سانتیمتر را بلند نمی‌گوییم.



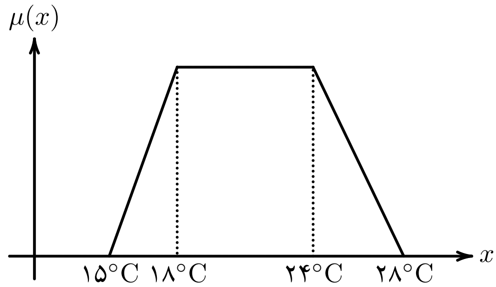
شکل ۵.۸: تابع عضویت «قدِ بلند».

گرم چیست؟

گاهی می‌گوییم «این روزها گرم است.» چه درجه حرارتی را می‌توان «گرم» در نظر گرفت؟ در این حالت «گرم» را می‌توان به عنوان یک مجموعه نایقین با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x \leq ۱۵ \\ (x - ۱۵)/۳, & \text{اگر } ۱۵ \leq x \leq ۱۸ \\ ۱, & \text{اگر } ۱۸ \leq x \leq ۲۴ \\ (۲۸ - x)/۴, & \text{اگر } ۲۴ \leq x \leq ۲۸ \\ ۰, & \text{اگر } ۲۸ \leq x \end{cases} \qquad (۶۷.۸)$$

در نظر گرفت. توجه کنید که با این تعریف، درجه حرارت بیشتر از ۲۸ درجه را «گرم» نمی‌گوییم.



شکل ۶.۸: تابع عضویت «گرم».

اغلب چیست؟

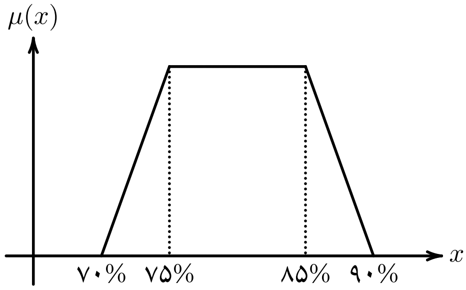
گاهی می‌گوییم «اغلب دانشجویان پسر هستند.» چه درصدی را «اغلب» در نظر می‌گیریم؟ در این حالت «اغلب» را می‌توان یک مجموعه نایقین با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } ۰ \leq x \leq ۰٫۷ \\ ۲۰(x - ۰٫۷), & \text{اگر } ۰٫۷ \leq x \leq ۰٫۷۵ \\ ۱, & \text{اگر } ۰٫۷۵ \leq x \leq ۰٫۸۵ \\ ۲۰(۰٫۹ - x), & \text{اگر } ۰٫۸۵ \leq x \leq ۰٫۹ \\ ۰, & \text{اگر } ۰٫۹ \leq x \leq ۱ \end{cases} \qquad (۶۸.۸)$$

در نظر گرفت.

کدام مجموعه نایقین تابع عضویت دارد؟

مشخص شده است که برخی مجموعه‌های نایقین تابع عضویت ندارند. این بخش نشان می‌دهد که مجموعه‌های نایقین مرتب کلی تعریف شده روی یک فضای نایقینی پیوسته همواره تابع عضویت دارند.



شکل ۷.۸: تابع عضویت «اغلب».

تعریف ۸.۸ [۱۰۵] *مجموعه نایقین تعریف شده روی فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مرتب کلی گفته می‌شود هرگاه $\{\xi(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ یک مجموعه مرتب کلی باشد، یعنی برای هر $\gamma_۱, \gamma_۲ \in \Gamma$، یا $\xi(\gamma_۱) \subset \xi(\gamma_۲)$ و یا $\xi(\gamma_۲) \subset \xi(\gamma_۱)$ برقرار باشد.*

مثال ۱۱.۸: فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای نایقینی و A یک مجموعه قطعی از اعداد حقیقی است. مجموعه نایقین $\xi(\gamma) \equiv A$ ترتیب کلی دارد.

مثال ۱۲.۸: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳\}$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = ۰/۶$، $\mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۳$، $\mathcal{M}\{\gamma_۳\} = ۰/۲$ است. مجموعه نایقین

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} [۲, ۳], & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۰, ۵], & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ [۱, ۴], & \gamma = \gamma_۳ \text{ اگر } \end{cases} \tag{۶۹.۸}$$

ترتیب کلی دارد.

مثال ۱۳.۸: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[۰, ۱]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. مجموعه نایقین

$$\xi(\gamma) = [-\gamma, \gamma], \quad \forall \gamma \in \Gamma \tag{۷۰.۸}$$

ترتیب کلی دارد.

مثال ۱۴.۸: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[۰, ۱]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. مجموعه نایقین

$$\xi(\gamma) = [\gamma, \gamma + ۱], \quad \forall \gamma \in \Gamma \tag{۷۱.۸}$$

ترتیب کلی ندارد.

تمرین ۱۸.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین مرتب کلی است. نشان دهید مکمل آن ξ^c نیز ترتیب کلی دارد.

تمرین ۱۹.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین مرتب کلی و f یک تابع حقیقی مقدار است. نشان دهید $f(\xi)$ نیز ترتیب کلی دارد.

قضیه ۸.۸ [۱۰۵] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین مرتب کلی و B یک مجموعه قطعی از اعداد حقیقی است. پس (۱) گردایه $\{x \in \xi\}$ که با $x \in B$ اندیس گذاری شده است، ترتیب کلی دارد و (۲) گردایه $\{x \not\in \xi\}$ که با $x \in B$ اندیس گذاری شده است نیز ترتیب کلی دارد.*

برهان: اگر گردایه $\{x \in \xi\}$ که با $x \in B$ مرتب کلی نباشد، آنگاه دو عدد $x_۱$ و $x_۲$ در B چنان موجودند که نه $\{x_۱ \in \xi\} \subset \{x_۲ \in \xi\}$ و نه $\{x_۲ \in \xi\} \subset \{x_۱ \in \xi\}$ برقرار هستند. یعنی $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ در Γ موجودند که

$$\gamma_۱ \in \{x_۱ \in \xi\}, \quad \gamma_۱ \not\in \{x_۲ \in \xi\},$$
$$\gamma_۲ \in \{x_۲ \in \xi\}, \quad \gamma_۲ \not\in \{x_۱ \in \xi\}.$$

یعنی

$$x_۱ \in \xi(\gamma_۱), \quad x_۱ \not\in \xi(\gamma_۲),$$
$$x_۲ \in \xi(\gamma_۲), \quad x_۲ \not\in \xi(\gamma_۱).$$

بنابر این $\xi(\gamma_۱) \subset \xi(\gamma_۲)$ و $\xi(\gamma_۲) \subset \xi(\gamma_۱)$ برقرار نیستند. این نتیجه با فرض این که ξ یک مجموعه مرتب کلی است تناقض دارد. پس گردایه $\{x \in \xi\}$ که با $x \in B$ اندیس گذاری شده است؛ ترتیب کلی دارد. قسمت اول ثابت شد. از

$$\{x \not\in \xi\} = \{x \in \xi\}^c$$

نتیجه می‌شود که گردایه $\{x \not\in \xi\}$ که با $x \in B$ اندیس گذاری شده است نیز ترتیب کلی دارد.

قضیه ۹.۸ ([۱۰۵]، قضیه وجودی) *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین مرتب کلی روی یک فضای نایقینی پیوسته است. آنگاه تابع عضویت آن همواره وجود دارد و*

$$\mu(x) = \mathcal{M}\{x \in \xi\}. \tag{۷۲.۸}$$

برهان: برای اثبات این که μ تابع عضویت ξ است، باید نشان دهیم در دو فرمول عکس اندازه صدق می‌کند. فرض کنید B یک مجموعه بورل دلخواه از اعداد حقیقی است. قضیه ۱.۸ بیان می‌کند که

$$\{B \subset \xi\} = \bigcap_{x \in B} \{x \in \xi\}.$$

چون اندازه نایقین پیوسته در نظر گرفته شده است و $\{x \in \xi\}$ که با $x \in B$ اندیس گذاری شده است ترتیب کلی دارد، داریم

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \mathcal{M}\left\{\bigcap_{x \in B} (x \in \xi)\right\} = \inf_{x \in B} \mathcal{M}\{x \in \xi\} = \inf_{x \in B} \mu(x).$$

به این ترتیب اولین فرمول عکس اندازه برقرار است. حال، قضیه ۱.۸ بیان می‌کند که

$$\{\xi \subset B\} = \bigcap_{x \in B^c} \{x \not\in \xi\}.$$

دوباره چون اندازه نایقین پیوسته فرض شده است، و $\{x \not\in \xi\}$ اندیس گذاری شده با $x \in B^c$ ترتیب کلی دارد، داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = \mathcal{M}\left\{\bigcap_{x \in B^c} (x \not\in \xi)\right\} = \inf_{x \in B^c} \mathcal{M}\{x \not\in \xi\} = ۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x).$$

پس فرمول دوم اندازه نایقین نیز برقرار است. پس μ تابع عضویت ξ است.

مثال ۱۵.۸: شرط پیوستگی را نمی‌توان در قضیه ۹.۸ حذف کرد. برای مثال فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $(۰, ۱)$ با مجموعه توانی و

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } \Lambda = \varnothing \\ ۱, & \text{اگر } \Lambda = \Gamma \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۷۳.۸}$$

است. آنگاه

$$\xi(\gamma) = (-\gamma, \gamma), \quad \forall \gamma \in (۰, ۱) \tag{۷۴.۸}$$

یک مجموعه نایقین مرتب کلی روی یک فضای نایقینی ناپیوسته است. اگر این مجموعه نایقین تابع عضویت داشته باشد، آنگاه

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x = ۰ \\ ۰/۵, & \text{اگر } ۱ > x > ۰ \text{ یا } ۰ > x > -۱ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۷۵.۸}$$

در حالی که

$$\mathcal{M}\{(-۱, ۱) \subset \xi\} = \mathcal{M}\{\varnothing\} = ۰ \neq ۰/۵ = \inf_{x \in (-۱, ۱)} \mu(x). \tag{۷۶.۸}$$

یعنی فرمول اول عکس اندازه برقرار نیست و بنابراین ξ تابع عضویت ندارد. پس نمی‌توان شرط پیوستگی را حذف کرد.

مثال ۱۶.۸: برحی مجموعه‌های نایقین که مرتب کلی نیستند هم تابع عضویت دارند. به عنوان مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳, \gamma_۴\}$ همراه با مجموعه توانی و

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } \Lambda = \varnothing \\ ۱, & \text{اگر } \Lambda = \Gamma \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۷۷.۸}$$

است. آنگاه

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} \{۱\}, & \text{اگر } \gamma = \gamma_۱ \\ \{۱, ۲\}, & \text{اگر } \gamma = \gamma_۲ \\ \{۱, ۳\}, & \text{اگر } \gamma = \gamma_۳ \\ \{۱, ۲, ۳\}, & \text{اگر } \gamma = \gamma_۴ \end{cases} \tag{۷۸.۸}$$

یک مجموعه نایقین مرتب غیرکلی است. با این حال، تابع عضویت آن

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x = ۱ \\ ۰/۵, & \text{اگر } x = ۲ \text{ یا } ۳ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۷۹.۸}$$

است. زیرا ξ و μ به طور همزمان در دو فرمول عکس اندازه (۴۵.۸) و (۴۶.۸) صدق می‌کنند.

تذکر ۸.۸: در حالت خاص، مفاهیم نادقیق مانند «جوان»، «قدِ بلند»، «گرم» و «اغلب» را می‌توان مجموعه‌های نایقین مرتب کلی روی یک فضای نایقینی پیوسته در نظر گرفت.

شرط لازم و کافی

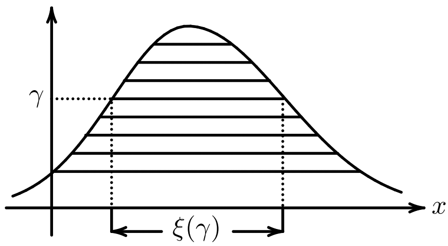
قضیه ۱۰.۸ [۹۲] *تابع حقیقی‌ـ مقدار μ یک تابع عضویت است اگر و تنها اگر*

$$0 \le \mu(x) \le 1. \tag{۸۰.۸}$$

برهان: اگر μ یک تابع عضویت برای یک مجموعه نایقین ξ باشد، آنگاه $\mu(x) = \mathcal{M}\{x \in \xi\}$ و $0 \le \mu(x) \le 1$. برعکس، فرض کنید μ تابعی است که $0 \le \mu(x) \le 1$. فرض کنید فضای $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[0, 1]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. آنگاه

$$\xi(\gamma) = \{x \in \Re \,|\, \mu(x) \ge \gamma\} \tag{۸۱.۸}$$

یک مجموعه نایقین مرتب کلی روی فضای نایقینی پیوسته $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ تعریف می‌کند. شکل ۸.۸ را نگاه کنید. با استفاده از قضیه ۹.۸ به سادگی می‌توان تحقیق کرد که μ تابع عضویت ξ است.



شکل ۸.۸: فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را بازه $[0, 1]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ در نظر بگیرید. آنگاه μ تابع عضویت $\xi(\gamma) = \{x \in \Re \,|\, \mu(x) \ge \gamma\}$ است. به یاد داشته باشید که ξ تنها مجموعه نایقین نیست که μ تابع عضویت آن است.

مثال ۱۷.۸: فرض کنید c یک عدد بین ۰ و ۱ است. از شرط لازم و کافی نتیجه می‌شود که

$$\mu(x) \equiv c \tag{۸۲.۸}$$

یک تابع عضویت است. فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را بازه $[0, 1]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ در نظر بگیرید. تعریف کنید

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} \Re, & 0 \le \gamma \le c \text{ اگر } \\ \varnothing, & c < \gamma \le 1 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۸۳.۸}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که ξ یک مجموعه نایقین مرتب کلی روی یک فضای نایقینی پیوسته است و تابع عضویت آن μ است.

مثال ۱۸.۸: مجموعه نایقین می‌سازیم که تابع عضویت آن برای هر عدد حقیقی x

$$\mu(x) = \exp(-x^{۲}) \tag{۸۴.۸}$$

است. فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را بازه $[۰, ۱]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ در نظر بگیرید. تعریف کنید

$$\xi(\gamma) = (-\sqrt{-\ln\gamma}, \sqrt{-\ln\gamma}), \quad \forall\gamma \in [۰, ۱]. \tag{۸۵.۸}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که ξ یک مجموعه نایقین مرتب کلی روی یک فضای نایقینی پیوسته است و تابع عضویت آن μ است.

تمرین ۲۰.۸: یک مجموعه نایقین بسازید که تابع عضویت آن برای هر عدد حقیقی x به صورت

$$\mu(x) = \frac{۱}{۲}\exp(-x^{۲}) \tag{۸۶.۸}$$

است.

تمرین ۲۱.۸: یک مجموعه نایقین بسازید که تابع عضویت آن برای هر عدد حقیقی x به صورت

$$\mu(x) = \frac{۱}{۲}\exp(-x^{۲}) + \frac{۱}{۲} \tag{۸۷.۸}$$

است.

قضیه ۱۱.۸ *x را یک مجموعه نایقین در نظر بگیرید که تابع عضویت آن μ موجود است. آنگاه ξ* (۱) *ناتهی است اگر و تنها اگر*

$$\sup_{x\in\Re} \mu(x) = ۱, \tag{۸۸.۸}$$

(۲) *تهی است اگر و تنها اگر*

$$\mu(x) \equiv ۰, \tag{۸۹.۸}$$

و (۳) *نیم‌ـ تهی است اگر و تنها اگر در غیراین صورت.*

برهان: چون تابع عضویت μ موجود است، از فرمول دوم عکس اندازه داریم

$$\mathcal{M}\{\xi = \varnothing\} = \mathcal{M}\{\xi \subset \varnothing\} = ۱ - \sup_{x\in\varnothing^c} \mu(x) = ۱ - \sup_{x\in\Re} \mu(x).$$

پس ξ (۱) ناتهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{M}\{\xi = \varnothing\} = ۰$، یعنی (۸۸.۸) برقرار است. (۲) تهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{M}\{\xi = \varnothing\} = ۱$، یعنی (۸۹.۸)، و (۳) نیم‌ـ تهی است اگر و تنها اگر در غیراین صورت.

تمرین ۲۲.۸: برخی ترجیح می‌دهند که در مجموعه نایقین ارتفاع (بیشترین مقدار تابع عضویت) به ۱ برسد. وقتی که ارتفاع کمتر از ۱ باشد، تمامی مقادیر عضویت را به ارتفاع تقسیم می‌کنند و یک تابع عضویت «نرمال شده» به وجود می‌آورند. چرا این دیدگاه نادرست و مضر است؟

تابع عضویت منظم

تعریف ۹.۸ [۹۵] *تابع عضویت μ را منظم گویند هرگاه نقطه‌ای مانند $x_\circ$ با $\mu(x_\circ) = ۱$ موجود است که $\mu(x)$ در اطراف $x_\circ$ تک مدولی باشد. یعنی $\mu(x)$ در بازه $(-\infty, x_\circ]$ صعودی و در بازه $[x_\circ, +\infty)$ نزولی است.*

برای مثال، دو تابع عضویت مثلثی و ذوزنقه‌ای منظم هستند. همچنین، تابع عضویت $\mu(x) \equiv ۱$ منظم است در حالی که $\mu(x) \equiv \circ$ منظم نیست.

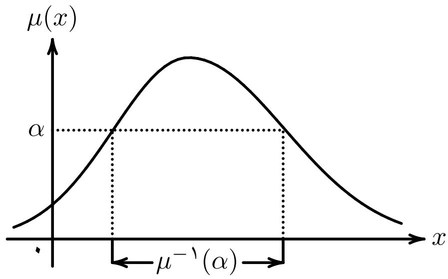
تمرین ۲۳.۸: نشان دهید یک مجموعه نایقین ناتهی است هرگاه تابع عضویت آن منظم باشد.

۳.۸ تابع عضویت معکوس

تعریف ۱۰.۸ [۹۵] *مجموعه نایقین ξ با تابع عضویت μ را در نظر بگیرید. تابع مجموعه- مقدار*

$$\mu^{-۱}(\alpha) = \left\{x \in \Re \;\middle|\; \mu(x) \geq \alpha\right\}, \quad \forall \alpha \in [\circ, ۱] \tag{۹۰.۸}$$

را تابع عضویت معکوس ξ گویند. برای هر α، مجموعه $\mu^{-۱}(\alpha)$ نیز α- برش μ نامیده می‌شود.



شکل ۹.۸: تابع عضویت معکوس $\mu^{-۱}(\alpha)$.

تذکر ۹.۸: مجموعه نایقین ξ با تابع عضویت معکوس $\mu^{-۱}(\alpha)$ را در نظر بگیرید. در این صورت تابع عضویت ξ به صورت

$$\mu(x) = \sup\left\{\alpha \in [\circ, ۱] \;\middle|\; x \in \mu^{-۱}(\alpha)\right\}, \tag{۹۱.۸}$$

مشخص می‌شود.

مثال ۱۹.۸: توجه کنید که مقدار تابع عضویت معکوس ممکن است مجموعه تهی باشد. فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} \circ/۸, & ۱ \leq x \leq ۲ \text{ اگر} \\ \circ, & \text{درغیراینصورت.} \end{cases} \tag{۹۲.۸}$$

است. تابع عضویت معکوس آن به صورت

$$\mu^{-1}(\alpha) = \begin{cases} \varnothing, & \alpha > ۰/۸ \text{ اگر } \\ [۱, ۲], & \text{درغیراینصورت}, \end{cases} \qquad (۹۳.۸)$$

است.

مثال ۲۰.۸: تابع عضویت معکوس مجموعه نایقین مثلثی $\xi = (a, b, c)$ به صورت

$$\mu^{-1}(\alpha) = [(۱ - \alpha)a + \alpha b, \alpha b + (۱ - \alpha)c], \qquad (۹۴.۸)$$

است.

مثال ۲۱.۸: تابع عضویت معکوس مجموعه نایقین دوزنقه‌ای $\xi = (a, b, c, d)$ به صورت

$$\mu^{-1}(\alpha) = [(۱ - \alpha)a + \alpha b, \alpha c + (۱ - \alpha)d], \qquad (۹۵.۸)$$

است.

قضیه ۱۲.۸ *([۹۵]، شرط لازم و کافی) تابع $\mu^{-1}(\alpha)$ یک تابع عضویت معکوس است اگر و تنها اگر یک تابع یکنوای نزولی مجموعه‌ـ مقدار نسبت به $\alpha \in [۰, ۱]$ باشد. یعنی*

$$\mu^{-1}(\alpha) \subset \mu^{-1}(\beta), \quad \alpha > \beta \text{ اگر } \qquad (۹۶.۸)$$

برهان: فرض کنید $\mu^{-1}(\alpha)$ تابع عضویت معکوس یک مجموعه نایقین است. در این صورت برای هر $x \in \mu^{-1}(\alpha)$، داریم $\mu(x) \geq \alpha$. چون $\alpha > \beta$ داریم $\mu(x) > \beta$ و بنابراین $x \in \mu^{-1}(\beta)$. پس $\mu^{-1}(\alpha) \subset \mu^{-1}(\beta)$. برعکس، فرض کنید $\mu^{-1}(\alpha)$ یک تابع مجموعه‌ـ مقدار نزولی یکنوا است. آنگاه

$$\mu(x) = \sup \left\{ \alpha \in [۰, ۱] \mid x \in \mu^{-1}(\alpha) \right\}$$

تابع عضویت یک مجموعه نایقین است. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\mu^{-1}(\alpha)$ تابع عضویت معکوس این مجموعه نایقین است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

مجموعه نایقین الزاماً مقدارهای αـ برش خود را اختیار نمی‌کند!

به خاطر داشته باشید که مجموعه نایقین الزاماً αـ برش‌های خودش را اختیار نمی‌کند. در واقع، یک αـ برش در یک مجموعه نایقین با اندازه نایقین α مشمول است. برعکس، مجموعه نایقین در αـ برش خودش با اندازه نایقین $۱ - \alpha$ مشمول است. به بیان دقیق‌تر قضیه بعدی را داریم.

قضیه ۱۳.۸ [۹۵] *مجموعه نایقین ξ با تابع عضویت معکوس $\mu^{-1}(\alpha)$ را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$، داریم*

$$\mathcal{M}\{\mu^{-1}(\alpha) \subset \xi\} \geq \alpha, \qquad (۹۷.۸)$$

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \mu^{-1}(\alpha)\} \geq ۱ - \alpha. \qquad (۹۸.۸)$$

برهان: برای هر $x \in \mu^{-1}(\alpha)$، داریم $\mu(x) \ge \alpha$. از اولین فرمول عکس اندازه نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\mu^{-1}(\alpha) \subset \xi\} = \inf_{x\in\mu^{-1}(\alpha)} \mu(x) \ge \alpha.$$

برای هر $x \not\in \mu^{-1}(\alpha)$، داریم $\mu(x) < \alpha$. از دومین فرمول عکس اندازه نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \mu^{-1}(\alpha)\} = 1 - \sup_{x\not\in\mu^{-1}(\alpha)} \mu(x) \ge 1 - \alpha.$$

۴.۸ استقلال

توجه کنید که مجموعه نایقین یک تابع اندازه‌پذیر از یک فضای نایقینی به گردایه‌ای از مجموعه‌های اعداد حقیقی است. استقلال دو تابع به این معنی است که دانستن مقدار یکی از آنها تغییری در برآورد مقدار دیگری ایجاد نمی‌کند [1]. دو مجموعه نایقین که در فضاهای نایقین متفاوت تعریف شده اند، در این شرط صدق می‌کنند. برای مثال فرض کنید $\xi_1(\gamma_1)$ و $\xi_2(\gamma_2)$ به ترتیب مجموعه‌های نایقین در فضاهای $(\Gamma_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1)$ و $(\Gamma_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2)$ هستند. واضح است که آنها در فضای نایقینی حاصلضرب $(\Gamma_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1) \times (\Gamma_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2)$ نیز مجموعه‌های نایقین هستند. بنابراین، برای هر مجموعه‌های نایقین B_1 و B_2 از اعداد حقیقی داریم

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\{(\xi_1 \subset B_1) \cap (\xi_2 \subset B_2)\}\\
&= \mathcal{M}\left\{(\gamma_1, \gamma_2) \,|\, \xi_1(\gamma_1) \subset B_1,\ \xi_2(\gamma_2) \subset B_2\right\}\\
&= \mathcal{M}\left\{(\gamma_1 \,|\, \xi_1(\gamma_1) \subset B_1) \times (\gamma_2 \,|\, \xi_2(\gamma_2) \subset B_2)\right\}\\
&= \mathcal{M}_1\left\{\gamma_1 \,|\, \xi_1(\gamma_1) \subset B_1\right\} \wedge \mathcal{M}_2\left\{\gamma_2 \,|\, \xi_2(\gamma_2) \subset B_2\right\}\\
&= \mathcal{M}\left\{\xi_1 \subset B_1\right\} \wedge \mathcal{M}\left\{\xi_2 \subset B_2\right\}.
\end{aligned}$$

یعنی

$$\mathcal{M}\{(\xi_1 \subset B_1) \cap (\xi_2 \subset B_2)\} = \mathcal{M}\{\xi_1 \subset B_1\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_2 \subset B_2\}. \qquad (۹۹.۸)$$

به طور مشابه می‌توان برقراری رابطه‌های بعدی را نیز بررسی کرد:

$$\mathcal{M}\{(\xi_1^c \subset B_1) \cap (\xi_2 \subset B_2)\} = \mathcal{M}\{\xi_1^c \subset B_1\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_2 \subset B_2\}, \qquad (۱۰۰.۸)$$

$$\mathcal{M}\{(\xi_1 \subset B_1) \cap (\xi_2^c \subset B_2)\} = \mathcal{M}\{\xi_1 \subset B_1\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_2^c \subset B_2\}, \qquad (۱۰۱.۸)$$

$$\mathcal{M}\{(\xi_1^c \subset B_1) \cap (\xi_2^c \subset B_2)\} = \mathcal{M}\{\xi_1^c \subset B_1\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_2^c \subset B_2\}, \qquad (۱۰۲.۸)$$

$$\mathcal{M}\{(\xi_1 \subset B_1) \cup (\xi_2 \subset B_2)\} = \mathcal{M}\{\xi_1 \subset B_1\} \vee \mathcal{M}\{\xi_2 \subset B_2\}, \qquad (۱۰۳.۸)$$

[1] به عنوان مثال، در دستگاه مختصات قائم الزاویه (x, y, z)، واضح است که دو تابع $z = f(x)$ و $z = g(y)$ برای تابع‌های مجموعه مقدار f و g از یک متغیر همواره مستقل هستند. در حالی که تابع‌های $z = [x, x+1]$ و $z = \{x, y\}$ مستقل نیستند.

$$\mathcal{M}\{(\xi_1^c \subset B_1) \cup (\xi_2 \subset B_2)\} = \mathcal{M}\{\xi_1^c \subset B_1\} \vee \mathcal{M}\{\xi_2 \subset B_2\}, \qquad (۱۰۴.۸)$$

$$\mathcal{M}\{(\xi_1 \subset B_1) \cup (\xi_2^c \subset B_2)\} = \mathcal{M}\{\xi_1 \subset B_1\} \vee \mathcal{M}\{\xi_2^c \subset B_2\}, \qquad (۱۰۵.۸)$$

$$\mathcal{M}\{(\xi_1^c \subset B_1) \cup (\xi_2^c \subset B_2)\} = \mathcal{M}\{\xi_1^c \subset B_1\} \vee \mathcal{M}\{\xi_2^c \subset B_2\}. \qquad (۱۰۶.۸)$$

پس؛ دو مجموعه نایقین را مستقل گویند هرگاه هشت معادله فوق الذکر برقرار باشد. در حالت کلی، می‌توان استقلال را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱۱.۸ [۹۸] *مجموعه‌های نایقین $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ را مستقل گویند هرگاه برای مجموعه‌های دلخواه بورل $B_1, B_2, \ldots, B_n$ از اعداد حقیقی داشته باشیم*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(\xi_i^* \subset B_i)\right\} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\left\{\xi_i^* \subset B_i\right\} \qquad (۱۰۷.۸)$$

و

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(\xi_i^* \subset B_i)\right\} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}\left\{\xi_i^* \subset B_i\right\} \qquad (۱۰۸.۸)$$

که در آنها ξ_i^* به دلخواه به ترتیب از $\{\xi_i, \xi_i^c\}$، $i = 1, 2, \ldots, n$ انتخاب می‌شوند.

تذکر ۱۰.۸: توجه کنید که (۱۰۷.۸) و (۱۰۸.۸) تعداد 2^{n+1} معادله را نشان می‌دهند. مثلاً وقتی $n = 2$، هشت معادله (۹۹.۸) تا (۱۰۶.۸) را نشان می‌دهند.

تمرین ۲۴.۸: نشان دهید یک مجموعه قطعی از اعداد حقیقی (این مجموعه حالت خاصی از مجموعه نایقین است) همواره از هر مجموعه نایقین دیگر مستقل است.

تمرین ۲۵.۸: فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ مجموعه‌های نایقین مستقل هستند. نشان دهید ξ_i و ξ_j برای هر i و j با $1 \le i < j \le n$ نیز مستقل هستند.

تمرین ۲۶.۸: مجموعه مستقل ξ را در نظر بگیرید. آیا ξ و ξ^c مستقل هستند؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

تمرین ۲۷.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین و A یک مجموعه قطعی است. آیا ξ و $\xi + A$ مستقل هستند؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

تمرین ۲۸.۸: n مجموعه نایقین مستقل بسازید. (راهنمایی: آنها را در فضای نایقینی حاصلضرب $(\Gamma_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1) \times (\Gamma_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2) \times \cdots \times (\Gamma_n, \mathcal{L}_n, \mathcal{M}_n)$ تعریف کنید.

تمرین ۲۹.۸: نشان دهید رابطه‌های زیر معادل هستند. (۱) ξ_1 و ξ_2 مستقل هستند؛ (۲) ξ_1^c و ξ_2 مستقل هستند؛ (۳) ξ_1 و ξ_2^c مستقل هستند؛ و (۴) ξ_1^c و ξ_2^c مستقل هستند.

قضیه ۱۴.۸ [۹۸] *مجموعه‌های نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ مستقل هستند اگر و تنها اگر برای مجموعه‌های بورل دلخواه $B_1, B_2, \ldots, B_n$ از اعداد حقیقی داشته باشیم*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(B_i \subset \xi_i^*)\right\} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\left\{B_i \subset \xi_i^*\right\} \qquad (۱۰۹.۸)$$

و

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(B_i \subset \xi_i^*)\right\} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{B_i \subset \xi_i^*\} \qquad (۱۱۰.۸)$$

که در آنها ξ_i^* به دلخواه از $\{\xi_i, \xi_i^c\}$ برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$ انتخاب می‌شوند.

برهان: چون برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$؛ $\{B_i \subset \xi_i^*\} = \{\xi_i^{*c} \subset B_i^c\}$، داریم

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(B_i \subset \xi_i^*)\right\} = \mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(\xi_i^{*c} \subset B_i^c)\right\}, \qquad (۱۱۱.۸)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{B_i \subset \xi_i^*\} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{\xi_i^{*c} \subset B_i^c\}, \qquad (۱۱۲.۸)$$

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(B_i \subset \xi_i^*)\right\} = \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(\xi_i^{*c} \subset B_i^c)\right\}, \qquad (۱۱۳.۸)$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{B_i \subset \xi_i^*\} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{\xi_i^{*c} \subset B_i^c\}. \qquad (۱۱۴.۸)$$

از (۱۱۱.۸)، (۱۱۲.۸)، (۱۱۳.۸) و (۱۱۴.۸) نتیجه می‌شود که رابطه‌های (۱۰۹.۸) و (۱۱۰.۸) برقرارند اگر و تنها اگر

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(\xi_i^{*c} \subset B_i^c)\right\} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{\xi_i^{*c} \subset B_i^c\}, \qquad (۱۱۵.۸)$$

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(\xi_i^{*c} \subset B_i^c)\right\} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{\xi_i^{*c} \subset B_i^c\}. \qquad (۱۱۶.۸)$$

دو معادله فوق همچنین با استقلال مجموعه‌های نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ معادل هستند. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۵.۸ قاعده عملیاتی مجموعه‌ای

این بخش در مورد اجتماع، اشتراک و مکمل مجموعه‌های نایقین با استفاده از تابع‌های عضویت بحث می‌کند.

اجتماع مجموعه‌های نایقین

قضیه ۱۵.۸ [۹۵] *مجموعه‌های نایقین مستقل ξ و η به ترتیب با تابع‌های عضویت μ و ν را در نظر بگیرید. در این صورت تابع عضویت اجتماع $\xi \cup \eta$ به صورت*

$$\lambda(x) = \mu(x) \vee \nu(x), \tag{۱۱۷.۸}$$

است.

برهان: برای اثبات این که $\mu \vee \nu$ تابع عضویت $\xi \cup \eta$ است، باید برقراری فرمول‌های عکس اندازه را بررسی کنیم. فرض کنید B یک مجموعه بورل از اعداد حقیقی است و قرار دهید

$$\beta = \inf_{x \in B} \mu(x) \vee \nu(x).$$

در این صورت $B \subset \mu^{-۱}(\beta) \cup \nu^{-۱}(\beta)$. با توجه به استقلال ξ و η، داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{B \subset (\xi \cup \eta)\} &\geq \mathcal{M}\{(\mu^{-۱}(\beta) \cup \nu^{-۱}(\beta)) \subset (\xi \cup \eta)\}\\ &\geq \mathcal{M}\{(\mu^{-۱}(\beta) \subset \xi) \cap (\nu^{-۱}(\beta) \subset \eta)\}\\ &= \mathcal{M}\{\mu^{-۱}(\beta) \subset \xi\} \wedge \mathcal{M}\{\nu^{-۱}(\beta) \subset \eta\}\\ &\geq \beta \wedge \beta = \beta.\end{aligned}$$

پس

$$\mathcal{M}\{B \subset (\xi \cup \eta)\} \geq \inf_{x \in B} \mu(x) \vee \nu(x). \tag{۱۱۸.۸}$$

از طرف دیگر، برای هر $x \in B$ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{B \subset (\xi \cup \eta)\} &\leq \mathcal{M}\{x \in (\xi \cup \eta)\} = \mathcal{M}\{(x \in \xi) \cup (x \in \eta)\}\\ &= \mathcal{M}\{x \in \xi\} \vee \mathcal{M}\{x \in \eta\} = \mu(x) \vee \nu(x).\end{aligned}$$

پس

$$\mathcal{M}\{B \subset (\xi \cup \eta)\} \leq \inf_{x \in B} \mu(x) \vee \nu(x). \tag{۱۱۹.۸}$$

از (۱۱۸.۸) و (۱۱۹.۸) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{B \subset (\xi \cup \eta)\} = \inf_{x \in B} \mu(x) \vee \nu(x). \tag{۱۲۰.۸}$$

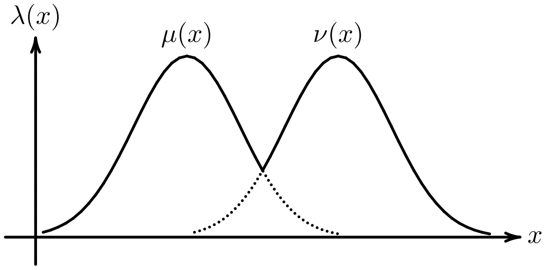
به این ترتیب برقراری اولین فرمول عکس اندازه نتیجه می‌شود. حال برقراری دومین فرمول عکس اندازه را نشان می‌دهیم. با توجه به استقلال ξ و η داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{(\xi \cup \eta) \subset B\} &= \mathcal{M}\{(\xi \subset B) \cap (\eta \subset B)\} = \mathcal{M}\{\xi \subset B\} \wedge \mathcal{M}\{\eta \subset B\}\\ &= \left(۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x)\right) \wedge \left(۱ - \sup_{x \in B^c} \nu(x)\right)\\ &= ۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x) \vee \nu(x).\end{aligned}$$

یعنی

$$\mathcal{M}\{(\xi \cup \eta) \subset B\} = ۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x) \vee \nu(x). \qquad (۱۲۱.۸)$$

فرمول دوم معکوس اندازه هم برقرار است. به این ترتیب ثابت شد که $\mu \vee \nu$ تابع عضویت اجتماع $\xi \cup \eta$ است.



شکل ۱۰.۸: تابع عضویت اجتماع مجموعه‌های نایقین.

مثال ۲۲.۸: شرط استقلال را نمی‌توان در قضیه ۱۵.۸ حذف کرد. برای مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = \mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۵$ است. در این صورت

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} [۰, ۱], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۱ \\ [۰, ۲], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۲ \end{cases}$$

یک مجموعه نایقین با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۰ \le x \le ۱ \\ ۰/۵, & \text{اگر } ۱ < x \le ۲ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases}$$

و

$$\eta(\gamma) = \begin{cases} [۰, ۲], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۱ \\ [۰, ۱], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۲ \end{cases}$$

نیز یک مجموعه نایقین با تابع عضویت

$$\nu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۰ \le x \le ۱ \\ ۰/۵, & \text{اگر } ۱ < x \le ۲ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases}$$

است. توجه کنید که ξ و η مستقل نیستند و $\xi \cup \eta \equiv [۰, ۲]$ که تابع عضویت آن

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۰ \le x \le ۲ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases}$$

است. پس

$$\lambda(x) \neq \mu(x) \vee \nu(x). \tag{۱۲۲.۸}$$

بنابراین، شرط استقلال را نمی‌توان حذف کرد.

تمرین ۳۰.۸: فرض کنید $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ مجموعه‌های نایقین با تابع‌های عضویت $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_n$ هستند. تابع عضویت $\xi_۱ \cup \xi_۲ \cup \cdots \cup \xi_n$ چیست؟

تمرین ۳۱.۸: برخی $\lambda(x) = \mu(x) + \nu(x) - \mu(x) \cdot \nu(x)$ و $\lambda(x) = \min\{۱, \mu(x) + \nu(x)\}$ را برای تابع عضویت اجتماع مجموعه‌های نایقین پیشنهاد می‌کنند. چرا این دیدگاه نادرست است؟

تمرین ۳۲.۸: چرا $\lambda(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$ تنها انتخاب برای تابع عضویت اجتماع مجموعه‌های نایقین است؟

اشتراک مجموعه‌های نایقین

قضیه ۱۶.۸ [۹۵] *فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت μ و ν هستند. آنگاه اشتراک آنها $\xi \cap \eta$ تابع عضویت*

$$\lambda(x) = \mu(x) \wedge \nu(x), \tag{۱۲۳.۸}$$

دارد.

برهان: برای اثبات این که $\mu \wedge \nu$ تابع عضویت $\xi \cap \eta$ است، باید برقراری دو فرمول عکس اندازه را تحقیق کنیم. فرض کنید B یک مجموعه بورل از اعداد حقیقی است. با توجه به استقلال ξ و η، داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{B \subset (\xi \cap \eta)\} &= \mathcal{M}\{(B \subset \xi) \cap (B \subset \eta)\} = \mathcal{M}\{B \subset \xi\} \wedge \mathcal{M}\{B \subset \eta\} \\ &= \inf_{x \in B} \mu(x) \wedge \inf_{x \in B} \nu(x) = \inf_{x \in B} \mu(x) \wedge \nu(x).\end{aligned}$$

یعنی،

$$\mathcal{M}\{B \subset (\xi \cap \eta)\} = \inf_{x \in B} \mu(x) \wedge \nu(x). \tag{۱۲۴.۸}$$

برقراری اولین فرمول عکس اندازه بررسی شد. برای اثبات برقراری دومین فرمول عکس اندازه، قرار دهید

$$\beta = \sup_{x \in B^c} \mu(x) \wedge \nu(x).$$

آنگاه برای هر عدد $\varepsilon > ۰$ داریم $\mu^{-۱}(\beta + \varepsilon) \cap \nu^{-۱}(\beta + \varepsilon) \subset B$. با توجه به استقلال ξ و η داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{(\xi \cap \eta) \subset B\} &\geq \mathcal{M}\{(\xi \cap \eta) \subset (\mu^{-۱}(\beta + \varepsilon) \cap \nu^{-۱}(\beta + \varepsilon))\} \\ &\geq \mathcal{M}\{(\xi \subset \mu^{-۱}(\beta + \varepsilon)) \cap (\eta \subset \nu^{-۱}(\beta + \varepsilon))\} \\ &= \mathcal{M}\{\xi \subset \mu^{-۱}(\beta + \varepsilon)\} \wedge \mathcal{M}\{\eta \subset \nu^{-۱}(\beta + \varepsilon)\} \\ &\geq (۱ - \beta - \varepsilon) \wedge (۱ - \beta - \varepsilon) = ۱ - \beta - \varepsilon.\end{aligned}$$

با فرض $\varepsilon \to ۰$، داریم

$$\mathcal{M}\{(\xi \cap \eta) \subset B\} \geq ۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x) \wedge \nu(x). \qquad (۱۲۵.۸)$$

از طرف دیگر برای هر $x \in B^c$، داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{(\xi \cap \eta) \subset B\} &\leq \mathcal{M}\{x \not\in (\xi \cap \eta)\} = \mathcal{M}\{(x \not\in \xi) \cup (x \not\in \eta)\}\\ &= \mathcal{M}\{x \not\in \xi\} \vee \mathcal{M}\{x \not\in \eta\} = (۱ - \mu(x)) \vee (۱ - \nu(x))\\ &= ۱ - \mu(x) \wedge \nu(x).\end{aligned}$$

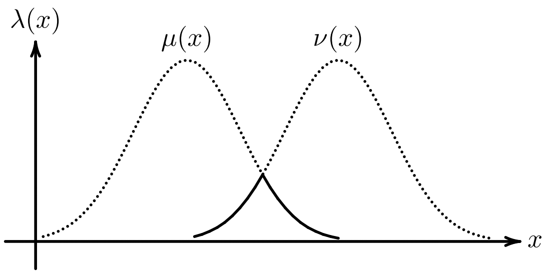
پس

$$\mathcal{M}\{(\xi \cap \eta) \subset B\} \leq ۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x) \wedge \nu(x). \qquad (۱۲۶.۸)$$

از (۱۲۵.۸) و (۱۲۶.۸) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{(\xi \cap \eta) \subset B\} = ۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x) \wedge (x). \qquad (۱۲۷.۸)$$

به این ترتیب برقراری دومین فرمول عکس اندازه نتیجه می‌شود. بنابراین، حکم قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۱۱.۸: تابع عضویت اشتراک مجموعه‌های نایقین.

مثال ۲۳.۸: شرط استقلال در قضیه ۱۶.۸ را نمی‌توان حذف کرد. برای مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma\mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = \mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۵$ است. آنگاه

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} [۰, ۱], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۱ \\ [۰, ۲], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۲ \end{cases}$$

یک مجموعه نایقین با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۰/۵, & \text{اگر } ۱ < x \leq ۲ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases}$$

و

$$\eta(\gamma) = \begin{cases} [۰,۲], & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر} \\ [۰,۱], & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

یک مجموعه نایقین با تابع عضویت

$$\nu(x) = \begin{cases} ۱, & ۰ \le x \le ۱ \text{ اگر} \\ ۰/۵, & ۱ < x \le ۲ \text{ اگر} \\ ۰, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases}$$

است. توجه کنید که ξ و η مستقل نیستند، و $\xi \cap \eta \equiv [۰,۱]$ که تابع عضویت آن

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۱, & ۰ \le x \le ۱ \text{ اگر} \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

است. پس

$$\lambda(x) \neq \mu(x) \wedge \nu(x). \tag{۱۲۸.۸}$$

بنابراین شرط استقلال را نمی‌توان حذف کرد.

تمرین ۳۳.۸: فرض کنید $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_n$ هستند. تابع عضویت $\xi_۱ \cap \xi_۲ \cap \cdots \cap \xi_n$ چیست؟

تمرین ۳۴.۸: برخی $\lambda(x) = \max\{۰, \mu(x) + \nu(x) - ۱\}$ و $\lambda(x) = \mu(x) \cdot \nu(x)$ را به عنوان تابع عضویت اشتراک دو مجموعه نایقین مطرح می‌کنند. چرا چنین دیدگاهی نادرست است.

تمرین ۳۵.۸: چرا $\lambda(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$ تنها انتخاب برای تابع عضویت اشتراک مجموعه‌های نایقین است؟

مکمل مجموعه نایقین

قضیه ۱۷.۸ [۹۵] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت μ است. آنگاه تابع عضویت مکمل آن ξ^c به صورت*

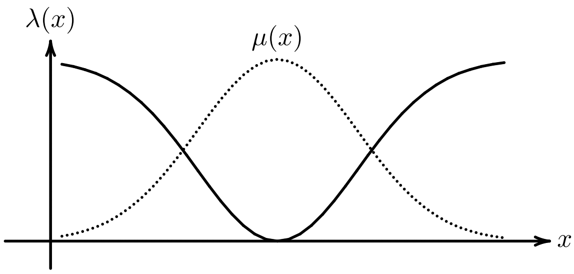
$$\lambda(x) = ۱ - \mu(x), \tag{۱۲۹.۸}$$

است.

برهان: برای اثبات این که $\mu - ۱$ تابع عضویت ξ^c است، باید برقراری دو فرمول عکس اندازه را بررسی کنیم. فرض کنید B یک مجموعه بورل از اعداد حقیقی است. از تعریف تابع عضویت نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi^c\} = \mathcal{M}\{\xi \subset B^c\} = ۱ - \sup_{x \in (B^c)^c} \mu(x) = \inf_{x \in B} (۱ - \mu(x)),$$

$$\mathcal{M}\{\xi^c \subset B\} = \mathcal{M}\{B^c \subset \xi\} = \inf_{x \in B^c} \mu(x) = ۱ - \sup_{x \in B^c} (۱ - \mu(x)).$$



شکل ۱۲.۸: تابع عضویت مکمل یک مجموعه نایقین.

پس $\mu - ۱$ تابع عضویت ξ^c است.

تمرین ۳۶.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت μ است. قضیه ۱۷.۸ می‌گوید که $\mu(x) - ۱$ تابع عضویت ξ^c است. (۱) مشخص شده است که $\lambda(x) \equiv ۱$ تابع مشخصه $\xi \cup \xi^c \equiv \Re$ است و

$$\lambda(x) \neq \mu(x) \vee (۱ - \mu(x)). \qquad (۱۳۰.۸)$$

چرا قضیه ۱۵.۸ برای اجتماع ξ و ξ^c قابل استفاده نیست؟ (۲) مشخص شده است که $\lambda(x) \equiv ۰$ تابع مشخصه $\xi \cap \xi^c \equiv \varnothing$ و

$$\lambda(x) \neq \mu(x) \wedge (۱ - \mu(x)). \qquad (۱۳۱.۸)$$

چرا قضیه ۱۶.۸ برای اشتراک ξ و ξ^c قابل استفاده نیست؟

تمرین ۳۷.۸: فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت μ و ν هستند. آنگاه تفاضل ξ و η که با $\xi \setminus \eta$ نشان داده می‌شود، مجموعه اعضایی است که در ξ قرار دارند ولی عضو η نیستند. یعنی

$$\xi \setminus \eta = \xi \cap \eta^c. \qquad (۱۳۲.۸)$$

نشان دهید تابع عضویت $\xi \setminus \eta$ به صورت

$$\lambda(x) = \mu(x) \wedge (۱ - \nu(x)), \qquad (۱۳۳.۸)$$

است.

۶.۸ قاعده عملیاتی حسابی

این بخش قاعده‌های عملیات حسابی مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم مجموعه‌های نایقین مستقل را ارائه می‌کند.

قاعده عملیاتی حسابی با استفاده از تابع‌های عضویت معکوس

قضیه ۱۸.۸ [۹۵] *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت عکس $\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \ldots, \mu_n^{-1}$ هستند و فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر است. آنگاه*

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \tag{۱۳۴.۸}$$

تابع عضویت معکوس

$$\lambda^{-1}(\alpha) = f(\mu_1^{-1}(\alpha), \mu_2^{-1}(\alpha), \ldots, \mu_n^{-1}(\alpha)) \tag{۱۳۵.۸}$$

دارد.

برهان: برای سادگی، تنها حالت $n = 2$ را ثابت می‌کنیم. فرض کنید B یک مجموعه بورل از اعداد حقیقی است و تعریف کنید

$$\beta = \inf_{x \in B} \lambda(x).$$

آنگاه $B \subset \lambda^{-1}(\beta)$. چون $\lambda^{-1}(\beta) = f(\mu_1^{-1}(\beta), \mu_2^{-1}(\beta))$، از استقلال ξ_1 و ξ_2 داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{B \subset \xi\} &\geq \mathcal{M}\{\lambda^{-1}(\beta) \subset \xi\} = \mathcal{M}\{f(\mu_1^{-1}(\beta), \mu_2^{-1}(\beta)) \subset \xi\} \\
&\geq \mathcal{M}\{(\mu_1^{-1}(\beta) \subset \xi_1) \cap (\mu_2^{-1}(\beta) \subset \xi_2)\} \\
&= \mathcal{M}\{\mu_1^{-1}(\beta) \subset \xi_1\} \wedge \mathcal{M}\{\mu_2^{-1}(\beta) \subset \xi_2\} \\
&\geq \beta \wedge \beta = \beta.
\end{aligned}$$

پس

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} \geq \inf_{x \in B} \lambda(x). \tag{۱۳۶.۸}$$

از طرف دیگر برای هر عدد $\varepsilon > 0$، داریم $B \not\subset \lambda^{-1}(\beta + \varepsilon)$. چون

$$\lambda^{-1}(\beta + \varepsilon) = f(\mu_1^{-1}(\beta + \varepsilon), \mu_2^{-1}(\beta + \varepsilon))$$

داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{B \not\subset \xi\} &\geq \mathcal{M}\{\xi \subset \lambda^{-1}(\beta + \varepsilon)\} = \mathcal{M}\{\xi \subset f(\mu_1^{-1}(\beta + \varepsilon), \mu_2^{-1}(\beta + \varepsilon))\} \\
&\geq \mathcal{M}\{(\xi_1 \subset \mu_1^{-1}(\beta + \varepsilon)) \cap (\xi_2 \subset \mu_2^{-1}(\beta + \varepsilon))\} \\
&= \mathcal{M}\{\xi_1 \subset \mu_1^{-1}(\beta + \varepsilon)\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_2 \subset \mu_2^{-1}(\beta + \varepsilon)\} \\
&\geq (1 - \beta - \varepsilon) \wedge (1 - \beta - \varepsilon) = 1 - \beta - \varepsilon
\end{aligned}$$

و آنگاه

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = 1 - \mathcal{M}\{B \not\subset \xi\} \leq \beta + \varepsilon.$$

با فرض $\varepsilon \to 0$، داریم

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} \leq \beta = \inf_{x \in B} \lambda(x). \tag{۱۳۷.۸}$$

از (۱۳۶.۸) و (۱۳۷.۸) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \inf_{x\in B} \lambda(x). \qquad (۱۳۸.۸)$$

به این ترتیب برقراری اولین فرمول عکس اندازه تحقیق شد. برای اثبات برقراری دومین فرمول عکس اندازه، فرض کنید

$$\beta = \sup_{x\in B^c} \lambda(x).$$

آنگاه برای هر عدد معلوم $\varepsilon > ۰$، داریم $\lambda^{-۱}(\beta+\varepsilon) \subset B$. توجه کنید که

$$\lambda^{-۱}(\beta+\varepsilon) = f(\mu_۱^{-۱}(\beta+\varepsilon), \mu_۲^{-۱}(\beta+\varepsilon)).$$

از استقلال $\xi_۱$ و $\xi_۲$ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{\xi \subset B\} &\geq \mathcal{M}\{\xi \subset \lambda^{-۱}(\beta+\varepsilon)\} = \mathcal{M}\{\xi \subset f(\mu_۱^{-۱}(\beta+\varepsilon), \mu_۲^{-۱}(\beta+\varepsilon))\}\\ &\geq \mathcal{M}\{(\xi_۱ \subset \mu_۱^{-۱}(\beta+\varepsilon)) \cap (\xi_۲ \subset \mu_۲^{-۱}(\beta+\varepsilon))\}\\ &= \mathcal{M}\{\xi_۱ \subset \mu_۱^{-۱}(\beta+\varepsilon)\} \wedge \mathcal{M}\{\xi_۲ \subset \mu_۲^{-۱}(\beta+\varepsilon)\}\\ &\geq (۱-\beta-\varepsilon) \wedge (۱-\beta-\varepsilon) = ۱-\beta-\varepsilon.\end{aligned}$$

با فرض $\varepsilon \to ۰$ داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} \geq ۱ - \sup_{x\in B^c} \lambda(x). \qquad (۱۳۹.۸)$$

از طرف دیگر برای هر مقدار معلوم $\varepsilon > ۰$، داریم $\lambda^{-۱}(\beta-\varepsilon) \not\subset B$. چون

$$\lambda^{-۱}(\beta-\varepsilon) = f(\mu_۱^{-۱}(\beta-\varepsilon), \mu_۲^{-۱}(\beta-\varepsilon))$$

داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{\xi \not\subset B\} &\geq \mathcal{M}\{\lambda^{-۱}(\beta-\varepsilon) \subset \xi\} = \mathcal{M}\{f(\mu_۱^{-۱}(\beta-\varepsilon), \mu_۲^{-۱}(\beta-\varepsilon)) \subset \xi\}\\ &\geq \mathcal{M}\{(\mu_۱^{-۱}(\beta-\varepsilon) \subset \xi_۱) \cap (\mu_۲^{-۱}(\beta-\varepsilon) \subset \xi_۲)\}\\ &= \mathcal{M}\{\mu_۱^{-۱}(\beta-\varepsilon) \subset \xi_۱\} \wedge \mathcal{M}\{\mu_۲^{-۱}(\beta-\varepsilon) \subset \xi_۲\}\\ &\geq (\beta-\varepsilon) \wedge (\beta-\varepsilon) = \beta-\varepsilon\end{aligned}$$

و در این صورت

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = ۱ - \mathcal{M}\{\xi \not\subset B\} \leq ۱-\beta+\varepsilon.$$

با فرض $\varepsilon \to ۰$، داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} \leq ۱-\beta = ۱ - \sup_{x\in B^c} \lambda(x). \qquad (۱۴۰.۸)$$

از (۱۳۹.۸) و (۱۴۰.۸) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = ۱ - \sup_{x\in B^c} \lambda(x). \qquad (۱۴۱.۸)$$

به این ترتیب برقراری دومین فرمول عکس اندازه ثابت شد. پس با استفاده ار فرمول‌های عکس اندازه (۱۳۸.۸) و (۱۴۱.۸) نشان داده شده که λ تابع عضویت ξ است.

مثال ۲۴.۸: فرض کنید $\xi = (a_1, a_2, a_3)$ و $\eta = (b_1, b_2, b_3)$ دو مجموعه نایقین مثلثی مستقل هستند. ابتدا، تابع عضویت معکوس ξ به صورت

$$\mu^{-1}(\alpha) = [(1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, \alpha a_2 + (1-\alpha)a_3], \tag{۱۴۲.۸}$$

است و تابع عضویت معکوس η

$$\nu^{-1}(\alpha) = [(1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, \alpha b_2 + (1-\alpha)b_3] \tag{۱۴۳.۸}$$

دارد. از قاعده عملیاتی جمع نتیجه می‌شود که تابع عضویت معکوس $\xi + \eta$ به صورت

$$\lambda^{-1}(\alpha) = [(1-\alpha)(a_1+b_1)+\alpha(a_2+b_2), \alpha(a_2+b_2)+(1-\alpha)(a_3+b_3)]. \tag{۱۴۴.۸}$$

است. به عبارت دیگر، مجموع $\xi + \eta$ نیز یک مجموعه نایقین مثلثی است و

$$\xi + \eta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \tag{۱۴۵.۸}$$

مثال ۲۵.۸: فرض کنید $\xi = (a_1, a_2, a_3)$ و $\eta = (b_1, b_2, b_3)$ مجموعه‌های نایقین مستقل هستند. از قاعده عملیاتی نتیجه می‌شود که تفاضل $\xi - \eta$ تابع عضویت معکوس

$$\lambda^{-1}(\alpha) = [(1-\alpha)(a_1-b_3)+\alpha(a_2-b_2), \alpha(a_2-b_2)+(1-\alpha)(a_3-b_1)]. \tag{۱۴۶.۸}$$

دارد. به عبارت دیگر، تفاضل $\xi - \eta$ نیز یک مجموعه نایقین مثلثی است و

$$\xi - \eta = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1). \tag{۱۴۷.۸}$$

مثال ۲۶.۸: فرض کنید $\xi = (a_1, a_2, a_3)$ یک مجموعه نایقین مثلثی و k یک عدد حقیقی است. اگر $k \geq 0$، ضرب $k \cdot \xi$ تابع عضویت معکوس

$$\lambda^{-1}(\alpha) = [(1-\alpha)(ka_1) + \alpha(ka_2), \alpha(ka_2) + (1-\alpha)(ka_3)], \tag{۱۴۸.۸}$$

دارد. یعنی ضرب $k \cdot \xi$ یک مجموعه نایقین مثلثی (ka_1, ka_2, ka_3) است. اگر $k < 0$، ضرب $k \cdot \xi$ تابع عضویت معکوس

$$\lambda^{-1}(\alpha) = [(1-\alpha)(ka_3) + \alpha(ka_2), \alpha(ka_2) + (1-\alpha)(ka_1)], \tag{۱۴۹.۸}$$

دارد. یعنی ضرب $k \cdot \xi$ عدد مثلثی (ka_3, ka_2, ka_1) است. به طور خلاصه داریم

$$k \cdot \xi = \begin{cases} (ka_1, ka_2, ka_3), & k \geq 0 \text{ اگر} \\ (ka_3, ka_2, ka_1), & k < 0 \text{ اگر} \end{cases} \tag{۱۵۰.۸}$$

تمرین ۳۸.۸: نشان دهید ضرب مجموعه‌های نایقین مثلثی، مثلثی نیست حتی اگر این مجموعه‌ها مستقل و مثبت باشند.

تمرین ۳۹.۸: فرض کنید $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\eta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ دو مجموعه نایقین ذوزنقه‌ای مستقل هستند. نشان دهید

$$\xi + \eta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4), \tag{۱۵۱.۸}$$

$$\xi - \eta = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1), \tag{۱۵۲.۸}$$

$$k \cdot \xi = \begin{cases} (ka_1, ka_2, ka_3, ka_4), & k \geq 0 \text{ اگر } \\ (ka_4, ka_3, ka_2, ka_1), & k < 0 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۱۵۳.۸}$$

مثال ۲۷.۸: شرط استقلال در قضیه ۱۸.۸ را نمی‌توان حذف کرد. برای مثال فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[0, 1]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. آنگاه

$$\xi_1(\gamma) = [-\gamma, \gamma] \tag{۱۵۴.۸}$$

مجموعه نایقین مثلثی $(-1, 0, 1)$ با تابع عضویت معکوس

$$\mu_1^{-1}(\alpha) = [\alpha - 1, 1 - \alpha], \tag{۱۵۵.۸}$$

است و

$$\xi_2(\gamma) = [\gamma - 1, 1 - \gamma] \tag{۱۵۶.۸}$$

نیز مجموعه نایقین مثلثی $(-1, 0, 1)$ با تابع عضویت

$$\mu_2^{-1}(\alpha) = [\alpha - 1, 1 - \alpha] \tag{۱۵۷.۸}$$

است. توجه کنید که ξ_1 و ξ_2 مستقل نیستند و $\xi_1 + \xi_2 \equiv [-1, 1]$ تابع عضویت معکوس

$$\lambda^{-1}(\alpha) = [-1, 1], \tag{۱۵۸.۸}$$

دارد. پس

$$\lambda^{-1}(\alpha) \neq \mu_1^{-1}(\alpha) + \mu_2^{-1}(\alpha). \tag{۱۵۹.۸}$$

بنابراین نمی‌توان شرط استقلال را حذف کرد.

عملیات حسابی با استفاده از تابع‌های عضویت

قضیه ۱۹.۸ *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_n(x)$ هستند و f یک تابع اندازه‌پذیر است. آنگاه*

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \tag{۱۶۰.۸}$$

تابع عضویت

$$\lambda(x) = \sup_{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i), \tag{۱۶۱.۸}$$

دارد.

برهان: فرض کنید λ تابع عضویت مجموعه ξ است. برای هر عدد حقیقی x، قرار دهید $\lambda(x) = \beta$. با استفاده از قضیه ۱۸.۸ داریم

$$\lambda^{-1}(\beta) = f(\mu_1^{-1}(\beta), \mu_2^{-1}(\beta), \ldots, \mu_n^{-1}(\beta)).$$

چون $x \in \lambda^{-1}(\beta)$، اعداد حقیقی $x_i \in \mu_i^{-1}(\beta)$ و $i = 1, 2, \ldots, n$ چنان موجودند که $x = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. با توجه به این که برای $i = 1, 2, \ldots, n$، $\mu_i(x_i) \geq \beta$، داریم

$$\lambda(x) = \beta \leq \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i)$$

و آنگاه

$$\lambda(x) \leq \sup_{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i). \tag{۱۶۲.۸}$$

از طرف دیگر، فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اعداد حقیقی با $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$ هستند. قرار دهید

$$\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i) = \beta.$$

از قضیه ۱۸.۸ داریم

$$\lambda^{-1}(\beta) = f(\mu_1^{-1}(\beta), \mu_2^{-1}(\beta), \ldots, \mu_n^{-1}(\beta)).$$

با توجه به این که برای $i = 1, 2, \ldots, n$، $x_i \in \mu_i^{-1}(\beta)$، داریم

$$x = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in f(\mu_1^{-1}(\beta), \mu_2^{-1}(\beta), \ldots, \mu_n^{-1}(\beta)) = \lambda^{-1}(\beta)$$

پس

$$\lambda(x) \geq \beta = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i)$$

و آنگاه

$$\lambda(x) \geq \sup_{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i). \tag{۱۶۳.۸}$$

از (۱۶۲.۸) و (۱۶۳.۸) نتیجه می‌شود که (۱۶۱.۸) برقرار است.

تذکر ۱۱.۸: ممکن است معادله $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$ برای برخی مقادیر x ریشه نداشته باشد. در چنین حالتی قراردهید $\lambda(x) = 0$.

مثال ۲۸.۸: شرط استقلال در قضیه ۱۹.۸ را نمی‌توان حذف کرد. برای مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. آنگاه

$$\xi_1(\gamma) = [-\gamma, \gamma] \tag{۱۶۴.۸}$$

مجموعه نایقین مثلثی $(-1, 0, 1)$ با تابع عضویت

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{اگر } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases} \tag{۱۶۵.۸}$$

است و

$$\xi_۲(\gamma) = [\gamma - ۱, ۱ - \gamma] \quad (۱۶۶.۸)$$

نیز مجموعه نایقین مثلثی $(-۱, ۰, ۱)$ با تابع عضویت

$$\mu_۲(x) = \begin{cases} ۱ - |x|, & -۱ \le x \le ۱ \text{ اگر } \\ ۰, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases} \quad (۱۶۷.۸)$$

است. توجه کنید که $\xi_۱$ و $\xi_۲$ مستقل نیستند و تابع عضویت $\xi_۱ + \xi_۲ \equiv [-۱, ۱]$ به صورت

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۱, & -۱ \le x \le ۱ \text{ اگر } \\ ۰, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases} \quad (۱۶۸.۸)$$

است. پس

$$\lambda(x) \neq \sup_{x_۱+x_۲=x} \mu_۱(x_۱) \wedge \mu_۲(x_۲). \quad (۱۶۹.۸)$$

بنابراین شرط استقلال را نمی‌توان حذف کرد.

تمرین ۴۰.۸: فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین به ترتیب با تابع‌های عضویت $\mu(x)$ و $\nu(x)$ هستند. نشان دهید تابع عضویت $\xi + \eta$ به صورت

$$\lambda(x) = \sup_{y\in\Re} \mu(x - y) \wedge \nu(y), \quad (۱۷۰.۸)$$

است.

تمرین ۴۱.۸: فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین به ترتیب با تابع‌های عضویت $\mu(x)$ و $\nu(x)$ هستند. نشان دهید تابع عضویت $\xi - \eta$ به صورت

$$\lambda(x) = \sup_{y\in\Re} \mu(x + y) \wedge \nu(y). \quad (۱۷۱.۸)$$

است.

۷.۸ رابطه شمول

فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت μ است و B را یک مجموعه بورل از اعداد حقیقی در نظر بگیرید. با توجه با تابع عضویت، لیو [۹۵] دو فرمول عکس اندازه را برای محاسبه اندازه نایقین رابطه شمول به صورت

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi\} = \inf_{x\in B} \mu(x), \quad (۱۷۲.۸)$$

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B\} = ۱ - \sup_{x\in B^c} \mu(x). \quad (۱۷۳.۸)$$

ارائه کرد. مخصوصاً برای نقطه x، لیو [۹۵] فرمول زیر را برای محاسبه اندازه نایقین رابطه مهار ارائه کرد

$$\mathcal{M}\{x \in \xi\} = \mu(x). \tag{۱۷۴.۸}$$

فرمول کلی توسط یائو [۱۸۹] برای محاسبه اندازه نایقین رابطه شمول بین دو مجموعه نایقین استخراج شد.

قضیه ۲۰.۸ [۱۸۹] *فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت μ و ν هستند. آنگاه*

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} = \inf_{x \in \Re} (۱ - \mu(x)) \vee \nu(x). \tag{۱۷۵.۸}$$

برهان: توجه کنید که تابع عضویت $\xi \cap \eta^c$ به صورت $\lambda(x) = \mu(x) \wedge (۱ - \nu(x))$ است. از $\{\xi \subset \eta\} \equiv \{\xi \cap \eta^c = \varnothing\}$ و فرمول دوم عکس اندازه نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} &= \mathcal{M}\{\xi \cap \eta^c = \varnothing\} \\
&= \mathcal{M}\{\xi \cap \eta^c \subset \varnothing\} \\
&= ۱ - \sup_{x \in \varnothing^c} \mu(x) \wedge (۱ - \nu(x)) \\
&= \inf_{x \in \Re} (۱ - \mu(x)) \vee \nu(x).
\end{aligned}$$

قضیه ثابت شد.

مثال ۲۹.۸: دو مجموعه نایقین $\xi = [۱, ۲]$ و $\eta = [۰, ۳]$ که اساساً بازه‌های قطعی به ترتیب با تابع‌های عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۱ \le x \le ۲ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت،} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۰ \le x \le ۳ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت،} \end{cases}$$

هستند را در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که $\xi \subset \eta$ یک رابطه کاملاً درست است چون $[۱, ۲]$ در داخل $[۰, ۳]$ قرار دارد. همچنین با استفاده از (۱۷۵.۸) داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} = \inf_{x \in \Re} (۱ - \mu(x)) \vee \nu(x) = ۱.$$

مثال ۳۰.۸: دو مجموعه نایقین $\xi = [۰, ۲]$ و $\eta = [۱, ۳]$ که اساساً بازه‌های قطعی به ترتیب با تابع‌های عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۰ \le x \le ۲ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت،} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۱ \le x \le ۳ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت،} \end{cases}$$

هستند را در نظر بگیرید. توجه کنید که $\xi \subset \eta$ یک رابطه نادرست است زیرا $[۰, ۲]$ زیرمجموعه $[۱, ۳]$ نیست. همچنین با استفاده از (۱۷۵.۸) داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} = \inf_{x \in \Re} (۱ - \mu(x)) \vee \nu(x) = ۰.$$

مثال ۳۱.۸: فرض کنید فضای نایقین $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳, \gamma_۴\}$ همراه با مجموعه توانی و

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } \Lambda = \varnothing \\ ۱, & \text{اگر } \Lambda = \Gamma \\ ۰٫۸, & \text{اگر } \gamma_۱ \in \Lambda \neq \Gamma \\ ۰٫۲, & \text{اگر } \gamma_۱ \notin \Lambda \neq \varnothing \end{cases} \qquad (۱۷۶.۸)$$

است. دو مجموعه نایقین

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} [۰, ۳], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۱ \text{ یا } \gamma_۲ \\ [۱, ۲], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۳ \text{ یا } \gamma_۴ \end{cases} \qquad (۱۷۷.۸)$$

$$\eta(\gamma) = \begin{cases} [۰, ۳], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۱ \text{ یا } \gamma_۳ \\ [۱, ۲], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۲ \text{ یا } \gamma_۴ \end{cases} \qquad (۱۷۸.۸)$$

را تعریف کنید. مسقل بودن ξ و η و این که تابع عضویت هر دو به صورت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۱ \le x \le ۲ \\ ۰٫۸, & \text{اگر } ۰ \le x < ۱ \text{ یا } ۲ < x \le ۳ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \qquad (۱۷۹.۸)$$

را می‌توان تحقیق کرد. توجه کنید که

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} = \mathcal{M}\{\gamma_۱, \gamma_۳, \gamma_۴\} = ۰٫۸. \qquad (۱۸۰.۸)$$

همچنین با استفاده از (۱۷۵.۸) داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} = \inf_{x \in \Re} (۱ - \mu(x)) \vee \mu(x) = ۰٫۸. \qquad (۱۸۱.۸)$$

تمرین ۴۲.۸: فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت μ و ν هستند. نشان دهید اگر $\mu \le \nu$ آنگاه

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} \ge ۰٫۵. \qquad (۱۸۲.۸)$$

تمرین ۴۳.۸: فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت μ و ν هستند و c را عددی بین ۰٫۵ و ۱ در نظر بگیرید. (۱) ξ و η را چنان بسازید که

$$\mu \equiv \nu \quad \text{و} \quad \mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} = c. \tag{۱۸۳.۸}$$

(۲) آیا می‌توان ξ و η را چنان ساخت که وقتی c کمتر از ۰٫۵ است داشته باشیم $\mu \equiv \nu$ و $\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} = c$؟ (۳) آیا گزاره «$\xi \subset \eta$ اگر و تنها اگر برای هر x، $\mu(x) \le \nu(x)$» درست است؟ (۴) آیا گزاره «$\xi = \eta$ اگر و تنها اگر برای هر x، $\mu(x) = \nu(x)$» درست است؟ (راهنمایی: از (۱۷۶.۸)، (۱۷۷.۸) و (۱۷۸.۸) استفاده کنید.)

مثال ۳۲.۸: شرط استقلال در قضیه ۲۰.۸ را نمی‌توان حذف کرد. برای مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[0, 1]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. آنگاه

$$\xi(\gamma) = [-\gamma, \gamma] \tag{۱۸۴.۸}$$

مجموعه نایقین مثلثی $(-1, 0, 1)$ با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 \le x \le 1 \text{ اگر} \\ 0, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases} \tag{۱۸۵.۸}$$

و

$$\eta(\gamma) = [-\gamma, \gamma] \tag{۱۸۶.۸}$$

مجموعه نایقین مثلثی $(-1, 0, 1)$ با تابع عضویت

$$\nu(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 \le x \le 1 \text{ اگر} \\ 0, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۱۸۷.۸}$$

است. توجه کنید که ξ و η مستقل نیستند (در واقع آنها یکسان هستند) و $\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} = 1$. با این حال با استفاده از (۱۷۵.۸) داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \subset \eta\} = \inf_{x \in \Re} (1 - \mu(x)) \vee \nu(x) = 0.5 \ne 1. \tag{۱۸۸.۸}$$

پس شرط استقلال را نمی‌توان حذف کرد.

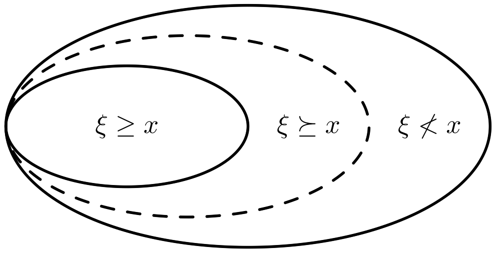
۸.۸ مقدار مورد انتظار

این بخش مفهوم مقدار مورد انتظار را برای مجموعه نایقین ناتهی (مجموعه نایقین تهی و نیم–تهی مقدار مورد انتظار ندارند) را معرفی می‌کند.

تعریف ۱۲.۸ [۸۹] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین ناتهی است. مقدار مورد انتظار ξ به صورت*

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \succeq x\} \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \preceq x\} \mathrm{d}x \tag{۱۸۹.۸}$$

تعریف می‌شود که در آن حداقل یکی از انتگرال‌ها متناهی است.



شکل ۱۳.۸: $\{\xi \ge x\} \subset \{\xi \succeq x\} \subset \{\xi \not< x\}$

توجه کنید که $\xi \succeq x$ نشان می‌دهد که «ξ به شکل مبهم در $[x, +\infty)$ قرار دارد» و $\xi \preceq x$ به این معنی است که «ξ به شکل مبهم در $(-\infty, x]$ قرار دارد». چه چیزی برای مقادیر $\mathcal{M}\{\xi \succeq x\}$ و $\mathcal{M}\{\xi \preceq x\}$ مناسب است؟ متاسفانه این سوال آنچنان که به نظر می‌رسد ساده نیست.

واضح است که رویداد مبهم $\{\xi \succeq x\}$ چیزی بین $\{\xi \ge x\}$ و $\{\xi \not< x\}$ است (شکل ۱۳.۸ را نگاه کنید) به شکل شهودی برای مقدار $\mathcal{M}\{\xi \succeq x\}$، انتخاب $\mathcal{M}\{\xi \ge x\}$ بسیار محافظه کارانه و انتخاب $\mathcal{M}\{\xi \not< x\} = ۱ - \mathcal{M}\{\xi < x\}$ بسیار سخاوتمندانه است. پس برای $\mathcal{M}\{\xi \succeq x\}$ مقدار وسط $\mathcal{M}\{\xi \ge x\}$ و $۱ - \mathcal{M}\{\xi < x\}$ را نسبت می‌دهیم که عبارت است از

$$\mathcal{M}\{\xi \succeq x\} = \frac{۱}{۲}\left(\mathcal{M}\{\xi \ge x\} + ۱ - \mathcal{M}\{\xi < x\}\right). \qquad (۱۹۰.۸)$$

به طور مشابه همچنین تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{M}\{\xi \preceq x\} = \frac{۱}{۲}\left(\mathcal{M}\{\xi \le x\} + ۱ - \mathcal{M}\{\xi > x\}\right). \qquad (۱۹۱.۸)$$

مثال ۳۳.۸: بازه قطعی $[a, b]$ را در نظر بگیرید و برای سادگی فرض کنید $a > ۰$. آنگاه

$$\xi(\gamma) \equiv [a, b], \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

یک مجموعه نایقین خاص است. از تعریف $\mathcal{M}\{\xi \succeq x\}$ و $\mathcal{M}\{\xi \preceq x\}$ نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\xi \succeq x\} = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x \le a \\ ۰/۵, & \text{اگر } a < x \le b \\ ۰, & \text{اگر } x > b \end{cases}$$

$$\mathcal{M}\{\xi \preceq x\} \equiv ۰, \quad \forall x \le ۰.$$

پس

$$E[\xi] = \int_۰^a ۱ \mathrm{d}x + \int_a^b ۰/۵ \mathrm{d}x = \frac{a+b}{۲}.$$

مثال ۳۴.۸: برای توصیف بیشتر عملگر مقدار مورد انتظار، مجموعه نایقین

$$\xi = \begin{cases} [۱, ۲] & \text{اندازه با نایقین } ۰/۶ \\ [۲, ۳] & \text{اندازه با نایقین } ۰/۳ \\ [۳, ۴] & \text{اندازه با نایقین } ۰/۲ \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. از تعریف $\mathcal{M}\{\xi \succeq x\}$ و $\mathcal{M}\{\xi \preceq x\}$ نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{\xi \succeq x\} = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x \leq ۱ \\ ۰/۷, & \text{اگر } ۱ < x \leq ۲ \\ ۰/۳, & \text{اگر } ۲ < x \leq ۳ \\ ۰/۱, & \text{اگر } ۳ < x \leq ۴ \\ ۰, & \text{اگر } x > ۴ \end{cases}$$

$$\mathcal{M}\{\xi \preceq x\} \equiv ۰, \quad \forall x \leq ۰.$$

پس

$$E[\xi] = \int_۰^۱ ۱\mathrm{d}x + \int_۱^۲ ۰/۷\mathrm{d}x + \int_۲^۳ ۰/۳\mathrm{d}x + \int_۳^۴ ۰/۱\mathrm{d}x = ۲/۱.$$

چگونه مقدار مورد انتظار را از تابع عضویت به دست آوریم؟

فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت μ است. برای محاسبه مقدار مورد انتظار با استفاده از (۱۸۹.۸) باید مقادیر $\mathcal{M}\{\xi \succeq x\}$ و $\mathcal{M}\{\xi \preceq x\}$ با استفاده از تابع عضویت محاسبه شوند.

قضیه ۲۱.۸ [۹۱] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین ناتهی با تابع عضویت μ است. آنگاه برای هر عدد حقیقی x داریم*

$$\mathcal{M}\{\xi \succeq x\} = \frac{۱}{۲}\left(\sup_{y \geq x} \mu(y) + ۱ - \sup_{y < x} \mu(y)\right), \tag{۱۹۲.۸}$$

$$\mathcal{M}\{\xi \preceq x\} = \frac{۱}{۲}\left(\sup_{y \leq x} \mu(y) + ۱ - \sup_{y > x} \mu(y)\right). \tag{۱۹۳.۸}$$

برهان: با توجه به این که μ تابع عضویت مجموعه نایقین ξ است، فرمول دوم عکس اندازه بیان می‌کند که

$$\mathcal{M}\{\xi \geq x\} = ۱ - \sup_{y < x} \mu(y),$$

$$\mathcal{M}\{\xi < x\} = ۱ - \sup_{y \geq x} \mu(y).$$

بنابراین برقراری (۱۹۲.۸) از (۱۹۰.۸) نتیجه می‌شود. اثبات (۱۹۳.۸) مشابه است.

قضیه ۲۲.۸ [۹۱] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین ناتهی با تابع عضویت μ است. آنگاه*

$$E[\xi] = x_۰ + \frac{۱}{۲}\int_{x_۰}^{+\infty} \sup_{y \geq x} \mu(y)\mathrm{d}x - \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{x_۰} \sup_{y \leq x} \mu(y)\mathrm{d}x \tag{۱۹۴.۸}$$

که در آن $x_۰$ نقطه‌ای با خاصیت $\mu(x_۰) = ۱$ است.

برهان: چون مقدار μ در $x_\circ$ یک است، از قضیه ۲۱.۸ نتیجه می‌شود که برای تقریباً همه xها داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \succeq x\} = \begin{cases} ۱ - \sup\limits_{y<x} \mu(x)/۲, & \text{اگر } x \leq x_\circ \\ \sup\limits_{y \geq x} \mu(x)/۲, & \text{اگر } x > x_\circ \end{cases} \tag{۱۹۵.۸}$$

و

$$\mathcal{M}\{\xi \preceq x\} = \begin{cases} \sup\limits_{y \leq x} \mu(x)/۲, & \text{اگر } x < x_\circ \\ ۱ - \sup\limits_{y>x} \mu(x)/۲, & \text{اگر } x \geq x_\circ \end{cases} \tag{۱۹۶.۸}$$

اگر $x_\circ \geq \circ$، آنگاه

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_\circ^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \succeq x\}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^\circ \mathcal{M}\{\xi \preceq x\}\mathrm{d}x \\ &= \int_\circ^{x_\circ} \left(۱ - \sup_{y \leq x} \frac{\mu(x)}{۲}\right) \mathrm{d}x + \int_{x_\circ}^{+\infty} \sup_{y \geq x} \frac{\mu(x)}{۲} \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^\circ \sup_{y \leq x} \frac{\mu(x)}{۲} \mathrm{d}x \\ &= x_\circ + \frac{۱}{۲} \int_{x_\circ}^{+\infty} \sup_{y \geq x} \mu(y)\mathrm{d}x - \frac{۱}{۲} \int_{-\infty}^{x_\circ} \sup_{y \leq x} \mu(y)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

اگر $x_\circ < \circ$، آنگاه

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_\circ^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \succeq x\}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^\circ \mathcal{M}\{\xi \preceq x\}\mathrm{d}x \\ &= \int_\circ^{+\infty} \sup_{y \geq x} \frac{\mu(x)}{۲} \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{x_\circ} \sup_{y \leq x} \frac{\mu(x)}{۲} \mathrm{d}x - \int_{x_\circ}^\circ \left(۱ - \sup_{y \geq x} \frac{\mu(x)}{۲}\right) \mathrm{d}x \\ &= x_\circ + \frac{۱}{۲} \int_{x_\circ}^{+\infty} \sup_{y \geq x} \mu(y)\mathrm{d}x - \frac{۱}{۲} \int_{-\infty}^{x_\circ} \sup_{y \leq x} \mu(y)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۲۳.۸ [۹۱] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت منظم μ است. آنگاه*

$$E[\xi] = x_\circ + \frac{۱}{۲} \int_{x_\circ}^{+\infty} \mu(x)\mathrm{d}x - \frac{۱}{۲} \int_{-\infty}^{x_\circ} \mu(x)\mathrm{d}x \tag{۱۹۷.۸}$$

که در آن $x_\circ$ نقطه‌ای با $\mu(x_\circ) = ۱$ است.

برهان: چون μ روی $(-\infty, x_\circ]$ صعودی و روی $[x_\circ, +\infty)$ نزولی است، برای تقریباً همه $x \geq x_\circ$ داریم

$$\sup_{y \geq x} \mu(y) = \mu(x); \tag{۱۹۸.۸}$$

و برای تقریباً همه $x \le x_\circ$ داریم

$$\sup_{y\le x}\mu(y)=\mu(x). \tag{۱۹۹.۸}$$

برقراری حکم بلافاصله از (۱۹۴.۸) نتیجه می‌شود.

تمرین ۴۴.۸: نشان دهید مقدار مورد انتظار مجموعه نایقین مثلثی $\xi=(a,b,c)$ به صورت

$$E[\xi]=\frac{a+۲b+c}{۴}, \tag{۲۰۰.۸}$$

است.

تمرین ۴۵.۸: نشان دهید مقدار مورد انتظار مجموعه نایقین ذوزنقه‌ای $\xi=(a,b,c,d)$ به صورت

$$E[\xi]=\frac{a+b+c+d}{۴}, \tag{۲۰۱.۸}$$

است.

قضیه ۲۴.۸ [۹۵] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین ناتهی با تابع عضویت μ است. آنگاه*

$$E[\xi]=\frac{۱}{۲}\int_\circ^۱\left(\inf\mu^{-۱}(\alpha)+\sup\mu^{-۱}(\alpha)\right)\mathrm{d}\alpha \tag{۲۰۲.۸}$$

که در آن $\inf\mu^{-۱}(\alpha)$ و $\sup\mu^{-۱}(\alpha)$ به ترتیب اینفیموم و سوپریموم αـ برش هستند.

برهان: چون ξ یک مجموعه نایقین ناتهی است و تابع عضویت دارد، می‌توان فرض کرد که نقطه‌ای مانند $x_\circ$ با $\mu(x_\circ)=۱$ وجود دارد (شاید با مقدار اختلال). واضح است که دو انتگرال

$$\int_{x_\circ}^{+\infty}\sup_{y\ge x}\mu(y)\mathrm{d}x \quad و \quad \int_\circ^۱(\sup\mu^{-۱}(\alpha)-x_\circ)\mathrm{d}\alpha$$

مساحت یکسانی را مشخص می‌کنند. پس

$$\int_{x_\circ}^{+\infty}\sup_{y\ge x}\mu(y)\mathrm{d}x=\int_\circ^۱(\sup\mu^{-۱}(\alpha)-x_\circ)\mathrm{d}\alpha=\int_\circ^۱\sup\mu^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha-x_\circ.$$

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$\int_{-\infty}^{x_\circ}\sup_{y\le x}\mu(y)\mathrm{d}x=\int_\circ^۱(x_\circ-\inf\mu^{-۱}(\alpha))\mathrm{d}\alpha=x_\circ-\int_\circ^۱\inf\mu^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

از (۱۹۴.۸) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}E[\xi]&=x_\circ+\frac{۱}{۲}\int_{x_\circ}^{+\infty}\sup_{y\ge x}\mu(y)\mathrm{d}x-\frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{x_\circ}\sup_{y\le x}\mu(y)\mathrm{d}x\\&=x_\circ+\frac{۱}{۲}\left(\int_\circ^۱\sup\mu^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha-x_\circ\right)-\frac{۱}{۲}\left(x_\circ-\int_\circ^۱\inf\mu^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)\\&=\frac{۱}{۲}\int_\circ^۱(\inf\mu^{-۱}(\alpha)+\sup\mu^{-۱}(\alpha))\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

خطی بودن عملگر مقدار مورد انتظار

قضیه ۲۵.۸ [۹۵] *فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین مستقل با مقدارهای مورد انتظار متناهی هستند. آنگاه برای اعداد حقیقی دلخواه a و b داریم*

$$E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta]. \qquad (۲۰۳.۸)$$

برهان: تابع‌های عضویت ξ و η را به ترتیب با μ و ν نشان دهید. آنگاه

$$E[\xi] = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} \left(\inf \mu^{-۱}(\alpha) + \sup \mu^{-۱}(\alpha)\right) \mathrm{d}\alpha,$$

$$E[\eta] = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} \left(\inf \nu^{-۱}(\alpha) + \sup \nu^{-۱}(\alpha)\right) \mathrm{d}\alpha.$$

گام اول: ابتدا ثابت می کنیم $E[a\xi] = aE[\xi]$. تابع عضویت معکوس حاصلضرب $a\xi$ عبارت است از

$$\lambda^{-۱}(\alpha) = a\mu^{-۱}(\alpha).$$

از قضیه ۲۴.۸ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} E[a\xi] &= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} \left(\inf \lambda^{-۱}(\alpha) + \sup \lambda^{-۱}(\alpha)\right) \mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{a}{۲}\int_{۰}^{۱} \left(\inf \mu^{-۱}(\alpha) + \sup \mu^{-۱}(\alpha)\right) \mathrm{d}\alpha = aE[\xi]. \end{aligned}$$

گام دوم: حال ثابت می‌کنیم $E[\xi + \eta] = E[\xi] + E[\eta]$. تابع عضویت معکوس $\xi + \eta$ عبارت است از

$$\lambda^{-۱}(\alpha) = \mu^{-۱}(\alpha) + \nu^{-۱}(\alpha).$$

از قضیه ۲۴.۸ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} E[\xi + \eta] &= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} \left(\inf \lambda^{-۱}(\alpha) + \sup \lambda^{-۱}(\alpha)\right) \mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} \left(\inf \mu^{-۱}(\alpha) + \sup \mu^{-۱}(\alpha)\right) \mathrm{d}\alpha \\ &\quad + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} \left(\inf \nu^{-۱}(\alpha) + \sup \nu^{-۱}(\alpha)\right) \mathrm{d}\alpha \\ &= E[\xi] + E[\eta]. \end{aligned}$$

گام سوم: از گام‌های اول و دوم نتیجه می‌شود که

$$E[a\xi + b\eta] = E[a\xi] + E[b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta].$$

قضیه ثابت شد.

مثال ۳۵.۸: در حالت کلی، عملگر مقدار مورد انتظار الزاماً خطی نیست. به عنوان مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳\}$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = ۰/۶$، $\mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۳$، $\mathcal{M}\{\gamma_۳\} = ۰/۲$ است. دو مجموعه نایقین زیر را تعریف کنید.

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} [۱,۴], & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۱,۳], & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ [۱,۲], & \gamma = \gamma_۳ \text{ اگر } \end{cases} \qquad \eta(\gamma) = \begin{cases} [۱,۵], & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۱,۲], & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ [۱,۴], & \gamma = \gamma_۳ \text{ اگر } \end{cases}$$

توجه کنید که ξ و η مستقل نیستند و جمع آنها

$$(\xi + \eta)(\gamma) = \begin{cases} [۲,۹], & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۲,۵], & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ [۲,۶], & \gamma = \gamma_۳ \text{ اگر } \end{cases}$$

است. به سادگی دیده می‌شود که $E[\xi] = ۲/۲$، $E[\eta] = ۲/۵$ و $E[\xi + \eta] = ۴/۷۵$. پس

$$E[\xi + \eta] > E[\xi] + E[\eta].$$

اگر مجموعه‌های نایقین به صورت

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} [۱,۴], & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۱,۳], & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ [۱,۲], & \gamma = \gamma_۳ \text{ اگر } \end{cases} \qquad \eta(\gamma) = \begin{cases} [۱,۴], & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۱,۶], & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ [۱,۲], & \gamma = \gamma_۳ \text{ اگر } \end{cases}$$

تعریف شوند، آنگاه

$$(\xi + \eta)(\gamma) = \begin{cases} [۲,۸], & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر } \\ [۲,۹], & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر } \\ [۲,۴], & \gamma = \gamma_۳ \text{ اگر } \end{cases}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $E[\xi] = ۲/۲$، $E[\eta] = ۲/۶$ و $E[\xi + \eta] = ۴/۷۵$. پس

$$E[\xi + \eta] < E[\xi] + E[\eta].$$

بنابراین شرط استقلال را نمی‌توان حذف کرد.

۹.۸ واریانس

واریانس یک مجموعه نایقین درجه پراکندگی تابع عضویت در اطراف میانگین را نشان می‌دهد.

تعریف ۱۳.۸ [۹۲] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با مقدار مورد انتظار متناهی e است. آنگاه واریانس ξ با*

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^۲], \tag{۲۰۴.۸}$$

تعریف می‌شود.

این تعریف می‌گوید که واریانس همان مقدار مورد انتظار $(\xi-e)^۲$ است. چون $(\xi-e)^۲$ یک مجموعه نایقین نامنفی است، همچنین داریم

$$V[\xi] = \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \succeq x\}\mathrm{d}x. \qquad (۲۰۵.۸)$$

توجه کنید که $(\xi-e)^۲ \succeq x$ به این معنی است که «$(\xi-e)^۲$ به شکل مبهم در $[x, +\infty)$ قرار دارد». مقدار مناسب برای $\mathcal{M}\{(\xi-e)^۲ \succeq x\}$ چقدر است؟ به شکل شهودی، انتخاب $\mathcal{M}\{(\xi-e)^۲ \geq x\}$ بسیار محافظه‌کارانه و انتخاب $۱ - \mathcal{M}\{(\xi-e)^۲ < x\}$ بسیار سخاوتمندانه است. پس مقدار وسط را برای $\mathcal{M}\{(\xi-e)^۲ \succeq x\}$ در نظر می‌گیریم. یعنی

$$\mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \succeq x\} = \frac{۱}{۲}\left(\mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \geq x\} + ۱ - \mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ < x\}\right). \qquad (۲۰۶.۸)$$

قضیه ۲۶.۸ *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با مقدار مورد انتظار متناهی است و a و b دو عدد حقیقی هستند. آنگاه*

$$V[a\xi + b] = a^۲V[\xi]. \qquad (۲۰۷.۸)$$

برهان: فرض کنید e مقدار مورد انتظار ξ است. آنگاه $ae+b$ مقدار مورد انتظار $a\xi+b$ است. از تعریف واریانس نتیجه می‌شود که

$$V[a\xi + b] = E\left[(a\xi + b - ae - b)^۲\right] = a^۲E[(\xi - e)^۲] = a^۲V[\xi].$$

قضیه ۲۷.۸ *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با مقدار مورد انتظار e است. آنگاه $V[\xi] = ۰$ اگر و تنها اگر تقریباً قطعی $\xi = \{e\}$*

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $V[\xi] = ۰$. از رابطه (۲۰۵.۸) نتیجه می‌شود که

$$\int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \succeq x\}\mathrm{d}x = ۰$$

و در نتیجه برای هر $x > ۰$ داریم $\mathcal{M}\{(\xi-e)^۲ \succeq x\} = ۰$. پس $\mathcal{M}\{\xi = \{e\}\} = ۱$. برعکس فرض کنید $\mathcal{M}\{\xi = \{e\}\} = ۱$. آنگاه برای هر $x > ۰$ داریم $\mathcal{M}\{(\xi-e)^۲ \succeq x\} = ۰$. پس

$$V[\xi] = \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{(\xi - e)^۲ \succeq x\}\mathrm{d}x = ۰.$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

چگونه واریانس را از تابع عضویت به دست آوریم؟

فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت μ است. برای مجاسبه واریانس آن با (۲۰۵.۸) باید مقدار $\mathcal{M}\{(\xi-e)^۲ \succeq x\}$ را از روی تابع عضویت μ محاسبه کنیم.

قضیه ۲۸.۸ [۱۰۲] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت μ است. آنگاه برای اعداد حقیقی e و x داریم*

$$\mathcal{M}\{(\xi-e)^{۲}\succeq x\}=\frac{۱}{۲}\left(\sup_{(y-e)^{۲}\geq x}\mu(y)+۱-\sup_{(y-e)^{۲}<x}\mu(y)\right). \qquad (۲۰۸.۸)$$

برهان: چون ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت μ است، از فرمول معکوس اندازه نتیجه می‌شود که برای هر دو عدد حقیقی دلخواه e و x داریم

$$\mathcal{M}\{(\xi-e)^{۲}\geq x\}=۱-\sup_{(y-e)^{۲}<x}\mu(y),$$

$$\mathcal{M}\{(\xi-e)^{۲}< x\}=۱-\sup_{(y-e)^{۲}\geq x}\mu(y).$$

به این ترتیب رابطه (۲۰۸.۸) با استفاده از (۲۰۶.۸) ثابت شد.

قضیه ۲۹.۸ [۱۰۲] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت μ و مقدار مورد انتظار متناهی e است. آنگاه*

$$V[\xi]=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{+\infty}\left(\sup_{(y-e)^{۲}\geq x}\mu(y)+۱-\sup_{(y-e)^{۲}<x}\mu(y)\right)\mathrm{d}x. \qquad (۲۰۹.۸)$$

برهان: این قضیه بلافاصله از (۲۰۵.۸) و (۲۰۸.۸) نتیجه می‌شود.

۱۰.۸ فاصله

تعریف ۱۴.۸ [۹۲] *فاصله بین دو مجموعه نایقین ناتهی ξ و η به صورت*

$$d(\xi,\eta)=E[|\xi-\eta|], \qquad (۲۱۰.۸)$$

تعریف می‌شود.

به عبارت دیگر، فاصله بین ξ و η مقدار مورد انتظار $|\xi-\eta|$ است. چون $|\xi-\eta|$ یک مجموعه نایقین نامنفی است، داریم

$$d(\xi,\eta)=\int_{۰}^{+\infty}\mathcal{M}\{|\xi-\eta|\succeq x\}\mathrm{d}x. \qquad (۲۱۱.۸)$$

توجه کنید که $|\xi-\eta|\succeq x$ نشان می‌دهد «$|\xi-\eta|$ به شکل مبهم در $[x,+\infty)$ قرار دارد». مقدار مناسب برای $\mathcal{M}\{|\xi-\eta|\succeq x\}$ چقدر است؟ به شکل شهودی، انتخاب $\mathcal{M}\{|\xi-\eta|\geq x\}$ بسیار محافظه کارانه و انتخاب $۱-\mathcal{M}\{|\xi-\eta|<x\}$ بسیار سخاوتمندانه است. پس برای مقدار $\mathcal{M}\{|\xi-\eta|\succeq x\}$ میانگین این دو مقدار را قرار می‌دهیم. یعنی

$$\mathcal{M}\{|\xi-\eta|\succeq x\}=\frac{۱}{۲}\left(\mathcal{M}\{|\xi-\eta|\geq x\}+۱-\mathcal{M}\{|\xi-\eta|<x\}\right). \qquad (۲۱۲.۸)$$

قضیه ۳۰.۸ [۱۰۲] *فرض کنید ξ و η دو مجموعه نایقین ناتهی هستند. آنگاه برای هر عدد حقیقی x، داریم*

$$\mathcal{M}\{|\xi-\eta|\succeq x\}=\frac{۱}{۲}\left(\sup_{|y|\ge x}\lambda(y)+۱-\sup_{|y|<x}\lambda(y)\right) \tag{۲۱۳.۸}$$

که در آن λ تابع عضویت $\xi-\eta$ است.

برهان: چون $\xi-\eta$ یک متغیر نایقین با تابع عضویت λ است، از فرمول معکوس اندازه نتیجه می‌شود که برای هر عدد حقیقی x داریم

$$\mathcal{M}\{|\xi-\eta|\ge x\}=۱-\sup_{|y|<x}\mu(y),$$
$$\mathcal{M}\{|\xi-\eta|<x\}=۱-\sup_{|y|\ge x}\mu(y).$$

حال معادله (۲۱۳.۸) با استفاده از (۲۱۲.۸) ثابت می‌شود.

قضیه ۳۱.۸ [۱۰۲] *فرض کنید ξ و η دو مجموعه نایقین ناتهی هستند. آنگاه فاصله بین ξ و η به صورت*

$$d(\xi,\eta)=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{+\infty}\left(\sup_{|y|\ge x}\lambda(y)+۱-\sup_{|y|<x}\lambda(y)\right)\mathrm{d}x \tag{۲۱۴.۸}$$

است که در آن λ تابع عضویت $\xi-\eta$ است.

برهان: قضیه بلافاصله از (۲۱۱.۸) و (۲۱۳.۸) نتیجه می‌شود.

تمرین ۴۶.۸: فرض کنید ξ یک مجموعه ناتهی با تابع عضویت μ و b یک عدد حقیقی است. نشان دهید فاصله بین ξ و b به صورت

$$d(\xi,b)=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{+\infty}\left(\sup_{|y-b|\ge x}\mu(y)+۱-\sup_{|y-b|<x}\mu(y)\right)\mathrm{d}x, \tag{۲۱۵.۸}$$

است.

تمرین ۴۷.۸: فرض کنید ξ و η دو مجموعه نایقین ناتهی به ترتیب با تابع‌های عضویت μ و ν هستند. فاصله بین ξ و η چقدر است

۱۱.۸ آنتروپی

این بخش آنتروپی را به عنوان درجه سختی پیش بینی تحقق یک مجموعه نایقین تعریف می‌کند.

تعریف ۱۵.۸ [۹۲] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین با تابع عضویت μ است. آنگاه آنتروپی آن با رابطه*

$$H[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty}S(\mu(x))\mathrm{d}x \tag{۲۱۶.۸}$$

تعریف می‌شود که در آن $S(t)=-t\ln t-(۱-t)\ln(۱-t)$.

تذکر ۱۲.۸: توجه کنید که آنتروپی (۲۱۶.۸) دقیقاً به همان شکل آنتروپی لوکا «Luca» و ترمینی «Termini» برای مجموعه‌های فازی است [۲۵].

تذکر ۱۳.۸: اگر ξ یک مجموعه نایقین گسسته با مقدارهای $\{x_۱, x_۲, \ldots\}$ باشد، آنگاه آنتروپی آن به صورت

$$H[\xi] = \sum_{i=۱}^{\infty} S(\mu(x_i)), \qquad (۲۱۷.۸)$$

است.

مثال ۳۶.۸: یک مجموعه نایقین A از اعداد حقیقی یک مجموعه نایقین خاص $\xi(\gamma) \equiv A$ است. تابع عضویت آن

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & x \in A \text{ اگر } \\ ۰, & x \notin A \text{ اگر } \end{cases}$$

و آنتروپی آن

$$H[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\mu(x))\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} ۰\,\mathrm{d}x = ۰,$$

است. یعنی آنتروپی مجموعه قطعی صفر است.

تمرین ۴۸.۸: فرض کنید $\xi = (a, b, c)$ یک مجموعه نایقین مثلثی است. نشان دهید آنتروپی آن به صورت

$$H[\xi] = \frac{c-a}{۲}, \qquad (۲۱۸.۸)$$

است.

تمرین ۴۹.۸: فرض کنید $\xi = (a, b, c, d)$ یک مجموعه نایقین ذوزنقه‌ای است. نشان دهید آنتروپی آن به صورت

$$H[\xi] = \frac{b-a+d-c}{۲}, \qquad (۲۱۹.۸)$$

است.

قضیه ۳۲.۸ *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین است. آنگاه $H[\xi] \geq ۰$ و تساوی وقتی برقرار است که ξ یک مجموعه قطعی باشد.*

برهان: نامنفی بودن بدیهی است. همچنین وقتی یک مجموعه نایقین به قطعی بودن نزدیک می‌شود، مقدار آنتروپی به کمترین مقدار خودش، ۰، میل می‌کند.

قضیه ۳۳.۸ *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین روی بازه $[a, b]$ است. آنگاه*

$$H[\xi] \leq (b-a)\ln ۲ \qquad (۲۲۰.۸)$$

و تساوی وقتی برقرار است که تابع عضویت ξ روی $[a, b]$ به صورت $\mu(x) = ۰/۵$ است.

برهان: قضیه از این واقعیت که مقدار بیشینه تابع $S(t)$ در $t = ۰/۵$ برابر $\ln ۲$ است، نتیجه می‌شود.

قضیه ۳۴.۸ *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین و ξ^c مکمل آن است. آنگاه*

$$H[\xi^c] = H[\xi]. \tag{۲۲۱.۸}$$

برهان: فرض کنید μ تابع عضویت ξ است. در این صورت $۱ - \mu(x)$ تابع عضویت ξ^c است. از تعریف آنتروپی نتیجه می‌شود که

$$H[\xi^c] = \int_{-\infty}^{+\infty} S\left(۱ - \mu(x)\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\mu(x)) \mathrm{d}x = H[\xi].$$

قضیه ثابت می‌شود.

۱۲.۸ تابع عضویت شرطی

تابع عضویت شرطی یک مجموعه نایقین ξ بعد از آن که متوجه شدیم که رویدادی مانند A رخ داده است، چیست؟ این بخش به این سوال پاسخ می‌دهد. ابتدا از تعریف اندازه نایقین شرطی نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi | A\} = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}\{(B \subset \xi) \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}, & \text{اگر } \dfrac{\mathcal{M}\{(B \subset \xi) \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} < ۰/۵ \\ ۱ - \dfrac{\mathcal{M}\{(B \not\subset \xi) \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}, & \text{اگر } \dfrac{\mathcal{M}\{(B \not\subset \xi) \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} < ۰/۵ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases}$$

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B | A\} = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi \subset B) \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}, & \text{اگر } \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi \subset B) \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} < ۰/۵ \\ ۱ - \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi \not\subset B) \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}}, & \text{اگر } \dfrac{\mathcal{M}\{(\xi \not\subset B) \cap A\}}{\mathcal{M}\{A\}} < ۰/۵ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت}. \end{cases}$$

تعریف ۱۶.۸ [۱۰۲] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین و A رویدادی با $\mathcal{M}\{A\} > ۰$ است. مجموعه نایقین شرطی ξ به شرط A تابع عضویت $\mu(x|A)$ دارد اگر برای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی، داشته باشیم*

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi | A\} = \inf_{x \in B} \mu(x|A), \tag{۲۲۲.۸}$$

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B | A\} = ۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x|A). \tag{۲۲۳.۸}$$

قضیه ۳۵.۸ [۱۹۶] *فرض کنید ξ یک مجموعه نایقین مرتب کلی و A یک رویداد با $\mathcal{M}\{A\} > ۰$ است. آنگاه تابع عضویت ξ به شرط A موجود است و*

$$\mu(x|A) = \mathcal{M}\{x \in \xi | A\}. \tag{۲۲۴.۸}$$

برهان: چون اندازه نایقین اصلی $\mathcal{M}$ پیوسته است، اندازه نایقین شرطی $\mathcal{M}\{\cdot|A\}$ نیز پیوسته است. پس مجموعه نایقین شرطی ξ به شرط A نیز یک مجموعه مرتب کلی روی یک فضای نایقینی پیوسته است. از قضیه ۹.۸ نتیجه می‌شود که تابع عضویت شرطی موجود است و $\mu(x|A) = \mathcal{M}\{x \in \xi|A\}$. برهان کامل است.

مثال ۳۷.۸: شرط ترتیب کلی در قضیه ۳۵.۸ را نمی‌توان حذف کرد. برای مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳, \gamma_۴\}$ همراه با مجموعه توانی و

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } \Lambda = \varnothing \\ ۱, & \text{اگر } \Lambda = \Gamma \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۲۲۵.۸}$$

است. در این صورت

$$\xi(\gamma) = \begin{cases} [۱, ۴], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۱ \\ [۱, ۳], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۲ \\ [۲, ۴], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۳ \\ [۲, ۳], & \text{اگر } \gamma = \gamma_۴ \end{cases} \tag{۲۲۶.۸}$$

یک مجموعه نایقین مرتب غیرکلی روی یک فضای نایقینی پیوسته است ولی تابع عضویت آن

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۲ \le x \le ۳ \\ ۰/۵, & \text{اگر } ۱ \le x < ۲ \text{ یا } ۳ < x \le ۴ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۲۲۷.۸}$$

است. با این حال اندازه نایقین شرطی با شرط $A = \{\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳\}$ به صورت

$$\mathcal{M}\{\Lambda|A\} = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } \Lambda \cap A = \varnothing \\ ۱, & \text{اگر } \Lambda \supset A \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۲۲۸.۸}$$

است. اگر مجموعه نایقین شرطی ξ به شرط A تابع عضویت داشته باشد، آنگاه

$$\mu(x|A) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۲ \le x \le ۳ \\ ۰/۵, & \text{اگر } ۱ \le x < ۲ \text{ یا } ۳ < x \le ۴ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۲۲۹.۸}$$

با فرض $B = [۱/۵, ۳/۵]$، داریم

$$\mathcal{M}\{\xi \subset B|A\} = \mathcal{M}\{\gamma_۴|A\} = ۰ \ne ۰/۵ = ۱ - \sup_{x \in B^c} \mu(x|A). \tag{۲۳۰.۸}$$

یعنی فرمول دوم معکوس اندازه برقرار نیست و بنابر این تابع اندازه شرطی وجود ندارد. پس شرط ترتیب کلی را نمی‌توان حذف کرد.

مثال ۳۸.۸: شرط پیوستگی در قضیه ۳۵.۸ را نمی‌توان حذف کرد. برای مثال، فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[\circ, ۱]$ همراه با مجموعه توانی و

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} \circ, & \text{اگر } \Lambda = \varnothing \\ ۱, & \text{اگر } \Lambda = \Gamma \\ \circ/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \qquad (۲۳۱.۸)$$

است. آنگاه

$$\xi(\gamma) = (-\gamma, \gamma), \quad \forall \gamma \in [\circ, ۱] \qquad (۲۳۲.۸)$$

یک مجموعه نایقین مرتب کلی روی یک فضای نایقینی ناپیوسته است ولی تابع عضویت زیر را دارد

$$\mu(x) = \begin{cases} \circ/۵, & \text{اگر } -۱ < x < ۱ \\ \circ, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \qquad (۲۳۳.۸)$$

با این حال، اندازه نایقین شرطی به شرط $A = (\circ, ۱)$ عبارت است از

$$\mathcal{M}\{\Lambda|A\} = \begin{cases} \circ, & \text{اگر } \Lambda \cap A = \varnothing \\ ۱, & \text{اگر } \Lambda \supset A \\ \circ/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \qquad (۲۳۴.۸)$$

اگر مجموعه نایقین ξ به شرط A تابع عضویت داشته باشد، آنگاه

$$\mu(x|A) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x = \circ \\ \circ/۵, & \text{اگر } ۱ > x > \circ \text{ یا } \circ > x > -۱ \\ \circ, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \qquad (۲۳۵.۸)$$

با در نظر گرفتن $B = (-۱, ۱)$ داریم

$$\mathcal{M}\{B \subset \xi|A\} = \mathcal{M}\{۱|A\} = \circ \neq \circ/۵ = \inf_{x\in B} \mu(x|A). \qquad (۲۳۶.۸)$$

یعنی فرمول اول معکوس اندازه برقرار نیست و بنابراین تابع عضویت شرطی وجود ندارد. پس شرط پیوستگی را نمی‌توان حذف کرد.

قضیه ۳۶.۸ [۸۹] و [۱۹۶] *فرض کنید ξ و η مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت μ و ν هستند. آنگاه برای هر عدد حقیقی a، مجموعه نایقین شرطی η به شرط $a \in \xi$ تابع عضویت*

$$\nu(y|a \in \xi) = \begin{cases} \dfrac{\nu(y)}{\mu(a)}, & \text{اگر } \nu(y) < \mu(a)/۲ \\ \dfrac{\nu(y) + \mu(a) - ۱}{\mu(a)}, & \text{اگر } \nu(y) > ۱ - \mu(a)/۲ \\ \circ/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \qquad (۲۳۷.۸)$$

دارد.

برهان: برای اثبات این که $\nu(y|a \in \xi)$ تابع عضویت مجموعه نایقین شرطی η به شرط $a \in \xi$ است، باید برقراری دو فرمول معکوس اندازه را

$$\mathcal{M}\{B \subset \eta | a \in \xi\} = \inf_{y \in B} \nu(y|a \in \xi), \tag{۲۳۸.۸}$$

$$\mathcal{M}\{\eta \subset B | a \in \xi\} = ۱ - \sup_{y \in B^c} \nu(y|a \in \xi). \tag{۲۳۹.۸}$$

تحقیق کنیم. ابتدا برای یک مجموعه بورل B از اعداد حقیقی، با استفاده از تعریف نایقینی شرطی و استقلال ξ و η، داریم

$$\mathcal{M}\{B \subset \eta | a \in \xi\} = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}\{B \subset \eta\}}{\mathcal{M}\{a \in \xi\}}, & \text{اگر } \dfrac{\mathcal{M}\{B \subset \eta\}}{\mathcal{M}\{a \in \xi\}} < ۰/۵ \\ ۱ - \dfrac{\mathcal{M}\{B \not\subset \eta\}}{\mathcal{M}\{a \in \xi\}}, & \text{اگر } \dfrac{\mathcal{M}\{B \not\subset \eta\}}{\mathcal{M}\{a \in \xi\}} < ۰/۵ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت}. \end{cases}$$

چون

$$\mathcal{M}\{B \subset \eta\} = \inf_{y \in B} \nu(y), \quad \mathcal{M}\{B \not\subset \eta\} = ۱ - \inf_{y \in B} \nu(y), \quad \mathcal{M}\{a \in \xi\} = \mu(a),$$

داریم

$$\mathcal{M}\{B \subset \eta | a \in \xi\} = \begin{cases} \dfrac{\inf_{y \in B} \nu(y)}{\mu(a)}, & \text{اگر } \inf_{y \in B} \nu(y) < \mu(a)/۲ \\ \dfrac{\inf_{y \in B} \nu(y) + \mu(a) - ۱}{\mu(a)}, & \text{اگر } \inf_{y \in B} \nu(y) > ۱ - \mu(a)/۲ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

یعنی

$$\mathcal{M}\{B \subset \eta | a \in \xi\} = \inf_{y \in B} \nu(y|a \in \xi).$$

به این ترتیب برقراری اولین فرمول عکس اندازه تحقیق شد. حال، با استفاده از تعریف نایقینی شرطی و استقلال ξ و η، داریم

$$\mathcal{M}\{\eta \subset B | a \in \xi\} = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{M}\{\eta \subset B\}}{\mathcal{M}\{a \in \xi\}}, & \text{اگر } \dfrac{\mathcal{M}\{\eta \subset B\}}{\mathcal{M}\{a \in \xi\}} < ۰/۵ \\ ۱ - \dfrac{\mathcal{M}\{\eta \not\subset B\}}{\mathcal{M}\{a \in \xi\}}, & \text{اگر } \dfrac{\mathcal{M}\{\eta \not\subset B\}}{\mathcal{M}\{a \in \xi\}} < ۰/۵ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت}. \end{cases}$$

چون

$$\mathcal{M}\{\eta \subset B\} = ۱ - \sup_{y \in B^c} \nu(y), \quad \mathcal{M}\{\eta \not\subset B\} = \sup_{y \in B^c} \nu(y), \quad \mathcal{M}\{a \in \xi\} = \mu(a),$$

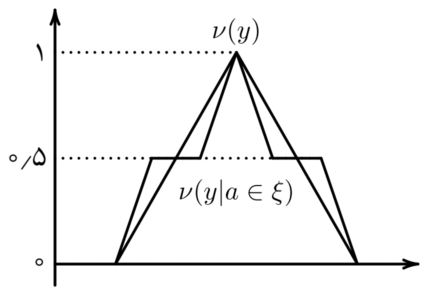
داریم

$$\mathcal{M}\{\eta \subset B|a \in \xi\} = \begin{cases} \dfrac{۱ - \sup\limits_{y \in B^c} \nu(y)}{\mu(a)}, & \text{اگر } \sup\limits_{y \in B^c} \nu(y) > ۱ - \mu(a)/۲ \\ \dfrac{\mu(a) - \sup\limits_{y \in B^c} \nu(y)}{\mu(a)}, & \text{اگر } \sup\limits_{y \in B^c} \nu(y) < \mu(a)/۲ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

یعنی

$$\mathcal{M}\{\eta \subset B|a \in \xi\} = ۱ - \sup_{y \in B^c} \nu(y|a \in \xi).$$

برقراری دومین فرمول معکوس اندازه نیز بررسی شد. پس $\nu(y|a \in \xi)$ تابع عضویت مجموعه نایقین شرطی η به شرط $a \in \xi$ است.



شکل ۱۴.۸: تابع‌های عضویت $\nu(y)$ و $\nu(y|a \in \xi)$.

تمرین ۵۰.۸: فرض کنید $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_m, \eta$ مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_m, \nu$ هستند. برای اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, \ldots, a_m$، نشان دهید مجموعه نایقین شرطی η به شرط $a_۱ \in \xi_۱, a_۲ \in \xi_۲, \ldots, a_m \in \xi_m$ تابع عضویت

$$\nu^*(y) = \begin{cases} \dfrac{\nu(y)}{\min\limits_{۱ \le i \le m} \mu_i(a_i)}, & \text{اگر } \nu(y) < \min\limits_{۱ \le i \le m} \mu_i(a_i)/۲ \\ \dfrac{\nu(y) + \min\limits_{۱ \le i \le m} \mu_i(a_i) - ۱}{\min\limits_{۱ \le i \le m} \mu_i(a_i)}, & \text{اگر } \nu(y) > ۱ - \min\limits_{۱ \le i \le m} \mu_i(a_i)/۲ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

دارد.

۱۳.۸ نکات کتابشناسی

برای مدل سازی مفاهیم نادقیق مانند «جوان»، «بلند قد» و «اغلب»، مجموعه نایقین توسط لیو در سال ۲۰۱۰ معرفی شد [۸۹]. سپس در سال ۲۰۱۲ تابع عضویت برای توصیف مجموعه‌های نایقین توسط

لیو مطرح شد[۹۵]. توجه کنید که همه مجموعه‌های نایقین تابع عضویت ندارند. لیو ثابت کرد که مجموعه‌های مرتب کلی روی فضاهای نایقین پیوسته همواره تابع عضویت دارند [۱۰۵]. لیو همچنین مجموعه‌های نایقین مستقل را تعریف کرد [۹۸] و قاعده عملیاتی را بر حسب تابع‌های عضویت به وجود آورد. یائو فرمولی برای محاسبه اندازه نایقین رابطه شمول بین مجموعه‌های نایقین را استخراج کرد [۱۸۹].

مقدار مورد انتظار یک مجموعه نایقین توسط لیو تعریف شد [۸۹] و بعد فرمولی برای محاسبه مقدار مورد انتظار با استفاده از تابع عضویت ارائه داد [۹۱] و لیو فرمولی برای تابع عضویت معکوس مطرح کرد [۹۵]. بر مبنای عملگر مقدار مورد انتظار، لیو مفهوم واریانس و فاصله بین مجموعه‌های نایقین را مطرح کرد [۹۲] و یانگ ـ گائو نیز گشتاورهای مجموعه نایقین را مطالعه کردند[۱۶۸] .

آنتروپی توسط لیو به عنوان درجه‌ای برای پیش بینی تحقق یک مجموعه نایقین معرفی شد [۹۲] و نحوه محاسبه مقدار آنتروپی توسط یائو ـ کی بیان شد[۱۸۴].

مجموعه نایقین شرطی ابتدا توسط لیو بررسی شد [۸۹]و تابع عضویت شرطی توسط لیو تعریف شد [۱۰۲]. برخی ملاک‌ها برای تصمیم گیری در مورد وجود تابع عضویت شرطی نیز توسط یائو ارائه شدند [۱۹۶].

فصل ۹

منطق نایقین

منطق نایقین ابزاری برای مشخص کردن ارزش گزاره‌ها با استفاده از مفهوم مجموعه نایقین است. این فصل داده صفت فردی، سور نایقین، نهاد نایقین، مُسند نایقین، گزاره نایقین و ارزش درستی را معرفی می‌کند. منطق نایقین ابزارهای انعطاف پذیری را برای استخراج خلاصه زبانی از گردایه داده‌های خام فراهم می‌آورد.

۱.۹ داده خصیصه فردی

ابتدا باید مجموعه مرجع A از اشخاص داشته باشیم که می‌خواهیم در مورد آنها صحبت کنیم. می‌توان فرض کرد که A شامل n شخص متمایز است و به صورت

$$A = \{a_۱, a_۲, \dots, a_n\} \tag{۱.۹}$$

نشان داده می‌شود. برای کار کردن با مجموعه مرجع A برای تمامی اشخاص $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ به داده‌های خصیصه‌ای نیاز داریم. وقتی می‌گوییم «این روزها هوا گرم است» از داده خصیصه‌ای روزها اطلاع داریم، برای مثال

$$A = \{۲۲,\ ۲۳,\ ۲۵,\ ۲۸,\ ۳۰,\ ۳۲,\ ۳۶\} \tag{۲.۹}$$

که اعضای این مجموعه، دمای هوا بر حسب درجه سانتیگراد است. وقتی در باره «آن دانشجویان جوان هستند» صحبت می‌کنیم، از داده خصیصه‌ای همه دانشجویان اطلاع داریم، برای مثال

$$A = \{۲۱,\ ۲۲,\ ۲۲,\ ۲۳,\ ۲۴,\ ۲۵,\ ۲۶,\ ۲۷,\ ۲۸,\ ۳۰,\ ۳۲,\ ۳۵,\ ۳۶,\ ۳۸,\ ۴۰\} \tag{۳.۹}$$

که اعضای این مجموعه، سن دانشجویان بر حسب سال است. وقتی در باره «این ورزشکاران قد بلند هستند» صحبت می‌کنیم، از داده خصیصه‌ای همه ورزشکاران اطلاع داریم، برای مثال

$$A = \left\{\begin{array}{l} ۱۷۵,\ ۱۷۸,\ ۱۷۸,\ ۱۸۰,\ ۱۸۳,\ ۱۸۴,\ ۱۸۶,\ ۱۸۶ \\ ۱۸۸,\ ۱۹۰,\ ۱۹۲,\ ۱۹۲,\ ۱۹۳,\ ۱۹۴,\ ۱۹۵,\ ۱۹۶ \end{array}\right\} \tag{۴.۹}$$

که اعضای این مجموعه، قد ورزشکاران بر حسب سانتیمتر هستند.

گاهی داده خصیصه‌ای اشخاص به جای عدد اسکالر با بردار نشان داده می‌شود. وقتی در باره «آن دانشجویان جوان و بلند قد هستند» صحبت می‌کنیم، از داده خصیصه‌ای همه دانشجویان آگاه هستیم، مثلاً

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (۲۴, ۱۸۵), (۲۵, ۱۹۰), (۲۶, ۱۸۴), (۲۶, ۱۷۰), (۲۷, ۱۸۷), (۲۷, ۱۸۸) \\ (۲۸, ۱۶۰), (۳۰, ۱۹۰), (۳۲, ۱۸۵), (۳۳, ۱۷۶), (۳۵, ۱۸۵), (۳۶, ۱۸۸) \\ (۳۸, ۱۶۴), (۳۸, ۱۷۸), (۳۹, ۱۸۲), (۴۰, ۱۸۶), (۴۲, ۱۶۵), (۴۴, ۱۷۰) \end{array} \right\} \quad (۵.۹)$$

که اعضای این مجموعه دوتایی‌های مرتب هستند که مولفه اول سن بر حسب سال و مولفه دوم قد بر حسب سانتیمتر را نشان می‌دهند.

۲.۹ سور نایقین

اگر بخواهیم همه اعضای مجموعه مرجع A را نمایش دهیم، از سور عمومی ($\forall$) استفاده می‌کنیم و

$$\forall = \text{«برای هر»}. \quad (۶.۹)$$

اگر بخواهیم برخی (حداقل یک) شخص از A را نمایش دهیم از سور وجودی ($\exists$) استفاده می‌کنیم و

$$\exists = \text{«حداقل یک شخص وجود دارد»}. \quad (۷.۹)$$

علاوه بر این دو سور، سورهای نادقیق زیادی در زبان بشری وجود دارد، مثلاً *تقریباً* همه، *تقریباً هیچکدام*، *بسیاری*، *چند*، *تعدادی*، *اغلب*، *اندکی*، *حدود نصف*. این بخش آنها را با استفاده از سور نایقین مدل‌بندی می‌کند.

تعریف ۱.۹ [۹۲] *سور نایقین یک مجموعه نایقین است که تعداد اشخاص را نشان می‌دهد.*

مثال ۱.۹: سور عمومی ($\forall$) روی مجموعه مرجع A سور نایقین خاص

$$\forall \equiv \{n\} \quad (۸.۹)$$

است، که تابع عضویت آن

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x = n \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \quad (۹.۹)$$

است.

مثال ۲.۹: سور وجودی ($\exists$) روی مجموعه مرجع A سور نایقین خاص

$$\exists \equiv \{۱, ۲, \ldots, n\} \quad (۱۰.۹)$$

است، که تابع عضویت آن

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x = ۰ \\ ۱, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \quad (۱۱.۹)$$

است.

مثال ۳.۹: سور «عضوی وجود ندارد» روی مجموعه مرجع A سور نایقین خاص

$$\mathcal{Q} \equiv \{۰\} \tag{۱۲.۹}$$

است، که تابع عضویت آن

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۱, & x = ۰ \text{ اگر } \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۱۳.۹}$$

است.

مثال ۴.۹: سور «دقیقاً m عضو وجود دارند» روی مجموعه مرجع A سور خاص

$$\mathcal{Q} \equiv \{m\} \tag{۱۴.۹}$$

است، که تابع عضویت آن

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۱, & x = m \text{ اگر } \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۱۵.۹}$$

است.

مثال ۵.۹: سور «حداقل m عضو وجود دارند» روی مجموعه مرجع A سور خاص

$$\mathcal{Q} \equiv \{m, m+۱, \ldots, n\} \tag{۱۶.۹}$$

است، که تابع عضویت آن

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۱, & m \le x \le n \text{ اگر } \\ ۰, & ۰ \le x < m \text{ اگر } \end{cases} \tag{۱۷.۹}$$

است.

مثال ۶.۹: سور «حداکثر m عضو وجود دارند» روی مجموعه مرجع A سور خاص

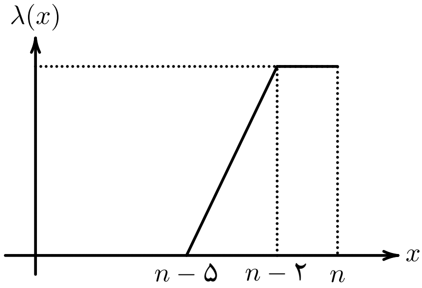
$$\mathcal{Q} \equiv \{۰, ۱, ۲, \ldots, m\} \tag{۱۸.۹}$$

است، که تابع عضویت آن

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۱, & ۰ \le x \le m \text{ اگر } \\ ۰, & m < x \le n \text{ اگر } \end{cases} \tag{۱۹.۹}$$

مثال ۷.۹: سور نایقین $\mathcal{Q}$ «تقریباً همه» روی مجموعه مرجع A ممکن است تابع عضویتی به صورت

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۰, & ۰ \le x \le n-۵ \text{ اگر } \\ (x-n+۵)/۳, & n-۵ \le x \le n-۲ \text{ اگر } \\ ۱, & n-۲ \le x \le n \text{ اگر } \end{cases} \tag{۲۰.۹}$$



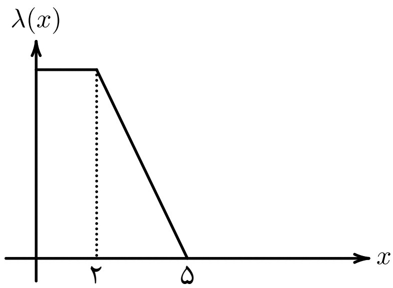
شکل ۱.۹: تابع عضویت سور «تقریباً همه».

داشته باشد.

مثال ۸.۹: سور نایقین $\mathbb{Q}$ «تقریباً هیچ» روی مجموعه مرجع A ممکن است تابع عضویتی به صورت

$$\lambda(x)=\begin{cases} ۱, & ۰\le x\le ۲ \text{ اگر} \\ (۵-x)/۳, & ۲\le x\le ۵ \text{ اگر} \\ ۰, & ۵\le x\le n \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۲۱.۹)$$

داشته باشد.

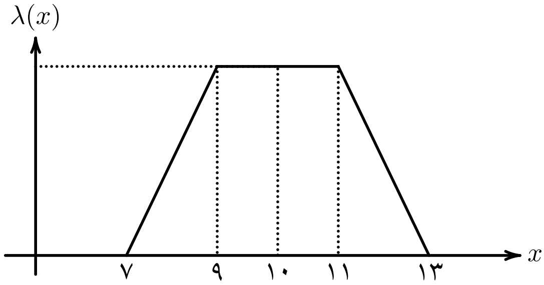


شکل ۲.۹: تابع عضویت سور «تقریباً هیچ».

مثال ۹.۹: سور نایقین $\mathbb{Q}$ «تقریباً ۱۰» روی مجموعه مرجع A ممکن است تابع عضویتی به صورت

$$\lambda(x)=\begin{cases} ۰, & ۰\le x\le ۷ \text{ اگر} \\ (x-۷)/۲, & ۷\le x\le ۹ \text{ اگر} \\ ۱, & ۹\le x\le ۱۱ \text{ اگر} \\ (۱۳-x)/۲, & ۱۱\le x\le ۱۳ \text{ اگر} \\ ۰, & ۱۳\le x\le n \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۲۲.۹)$$

داشته باشد.

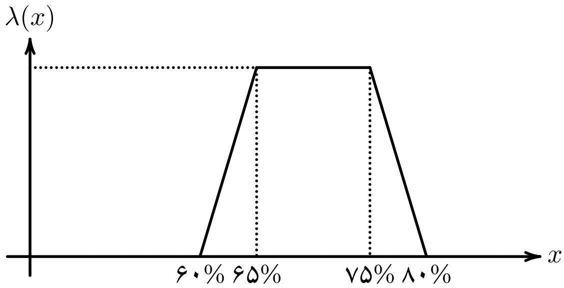


شکل ۳.۹: تابع عضویت سور «تقریباً ۱۰».

مثال ۱۰.۹: در بسیاری از حالت‌ها، استفاده از درصد به جای مقدار مطلق مناسبتر است. برای مثال، ممکن است از سور نایقین $\mathcal{Q}$ «تقریباً ۷۰%» استفاده کنیم. در این حالت یک تابع عضویت بالقوه $\mathcal{Q}$ به صورت

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } ۰ \leq x \leq ۰٫۶ \\ ۲۰(x - ۰٫۶), & \text{اگر } ۰٫۶ \leq x \leq ۰٫۶۵ \\ ۱, & \text{اگر } ۰٫۶۵ \leq x \leq ۰٫۷۵ \\ ۲۰(۰٫۸ - x), & \text{اگر } ۰٫۷۵ \leq x \leq ۰٫۸ \\ ۰, & \text{اگر } ۰٫۸ \leq x \leq ۱ \end{cases} \qquad (۲۳.۹)$$

است.



شکل ۴.۹: تابع عضویت سور $\mathcal{Q}$ «تقریباً ۷۰%».

تعریف ۲.۹ *یک سور نایقین را تک‌مدولی گویند اگر تابع عضویت آن تک‌مدولی باشد.*

مثال ۱۱.۹: سورهای نایقین «تقریباً همه»، «تقریباً هیچ»، «تقریباً ۱۰» و «تقریباً ۷۰%» تک‌مدولی هستند.

تعریف ۳.۹ *یک سور نایقین را یکنوا گویند هرگاه تابع عضویت آن یکنوا باشد. به خصوص، یک سور نایقین را افزایشی گویند اگر تابع عضویت آن افزایشی باشد و آن را کاهشی گویند هرگاه تابع عضویت آن کاهشی باشد.*

سورهای نایقین «تقریباًهمه» و «تقریباً هیچ» یکنوا هستند در حالی که سورهای «حدود ۱۰» و «حدود ۷۰%» یکنوا نیستند. توجه داشته باشید که سورهای نایقین افزایشی و کاهشی یکنوا هستند. همچنین سورهای یکنوا تک‌مدولی هستند.

نقیض سور

نقیض یک سور نایقین چیست؟ تعریف بعدی یک جواب رسمی برای این سوال است.

تعریف ۴.۹ [۹۲] *فرض کنید $\mathbb{Q}$ یک سور نایقین است. در این صورت سور نقیض $\neg\mathbb{Q}$ مکمل $\mathbb{Q}$ به مفهوم مجموعه نایقین است، یعنی*

$$\neg\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^c. \tag{۲۴.۹}$$

مثال ۱۲.۹: سور عمومی $\forall = \{n\}$ را در نظر بگیرید. نقیض شده آن

$$\neg\forall \equiv \{۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱\} \tag{۲۵.۹}$$

است.

مثال ۱۳.۹: سور وجودی $\exists = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ را در نظر بگیرید. نقیض شده آن

$$\neg\exists \equiv \{۰\} \tag{۲۶.۹}$$

است.

قضیه ۱.۹ *سور نایقین $\mathbb{Q}$ را درنظر بگیرید که تابع عضویت آن λ است. آنگاه تابع عضویت سور نقیض شده $\neg\mathbb{Q}$*

$$\neg\lambda(x) = ۱ - \lambda(x) \tag{۲۷.۹}$$

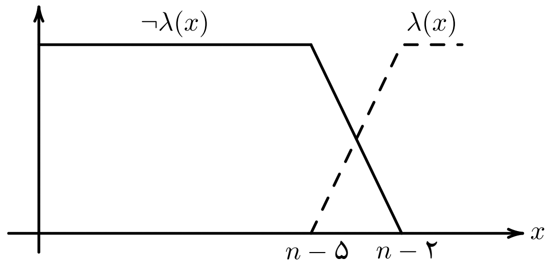
است.

برهان: قضیه مستقیماً از قاعده عملیاتی مجموعه نایقین نتیجه می‌شود.

مثال ۱۴.۹: فرض کنید $\mathbb{Q}$ سور نایقین «تقریباًهمه» است که با (۲۰.۹) تعریف شده است. تابع عضویت سور نقیض شده $\neg\mathbb{Q}$

$$\neg\lambda(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۰ \le x \le n - ۵ \\ (n - x - ۲)/۳, & \text{اگر } n - ۵ \le x \le n - ۲ \\ ۰, & \text{اگر } n - ۲ \le x \le n \end{cases} \tag{۲۸.۹}$$

است.

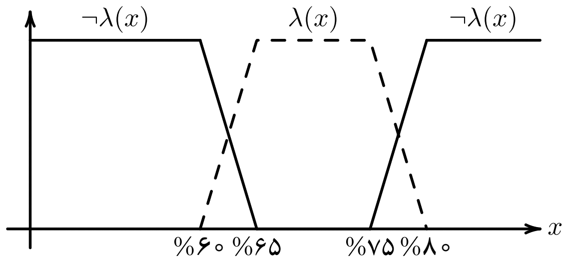


شکل ۵.۹: تابع عضویت سور نقیض شده «تقریباً همه».

مثال ۱۵.۹: فرض کنید Q سور نایقین «حدود ۷۰%» است که با (۲۳.۹) تعریف شده است. تابع عضویت سور نقیض شده $\neg Q$

$$\neg\lambda(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۰ \le x \le ۰/۶ \\ ۲۰(۰/۶۵ - x), & \text{اگر } ۰/۶ \le x \le ۰/۶۵ \\ ۰, & \text{اگر } ۰/۶۵ \le x \le ۰/۷۵ \\ ۲۰(x - ۰/۷۵), & \text{اگر } ۰/۷۵ \le x \le ۰/۸ \\ ۱, & \text{اگر } ۰/۸ \le x \le ۱ \end{cases} \quad (۲۹.۹)$$

است.



شکل ۶.۹: تابع عضویت سور نقیض شده «حدود ۷۰%».

قضیه ۲.۹ *فرض کنید Q یک سور نایقین است. در این صورت $\neg\neg Q = Q$.*

برهان: قضیه از $\neg\neg Q = \neg Q^c = (Q^c)^c = Q$ نتیجه می‌شود.

قضیه ۳.۹ *اگر Q یک سور نایقین یکنوا باشد آنگاه $\neg Q$ نیز یکنوا است. مخصوصاً اگر Q افزایشی باشد آنگاه $\neg Q$ کاهشی است و اگر Q کاهشی باشد آنگاه $\neg Q$ افزایشی است.*

برهان: فرض کنید λ تابع عضویت Q است. آنگاه $۱ - \lambda(x)$ تابع عضویت $\neg Q$ است. قضیه مستقیماً از این واقعیت نتیجه می‌شود.

سور دوگان

تعریف ۵.۹ [۹۲] *فرض کنید $\mathcal{Q}$ یک سور نایقین است. در این صورت دوگان $\mathcal{Q}$ به صورت*

$$\mathcal{Q}^* = \forall - \mathcal{Q} \tag{۳۰.۹}$$

است.

تذکر ۱.۹: توجه کنید که $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{Q}^*$ مجموعه‌های نایقین وابسته هستد و $\mathcal{Q} + \mathcal{Q}^* \equiv \forall$. چون تعداد اعضای مجموعه مرجع n است، داریم

$$\mathcal{Q}^* = \{n\} - \mathcal{Q}. \tag{۳۱.۹}$$

مثال ۱۶.۹: چون $\forall \equiv \{n\}$، داریم $\forall^* = \{۰\} = \neg\exists$. یعنی

$$\forall^* \equiv \neg\exists. \tag{۳۲.۹}$$

مثال ۱۷.۹: چون $\neg\forall = \{۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱\}$، داریم $(\neg\forall)^* = \{۱, ۲, \ldots, n\} = \exists$. یعنی

$$(\neg\forall)^* \equiv \exists. \tag{۳۳.۹}$$

مثال ۱۸.۹: چون $\exists \equiv \{۱, ۲, \ldots, n\}$، داریم $\exists^* = \{۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱\} = \neg\forall$. یعنی

$$\exists^* \equiv \neg\forall. \tag{۳۴.۹}$$

مثال ۱۹.۹: چون $\neg\exists = \{۰\}$، داریم $(\neg\exists)^* = \{n\} = \forall$. یعنی

$$(\neg\exists)^* = \forall. \tag{۳۵.۹}$$

قضیه ۴.۹ *فرض کنید $\mathcal{Q}$ یک سور نایقین با تابع عضویت λ است. در این صورت تابع عضویت دوگان آن $\mathcal{Q}^*$*

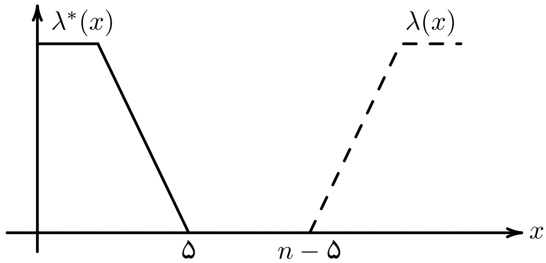
$$\lambda^*(x) = \lambda(n - x) \tag{۳۶.۹}$$

است که در آن n تعداد اعضای A است.

برهان: این قضیه مستقیماً از قاعده عملیاتی مجموعه نایقین نتیجه می‌شود.

مثال ۲۰.۹: فرض کنید $\mathcal{Q}$ سور نایقین «تقریباً همه» است که با (۲۰.۹) تعریف شده است. در این صورت تابع عضویت سور دوگان $\mathcal{Q}^*$

$$\lambda^*(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۰ \le x \le ۲ \\ (۵ - x)/۳, & \text{اگر } ۲ \le x \le ۵ \\ ۰, & \text{اگر } ۵ \le x \le n \end{cases} \tag{۳۷.۹}$$



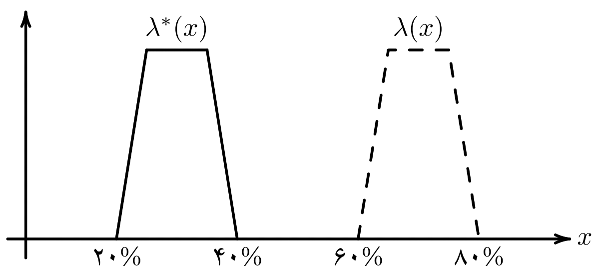
شکل ۷.۹: تابع عضویت سور دوگان «تقریباً همه».

است.

مثال ۲۱.۹: فرض کنید $\mathcal{Q}$ سور نایقین «حدود ۷۰%» است که با (۲۳.۹) تعریف شده است. در این صورت تابع عضویت سور دوگان $\mathcal{Q}^*$

$$\lambda^*(x) = \begin{cases} \text{۰}, & \text{اگر } \text{۰} \le x \le \text{۰٫۲} \\ \text{۲۰}(x - \text{۰٫۲}), & \text{اگر } \text{۰٫۲} \le x \le \text{۰٫۲۵} \\ \text{۱}, & \text{اگر } \text{۰٫۲۵} \le x \le \text{۰٫۳۵} \\ \text{۲۰}(\text{۰٫۴} - x), & \text{اگر } \text{۰٫۳۵} \le x \le \text{۰٫۴} \\ \text{۰}, & \text{اگر } \text{۰٫۴} \le x \le \text{۱} \end{cases} \qquad (\text{۳۸.۹})$$

است.



شکل ۸.۹: تابع عضویت سور دوگان «حدود ۷۰%».

قضیه ۵.۹ *فرض کنید $\mathcal{Q}$ یک سور نایقین است. آنگاه $\mathcal{Q}^{**} = \mathcal{Q}$.*

برهان: قضیه از $\mathcal{Q}^{**} = \forall - \mathcal{Q}^* = \forall - (\forall - \mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ نتیجه می‌شود.

قضیه ۶.۹ *اگر $\mathcal{Q}$ یک سور نایقین تک‌مدولی باشد آنگاه $\mathcal{Q}^*$ نیز تک‌مدولی است. مخصوصاً اگر $\mathcal{Q}$ یکنوا باشد آنگاه $\mathcal{Q}^*$ یکنوا است؛ اگر $\mathcal{Q}$ افزایشی باشد آنگاه $\mathcal{Q}^*$ کاهشی است؛ اگر $\mathcal{Q}$ کاهشی باشد آنگاه $\mathcal{Q}^*$ افزایشی است.*

برهان: فرض کنید λ تابع عضویت $\mathcal{Q}$ است. قضیه از این واقعیت نتیجه می‌شود که $\lambda(n-x)$ تابع عضویت $\mathcal{Q}^*$ است.

۳.۹ نهاد نایقین

گاهی به زیرمجموعه‌ای از مجموعه مرجع اشخاص علاقه داریم، برای مثال «روزهای گرم»، «دانشجویان جوان» و «ورزشکاران بلند قامت». این بخش چنین مفاهیمی را با استفاده از مفهوم نهاد نایقین مدل‌بندی می‌کند.

تعریف ۶.۹ [۹۲] *نهاد نایقین یک مجموعه نایقین شامل تعداد معینی از اشخاص مجموعه مرجع است.*

مثال ۲۲.۹: «دوباره این روزها گرم هستند» جمله‌ای است که نهاد آن «روزهای گرم» است و یک مجموعه نایقین از مجموعه مرجع «همه روزها» است و ممکن است تابع عضویتی به صورت

$$\nu(x)=\begin{cases} ۰, & \text{اگر } x\le ۱۵\\ (x-۱۵)/۳, & \text{اگر } ۱۵\le x\le ۱۸\\ ۱, & \text{اگر } ۱۸\le x\le ۲۴\\ (۲۸-x)/۴, & \text{اگر } ۲۴\le x\le ۲۸\\ ۰, & \text{اگر } ۲۸\le x\end{cases} \tag{۳۹.۹}$$

داشته باشد.

مثال ۲۳.۹: «دانشجویان جوان بلند قامت هستند» جمله‌ای است که «دانشجویان جوان» نهاد آن است و یک مجموعه نایقین از مجموعه مرجع «همه دانشجویان» است و ممکن است تابع عضویتی به صورت

$$\nu(x)=\begin{cases} ۰, & \text{اگر } x\le ۱۵\\ (x-۱۵)/۵, & \text{اگر } ۱۵\le x\le ۲۰\\ ۱, & \text{اگر } ۲۰\le x\le ۳۵\\ (۴۵-x)/۱۰, & \text{اگر } ۳۵\le x\le ۴۵\\ ۰, & \text{اگر } x\ge ۴۵\end{cases} \tag{۴۰.۹}$$

داشته باشد.

مثال ۲۴.۹: «دانشجویان بلند قامت سنگین وزن هستند» جمله‌ای است که نهاد آن «دانشجویان بلند قامت» است و یک مجموعه نایقین از مجموعه مرجع «همه دانشجویان» است و ممکن است تابع عضویتی به صورت

$$\nu(x)=\begin{cases} ۰, & \text{اگر } x\le ۱۸۰\\ (x-۱۸۰)/۵, & \text{اگر } ۱۸۰\le x\le ۱۸۵\\ ۱, & \text{اگر } ۱۸۵\le x\le ۱۹۵\\ (۲۰۰-x)/۵, & \text{اگر } ۱۹۵\le x\le ۲۰۰\\ ۰, & \text{اگر } x\ge ۲۰۰\end{cases} \tag{۴۱.۹}$$

داشته باشد.

فرض کنید S یک نهاد نایقین با تابع عضویت ν روی مجموعه مرجع $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ از اشخاص متمایز است. در این صورت S یک مجموعه نایقین روی A است که

$$\mathcal{M}\{a_i \in S\} = \nu(a_i), \quad i = ۱, ۲, \ldots, n. \qquad (۴۲.۹)$$

در بسیاری از حالت‌ها، به اشخاص معین a با $\nu(a) \geq \omega$ که در آن ω سطح اطمینان است علاقمندیم. در این صورت مجموعه زیرمرجع

$$S_\omega = \{a \in A \,|\, \nu(a) \geq \omega\} \qquad (۴۳.۹)$$

را داریم که خود یک مجموعه مرجع جدید برای اشخاصی است که در مورد آنها صحبت می‌کنیم و اشخاصی را که با سطح اطمینان ω خارج از S_ω قرار دارند، نادیده می‌گیریم.

قضیه ۷.۹ *فرض کنید $\omega_۱$ و $\omega_۲$ سطح‌های اطمینان با $\omega_۱ > \omega_۲$ هستند و $S_{\omega_۱}$ و $S_{\omega_۲}$ را زیرمرجع‌هایی به ترتیب با سطح‌های اطمینان $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نظر بگیرید. آنگاه*

$$S_{\omega_۱} \subset S_{\omega_۲}. \qquad (۴۴.۹)$$

یعنی S_ω نسبت به ω یک دنباله نزولی از مجموعه‌ها است.

برهان: اگر $a \in S_{\omega_۱}$، آنگاه $\nu(a) \geq \omega_۱ > \omega_۲$. پس $a \in S_{\omega_۲}$. بنابراین $S_{\omega_۱} \subset S_{\omega_۲}$. توجه کنید که ممکن است $S_{\omega_۱}$ و $S_{\omega_۲}$ تهی باشند.

۴.۹ مُسند نایقین

مسندهای نایقین متعددی در زبان بشری وجود دارند، برای مثال «گرم»، «سرد»، «داغ»، «جوان»، «پیر»، «بلند»، «کوچک» و «بزرگ». این بخش چنین مواردی را با استفاده از مفهوم مسند نایقین مدل‌بندی می‌کند.

تعریف ۷.۹ [۹۲] *مسند نایقین یک مجموعه نایقین است و بیانگر خاصیتی است که در تعدادی از اشخاص مشترک است.*

مثال ۲۵.۹: «امروز گرم است» جمله‌ای است که در آن «گرم» یک مسند نایقین است و ممکن است با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & x \leq ۱۵ \text{ اگر} \\ (x - ۱۵)/۳, & ۱۵ \leq x \leq ۱۸ \text{ اگر} \\ ۱, & ۱۸ \leq x \leq ۲۴ \text{ اگر} \\ (۲۸ - x)/۴, & ۲۴ \leq x \leq ۲۸ \text{ اگر} \\ ۰, & ۲۸ \leq x \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۴۵.۹)$$

نشان داده شود.

مثال ۲۶.۹: «رضا جوان است» جمله‌ای است که در آن «جوان» یک مسند نایقین است و ممکن است با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & x \leq ۱۵ \text{ اگر} \\ (x - ۱۵)/۵, & ۱۵ \leq x \leq ۲۰ \text{ اگر} \\ ۱, & ۲۰ \leq x \leq ۳۵ \text{ اگر} \\ (۴۵ - x)/۱۰, & ۳۵ \leq x \leq ۴۵ \text{ اگر} \\ ۰, & x \geq ۴۵ \text{ اگر} \end{cases} \quad (۴۶.۹)$$

نشان داده شود.

مثال ۲۷.۹: «جان بلند قامت است» جمله‌ای است که در آن «بلند» یک مسند نایقین است و ممکن است با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & x \leq ۱۸۰ \text{ اگر} \\ (x - ۱۸۰)/۵, & ۱۸۰ \leq x \leq ۱۸۵ \text{ اگر} \\ ۱, & ۱۸۵ \leq x \leq ۱۹۵ \text{ اگر} \\ (۲۰۰ - x)/۵, & ۱۹۵ \leq x \leq ۲۰۰ \text{ اگر} \\ ۰, & x \geq ۲۰۰ \text{ اگر} \end{cases} \quad (۴۷.۹)$$

نشان داده شود.

مُسند نقیض شده

تعریف ۸.۹ [۹۲] *فرض کنید P یک مسند نایقین است. مسند نقیض شده آن $\neg P$ مکمل P به مفهوم مجموعه نایقین است، یعنی*

$$\neg P = P^c. \quad (۴۸.۹)$$

قضیه ۸.۹ *فرض کنید P یک مسند نایقین با تابع عضویت μ است. در این صورت تابع عضویت مسند نقیض شده $\neg P$*

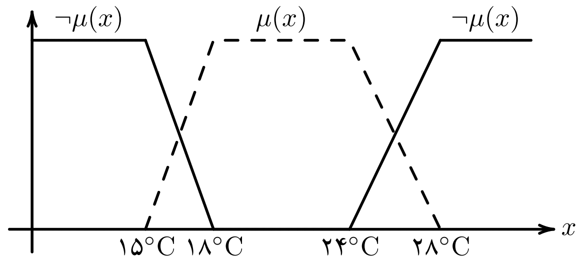
$$\neg\mu(x) = ۱ - \mu(x), \quad (۴۹.۹)$$

است.

برهان: قضیه مستقیماً از تعریف مسند نقیض شده و قاعده عملیاتی مجموعه نایقین نتیجه می‌شود.

مثال ۲۸.۹: فرض کنید P مسند نایقین «گرم» است که با (۴۵.۹) تعریف شده است. در این صورت تابع عضویت مسند نقیض شده $\neg P$

$$\neg\mu(x) = \begin{cases} ۱, & x \leq ۱۵ \text{ اگر} \\ (۱۸ - x)/۳, & ۱۵ \leq x \leq ۱۸ \text{ اگر} \\ ۰, & ۱۸ \leq x \leq ۲۴ \text{ اگر} \\ (x - ۲۴)/۴, & ۲۴ \leq x \leq ۲۸ \text{ اگر} \\ ۱, & ۲۸ \leq x \text{ اگر} \end{cases} \quad (۵۰.۹)$$



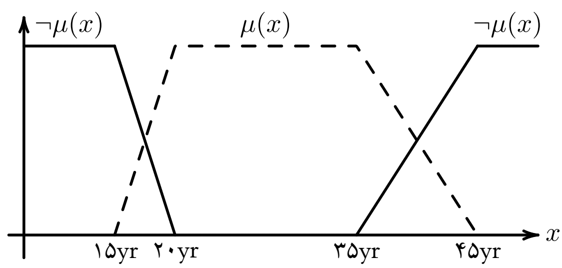
شکل ۹.۹: تابع عضویت مسند نقیض شده «گرم».

است.

مثال ۲۹.۹: فرض کنید P مسند نایقین «جوان» است که با (۴۶.۹) تعریف شده است. در این صورت تابع عضویت مسند نقیض شده $\neg P$

$$\neg\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x \leq ۱۵ \\ (۲۰ - x)/۵, & \text{اگر } ۱۵ \leq x \leq ۲۰ \\ ۰, & \text{اگر } ۲۰ \leq x \leq ۳۵ \\ (x - ۳۵)/۱۰, & \text{اگر } ۳۵ \leq x \leq ۴۵ \\ ۱, & \text{اگر } x \geq ۴۵ \end{cases} \quad (۵۱.۹)$$

است.



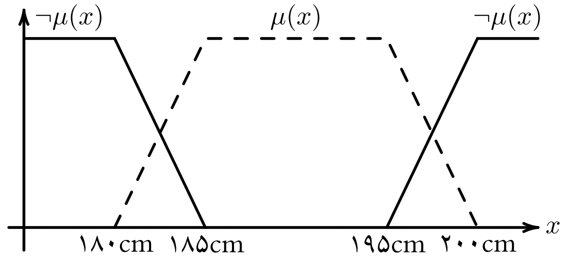
شکل ۱۰.۹: تابع عضویت مسند نقیض شده «جوان».

مثال ۳۰.۹: فرض کنید P مسند نایقین «بلند» است که با (۴۷.۹) تعریف شده است. در این صورت

تابع عضویت مسند نقیض شده $\neg P$

$$\neg\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x \leq ۱۸۰ \\ (۱۸۵ - x)/۵, & \text{اگر } ۱۸۰ \leq x \leq ۱۸۵ \\ ۰, & \text{اگر } ۱۸۵ \leq x \leq ۱۹۵ \\ (x - ۱۹۵)/۵, & \text{اگر } ۱۹۵ \leq x \leq ۲۰۰ \\ ۱, & \text{اگر } x \geq ۲۰۰ \end{cases} \tag{۵۲.۹}$$

است.



شکل ۱۱.۹: تابع عضویت مسند نقیض شده «بلند».

قضیه ۹.۹ *فرض کنید P یک مسند نایقین است. در این صورت $\neg\neg P = P$.*

برهان: قضیه از $\neg\neg P = \neg P^c = (P^c)^c = P$ نتیجه می‌شود.

۵.۹ گزاره نایقین

تعریف ۹.۹ [۹۲] *فرض کنید $\mathcal{Q}$ یک سور نایقین، S یک نهاد نایقین و P یک مسند نایقین است. سه تایی*

$$(\mathcal{Q}, S, P) = \text{“}\mathcal{Q} \text{ تا از } S \text{ خاصیت } P \text{ دارند”} \tag{۵۳.۹}$$

یک گزاره نایقین نامیده می‌شود.

تذکر ۲.۹: مجموعه A را مرجع اشخاص در نظر بگیرید. در این صورت $(\mathcal{Q}, A, P)$ یک گزاره نایقین خاص است زیرا A خودش یک نهاد نایقین خاص است.

تذکر ۳.۹: سور عمومی $\forall$ را در نظر بگیرید. در این صورت $(\forall, A, P)$ یک گزاره نایقین است و «همه A، خاصیت P دارند» را نمایش می‌دهد.

تذکر ۴.۹: سور وجودی $\exists$ را در نظر بگیرید. در این صورت $(\exists, A, P)$ یک گزاره نایقین است و «حداقل یکی از اعضای A، خاصیت P دارد» را نمایش می‌دهد.

مثال ۳۱.۹: «تقریباً همه دانشجویان جوان هستند» یک گزاره نایقین است که در آن سور نایقین $\mathcal{Q}$ «تقریباً همه»، نهاد نایقین S «دانشجویان» (همان مجموعه مرجع) و مسند نایقین S «جوان» است.

مثال ۳۲.۹: «اغلب دانشجویان جوان بلند قامت هستند» یک گزاره نایقین است که در آن سور نایقین $\mathcal{Q}$ «اغلب»، نهاد نایقین S «دانشجویان جوان» و مسند نایقین S «بلند» است.

قضیه ۱۰.۹ ([۹۲]، *قضیه هم‌ارزی منطقی) گزاره نایقین* $(\mathcal{Q}, S, P)$ *را در نظر بگیرید. در این صورت*

$$(\mathcal{Q}^*, S, P) = (\mathcal{Q}, S, \neg P) \tag{۵۴.۹}$$

که در آن $\mathcal{Q}^*$ *سور دوگان* $\mathcal{Q}$ *و* $\neg P$ *نهاد نقیض شده* P *است.*

برهان: توجه کنید که $(\mathcal{Q}^*, S, P)$ بیان می‌کند «$\mathcal{Q}^*$ از S، خاصیت P دارند». در واقع این جمله دلالت می کند که «$\mathcal{Q}^{**}$ از S، خاصیت P ندارند». چون $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{**}$، پس $(\mathcal{Q}, S, \neg P)$. برعکس، گزاره «$\mathcal{Q}$ از S، خاصیت P ندارند» موجب می‌شود «$\mathcal{Q}^*$ از S، خاصیت P دارند»، یعنی $(\mathcal{Q}^*, S, P)$. پس (۵۴.۹) برقرار است.

مثال ۳۳.۹: برای $\mathcal{Q}^* = \neg\forall$ داریم $\mathcal{Q} = \exists$. اگر $S = A$، آنگاه (۵۴.۹) همان هم ارزی متداول در منطق کلاسیک است،

$$(\neg\forall, A, P) = (\exists, A, \neg P). \tag{۵۵.۹}$$

مثال ۳۴.۹: برای $\mathcal{Q}^* = \neg\exists$ داریم $\mathcal{Q} = \forall$. اگر $S = A$، آنگاه (۵۴.۹) همان هم ارزی متداول در منطق کلاسیک است،

$$(\neg\exists, A, P) = (\forall, A, \neg P). \tag{۵۶.۹}$$

۶.۹ ارزش درستی

گزاره نایقین $(\mathcal{Q}, S, P)$ را در نظر بگیرید. ارزش درستی $(\mathcal{Q}, S, P)$ باید اندازه نایقین «$\mathcal{Q}$ از S، خاصیت P دارند» باشد. یعنی

$$T(\mathcal{Q}, S, P) = \mathcal{M}\{\text{“}\mathcal{Q}\text{تا از S خاصیت P دارند”}\}. \tag{۵۷.۹}$$

با این حال به دست آوردن ارزش $\mathcal{M}\{\text{“}\mathcal{Q}\text{تا از S خاصیت P دارند”}\}$ از روی اطلاعات فراهم شده از $\mathcal{Q}$، S و P در چارچوب نظریه نایقینی ناممکن است. بنابراین به فرمول‌هایی برای ترکیب $\mathcal{Q}$، S و P نیاز داریم.

تعریف ۱۰.۹ [۹۲] *فرض کنید* $(\mathcal{Q}, S, P)$ *یک گزاره نایقین است که در آن* $\mathcal{Q}$ *یک سور نایقین تک‌مدولی با تابع عضویت* λ*،* S *یک نهاد نایقین با تابع عضویت* ν *و* P *یک مسند نایقین با تابع عضویت* μ *است. در این صورت ارزش درستی* $(\mathcal{Q}, S, P)$ *نسبت به* A *عبارت است از*

$$T(\mathcal{Q}, S, P) = \sup_{0 \le \omega \le 1} \left(\omega \wedge \sup_{K \in \mathbb{K}_\omega} \inf_{a \in K} \mu(a) \wedge \sup_{K \in \mathbb{K}^*_\omega} \inf_{a \in K} \neg\mu(a)\right) \tag{۵۸.۹}$$

که در آن

$$\mathbb{K}_\omega = \{K \subset S_\omega \mid \lambda(|K|) \geq \omega\}\,, \qquad (۵۹.۹)$$

$$\mathbb{K}^*_\omega = \{K \subset S_\omega \mid \lambda(|S_\omega| - |K|) \geq \omega\}\,, \qquad (۶۰.۹)$$

$$S_\omega = \{a \in A \mid \nu(a) \geq \omega\}\,. \qquad (۶۱.۹)$$

تذکر ۵.۹: توجه داشته باشید که اگر داده خصیصه فردی مجموعه مرجع A در دسترس نباشد؛ فرمول ارزش درستی (۵۸.۹) بی‌معنی است.

تذکر ۶.۹: نماد $|K|$ برای نشان دادن تعداد اعضای مجموعه K استفاده شده است.

تذکر ۷.۹: نماد $\neg\mu$ تابع عضویت مسند نقیض شده P است و

$$\neg\mu(a) = ۱ - \mu(a). \qquad (۶۲.۹)$$

تذکر ۸.۹: وقتی زیرمجموعه K تهی باشد، قرار می‌دهیم

$$\inf_{a\in\varnothing} \mu(a) = \inf_{a\in\varnothing} \neg\mu(a) = ۱. \qquad (۶۳.۹)$$

تذکر ۹.۹: اگر $\mathcal{Q}$ به جای مقدار مطلق درصد نایقین باشد، آنگاه

$$\mathbb{K}_\omega = \left\{K \subset S_\omega \;\middle|\; \lambda\left(\frac{|K|}{|S_\omega|}\right) \geq \omega\right\}, \qquad (۶۴.۹)$$

$$\mathbb{K}^*_\omega = \left\{K \subset S_\omega \;\middle|\; \lambda\left(۱ - \frac{|K|}{|S_\omega|}\right) \geq \omega\right\}. \qquad (۶۵.۹)$$

تذکر ۱۰.۹: اگر نهاد نایقین با مجموعه مرجع A یکسان باشد (یعنی $S = A$) آنگاه

$$\mathbb{K}_\omega = \{K \subset A \mid \lambda(|K|) \geq \omega\}\,, \qquad (۶۶.۹)$$

$$\mathbb{K}^*_\omega = \{K \subset A \mid \lambda(|A| - |K|) \geq \omega\}\,. \qquad (۶۷.۹)$$

تمرین ۱.۹: اگر سور نایقین $\mathcal{Q} = \forall$ و نهاد نایقین $S = A$ باشد، آنگاه برای هر $\omega > ۰$ داریم

$$\mathbb{K}_\omega = \{A\}, \quad \mathbb{K}^*_\omega = \{\varnothing\}. \qquad (۶۸.۹)$$

نشان دهید

$$T(\forall, A, P) = \inf_{a\in A} \mu(a). \qquad (۶۹.۹)$$

تمرین ۲.۹: اگر سور نایقین $\mathcal{Q} = \exists$ و نهاد نایقین $S = A$ باشد، آنگاه برای هر $\omega > ۰$ داریم

$$\mathbb{K}_\omega = \{ \text{هر زیرمجموعه ناتهی} A \}, \tag{۷۰.۹}$$

$$\mathbb{K}^*_\omega = \{ \text{هر زیرمجموعه محض} A \}. \tag{۷۱.۹}$$

نشان دهید

$$T(\exists, A, P) = \sup_{a\in A} \mu(a). \tag{۷۲.۹}$$

تمرین ۳.۹: اگر سور نایقین $\mathcal{Q} = \neg\forall$ و نهاد نایقین $S = A$ باشد، آنگاه برای هر $\omega > ۰$ داریم

$$\mathbb{K}_\omega = \{ \text{هر زیرمجموعه محض} A \}, \tag{۷۳.۹}$$

$$\mathbb{K}^*_\omega = \{ \text{هر زیرمجموعه ناتهی} A \}. \tag{۷۴.۹}$$

نشان دهید

$$T(\neg\forall, A, P) = ۱ - \inf_{a\in A} \mu(a). \tag{۷۵.۹}$$

تمرین ۴.۹: اگر سور نایقین $\mathcal{Q} = \neg\exists$ و نهاد نایقین $S = A$ باشد، آنگاه برای هر $\omega > ۰$ داریم

$$\mathbb{K}_\omega = \{\varnothing\}, \quad \mathbb{K}^*_\omega = \{A\}. \tag{۷۶.۹}$$

نشان دهید

$$T(\neg\exists, A, P) = ۱ - \sup_{a\in A} \mu(a). \tag{۷۷.۹}$$

قضیه ۱۱.۹ ([۹۲]، *قضیه ارزش درستی*) *گزاره نایقین $(\mathcal{Q}, S, P)$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathcal{Q}$ یک سور نایقین تک‌مدولی با تابع عضویت λ، S یک نهاد نایقین با تابع عضویت μ و S یک مسند نایقین با تابع عضویت μ است. در این صورت ارزش درستی $(\mathcal{Q}, S, P)$*

$$T(\mathcal{Q}, S, P) = \sup_{۰\le\omega\le ۱} (\omega \wedge \Delta(k_\omega) \wedge \Delta^*(k^*_\omega)) \tag{۷۸.۹}$$

است که در آن

$$k_\omega = \min\{x \mid \lambda(x) \ge \omega\}, \tag{۷۹.۹}$$

$$\Delta(k_\omega) = k_\omega\text{-}\max\{\mu(a_i) \mid a_i \in S_\omega\}, \tag{۸۰.۹}$$

$$k^*_\omega = |S_\omega| - \max\{x \mid \lambda(x) \ge \omega\}, \tag{۸۱.۹}$$

$$\Delta^*(k^*_\omega) = k^*_\omega\text{-}\max\{۱ - \mu(a_i) \mid a_i \in S_\omega\}. \tag{۸۲.۹}$$

برهان: چون سوپریموم در یک زیرمجموعه با کمترین عضو مشخص می‌شود، داریم

$$\sup_{K\in\mathbb{K}_\omega}\inf_{a\in K}\mu(a)=\sup_{K\subset S_\omega,|K|=k_\omega}\inf_{a\in K}\mu(a)=\Delta(k_\omega),$$

$$\sup_{K\in\mathbb{K}^*_\omega}\inf_{a\in K}\neg\mu(a)=\sup_{K\subset S_\omega,|K|=k^*_\omega}\inf_{a\in K}\neg\mu(a)=\Delta^*(k^*_\omega).$$

قضیه برقرار است. توجه داشته باشید که $\Delta(\text{۰})=\Delta^*(\text{۰})=\text{۱}$.

تذکر ۱۱.۹: اگر $\mathcal{Q}$ به جای مقدار مطلق، درصد نایقین باشد، آنگاه

$$k_\omega=\min\left\{x \mid \lambda\left(\frac{x}{|S_\omega|}\right)\geq\omega\right\}, \tag{۸۳.۹}$$

$$k^*_\omega=|S_\omega|-\max\left\{x \mid \lambda\left(\frac{x}{|S_\omega|}\right)\geq\omega\right\}. \tag{۸۴.۹}$$

تذکر ۱۲.۹: اگر نهاد نایقین S با مجموعه مرجع A یکسان باشد، آنگاه

$$k_\omega=\min\{x\mid\lambda(x)\geq\omega\}, \tag{۸۵.۹}$$

$$\Delta(k_\omega)=k_\omega\text{-}\max\{\mu(a_\text{۱}),\mu(a_\text{۲}),\ldots,\mu(a_n)\}, \tag{۸۶.۹}$$

$$k^*_\omega=n-\max\{x\mid\lambda(x)\geq\omega\}, \tag{۸۷.۹}$$

$$\Delta^*(k^*_\omega)=k^*_\omega\text{-}\max\{\text{۱}-\mu(a_\text{۱}),\text{۱}-\mu(a_\text{۲}),\ldots,\text{۱}-\mu(a_n)\}. \tag{۸۸.۹}$$

تمرین ۵.۹: اگر سور نایقین $\mathcal{Q}=\{m,m+\text{۱},\ldots,n\}$ (یعنی «حداقل m شخص موجودند») با $m\geq\text{۱}$ باشد، آنگاه داریم $k_\omega=m$ و $k^*_\omega=\text{۰}$. نشان دهید

$$T(\mathcal{Q},A,P)=m\text{-}\max\{\mu(a_\text{۱}),\mu(a_\text{۲}),\cdots,\mu(a_n)\}. \tag{۸۹.۹}$$

تمرین ۶.۹: اگر سور نایقین $\mathcal{Q}=\{\text{۰},\text{۱},\text{۲},\ldots,m\}$ (یعنی «حداکثر m شخص موجودند») با $m<n$ باشد، آنگاه داریم $k_\omega=\text{۰}$ و $k^*_\omega=n-m$. نشان دهید

$$T(\mathcal{Q},A,P)=(n-m)\text{-}\max\{\text{۱}-\mu(a_\text{۱}),\text{۱}-\mu(a_\text{۲}),\cdots,\text{۱}-\mu(a_n)\}. \tag{۹۰.۹}$$

مثال ۳۵.۹: دمای روزانه یک هفته را از شنبه تا جمعه در نظر بگیرید که به صورت

$$\text{۲۲, ۲۳, ۲۵, ۲۸, ۳۰, ۳۲, ۳۶} \tag{۹۱.۹}$$

بر حسب درجه سانتیگراد مشخص شده اند. گزاره نایقین

$$(\mathcal{Q},A,P)=\text{دو یا سه روز گرم است} \tag{۹۲.۹}$$

را در نظر بگیرید. در اینجا سور نایقین $\mathcal{Q} = \{۲,۳\}$ است. همچنین فرض می‌کنیم تابع عضویت مسند نایقین $P =$ «گرم» به صورت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & x \leq ۱۵ \text{ اگر} \\ (x-۱۵)/۳, & ۱۵ \leq x \leq ۱۸ \text{ اگر} \\ ۱, & ۱۸ \leq x \leq ۲۴ \text{ اگر} \\ (۲۸-x)/۴, & ۲۴ \leq x \leq ۲۸ \text{ اگر} \\ ۰, & ۲۸ \leq x \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۹۳.۹)$$

است. واضح است که با ارزش درستی ۱ روزهای شنبه و یکشنبه گرم هستند، و روز دوشنبه با ارزش درستی ۰٫۷۵ گرم است. ولی روز سه شنبه اصلا گرم نیست (در واقع «داغ» است). به شکل شهودی، گزاره «دو یا سه روز گرم است» باید کاملا درست باشد. فرمول ارزش درستی (۵۸.۹) بیان می‌کند که ارزش درستی این گزاره

$$T(\text{دو یا سه روز گرم است}) = ۱ \qquad (۹۴.۹)$$

است. این نتیجه به شکل شهودی پذیرفتنی است. همچنین داریم

$$T(\text{دو روز گرم است}) = ۰٫۲۵, \qquad (۹۵.۹)$$

$$T(\text{سه روز گرم است}) = ۰٫۷۵. \qquad (۹۶.۹)$$

مثال ۳۶.۹: فرض کنید ۱۵ دانشجو در یک کلاس هستند و سن آنها برحسب سال

$$۲۱, ۲۲, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۸, ۳۰, ۳۲, ۳۵, ۳۶, ۳۸, ۴۰ \qquad (۹۷.۹)$$

است. گزاره نایقین

$$(\mathcal{Q}, A, P) = \text{تقریباً همه دانشجویان جوان هستند}. \qquad (۹۸.۹)$$

در نظر بگیرید. فرض کنید تابع عضویت سور نایقین $\mathcal{Q} =$ «تقریباً همه» به صورت

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۰, & ۰ \leq x \leq ۱۰ \text{ اگر} \\ (x-۱۰)/۳, & ۱۰ \leq x \leq ۱۳ \text{ اگر} \\ ۱, & ۱۳ \leq x \leq ۱۵ \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۹۹.۹)$$

و تابع عضویت مسند نایقین P به صورت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & x \leq ۱۵ \text{ اگر} \\ (x-۱۵)/۵, & ۱۵ \leq x \leq ۲۰ \text{ اگر} \\ ۱, & ۲۰ \leq x \leq ۳۵ \text{ اگر} \\ (۴۵-x)/۱۰, & ۳۵ \leq x \leq ۴۵ \text{ اگر} \\ ۰, & x \geq ۴۵ \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱۰۰.۹)$$

است. فرمول ارزش درستی (۵۸.۹) می‌گوید که ارزش درستی گزاره نایقین به صورت

$$T(\text{تقریباً همه دانشجویان جوان هستند}) = ۰/۹ \qquad (۱۰۱.۹)$$

است.

مثال ۳۷.۹: یک تیم ورزشی با ۱۶ ورزشکار و قدهای

$$\begin{array}{l} ۱۷۵,\ ۱۷۸,\ ۱۷۸,\ ۱۸۰,\ ۱۸۳,\ ۱۸۴,\ ۱۸۶,\ ۱۸۶ \\ ۱۸۸,\ ۱۹۰,\ ۱۹۲,\ ۱۹۲,\ ۱۹۳,\ ۱۹۴,\ ۱۹۵,\ ۱۹۶ \end{array} \qquad (۱۰۲.۹)$$

را (بر حسب سانتیمتر) در نظر بگیرید. گزاره نایقین

$$(\mathcal{Q}, A, P) = \text{تقریباً ۷۰٪ ورزشکاران قد بلند هستند} \qquad (۱۰۳.۹)$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع عضویت سور نایقین « حدود هفتاد درصد » $= \mathcal{Q}$ به صورت

$$\lambda(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } ۰ \le x \le ۰/۶ \\ ۲۰(x - ۰/۶), & \text{اگر } ۰/۶ \le x \le ۰/۶۵ \\ ۱, & \text{اگر } ۰/۶۵ \le x \le ۰/۷۵ \\ ۲۰(۰/۸ - x), & \text{اگر } ۰/۷۵ \le x \le ۰/۸ \\ ۰, & \text{اگر } ۰/۸ \le x \le ۱ \end{cases} \qquad (۱۰۴.۹)$$

و تابع عضویت مسند نایقین «بلند» $= P$ به صورت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x \le ۱۸۰ \\ (x - ۱۸۰)/۵, & \text{اگر } ۱۸۰ \le x \le ۱۸۵ \\ ۱, & \text{اگر } ۱۸۵ \le x \le ۱۹۵ \\ (۲۰۰ - x)/۵, & \text{اگر } ۱۹۵ \le x \le ۲۰۰ \\ ۰, & \text{اگر } x \ge ۲۰۰ \end{cases} \qquad (۱۰۵.۹)$$

است. فرمول ارزش درستی (۵۸.۹) بیان می کند که ارزش درستی گزاره نایقین

$$T(\text{« حدود هفتاد درصد دانشجویان قد بلند هستند »}) = ۰/۸ \qquad (۱۰۶.۹)$$

است.

مثال ۳۸.۹: فرض کنید یک کلاس ۱۸ دانشجو دارد و سن (بر حسب سال) و قد (بر حسب سانتیمتر) آنها به صورت

$$\begin{array}{l} (۲۴, ۱۸۵), (۲۵, ۱۹۰), (۲۶, ۱۸۴), (۲۶, ۱۷۰), (۲۷, ۱۸۷), (۲۷, ۱۸۸) \\ (۲۸, ۱۶۰), (۳۰, ۱۹۰), (۳۲, ۱۸۵), (۳۳, ۱۷۶), (۳۵, ۱۸۵), (۳۶, ۱۸۸) \\ (۳۸, ۱۶۴), (۳۸, ۱۷۸), (۳۹, ۱۸۲), (۴۰, ۱۸۶), (۴۲, ۱۶۵), (۴۴, ۱۷۰) \end{array} \qquad (۱۰۷.۹)$$

است. گزاره نایقین

$$(\mathcal{Q}, S, P) = \text{« اغلب دانشجویان جوان قد بلند هستند »} \qquad (۱۰۸.۹)$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع عضویت سور نایقین (درصد) «اغلب» $= \mathcal{Q}$ به صورت

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } 0 \le x \le 0.7 \\ 20(x - 0.7), & \text{اگر } 0.7 \le x \le 0.75 \\ 1, & \text{اگر } 0.75 \le x \le 0.85 \\ 20(0.9 - x), & \text{اگر } 0.85 \le x \le 0.9 \\ 0, & \text{اگر } 0.9 \le x \le 1 \end{cases} \tag{۱۰۹.۹}$$

است. توجه کنید که هر شخص با دو خصوصیت توصیف می‌شود (y, z) که در آن y سن و z قد را نشان می‌دهد. در این حالت، تابع عضویت نهاد نایقین « دانشجویان جوان » $= S$ به صورت

$$\nu(y) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } y \le 15 \\ (y - 15)/5, & \text{اگر } 15 \le y \le 20 \\ 1, & \text{اگر } 20 \le y \le 35 \\ (45 - y)/10, & \text{اگر } 35 \le y \le 45 \\ 0, & \text{اگر } y \ge 45 \end{cases} \tag{۱۱۰.۹}$$

و تابع عضویت مسند نایقین « قد بلند » $= P$ به صورت

$$\mu(z) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } z \le 180 \\ (z - 180)/5, & \text{اگر } 180 \le z \le 185 \\ 1, & \text{اگر } 185 \le z \le 195 \\ (200 - z)/5, & \text{اگر } 195 \le z \le 200 \\ 0, & \text{اگر } z \ge 200 \end{cases} \tag{۱۱۱.۹}$$

است. فرمول ارزش درستی (۵۸.۹)، ارزش درستی این گزاره را به صورت

$$T(\text{« حدود هفتاد درصد دانشجویان قد بلند هستند »}) = 0.8. \tag{۱۱۲.۹}$$

محاسبه می‌کند.

۷.۹ خلاصه ساز نحوی

خلاصه نحوی یک جمله ربان بشری است که مختصر بوده و درک آن برای سایرین آسان است. برای مثال «اغلب دانشجویان جوان بلند قامت هستند» یک خلاصه نحوی از سن و قد دانشجویان است. پس خلاصه نحوی یک گزاره نایقین خاص است که سور نایقین، نهاد نایقین و مسند نایقین آن جملات نحوی هستند. منطق نایقین ابزارهای انعطاف پذیری را فراهم می‌آورند که تا توانمندی استخراج خلاصه نحوی از گردایه ای از داده‌های خام را دارد.

منطق نایقین به چه ورودی نیاز دارد؟ باید تعدادی داده خام داشته باشیم (داده خصیصه فردی)،

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}. \tag{۱۱۳.۹}$$

سپس باید تعدادی عبارت نحوی برای بیان سورها داشته باشیم، برای مثال «اغلب» و «همه». آنها را با گردایه سورهای نایقین

$$\mathbb{Q} = \{\mathcal{Q}_۱, \mathcal{Q}_۲, \ldots, \mathcal{Q}_m\} \tag{۱۱۴.۹}$$

نشان دهید. سپس به تعدادی عبارت نحوی برای نمایش نهادها نیاز داریم، برای مثال «دانشجویان جوان» و «دانشجویان مسن». گردایه نهادهای نایقین را با

$$\mathbb{S} = \{S_۱, S_۲, \ldots, S_n\} \tag{۱۱۵.۹}$$

نشان دهید. سرانجام باید عبارت نحوی داشته باشیم که مسندها را نشان دهند، مانند «کوتاه» و «بلند». گردایه مسندهای نایقین را با

$$\mathbb{P} = \{P_۱, P_۲, \cdots, P_k\} \tag{۱۱۶.۹}$$

نشان دهید. یک مساله در داده کاوی، انتخاب یک سور نایقین $\mathcal{Q} \in \mathbb{Q}$، یک نهاد نایقین $S \in \mathbb{S}$ و یک مسند نایقین $P \in \mathbb{P}$ است طوری که ارزش درستی گزاره نایقین «$\mathcal{Q}$ تا از S، خاصیت P دارند» حداقل β باشد، یعنی برای مجموعه مرجع $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$

$$T(\mathcal{Q}, S, P) \geq \beta \tag{۱۱۷.۹}$$

که در آن β سطح اطمینان است. برای حل این مساله، لیو خلاصه ساز نحوی

$$\begin{cases} \text{Find } \mathcal{Q}\text{، } S \text{ and } P \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathcal{Q} \in \mathbb{Q} \\ \qquad S \in \mathbb{S} \\ \qquad P \in \mathbb{P} \\ \qquad T(\mathcal{Q}, S, P) \geq \beta. \end{cases} \tag{۱۱۸.۹}$$

را مطرح کرد [۹۲]. هر جواب $(\overline{\mathcal{Q}}, \overline{S}, \overline{P})$ از خلاصه ساز نحوی (۱۱۸.۹) یک خلاصه نحوی «$\overline{\mathcal{Q}}$ تا از $\overline{S}$، خاصیت $\overline{P}$ دارند» را تولید می‌کند.

مثال ۳۹.۹: فرض کنید در یک کلاس ۱۸ دانشجو حضور دارند که سن آنها بر حسب سال و قد آنها بر حسب سانتیمتر

$$\begin{array}{l} (۲۴, ۱۸۵), (۲۵, ۱۹۰), (۲۶, ۱۸۴), (۲۶, ۱۷۰), (۲۷, ۱۸۷), (۲۷, ۱۸۸) \\ (۲۸, ۱۶۰), (۳۰, ۱۹۰), (۳۲, ۱۸۵), (۳۳, ۱۷۶), (۳۵, ۱۸۵), (۳۶, ۱۸۸) \\ (۳۸, ۱۶۴), (۳۸, ۱۷۸), (۳۹, ۱۸۲), (۴۰, ۱۸۶), (۴۲, ۱۶۵), (۴۴, ۱۷۰) \end{array} \tag{۱۱۹.۹}$$

است. فرض کنید سه عبارت نحوی «حدود نصف»، «اغلب» و «همه» داریم که تابع عضویت آنها به ترتیب

$$\lambda_{\text{نصف}}(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } ۰ \leq x \leq ۰/۴ \\ ۲۰(x - ۰/۴), & \text{اگر } ۰/۴ \leq x \leq ۰/۴۵ \\ ۱, & \text{اگر } ۰/۴۵ \leq x \leq ۰/۵۵ \\ ۲۰(۰/۶ - x), & \text{اگر } ۰/۵۵ \leq x \leq ۰/۶ \\ ۰, & \text{اگر } ۰/۶ \leq x \leq ۱ \end{cases} \tag{۱۲۰.۹}$$

$$\lambda_{\text{اغلب}}(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } ۰ \le x \le ۰/۷ \\ ۲۰(x - ۰/۷), & \text{اگر } ۰/۷ \le x \le ۰/۷۵ \\ ۱, & \text{اگر } ۰/۷۵ \le x \le ۰/۸۵ \\ ۲۰(۰/۹ - x), & \text{اگر } ۰/۸۵ \le x \le ۰/۹ \\ ۰, & \text{اگر } ۰/۹ \le x \le ۱ \end{cases} \tag{۱۲۱.۹}$$

$$\lambda_{\text{همه}}(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x = ۱ \\ ۰, & \text{اگر } ۰ \le x < ۱ \end{cases} \tag{۱۲۲.۹}$$

است. گردایه سورهای نایقین را با

$$\mathbb{Q} = \{\text{« همه »، « اغلب »، « تقریباً نصف »}\}. \tag{۱۲۳.۹}$$

نشان دهید. همچنین سه عبارت نحوی «دانشجویان جوان»، «دانشجویان میانسال» و «دانشجویان مسن» به ترتیب با تابع‌های عضویت

$$\nu_{\text{جوان}}(y) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } y \le ۱۵ \\ (y - ۱۵)/۵, & \text{اگر } ۱۵ \le y \le ۲۰ \\ ۱, & \text{اگر } ۲۰ \le y \le ۳۵ \\ (۴۵ - y)/۱۰, & \text{اگر } ۳۵ \le y \le ۴۵ \\ ۰, & \text{اگر } y \ge ۴۵ \end{cases} \tag{۱۲۴.۹}$$

$$\nu_{\text{میانسال}}(y) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } y \le ۴۰ \\ (y - ۴۰)/۵, & \text{اگر } ۴۰ \le y \le ۴۵ \\ ۱, & \text{اگر } ۴۵ \le y \le ۵۵ \\ (۶۰ - y)/۵, & \text{اگر } ۵۵ \le y \le ۶۰ \\ ۰, & \text{اگر } y \ge ۶۰ \end{cases} \tag{۱۲۵.۹}$$

$$\nu_{\text{مسن}}(y) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } y \le ۵۵ \\ (y - ۵۵)/۵, & \text{اگر } ۵۵ \le y \le ۶۰ \\ ۱, & \text{اگر } ۶۰ \le y \le ۸۰ \\ (۸۵ - y)/۵, & \text{اگر } ۸۰ \le y \le ۸۵ \\ ۱, & \text{اگر } y \ge ۸۵ \end{cases} \tag{۱۲۶.۹}$$

داریم. گردایه نهادهای نایقین را با

$$\mathbb{S} = \{\text{« دانشجویان جوان »، « دانشجویان میانسال »، « دانشجویان مسن »}\} \tag{۱۲۷.۹}$$

نشان دهید. سرانجام، فرض کنید دو عبارت نحوی «کوتاه» و «بلند» به عنوان مسندهای نایقین به ترتیب با تابع‌های عضویت

$$\mu_{\text{کوتاه}}(z) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } z \leq ۱۴۵ \\ (z - ۱۴۵)/۵, & \text{اگر } ۱۴۵ \leq z \leq ۱۵۰ \\ ۱, & \text{اگر } ۱۵۰ \leq z \leq ۱۵۵ \\ (۱۶۰ - z)/۵, & \text{اگر } ۱۵۵ \leq z \leq ۱۶۰ \\ ۰, & \text{اگر } z \geq ۲۰۰ \end{cases} \quad (۱۲۸.۹)$$

$$\mu_{\text{بلند}}(z) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } z \leq ۱۸۰ \\ (z - ۱۸۰)/۵, & \text{اگر } ۱۸۰ \leq z \leq ۱۸۵ \\ ۱, & \text{اگر } ۱۸۵ \leq z \leq ۱۹۵ \\ (۲۰۰ - z)/۵, & \text{اگر } ۱۹۵ \leq z \leq ۲۰۰ \\ ۰, & \text{اگر } z \geq ۲۰۰ \end{cases} \quad (۱۲۹.۹)$$

داریم. گردایه مسندهای نایقین را با

$$\mathbb{P} = \{\text{« کوتاه »، « بلند »}\} \quad (۱۳۰.۹)$$

نشان دهید.

می‌خواهیم سور نایقین $\mathcal{Q} \in \mathbb{Q}$، نهاد نایقین $S \in \mathbb{S}$ و مسند نایقین $P \in \mathbb{P}$ را چنان انتخاب کنیم که ارزش درستی خلاصه نحوی استخراج شده «$\mathcal{Q}$ تا از S، خاصیت P دارند» حداقل ۰٫۸ باشد، یعنی

$$T(\mathcal{Q}, S, P) \geq ۰٫۸ \quad (۱۳۱.۹)$$

که در آن، ۰٫۸ سطح اطمینان مشخصی است. خلاصه ساز نحوی (۱۱۸.۹) به

$$\overline{\mathcal{Q}} = \text{«اغلب»}, \quad \overline{S} = \text{« دانشجویان جوان »}, \quad \overline{P} = \text{«بلند»}$$

منجر می‌شود و بنابر این خلاصه نحوی «اغلب دانشجویان جوان بلند قد هستند» استخراج می‌شود.

۸.۹ نکات کتابشناسی

بر اساس نظریه مجموعه نایقین، منطق نایقین برای کارکردن با زبان بشری با استفاده از فرمول ارزش درستی برای گزاره‌های نایقین در سال ۲۰۱۱ توسط لیو طراحی شد[۹۲]. به عنوان یک کاربرد از منطق نایقین، لیو همچنین خلاصه ساز نحوی را ارائه کرد [۹۲] که ابزاری برای استخراج خلاصه نحوی از گردایه ای از داده‌های خام فراهم می‌آورد.

فصل ۱۰

استنتاج نایقین

استنتاج نایقین فرایند استخراج نتایج از دانش بشری با استفاده از نظریه مجموعه نایقین است. این فصل خانواده‌ای از قاعده‌های استنتاج نایقین، سیستم نایقین، و کنترل نایقین را همراه با کاربرد در سیستم آونگ معکوس ارائه می‌کند.

۱.۱۰ قاعده استنتاج نایقین

فرض کنید $\mathbb{X}$ و $\mathbb{Y}$ دو مفهوم هستند. فرض می‌کنیم فقط یک قاعده اگر-آن‌گاه داریم،

$$\text{“if } \mathbb{X} \text{ is } \xi \text{ then } \mathbb{Y} \text{ is } \eta\text{”} \tag{۱.۱۰}$$

که در آن ξ و η دو مجموعه نایقین هستند. ابتدا قاعده زیر را معرفی می‌کنیم.

قاعده استنتاج ۱.۱۰ [۸۹] *فرض کنید $\mathbb{X}$ و $\mathbb{Y}$ دو مفهوم هستند. قاعده «اگر $\mathbb{X}$ مجموعه نایقین ξ باشد آنگاه $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین η است» را در نظر بگیرید. از این که $\mathbb{X}$ مقدار ثابت a است، استنتاج می‌کنیم که $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین*

$$\eta^* = \eta|_{a\in\xi} \tag{۲.۱۰}$$

است که در واقع مجموعه نایقین شرطی η با شرط $a \in \xi$ است. قاعده استنتاج با رابطه

قاعده: اگر $\mathbb{X}$ مجموعه نایقین ξ است آنگاه $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین η است

از: $\mathbb{X}$ مقدار ثابت a است (۳.۱۰)

نتیجه: $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین $\eta^* = \eta|_{a\in\xi}$ است.

بیان می‌شود.

قضیه ۱.۱۰ [۸۹] *در قاعده استنتاج ۱.۱۰، اگر ξ و η مجموعه‌های نایقین مستقل با تابع‌های عضویت به ترتیب μ و ν باشند، آنگاه تابع عضویت η^* به صورت*

$$\nu^*(y) = \begin{cases} \dfrac{\nu(y)}{\mu(a)}, & \text{اگر } \nu(y) < \mu(a)/۲ \\ \dfrac{\nu(y)+\mu(a)-۱}{\mu(a)}, & \text{اگر } \nu(y) > ۱-\mu(a)/۲ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \qquad (۴.۱۰)$$

است.

برهان: از قاعده استنتاج ۱.۱۰ نتیجه می‌شود که η^* مجموعه نایقین شرطی η به شرط $a \in \xi$ است. با استفاده از قضیه ۳۶.۸، تابع عضویت η^* همان ν^* است.

قاعده استنتاج ۲.۱۰ [۴۶] *فرض کنید $\mathbb{X}$، $\mathbb{Y}$ و $\mathbb{Z}$ سه مفهوم هستند. قاعده «اگر $\mathbb{X}$ مجموعه نایقین ξ و $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین η باشد آنگاه $\mathbb{Z}$ مجموعه نایقین τ است» را در نظر بگیرید. از این که $\mathbb{X}$ مقدار ثابت a و $\mathbb{Y}$ مقدار ثابت b است استنتاج می‌شود که $\mathbb{Z}$ مجموعه نایقین*

$$\tau^* = \tau|_{(a\in\xi)\cap(b\in\eta)} \qquad (۵.۱۰)$$

است که همان مجموعه نایقین شرطی τ با شرط $a \in \xi$ و $b \in \eta$ است. قاعده استنتاج با

قاعده: اگر $\mathbb{X}$ محموعه ξ و $\mathbb{Y}$ مجموعه η باشد آنگاه $\mathbb{Z}$ مجموعه τ است

از: $\mathbb{X}$ مقدار ثابت a و $\mathbb{Y}$ مقدار ثابت b است (۶.۱۰)

نتیجه: $\mathbb{Z}$ مجموعه نایقین $\tau^* = \tau|_{(a\in\xi)\cap(b\in\eta)}$ است.

بیان می‌شود.

قضیه ۲.۱۰ [۴۶] *در قاعده استنتاج ۲.۱۰، اگر ξ, η, τ مجموعه‌های نایقین مستقل با تابع‌های عضویت به ترتیب μ, ν, λ باشند آنگاه تابع عضویت τ^**

$$\lambda^*(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(z)}{\mu(a)\wedge\nu(b)}, & \text{اگر } \lambda(z) < \dfrac{\mu(a)\wedge\nu(b)}{۲} \\ \dfrac{\lambda(z)+\mu(a)\wedge\nu(b)-۱}{\mu(a)\wedge\nu(b)}, & \text{اگر } \lambda(z) > ۱-\dfrac{\mu(a)\wedge\nu(b)}{۲} \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \qquad (۷.۱۰)$$

است.

برهان: از قاعده استنتاج ۲.۱۰ نتیجه می‌شود که τ^* مجموعه نایقین شرطی τ با شرط $a \in \xi$ و $b \in \eta$ است. با استفاده از قضیه ۳۶.۸، تابع عضویت τ^* همان λ^* است.

قاعده استنتاج ۳.۱۰ [۴۶] *دو مفهوم نایقین $\mathbb{X}$ و $\mathbb{Y}$ را در نظر بگیرید. دو قاعده «اگر $\mathbb{X}$ مجموعه نایقین $\xi_۱$ است آنگاه $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین $\eta_۱$ است» و «اگر $\mathbb{X}$ مجموعه نایقین $\xi_۲$ است آنگاه $\mathbb{Y}$ مجموعه*

نایقین η_2 است» را در نظر بگیرید. از این که $\mathbb{X}$ مقدار ثابت a است استنتاج می‌کنیم که $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین

$$\eta^* = \frac{\mathcal{M}\{a \in \xi_1\} \cdot \eta_1|_{a\in\xi_1}}{\mathcal{M}\{a \in \xi_1\} + \mathcal{M}\{a \in \xi_2\}} + \frac{\mathcal{M}\{a \in \xi_2\} \cdot \eta_2|_{a\in\xi_2}}{\mathcal{M}\{a \in \xi_1\} + \mathcal{M}\{a \in \xi_2\}} \tag{۸.۱۰}$$

است. این قاعده به صورت

(۹.۱۰)

قاعده ۱: اگر $\mathbb{X}$ مجموعه نایقین ξ_1 است آنگاه $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین η_1 است

قاعده ۲: اگر $\mathbb{X}$ مجموعه نایقین ξ_2 است آنگاه $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین η_2 است

از: $\mathbb{X}$ مقدار ثابت a است

نتیجه: $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین η^* است که با (۸.۱۰) مشخص شده است.

بیان می‌شود.

قضیه ۳.۱۰ [۴۶] *در قاعده استنتاج ۳.۱۰، اگر ξ_1, ξ_2, η_1، η_2 مجموعه‌های مستقل با تابع‌های عضویت به ترتیب $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ باشند، آنگاه*

$$\eta^* = \frac{\mu_1(a)}{\mu_1(a) + \mu_2(a)}\eta_1^* + \frac{\mu_2(a)}{\mu_1(a) + \mu_2(a)}\eta_2^* \tag{۱۰.۱۰}$$

که در آن η_1^* و η_2^* مجموعه‌های نایقین با تابع‌های عضویت به ترتیب

$$\nu_1^*(y) = \begin{cases} \dfrac{\nu_1(y)}{\mu_1(a)}, & \text{اگر } \nu_1(y) < \mu_1(a)/۲ \\ \dfrac{\nu_1(y) + \mu_1(a) - ۱}{\mu_1(a)}, & \text{اگر } \nu_1(y) > ۱ - \mu_1(a)/۲ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۱۱.۱۰}$$

و

$$\nu_2^*(y) = \begin{cases} \dfrac{\nu_2(y)}{\mu_2(a)}, & \text{اگر } \nu_2(y) < \mu_2(a)/۲ \\ \dfrac{\nu_2(y) + \mu_2(a) - ۱}{\mu_2(a)}, & \text{اگر } \nu_2(y) > ۱ - \mu_2(a)/۲ \\ ۰/۵, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۱۲.۱۰}$$

هستند.

برهان: از قاعده استنتاج ۳.۱۰ نتیجه می‌شود که مجموعه نایقین η^* همان

$$\eta^* = \frac{\mathcal{M}\{a \in \xi_1\} \cdot \eta_1|_{a\in\xi_1}}{\mathcal{M}\{a \in \xi_1\} + \mathcal{M}\{a \in \xi_2\}} + \frac{\mathcal{M}\{a \in \xi_2\} \cdot \eta_2|_{a\in\xi_2}}{\mathcal{M}\{a \in \xi_1\} + \mathcal{M}\{a \in \xi_2\}}.$$

است. قضیه بلافاصله از $\mathcal{M}\{a \in \xi_1\} = \mu_1(a)$ و $\mathcal{M}\{a \in \xi_2\} = \mu_2(a)$ نتیجه می‌شود.

قاعده استنتاج ۴.۱۰ [۴۶] مفاهیم $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_m$ را در نظر بگیرید. قاعده‌های «اگر برای $i = 1, 2, \ldots, k$ ،$\mathbb{X}_1$ مجموعه نایقین ξ_{i1} است و $\cdots$ و $\mathbb{X}_m$ مجموعه نایقین ξ_{im} است آنگاه $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین η_i است» در نظر بگیرید. از این که $\mathbb{X}_1$ مقدار a_1 و $\cdots$ و $\mathbb{X}_m$ مقدار ثابت a_m است استنتاج می‌کنیم که $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین

$$\eta^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i \cdot \eta_i|_{(a_1 \in \xi_{i1}) \cap (a_2 \in \xi_{i2}) \cap \cdots \cap (a_m \in \xi_{im})}}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k} \quad (۱۳.۱۰)$$

است که ضرایب برای $i = 1, 2, \ldots, k$ با

$$c_i = \mathcal{M}\{(a_1 \in \xi_{i1}) \cap (a_2 \in \xi_{i2}) \cap \cdots \cap (a_m \in \xi_{im})\} \quad (۱۴.۱۰)$$

تعیین می‌شوند. این قاعده استنتاج با

(۱۵.۱۰)

قاعده ۱: اگر $\mathbb{X}_1$ مجموعه ξ_{11} است و $\cdots$ و $\mathbb{X}_m$ مجموعه ξ_{1m} است

قاعده ۲: اگر $\mathbb{X}_1$ مجموعه ξ_{21} است و $\cdots$ و $\mathbb{X}_m$ مجموعه ξ_{2m} است

$\cdots$

قاعده k: اگر $\mathbb{X}_1$ مجموعه ξ_{k1} است و $\cdots$ و $\mathbb{X}_m$ مجموعه ξ_{km} است

از: $\mathbb{X}_1$ مقدار a_1 و $\cdots$ و $\mathbb{X}_m$ مقدار ثابت a_m است

نتیجه: $\mathbb{Y}$ مجموعه نایقین η^* است که با (۱۳.۱۰) تعیین می‌شود.

بیان می‌شود.

قضیه ۴.۱۰ [۴۶] در قاعده استنتاج ۴.۱۰، اگر $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{im}, \eta_i$ مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت $\mu_{i1}, \mu_{i2}, \cdots, \mu_{im}, \nu_i$ ، $i = 1, 2, \ldots, k$ باشند، آنگاه

$$\eta^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i \cdot \eta_i^*}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k} \quad (۱۶.۱۰)$$

که در آن η_i^* مجموعه‌های نایقین با تابع عضویت

$$\nu_i^*(y) = \begin{cases} \dfrac{\nu_i(y)}{c_i}, & \text{اگر } \nu_i(y) < c_i/2 \\ \dfrac{\nu_i(y) + c_i - 1}{c_i}, & \text{اگر } \nu_i(y) > 1 - c_i/2 \\ 0.5, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \quad (۱۷.۱۰)$$

هستند و c_i مقادیر ثابت هستند که برای $i = 1, 2, \ldots, k$ با

$$c_i = \min_{1 \le l \le m} \mu_{il}(a_l) \quad (۱۸.۱۰)$$

تعیین می‌شوند.

برهان: برای هر i، چون $\{a_1 \in \xi_{i1}\}, \{a_2 \in \xi_{i2}\}, \ldots, \{a_m \in \xi_{im}\}$ رویدادهای مستقل هستند، برای هر $i = 1, 2, \ldots, k$ داریم

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{j=1}^{m}(a_j \in \xi_{ij})\right\} = \min_{1\le j\le m}\mathcal{M}\{a_j \in \xi_{ij}\} = \min_{1\le l\le m}\mu_{il}(a_l)$$

از این معادلات، درستی قضیه بلافاصله با استفاده از قاعده استنتاج ۴.۱۰ نتیجه می‌شود.

۲.۱۰ سیستم نایقین

سیستم نایقین توسط لیو پیشنهاد شد[۸۹]، و یک تابع از ورودی‌هایش به خروجی‌هایش بر پایه قاعده استنتاج نایقین است. اغلب یک سیستم نایقین ۵ قسمت دارد:

۱. ورودی‌ها داده‌های قطعی هستند که به سیستم وارد می‌شوند؛

۲. یک قاعده_محور که شامل یک مجموعه از قاعده‌های اگر_آنگاه است و توسط افراد خبره مشخص می‌شود؛

۳. یک قاعده استنتاج نایقین که نتایج نایقین از مقدم‌های نایقین استخراج می‌کند؛

۴. یک عملگر مقدار مورد انتظار که نتایج نایقین را به نتایج قطعی تبدیل می‌کند،

۵. خروجی‌ها که داده‌های قطعی هستند و از عملگر مقدار مورد انتظار حاصل شده اند.

حال یک سیستم نایقین را در نظر بگیرید که m ورودی قطعی $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ و n خروجی قطعی $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ دارد. ابتدا، n مجموعه نایقین $\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*$ را از روی m ورودی قطعی با قاعده_محور (یعنی یک مجموعه از قاعده‌های اگر_آنگاه) استنتاج می‌کنیم،

اگر ξ_{11} و ξ_{12} و $\cdots$ و ξ_{1m} آنگاه η_{11} و η_{12} و $\cdots$ و η_{1n}
اگر ξ_{21} و ξ_{22} و $\cdots$ و ξ_{2m} آنگاه η_{21} و η_{22} و $\cdots$ و η_{2n} (۱۹.۱۰)
$\cdots$
اگر ξ_{k1} و ξ_{k2} و $\cdots$ و ξ_{km} آنگاه η_{k1} و η_{k2} و $\cdots$ و η_{kn}

همچنین قاعده استنتاج نایقین

$$\eta_j^* = \sum_{i=1}^{k}\frac{c_i \cdot \eta_{ij}\big|_{(\alpha_1\in\xi_{i1})\cap(\alpha_2\in\xi_{i2})\cap\cdots\cap(\alpha_m\in\xi_{im})}}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k} \qquad (۲۰.۱۰)$$

برای $j = 1, 2, \ldots, n$ نتیجه می‌گیریم که در آن برای $i = 1, 2, \ldots, k$ ضرایب با

$$c_i = \mathcal{M}\{(\alpha_1 \in \xi_{i1}) \cap (\alpha_2 \in \xi_{i2}) \cap \cdots \cap (\alpha_m \in \xi_{im})\} \qquad (۲۱.۱۰)$$

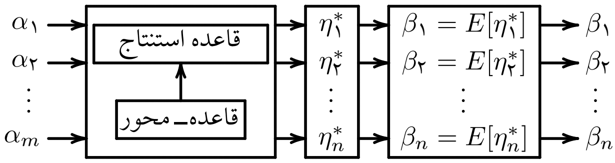
محاسبه می‌شوند. سپس با استفاده از عملگر مقدار مورد انتظار، داریم

$$\beta_j = E[\eta_j^*] \qquad (۲۲.۱۰)$$

اکنون از ورودی‌های $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ تابعی به خروجی‌های $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ساختیم. این تابع را با f نشان می‌دهیم، یعنی

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m). \tag{۲۳.۱۰}$$

پس یک سیستم نایقین f داریم.



شکل ۱.۱۰: یک سیستم نایقین

قضیه ۵.۱۰ *فرض کنید $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{im}, \eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{in}$ مجموعه‌های نایقین مستقل به ترتیب با تابع‌های عضویت $\mu_{i1}, \mu_{i2}, \ldots, \mu_{im}, \nu_{i1}, \nu_{i2}, \ldots, \nu_{in}$ برای $i = 1, 2, \ldots, k$ هستند. آنگاه سیستم نایقین از $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ به $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ به صورت*

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i \cdot E[\eta_{ij}^*]}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k} \tag{۲۴.۱۰}$$

برای $j = 1, 2, \ldots, n$ است که در آن η_{ij}^* مجموعه‌های نایقین با تابع عضویت

$$\nu_{ij}^*(y) = \begin{cases} \dfrac{\nu_{ij}(y)}{c_i}, & \text{اگر } \nu_{ij}(y) < c_i/2 \\ \dfrac{\nu_{ij}(y) + c_i - 1}{c_i}, & \text{اگر } \nu_{ij}(y) > 1 - c_i/2 \\ 0.5, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{۲۵.۱۰}$$

هستند و c_i مقادیر ثابت هستند که برای $i = 1, 2, \ldots, k$ و $j = 1, 2, \ldots, n$ با

$$c_i = \min_{1 \le l \le m} \mu_{il}(\alpha_l) \tag{۲۶.۱۰}$$

محاسبه می‌شوند.

برهان: از قاعده استنتاج ۴.۱۰ نتیجه می‌شود که مجموعه‌های نایقین η_j^* برای $j = 1, 2, \ldots, n$ به صورت

$$\eta_j^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i \cdot \eta_{ij}^*}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k}$$

هستند. چون $\eta_{ij}^*, i = 1, 2, \ldots, k, j = 1, 2, \ldots, n$ مجموعه‌های نایقین مستقل هستند، قضیه بلافاصله از خطی بودن عملگر مقدار مورد انتظار نتیجه می‌شود.

تذکر ۱.۱۰: سیستم نایقین این امکان را فراهم می‌آورد که مجموعه‌های نایقین η_{ij} در قاعده_ محور (۱۹.۱۰) مقادیر ثابت b_{ij} شوند، یعنی برای $k,\ldots,۲,۱ = i$ و $j = ۱,۲,\ldots,n$

$$\eta_{ij} = b_{ij}. \qquad (۲۷.۱۰)$$

در این حالت، سیستم نایقین (۲۴.۱۰) برای $j = ۱,۲,\ldots,n$ به صورت

$$\beta_j = \sum_{i=۱}^{k} \frac{c_i \cdot b_{ij}}{c_۱ + c_۲ + \cdots + c_k} \qquad (۲۸.۱۰)$$

خواهد شد.

تذکر ۲.۱۰: سیستم نایقین این امکان را فراهم می‌آورد که مجموعه‌های نایقین η_{ij} در قاعده_ محور (۱۹.۱۰) تابع‌های h_{ij} از ورودی‌های $\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_m$ شوند، یعنی برای $i = ۱,۲,\ldots,k$ و $j = ۱,۲,\ldots,n$

$$\eta_{ij} = h_{ij}(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_m) \qquad (۲۹.۱۰)$$

در این حالت، سیستم نایقین (۲۴.۱۰) برای $j = ۱,۲,\ldots,n$ به صورت

$$\beta_j = \sum_{i=۱}^{k} \frac{c_i \cdot h_{ij}(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_m)}{c_۱ + c_۲ + \cdots + c_k} \qquad (۳۰.۱۰)$$

خواهد شد.

سیستم‌های نایقین برآوردکننده‌های جامع هستند

سیستم‌های نایقین توانمندی تقریب هر تابع پیوسته روی یک مجموعه فشرده (مجموعه بسته و کراندار) را با هر دقتی دارند. به این دلیل سیستم‌های نایقین می‌توانند نقش یک کنترل کننده را بازی کنند. قضیه بعدی این واقعیت را مطرح می‌کند.

قضیه ۶.۱۰ [۱۳۳] *برای تابع پیوسته معلوم g روی یک مجموعه فشرده $D \subset \Re^m$ و هر مقدار معلوم $\varepsilon > ۰$، یک سیستم نایقین f چنان موجود است که برای هر $(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_m) \in D$*

$$\|f(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_m) - g(\alpha_۱,\alpha_۲,\ldots,\alpha_m)\| < \varepsilon \qquad (۳۱.۱۰)$$

برهان: بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم تابع g یک تابع حقیقی مقدار با دو متغیر $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ بوده و مجموعه فشرده همان مربع واحد $D = [۰,۱] \times [۰,۱]$ است. چون g روی D پیوسته است و بنابراین پیوسته یکنواخت است، برای هر مقدار معلوم $\varepsilon > ۰$، عددی مانند $\delta > ۰$ چنان موجود است که وقتی $\|(\alpha_۱,\alpha_۲) - (\alpha'_۱,\alpha'_۲)\| < \delta$ آنگاه

$$|g(\alpha_۱,\alpha_۲) - g(\alpha'_۱,\alpha'_۲)| < \varepsilon \qquad (۳۲.۱۰)$$

فرض کنید k یک عدد صحیح بزرگتر از $\sqrt{۲}/\delta$ است و برای $i,j = ۱,۲,\ldots,k$ قرار دهید

$$D_{ij} = \left\{(\alpha_۱,\alpha_۲) \mid \frac{i-۱}{k} < \alpha_۱ \le \frac{i}{k},\ \frac{j-۱}{k} < \alpha_۲ \le \frac{j}{k}\right\} \qquad (۳۳.۱۰)$$

توجه کنید که $\{D_{ij}\}$ دنباله ای از مربع‌های مجزا با «قطر» کمتر از δ هستند. مجموعه‌های نایقین

$$\xi_i = \left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{۳۴.۱۰}$$

$$\eta_j = \left(\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{۳۵.۱۰}$$

را تعریف کنید. سپس قاعده‌ـ محور را با $k \times k$ قاعده اگر‌ـ آن‌گاه

$$\text{Rule } ij\text{: If } \xi_i \text{ and } \eta_j \text{ then } g(i/k, j/k), \quad i, j = 1, 2, \ldots, k \tag{۳۶.۱۰}$$

در نظر بگیرید. بر اساس قاعده استنتاج نایقین، سیستم نایقین متناظر از D به $\Re$ به صورت

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = g(i/k, j/k), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in D_{ij},\, i, j = 1, 2, \ldots, k \tag{۳۷.۱۰}$$

است. از (۳۲.۱۰) نتیجه می‌شود که برای هر $(\alpha_1, \alpha_2) \in D_{ij} \subset D$ داریم

$$|f(\alpha_1, \alpha_2) - g(\alpha_1, \alpha_2)| = |g(i/k, j/k) - g(\alpha_1, \alpha_2)| < \varepsilon. \tag{۳۸.۱۰}$$

درستی قضیه بررسی شد. پس سیستم‌های نایقین برآوردگر جامع هستند.

۳.۱۰ کنترل نایقین

کنترل کننده نایقین، طراحی شده توسط لیو، یک سیستم نایقین خاص است که متغیرهای وضعیت یک فرایند تحت کنترل را به متغیرهای عمل تصویر می‌کند. بنابراین یک کنترل کننده نایقین ۵ قسمت سیستم نایقین را شامل می‌شود: ورودی‌ها، قاعده‌ـ محور، یک قاعده استنتاج نایقین، یک عملگر مقدار مورد انتظار، و خروجی‌ها. نکته برجسته این است که ورودی‌های کنترل کننده متغیرهای وضعیت فرایند تحت کنترل و خروجی‌های آن متغیرهای عمل هستند.

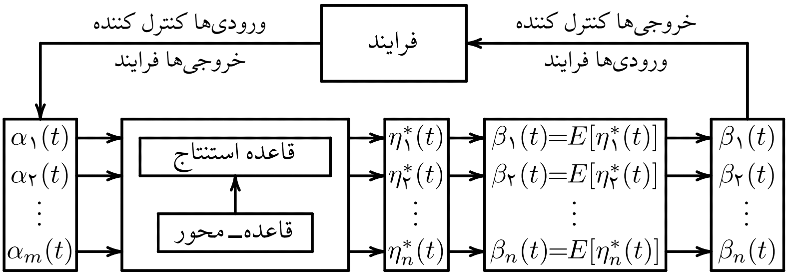
شکل ۲.۱۰ یک سیستم کنترل نایقین شامل یک کنترل کننده و یک فرایند را نشان می‌دهد. توجه کنید که t نشان دهنده زمان است، $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_m(t)$ نه تنها نشان دهنده ورودی‌های کنترل کننده نایقین هستند بلکه خروجی‌های سیستم نیز هستند، و $\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_n(t)$ نه تنها خروجی‌های کنترل کننده نایقین هستند بلکه ورودی‌های فرایند نیز هستند.

۴.۱۰ آونگ معکوس

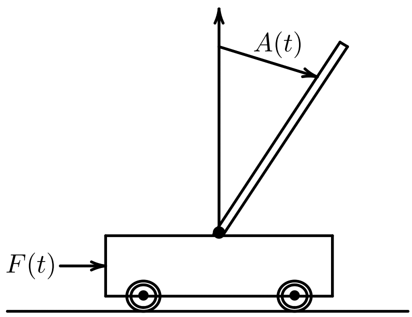
سیستم آونگ معکوس یک سیستم ناپایدار غیرخطی است که برای آزمون الگوریتم‌های کنترل استفاده می‌شود. روش‌های خوب بسیاری برای تعادل آونگ معکوس وجود دارند. در بین آنها، گائو توانست با موفقیت آونگ معکوس را با استفاده از کنترل کننده نایقین با تعداد 5×5 قاعده اگر‌ـ آن‌گاه متعادل کند.

کنترل کننده نایقین دو ورودی («زاویه» و «سرعت زاویه‌ای») و یک خروجی («نیرو») دارد. هر سه با مجموعه نایقین که با

NL	«منفی بزرگ»
NS	«منفی کوچک»
Z	«صفر»
PS	«مثبت کوچک»
PL	«مثبت بزرگ»



شکل ۲.۱۰: یک سیستم کنترل نایقین



شکل ۳.۱۰: یک آونگ معکوس که در آن $A(t)$ نشان دهنده موقعیت زاویه‌ای و $F(t)$ بیانگر نیرویی است که ارابه را در زمان t پیش می‌راند.

برچسب زده شده اند نشان داده خواهند شد. تابع عضویت این مجموعه‌های نایقین در شکل‌های ۴.۱۰، ۵.۱۰ و ۶.۱۰ نشان داده شده اند.

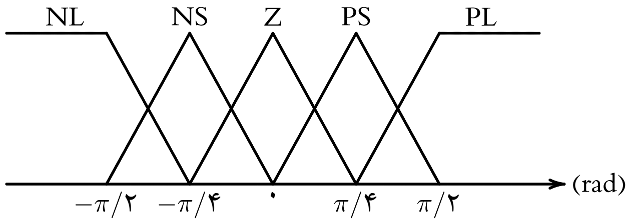
به شکل شهودی، وقتی آونگ معکوس زاویه بزرگ و سرعت زاویه‌ای بزرگ ساعتگرد داشته باشد، باید نیروی بزرگی به سمت راست وارد کنیم.

اگرزاویه منفی بزرگ است
و سرعت زاویه‌ای منفی بزرگ است،
آنگاه نیرو مثبت بزرگ است.

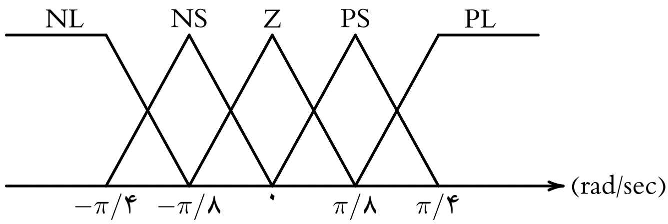
به طور مشابه، وقتی آونگ معکوس زاویه خلاف ساعتگرد بزرگ و سرعت زاویه‌ای خلاف ساعتگرد بزرگ دارد، باید نیروی بزرگی به سمت چپ وارد کنیم.

اگر زاویه بزرگ مثبت است
وسرعت زاویه‌ای بزرگ مثبت است،
آن‌گاه نیرو بزرگ منفی است.

توجه کنید که هر ورودی و هر خروجی ۵ وضعیت دارد و هر وضعیت یک مجموعه نایقین را نشان می‌دهد. پس قاعده‌ـ محور ۵ $\times$ ۵ قاعده اگرـ آن‌گاه دارد. برای تعادل آونگ معکوس، ۲۵ قاعده اگرـ آن‌گاه که در جدول ۱.۱۰ داده شده است وجود دارند.



شکل ۴.۱۰: تابع‌های عضویت «زاویه».

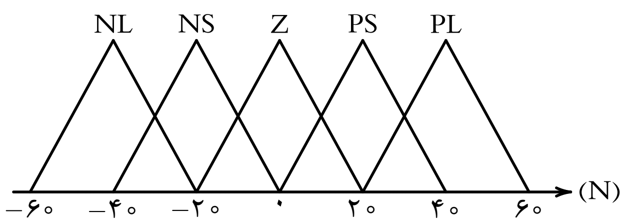


شکل ۵.۱۰: تابع‌های عضویت «سرعت زاویه‌ای»

نتایج شبیه سازی‌های زیاد نشان می‌دهدکه کنترل کننده نایقین با موفقیت آونگ معکوس را متعادل می‌کند.

۵.۱۰ نکات کتابشناسی

مفهوم اساسی استنتاج نایقین در سال ۲۰۱۰ با استفاده از مجموعه نایقین شرطی توسط لیو پایه‌گذاری شد [۸۹]. بعد گائو‌ـ گائو‌ـ رالسکو قاعده استنتاج نایقین را به حالت مقدم‌های متعدد و قاعده‌های اگر‌ـ آن‌گاه متعدد تعمیم دادند [۴۶]. بر اساس قاعده‌های استنتاج نایقین، لیو مفهوم سیستم نایقین را مطرح کرد [۸۹] و بعد ابزار کنترل کننده نایقین را ارائه داد. به عنوان یک نتیجه مهم؛ پِنگ‌ـ چِن ثابت کردند که سیستم‌های نایقین برآوردگرهای جامع هستند و سپس نشان دادند که کنترل کننده‌های نایقین ابزارهای معقول هستند [۱۳۳]. به عنوان یک کاربرد موفق، گائو توانست با استفاده از کنترل



شکل ۶.۱۰: تابع‌های عضویت «نیرو».

جدول ۱.۱۰: قاعده مجور با ۵ × ۵ قاعده اگر_آن‌گاه

سرعت / زاویه	NL	NS	Z	PS	PL
NL	PL	PL	PL	PS	Z
NS	PL	PL	PS	Z	NS
Z	PL	PS	Z	NS	NL
PS	PS	Z	NS	NL	NL
PL	Z	NS	NL	NL	NL

کننده نایقین، آونگ معکوس را متعادل کند [۵۱].

فصل ۱۱

فرایند نایقین

مطالعه فرایند نایقین در سال ۲۰۰۸ توسط لیو برای مدل کردن تحول پدیده‌های نایقین شروع شد [۸۵]. این فصل مفهوم فرایند نایقین را ارائه کرده و مسیر نمونه‌ای، توزیع نایقینی، فرایند رشد مستقل، زمان اولین برخورد، انتگرال زمان، و فرایند رشد مانا را معرفی می‌کند.

۱.۱۱ فرایند نایقین

یک فرایند نایقین یک دنباله از متغیرهای نایقین است که با زمان اندیس گذاری شده اند.

تعریف ۱.۱۱ [۸۵] *فضای نایقین $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را در نظر گرفته و فرض کنید T یک مجموعه مرتب کلی (مثلاً زمان) است. یک فرایند نایقین یک تابع $X_t(\gamma)$ از $T \times (\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ به مجموعه اعداد حقیقی است طوری که $\{X_t \in B\}$ برای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی در هر زمان t یک رویداد است.*

تذکر ۱.۱۱: تعریف بالا بیان می‌کند که X_t یک فرایند نایقین است اگر و تنها اگر برای هر زمان t یک متغیر نایقین باشد.

مثال ۱.۱۱: فرض کنید فضای نایقین $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = ۰/۶$، $\mathcal{M}\{\gamma_۲\} = ۰/۴$ است. پس

$$X_t(\gamma) = \begin{cases} t, & \gamma = \gamma_۱ \text{ اگر} \\ t+۱, & \gamma = \gamma_۲ \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱.۱۱)$$

یک فرایند نایقین است.

مثال ۲.۱۱: فرض کنید فضای نایقین $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[۰, ۱]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. پس

$$X_t(\gamma) = t - \gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma \qquad (۲.۱۱)$$

یک فرایند نایقین است.

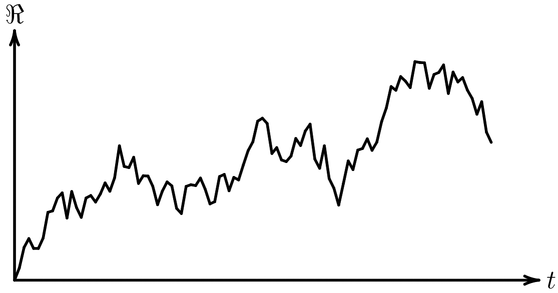
مثال ۳.۱۱: یک تابع حقیقی مقدار $f(t)$ نسبت به زمان t را می‌توان به عنوان یک فرایند نایقین خاص روی فضای نایقین $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ در نظر گرفت، یعنی

$$X_t(\gamma) = f(t), \quad \forall\gamma \in \Gamma. \qquad (۳.۱۱)$$

مسیر نمونه‌ای

تعریف ۲.۱۱ [۸۵] *فرایند نایقین X_t را در نظر بگیرید. برای هر $\gamma \in \Gamma$، تابع $X_t(\gamma)$ را یک مسیر نمونه‌ای از X_t می‌نامند.*

توجه داشته باشید که هر مسیر نمونه‌ای یک تابع حقیقی مقدار از زمان t است. همچنین، یک فرایند ممکن است به عنوان تابع از فضای نایقین به گرادیه مسیرهای نمونه در نظر گرفته شود.



شکل ۱.۱۱: یک مسیر نمونه‌ای از فرایند نایقین.

تعریف ۳.۱۱ *یک فرایند نایقین X_t را پیوسته‌ـ نمونه گویند اگر تقریباً همه مسیرها نسبت به زمان t پیوسته باشند.*

۲.۱۱ توزیع نایقینی

توزیع نایقین یک فرایند نایقین دنباله‌ای از توزیع‌های نایقین متغیرهای نایقین است که با زمان اندیس گذاری شده اند. پس توزیع نایقینی فرایند نایقین به جای یک خم یک رویه است. تعریف رسمی در ادامه ارائه می‌شود.

تعریف ۴.۱۱ [۱۰۱] *توزیع نایقین $\Phi_t(x)$ از فرایند نایقین X_t برای هر زمان t و هر عدد x با*

$$\Phi_t(x) = \mathcal{M}\{X_t \le x\} \qquad (۴.۱۱)$$

تعریف می‌شود.

یعنی؛ فرایند نایقین X_t توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ دارد اگر برای هر زمان t، متغیر نایقین X_t توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ داشته باشد.

مثال ۴.۱۱: فرایند نایقین خطی $X_t \sim \mathcal{L}(at, bt)$ توزیع نایقینی

$$\Phi_t(x) = \begin{cases} \circ, & \text{اگر } x \leq at \\ \dfrac{x-at}{(b-a)t}, & \text{اگر } at \leq x \leq bt \\ ۱, & \text{اگر } x \geq bt \end{cases} \tag{۵.۱۱}$$

دارد.

مثال ۵.۱۱: فرایند نایقین زیگزاگ $X_t \sim \mathcal{Z}(at, bt, ct)$ توزیع نایقینی

$$\Phi_t(x) = \begin{cases} \circ, & \text{اگر } x \leq at \\ \dfrac{x-at}{۲(b-a)t}, & \text{اگر } at \leq x \leq bt \\ \dfrac{x+ct-۲bt}{۲(c-b)t}, & \text{اگر } bt \leq x \leq ct \\ ۱, & \text{اگر } x \geq ct \end{cases} \tag{۶.۱۱}$$

دارد.

مثال ۶.۱۱: فرایند نایقین نرمال $X_t \sim \mathcal{N}(et, \sigma t)$ توزیع نایقینی

$$\Phi_t(x) = \left(۱ + \exp\left(\frac{\pi(et-x)}{\sqrt{۳}\sigma t}\right)\right)^{-۱}. \tag{۷.۱۱}$$

دارد.

مثال ۷.۱۱: فرایند نایقین لوگ‌ـ‌نرمال $X_t \sim \mathcal{LOGN}(et, \sigma t)$ توزیع نایقینی

$$\Phi_t(x) = \left(۱ + \exp\left(\frac{\pi(et-\ln x)}{\sqrt{۳}\sigma t}\right)\right)^{-۱}. \tag{۸.۱۱}$$

دارد.

تمرین ۱.۱۱: فرض کنید فضای نایقین $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ مجموعه $\{\gamma_۱, \gamma_۲\}$ همراه با مجموعه توانی و $\mathcal{M}\{\gamma_۱\} = \circ/۶$، $\mathcal{M}\{\gamma_۲\} = \circ/۴$ است. توزیع نایقینی فرایند نایقین

$$X_t(\gamma) = \begin{cases} t, & \text{اگر } \gamma = \gamma_۱ \\ t+۱, & \text{اگر } \gamma = \gamma_۲ \end{cases} \tag{۹.۱۱}$$

را مشخص کنید.

تمرین ۲.۱۱: فرض کنید فضای نایقین $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[\circ, ۱]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. توزیع نایقینی فرایند نایقین

$$X_t(\gamma) = t - \gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma \tag{۱۰.۱۱}$$

را مشخص کنید.

تمرین ۳.۱۱: تابع حقیقی‌ـ مقدار نسبت به زمان t یک فرایند نایقین خاص است. توزیع نایقینی $f(t)$ چیست؟

تمرین ۴.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نایقین با توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ است و a و b دو عدد حقیقی با $a > ۰$ است. نشان دهید $aX_t + b$ توزیع نایقینی

$$\Psi_t(x) = \Phi_t((x-b)/a) \qquad (۱۱.۱۱)$$

دارد.

تمرین ۵.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نایقین با توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ است و a و b دو عدد حقیقی با $a < ۰$ است. نشان دهید $aX_t + b$ توزیع نایقینی

$$\Psi_t(x) = ۱ - \Phi_t((x-b)/a) \qquad (۱۲.۱۱)$$

دارد.

تمرین ۶.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نایقین با توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ است و $f(x)$ یک تابع پیوسته و افزایشی اکید است. نشان دهید $f(X_t)$ توزیع نایقینی

$$\Psi_t(x) = \Phi_t(f^{-۱}(x)) \qquad (۱۳.۱۱)$$

دارد.

تمرین ۷.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نایقین با توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ است و $f(x)$ یک تابع پیوسته و کاهشی اکید است. نشان دهید $f(X_t)$ توزیع نایقینی

$$\Psi_t(x) = ۱ - \Phi_t(f^{-۱}(x)) \qquad (۱۴.۱۱)$$

دارد.

قضیه ۱.۱۱ ([۱۰۱]، *شرط لازم و کافی) تابع* $\Phi_t(x) : T \times \Re \to [۰, ۱]$ *توزیع نایقینی یک فرایند نایقین است اگر و تنها اگر در هر زمان* t*، یک تابع افزایشی یکنوا نسبت به* x *باشد مگر آن که* $\Phi_t(x) : T \times \Re \to [۰, ۱]$ *و* $\Phi_t(x) \equiv ۱$.

برهان: اگر $\Phi_t(x)$ توزیع نایقینی یک فرایند نایقین مانند X_t باشد، آنگاه در هر زمان t، $\Phi_t(x)$ یک توزیع نایقینی برای متغیر نایقین X_t است. از قضیه پِنگ‌ـ ایواموراً نتیجه می‌شود که $\Phi_t(x)$ نسبت به x یک تابع افزایشی یکنوا است و $\Phi_t(x) \not\equiv ۰$، $\Phi_t(x) \not\equiv ۱$. برعکس، اگر در هر زمان t، $\Phi_t(x)$ یک تابع افزایشی یکنوا بوده بجز $\Phi_t(x) \equiv ۰$ و $\Phi_t(x) \equiv ۱$، از قضیه پِنگ‌ـ ایواموراً نتیجه می‌شود که یک متغیر نایقین ξ_t موجود است که توزیع نایقینی آن $\Phi_t(x)$ است. تعریف کنید

$$X_t = \xi_t, \quad \forall t \in T.$$

پس X_t یک فرایند نایقین است و توزیع نایقینی آن $\Phi_t(x)$ است. قضیه ثابت می‌شود.

توزیع نایقینی منظم

تعریف ۵.۱۱ [۱۰۱] *توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ را منظم گویند اگر در هر زمان t، یک تابع پیوسته و افزایشی اکید نسبت به x باشد طوری که $\circ < \Phi_t(x) < ۱$، و*

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi_t(x)=\circ,\quad \lim_{x\to+\infty}\Phi_t(x)=۱. \tag{۱۵.۱۱}$$

واضح است که توزیع‌های نایقینی خطی، زیگزاک، نرمال و لوگ_نرمال فرایندهای نایقین منظم هستند.

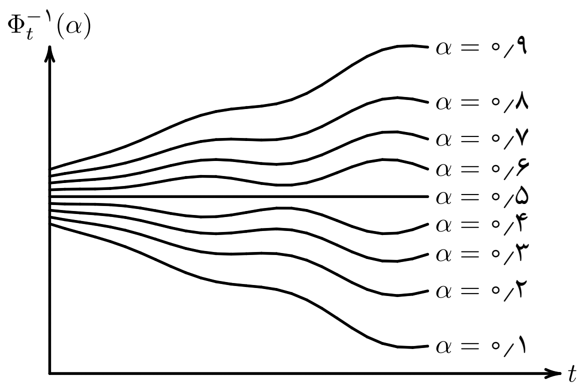
توزیع نایقینی معکوس

تعریف ۶.۱۱ [۱۰۱] *فرایند نایقین X_t را با توزیعی نایقینی منظم $\Phi_t(x)$ در نظر بگیرید. تابع معکوس $\Phi_t^{-۱}(\alpha)$ را توزیعی نایقینی معکوس X_t گویند.*

توجه کنید که در هر زمان t، توزیع نایقینی معکوس $\Phi_t^{-۱}(\alpha)$ روی بازه باز $(\circ, ۱)$ خوش تعریف است. اگر لازم باشد می‌توان با تعریف

$$\Phi_t^{-۱}(\circ)=\lim_{\alpha\downarrow\circ}\Phi_t^{-۱}(\alpha),\quad \Phi_t^{-۱}(۱)=\lim_{\alpha\uparrow۱}\Phi_t^{-۱}(\alpha) \tag{۱۶.۱۱}$$

دامنه را به $[\circ, ۱]$ توسیع داد.



شکل ۲.۱۱: توزیع نایقینی معکوس فرایند نایقین.

مثال ۸.۱۱: فرایند نایقین خطی $X_t \sim \mathcal{L}(at, bt)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_t^{-۱}(\alpha)=(۱-\alpha)at+\alpha bt, \tag{۱۷.۱۱}$$

دارد.

مثال ۹.۱۱: فرایند نایقین زیگزاگ $X_t \sim \mathcal{Z}(at, bt, ct)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)at + 2\alpha bt, & \alpha < 0/5 \text{ اگر } \\ (2 - 2\alpha)bt + (2\alpha - 1)ct, & \alpha \geq 0/5 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۱۸.۱۱}$$

دارد.

مثال ۱۰.۱۱: فرایند نایقین نرمال $X_t \sim \mathcal{N}(et, \sigma t)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = et + \frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \tag{۱۹.۱۱}$$

دارد.

مثال ۱۱.۱۱: فرایند لوگ‌ـ نرمال نایقین $X_t \sim \mathcal{LOGN}(et, \sigma t)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1 - \alpha}\right), \tag{۲۰.۱۱}$$

دارد.

تمرین ۸.۱۱: فرض کنید فضای نایقین $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ بازه $[0, 1]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. توزیع نایقینی معکوس فرایند نایقین

$$X_t(\gamma) = t - \gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \tag{۲۱.۱۱}$$

را مشخص کنید.

تمرین ۹.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نایقین با توزیع نایقینی منظم $\Phi_t(x)$ است و a و b را دو عدد حقیقی در نظر بگیرید. (۱) اگر $a > 0$، آنگاه $aX_t + b$ توزیغ نایقین معکوس

$$\Psi_t^{-1}(\alpha) = a\Phi_t^{-1}(\alpha) + b, \tag{۲۲.۱۱}$$

دارد و (۲) اگر $a < 0$ آنگاه $aX_t + b$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_t^{-1}(\alpha) = a\Phi_t^{-1}(1 - \alpha) + b, \tag{۲۳.۱۱}$$

دارد.

تمرین ۱۰.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نایقین با توزیع نایقینی منظم $\Phi_t(x)$ است و $f(x)$ یک تابع افزایشی اکید است. نشان دهید $f(X_t)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_t^{-1}(\alpha) = f(\Phi_t^{-1}(\alpha)), \tag{۲۴.۱۱}$$

دارد.

تمرین ۱۱.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نایقین با توزیع نایقینی منظم $\Phi_t(x)$ است و $f(x)$ یک تابع کاهشی اکید است. نشان دهید $f(X_t)$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_t^{-1}(\alpha) = f(\Phi_t^{-1}(1 - \alpha)), \tag{۲۵.۱۱}$$

دارد.

قضیه ۲.۱۱ [۱۰۱] *تابع $\Phi_t^{-1}(\alpha): T\times(0,1)\to\Re$ توزیع نایقینی معکوس برای یک فرایند نایقین است اگر در هر نقطه t، پیوسته و نسبت به α افزایشی اکید باشد.*

برهان: در هر زمان t، چون $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ یک تابع پیوسته و افزایشی اکید نسبت به α است، از قضیه ۶.۲ نتیجه می‌شود که متغیر نایقین ξ_t توزیع نایقینی معکوس $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ وجود دارد. تعریف کنید

$$X_t=\xi_t,\quad \forall t\in T.$$

پس X_t یک فرایند نایقین با توزیع نایقینی معکوس $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ است. قضیه ثابت می‌شود.

۳.۱۱ استقلال و قانون عملیاتی

تعریف ۷.۱۱ [۱۰۱] *فرایندهای نایقین $X_{1t},X_{2t},\ldots,X_{nt}$ را مستقل گویند اگر برای هر عدد صحیح مثبت k و هر زمان $t_1,t_2,\ldots,t_k$، بردارهای نایقین*

$$\boldsymbol{\xi}_i=(X_{it_1},X_{it_2},\ldots,X_{it_k}),\quad i=1,2,\ldots,n \tag{۲۶.۱۱}$$

مستقل باشند، یعنی برای مجموعه‌های بورل $B_1,B_2,\ldots,B_n$ از بردارهای حقیقی kـ بعدی، داشته باشیم

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\xi}_i\in B_i)\right\}=\bigwedge_{i=1}^{n}\mathcal{M}\{\boldsymbol{\xi}_i\in B_i\}. \tag{۲۷.۱۱}$$

تمرین ۱۲.۱۱: فرض کنید $X_{1t},X_{2t},\ldots,X_{nt}$ فرایندهای نایقین مستقل هستند و $t_1,t_2,\ldots,t_n$ زمان‌های دلخواه هستند. نشان دهید

$$X_{1t_1},X_{2t_2},\ldots,X_{nt_n} \tag{۲۸.۱۱}$$

متغیرهای نایقین مستقل هستند.

تمرین ۱۳.۱۱: فرض کنید X_t و Y_t فرایندهای نایقین مستقل هستند. نشان دهید برای هر زمان $t_1,t_2,\ldots,t_k$ و $s_1,s_2,\ldots,s_m$،

$$(X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_k}) \text{ و } (Y_{s_1},Y_{s_2},\ldots,Y_{s_m}) \tag{۲۹.۱۱}$$

بردارهای نایقین مستقل هستند.

قضیه ۳.۱۱ [۱۰۱] *فرایندهای نایقین $X_{1t},X_{2t},\ldots,X_{nt}$ مستقل هستند اگر و تنها اگر برای هر عدد صحیح مثبت k، زمان‌های دلخواه $t_1,t_2,\ldots,t_k$، و مجموعه‌های بورل دلخواه $B_1,B_2,\ldots,B_n$ از بردارهای kـ بعدی حقیقی داشته باشیم*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\xi}_i\in B_i)\right\}=\bigvee_{i=1}^{n}\mathcal{M}\{\boldsymbol{\xi}_i\in B_i\} \tag{۳۰.۱۱}$$

که در آن برای هر $i=1,2,\ldots,n$، $\boldsymbol{\xi}_i=(X_{it_1},X_{it_2},\ldots,X_{it_k})$.

برهان: از قضیه ۶۱.۲ نتیجه می‌شود که $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ فرایندهای نایقین مستقل هستند اگر و تنها اگر (۳۰.۱۱) برقرار باشد. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۴.۱۱ *([۱۰۱]، قانون عملیاتی) فرض کنید $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ فرایندهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقین منظم $\Phi_{1t}, \Phi_{2t}, \cdots, \Phi_{nt}$ هستند. اگر تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نسبت به $x_1, x_2, \ldots, x_m$ افزایشی اکید و نسبت به x_{m+1}، $x_{m+2}, \ldots, x_n$ کاهشی اکید باشد، آنگاه*

$$X_t = f(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}) \tag{۳۱.۱۱}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = f(\Phi_{1t}^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_{mt}^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1,t}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_{nt}^{-1}(1-\alpha)), \tag{۳۲.۱۱}$$

دارد.

برهان: در هر زمان t، واضح است که $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقین $\Phi_{1t}^{-1}(\alpha), \Phi_{2t}^{-1}(\alpha), \ldots$، $\Phi_{nt}^{-1}(\alpha)$ هستند. قضیه بلافاصله از قانون عملیاتی متغیرهای نایقین نتیجه می‌شود.

قضیه ۵.۱۱ *(قانون عملیاتی) فرض کنید $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ فرایندهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقین پیوسته $\Phi_{1t}, \Phi_{2t}, \cdots, \Phi_{nt}$ هستند. اگر تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ پیوسته، نسبت به $x_1, x_2, \ldots, x_m$ افزایشی اکید و نسبت به x_{m+1}، $x_{m+2}, \ldots, x_n$ کاهشی اکید باشد، آنگاه*

$$X_t = f(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}) \tag{۳۳.۱۱}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_t(x) = \sup_{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x} \left(\min_{1 \le i \le m} \Phi_{it}(x_i) \wedge \min_{m+1 \le i \le n} (1 - \Phi_{it}(x_i)) \right). \tag{۳۴.۱۱}$$

دارد.

برهان: در هر زمان t، واضح است که $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ متغیرهای نایقین مستقل هستند. قضیه بلافاصله از قانون عملیاتی متغیرهای نایقین نتیجه می‌شود.

۴.۱۱ فرایند نمو مستقل

فرایند رشد مستقل یک فرایند نایقین است که نموهای مستقل دارد. تعریف رسمی در ادامه بیان می‌شود.

تعریف ۸.۱۱ *[۸۵] فرایند نایقین X_t نموهای مستقل دارد اگر*

$$X_{t_1},\ X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \ldots,\ X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \tag{۳۵.۱۱}$$

متغیرهای نایقین مستقل باشند و $t_1, t_2, \ldots, t_k$ زمان‌های دلخواه با $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$.

به عبارت دیگر، فرایند نمو مستقل به این معنی است که تا زمانی که بازه های زمانی تلاقی نداشته باشند؛ نموها متغیرهای نایقین مستقل هستند. توجه کنید که نموها مستقل از وضعیت آغازین نیز هستند.

قضیه ۶.۱۱ [۱۰۱] *فرض کنید $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس یک فرایند نمو مستقل است. پس (۱) $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ پیوسته است و نسبت به α در هر زمان t یک تابع افزایشی اکید است، (۲) $\Phi_t^{-1}(\alpha) - \Phi_s^{-1}(\alpha)$ یک تابع افزایشی یکنوا نسبت به α برای هر زمان $t > s$ است.*

برهان: چون $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس فرایند نمو مستقل X_t است، از قضیه ۲.۱۱ نتیجه می‌شود که $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ پیوسته است و نسبت به α یک تابع افزایشی اکید است. چون برای هر $\beta > \alpha$، $X_t = X_s + (X_t - X_s)$، بلافاصله داریم

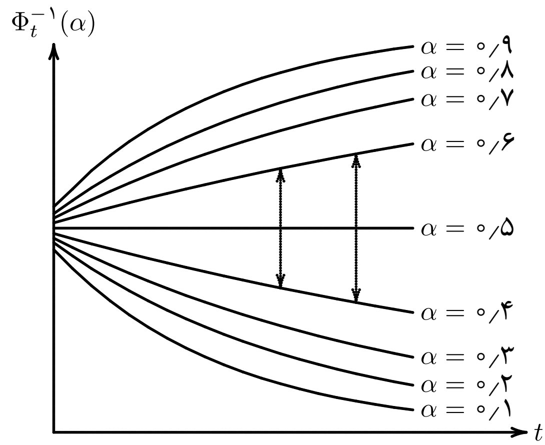
$$\Phi_t^{-1}(\beta) - \Phi_t^{-1}(\alpha) \geq \Phi_s^{-1}(\beta) - \Phi_s^{-1}(\alpha).$$

یعنی

$$\Phi_t^{-1}(\beta) - \Phi_s^{-1}(\beta) \geq \Phi_t^{-1}(\alpha) - \Phi_s^{-1}(\alpha).$$

پس $\Phi_t^{-1}(\alpha) - \Phi_s^{-1}(\alpha)$ یک تابع افزایشی یکنوا نسبت به α است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تذکر ۲.۱۱: از قضیه ۶.۱۱ نتیجه می‌شود که توزیع نایقینی فرایند نمو مستقل شکلی شبیه شاخ دارد. شکل ۳.۱۱ را نگاه کنید.



شکل ۳.۱۱: توزیع نایقینی معکوس فرایند نمو مستقل: یک خانواده از تابع‌های شاخ‌ـ مانند از متغیر t اندیس شده با α.

قضیه ۷.۱۱ [۱۰۱] *تابع $\Phi_t^{-1}(\alpha) : T \times (۰, ۱) \to \Re$ را در نظر بگیرید. اگر (۱) $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ پیوسته و نسبت به α در هر زمان t یک تابع افزایشی اکید باشد و (۲) $\Phi_t^{-1}(\alpha) - \Phi_s^{-1}(\alpha)$ برای هر زمان $t > s$، نسبت α یک تابع افزایشی یکنوا باشد، آنگاه یک فرایند نمو مستقل موجود دارد که توزیع نایقینی معکوس آن $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ است.*

برهان: بدون از دست دادن کلیت، فقط $t \in [0, 1]$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت است. چون $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ یک تابع پیوسته و افزایشی اکید است و $\Phi_t^{-1}(\alpha) - \Phi_s^{-1}(\alpha)$ تابع افزایشی یکنوا نسبت به α است، متغیرهای نایقین مستقل $\xi_{0n}, \xi_{1n}, \ldots, \xi_{nn}$ موجودند طوری که ξ_{0n} توزیع نایقینی معکوس

$$\Upsilon_{0n}^{-1}(\alpha) = \Phi_0^{-1}(\alpha)$$

و ξ_{in} برای $i = 1, 2, \ldots, n$ توزیع‌های نایقینی

$$\Upsilon_{in}(x) = \sup\left\{\alpha \,|\, \Phi_{i/n}^{-1}(\alpha) - \Phi_{(i-1)/n}^{-1}(\alpha) = x\right\},$$

دارند. فرایند نایقین

$$X_t^n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \xi_{in}, \quad t = \frac{k}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n) & \text{اگر} \\ \text{خطی}, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

را تعریف کنید. می‌توان ثابت کرد که X_t^n در توزیع با $n \to \infty$ همگرا است. علاوه بر آن می‌توان تحقیق کرد که این حد حتما یک فرایند نمو مستقل با توزیع نایقینی معکوس $\Phi_t^{-1}(\alpha)$ است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۸.۱۱ *فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل نمونه‌ـ پیوسته با توزیع نایقینی منظم $\Phi_t(x)$ است. پس برای هر $\alpha \in (0, 1)$ داریم*

$$\mathcal{M}\{X_t \le \Phi_t^{-1}(\alpha), \forall t\} = \alpha, \tag{۳۶.۱۱}$$

$$\mathcal{M}\{X_t > \Phi_t^{-1}(\alpha), \forall t\} = 1 - \alpha. \tag{۳۷.۱۱}$$

برهان: این قضیه هنوز یک حدس است.

تذکر ۳.۱۱: همچنین نشان داده می‌شود که برای هر $\alpha \in (0, 1)$ دو رابطه زیر درست هستند

$$\mathcal{M}\{X_t < \Phi_t^{-1}(\alpha), \forall t\} = \alpha, \tag{۳۸.۱۱}$$

$$\mathcal{M}\{X_t \ge \Phi_t^{-1}(\alpha), \forall t\} = 1 - \alpha. \tag{۳۹.۱۱}$$

یادآوری می‌کنیم که $\{X_t < \Phi_t^{-1}(\alpha), \forall t\}$ و $\{X_t \ge \Phi_t^{-1}(\alpha), \forall t\}$ رویدادهای مجزا هستند ولی رویدادهای متقابل نیستند. هرچند همواره درست است که

$$\mathcal{M}\{X_t < \Phi_t^{-1}(\alpha), \forall t\} + \mathcal{M}\{X_t \ge \Phi_t^{-1}(\alpha), \forall t\} \equiv 1, \tag{۴۰.۱۱}$$

ولی اجتماع $\{X_t < \Phi_t^{-1}(\alpha), \forall t\}$ و $\{X_t \ge \Phi_t^{-1}(\alpha), \forall t\}$ مجموعه مرجع را تولید نمی‌کند، و ممکن است که

$$\mathcal{M}\{(X_t < \Phi_t^{-1}(\alpha),\ \forall t) \cup (X_t \ge \Phi_t^{-1}(\alpha),\ \forall t)\} < 1. \tag{۴۱.۱۱}$$

۵.۱۱ قضیه مقدار فرین

این بخش تعدادی قضیه مقدار فرین برای فرایندهای نمو مستقل نمونه‌ـ پیوسته ارائه می‌کند.

قضیه ۹.۱۱ ([۹۷]، *قضیه مقدار فرین*) *فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل نمونه‌ـ پیوسته با توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ است. پس سوپریمم*

$$\sup_{0\le t\le s} X_t \tag{۴۲.۱۱}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \inf_{0\le t\le s} \Phi_t(x); \tag{۴۳.۱۱}$$

دارد و اینفیموم

$$\inf_{0\le t\le s} X_t \tag{۴۴.۱۱}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \sup_{0\le t\le s} \Phi_t(x) \tag{۴۵.۱۱}$$

دارد.

برهان: فرض کنید $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = s$ افرازی برای بازه بسته $[0, s]$ است. واضح است که برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$

$$X_{t_i} = X_{t_1} + (X_{t_2} - X_{t_1}) + \cdots + (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$$

چون نموهای

$$X_{t_1},\ X_{t_2} - X_{t_1},\ \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

متغیرهای نایقین مستقل هستند، از قضیه ۱۸.۲ نتیجه می‌شود که بیشینه

$$\max_{1\le i\le n} X_{t_i}$$

توزیع نایقینی

$$\min_{1\le i\le n} \Phi_{t_i}(x)$$

دارد. چون X_t نمونه‌ـ پیوسته است، داریم

$$\max_{1\le i\le n} X_{t_i} \to \sup_{0\le t\le s} X_t$$

و وقتی $n \to \infty$

$$\min_{1\le i\le n} \Phi_{t_i}(x) \to \inf_{0\le t\le s} \Phi_t(x).$$

به این ترتیب (۴۳.۱۱) ثابت شد. به طور مشابه از قضیه ۱۸.۲ نتیجه می‌شود که کمینه

$$\min_{1\le i\le n} X_{t_i}$$

توزیع نایقینی

$$\max_{1\le i\le n} \Phi_{t_i}(x)$$

دارد. چون X_t نمونه‌ـ پیوسته است داریم

$$\min_{1\le i\le n} X_{t_i} \to \inf_{0\le t\le s} X_t$$

و وقتی $n\to\infty$

$$\max_{1\le i\le n} \Phi_{t_i}(x) \to \sup_{0\le t\le s} \Phi_t(x)$$

به این ترتیب (۴۵.۱۱) برقرار است.

مثال ۱۲.۱۱: شرط نمونه‌ـ پیوستگی در قضیه ۹.۱۱ را نمی‌توان حذف کرد. برای مثال فرض کنید فضای نایقین $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})$ بازه $[0,1]$ همراه با جبر بورل و اندازه لبگ است. فرایند نایقین نمونه‌ـ ناپیوسته

$$X_t(\gamma)=\begin{cases} 0, & \gamma\ne t \text{ اگر } \\ 1, & \gamma=t \text{ اگر } \end{cases} \tag{۴۶.۱۱}$$

را تعریف کنید. چون تمامی نموها تقریباً قطعی ۰ هستند، X_t یک فرایند نمو مستقل است. از طرف دیگر، X_t توزیع نایقینی

$$\Phi_t(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ اگر } \\ 1, & x\ge 0 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۴۷.۱۱}$$

دارد. همچنین، سوپریموم

$$\sup_{0\le t\le 1} X_t(\gamma)\equiv 1 \tag{۴۸.۱۱}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \text{ اگر } \\ 1, & x\ge 1 \text{ اگر } \end{cases} \tag{۴۹.۱۱}$$

دارد. پس

$$\Psi(x)\ne \inf_{0\le t\le 1} \Phi_t(x). \tag{۵۰.۱۱}$$

بنابراین نمی‌توان شرط نمونه‌ـ پیوستگی را حذف کرد.

تمرین ۱۴.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل نمونه‌ـ پیوسته با توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ است. فرض کنید f یک تابع افزایشی اکید و پیوسته است. نشان دهید سوپریموم

$$\sup_{0\le t\le s} f(X_t) \tag{۵۱.۱۱}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \inf_{\circ \le t \le s} \Phi_t(f^{-\backslash}(x)); \tag{۵۲.۱۱}$$

دارد و اینفیموم

$$\inf_{\circ \le t \le s} f(X_t) \tag{۵۳.۱۱}$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \sup_{\circ \le t \le s} \Phi_t(f^{-\backslash}(x)) \tag{۵۴.۱۱}$$

دارد.

تمرین ۱۵.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل نمونه‌ـ مستقل با توزیع نایقینی پیوسته $\Phi_t(x)$ است. فرض کنید f یک تابع کاهشی اکید و پیوسته است. نشان دهید سوپریموم

$$\sup_{\circ \le t \le s} f(X_t) \tag{۵۵.۱۱}$$

توریع نایقین

$$\Psi(x) = ۱ - \sup_{\circ \le t \le s} \Phi_t(f^{-\backslash}(x)); \tag{۵۶.۱۱}$$

دارد و ایفیموم

$$\inf_{\circ \le t \le s} f(X_t) \tag{۵۷.۱۱}$$

توریع نایقین

$$\Psi(x) = ۱ - \inf_{\circ \le t \le s} \Phi_t(f^{-\backslash}(x)) \tag{۵۸.۱۱}$$

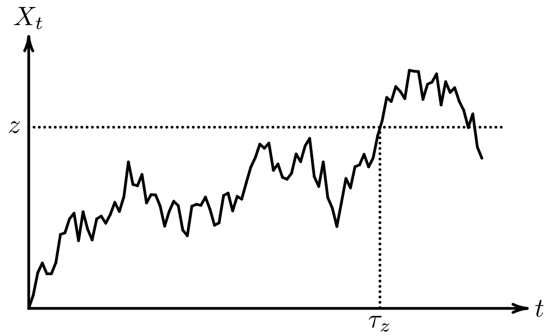
دارد.

۶.۱۱ زمان اولین برخورد

تعریف ۹.۱۱ [۹۷] *فرض کنید X_t یک فرایند نایقین و z یک سطح معلوم است. پس متغیر نایقین*

$$\tau_z = \inf\left\{t \ge \circ \;\middle|\; X_t = z\right\} \tag{۵۹.۱۱}$$

زمان اولین برخورد نامیده می‌شود که X_t به سطح z می‌رسد.



شکل ۴.۱۱: زمان اولین برخورد

قضیه ۱۰.۱۱ [۹۷] *فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل نمونه‌ـ پیوسته با توزیع نایقینی پیوسته $\Phi_t(x)$ است. پس زمان اولین برخورد τ_z که X_t به سطح z می‌رسد توزیع نایقینی پیوسته*

$$\Upsilon(s) = \begin{cases} ۱ - \inf\limits_{\circ \le t \le s} \Phi_t(z), & z > X_\circ \text{ اگر } \\ \sup\limits_{\circ \le t \le s} \Phi_t(z), & z < X_\circ \text{ اگر } \end{cases} \quad (۶۰.۱۱)$$

است.

برهان: وقتی $X_\circ < z$، از تعریف زمان اولین برخورد نتیجه می‌شود که

$$\tau_z \le s \text{ اگر و تنها اگر } \sup_{\circ \le t \le s} X_t \ge z.$$

پس توزیع نایقینی τ_z

$$\Upsilon(s) = \mathcal{M}\{\tau_z \le s\} = \mathcal{M}\left\{\sup_{\circ \le t \le s} X_t \ge z\right\},$$

است. با استفاده از قضیه مقدار فرین، داریم

$$\Upsilon(s) = ۱ - \inf_{\circ \le t \le s} \Phi_t(z).$$

وقتی $X_\circ > z$، از تعریف زمان اولین برخورد نتیجه می‌شود که

$$\tau_z \le s \text{ اگر و تنها اگر } \inf_{\circ \le t \le s} X_t \le z.$$

پس توزیع نایقینی τ_z

$$\Upsilon(s) = \mathcal{M}\{\tau_z \le s\} = \mathcal{M}\left\{\inf_{\circ \le t \le s} X_t \le z\right\} = \sup_{\circ \le t \le s} \Phi_t(z),$$

است. قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۱۶.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل نمونه‌ـ پیوسته با توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ است. فرض کنید f یک تابع پیوسته و افزایشی اکید است. نشان دهید زمان اولین برخورد τ_z که $f(X_t)$ به سطح z می‌رسد، توزیع نایقینی

$$\Upsilon(s) = \begin{cases} 1 - \inf\limits_{0\le t\le s} \Phi_t(f^{-1}(z)), & z > f(X_0) \text{ اگر } \\ \sup\limits_{0\le t\le s} \Phi_t(f^{-1}(z)), & z < f(X_0) \text{ اگر } \end{cases} \quad (۶۱.۱۱)$$

دارد.

تمرین ۱۷.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل نمونه‌ـ پیوسته با توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ است. فرض کنید f یک تابع پیوسته و کاهشی اکید است. نشان دهید زمان اولین برخورد τ_z که $f(X_t)$ به سطح z می‌رسد، توزیع نایقینی

$$\Upsilon(s) = \begin{cases} \sup\limits_{0\le t\le s} \Phi_t(f^{-1}(z)), & z > f(X_0) \text{ اگر } \\ 1 - \inf\limits_{0\le t\le s} \Phi_t(f^{-1}(z)), & z < f(X_0) \text{ اگر } \end{cases} \quad (۶۲.۱۱)$$

دارد.

تمرین ۱۸.۱۱: نشان دهید شرط نمونه‌ـ پیوستگی در قضیه ۱۰.۱۱ را نمی‌توان حذف کرد.

۷.۱۱ انتگرال زمان

این بخش تعریف انتگرال زمان که همان انتگرال فرایند نایقین نسبت به زمان است را ارائه می‌کند.

تعریف ۱۰.۱۱ [۸۵] *فرایند نایقین X_t را در نظر بگیرید. برای هر افراز بازه بسته $[a,b]$ با*

$$a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} = b$$

شبکه به صورت

$$\Delta = \max_{1\le i\le k} |t_{i+1} - t_i|. \quad (۶۳.۱۱)$$

نوشته می‌شود. پس انتگرال زمان X_t نسبت به t عبارت است از

$$\int_a^b X_t \mathrm{d}t = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{k} X_{t_i} \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad (۶۴.۱۱)$$

به شرط آن که حد تقریباً قطعی موجود بوده و متناهی باشد. در این حالت فرایند نایقین X_t انتگرال‌پذیر گویند.

چون X_t در هر زمان t یک متغیر نایقین است، حد در (۶۴.۱۱) نیز یک متغیر نایقین است به شرط آن که حد تقریباً قطعی موجود بوده و متناهی باشد. پس فرایند نایقین X_t نسبت به زمان انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر حد در (۶۴.۱۱) متغیر نایقین باشد.

قضیه ۱۱.۱۱ *اگر X_t یک فرایند نایقین نمونه‌ـ پیوسته روی $[a,b]$ باشد، آنگاه نسبت به زمان روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.*

برهان: فرض کنید $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} = b$ افرازی از بازه بسته $[a,b]$ است. چون فرایند نایقین X_t نمونه‌ـ پیوسته است، تقریباً همه مسیرهای نمونه تابع‌های پیوسته نسبت به زمان t هستند. پس حد

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{k} X_{t_i}(t_{i+1} - t_i)$$

تقریباً قطعی موجود است. از طرف دیگر، چون X_t در هر زمان t یک متغیر نایقین است، حد فوق یک تابع اندازه‌پذیر است. بنابراین، حد یک متغیر نایقین است و X_t نسبت به زمان انتگرال‌پذیر است.

قضیه ۱۲.۱۱ *اگر X_t یک فرایند نایقین انتگرال‌پذیر نسبت به زمان روی بازه $[a,b]$ باشد، آنگاه روی هر زیربازه $[a,b]$ نیز نسبت به زمان انتگرال‌پذیر است. همچنین، اگر $c \in [a,b]$، آنگاه*

$$\int_a^b X_t \mathrm{d}t = \int_a^c X_t \mathrm{d}t + \int_c^b X_t \mathrm{d}t. \qquad (۶۵.۱۱)$$

برهان: فرض کنید $[a',b']$ زیربازه‌ای از $[a,b]$ است. چون X_t یک فرایند نایقین انتگرال‌پذیر نسبت به زمان روی $[a,b]$ است، برای هر افراز

$$a = t_1 < \cdots < t_m = a' < t_{m+1} < \cdots < t_n = b' < t_{n+1} < \cdots < t_{k+1} = b,$$

حد

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{k} X_{t_i}(t_{i+1} - t_i)$$

تقریباً قطعی موجود و متناهی است. پس حد

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=m}^{n-1} X_{t_i}(t_{i+1} - t_i)$$

تقریباً قطعی موجود و متناهی است. بنابراین X_t روی زیربازه $[a',b']$ نسبت به زمان انتگرال‌پذیر است. حال برای افراز

$$a = t_1 < \cdots < t_m = c < t_{m+1} < \cdots < t_{k+1} = b,$$

داریم

$$\sum_{i=1}^{k} X_{t_i}(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=1}^{m-1} X_{t_i}(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=m}^{k} X_{t_i}(t_{i+1} - t_i).$$

توجه کنید که

$$\int_a^b X_t\mathrm{d}t = \lim_{\Delta\to\circ} \sum_{i=\text{۱}}^{k} X_{t_i}(t_{i+\text{۱}} - t_i),$$

$$\int_a^c X_t\mathrm{d}t = \lim_{\Delta\to\circ} \sum_{i=\text{۱}}^{m-\text{۱}} X_{t_i}(t_{i+\text{۱}} - t_i),$$

$$\int_c^b X_t\mathrm{d}t = \lim_{\Delta\to\circ} \sum_{i=m}^{k} X_{t_i}(t_{i+\text{۱}} - t_i).$$

بنابراین رابطه (۶۵.۱۱) ثابت می‌شود.

قضیه ۱۳.۱۱ *(خطی بودن انتگرال زمان) فرض کنید X_t و Y_t فرایندهای نایقین زمان انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ هستند و فرض کنید α و β دو عدد حقیقی هستند. پس*

$$\int_a^b (\alpha X_t + \beta Y_t)\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b X_t\mathrm{d}t + \beta \int_a^b Y_t\mathrm{d}t. \qquad (\text{۶۶.۱۱})$$

برهان: فرض کنید $a = t_\text{۱} < t_\text{۲} < \cdots < t_{k+\text{۱}} = b$ یک افراز از بازه بسته $[a,b]$ است. از تعریف زمان انتگرال‌پذیر نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\alpha X_t + \beta Y_t)\mathrm{d}t &= \lim_{\Delta\to\circ} \sum_{i=\text{۱}}^{k} (\alpha X_{t_i} + \beta Y_{t_i})(t_{i+\text{۱}} - t_i) \\
&= \lim_{\Delta\to\circ} \alpha \sum_{i=\text{۱}}^{k} X_{t_i}(t_{i+\text{۱}} - t_i) + \lim_{\Delta\to\circ} \beta \sum_{i=\text{۱}}^{k} Y_{t_i}(t_{i+\text{۱}} - t_i) \\
&= \alpha \int_a^b X_t\mathrm{d}t + \beta \int_a^b Y_t\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

پس رابطه (۶۶.۱۱) برقرار است.

قضیه ۱۴.۱۱ [۲۰۰] *فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل نمونه‌ـ پیوسته با توزیع نایقینی منظم $\Phi_t(x)$ است. پس انتگرال زمان*

$$Y_s = \int_\circ^s X_t\mathrm{d}t \qquad (\text{۶۷.۱۱})$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-\text{۱}}(\alpha) = \int_\circ^s \Phi_t^{-\text{۱}}(\alpha)\mathrm{d}t \qquad (\text{۶۸.۱۱})$$

دارد.

برهان: برای هر زمان $s > ۰$ داده شده، از خاصیت اساسی انتگرال زمان نتیجه می‌شود که

$$\left\{\int_{۰}^{s} X_t \mathrm{d}t \le \int_{۰}^{s} \Phi_t^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}t\right\} \supset \{X_t \le \Phi_t^{-۱}(\alpha),\, \forall t\}.$$

با استفاده از قضیه ۸.۱۱ داریم

$$\mathcal{M}\left\{\int_{۰}^{s} X_t \mathrm{d}t \le \int_{۰}^{s} \Phi_t^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}t\right\} \ge \mathcal{M}\{X_t \le \Phi_t^{-۱}(\alpha),\, \forall t\} = \alpha.$$

به طور مشابه، چون

$$\left\{\int_{۰}^{s} X_t \mathrm{d}t > \int_{۰}^{s} \Phi_t^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}t\right\} \supset \{X_t > \Phi_t^{-۱}(\alpha),\, \forall t\},$$

داریم

$$\mathcal{M}\left\{\int_{۰}^{s} X_t \mathrm{d}t > \int_{۰}^{s} \Phi_t^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}t\right\} \ge \mathcal{M}\{X_t > \Phi_t^{-۱}(\alpha),\, \forall t\} = ۱ - \alpha.$$

از دو نابرابری فوق و اصل موضوعه دوگانی نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\left\{\int_{۰}^{s} X_t \mathrm{d}t \le \int_{۰}^{s} \Phi_t^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}t\right\} = \alpha.$$

پس انتگرال زمان Y_s توزیع نایقینی معکوس $\Psi_s^{-۱}(\alpha)$ دارد.

تمرین ۱۹.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل نمونه‌ـ پیوسته با توزیع نایقینی منظم $\Phi_t(x)$ است، و $J(x)$ یک تابع افزایشی اکید است. نشان دهید انتگرال زمان

$$Y_s = \int_{۰}^{s} J(X_t)\mathrm{d}t \qquad (۶۹.۱۱)$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha) = \int_{۰}^{s} J(\Phi_t^{-۱}(\alpha))\mathrm{d}t \qquad (۷۰.۱۱)$$

دارد.

تمرین ۲۰.۱۱: فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل نمونه‌ـ پیوسته با توزیع نایقینی منظم $\Phi_t(x)$ است، و $J(x)$ یک تابع کاهشی اکید است. نشان دهید انتگرال زمان

$$Y_s = \int_{۰}^{s} J(X_t)\mathrm{d}t \qquad (۷۱.۱۱)$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha) = \int_{۰}^{s} J(\Phi_t^{-۱}(۱ - \alpha))\mathrm{d}t \qquad (۷۲.۱۱)$$

دارد.

۸.۱۱ فرایند نمو مانا

یک فرایند نایقین X_t «نموهای مانا» دارد هرگاه برای بازه‌های زمانی با طول یکسان، نموهای فرایند متغیرهای نایقین با توزیع‌های یکسان باشند، یعنی برای $t > 0$ معلوم، نموهای $X_{s+t} - X_s$ برای هر $s > 0$ متغیرهای نایقین با توزیع یکسان باشند.

تعریف ۱۱.۱۱ *[۸۵] یک فرایند نایقین را فرایند نمو مستقل مانا گویند وقتی نه تنها نموهای مانا دارد بلکه نموها مستقل هم هستند.*

واضح است که فرایند نمو مستقل مانا یک فرایند نمو مستقل خاص است.

قضیه ۱۵.۱۱ *فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل مانا است. پس برای اعداد حقیقی a و b، فرایند نایقین*

$$Y_t = aX_t + b \tag{۷۳.۱۱}$$

نیز یک فرایند نمو مستقل مانا است.

برهان: چون X_t یک فرایند نمو مستقل است، متغیرهای نایقین

$$X_{t_1},\, X_{t_2} - X_{t_1},\, X_{t_3} - X_{t_2},\, \ldots,\, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

مستقل هستند. از $Y_t = aX_t + b$ و قضیه ۸.۲ نتیجه می‌شود که

$$Y_{t_1},\, Y_{t_2} - Y_{t_1},\, Y_{t_3} - Y_{t_2},\, \ldots,\, Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$$

نیز مستقل هستند. یعنی Y_t یک فرایند نمو مستقل است. از طرف دیگر، چون X_t یک فرایند نمو مانا است، نموهای $X_{s+t} - X_s$ برای هر $s > 0$ متغیرهای نایقین با توزیع‌های یکسان هستند. بنابراین

$$Y_{s+t} - Y_s = a(X_{s+t} - X_s)$$

نیز برای هر $s > 0$، متغیرهای نایقین با توریع یکسان هستند، و Y_t یک فرایند نمو مانا است. پس Y_t یک فرایند نمو مستقل مانا است.

تذکر ۴.۱۱: در حالت کلی، یک تابع غیرخطی از فرایند نمو مستقل مانا الزاماً یک فرایند نمو مستقل مانا نیست. یک مثال نوعی مربع یک فرایند نمو مستقل مانا است.

قضیه ۱۶.۱۱ *[۱۱] فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل مانا است. پس X_t و $(1-t)X_0 + tX_1$ برای هر $t \geq 0$ متغیرهای نایقین با توزیع یکسان هستند.*

برهان: قضیه را برای حالتی که t یک عدد گویا است ثابت می‌کنیم. فرض کنید $t = q/p$ که در آن p و q اعداد صحیح تحویل‌ناپذیر هستند. فرض کنید Φ توزیع نایقینی مشترک نموهای

$$X_{1/p} - X_{0/p},\, X_{2/p} - X_{1/p},\, X_{3/p} - X_{2/p},\, \ldots$$

است. پس

$$X_t - X_0 = (X_{1/p} - X_{0/p}) + (X_{2/p} - X_{1/p}) + \cdots + (X_{q/p} - X_{(q-1)/p})$$

توزیع نایقینی

$$\Psi(x) = \Phi(x/q) \tag{۷۴.۱۱}$$

دارد. همچنین

$$t(X_1 - X_0) = t((X_{1/p} - X_{0/p}) + (X_{2/p} - X_{1/p}) + \cdots + (X_{p/p} - X_{(p-1)/p}))$$

توزیع نایقینی

$$\Upsilon(x) = \Phi(x/p/t) = \Phi(x/p/(q/p)) = \Phi(x/q) \tag{۷۵.۱۱}$$

دارد. از (۷۴.۱۱) و (۷۵.۱۱) نتیجه می‌شود که $X_t - X_0$ و $t(X_1 - X_0)$ توزیع‌های یکسان دارند و بنابراین X_t و $(1-t)X_0 + tX_1$ نیز توزیع‌های یکسان دارند.

تذکر ۵.۱۱: اگر X_t یک فرایند نمو مستقل مانا با $X_0 = 0$ باشد آنگاه X_t/t و X_1 متغیرهای نایقین با توزیع یکسان هستند. به بیان دیگر، توزیع نایقینی Φ چنان موجود است که

$$\frac{X_t}{t} \sim \Phi(x) \tag{۷۶.۱۱}$$

یا به طور معادل برای هر $t > 0$

$$X_t \sim \Phi\left(\frac{x}{t}\right). \tag{۷۷.۱۱}$$

توجه کنید که Φ همان توزیع نایقینی X_1 است.

قضیه ۱۷.۱۱ [۱۰۱] *فرض کنید X_t یک توزیع نمو مستقل مانا است که مقدار آغازین آن و نموهای آن توزیع‌های نایقینی معکوس دارند. پس دو تابع افزایشی اکید و پیوسته μ و ν چنان موجودند که X_t توزیع نایقینی معکوس*

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \mu(\alpha) + \nu(\alpha)t \tag{۷۸.۱۱}$$

دارد.

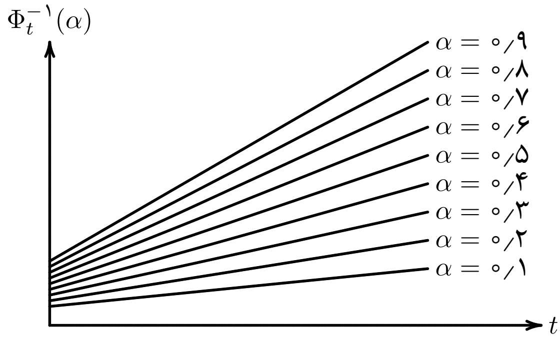
برهان: توجه کنید که X_0 و $X_1 - X_0$ متغیرهای نایقین مستقل هستند که توزیع‌های نایقین معکوس آنها وجود دارد و به ترتیب با $\mu(\alpha)$ و $\nu(\alpha)$ نشان داده می‌شوند. واضح است که این تابع‌ها پیوسته و افزایشی اکید هستند. همچنین از قضیه ۱۶.۱۱ نتیجه می‌شود که X_t و $X_0 + (X_1 - X_0)t$ متغیرهای نایقین با توزیع‌های یکسان هستند. پس X_t توزیع نایقینی معکوس $\Phi_t^{-1}(\alpha) = \mu(\alpha) + \nu(\alpha)t$ دارد. به این ترتیب قضیه ثابت شد.

تذکر ۶.۱۱: توزیع نایقینی معکوس فرایند نمو مستقل مانا یک خانواده از تابع‌های خطی از t اندیس شده با α است. شکل ۵.۱۱ را نگاه کنید.

قضیه ۱۸.۱۱ [۱۰۱] *فرض کنید μ و ν تابع‌های پیوسته و افزایشی اکید روی $(0,1)$ هستند. پس فرایند نمو مستقل مانا X_t وجود دارد که توزیع نایقینی معکوس آن*

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \mu(\alpha) + \nu(\alpha)t \tag{۷۹.۱۱}$$

است. همچنین، X_t یک نمونه پیوسته لیپشیتز دارد.



شکل ۵.۱۱: توزیع نایقینی معکوس فرایند نمو مستقل مانا.

برهان: بدون از دست دادن کلیت، فقط $t \in [۰, ۱]$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید

$$\{\xi(r) \mid \text{ است } [۰, ۱] \text{ یک عدد گویا در بازه} r\}$$

یک دنباله شمارا از متغیرهای نایقین مستقل است که $\xi(۰)$ توزیع نایقینی معکوس $\mu(\alpha)$ دارد و $\xi(r)$ برای اعداد گویای r توزیع نایقینی معکوس مشترک $\nu(\alpha)$ روی $[۰, ۱]$ دارند. برای هر عدد صحیح مثبت n فرایند

$$X_t^n = \begin{cases} \xi(۰) + \dfrac{۱}{n}\displaystyle\sum_{i=۱}^{k}\xi\left(\dfrac{i}{n}\right), & t = \dfrac{k}{n} \quad (k = ۱, ۲, \ldots, n) \text{ اگر} \\ \text{خطی}, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

را تعریف می‌کنیم. می‌توان تحقیق کرد که X_t^n وقتی $n \to \infty$ در توزیع همگرا است. همچنین می‌توان تحقیق کرد که حد آن یک فرایند نمو مستقل مانا است و توزیع نایقینی معکوس $\Phi_t^{-۱}(\alpha)$ دارد. قضیه ثابت شد.

قضیه ۱۹.۱۱ [۹۱] *فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل مانا است. پس دو عدد حقیقی a و b چنان موجودند که برای هر زمان $t \geq ۰$*

$$E[X_t] = a + bt. \tag{۸۰.۱۱}$$

برهان: از قضیه ۱۶.۱۱ نتیجه می‌شود که X_t و $X_۰ + (X_۱ - X_۰)t$ متغیرهای نایقین با توزیع یکسان هستند. پس داریم

$$E[X_t] = E[X_۰ + (X_۱ - X_۰)t].$$

چون $X_۰$ و $X_۱ - X_۰$ متغیرهای نایقین مستقل هستند، داریم

$$E[X_t] = E[X_۰] + E[X_۱ - X_۰]t.$$

پس (۸۰.۱۱) برای $a = E[X_۰]$ و $b = E[X_۱ - X_۰]$ برقرار است.

قضیه ۲۰.۱۱ [۹۱] *فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل مانا با مقدار آغازین ۰ است. پس برای هر زمان s و t، داریم*

$$E[X_{s+t}] = E[X_s] + E[X_t]. \tag{۸۱.۱۱}$$

برهان: از قضیه ۱۹.۱۱ نتیجه می‌شود که عدد حقیقی b چنان موجود است که برای هر زمان $t \geq 0$، $E[X_t] = bt$. پس

$$E[X_{s+t}] = b(s+t) = bs + bt = E[X_s] + E[X_t].$$

قضیه ۲۱.۱۱ [۱۱] *فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل مانا با مقدار آغازین قطعی X_0 است. پس عدد حقیقی b چنان موجود است که برای هر $t \geq 0$*

$$V[X_t] = bt^2. \tag{۸۲.۱۱}$$

برهان: از قضیه ۱۶.۱۱ نتیجه می‌شود که X_t و $(1-t)X_0 + tX_1$ متغیرهای نایقین با توزیع یکسان هستند. چون X_0 یک مقدار ثابت است، داریم

$$V[X_t] = V[(1-t)X_0 + tX_1] = t^2 V[X_1].$$

پس (۸۲.۱۱) برای $b = V[X_1]$ برقرار است.

قضیه ۲۲.۱۱ [۱۱] *فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل مانا با مقدار آغازین قطعی X_0 است. پس برای زمان های دلخواه s و t داریم*

$$\sqrt{V[X_{s+t}]} = \sqrt{V[X_s]} + \sqrt{V[X_t]}. \tag{۸۳.۱۱}$$

برهان: از قضیه ۲۱.۱۱ نتیجه می‌شود که عدد حقیقی b چنان موجود است که برای هر زمان $t \geq 0$، $V[X_t] = bt^2$. پس

$$\sqrt{V[X_{s+t}]} = \sqrt{b}(s+t) = \sqrt{b}s + \sqrt{b}t = \sqrt{V[X_s]} + \sqrt{V[X_t]}.$$

تمرین ۲۱.۱۱: [۴۰] فرض کنید X_t یک فرایند نمو مستقل مانا با مقدار آغازین قطعی X_0 است. نشان دهید عدد حقیقی b چنان موجود است که گشتاور مرکزی kام برای هر زمان $t \geq 0$ به صورت

$$E[(X_t - E[X_t])^k] = bt^k \tag{۸۴.۱۱}$$

است.

تمرین ۲۲.۱۱: [۴۰]

$$\sqrt[k]{E[(X_{s+t} - E[X_{s+t}])^k]} = \sqrt[k]{E[(X_s - E[X_s])^k]} + \sqrt[k]{E[(X_t - E[X_t])^k]}.$$

۹.۱۱ نکات کتابشناسی

مطالعه فرایند نایقین در سال ۲۰۰۸ برای مدل کردن تحول پدیده‌های نایقین توسط لیو شروع شد [۸۵]. برای توصیف فرایند نایقین، لیو توزیع نایقینی و توزیع نایقینی معکوس را مطرح کرد [۱۰۱]. مفهوم استقلال فرایندهای نایقین نیز توسط لیو مطرح شد [۱۰۱].

فرایند نمو مستقل توسط لیو پایه گذاری شد [۸۵] و شرط لازم و کافی برای توزیع نایقینی معکوس آن توسط لیو ثابت شد [۱۰۱]. علاوه بر این، لیو قضیه مقدار فرین را ارائه داد [۹۷] و یائو فرمولی برای محاسبه توزیع نایقینی معکوس انتگرال زمان برای فرایند نمو مستقل ارائه کرد [۲۰۰].

فرایند نمو مستقل مانا توسط لیو مطرح شد [۸۵] و توزیع نایقینی معکوس آن نیز توسط لیو بررسی شد [۱۰۱]. لیو همچنین نشان داد که مقدار مورد انتظار تابع خطی از زمان است [۹۱] و چِن نیز تناسب درجه دو واریانس نسبت به زمان را ثابت کرد [۱۱].

فصل ۱۲

فرایند تجدید نایقین

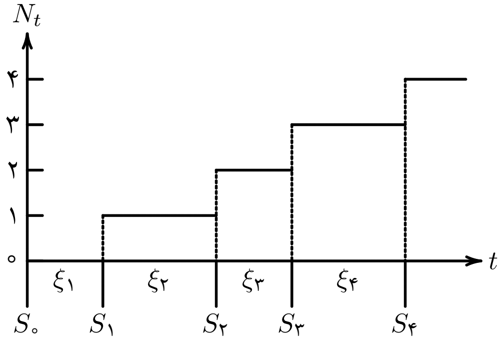
فرایند تجدید نایقین فرایندی نایقین است که در آن رویدادها به طور مداوم و مستقل از یکدیگر در زمان نامعلوم رخ می‌دهند. این فصل فرایند تجدید نایقین، فرایند تجدید پاداش و فرایند تجدید متناوب را معرفی خواهد کرد. همچنین این فصل سیاست‌های بلوکی جایگزینی، سیاست تعویض فرسوده و مدل بیمه نایقین را ارائه می‌کند.

۱.۱۲ فرایند تجدید نایقین

تعریف ۱.۱۲ [۸۵] *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots$ مستقل و همتوزیع از زمان‌های نایقین ورودی هستند. برای $n \ge 1$ تعریف می‌کنیم $S_0 = 0$ و $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. پس فرایند نایقین*

$$N_t = \max_{n \ge 0} \{n \mid S_n \le t\} \tag{1.12}$$

فرایند تجدید نایقین نامیده می‌شود.



شکل ۱.۱۲: یک مسیر نمونه‌ای فرایند تجدید نایقین

واضح است که S_n یک فرایند با نموهای ایستای مستقل نسبت به n است. چون $\xi_1, \xi_2, \ldots$ زمان‌های رویدادهای متوالی را نشان می‌دهد، S_n می‌تواند به عنوان زمان انتظار تا وقوع رویداد nام در نظر گرفته شود. در این حالت، فرایند تجدید N_t تعداد تجدید در $[0, t)$ است. توجه داشته باشید که N_t نمونه پیوسته نیست، اما هر مسیر نمونه‌ای از N_t از راست پیوسته و تابع پله‌ای افزایشی با مقادیر عددی نامنفی است. علاوه بر این، چون زمان‌های ورود همیشه متغیرهای مثبت نایقین فرض می‌شوند، اندازه هر پرش N_t همواره ۱ است. به عبارت دیگر، N_t حداکثر یک تجدید در هر زمان دارد. درحالت خاص، N_t در زمان ۰ جهش ندارد.

قضیه ۱.۱۲ *(رابطه اساسی) فرض کنید N_t یک فرایند تجدید با زمان‌های نایقین ورودی $\xi_1, \xi_2, \ldots$، و $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ است. پس برای هر زمان t و عدد صحیح n داریم*

$$N_t \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t \tag{۲.۱۲}$$

علاوه بر این داریم

$$N_t \leq n \Leftrightarrow S_{n+1} > t. \tag{۳.۱۲}$$

برهان: چون N_t بزرگترین n ای است که $S_n \leq t$، داریم $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$. اگر $N_t \geq n$، آنگاه $S_n \leq S_{N_t} \leq t$. برعکس، اگر $S_n \leq t$، آنگاه $S_n < S_{N_t+1}$ که به معنای $N_t \geq n$است. بنابراین (۲.۱۲) ثابت شده است. به طور مشابه، اگر $N_t \leq n$، آنگاه $n + 1 \geq N_t + 1$ و $S_{n+1} \geq S_{N_t+1} > t$. برعکس، اگر $S_{n+1} > t$، آنگاه $S_{n+1} > S_{N_t}$ که $N_t \leq n$ را نشان می‌دهد. بنابراین (۳.۱۲) برقرار است.

تمرین ۱.۱۲: فرض کنید N_t یک فرایند تجدید با زمان‌های ورودی نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots$، است و $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. نشان دهید

$$\mathcal{M}\{N_t \geq n\} = \mathcal{M}\{S_n \leq t\}, \tag{۴.۱۲}$$

$$\mathcal{M}\{N_t \leq n\} = 1 - \mathcal{M}\{S_{n+1} \leq t\}. \tag{۵.۱۲}$$

قضیه ۲.۱۲ [۹۱] *فرض کنید N_t یک فرایند تجدید با زمان‌های ورودی نایقین مستقل $\xi_1, \xi_2, \ldots$ است. اگر Φ توزیع نایقینی مشترک زمان‌های ورودی باشد. آنگاه N_t توزیع نایقینی*

$$\Upsilon_t(x) = 1 - \Phi\left(\frac{t}{\lfloor x \rfloor + 1}\right), \quad \forall x \geq 0 \tag{۶.۱۲}$$

دارد که در آن $\lfloor x \rfloor$ نشان دهنده بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x (تابع سقف) است.

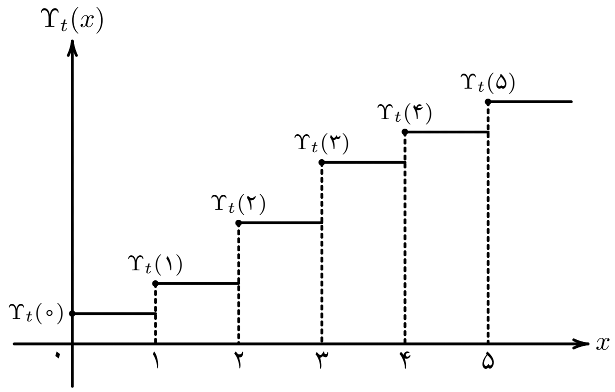
برهان: توجه داشته باشید که S_{n+1} توزیع نایقینی $\Phi(x/(n+1))$ دارد. از (۵.۱۲) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{N_t \leq n\} = 1 - \mathcal{M}\{S_{n+1} \leq t\} = 1 - \Phi\left(\frac{t}{n+1}\right).$$

چون N_t مقادیر عددی صحیح را می‌گیرد، برای هر $x \geq 0$، داریم

$$\Upsilon_t(x) = \mathcal{M}\{N_t \leq x\} = \mathcal{M}\{N_t \leq \lfloor x \rfloor\} = 1 - \Phi\left(\frac{t}{\lfloor x \rfloor + 1}\right).$$

قضیه ثابت شد.



شکل ۲.۱۲: توزیع نایقینی $\Upsilon_t(x)$ از فرایند تجدید N_t.

قضیه ۳.۱۲ *([۹۱]، قضیه تجدید اساسی) فرض کنید N_t یک فرایند تجدید با زمان نایقین مستقل و همتوزیع $\xi_۱, \xi_۲, \ldots$ است. پس میانگین تعداد تجدیدها هرگاه $t \to \infty$*

$$\frac{N_t}{t} \to \frac{۱}{\xi_۱} \tag{۷.۱۲}$$

در توزیع همگرا است.

برهان: توزیع نایقینی Υ_t برای N_t از قضیه ۲.۱۲ به صورت

$$\Upsilon_t(x) = ۱ - \Phi\left(\frac{t}{\lfloor x \rfloor + ۱}\right)$$

است که در آن Φ توزیع نایقینی $\xi_۱$ است. از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که توزیع نایقینی N_t/t به صورت

$$\Psi_t(x) = ۱ - \Phi\left(\frac{t}{\lfloor tx \rfloor + ۱}\right)$$

که در آن $\lfloor tx \rfloor$ نشان دهنده بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی tx است (تابع سقف). بنابراین در هر نقطه پیوسته x از $۱ - \Phi(۱/x)$، داریم

$$\lim_{t \to \infty} \Psi_t(x) = ۱ - \Phi\left(\frac{۱}{x}\right)$$

که توزیع نایقینی $۱/\xi_۱$ است. پس N_t/t در توزیع به $۱/\xi_۱$ برای $t \to \infty$ همگرا می‌شود.

قضیه ۴.۱۲ *([۹۱]، قضیه تجدید مقدماتی) فرض کنید که N_t یک فرایند تجدید با زمان‌های ورودی نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \ldots$ هستند. آنگاه*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[N_t]}{t} = E\left[\frac{۱}{\xi_۱}\right]. \tag{۸.۱۲}$$

اگر Φ توزیع نایقینی مشترک از زمان‌های ورود باشد، آنگاه

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[N_t]}{t}=\int_{\circ}^{+\infty}\Phi\left(\frac{۱}{x}\right)\mathrm{d}x. \tag{۹.۱۲}$$

اگر توزیع نایقینی Φ منظم باشد، آنگاه

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[N_t]}{t}=\int_{\circ}^{۱}\frac{۱}{\Phi^{-۱}(\alpha)}\mathrm{d}\alpha. \tag{۱۰.۱۲}$$

برهان: $\Psi_t(x)$ و $G(x)$ را به ترتیب توزیع‌های نایقینی N_t/tو $۱/\xi_۱$ بگیرید. قضیه ۳.۱۲ بیان می‌کند وقتی $t\to\infty$ در هر نقطه پیوسته x از $G(x)$، $\Psi_t(x)\to G(x)$. توجه داشته باشید که $\Psi_t(x)\ge G(x)$. از قضیه همگرایی تسلطی لبگ و وجود $E[۱/\xi_۱]$ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[N_t]}{t}=\lim_{t\to\infty}\int_{\circ}^{+\infty}(۱-\Psi_t(x))\mathrm{d}x=\int_{\circ}^{+\infty}(۱-G(x))\mathrm{d}x=E\left[\frac{۱}{\xi_۱}\right].$$

چون $۱/\xi_۱$ توزیع نایقینی $۱-\Phi(۱/x)$ دارد، داریم:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[N_t]}{t}=E\left[\frac{۱}{\xi_۱}\right]=\int_{\circ}^{+\infty}\Phi\left(\frac{۱}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

علاوه بر این، چون $۱/\xi_۱$ توزیع نایقینی معکوس

$$G^{-۱}(\alpha)=\frac{۱}{\Phi^{-۱}(۱-\alpha)},$$

دارد، داریم

$$E\left[\frac{۱}{\xi_۱}\right]=\int_{\circ}^{۱}\frac{۱}{\Phi^{-۱}(۱-\alpha)}\mathrm{d}\alpha=\int_{\circ}^{۱}\frac{۱}{\Phi^{-۱}(\alpha)}\mathrm{d}\alpha.$$

قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۲.۱۲: یک فرایند تجدید N_t خطی نامیده می‌شود هرگاه $\xi_۱,\xi_۲,\ldots$ متغیرهای مستقل نایقین خطی $\mathcal{L}(a,b)$ با $a>\circ$ باشند. نشان دهید که

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[N_t]}{t}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}. \tag{۱۱.۱۲}$$

تمرین ۳.۱۲: یک فرایند تجدید N_t زیگزاگ نامیده می‌شود اگر $\xi_۱,\xi_۲,\ldots$ متغیرهای مستقل زیگزاگ نایقین $\mathcal{Z}(a,b,c)$ با $a>\circ$ باشند. نشان دهید

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[N_t]}{t}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\ln b-\ln a}{b-a}+\frac{\ln c-\ln b}{c-b}\right). \tag{۱۲.۱۲}$$

تمرین ۴.۱۲: فرایند تجدید N_t لوگ‌ـ نرمال نامیده می‌شود اگر $\xi_۱,\xi_۲,\ldots$ متغیرهای مستقل نایقین لوگ‌ـ نرمال $\mathcal{LOGN}(e,\sigma)$ باشند. نشان دهید

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[N_t]}{t}=\begin{cases}\sqrt{۳}\sigma\exp(-e)\csc(\sqrt{۳}\sigma), & \text{اگر } \sigma<\pi/\sqrt{۳}\\ +\infty, & \text{اگر } \sigma\ge\pi/\sqrt{۳}.\end{cases} \tag{۱۳.۱۲}$$

۲.۱۲ سیاست تعویض بلوک

سیاست تعویض بلوک به این معنی است که قطعه همیشه با خرابی یا به صورت دوره‌ای در زمان s تعویض می‌شود. فرض کنید که طول عمر قطعه‌ها، متغیرهای نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \ldots$ با توزیع نایقینی مشترک Φ هستند. پس زمان‌های تعویض یک فرایند تجدید نایقین را به وجود می‌آورند. فرض کنید a هزینه «تعویض معیوب» برای تعویض قطعه وقتی قبل از زمان s خراب می‌شود، را نشان دهد و b هزینه «تعویض برنامه ریزی شده» برای تعویض قطعه در زمان برنامه ریزی شده باشد. توجه کنید که همواره فرض می‌شود $a > b > ۰$. واضح است که هزینه یک دوره $aN_s + b$ و هزینه متوسط به صورت

$$\frac{aN_s + b}{s} \tag{۱۴.۱۲}$$

است.

قضیه ۵.۱۲ [۷۴] *فرض کنید که طول عمر قطعه‌ها، متغیرهای مستقل نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \ldots$ با توزیع نایقینی مشترک Φ و N_t فرایند تجدید نایقین است که نشان دهنده زمان تعویض است. پس مقدار مورد انتظار هزینه عبارت است از*

$$E\left[\frac{aN_s + b}{s}\right] = \frac{۱}{s}\left(a\sum_{n=۱}^{\infty}\Phi\left(\frac{s}{n}\right) + b\right). \tag{۱۵.۱۲}$$

برهان: توجه داشته باشید که توزیع نایقینی N_t یک تابع پله‌ای است. از قضیه ۲.۱۲ نتیجه شود که

$$E[N_s] = \int_۰^{+\infty}\Phi\left(\frac{s}{\lfloor x\rfloor + ۱}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=۱}^{\infty}\Phi\left(\frac{s}{n}\right).$$

بنابراین (۱۵.۱۲) با

$$E\left[\frac{aN_s + b}{s}\right] = \frac{aE[N_s] + b}{s} \tag{۱۶.۱۲}$$

برقرار می‌شود.

زمان تعویض بهینه s چیست؟

با پذیرفتن سیاست تعویض بلوک، مساله اصلی پیدا کردن زمان بهینه s به منظور کاهش متوسط هزینه‌ها است، یعنی

$$\min_s \frac{۱}{s}\left(a\sum_{n=۱}^{\infty}\Phi\left(\frac{s}{n}\right) + b\right). \tag{۱۷.۱۲}$$

۳.۱۲ فرایند پاداش تجدید

فرض کنید $(\xi_۱, \eta_۱), (\xi_۲, \eta_۲), \ldots$ دنباله‌ای از جفت متغیرهای نایقین هستند. در اینجا η_i را به عنوان پاداش (یا هزینه) مرتبط با i امین فاصله زمانی اتفاق دو متغیر نایقین ξ_i برای $i = ۱, ۲, \ldots$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۱۲ [۹۱] *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots$ مستقل و همتوزیع از متغیرهای نایقین زمان‌های ورودی، و $\eta_1, \eta_2, \ldots$ متغیرهای مستقل و همتوزیع پاداش‌های نایقین هستند. آنگاه*

$$R_t = \sum_{i=1}^{N_t} \eta_i \tag{18.12}$$

فرایند پاداش تجدید نامیده می‌شود، که در آن N_t فرایند تجدید با زمان‌های ورودی نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots$ هستند.

فرایند پاداش تجدید R_t نشان دهنده پاداش کل به دست آمده تا زمان t است. علاوه بر این، اگر $\eta_i \equiv 1$، آنگاه R_t به یک فرایند تجدید N_t تباهیده می‌شود. توجه کنید که $R_t = 0$ هرگاه که $N_t = 0$.

قضیه ۶.۱۲ [۹۱] *فرض کنید R_t یک فرایند پاداش تجدید با زمان‌های متوالی مستقل و همتوزیع نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots$ و پاداش‌های مستقل و همتوزیع نایقین $\eta_1, \eta_2, \ldots$ هستند. فرض کنید $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ و $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ بردارهای مستقل نایقین هستند، و زمان‌ها ورودی و پاداش‌ها به ترتیب با توزیع‌های نایقینی Φ و Ψ هستند. در این صورت R_t توزیع نایقینی*

$$\Upsilon_t(x) = \max_{k\geq 0} \left(1 - \Phi\left(\frac{t}{k+1}\right)\right) \wedge \Psi\left(\frac{x}{k}\right) \tag{19.12}$$

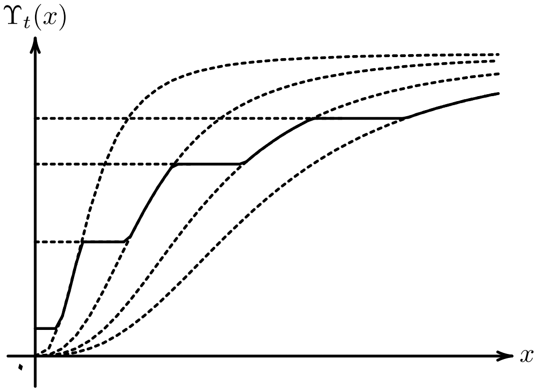
دارد. در اینجا وقتی $k = 0$، قرار می‌دهیم $x/k = +\infty$ و $\Psi(x/k) = 1$.

برهان: از تعریف فرایند پاداش تجدید نتیجه می‌گیریم که فرایند تجدید N_t مستقل از پاداش‌های نایقین $\eta_1, \eta_2, \ldots$، و R_t توزیع نایقینی به صورت

$$\begin{aligned}
\Upsilon_t(x) &= \mathcal{M}\left\{\sum_{i=1}^{N_t} \eta_i \leq x\right\} = \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty} (N_t = k) \cap \sum_{i=1}^{k} \eta_i \leq x\right\} \\
&= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty} (N_t \leq k) \cap \sum_{i=1}^{k} \eta_i \leq x\right\} \quad \text{(این یک چند مستطیل است)} \\
&= \max_{k\geq 0} \mathcal{M}\left\{(N_t \leq k) \cap \sum_{i=1}^{k} \eta_i \leq x\right\} \quad \text{(قضیه چند مستطیل)} \\
&= \max_{k\geq 0} \mathcal{M}\{N_t \leq k\} \wedge \mathcal{M}\left\{\sum_{i=1}^{k} \eta_i \leq x\right\} \quad \text{(استقلال)} \\
&= \max_{k\geq 0} \left(1 - \Phi\left(\frac{t}{k+1}\right)\right) \wedge \Psi\left(\frac{x}{k}\right)
\end{aligned}$$

دارد و قضیه ثابت شد.

قضیه ۷.۱۲ *([۹۱]، قضیه پاداش تجدید) فرض کنید R_t فرایند تجدید پاداش با زمان ورودی مستقل و همتوزیع نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots$ و پاداش‌های مستقل و همتوزیع نایقین $\eta_1, \eta_2, \ldots$ هستند. فرض*



شکل ۳.۱۲: توزیع نایقینی $\Upsilon_t(x)$ فرایند پاداش تجدید R_t که در آن خطوط افقی $((۱ - \Phi(t/(k+۱))$ و منحنی‌ها $\Psi(x/k)$ برای $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$ هستند.

کنید $(\xi_۱, \xi_۲, \ldots)$ و $(\eta_۱, \eta_۲, \ldots)$ بردارهای مستقل نایقین است. در این صورت نرخ پاداش وقتی $t \to \infty$

$$\frac{R_t}{t} \to \frac{\eta_۱}{\xi_۱} \tag{۲۰.۱۲}$$

به مفهوم همگرایی در توزیع است.

برهان: فرض کنید که زمان‌های ورودی و پاداش‌ها به ترتیب توزیع‌های نایقینی Φ و Ψ دارند. از قضیه ۶.۱۲، توزیع نایقینی R_t نتیجه می‌شود:

$$\Upsilon_t(x) = \max_{k \geq ۰} \left(۱ - \Phi\left(\frac{t}{k+۱}\right)\right) \wedge \Psi\left(\frac{x}{k}\right).$$

پس R_t/t توزیع نایقینی

$$\Psi_t(x) = \max_{k \geq ۰} \left(۱ - \Phi\left(\frac{t}{k+۱}\right)\right) \wedge \Psi\left(\frac{tx}{k}\right)$$

دارد. وقتی $t \to \infty$، داریم

$$\Psi_t(x) \to \sup_{y \geq ۰} (۱ - \Phi(y)) \wedge \Psi(xy)$$

که همان توزیع نایقینی $\eta_۱/\xi_۱$ است. پس وقتی $t \to \infty$، R_t/t در توزیع به $\eta_۱/\xi_۱$ همگرا است.

قضیه ۸.۱۲ ([۹۱]، *قضیه پاداش تجدید) فرض کنید R_t یک فرایند پاداش تجدید با زمان‌های ورودی مستقل و همتوزیع نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \ldots$ و پاداش‌های مستقل و همتوزیع نایقین $\eta_۱, \eta_۲, \ldots$ هستند. فرض کنید $(\xi_۱, \xi_۲, \ldots)$ و $(\eta_۱, \eta_۲, \ldots)$ بردارهای مستقل نایقین است. پس*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[R_t]}{t} = E\left[\frac{\eta_۱}{\xi_۱}\right]. \tag{۲۱.۱۲}$$

اگر در آن زمان‌های ورودی و پاداش‌های به ترتیب، توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ داشته باشند، آنگاه

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[R_t]}{t}=\int_0^1\frac{\Psi^{-1}(\alpha)}{\Phi^{-1}(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha. \tag{۲۲.۱۲}$$

برهان: از قضیه ۶.۱۲ نتیجه می‌شود که R_t/t توزیع نایقینی

$$F_t(x)=\max_{k\ge 0}\left(1-\Phi\left(\frac{t}{k+1}\right)\right)\wedge\Psi\left(\frac{tx}{k}\right)$$

و η_1/ξ_1 توزیع نایقینی

$$G(x)=\sup_{y\ge 0}(1-\Phi(y))\wedge\Psi(xy)$$

دارد. توجه داشته باشید که $F_t(x)\ge G(x)$ و $F_t(x)\to G(x)$. از قضیه همگرایی تسلطی لبگ و وجود $E[\eta_1/\xi_1]$ نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[R_t]}{t}=\lim_{t\to\infty}\int_0^{+\infty}(1-F_t(x))\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(1-G(x))\mathrm{d}x=E\left[\frac{\eta_1}{\xi_1}\right].$$

در نهایت، چون η_1/ξ_1 توزیع نایقینی معکوس

$$G^{-1}(\alpha)=\frac{\Psi^{-1}(\alpha)}{\Phi^{-1}(1-\alpha)},$$

دارد، داریم

$$E\left[\frac{\eta_1}{\xi_1}\right]=\int_0^1\frac{\Psi^{-1}(\alpha)}{\Phi^{-1}(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha.$$

لذا قضیه ثابت می‌شود.

۴.۱۲ مدل بیمه نایقین

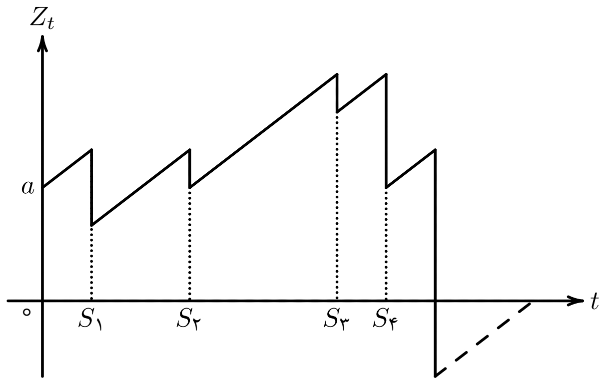
لیو [۹۷] فرض کرد که a سرمایه اولیه یک شرکت بیمه، b نرخ حق بیمه، bt کل درآمد تا زمان t است، و فرایند خسارت نایقین فرایند تجدید پاداش

$$R_t=\sum_{i=1}^{N_t}\eta_i \tag{۲۳.۱۲}$$

با زمان‌های ورودی مستقل و همتوزیع نایقین $\xi_1,\xi_2,\ldots$ و مقادیر خسارت‌های مستقل و همتوزیع نایقین $\eta_1,\eta_2,\ldots$ است. در این صورت سرمایه شرکت بیمه در زمان t به صورت

$$Z_t=a+bt-R_t \tag{۲۴.۱۲}$$

است و Z_t فرایند ریسک بیمه نامیده می‌شود.



شکل ۴.۱۲: یک فرایند ریسک بیمه

شاخص خرابی

شاخص خرابی اندازه گیری سرمایه نایقین شرکت بیمه است که منفی می‌شود.

تعریف ۳.۱۲ [۹۷] *فرض کنید Z_t یک فرایند ریسک بیمه است. در این صورت شاخص خرابی اندازه نایقین تعریف شده Z_t است که در نهایت منفی می شود، یعنی*

$$\text{خرابی} = \mathcal{M}\left\{\inf_{t\geq ۰} Z_t < ۰\right\}. \tag{۲۵.۱۲}$$

واضح است که شاخص خرابی یک حالت خاص از شاخص ریسک لیو [۹۰] است.

قضیه ۹.۱۲ *([۹۷]، قضیه شاخص خرابی) فرض کنید $Z_t = a + bt - R_t$ یک فرایند ریسک بیمه ای با مقادیر مثبت a و b است و R_t یک فرایند پاداش تجدید با زمان‌های ورودی مستقل و همتوزیع نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \ldots$ و مقادیر خسارت‌های مستقل و همتوزیع نایقین $\eta_۱, \eta_۲, \ldots$ است. فرض کنید $(\xi_۱, \xi_۲, \ldots)$ و $(\eta_۱, \eta_۲, \ldots)$ بردارهای نایقین مستقل هستند، و این زمان‌ها و مقادیر خسارت‌ها به ترتیب توزیع‌های نایقینی Φ و Ψ دارند. در این صورت شاخص خرابی به صورت*

$$\text{خرابی} = \max_{k\geq ۱}\sup_{x\geq ۰} \Phi\left(\frac{x-a}{kb}\right) \wedge \left(۱ - \Psi\left(\frac{x}{k}\right)\right) \tag{۲۶.۱۲}$$

است.

برهان: برای هر عدد صحیح مثبت k، واضح است که زمان ورود k امین خسارت

$$S_k = \xi_۱ + \xi_۲ + \cdots + \xi_k$$

است که در آن توزیع نایقینی $\Phi(s/k)$ است. یک فرایند نایقین را با استفاده از k امین اندیس به صورت

$$Y_k = a + bS_k - (\eta_۱ + \eta_۲ + \cdots + \eta_k)$$

تعریف کنید. به آسانی می‌توان نشان داد که Y_k یک فرایند افزایشی مستقل برحسب k است. علاوه بر این، Y_k سرمایه در زمان ورود S_k است و توزیع نایقینی

$$F_k(z) = \sup_{x \ge ۰} \Phi\left(\frac{z+x-a}{kb}\right) \wedge \left(۱ - \Psi\left(\frac{x}{k}\right)\right)$$

است. چون خراب شدن تنها در زمان ورود رخ می‌دهد، داریم

$$\text{خرابی} = \mathcal{M}\left\{\inf_{t \ge ۰} Z_t < ۰\right\} = \mathcal{M}\left\{\min_{k \ge ۱} Y_k < ۰\right\}.$$

از قضیه مقدار فرین نتیجه می‌شود

$$\text{خرابی} = \max_{k \ge ۱} F_k(۰) = \max_{k \ge ۱} \sup_{x \ge ۰} \Phi\left(\frac{x-a}{kb}\right) \wedge \left(۱ - \Psi\left(\frac{x}{k}\right)\right).$$

قضیه ثابت می‌شود.

زمان خرابی

تعریف ۴.۱۲ [۹۷] *فرض کنید Z_t یک فرایند ریسک بیمه است. پس زمان خرابی به عنوان اولین وقتی کل سرمایه Z_t منفی می شود، یعنی*

$$\tau = \inf\left\{t \ge ۰ \mid Z_t < ۰\right\}. \tag{۲۷.۱۲}$$

قضیه ۱۰.۱۲ [۱۹۵] *فرض کنید $Z_t = a + bt - R_t$ یک فرایند ریسک بیمه ای با مقادیر مثبت a و b است و R_t فرایند پاداش تجدید با زمان‌های ورودی مستقل و همتوزیع نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \ldots$ و مقادیر خسارت‌های مستقل و همتوزیع نایقین $\eta_۱, \eta_۲, \ldots$ هستند. فرض کنید $(\xi_۱, \xi_۲, \ldots)$ و $(\eta_۱, \eta_۲, \ldots)$ بردارهای نایقین مستقل هستند، و این زمان‌ها و مقادیر خسارت‌ها به ترتیب توزیع‌های نایقینی Φ و Ψ دارند. پس زمان خرابی توزیع نایقینی*

$$\Upsilon(t) = \max_{k \ge ۱} \sup_{x \le t} \Phi\left(\frac{x}{k}\right) \wedge \left(۱ - \Psi\left(\frac{a+bx}{k}\right)\right) \tag{۲۸.۱۲}$$

دارد.

برهان: برای هر عدد صحیح مثبت k، فرض کنید $S_k = \xi_۱ + \xi_۲ + \cdots + \xi_k$،

$$Y_k = a + bS_k - (\eta_۱ + \eta_۲ + \cdots + \eta_k)$$

و

$$\alpha_k = \sup_{x \le t} \Phi\left(\frac{x}{k}\right) \wedge \left(۱ - \Psi\left(\frac{a+bx}{k}\right)\right).$$

پس

$$\alpha_k = \sup\left\{\alpha \mid k\Phi^{-۱}(\alpha) \le t\right\} \wedge \sup\left\{\alpha \mid a + bk\Phi^{-۱}(\alpha) - k\Psi^{-۱}(۱-\alpha) < ۰\right\}.$$

از طرفی، از تعریف زمان خرابی T برای هر t داریم $\tau \leq t$ اگر و تنها اگر $\inf_{\circ \leq s \leq t} Z_s < \circ$. بنابراین

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\{\tau \leq t\} &= \mathcal{M}\left\{\inf_{\circ\leq s\leq t} Z_s < \circ\right\} = \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۱}^{\infty}(S_k \leq t,\, Y_k < \circ)\right\} \\
&= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۱}^{\infty}\left(\sum_{i=۱}^{k}\xi_i \leq t,\, a + b\sum_{i=۱}^{k}\xi_i - \sum_{i=۱}^{k}\eta_i < \circ\right)\right\} \\
&\geq \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۱}^{\infty}\bigcap_{i=۱}^{k}(\xi_i \leq \Phi^{-۱}(\alpha_k)) \cap (\eta_i > \Psi^{-۱}(۱-\alpha_k))\right\} \\
&\geq \bigvee_{k=۱}^{\infty}\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=۱}^{k}(\xi_i \leq \Phi^{-۱}(\alpha_k)) \cap (\eta_i > \Psi^{-۱}(۱-\alpha_k))\right\} \\
&= \bigvee_{k=۱}^{\infty}\bigwedge_{i=۱}^{k}\mathcal{M}\left\{(\xi_i \leq \Phi^{-۱}(\alpha_k)) \cap (\eta_i > \Psi^{-۱}(۱-\alpha_k))\right\} \\
&= \bigvee_{k=۱}^{\infty}\bigwedge_{i=۱}^{k}\mathcal{M}\left\{\xi_i \leq \Phi^{-۱}(\alpha_k)\right\} \wedge \mathcal{M}\left\{\eta_i > \Psi^{-۱}(۱-\alpha_k)\right\} \\
&= \bigvee_{k=۱}^{\infty}\bigwedge_{i=۱}^{k}\alpha_k \wedge \alpha_k = \bigvee_{k=۱}^{\infty}\alpha_k.
\end{aligned}
$$

از سوی دیگر، داریم

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\{\tau \leq t\} &= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۱}^{\infty}\left(\sum_{i=۱}^{k}\xi_i \leq t,\, a + b\sum_{i=۱}^{k}\xi_i - \sum_{i=۱}^{k}\eta_i < \circ\right)\right\} \\
&\leq \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۱}^{\infty}\bigcup_{i=۱}^{k}(\xi_i \leq \Phi^{-۱}(\alpha_k)) \cup (\eta_i > \Psi^{-۱}(۱-\alpha_k))\right\} \\
&= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}(\xi_i \leq \Phi^{-۱}(\alpha_k)) \cup (\eta_i > \Psi^{-۱}(۱-\alpha_k))\right\} \\
&\leq \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty}\left(\xi_i \leq \bigvee_{k=i}^{\infty}\Phi^{-۱}(\alpha_k)\right) \cup \left(\eta_i > \bigwedge_{k=i}^{\infty}\Psi^{-۱}(۱-\alpha_k)\right)\right\} \\
&= \bigvee_{i=۱}^{\infty}\mathcal{M}\left\{\xi_i \leq \bigvee_{k=i}^{\infty}\Phi^{-۱}(\alpha_k)\right\} \vee \mathcal{M}\left\{\eta_i > \bigwedge_{k=i}^{\infty}\Psi^{-۱}(۱-\alpha_k)\right\} \\
&= \bigvee_{i=۱}^{\infty}\bigvee_{k=i}^{\infty}\alpha_k \vee \left(۱ - \bigwedge_{k=i}^{\infty}(۱-\alpha_k)\right) = \bigvee_{k=۱}^{\infty}\alpha_k.
\end{aligned}
$$

لذا نتیجه می‌گیریم

$$\mathcal{M}\{\tau \le t\} = \bigvee_{k=1}^{\infty} \alpha_k$$

و قضیه ثابت می‌شود.

۵.۱۲ سیاست تعویض دوره ای

جایگزاری دوره ای به معنی آن است که یک عنصردر لحظه خرابی یا در دوره s جایگزین می‌شود. فرض کنید که طول عمر عناصر، متغیرهای نایقین $\xi_1, \xi_2, \ldots$ با توزیع نایقینی مشترک Φ هستند. در این صورت زمان واقعی عمر عناصر متغیرهای مستقل همتوزیع نایقین

$$\xi_1 \wedge s,\ \xi_2 \wedge s,\ \ldots \tag{۲۹.۱۲}$$

هستند که یک فرایند تجدید نایقین

$$N_t = \max_{n\ge 0}\left\{n \mid \sum_{i=1}^{n}(\xi_i \wedge s) \le t\right\}. \tag{۳۰.۱۲}$$

را تشکیل می‌دهد. فرض کنید a هزینه تعویض عنصر معیوب وقتی که زمان خرابی آن زودتر از s است و b را هزینه «تعویض برنامه ریزی شده» برای تعویض عنصری در عمر s است. توجه کنید که همیشه فرض می‌شود $a > b > 0$. تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} a, & x < s \text{ اگر} \\ b, & x = s \text{ اگر} \end{cases} \tag{۳۱.۱۲}$$

پس $f(\xi_i \wedge s)$ همان هزینه تعویض عنصر i ام است و میانگین هزینه تعویض قبل از زمان t

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t} f(\xi_i \wedge s). \tag{۳۲.۱۲}$$

است.

قضیه ۱۱.۱۲ [۱۸۱] *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots$ متغیرهای مستقل و همتوزیع از زمان‌های نایقین طول عمر هستند و s یک عدد مثبت است. پس وقتی $t \to \infty$،*

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t} f(\xi_i \wedge s) \to \frac{f(\xi_1 \wedge s)}{\xi_1 \wedge s} \tag{۳۳.۱۲}$$

به مفهوم همگرایی در توزیع است.

برهان: ابتدا، میانگین هزینه تعویض قبل از زمان t به صورت زیربازنویسی می‌شود

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t} f(\xi_i \wedge s) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N_t} f(\xi_i \wedge s)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i \wedge s)} \times \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i \wedge s)}{t}. \tag{۳۴.۱۲}$$

از طرفی، برای هر عدد حقیقی x داریم

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{i=1}^{N_t} f(\xi_i \wedge s)/\sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i \wedge s) \le x\right\}\\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(N_t = n) \cap \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i \wedge s)/\sum_{i=1}^{n}(\xi_i \wedge s) \le x\right)\right\}\\
&\supset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(N_t = n) \cap \bigcap_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i \wedge s)/(\xi_i \wedge s) \le x\right)\right\}\\
&\supset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(N_t = n) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(f(\xi_i \wedge s)/(\xi_i \wedge s) \le x\right)\right\}\\
&\supset \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(f(\xi_i \wedge s)/(\xi_i \wedge s) \le x\right)
\end{aligned}$$

و

$$\mathcal{M}\left\{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N_t} f(\xi_i \wedge s)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i \wedge s)} \le x\right\} \ge \mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\frac{f(\xi_i \wedge s)}{\xi_i \wedge s} \le x\right)\right\} = \mathcal{M}\left\{\frac{f(\xi_1 \wedge s)}{\xi_1 \wedge s} \le x\right\}.$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{i=1}^{N_t} f(\xi_i \wedge s)/\sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i \wedge s) \le x\right\}\\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(N_t = n) \cap \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i \wedge s)/\sum_{i=1}^{n}(\xi_i \wedge s) \le x\right)\right\}\\
&\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(N_t = n) \cap \bigcup_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i \wedge s)/(\xi_i \wedge s) \le x\right)\right\}\\
&\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(N_t = n) \cap \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(f(\xi_i \wedge s)/(\xi_i \wedge s) \le x\right)\right\}\\
&\subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(f(\xi_i \wedge s)/(\xi_i \wedge s) \le x\right)
\end{aligned}$$

و

$$\mathcal{M}\left\{\frac{\sum\limits_{i=۱}^{N_t} f(\xi_i \wedge s)}{\sum\limits_{i=۱}^{N_t}(\xi_i \wedge s)} \le x\right\} \le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty}\left(\frac{f(\xi_i \wedge s)}{\xi_i \wedge s} \le x\right)\right\} = \mathcal{M}\left\{\frac{f(\xi_۱ \wedge s)}{\xi_۱ \wedge s} \le x\right\}.$$

بنابراین برای هر عدد حقیقی x داریم

$$\mathcal{M}\left\{\frac{\sum\limits_{i=۱}^{N_t} f(\xi_i \wedge s)}{\sum\limits_{i=۱}^{N_t}(\xi_i \wedge s)} \le x\right\} = \mathcal{M}\left\{\frac{f(\xi_۱ \wedge s)}{\xi_۱ \wedge s} \le x\right\}.$$

پس

$$\frac{\sum\limits_{i=۱}^{N_t} f(\xi_i \wedge s)}{\sum\limits_{i=۱}^{N_t}(\xi_i \wedge s)} \quad \text{و} \quad \frac{f(\xi_۱ \wedge s)}{\xi_۱ \wedge s}$$

متغیرهای نایقین با توزیع یکسانند. چون وقتی $t \to \infty$

$$\frac{\sum\limits_{i=۱}^{N_t}(\xi_i \wedge s)}{t} \to ۱$$

از (۳۴.۱۲) رابطه (۳۳.۱۲) برقرار می‌شود. قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۱۲.۱۲ [۱۸۱] *فرض کنید $\xi_۱, \xi_۲, \ldots$ متغیرهای مستقل و همتوزیع از طول عمر با توزیع نایقینی مشترک پیوسته Φ و s یک عدد مثبت است. پس متوسط هزینه تعویض طولانی مدت به صورت*

$$\lim_{t\to\infty} E\left[\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t} f(\xi_i \wedge s)\right] = \frac{b}{s} + \frac{a-b}{s}\Phi(s) + a\int_{۰}^{s}\frac{\Phi(x)}{x^{۲}}\mathrm{d}x \qquad (۳۵.۱۲)$$

است.

برهان: فرض کنید $\Psi(x)$ توزیع نایقینی $f(\xi_۱ \wedge s)/(\xi_۱ \wedge s)$ است. از (۳۱.۱۲) برقراری $f(\xi_۱ \wedge s) \ge b$ (و $\xi_۱ \wedge s \le s$) نتیجه می‌شود. پس تقریباً قطعی

$$\frac{f(\xi_۱ \wedge s)}{\xi_۱ \wedge s} \ge \frac{b}{s}.$$

اگر $x < b/s$، آنگاه

$$\Psi(x) = \mathcal{M}\left\{\frac{f(\xi_1 \wedge s)}{\xi_1 \wedge s} \leq x\right\} = 0.$$

اگر $b/s \leq x < a/s$، آنگاه

$$\Psi(x) = \mathcal{M}\left\{\frac{f(\xi_1 \wedge s)}{\xi_1 \wedge s} \leq x\right\} = \mathcal{M}\{\xi_1 \geq s\} = 1 - \Phi(s).$$

اگر $x \geq a/s$، آنگاه

$$\Psi(x) = \mathcal{M}\left\{\frac{f(\xi_1 \wedge s)}{\xi_1 \wedge s} \leq x\right\} = \mathcal{M}\left\{\frac{a}{\xi_1} \leq x\right\} = \mathcal{M}\left\{\xi_1 \geq \frac{a}{x}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{a}{x}\right).$$

بنابراین

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x < b/s \\ 1 - \Phi(s), & \text{اگر } b/s \leq x < a/s \\ 1 - \Phi(a/x), & \text{اگر } x \geq a/s \end{cases}$$

و

$$E\left[\frac{f(\xi_1 \wedge s)}{\xi_1 \wedge s}\right] = \int_0^{+\infty} (1 - \Psi(x))\mathrm{d}x = \frac{b}{s} + \frac{a-b}{s}\Phi(s) + a\int_0^s \frac{\Phi(x)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

چون

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i \wedge s)}{t} \leq 1,$$

از (۳۴.۱۲) نتیجه می‌شود که برای هرعدد حقیقی x

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t} f(\xi_i \wedge s) \leq x\right\} \geq \mathcal{M}\left\{\frac{f(\xi_1 \wedge s)}{\xi \wedge s} \leq x\right\}.$$

با استفاده از قضیه همگرایی تسلطی لبگ داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} E\left[\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t} f(\xi_i \wedge s)\right] &= \lim_{t\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(1 - \mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t} f(\xi_i \wedge s) \leq x\right\}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\left(1 - \mathcal{M}\left\{\frac{f(\xi_1 \wedge s)}{\xi_1 \wedge s} \leq x\right\}\right)\mathrm{d}x \\
&= E\left[\frac{f(\xi_1 \wedge s)}{\xi_1 \wedge s}\right].
\end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت شده است.

عمر بهینه s چیست؟

با فرض پذیرش سیاست تعویض دوره‌ای، مساله پیدا کردن عمر دوره بهینه s است طوری که هزینه‌های تعویض کمینه شود. به این معنی است که برای عمر بهینه دوره s، مساله

$$\min_{s\geq 0}\left(\frac{b}{s}+\frac{a-b}{s}\Phi(s)+a\int_0^s\frac{\Phi(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right). \tag{۳۶.۱۲}$$

باید حل شود.

۶.۱۲ فرایند تجدید متناوب

فرض کنید $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\ldots$ یک دنباله از جفت متغیرهای نایقین است. متغیرهای ξ_i را به صورت «به‌موقع» و η_i به عنوان «بی‌موقع» به ترتیب برای $i=1,2,\ldots$ درنظر می‌گیریم. در این حالت، دوره iام شامل یک زمان ξ_i است که به دنبال آن η_i زمان بی‌موقع قرار می‌گیرد.

تعریف ۵.۱۲ [۱۷۸] *فرض کنید $\xi_1,\xi_2,\ldots$ متغیرهای مستقل همتوزیع نایقین از زمان‌های به‌موقع، و $\eta_1,\eta_2,\ldots$ متغیرهای مستقل همتوزیع نایقین از زمان‌های بی‌موقع هستند. آنگاه*

$$A_t=\begin{cases} t-\sum_{i=1}^{N_t}\eta_i, & \sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i+\eta_i)\leq t<\sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i+\eta_i)+\xi_{N_t+1} \text{ اگر} \\ \sum_{i=1}^{N_t+1}\xi_i, & \sum_{i=1}^{N_t}(\xi_i+\eta_i)+\xi_{N_t+1}\leq t<\sum_{i=1}^{N_t+1}(\xi_i+\eta_i) \text{ اگر}\end{cases} \tag{۳۷.۱۲}$$

فرایند تجدید متناوب نامیده می‌شود، که در آن N_t یک فرایند تجدید با زمان‌های ورود نایقین

$$\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\ldots$$

است.

توجه داشته باشید که فرایند تجدید متناوب A_t کل زمان که سیستم تا لحظه t در حال کار کردن قرار دارد، است. واضح است که برای هر t

$$\sum_{i=1}^{N_t}\xi_i\leq A_t\leq\sum_{i=1}^{N_t+1}\xi_i \tag{۳۸.۱۲}$$

ما به خاصیت حدی نرخی علاقمند هستیم که سیستم در حال کار کردن است.

قضیه ۱۳.۱۲ *([۱۷۸]، قضیه تجدید متناوب) فرض کنید A_t یک فرایند تجدید متناوب با زمان‌های به‌موقع مستقل همتوزیع نایقین $\xi_1,\xi_2,\ldots$ و زمان‌های بی‌موقع مستقل همتوزیع نایقین $\eta_1,\eta_2,\ldots$، است. فرض کنید $(\xi_1,\xi_2,\ldots)$ و $(\eta_1,\eta_2,\ldots)$ بردارهای نایقین مستقل هستند. پس نرخ در دسترس بودن به صورت*

$$\frac{A_t}{t}\to\frac{\xi_1}{\xi_1+\eta_1} \tag{۳۹.۱۲}$$

است که در آن حد برای $t\to\infty$ به مفهوم همگرایی در توزیع است.

برهان: توزیع‌های نایقین ξ_1 و η_1 را به ترتیب Φ و Ψ بگیرید. پس توزیع نایقینی $\xi_1/(\xi_1+\eta_1)$ به صورت

$$\Upsilon(x) = \sup_{y>0} \Phi(xy) \wedge (1 - \Psi(y - xy)) \tag{۴۰.۱۲}$$

است. از طرف دیگر، داریم

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\xi_i \le x\right\} \\
&= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}(N_t = k) \cap \left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k}\xi_i \le x\right)\right\} \\
&\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k+1}(\xi_i + \eta_i) > t\right) \cap \left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k}\xi_i \le x\right)\right\} \\
&\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(tx + \xi_{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1}\eta_i > t\right) \cap \left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k}\xi_i \le x\right)\right\} \\
&= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi_{k+1}}{t} + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k+1}\eta_i > 1 - x\right) \cap \left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k}\xi_i \le x\right)\right\}.
\end{aligned}$$

چون

$$\frac{\xi_{k+1}}{t} \to 0, \quad \text{وقتی } t \to \infty$$

و

$$\sum_{i=1}^{k+1}\eta_i \sim (k+1)\eta_1, \quad \sum_{i=1}^{k}\xi_i \sim k\xi_1,$$

داریم

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\xi_i \le x\right\} \\
&\le \lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\eta_1 > \frac{t(1-x)}{k+1}\right) \cap \left(\xi_1 \le \frac{tx}{k}\right)\right\} \\
&= \lim_{t\to\infty}\sup_{k\ge 0}\mathcal{M}\left\{\eta_1 > \frac{t(1-x)}{k+1}\right\} \wedge \mathcal{M}\left\{\xi_1 \le \frac{tx}{k}\right\} \\
&= \lim_{t\to\infty}\sup_{k\ge 0}\left(1 - \Psi\left(\frac{t(1-x)}{k+1}\right)\right) \wedge \Phi\left(\frac{tx}{k}\right) \\
&= \sup_{y>0}\Phi(xy) \wedge (1 - \Psi(y - xy)) = \Upsilon(x).
\end{aligned}$$

یعنی،

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\xi_i \le x\right\} \le \Upsilon(x). \tag{۴۱.۱۲}$$

از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\xi_i > x\right\}\\
&= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۰}^{\infty}(N_t=k)\cap\left(\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{k+۱}\xi_i > x\right)\right\}\\
&\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۰}^{\infty}\left(\sum_{i=۱}^{k}(\xi_i+\eta_i)\le t\right)\cap\left(\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{k+۱}\xi_i > x\right)\right\}\\
&\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۰}^{\infty}\left(tx-\xi_{k+۱}+\sum_{i=۱}^{k}\eta_i\le t\right)\cap\left(\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{k+۱}\xi_i > x\right)\right\}\\
&= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{k}\eta_i-\frac{\xi_{k+۱}}{t}\le ۱-x\right)\cap\left(\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{k+۱}\xi_i > x\right)\right\}.
\end{aligned}$$

چون

$$\frac{\xi_{k+۱}}{t}\to ۰, \quad \text{وقتی } t\to\infty$$

و

$$\sum_{i=۱}^{k}\eta_i \sim k\eta_۱, \quad \sum_{i=۱}^{k+۱}\xi_i \sim (k+۱)\xi_۱,$$

داریم

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\xi_i > x\right\}\\
&\le \lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۰}^{\infty}\left(\eta_۱\le\frac{t(۱-x)}{k}\right)\cap\left(\xi_۱>\frac{tx}{k+۱}\right)\right\}\\
&= \lim_{t\to\infty}\sup_{k\ge ۰}\mathcal{M}\left\{\eta_۱\le\frac{t(۱-x)}{k}\right\}\wedge\mathcal{M}\left\{\xi_۱>\frac{tx}{k+۱}\right\}\\
&= \lim_{t\to\infty}\sup_{k\ge ۰}\Psi\left(\frac{t(۱-x)}{k+۱}\right)\wedge\left(۱-\Phi\left(\frac{tx}{k+۱}\right)\right)\\
&= \sup_{y>۰}(۱-\Phi(xy))\wedge\Psi(y-xy).
\end{aligned}$$

با استفاده از اصل موضوعه دوگانی، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\xi_i\le x\right\} &\ge ۱-\sup_{y>۰}(۱-\Phi(xy))\wedge\Psi(y-xy)\\ &=\inf_{y>۰}\Phi(xy)\vee(۱-\Psi(y-xy))=\Upsilon(x).\end{aligned}$$

یعنی

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\xi_i\le x\right\}\ge\Upsilon(x). \qquad (۴۲.۱۲)$$

چون

$$\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\xi_i\le\frac{A_t}{t}\le\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\xi_i,$$

داریم

$$\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\xi_i\le x\right\}\ge\mathcal{M}\left\{\frac{A_t}{t}\le x\right\}\ge\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\xi_i\le x\right\}.$$

از (۴۱.۱۲) و (۴۲.۱۲)، برای هر عدد حقیقی x داریم

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{A_t}{t}\le x\right\}=\Upsilon(x).$$

پس نرخ دسترس پذیری A_t/t در توزیع به $\xi_۱/(\xi_۱+\eta_۱)$ همگرا می‌شود. قضیه ثابت شده است.

قضیه ۱۴.۱۲ ([۱۷۸]، *قضیه تجدید متناوب) فرض کنید A_t یک فرایند تجدید متناوب با زمان‌های به‌موقع مستقل نایقین $\xi_۱,\xi_۲,\ldots$ و زمان‌های بی‌موقع مستقل نایقین $\eta_۱,\eta_۲,\ldots$ هستند. فرض کنید $(\xi_۱,\xi_۲,\ldots)$ و $(\eta_۱,\eta_۲,\ldots)$ بردارهای نایقین مستقل هستند. آنگاه*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[A_t]}{t}=E\left[\frac{\xi_۱}{\xi_۱+\eta_۱}\right]. \qquad (۴۳.۱۲)$$

اگر زمان‌های به‌موقع و بی‌موقع به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم Φ و Ψ باشند، آنگاه

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[A_t]}{t}=\int_۰^۱\frac{\Phi^{-۱}(\alpha)}{\Phi^{-۱}(\alpha)+\Psi^{-۱}(۱-\alpha)}\mathrm{d}\alpha. \qquad (۴۴.۱۲)$$

برهان: توزیع‌های نایقینی A_t/t و $\xi_۱/(\xi_۱+\eta_۱)$ را به ترتیب $F_t(x)$ و $G(x)$ بگیرید. چون A_t/t در توزیع به $\xi_۱/(\xi_۱+\eta_۱)$ همگرا است، وقتی که $t\to\infty$ داریم $F_t(x)\to G(x)$. از قضیه همگرایی تسلطی لبگ داریم

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[A_t]}{t}=\lim_{t\to\infty}\int_۰^۱(۱-F_t(x))\mathrm{d}x=\int_۰^۱(۱-G(x))\mathrm{d}x=E\left[\frac{\xi_۱}{\xi_۱+\eta_۱}\right].$$

در نهایت، چون متغیر نایقین $\xi_1/(\xi_1+\eta_1)$ برحسب ξ_1 افزایشی اکید است و برحسب η_1 کاهشی اکید است، توزیع نایقینی معکوس به صورت

$$G^{-1}(\alpha)=\frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\Phi^{-1}(\alpha)+\Psi(1-\alpha)}$$

است. رابطه (۴۴.۱۲) نتیجه می‌شود.

۷.۱۲ نکات کتابشناسی

فرایند تجدید نایقین اولین بار در سال ۲۰۰۸ توسط لیو [۸۵] مطرح شد. دو سال بعد، لیو [۹۱] برخی از قضیه‌های تجدید مقدماتی را برای تعیین میانگین تعداد تجدیدها ثابت کرد. لیو [۹۱] همچنین فرایند پاداش تجدید نایقین را ارائه داد و برخی از قضیه‌های پاداش تجدید را برای تعیین نرخ پاداش بلند مدت ثابت و بررسی کرد. علاوه بر این، یائو_ لی [۱۷۸] یک فرایند تجدید نایقین را ارائه دادند و بعضی از قضیه‌های تجدید متناوب را برای تعیین نرخ دسترس‌پذیری ثابت کردند. بر اساس قضیه فرایند تجدید نایقین، لیو [۹۷] یک مدل بیمه نایقین با یک فرمول شاخص خرابی ارائه کرد. پس از آن، مدل بیمه نایقین توسط یائو_ گین [۱۹۱] و یائو_ژو [۱۹۵] بررسی شد. علاوه بر این، کی_یائو [۷۴] و ژانگ_ گو [۲۱۱] درباره سیاست تعویض بلوکی نایقین بحث کردند و یائو_رالسکو [۱۸۱] سیاست تعویض دوره‌ای نایقین را بررسی کردند و متوسط هزینه تعویض دراز مدت را به دست آوردند.

فصل ۱۳

حسابان نایقین

حسابان نایقین شاخه‌ای از ریاضیات است که به حساب دیفرانسیل و انتگرال فرایندهای نایقین می‌پردازد. این فصل فرایند لیو، انتگرال لیو، قضیه اساسی، قاعده زنجیری ، تغییر متغیرها و انتگرال جزء به جزء را معرفی می‌کند.

۱.۱۳ فرایند لیو

در سال ۲۰۰۹، لیو [۸۷] یک نوع فرایند با نموهای مستقل و مانا را بررسی کرد که نموهای آن متغیرهای نرمال نایقینی هستند. بعدها، این فرایندها به دلیل اهمیت و سودمندی آن، از طرف جامعه علمی و دانشگاهی به عنوان فرایند لیو نام گذاری شد. تعریف رسمی آن در زیر آمده است.

تعریف ۱.۱۳ *(لیو[۸۷]) یک فرایند نایقین C_t فرایند لیو نامیده می‌شود هرگاه*

۱. *$C_\circ = \circ$ و تقریباً تمام مسیرهای نمونه‌ای آن پیوسته لیپ شیتز باشند.*

۲. *C_t و نموهای مانا و مستقل داشته باشد.*

۳. *هر نمو $C_{s+t} - C_s$ یک متغیر نایقین نرمال با امید ۰ و واریانس $t^۲$ باشد.*

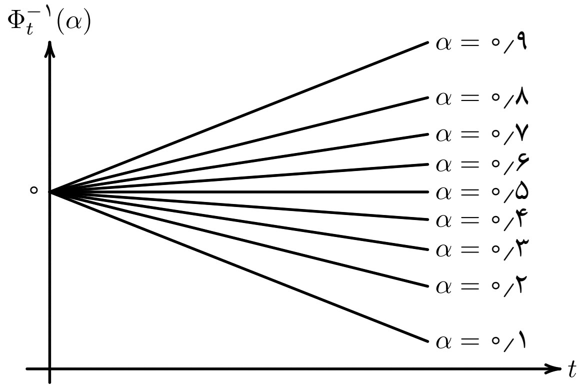
واضح است که یک فرایند لیو C_t یک فرایند با نموهای مستقل، مانا با توزیع نرمال نایقین با امید ریاضی ۰ و واریانس $t^۲$ است. توزیع نایقینی C_t

$$\Phi_t(x) = \left(۱ + \exp\left(-\frac{\pi x}{\sqrt{۳}t}\right)\right)^{-۱} \qquad (۱.۱۳)$$

است و توزیع نایقینی معکوس آن

$$\Phi_t^{-۱}(\alpha) = \frac{t\sqrt{۳}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{۱ - \alpha} \qquad (۲.۱۳)$$

است که تابع‌های خطی همگن از زمان t برای هر مقدار α است. شکل ۱.۱۳ را ببینید. فرایند لیو با سه ویژگی در تعریف فوق توصیف شد. آیا چنین فرایند نایقینی وجود دارد؟ قضیه زیر به این سوال پاسخ می‌دهد.



شکل ۱.۱۳: توزیع نایقین معکوس فرایند لیو.

قضیه ۱.۱۳ (لیو [۹۱]،قضیه وجودی) *فرایند لیو وجود دارد.*

برهان: از قضیه ۱۸.۱۱ نتیجه می‌شود که یک فرایند با نموهای مستقل ثابت C_t وجود دارد که توزیع نایقینی معکوس آن به صورت

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \frac{\sigma\sqrt{۳}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{۱-\alpha} t$$

است. همچنین، C_t نسخه پیوسته لیپ شیتز دارد. به آسانی می‌توان ثابت کرد که هر نمو $C_{s+t} - C_s$ یک متغیر نایقین نرمال با مقدار مورد انتظار ۰ و واریانس $t^۲$ است. پس فرایند لیو وجود دارد.

قضیه ۲.۱۳ *فرض کنید C_t یک فرایند لیو است. پس برای هر بار $t > ۰$، نسبت C_t/t یک متغیر نایقین نرمال با مقدار مورد انتظار ۰ و واریانس ۱ است. یعنی برای هر $t > ۰$ داریم:*

$$\frac{C_t}{t} \sim \mathcal{N}(۰, ۱). \tag{۳.۱۳}$$

برهان: چون C_t یک متغیر نایفین نرمال $\mathcal{N}(۰, t)$ است، طبق قانون عملیاتی C_t/t توزیع نایقین

$$\Psi(x) = \Phi_t(tx) = \left(۱ + \exp\left(-\frac{\pi x}{\sqrt{۳}}\right)\right)^{-۱}.$$

دارد. پس C_t/t یک متغیر نایقین نرمال با امید ۰ و واریانس ۱ است. قضیه ثابت شده است.

قضیه ۳.۱۳ (لیو [۹۱]) *فرض کنید C_t یک فرایند لیو است. پس برای هر زمان t، داریم*

$$\frac{t^۲}{۲} \leq E[C_t^۲] \leq t^۲. \tag{۴.۱۳}$$

برهان: توجه کنید که C_t یک متغیر نایقین نرمال است و توزیع نایقینی $\Phi_t(x)$ با (۱.۱۳) بیان می‌شود. از تعریف مقدار مورد انتظار نتیجه می‌شود:

$$E[C_t^{۲}] = \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{C_t^{۲} \geq x\}\mathrm{d}x = \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{(C_t \geq \sqrt{x}) \cup (C_t \leq -\sqrt{x})\}\mathrm{d}x.$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} E[C_t^{۲}] &\leq \int_{۰}^{+\infty} (\mathcal{M}\{C_t \geq \sqrt{x}\} + \mathcal{M}\{C_t \leq -\sqrt{x}\})\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi_t(\sqrt{x}) + \Phi_t(-\sqrt{x}))\mathrm{d}x = t^{۲}. \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$E[C_t^{۲}] \geq \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{C_t \geq \sqrt{x}\}\mathrm{d}x = \int_{۰}^{+\infty} (۱ - \Phi_t(\sqrt{x}))\mathrm{d}x = \frac{t^{۲}}{۲}.$$

پس (۴.۱۳) ثابت شده است.

قضیه ۴.۱۳ *(ایومورا- زو [۶۵]) فرض کنید C_t فرایند لیو است. برای هر زمان t، داریم*

$$۱/۲۴t^{۴} < V[C_t^{۲}] < ۴/۳۱t^{۴}. \tag{۵.۱۳}$$

برهان: فرض کنید q مقدار مورد انتظار $C_t^{۲}$ است. از یک طرف، تعریف واریانس ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} V[C_t^{۲}] &= \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\{(C_t^{۲} - q)^{۲} \geq x\}\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\left\{C_t \geq \sqrt{q + \sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\left\{C_t \leq -\sqrt{q + \sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\left\{-\sqrt{q - \sqrt{x}} \leq C_t \leq \sqrt{q - \sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

چون $t^{۲}/۲ \leq q \leq t^{۲}$، داریم

$$\begin{aligned} \text{جمله اول} &= \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\left\{C_t \geq \sqrt{q + \sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{۰}^{+\infty} \mathcal{M}\left\{C_t \geq \sqrt{t^{۲}/۲ + \sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} \left(۱ - \left(۱ + \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{t^{۲}/۲ + \sqrt{x}}}{\sqrt{۳}t}\right)\right)^{-۱}\right)\mathrm{d}x \\ &\leq ۱/۷۲۵t^{۴}, \end{aligned}$$

$$\text{جمله دوم} = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\left\{C_t \le -\sqrt{q+\sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x$$
$$\le \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\left\{C_t \le -\sqrt{t^2/2+\sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(1+\exp\left(\frac{\pi\sqrt{t^2/2+\sqrt{x}}}{\sqrt{3}t}\right)\right)^{-1}\mathrm{d}x$$
$$\le 1{,}725t^4,$$

$$\text{جمله سوم} = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\left\{-\sqrt{q-\sqrt{x}} \le C_t \le \sqrt{q-\sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x$$
$$\le \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\left\{C_t \le \sqrt{q-\sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x$$
$$\le \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\left\{C_t \le \sqrt{t^2-\sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(1+\exp\left(-\frac{\pi\sqrt{t^2+\sqrt{x}}}{\sqrt{3}t}\right)\right)^{-1}\mathrm{d}x$$
$$< 0{,}86t^4.$$

از سه کران بالایی نتیجه می‌شود که

$$V[C_t^2] < 1{,}725t^4 + 1{,}725t^4 + 0{,}86t^4 = 4{,}31t^4.$$

از سوی دیگر داریم

$$V[C_t^2] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{(C_t^2-q)^2 \ge x\}\mathrm{d}x$$
$$\ge \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\left\{C_t \ge \sqrt{q+\sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x$$
$$\ge \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\left\{C_t \ge \sqrt{t^2+\sqrt{x}}\right\}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(1-\left(1+\exp\left(-\frac{\pi\sqrt{t^2+\sqrt{x}}}{\sqrt{3}t}\right)\right)^{-1}\right)\mathrm{d}x$$
$$> 1{,}24t^4.$$

بنابراین درستی قضیه نتیجه می‌شود. یک مسئله باز (حل نشده) این است که کران واریانس مربع فرایند لیو را بهبود بخشیم.

تعریف ۲.۱۳ *فرض کنید C_t یک فرایند لیو است. برای هر عدد حقیقی e و $\sigma > 0$، فرایند نایقین*

$$A_t = et + \sigma C_t \tag{۶.۱۳}$$

فرایند حسابی لیو نامیده می‌شود، که در آن e رانش و σ انتشار اطلاق می‌شود.

واضح است که فرایند حسابی لیو A_t، یک فرایند با نموهای مستقل و مانا است. علاوه بر این، فرایند حسابی لیو A_t، توزیع نایقینی نرمال با مقدار مورد انتظار et و واریانس $\sigma^2 t^2$ دارد، یعنی

$$A_t \sim \mathcal{N}(et, \sigma t) \tag{۷.۱۳}$$

که توزیع نایقینی آن به صورت

$$\Phi_t(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(et - x)}{\sqrt{3}\sigma t}\right)\right)^{-1} \tag{۸.۱۳}$$

است و توزیع نایقینی معکوس آن به صورت

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = et + \frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \tag{۹.۱۳}$$

است.

تعریف ۳.۱۳ *فرض کنید C_t یک فرایند لیو است. برای هر عدد حقیقی e و $\sigma > 0$، فرایند نایقین*

$$G_t = \exp(et + \sigma C_t) \tag{۱۰.۱۳}$$

یک فرایند هندسی لیو نامیده می‌شود، که در آن e به عنوان ضریب لوگ‌ـ رانش و σ ضریب لوگ‌ـ انتشار هستند.

توجه داشته باشید که فرایند هندسی لیو G_t توزیع نایقینی لوگ‌ـ نرمال دارد، یعنی

$$G_t \sim \mathcal{LOGN}(et, \sigma t) \tag{۱۱.۱۳}$$

و توزیع نایقینی معکوس آن

$$\Phi_t(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(et - \ln x)}{\sqrt{3}\sigma t}\right)\right)^{-1} \tag{۱۲.۱۳}$$

است. علاوه بر این، مقدار مورد انتظار فرایند هندسی لیو G_t

$$E[G_t] = \begin{cases} \sigma t\sqrt{3}\exp(et)\csc(\sigma t\sqrt{3}), & t < \pi/(\sigma\sqrt{3}) \text{ اگر} \\ +\infty, & t \geq \pi/(\sigma\sqrt{3}) \text{ اگر} \end{cases} \tag{۱۳.۱۳}$$

است.

۲.۱۳ انتگرال لیو

انتگرال لیو این امکان را فراهم می‌کند تا به فرایند نایقین (تابع زیرانتگرال) نسبت به فرایند لیو (انتگرال گیر)، به عنوان پرطرفدارترین موضوع انتگرال نایقین، بپردازیم. نتیجه حاصل از انتگرال لیو نیز خود یک فرایند نایقین است.

تعریف ۴.۱۳ [۸۷] *فرض کنید X_t یک فرایند نایقین و C_t یک فرایند لیو است. برای هر افراز بازه بسته $[a, b]$ به صورت $a = t_۱ < t_۲ < \cdots < t_{k+۱} = b$ تظریف به صورت*

$$\Delta = \max_{۱\leq i\leq k} |t_{i+۱} - t_i| \tag{۱۴.۱۳}$$

نوشته می‌شود. در این صورت انتگرال لیو X_t نسبت به C_t به صورت

$$\int_a^b X_t \mathrm{d}C_t = \lim_{\Delta\to ۰} \sum_{i=۱}^{k} X_{t_i} \cdot (C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}) \tag{۱۵.۱۳}$$

تعریف می‌شود به شرط آن که این حد تقریباً قطعی موجود و متناهی باشد. در این حالت، فرایند نایقین X_t انتگرال‌پذیر نامیده می‌شود.

چون X_t و C_t در هر لحظه t متغیرهای نایقین هستند، حد تعریف شده در (۱۵.۱۳) نیز یک متغیر نایقین است، به شرط آن که حد تقریباً قطعی موجود و متناهی باشد. از این رو فرایند نایقین X_t نسبت به C_t انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر حد تعریف شده در (۱۵.۱۳) یک متغیر نایقین باشد.

مثال ۱.۱۳: برای هر افراز $۰ = t_۱ < t_۲ < \cdots < t_{k+۱} = s$، از (۱۵.۱۳) داریم

$$\int_۰^s \mathrm{d}C_t = \lim_{\Delta\to ۰} \sum_{i=۱}^{k} (C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}) \equiv C_s - C_۰ = C_s.$$

یعنی

$$\int_۰^s \mathrm{d}C_t = C_s. \tag{۱۶.۱۳}$$

مثال ۲.۱۳: برای هر افراز $۰ = t_۱ < t_۲ < \cdots < t_{k+۱} = s$، وقتی $\Delta \to ۰$ از (۱۵.۱۳) داریم

$$\begin{aligned}
C_s^۲ &= \sum_{i=۱}^{k} \left(C_{t_{i+۱}}^۲ - C_{t_i}^۲\right) \\
&= \sum_{i=۱}^{k} \left(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}\right)^۲ + ۲\sum_{i=۱}^{k} C_{t_i}\left(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}\right) \\
&\to ۰ + ۲\int_۰^s C_t \mathrm{d}C_t
\end{aligned}$$

یعنی

$$\int_{\circ}^{s} C_t \mathrm{d}C_t = \frac{۱}{۲} C_s^{۲}. \qquad (۱۷.۱۳)$$

مثال ۳.۱۳: برای هر افراز $s = t_{k+۱} < \cdots < t_۲ < t_۱ = \circ$، وقتی $\Delta \to \circ$ از (۱۵.۱۳) داریم

$$\begin{aligned} sC_s &= \sum_{i=۱}^{k} \left(t_{i+۱} C_{t_{i+۱}} - t_i C_{t_i}\right) \\ &= \sum_{i=۱}^{k} C_{t_{i+۱}} (t_{i+۱} - t_i) + \sum_{i=۱}^{k} t_i (C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}) \\ &\to \int_{\circ}^{s} C_t \mathrm{d}t + \int_{\circ}^{s} t \mathrm{d}C_t \end{aligned}$$

یعنی

$$\int_{\circ}^{s} C_t \mathrm{d}t + \int_{\circ}^{s} t \mathrm{d}C_t = sC_s. \qquad (۱۸.۱۳)$$

قضیه ۵.۱۳ *اگر X_t یک فرایند نایقین نمونه‌ای پیوسته بر $[a, b]$ باشد، آنگاه آن بر $[a, b]$ نسبت به C_t انتگرال‌پذیر است.*

برهان: فرض کنیم $a = t_۱ < t_۲ < \cdots < t_{k+۱} = b$ یک افراز بازه بسته $[a, b]$ است. چون فرایند نایقین X_t نمونه‌ای پیوسته است، تقریباً تمام مسیرهای نمونه، بر حسب t تابع‌های پیوسته هستند. پس حد

$$\lim_{\Delta \to \circ} \sum_{i=۱}^{k} X_{t_i} (C_{t_{i+۱}} - C_{t_i})$$

تقریباً قطعی موجود و متناهی است. از سوی دیگر، چون X_t و C_t در هر زمان t متغیرهای نایقین هستند، حد فوق نیز یک تابع اندازه‌پذیر است. بنابراین این حد نیز یک متغیر نایقین است و لذا X_t برحسب C_t انتگرال‌پذیر است.

قضیه ۶.۱۳ *فرض کنید X_t یک فرایند نایقین انتگرال‌پذیر بر $[a, b]$ است. پس بر هر زیربازه از $[a, b]$ نیز انتگرال‌پذیر است. علاوه بر این، اگر $c \in [a, b]$ آنگاه*

$$\int_{a}^{b} X_t \mathrm{d}C_t = \int_{a}^{c} X_t \mathrm{d}C_t + \int_{c}^{b} X_t \mathrm{d}C_t. \qquad (۱۹.۱۳)$$

برهان: فرض کنید $[a', b']$ یک زیربازه $[a, b]$ است. چون X_t یک فرایند نایقین انتگرال‌پذیر بر $[a, b]$ است، برای هر افراز

$$a = t_۱ < \cdots < t_m = a' < t_{m+۱} < \cdots < t_n = b' < t_{n+۱} < \cdots < t_{k+۱} = b,$$

حد

$$\lim_{\Delta \to ۰} \sum_{i=۱}^{k} X_{t_i}(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i})$$

تقریباً قطعی موجود و متناهی است. بنابراین حد

$$\lim_{\Delta \to ۰} \sum_{i=m}^{n-۱} X_{t_i}(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i})$$

تقریباً قطعی موجود و متناهی است. پس X_t بر زیربازه $[a', b']$ انتگرال‌پذیر است. حال، برای افراز

$$a = t_۱ < \cdots < t_m = c < t_{m+۱} < \cdots < t_{k+۱} = b,$$

داریم

$$\sum_{i=۱}^{k} X_{t_i}(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}) = \sum_{i=۱}^{m-۱} X_{t_i}(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}) + \sum_{i=m}^{k} X_{t_i}(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}).$$

توجه کنید که

$$\int_a^b X_t \mathrm{d}C_t = \lim_{\Delta \to ۰} \sum_{i=۱}^{k} X_{t_i}(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}),$$

$$\int_a^c X_t \mathrm{d}C_t = \lim_{\Delta \to ۰} \sum_{i=۱}^{m-۱} X_{t_i}(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}),$$

$$\int_c^b X_t \mathrm{d}C_t = \lim_{\Delta \to ۰} \sum_{i=m}^{k} X_{t_i}(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}).$$

پس برقراری معادله (۱۹.۱۳) نشان داده شد.

قضیه ۷.۱۳ (*خطی بودن انتگرال لیو*) *فرض کنید X_t و Y_t فرایندهای نایقین انتگرال‌پذیر بر $[a, b]$ و α و β اعداد حقیقی هستند. در این صورت*

$$\int_a^b (\alpha X_t + \beta Y_t) \mathrm{d}C_t = \alpha \int_a^b X_t \mathrm{d}C_t + \beta \int_a^b Y_t \mathrm{d}C_t. \qquad (۲۰.۱۳)$$

برهان: فرض کنید $a = t_۱ < t_۲ < \cdots < t_{k+۱} = b$ یک افراز از بازه بسته $[a, b]$ است. از تعریف انتگرال لیو نتیجه می‌شود

$$\int_a^b (\alpha X_t + \beta Y_t) \mathrm{d}C_t = \lim_{\Delta \to ۰} \sum_{i=۱}^{k} (\alpha X_{t_i} + \beta Y_{t_i})(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i})$$

$$= \lim_{\Delta \to ۰} \alpha \sum_{i=۱}^{k} X_{t_i}(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i}) + \lim_{\Delta \to ۰} \beta \sum_{i=۱}^{k} Y_{t_i}(C_{t_{i+۱}} - C_{t_i})$$

$$= \alpha \int_a^b X_t \mathrm{d}C_t + \beta \int_a^b Y_t \mathrm{d}C_t.$$

پس معادله (۲۰.۱۳) ثابت شده است.

قضیه ۸.۱۳ *فرض کنید $f(t)$ یک تابع انتگرال‌پذیر برحسب t است. پس انتگرال لیو*

$$\int_{0}^{s} f(t)\mathrm{d}C_t \tag{۲۱.۱۳}$$

در هر لحظه s یک متغیر نایقین نرمال است و

$$\int_{0}^{s} f(t)\mathrm{d}C_t \sim \mathcal{N}\left(0, \int_{0}^{s} |f(t)|\mathrm{d}t\right). \tag{۲۲.۱۳}$$

برهان: چون نموهای C_t متغیرهای نایقین مانا و مستقل هستند، برای هر افراز بازه $[0, s]$ با

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} = s$$

از قضیه ۱۲.۲ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{i=1}^{k} f(t_i)(C_{t_{i+1}} - C_{t_i}) \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=1}^{k} |f(t_i)|(t_{i+1} - t_i)\right).$$

یعنی مجموع نیز یک متغیر نایقین است. چون f یک تابع انتگرال‌پذیر است، زمانی که تظریف $\Delta \to 0$، داریم

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i)|(t_{i+1} - t_i) \to \int_{0}^{s} |f(t)|\mathrm{d}t$$

پس

$$\int_{0}^{s} f(t)\mathrm{d}C_t = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(t_i)(C_{t_{i+1}} - C_{t_i}) \sim \mathcal{N}\left(0, \int_{0}^{s} |f(t)|\mathrm{d}t\right).$$

قضیه ثابت شده است.

تمرین ۱.۱۳: فرض کنید s یک زمان داده شده با $s > 0$ است. نشان دهید انتگرال لیو

$$\int_{0}^{s} t\mathrm{d}C_t \tag{۲۳.۱۳}$$

یک متغیر نایقین نرمال $\mathcal{N}(0, s^2/2)$ است و توزیع نایقین

$$\Phi_s(x) = \left(1 + \exp\left(-\frac{2\pi x}{\sqrt{3}s^2}\right)\right)^{-1} \tag{۲۴.۱۳}$$

دارد.

تمرین ۲.۱۳: برای هر عدد حقیقی α با $0 < \alpha < 1$، فرایند نایقین

$$F_s = \int_{0}^{s} (s-t)^{-\alpha}\mathrm{d}C_t \tag{۲۵.۱۳}$$

فرایند کسری لیو با شاخص α نامیده می‌شود. نشان دهید F_s یک متغیر نایقین نرمال است و

$$F_s \sim \mathcal{N}\left(۰, \frac{s^{۱-\alpha}}{۱-\alpha}\right) \tag{۲۶.۱۳}$$

که توزیع نایقینی آن به صورت

$$\Phi_s(x) = \left(۱ + \exp\left(-\frac{\pi(۱-\alpha)x}{\sqrt{۳}s^{۱-\alpha}}\right)\right)^{-۱} \tag{۲۷.۱۳}$$

است.

تعریف ۵.۱۳ [۱۴] *فرض کنید C_t یک فرایند لیو و Z_t یک فرایند نایقین است. اگر فرایندهای نایقین μ_t و σ_t وجود داشته باشند طوری که برای هر $t \geq ۰$*

$$Z_t = Z_۰ + \int_۰^t \mu_s \mathrm{d}s + \int_۰^t \sigma_s \mathrm{d}C_s \tag{۲۸.۱۳}$$

آنگاه Z_t یک فرایند عمومی لیو با رانش μ_t و انتشار σ_t است. علاوه براین، Z_t دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Z_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}C_t \tag{۲۹.۱۳}$$

دارد.

مثال ۴.۱۳: ازمعادله (۱۶.۱۳) نتیجه می‌شود که فرایند لیو C_t را می‌توان به صورت

$$C_t = \int_۰^t \mathrm{d}C_s.$$

نوشت. بنابراین C_t یک فرایند عمومی لیو با رانش ۰ و انتشار ۱ و دیفرانسیل نامعین آن $\mathrm{d}C_t$ است.

مثال ۵.۱۳: از معادله (۱۷.۱۳) نتیجه می‌شود که $C_t^۲$ را می‌توان به صورت

$$C_t^۲ = ۲\int_۰^t C_s \mathrm{d}C_s$$

نوشت. بنابراین $C_t^۲$یک فرایند عمومی لیو با رانش ۰ و انتشار $۲C_t$ و دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}(C_t^۲) = ۲C_t \mathrm{d}C_t$$

است.

مثال ۶.۱۳: از معادله (۱۸.۱۳) نتیجه می‌شود که tC_t را می‌توان به صورت

$$tC_t = \int_۰^t C_s \mathrm{d}s + \int_۰^t s \mathrm{d}C_s$$

نوشت. بنابراین tC_t یک فرایند عمومی لیو با رانش C_t ، انتشار t و دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}(tC_t) = C_t \mathrm{d}t + t \mathrm{d}C_t$$

است.

قضیه ۹.۱۳ [۱۴] *هر فرایند عمومی لیو، یک فرایند نایقین نمونه‌ـ پیوسته است.*

برهان: فرض کنید Z_t یک فرایند عمومی لیو با رانش μ_t و انتشار σ_t است. پس داریم

$$Z_t = Z_\circ + \int_\circ^t \mu_s \mathrm{d}s + \int_\circ^t \sigma_s \mathrm{d}C_s.$$

برای هر $\gamma \in \Gamma$، واضح است وقتی $r \to t$

$$|Z_t(\gamma) - Z_r(\gamma)| = \left| \int_r^t \mu_s(\gamma)\mathrm{d}s + \int_r^t \sigma_s(\gamma)\mathrm{d}C_s(\gamma) \right| \to \circ.$$

پس Z_t نمونه‌ـ پیوسته است و قضیه ثابت شده است.

۳.۱۳ قضیه اساسی

قضیه ۱۰.۱۳ ([۸۷]، *قضیه اساسی حسابان نایقین) فرض کنید $h(t,c)$ یک تابع با مشتق پیوسته است. پس $Z_t = h(t, C_t)$ ، یک فرایند عمومی لیو است و دیفرانسیل نایقین به صورت*

$$\mathrm{d}Z_t = \frac{\partial h}{\partial t}(t, C_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial h}{\partial c}(t, C_t)\mathrm{d}C_t \qquad (۳۰.۱۳)$$

دارد.

برهان: قراردهید $\Delta C_t = C_{t+\Delta t} - C_t = C_{\Delta t}$. از قضیه‌های ۳.۱۳ و ۴.۱۳ نتیجه می‌شود که Δt و ΔC_t بینهایت کوچک هم مرتبه هستند. چون تابع h به طور پیوسته مشتق‌پذیر است، با استفاده از بسط سری تیلور، نمو بینهایت کوچک Z_t، تقریب مرتبه اول

$$\Delta Z_t = \frac{\partial h}{\partial t}(t, C_t)\Delta t + \frac{\partial h}{\partial c}(t, C_t)\Delta C_t$$

دارد. پس دیفرانسیل نایقین (۳۰.۱۳) را به دست می‌آوریم، زیرا به رابطه

$$Z_s = Z_\circ + \int_\circ^s \frac{\partial h}{\partial t}(t, C_t)\mathrm{d}t + \int_\circ^s \frac{\partial h}{\partial c}(t, C_t)\mathrm{d}C_t. \qquad (۳۱.۱۳)$$

تبدیل می‌شود که این فرمول یک فرم انتگرال از قضیه اساسی است.

مثال ۷.۱۳: فرض کنید بخواهیم دیفرانسیل نایقین tC_t را محاسبه کنیم. در این حالت داریم $h(t,c) = tc$ که مشتقات جزئی آن

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,c) = c, \quad \frac{\partial h}{\partial c}(t,c) = t$$

است. از قضیه اساسی حسابان نایقین نتیجه می‌شود

$$\mathrm{d}(tC_t) = C_t \mathrm{d}t + t\mathrm{d}C_t. \qquad (۳۲.۱۳)$$

بنابراین tC_t یک فرایند عمومی لیو با رانش C_t و انتشار t است.

مثال ۸.۱۳: حال دیفرانسیل نایقینی فرایند حسابی لیو $A_t = et + \sigma C_t$ را حساب می‌کنیم. در این حالت $h(t,c) = et + \sigma c$، که مشتقات جزئی آن

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,c) = e, \quad \frac{\partial h}{\partial c}(t,c) = \sigma$$

است. از قضیه اساسی حسابان نایقین نتیجه می‌شود

$$\mathrm{d}A_t = e\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}C_t. \tag{۳۳.۱۳}$$

بنابراین A_t یک فرایند عمومی لیو با رانش e و انتشار σ است.

مثال ۹.۱۳: برای محاسبه دیفرانسیل نایقین فرایند هندسی لیو $G_t = \exp(et + \sigma C_t)$ چنین عمل می‌کنیم. در این حالت داریم $h(t,c) = \exp(et + \sigma c)$ که مشتقات جزئی آن به صورت

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,c) = eh(t,c), \quad \frac{\partial h}{\partial c}(t,c) = \sigma h(t,c)$$

است. از قضیه اساسی حسابان نایقین داریم

$$\mathrm{d}G_t = eG_t\mathrm{d}t + \sigma G_t \mathrm{d}C_t. \tag{۳۴.۱۳}$$

بنابراین G_t یک فرایند عمومی لیو با رانش eG_t و انتشار σG_t است.

۴.۱۳ قاعده زنجیری

قاعده زنجیری یک حالت خاص از قضیه اساسی حسابان نایقین است.

قضیه ۱۱.۱۳ ([۸۷]، *قاعده زنجیری*) *فرض کنید $f(c)$ یک تابع مشتق‌پذیر پیوسته است. پس $f(C_t)$ دیفرانسیل نایقینی*

$$\mathrm{d}f(C_t) = f'(C_t)\mathrm{d}C_t. \tag{۳۵.۱۳}$$

دارد.

برهان: چون $f(c)$ یک تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر است، داریم

$$\frac{\partial}{\partial t}f(c) = ۰, \quad \frac{\partial}{\partial c}f(c) = f'(c).$$

از قضیه اساسی حسابان نایقین معادله (۳۵.۱۳) برقرار می‌شود.

مثال ۱۰.۱۳: حال دیفرانسیل نایقین $C_t^۲$ را محاسبه می‌کنیم. داریم $f(c) = c^۲$ و $f'(c) = ۲c$. از قاعده زنجیری نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{d}C_t^۲ = ۲C_t\mathrm{d}C_t. \tag{۳۶.۱۳}$$

مثال ۱۱.۱۳: دیفرانسیل نایقین $\sin(C_t)$ را محاسبه می‌کنیم. در این حالت $f(c) = \sin(c)$ و $f'(c) = \cos(c)$ است. از قاعده زنجیری نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{d}\sin(C_t) = \cos(C_t)\mathrm{d}C_t. \tag{۳۷.۱۳}$$

مثال ۱۲.۱۳: دیفرانسیل نایقینی $\exp(C_t)$ را محاسبه می‌کنیم. در این حالت $f(c) = \exp(c)$ و $f'(c) = \exp(c)$ است. از قاعده زنجیری داریم

$$\mathrm{d}\exp(C_t) = \exp(C_t)\mathrm{d}C_t. \qquad (۳۸.۱۳)$$

۵.۱۳ تغییرمتغیرها

قضیه ۱۲.۱۳ ([۸۷]، تغییرمتغیرها) *فرض کنید f یک تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر است. پس برای هر $s > ۰$ داریم*

$$\int_{۰}^{s} f'(C_t)\mathrm{d}C_t = \int_{C_۰}^{C_s} f'(c)\mathrm{d}c. \qquad (۳۹.۱۳)$$

یعنی

$$\int_{۰}^{s} f'(C_t)\mathrm{d}C_t = f(C_s) - f(C_۰). \qquad (۴۰.۱۳)$$

برهان: چون f یک تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر است، از قاعده زنجیری داریم

$$\mathrm{d}f(C_t) = f'(C_t)\mathrm{d}C_t.$$

این فرمول نتیجه می‌دهد که

$$f(C_s) = f(C_۰) + \int_{۰}^{s} f'(C_t)\mathrm{d}C_t.$$

به این ترتیب برقراری قضیه نتیجه می‌شود.

مثال ۱۳.۱۳: چون تابع $f'(c) = c$ پادمشتق $f(c) = c^۲/۲$ دارد، از تغییر متغیرهای انتگرال نتیجه می‌شود که

$$\int_{۰}^{s} C_t\mathrm{d}C_t = \frac{۱}{۲}C_s^۲ - \frac{۱}{۲}C_۰^۲ = \frac{۱}{۲}C_s^۲.$$

مثال ۱۴.۱۳: چون تابع $f'(c) = c^۲$ یک پادمشتق $f(c) = c^۳/۳$ دارد، از تغییر متغیرهای انتگرال نتیجه می‌شود که

$$\int_{۰}^{s} C_t^۲\mathrm{d}C_t = \frac{۱}{۳}C_s^۳ - \frac{۱}{۳}C_۰^۳ = \frac{۱}{۳}C_s^۳.$$

مثال ۱۵.۱۳: چون تابع $f'(c) = \exp(c)$ یک پادمشتق $f(c) = \exp(c)$ دارد، از تغییر متغیرهای انتگرال نتیجه می‌شود که

$$\int_{۰}^{s} \exp(C_t)\mathrm{d}C_t = \exp(C_s) - \exp(C_۰) = \exp(C_s) - ۱.$$

۶.۱۳ انتگرال‌گیری جزء به جزء

قضیه ۱۳.۱۳ *([۸۷]،انتگرال‌گیری جزء به جزء) فرض کنید X_t و Y_t فرایندهای لیو هستند. پس*

$$\mathrm{d}(X_tY_t) = Y_t\mathrm{d}X_t + X_t\mathrm{d}Y_t. \tag{۴۱.۱۳}$$

برهان: توجه کنید که ΔX_t و ΔY_t بینهایت کوچک و هم‌مرتبه هستند. چون تابع xy یک تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر نسبت به x و y است، با استفاده از بسط سری تیلور، نمو بینهایت کوچک X_tY_t تقریب مرتبه اول

$$\Delta(X_tY_t) = Y_t\Delta X_t + X_t\Delta Y_t$$

دارد. دیفرانسیل نایقین (۴۱.۱۳) را به دست می‌آوریم زیرا موجب می‌شود

$$X_sY_s = X_۰Y_۰ + \int_۰^s Y_t\mathrm{d}X_t + \int_۰^s X_t\mathrm{d}Y_t. \tag{۴۲.۱۳}$$

بنابراین قضیه ثابت شده است.

مثال ۱۶.۱۳: برای تشریح انتگرال‌گیری جزء به جزء نایقین، دیفرانسیل نایقین

$$Z_t = \exp(t)C_t^۲$$

را محاسبه می‌کنیم. در این حالت، تعریف می‌کنیم

$$X_t = \exp(t), \quad Y_t = C_t^۲.$$

پس

$$\mathrm{d}X_t = \exp(t)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}Y_t = ۲C_t\mathrm{d}C_t.$$

از انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{d}Z_t = \exp(t)C_t^۲\mathrm{d}t + ۲\exp(t)C_t\mathrm{d}C_t.$$

مثال ۱۷.۱۳: انتگرال گیری جزء به جزء می‌توان برای محاسبه دیفرانسیل نایقین

$$Z_t = \sin(t+۱)\int_۰^t s\mathrm{d}C_s$$

استفاده کرد. در این حالت تعریف می‌کنیم

$$X_t = \sin(t+۱), \quad Y_t = \int_۰^t s\mathrm{d}C_s.$$

پس،

$$\mathrm{d}X_t = \cos(t+۱)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}Y_t = t\mathrm{d}C_t.$$

از انتگرال جزء به جزء نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{d}Z_t = \left(\int_{\circ}^{t} s\mathrm{d}C_s\right)\cos(t+۱)\mathrm{d}t + \sin(t+۱)t\mathrm{d}C_t.$$

مثال ۱۸.۱۳: فرض کنید f و g تابع‌های به طور پیوسته مشتق‌پذیر هستند. واضح است که

$$Z_t = f(t)g(C_t)$$

یک فرایند نایقین است. برای محاسبه دیفرانسیل نایقین Z_t، تعریف می‌کنیم

$$X_t = f(t), \quad Y_t = g(C_t).$$

پس،

$$\mathrm{d}X_t = f'(t)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}Y_t = g'(C_t)\mathrm{d}C_t.$$

از انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{d}Z_t = f'(t)g(C_t)\mathrm{d}t + f(t)g'(C_t)\mathrm{d}C_t.$$

۷.۱۳ نکات کتابشناسی

انتگرال نایقین به منظور انتگرال از فرایندهای نایقین نسبت به فرایند لیو، توسط لیو در سال ۲۰۰۸ [۸۵] معرفی شد. یک سال بعد، لیو [۸۷] قضیه اساسی حسابان نایقین را ارائه داد که از آن تکنیک‌های قاعده زنجیری، تغییرمتغیرها و انتگرال‌گیری جزء به جزء استنتاج شدند.

توجه داشته باشید که انتگرال نایقین نیز می‌تواند با توجه به دیگر انتگرال‌ها تعریف شود. به عنوان مثال، یائو [۱۷۷] یک انتگرال نایقین را نسبت به فرایند تجدید نایقین تعریف کرد و چن [۱۷] یک انتگرال نایقین را با توجه به فرایندهای با تغییرپذیری متناهی بررسی کرد. از آن زمان، تئوری حسابان نایقین به خوبی توسعه یافته است.

فصل ۱۴

معادله دیفرانسیل نایقین

معادله دیفرانسیل نایقین نوعی معادله دیفرانسیل شامل فرایندهای نایقین است. این فصل به وجود، یکتایی و پایداری جواب‌های معادلات دیفرانسیل نایقین اختصاص داده شده است و فرمول یائو_چِن را برای نمایش جواب یک معادله دیفرانسیل نایقین با یک خانواده از جواب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی پیشنهاد می‌کند. بر اساس این فرمول، چند فرمول‌ها برای محاسبه مقدار فرین ، زمان اولین مشاهده و انتگرال زمان جواب نیز فراهم شده است. علاوه بر این، روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل نایقین عمومی نیز طراحی شده است.

۱.۱۴ معادله دیفرانسیل نایقین

تعریف ۱.۱۴ [۸۵] *فرض کنید C_t یک فرایند لیو است و f و g دو تابع هستند. پس*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t \tag{۱.۱۴}$$

معادله دیفرانسیل نایقین نامیده می‌شود. یک جواب X_t یک فرایند نایقین است که در (۱.۱۴) برای هر t صدق می‌کند.

تذکر ۱.۱۴: معادله دیفرانسیل نایقین (۱.۱۴) با معادله انتگرالی نایقین

$$X_s = X_\circ + \int_\circ^s f(t, X_t)\mathrm{d}t + \int_\circ^s g(t, X_t)\mathrm{d}C_t. \tag{۲.۱۴}$$

معادل است.

قضیه ۱.۱۴ *فرض کنید u_t و v_t دو فرایند نایقین انتگرال‌پذیر هستند. پس معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = u_t\mathrm{d}t + v_t\mathrm{d}C_t \tag{۳.۱۴}$$

یک جواب به صورت

$$X_t = X_\circ + \int_\circ^t u_s\mathrm{d}s + \int_\circ^t v_s\mathrm{d}C_s \tag{۴.۱۴}$$

دارد.

برهان: این قضیه در واقع همان تعریف دیفرانسیل نایقین و یا نتیجه مستقیم قضیه اساسی حسابان نایقین است.

مثال ۱.۱۴: فرض کنید a و b اعداد حقیقی هستند. معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}X_t = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}C_t \qquad (۵.۱۴)$$

را در نظر بگیرید. از قضیه ۱.۱۴ نتیجه می‌شود که جواب آن

$$X_t = X_\circ + \int_\circ^t a\mathrm{d}s + \int_\circ^t b\mathrm{d}C_s$$

است. یعنی،

$$X_t = X_\circ + at + bC_t. \qquad (۶.۱۴)$$

قضیه ۲.۱۴ *فرض کنید u_t و v_t دو فرایند نایقین انتگرال‌پذیر هستند. پس معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = u_tX_t\mathrm{d}t + v_tX_t\mathrm{d}C_t \qquad (۷.۱۴)$$

یک جواب به صورت

$$X_t = X_\circ \exp\left(\int_\circ^t u_s\mathrm{d}s + \int_\circ^t v_s\mathrm{d}C_s\right) \qquad (۸.۱۴)$$

دارد.

برهان: ابتدا، معادله دیفرانسیل نایقین اصلی با معادله

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} = u_t\mathrm{d}t + v_t\mathrm{d}C_t$$

معادل است. از قضیه اساسی حسابان نایقین نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{d}\ln X_t = \frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} = u_t\mathrm{d}t + v_t\mathrm{d}C_t$$

و لذا

$$\ln X_t = \ln X_\circ + \int_\circ^t u_s\mathrm{d}s + \int_\circ^t v_s\mathrm{d}C_s.$$

پس معادله دیفرانسیل نایقین یک جواب به صورت (۸.۱۴) دارد.

مثال ۲.۱۴: فرض کنید a و b اعداد حقیقی هستند. معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}X_t = aX_t\mathrm{d}t + bX_t\mathrm{d}C_t \qquad (۹.۱۴)$$

در نظر بگیرید. از قضیه ۲.۱۴ نتیجه می‌شود که جواب آن به صورت

$$X_t = X_\circ \exp\left(\int_\circ^t a\mathrm{d}s + \int_\circ^t b\mathrm{d}C_s\right)$$

است. یعنی

$$X_t = X_\circ \exp\left(at + bC_t\right). \qquad (۱۰.۱۴)$$

معادله دیفرانسیل نایقین خطی

قضیه ۳.۱۴ [۶] *فرض کنید $u_{1t}, u_{2t}, v_{1t}, v_{2t}$ فرایندهای نایقین انتگرال‌پذیر هستند. پس معادله دیفرانسیل نایقین خطی*

$$\mathrm{d}X_t = (u_{1t}X_t + u_{2t})\mathrm{d}t + (v_{1t}X_t + v_{2t})\mathrm{d}C_t \tag{۱۱.۱۴}$$

یک جواب به صورت

$$X_t = U_t\left(X_0 + \int_0^t \frac{u_{2s}}{U_s}\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{v_{2s}}{U_s}\mathrm{d}C_s\right) \tag{۱۲.۱۴}$$

دارد که در آن

$$U_t = \exp\left(\int_0^t u_{1s}\mathrm{d}s + \int_0^t v_{1s}\mathrm{d}C_s\right). \tag{۱۳.۱۴}$$

برهان: ابتدا، فرایندهای U_t و V_t را با استفاده از معادلات دیفرانسیل نایقین تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{d}U_t = u_{1t}U_t\mathrm{d}t + v_{1t}U_t\mathrm{d}C_t, \quad \mathrm{d}V_t = \frac{u_{2t}}{U_t}\mathrm{d}t + \frac{v_{2t}}{U_t}\mathrm{d}C_t.$$

از انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{d}(U_tV_t) = V_t\mathrm{d}U_t + U_t\mathrm{d}V_t = (u_{1t}U_tV_t + u_{2t})\mathrm{d}t + (v_{1t}U_tV_t + v_{2t})\mathrm{d}C_t.$$

یعنی، فرایند نایقین $X_t = U_tV_t$ جواب معادله دیفرانسیل نایقین (۱۱.۱۴) است. توجه کنید که

$$U_t = U_0\exp\left(\int_0^t u_{1s}\mathrm{d}s + \int_0^t v_{1s}\mathrm{d}C_s\right),$$

$$V_t = V_0 + \int_0^t \frac{u_{2s}}{U_s}\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{v_{2s}}{U_s}\mathrm{d}C_s.$$

با در نظر گرفتن $U_0 = 1$ و $V_0 = X_0$، جواب (۱۲.۱۴) را داریم. قضیه ثابت می‌شود.

مثال ۳.۱۴: فرض کنید m, a, σ اعداد حقیقی هستند. معادله دیفرانسیل نایقین خطی

$$\mathrm{d}X_t = (m - aX_t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}C_t \tag{۱۴.۱۴}$$

را در نظر بگیرید. ابتدا، داریم

$$U_t = \exp\left(\int_0^t (-a)\mathrm{d}s + \int_0^t 0\mathrm{d}C_s\right) = \exp(-at).$$

از قضیه ۳.۱۴ نتیجه می‌شود که جواب به صورت

$$X_t = \exp(-at)\left(X_0 + \int_0^t m\exp(as)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\exp(as)\mathrm{d}C_s\right)$$

است. یعنی

$$X_t = \frac{m}{a} + \exp(-at)\left(X_\circ - \frac{m}{a}\right) + \sigma \exp(-at) \int_\circ^t \exp(as)\mathrm{d}C_s \qquad (۱۵.۱۴)$$

به شرط آن که $a \neq \circ$. توجه کنید که X_t یک متغیر نایقین نرمال است، یعنی

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(\frac{m}{a} + \exp(-at)\left(X_\circ - \frac{m}{a}\right),\ \frac{\sigma}{a} - \exp(-at)\frac{\sigma}{a}\right). \qquad (۱۶.۱۴)$$

مثال ۴.۱۴: فرض کنید m و σ اعداد حقیقی هستند. معادله دیفرانسیل نایقین خطی

$$\mathrm{d}X_t = m\mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}C_t \qquad (۱۷.۱۴)$$

را در نظر بگیرید. ابتدا، داریم

$$U_t = \exp\left(\int_\circ^t \circ \mathrm{d}s + \int_\circ^t \sigma \mathrm{d}C_s\right) = \exp(\sigma C_t).$$

از قضیه ۳.۱۴ نتیجه می‌شود که جواب به صورت

$$X_t = \exp(\sigma C_t)\left(X_\circ + \int_\circ^t m \exp(-\sigma C_s)\mathrm{d}s + \int_\circ^t \circ \mathrm{d}C_s\right)$$

است. یعنی

$$X_t = \exp(\sigma C_t)\left(X_\circ + m\int_\circ^t \exp(-\sigma C_s)\mathrm{d}s\right). \qquad (۱۸.۱۴)$$

۲.۱۴ روش‌های تحلیلی

در این بخش دو روش تحلیلی برای حل برخی معادلات دیفرانسیل نایقین غیرخطی مطرح می‌شود.

روش تحلیلی اول

در اینجا یک روش تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل نایقین غیرخطی مانند

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma_t X_t \mathrm{d}C_t \qquad (۱۹.۱۴)$$

و

$$\mathrm{d}X_t = \alpha_t X_t \mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t \qquad (۲۰.۱۴)$$

پیشنهاد می‌شود.

قضیه ۴.۱۴ [۱۱۲] *فرض کنید f یک تابع دو متغیره است و σ_t یک فرایند نایقین انتگرال‌پذیر است. پس معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma_t X_t \mathrm{d}C_t \tag{۲۱.۱۴}$$

یک جواب به صورت

$$X_t = Y_t^{-1} Z_t \tag{۲۲.۱۴}$$

دارد که در آن

$$Y_t = \exp\left(-\int_0^t \sigma_s \mathrm{d}C_s\right) \tag{۲۳.۱۴}$$

و Z_t جواب معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Z_t = Y_t f(t, Y_t^{-1} Z_t)\mathrm{d}t \tag{۲۴.۱۴}$$

با مقدار اولیه $Z_0 = X_0$ است.

برهان: ابتدا با استفاده از قاعده زنجیری، فرایند نایقین Y_t معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Y_t = -\exp\left(-\int_0^t \sigma_s \mathrm{d}C_s\right)\sigma_t \mathrm{d}C_t = -Y_t\sigma_t\mathrm{d}C_t$$

دارد. از انتگرال گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{d}(X_tY_t) = X_t\mathrm{d}Y_t + Y_t\mathrm{d}X_t = -X_tY_t\sigma_t\mathrm{d}C_t + Y_t f(t, X_t)\mathrm{d}t + Y_t\sigma_t X_t\mathrm{d}C_t.$$

یعنی،

$$\mathrm{d}(X_tY_t) = Y_t f(t, X_t)\mathrm{d}t.$$

با تعریف $Z_t = X_tY_t$ داریم $X_t = Y_t^{-1}Z_t$ و $\mathrm{d}Z_t = Y_t f(t, Y_t^{-1}Z_t)\mathrm{d}t$. همچنین چون $Y_0 = 1$ ، مقدار اولیه Z_0 همان X_0 است. درستی قضیه بررسی شد.

مثال ۵.۱۴: فرض کنید α و σ اعداد حقیقی با $\alpha \neq 1$ هستند. معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}X_t = X_t^\alpha \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}C_t \tag{۲۵.۱۴}$$

را در نظر بگیرید. ابتدا، داریم $Y_t = \exp(-\sigma C_t)$ و Z_t در معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Z_t = \exp(-\sigma C_t)(\exp(\sigma C_t)Z_t)^\alpha \mathrm{d}t = \exp((\alpha-1)\sigma C_t)Z_t^\alpha \mathrm{d}t$$

صدق می‌کند. چون $\alpha \neq 1$، داریم

$$\mathrm{d}Z_t^{1-\alpha} = (1-\alpha)\exp((\alpha-1)\sigma C_t)\mathrm{d}t.$$

از قضیه اساسی حسابان نایقین نتیجه می‌شود که

$$Z_t^{1-\alpha} = Z_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\int_0^t \exp((\alpha-1)\sigma C_s)\mathrm{d}s.$$

چون مقدار اولیه Z_0 همان X_0 است؛ داریم

$$Z_t = \left(X_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t \exp((\alpha-1)\sigma C_s) \mathrm{d}s \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

قضیه ۴.۱۴ می‌گوید که معادله دیفرانسیل نایقین (۲۵.۱۴) جواب $X_t = Y_t^{-1} Z_t$ را دارد. یعنی

$$X_t = \exp(\sigma C_t) \left(X_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t \exp((\alpha-1)\sigma C_s) \mathrm{d}s \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

قضیه ۵.۱۴ [۱۱۲] *فرض کنید g یک تابع دو متغیره و α_t یک فرایند نایقین انتگرال‌پذیر است. در این صورت معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = \alpha_t X_t \mathrm{d}t + g(t, X_t) \mathrm{d}C_t \tag{۲۶.۱۴}$$

یک جواب به صورت

$$X_t = Y_t^{-1} Z_t \tag{۲۷.۱۴}$$

دارد که در آن

$$Y_t = \exp\left(-\int_0^t \alpha_s \mathrm{d}s \right) \tag{۲۸.۱۴}$$

و Z_t جواب معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Z_t = Y_t g(t, Y_t^{-1} Z_t) \mathrm{d}C_t \tag{۲۹.۱۴}$$

با مقدار اولیه $Z_0 = X_0$ است.

برهان: ابتدا با استفاده از قاعده زنجیری، فرایند نایقین Y_t معادله نایقین

$$\mathrm{d}Y_t = -\exp\left(-\int_0^t \alpha_s \mathrm{d}s \right) \alpha_t \mathrm{d}t = -Y_t \alpha_t \mathrm{d}t$$

دارد. از انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{d}(X_t Y_t) = X_t \mathrm{d}Y_t + Y_t \mathrm{d}X_t = -X_t Y_t \alpha_t \mathrm{d}t + Y_t \alpha_t X_t \mathrm{d}t + Y_t g(t, X_t) \mathrm{d}C_t.$$

یعنی

$$\mathrm{d}(X_t Y_t) = Y_t g(t, X_t) \mathrm{d}C_t.$$

با تعریف $Z_t = X_t Y_t$ داریم $X_t = Y_t^{-1} Z_t$ و $\mathrm{d}Z_t = Y_t g(t, Y_t^{-1} Z_t) \mathrm{d}C_t$. همچنین، چون $Y_0 = 1$، مقدار اولیه Z_0 همان X_0 است. درستی قضیه بررسی شد.

مثال ۶.۱۴: فرض کنید α و β اعداد حقیقی با $\beta \neq 1$ هستند. معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}X_t = \alpha X_t \mathrm{d}t + X_t^\beta \mathrm{d}C_t \tag{۳۰.۱۴}$$

را در نظر بگیرید. ابتدا، داریم $Y_t = \exp(-\alpha t)$ و Z_t در معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Z_t = \exp(-\alpha t)(\exp(\alpha t)Z_t)^{\beta}\mathrm{d}C_t = \exp((\beta - ۱)\alpha t)Z_t^{\beta}\mathrm{d}C_t$$

صدق می‌کند. چون $\beta \neq ۱$، داریم

$$\mathrm{d}Z_t^{۱-\beta} = (۱ - \beta)\exp((\beta - ۱)\alpha t)\mathrm{d}C_t.$$

از قضیه اساسی حسابان نایقین نتیجه می‌شود که

$$Z_t^{۱-\beta} = Z_{۰}^{۱-\beta} + (۱ - \beta)\int_{۰}^{t} \exp((\beta - ۱)\alpha s)\mathrm{d}C_s.$$

چون مقدار اولیه $Z_{۰}$ همان $X_{۰}$ است، داریم

$$Z_t = \left(X_{۰}^{۱-\beta} + (۱ - \beta)\int_{۰}^{t} \exp((\beta - ۱)\alpha s)\mathrm{d}C_s\right)^{۱/(۱-\beta)}.$$

قضیه ۵.۱۴ می‌گوید که معادله دیفرانسیل نایقین (۳۰.۱۴) جواب $X_t = Y_t^{-۱}Z_t$ دارد، یعنی

$$X_t = \exp(\alpha t)\left(X_{۰}^{۱-\beta} + (۱ - \beta)\int_{۰}^{t} \exp((\beta - ۱)\alpha s)\mathrm{d}C_s\right)^{۱/(۱-\beta)}.$$

روش تحلیلی دوم

در این قسمت یک روش تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل نایقین غیرخطی مانند

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma_t\mathrm{d}C_t \qquad (۳۱.۱۴)$$

و

$$\mathrm{d}X_t = \alpha_t\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t. \qquad (۳۲.۱۴)$$

ارائه می‌کنیم.

قضیه ۶.۱۴ [۱۸۳] *فرض کنید f یک تابع دو متغیره و σ_t یک فرایند نایقین انتگرال‌پذیر است. در این صورت معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma_t\mathrm{d}C_t \qquad (۳۳.۱۴)$$

یک جواب به صورت

$$X_t = Y_t + Z_t \qquad (۳۴.۱۴)$$

دارد که در آن

$$Y_t = \int_{۰}^{t} \sigma_s\mathrm{d}C_s \qquad (۳۵.۱۴)$$

و Z_t جواب معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Z_t = f(t, Y_t + Z_t)\mathrm{d}t \qquad (۳۶.۱۴)$$

با مقدار اولیه $Z_{۰} = X_{۰}$ است.

برهان: ابتدا، Y_t دیفرانسیل نایقین $\mathrm{d}Y_t = \sigma_t \mathrm{d}C_t$ دارد. پس

$$\mathrm{d}(X_t - Y_t) = \mathrm{d}X_t - \mathrm{d}Y_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}C_t - \sigma_t \mathrm{d}C_t.$$

یعنی

$$\mathrm{d}(X_t - Y_t) = f(t, X_t)\mathrm{d}t.$$

با تعریف $Z_t = X_t - Y_t$، داریم $X_t = Y_t + Z_t$ و $\mathrm{d}Z_t = f(t, Y_t + Z_t)\mathrm{d}t$. همچنین، از $Y_\circ = \circ$ نتیجه می‌شود که مقدار اولیه $Z_\circ$ همان $X_\circ$ است. برقراری قضیه بررسی شد.

مثال ۷.۱۴: فرض کنید α و σ اعداد حقیقی با $\alpha \neq \circ$ هستند. معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}X_t = \alpha \exp(X_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}C_t \qquad (۳۷.۱۴)$$

را در نظر بگیرید. ابتدا داریم $Y_t = \sigma C_t$ و Z_t در معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Z_t = \alpha \exp(\sigma C_t + Z_t)\mathrm{d}t$$

صدق می‌کند. از $\alpha \neq \circ$ داریم

$$\mathrm{d}\exp(-Z_t) = -\alpha \exp(\sigma C_t)\mathrm{d}t.$$

از قضیه اساسی حسابان نایقین نتیجه می‌شود

$$\exp(-Z_t) = \exp(-Z_\circ) - \alpha \int_\circ^t \exp(\sigma C_s)\mathrm{d}s.$$

چون مقدار اولیه $Z_\circ$ همان $X_\circ$ است، داریم

$$Z_t = X_\circ - \ln\left(۱ - \alpha \int_\circ^t \exp(X_\circ + \sigma C_s)\mathrm{d}s\right).$$

پس

$$X_t = X_\circ + \sigma C_t - \ln\left(۱ - \alpha \int_\circ^t \exp(X_\circ + \sigma C_s)\mathrm{d}s\right).$$

قضیه ۷.۱۴ [۱۸۳] *فرض کنید g یک تابع دو متغیره و α_t یک فرایند نایقین انتگرال‌پذیر است. در این صورت معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = \alpha_t \mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t \qquad (۳۸.۱۴)$$

یک جواب به صورت

$$X_t = Y_t + Z_t \qquad (۳۹.۱۴)$$

دارد که در آن

$$Y_t = \int_\circ^t \alpha_s \mathrm{d}s \qquad (۴۰.۱۴)$$

و Z_t جواب معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Z_t = g(t, Y_t + Z_t)\mathrm{d}C_t \qquad (۴۱.۱۴)$$

با مقدار اولیه $Z_\circ = X_\circ$ است.

برهان: فرایند نایقین Y_t دیفرانسیل نایقین $\mathrm{d}Y_t = \alpha_t \mathrm{d}t$ دارد. پس

$$\mathrm{d}(X_t - Y_t) = \mathrm{d}X_t - \mathrm{d}Y_t = \alpha_t \mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t - \alpha_t \mathrm{d}t.$$

یعنی

$$\mathrm{d}(X_t - Y_t) = g(t, X_t)\mathrm{d}C_t.$$

با تعریف $Z_t = X_t - Y_t$، داریم $X_t = Y_t + Z_t$ و $\mathrm{d}Z_t = g(t, Y_t + Z_t)\mathrm{d}C_t$. علاوه بر این از $Y_\circ = \circ$ نتیجه می‌شود که مقدار اولیه $Z_\circ$ همان $X_\circ$ است. درستی قضیه بررسی شد.

مثال ۸.۱۴: فرض کنید α و σ اعداد حقیقی با $\sigma \neq \circ$ هستند. معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}X_t = \alpha \mathrm{d}t + \sigma \exp(X_t)\mathrm{d}C_t \tag{۴۲.۱۴}$$

را در نظر بگیرید. ابتدا داریم $Y_t = \alpha t$ و Z_t در معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Z_t = \sigma \exp(\alpha t + Z_t)\mathrm{d}C_t$$

صدق می‌کند. از $\sigma \neq \circ$ نتیجه می‌شود

$$\mathrm{d}\exp(-Z_t) = -\sigma \exp(\alpha t)\mathrm{d}C_t.$$

از قضیه اساسی حسابان نایقین نتیجه می‌شود که

$$\exp(-Z_t) = \exp(-Z_\circ) - \sigma \int_\circ^t \exp(\alpha s)\mathrm{d}C_s.$$

چون مقدار اولیه $Z_\circ$ همان $X_\circ$ است، داریم

$$Z_t = X_\circ - \ln\left(۱ - \sigma \int_\circ^t \exp(X_\circ + \alpha s)\mathrm{d}C_s\right).$$

پس

$$X_t = X_\circ + \alpha t - \ln\left(۱ - \sigma \int_\circ^t \exp(X_\circ + \alpha s)\mathrm{d}C_s\right).$$

۳.۱۴ وجود و یکتایی

قضیه ۸.۱۴ *([۶]، قضیه وجود و یکتایی) معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t \tag{۴۳.۱۴}$$

جواب یکتا دارد اگر ضرایب $f(t,x)$ و $g(t,x)$ در شرط رشد خطی

$$|f(t,x)| + |g(t,x)| \leq L(۱ + |x|), \quad \forall x \in \Re, t \geq \circ \tag{۴۴.۱۴}$$

و شرط لیپ شیتز

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \Re, t \geq \circ \tag{۴۵.۱۴}$$

برای مقداری مانند L صدق کنند. همچنین، جواب نمونه‌ـ پیوسته باشد.

برهان: ابتدا وجود جواب را با استفاده از تقریب‌های متوالی ثابت می‌کنیم. $X_t^{(0)} = X_0$ را تعریف کنید و برای $n = 1, 2, \ldots$

$$X_t^{(n)} = X_0 + \int_0^t f\left(s, X_s^{(n-1)}\right) \mathrm{d}s + \int_0^t g\left(s, X_s^{(n-1)}\right) \mathrm{d}C_s$$

و برای هر $\gamma \in \Gamma$، قرار دهید

$$D_t^{(n)}(\gamma) = \max_{0 \le s \le t} \left| X_s^{(n+1)}(\gamma) - X_s^{(n)}(\gamma) \right|$$

از شرط رشد خطی و شرط لیپ شیتز نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} D_t^{(0)}(\gamma) &= \max_{0 \le s \le t} \left| \int_0^s f(v, X_0)\mathrm{d}v + \int_0^s g(v, X_0)\mathrm{d}C_v(\gamma) \right| \\ &\le \int_0^t |f(v, X_0)|\, \mathrm{d}v + K_\gamma \int_0^t |g(v, X_0)|\, \mathrm{d}v \\ &\le (1 + |X_0|)L(1 + K_\gamma)t \end{aligned}$$

که در آن K_γ ثابت لیپ شیتز مسیر نمونه‌ای $C_t(\gamma)$ است. در واقع با استفاده از استقرا، می‌توان تحقیق کرد که

$$D_t^{(n)}(\gamma) \le (1 + |X_0|) \frac{L^{n+1}(1 + K_\gamma)^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1}$$

برای هر n برقرار است. به عبارت دیگر، برای هر $\gamma \in \Gamma$، مسیرهای نمونه‌ای $X_t^{(k)}(\gamma)$ به طور یکنواخت روی هر بازه زمانی مشخص همگرا است. حد را با $X_t(\gamma)$ نشان دهید که همان جواب معادله دیفرانسیل نایقین است، زیرا

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t g(s, X_s)\mathrm{d}C_s.$$

حال یکتایی جواب را ثابت می‌کنیم. فرض کنید X_t و X_t^* هر دو جواب‌های معادله دیفرانسیل نایقین هستند. در این صورت برای هر $\gamma \in \Gamma$، از شرط رشد خطی و شرط لیپ شیتز نتیجه می‌شود که

$$|X_t(\gamma) - X_t^*(\gamma)| \le L(1 + K_\gamma) \int_0^t |X_v(\gamma) - X_v^*(\gamma)|\mathrm{d}v.$$

با استفاده از نامساوی گرانوال داریم

$$|X_t(\gamma) - X_t^*(\gamma)| \le 0 \cdot \exp(L(1 + K_\gamma)t) = 0.$$

پس $X_t = X_t^*$ و یکتایی جواب نتیجه می‌شود. سرانجام، برای هر $\gamma \in \Gamma$، وقتی $r \to t$ داریم

$$|X_t(\gamma) - X_r(\gamma)| = \left| \int_r^t f(s, X_s(\gamma))\mathrm{d}s + \int_r^t g(s, X_s(\gamma))\mathrm{d}C_s(\gamma) \right| \to 0.$$

پس X_t نمونه پیوسته است و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۴.۱۴ پایداری

تعریف ۲.۱۴ [۸۷] *یک معادله دیفرانسیل نایقین را پایدار گویند اگر برای هر دو جواب X_t و Y_t و برای هر مقدار مشخص $\varepsilon > ۰$ داشته باشیم*

$$\lim_{|X_۰-Y_۰|\to ۰} \mathcal{M}\{|X_t - Y_t| < \varepsilon, \forall t \geq ۰\} = ۱. \tag{۴۶.۱۴}$$

مثال ۹.۱۴: برای توصیف مفهوم پایداری معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}X_t = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}C_t \tag{۴۷.۱۴}$$

را در نظر بگیرید. واضح است که دو جواب با مقدارهای اولیه $X_۰$ و $Y_۰$ عبارتند از

$$X_t = X_۰ + at + bC_t,$$
$$Y_t = Y_۰ + at + bC_t.$$

پس برای هر عدد مشخص $\varepsilon > ۰$ داریم

$$\lim_{|X_۰-Y_۰|\to ۰} \mathcal{M}\{|X_t - Y_t| < \varepsilon, \forall t \geq ۰\} = \lim_{|X_۰-Y_۰|\to ۰} \mathcal{M}\{|X_۰ - Y_۰| < \varepsilon\} = ۱.$$

پس معادله دیفرانسیل نایقین (۴۷.۱۴) پایدار است.

مثال ۱۰.۱۴: برخی معادلات دیفرانسیل نایقین پایدار نیستند. برای مثال معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}X_t = X_t\mathrm{d}t + b\mathrm{d}C_t \tag{۴۸.۱۴}$$

را در نظر بگیرید. واضح است که دو جواب با مقدارهای اولیه $X_۰$ و $Y_۰$ به صورت

$$X_t = \exp(t)X_۰ + b\exp(t)\int_۰^t \exp(-s)\mathrm{d}C_s,$$
$$Y_t = \exp(t)Y_۰ + b\exp(t)\int_۰^t \exp(-s)\mathrm{d}C_s$$

هستند. پس برای هر عدد معلوم $\varepsilon > ۰$، داریم

$$\begin{aligned}&\lim_{|X_۰-Y_۰|\to ۰} \mathcal{M}\{|X_t - Y_t| < \varepsilon, \forall t \geq ۰\}\\ =\ &\lim_{|X_۰-Y_۰|\to ۰} \mathcal{M}\{\exp(t)|X_۰ - Y_۰| < \varepsilon, \forall t \geq ۰\} = ۰.\end{aligned}$$

پس معادله دیفرانسیل نایقین (۴۸.۱۴) ناپایدار است.

قضیه ۹.۱۴ *([۱۷۹]، قضیه پایداری) معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t \tag{۴۹.۱۴}$$

پایدار است اگر ضرایب $f(t,x)$ و $g(t,x)$ در شرط رشد خطی

$$|f(t,x)|+|g(t,x)|\le K(1+|x|),\quad \forall x\in\Re, t\ge 0 \tag{۵۰.۱۴}$$

برای برخی ثابت K و شرط لیپ شیتز قوی

$$|f(t,x)-f(t,y)|+|g(t,x)-g(t,y)|\le L(t)|x-y|,\quad \forall x,y\in\Re, t\ge 0 \tag{۵۱.۱۴}$$

برای برخی تابع انتگرال‌پذیر و کراندار $L(t)$ روی $[0,+\infty)$ صدق کنند.

برهان: چون $L(t)$ روی $[0,+\infty)$ کراندار است، مقدار ثابتی مانند R چنان موجود است که برای هر t، $L(t)\le R$. پس شرط لیپ شیتز قوی (۵۱.۱۴) موجب برقراری شرط لیپ شیتز

$$|f(t,x)-f(t,y)|+|g(t,x)-g(t,y)|\le R|x-y|,\quad \forall x,y\in\Re, t\ge 0. \tag{۵۲.۱۴}$$

می‌شود. از شرط رشد خطی (۵۰.۱۴)، شرط لیپ شیتز (۵۲.۱۴) و قضیه وجود و یکتایی نتیجه می‌شود که معادله دیفرانسیل نایقین (۴۹.۱۴) جواب یکتا دارد. فرض کنید X_t و Y_t دو جواب به ترتیب با مقدارهای اولیه X_0 و Y_0 هستند. پس برای هر γ داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}|X_t(\gamma)-Y_t(\gamma)| &\le |f(t,X_t(\gamma))-f(t,Y_t(\gamma))|+|g(t,X_t(\gamma))-g(t,Y_t(\gamma))|\\
&\le L(t)|X_t(\gamma)-Y_t(\gamma)|\mathrm{d}t+L(t)K(\gamma)|X_t(\gamma)-Y_t(\gamma)|\mathrm{d}t\\
&= L(t)(1+K(\gamma))|X_t(\gamma)-Y_t(\gamma)|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

که در آن $K(\gamma)$ ثابت لیپ شیتز مسیر نمونه‌ای $C_t(\gamma)$ است. نتیجه می‌شود که

$$|X_t(\gamma)-Y_t(\gamma)|\le |X_0-Y_0|\exp\left((1+K(\gamma))\int_0^{+\infty}L(s)\mathrm{d}s\right).$$

پس همواره برای هر مقدار مشخص $\varepsilon>0$ داریم

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\{|X_t-Y_t|<\varepsilon,\forall t\ge 0\}\\
\ge\ &\mathcal{M}\left\{|X_0-Y_0|\exp\left((1+K(\gamma))\int_0^{+\infty}L(s)\mathrm{d}s\right)<\varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

چون برای $|X_0-Y_0|\to 0$،

$$\mathcal{M}\left\{|X_0-Y_0|\exp\left((1+K(\gamma))\int_0^{+\infty}L(s)\mathrm{d}s\right)<\varepsilon\right\}\to 1$$

پس

$$\lim_{|X_0-Y_0|\to 0}\mathcal{M}\{|X_t-Y_t|<\varepsilon,\forall t\ge 0\}=1.$$

بنابر این معادله دیفرانسیل نایقین پایدار است.

تمرین ۱.۱۴: فرض کنید $u_{1t},u_{2t},v_{1t},v_{2t}$ تابع‌های کراندار نسبت به t هستند طوری که

$$\int_0^{+\infty}|u_{1t}|\mathrm{d}t<+\infty,\quad \int_0^{+\infty}|v_{1t}|\mathrm{d}t<+\infty. \tag{۵۳.۱۴}$$

نشان دهید معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}X_t=(u_{1t}X_t+u_{2t})\mathrm{d}t+(v_{1t}X_t+v_{2t})\mathrm{d}C_t \tag{۵۴.۱۴}$$

پایدار است.

۵.۱۴ α ـ مسیر

تعریف ۳.۱۴ [۱۸۲] *فرض کنید α یک عدد با خاصیت $۱ > \alpha > ۰$ است. گوییم معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t \qquad (۵۵.۱۴)$$

جواب α ـ مسیر X_t^α دارد اگر معادله دیفرانسیل معمولی

$$\mathrm{d}X_t^\alpha = f(t, X_t^\alpha)\mathrm{d}t + |g(t, X_t^\alpha)|\Phi^{-۱}(\alpha)\mathrm{d}t \qquad (۵۶.۱۴)$$

را حل کند که در آن $\Phi^{-۱}(\alpha)$ توزیع نایقین نرمال استاندارد معکوس است، یعنی

$$\Phi^{-۱}(\alpha) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{۱ - \alpha}. \qquad (۵۷.۱۴)$$

تذکر ۲.۱۴: توجه کنید که هر α ـ مسیر X_t^α یک تابع حقیقی مقدار بر حسب زمان t است، ولی لزوماً یکی از مسیرهای نمونه‌ای نیست. همچنین؛ تقریبا تمامی α ـ مسیرها تابع‌های پیوسته نسبت به زمان t هستند.

مثال ۱۱.۱۴: معادله دیفرانسیل نایقین $\mathrm{d}X_t = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}C_t$ با شرط اولیه $X_۰ = ۰$ یک α ـ مسیر

$$X_t^\alpha = at + |b|\Phi^{-۱}(\alpha)t \qquad (۵۸.۱۴)$$

دارد که در آن $\Phi^{-۱}$ توزیع نایقینی نرمال استاندارد معکوس است.

مثال ۱۲.۱۴: معادله دیفرانسیل نایقین $\mathrm{d}X_t = aX_t\mathrm{d}t + bX_t\mathrm{d}C_t$ با شرط اولیه $X_۰ = ۱$ یک α ـ مسیر

$$X_t^\alpha = \exp\left(at + |b|\Phi^{-۱}(\alpha)t\right) \qquad (۵۹.۱۴)$$

دارد که در آن $\Phi^{-۱}$ توزیع نایقینی نرمال استاندارد معکوس است.

۶.۱۴ فرمول یائو ـ چن

فرمول یائو ـ چن رابطه بین معادلات دیفرانسیل نایقین با معادلات دیفرانسیل معمولی را ایجاد می‌کند، دقیقاً مانند فرمول فیمن ـ کاچ که رابطه‌ای بین معادلات دیفرانسیل تصادفی با معادلات دیفرانسیل معمولی ایجاده کرده است.

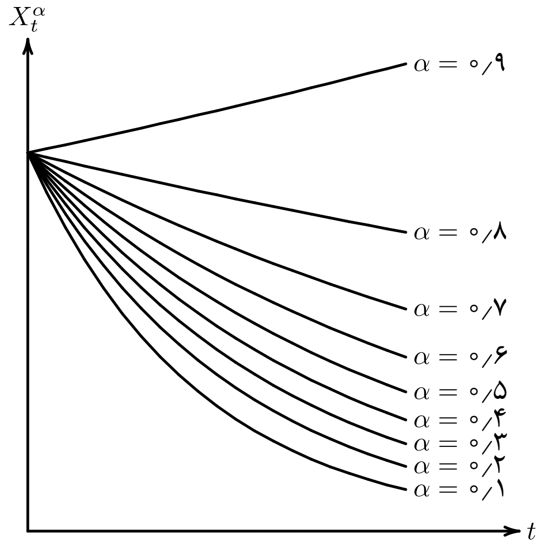
قضیه ۱۰.۱۴ *(فرمول یائو ـ چن [۱۸۲]) فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و α ـ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t, \qquad (۶۰.۱۴)$$

هستند. در این صورت

$$\mathcal{M}\{X_t \le X_t^\alpha, \forall t\} = \alpha, \qquad (۶۱.۱۴)$$

$$\mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha, \forall t\} = ۱ - \alpha. \qquad (۶۲.۱۴)$$



شکل ۱.۱۴: یک طیف از αـ مسیرهای $\mathrm{d}X_t = aX_t\mathrm{d}t + bX_t\mathrm{d}C_t$.

برهان: ابتدا، برای هر αـ مسیر X_t^α، بازه زمانی را به دو بخش افراز می‌کنیم

$$T^+ = \left\{t \mid g\left(t, X_t^\alpha\right) \geq ۰\right\},$$

$$T^- = \left\{t \mid g\left(t, X_t^\alpha\right) < ۰\right\}.$$

واضح است که $T^+ \cap T^- = \varnothing$ و $T^+ \cup T^- = [۰, +\infty)$. قرار دهید

$$\Lambda_۱^+ = \left\{\gamma \mid \frac{\mathrm{d}C_t(\gamma)}{\mathrm{d}t} \leq \Phi^{-۱}(\alpha), \forall t \in T^+\right\},$$

$$\Lambda_۱^- = \left\{\gamma \mid \frac{\mathrm{d}C_t(\gamma)}{\mathrm{d}t} \geq \Phi^{-۱}(۱-\alpha), \forall t \in T^-\right\}$$

که در آنها $\Phi^{-۱}$ توزیع نایقینی نرمال استاندارد معکوس است. چون T^+ و T^- مجموعه‌های جدا هستند و C_t نمو مستقل دارد، داریم

$$\mathcal{M}\{\Lambda_۱^+\} = \alpha, \quad \mathcal{M}\{\Lambda_۱^-\} = \alpha, \quad \mathcal{M}\{\Lambda_۱^+ \cap \Lambda_۱^-\} = \alpha.$$

برای هر $\gamma \in \Lambda_۱^+ \cap \Lambda_۱^-$ همواره رابطه

$$g(t, X_t(\gamma))\frac{\mathrm{d}C_t(\gamma)}{\mathrm{d}t} \leq |g(t, X_t^\alpha)|\Phi^{-۱}(\alpha), \ \forall t$$

برقرار است. پس برای هر t، $X_t(\gamma) \leq X_t^\alpha$ و

$$\mathcal{M}\{X_t \leq X_t^\alpha, \forall t\} \geq \mathcal{M}\{\Lambda_۱^+ \cap \Lambda_۱^-\} = \alpha. \quad (۶۳.۱۴)$$

از طرف دیگر، تعریف کنید

$$\Lambda_۲^+ = \left\{\gamma \mid \frac{\mathrm{d}C_t(\gamma)}{\mathrm{d}t} > \Phi^{-۱}(\alpha), \forall t \in T^+\right\},$$

$$\Lambda_۲^- = \left\{\gamma \mid \frac{\mathrm{d}C_t(\gamma)}{\mathrm{d}t} < \Phi^{-۱}(۱-\alpha), \forall t \in T^-\right\}.$$

چون T^+ و T^- مجموعه‌های جدا هستند و C_t نمو مستقل دارد، داریم

$$\mathcal{M}\{\Lambda_۲^+\} = ۱-\alpha, \quad \mathcal{M}\{\Lambda_۲^-\} = ۱-\alpha, \quad \mathcal{M}\{\Lambda_۲^+ \cap \Lambda_۲^-\} = ۱-\alpha.$$

برای هر $\gamma \in \Lambda_۲^+ \cap \Lambda_۲^-$، رابطه

$$g(t, X_t(\gamma))\frac{\mathrm{d}C_t(\gamma)}{\mathrm{d}t} > |g(t, X_t^\alpha)|\Phi^{-۱}(\alpha), \ \forall t$$

همواره برقرار است. پس برای هر t، $X_t(\gamma) > X_t^\alpha$ و

$$\mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha, \ \forall t\} \geq \mathcal{M}\{\Lambda_۲^+ \cap \Lambda_۲^-\} = ۱-\alpha. \qquad (۶۴.۱۴)$$

توجه کنید که $\{X_t \leq X_t^\alpha, \ \forall t\}$ و $\{X_t \not\leq X_t^\alpha, \ \forall t\}$ دو رویداد متضاد هستند. با استفاده از اصل موضوعه دوگانی داریم

$$\mathcal{M}\{X_t \leq X_t^\alpha, \ \forall t\} + \mathcal{M}\{X_t \not\leq X_t^\alpha, \ \forall t\} = ۱.$$

از $\{X_t > X_t^\alpha, \ \forall t\} \subset \{X_t \not\leq X_t^\alpha, \ \forall t\}$ و قضیه یکنوایی نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{X_t \leq X_t^\alpha, \ \forall t\} + \mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha, \ \forall t\} \leq ۱. \qquad (۶۵.۱۴)$$

پس رابطه‌های (۶۱.۱۴) و (۶۲.۱۴) از (۶۳.۱۴)، (۶۴.۱۴) و (۶۵.۱۴) نتیجه می‌شوند.

تذکر ۳.۱۴: توجه کنید که $\{X_t \leq X_t^\alpha, \ \forall t\}$ و $\{X_t > X_t^\alpha, \ \forall t\}$ رویدادهای جدا از هم هستند ولی متضاد نیستند. یعنی اجتماع آنها مجموعه مرجع را تولید نمی‌کند. با این حال همواره داریم

$$\mathcal{M}\{X_t \leq X_t^\alpha, \ \forall t\} + \mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha, \ \forall t\} \equiv ۱. \qquad (۶۶.۱۴)$$

تذکر ۴.۱۴: همچنین نشان داده می‌شود که برای هر $\alpha \in (۰, ۱)$، دو معادله زیر درست هستند

$$\mathcal{M}\{X_t < X_t^\alpha, \ \forall t\} = \alpha, \qquad (۶۷.۱۴)$$

$$\mathcal{M}\{X_t \geq X_t^\alpha, \ \forall t\} = ۱-\alpha. \qquad (۶۸.۱۴)$$

توزیع نایقینی جواب

قضیه ۱۱.۱۴ [۱۸۲] *فرض کنید X_t جواب و X_t^α یک αـ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t, \qquad (۶۹.۱۴)$$

است. در این صورت، توزیع نایقینی معکوس X_t

$$\Psi_t^{-۱}(\alpha) = X_t^\alpha \qquad (۷۰.۱۴)$$

است.

برهان: توجه کنید که رابطه $\{X_t \le X_t^\alpha\} \supset \{X_s \le X_s^\alpha, \, \forall s\}$ برای هر t برقرار است. با استفاده از قضیه یکنوایی و فرمول یائو– چن داریم

$$\mathcal{M}\{X_t \le X_t^\alpha\} \ge \mathcal{M}\{X_s \le X_s^\alpha, \, \forall s\} = \alpha. \qquad (۷۱.۱۴)$$

به طور مشابه، همچنین داریم

$$\mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha\} \ge \mathcal{M}\{X_s > X_s^\alpha, \, \forall s\} = ۱ - \alpha. \qquad (۷۲.۱۴)$$

چون برای هر t، رویدادهای $\{X_t \le X_t^\alpha\}$ و $\{X_t > X_t^\alpha\}$ متضاد هستند، اصل موضوعه دوگانی موجب می‌شود که

$$\mathcal{M}\{X_t \le X_t^\alpha\} + \mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha\} = ۱. \qquad (۷۳.۱۴)$$

از (۷۱.۱۴)، (۷۲.۱۴) و (۷۳.۱۴) نتیجه می‌شود که $\mathcal{M}\{X_t \le X_t^\alpha\} = \alpha$. پس $\Psi_t^{-۱}(\alpha) = X_t^\alpha$ توزیع نایقینی معکوس است.

تمرین ۲.۱۴: فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و αـ مسیر یک معادله دیفرانسیل نایقین هستند و J یک تابع افزایشی اکید است. نشان دهید توزیع نایقینی معکوس $J(X_t)$ به صورت

$$\Psi_t^{-۱}(\alpha) = J(X_t^\alpha) \qquad (۷۴.۱۴)$$

است.

تمرین ۳.۱۴: فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و αـ مسیر یک معادله دیفرانسیل نایقین هستند و J یک تابع کاهشی اکید است. نشان دهید توزیع نایقینی معکوس $J(X_t)$ به صورت

$$\Psi_t^{-۱}(\alpha) = J(X_t^{۱-\alpha}) \qquad (۷۵.۱۴)$$

است.

مقدار مورد انتظار جواب

قضیه ۱۲.۱۴ [۱۸۲] *فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و αـ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t, \qquad (۷۶.۱۴)$$

هستند. پس

$$E[X_t] = \int_۰^۱ X_t^\alpha \mathrm{d}\alpha. \qquad (۷۷.۱۴)$$

برهان: فرمول یائو–چن بیان می‌کند که $\Psi_t^{-1}(\alpha) = X_t^\alpha$ توزیع نایقینی معکوس X_t است. از قضیه ۲۵.۲ برقراری (۷۷.۱۴) نتیجه می‌شود.

تمرین ۴.۱۴: فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و α–مسیر یک معادله دیفرانسیل نایقین هستند و J یک تابع یکنوا (افزایش یا کاهشی) است. نشان دهید

$$E[J(X_t)] = \int_0^1 J(X_t^\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{۷۸.۱۴}$$

مقدار فرین جواب

قضیه ۱۳.۱۴ [۱۸۰] *فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و α– مسیر معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t, \tag{۷۹.۱۴}$$

هستند. در این صورت برای هر زمان $s > 0$، سوپریموم

$$\sup_{0\le t\le s} X_t \tag{۸۰.۱۴}$$

توزیع نایقینی معکوس به صورت

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \sup_{0\le t\le s} X_t^\alpha \tag{۸۱.۱۴}$$

دارد و همچنین اینفیموم

$$\inf_{0\le t\le s} X_t \tag{۸۲.۱۴}$$

توزیع نایقینی معکوس به صورت

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \inf_{0\le t\le s} X_t^\alpha \tag{۸۳.۱۴}$$

دارد.

برهان: برای هر مقدار مشخص $s > 0$، از خاصیت اساسی مقدار فرین نتیجه می‌شود که

$$\left\{\sup_{0\le t\le s} X_t \le \sup_{0\le t\le s} X_t^\alpha\right\} \supset \{X_t \le X_t^\alpha, \forall t\}.$$

با استفاده از فرمول یائو–چن داریم

$$\mathcal{M}\left\{\sup_{0\le t\le s} X_t \le \sup_{0\le t\le s} X_t^\alpha\right\} \ge \mathcal{M}\{X_t \le X_t^\alpha, \forall t\} = \alpha. \tag{۸۴.۱۴}$$

به طور مشابه داریم

$$\mathcal{M}\left\{\sup_{0\le t\le s} X_t > \sup_{0\le t\le s} X_t^\alpha\right\} \ge \mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha, \forall t\} = 1 - \alpha. \tag{۸۵.۱۴}$$

از (۸۴.۱۴)، (۸۵.۱۴) و اصل موضوعه دوگانی نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\left\{\sup_{0\le t\le s} X_t \le \sup_{0\le t\le s} X_t^\alpha\right\} = \alpha \tag{۸۶.۱۴}$$

که (۸۱.۱۴) را ثابت می‌کند. حال از خاصیت اساسی مقدار فرین نتیجه می‌شود که

$$\left\{\inf_{0\le t\le s} X_t \le \inf_{0\le t\le s} X_t^\alpha\right\} \supset \{X_t \le X_t^\alpha,\, \forall t\}.$$

با استفاده از فرمول یائو-چن داریم

$$\mathcal{M}\left\{\inf_{0\le t\le s} X_t \le \inf_{0\le t\le s} X_t^\alpha\right\} \ge \mathcal{M}\{X_t \le X_t^\alpha,\, \forall t\} = \alpha. \tag{۸۷.۱۴}$$

به طور مشابه داریم

$$\mathcal{M}\left\{\inf_{0\le t\le s} X_t > \inf_{0\le t\le s} X_t^\alpha\right\} \ge \mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha,\, \forall t\} = 1 - \alpha. \tag{۸۸.۱۴}$$

از (۸۷.۱۴)، (۸۸.۱۴) و اصل موضوعه دوگانی نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\left\{\inf_{0\le t\le s} X_t \le \inf_{0\le t\le s} X_t^\alpha\right\} = \alpha \tag{۸۹.۱۴}$$

که برقراری (۸۳.۱۴) را نشان می‌دهد. به این ترتیب قضیه ثابت شد.

تمرین ۵.۱۴: فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و α-مسیر یک معادله دیفرانسیل نایقین هستند. برای هر $s > 0$ و هر تابع افزایشی اکید J، نشان دهید سوپریموم

$$\sup_{0\le t\le s} J(X_t) \tag{۹۰.۱۴}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \sup_{0\le t\le s} J(X_t^\alpha); \tag{۹۱.۱۴}$$

دارد و اینفیموم

$$\inf_{0\le t\le s} J(X_t) \tag{۹۲.۱۴}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \inf_{0\le t\le s} J(X_t^\alpha) \tag{۹۳.۱۴}$$

دارد.

تمرین ۶.۱۴: فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و α–مسیر یک معادله دیفرانسیل نایقین هستند. برای هر $s > 0$ و هر تابع کاهشی اکید J، نشان دهید سوپریموم

$$\sup_{0\le t\le s} J(X_t) \tag{۹۴.۱۴}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \sup_{0\le t\le s} J(X_t^{1-\alpha}); \tag{۹۵.۱۴}$$

دارد و اینفیموم

$$\inf_{0\le t\le s} J(X_t) \tag{۹۶.۱۴}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \inf_{0\le t\le s} J(X_t^{1-\alpha}) \tag{۹۷.۱۴}$$

دارد.

زمان اولین برخورد جواب

قضیه ۱۴.۱۴ [۱۸۰] *فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و α–مسیر معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t, \tag{۹۸.۱۴}$$

هستند. در این صورت، برای هر سطح مشخص z، زمان اولین برخورد τ_z که X_t به سطح z می‌رسد، توزیع نایقینی

$$\Psi(s) = \begin{cases} 1 - \inf\left\{\alpha \mid \sup\limits_{0\le t\le s} X_t^\alpha \ge z\right\}, & z > X_0 \text{ اگر} \\ \sup\left\{\alpha \mid \inf\limits_{0\le t\le s} X_t^\alpha \le z\right\}, & z < X_0 \text{ اگر} \end{cases} \tag{۹۹.۱۴}$$

دارد.

برهان: ابتدا فرض کنید $z > X_0$ و قرار دهید

$$\alpha_0 = \inf\left\{\alpha \mid \sup_{0\le t\le s} X_t^\alpha \ge z\right\}.$$

در این صورت

$$\sup_{0\le t\le s} X_t^{\alpha_0} = z,$$

$$\{\tau_z \le s\} = \left\{\sup_{0\le t\le s} X_t \ge z\right\} \supset \{X_t \ge X_t^{\alpha_0},\ \forall t\},$$

$$\{\tau_z > s\} = \left\{\sup_{0\le t\le s} X_t < z\right\} \supset \{X_t < X_t^{\alpha_0}, \forall t\}.$$

با استفاده از فرمول یائو_چن داریم

$$\mathcal{M}\{\tau_z \le s\} \ge \mathcal{M}\{X_t \ge X_t^{\alpha_0}, \forall t\} = 1 - \alpha_0,$$

$$\mathcal{M}\{\tau_z > s\} \ge \mathcal{M}\{X_t < X_t^{\alpha_0}, \forall t\} = \alpha_0.$$

از $\mathcal{M}\{\tau_z \le s\} + \mathcal{M}\{\tau_z > s\} = 1$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{M}\{\tau_z \le s\} = 1 - \alpha_0$. پس زمان اولین برخورد τ_z توزیع نایقین

$$\Psi(s) = \mathcal{M}\{\tau_z \le s\} = 1 - \alpha_0 = 1 - \inf\left\{\alpha \mid \sup_{0\le t\le s} X_t^{\alpha} \ge z\right\}$$

دارد. به طور مشابه فرض کنید $z < X_0$ و قرار دهید

$$\alpha_0 = \sup\left\{\alpha \mid \inf_{0\le t\le s} X_t^{\alpha} \le z\right\}.$$

در این صورت

$$\inf_{0\le t\le s} X_t^{\alpha_0} = z,$$

$$\{\tau_z \le s\} = \left\{\inf_{0\le t\le s} X_t \le z\right\} \supset \{X_t \le X_t^{\alpha_0}, \forall t\},$$

$$\{\tau_z > s\} = \left\{\inf_{0\le t\le s} X_t > z\right\} \supset \{X_t > X_t^{\alpha_0}, \forall t\}.$$

با استفاده از فرمول یائو_چن داریم

$$\mathcal{M}\{\tau_z \le s\} \ge \mathcal{M}\{X_t \le X_t^{\alpha_0}, \forall t\} = \alpha_0,$$

$$\mathcal{M}\{\tau_z > s\} \ge \mathcal{M}\{X_t > X_t^{\alpha_0}, \forall t\} = 1 - \alpha_0.$$

از $\mathcal{M}\{\tau_z \le s\} + \mathcal{M}\{\tau_z > s\} = 1$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{M}\{\tau_z \le s\} = \alpha_0$. پس زمان اولین برخورد τ_z توزیع نایقینی

$$\Psi(s) = \mathcal{M}\{\tau_z \le s\} = \alpha_0 = \sup\left\{\alpha \mid \inf_{0\le t\le s} X_t^{\alpha} \le z\right\}$$

دارد. به این ترتیب قضیه ثابت شد.

تمرین ۷.۱۴: فرض کنید X_t و X_t^{α} به ترتیب جواب و α_ مسیر یک معادله دیفرانسیل نایقین هستند. برای هر سطح مشخص z و هر تابع افزایشی اکید J، نشان دهید زمان اولین برخورد τ_z که $J(X_t)$ به مقدار z می‌رسد، توزیع نایقینی

$$\Psi(s) = \begin{cases} 1 - \inf\left\{\alpha \mid \sup_{0\le t\le s} J(X_t^{\alpha}) \ge z\right\}, & z > J(X_0) \text{ اگر} \\ \sup\left\{\alpha \mid \inf_{0\le t\le s} J(X_t^{\alpha}) \le z\right\}, & z < J(X_0) \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱۰۰.۱۴)$$

دارد.

تمرین ۸.۱۴: فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و αـ مسیر یک معادله دیفرانسیل نایقین هستند. برای هر سطح مشخص z و هر تابع کاهشی اکید J، نشان دهید زمان اولین برخورد τ_z که $J(X_t)$ به مقدار z می‌رسد، توزیع نایقینی

$$\Psi(s) = \begin{cases} \sup\left\{\alpha \mid \sup_{\circ\le t\le s} J(X_t^\alpha) \ge z\right\}, & z > J(X_\circ) \text{ اگر} \\ ۱ - \inf\left\{\alpha \mid \inf_{\circ\le t\le s} J(X_t^\alpha) \le z\right\}, & z < J(X_\circ) \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱۰۱.۱۴)$$

دارد.

انتگرال زمان جواب

قضیه ۱۵.۱۴ [۱۸۰] *فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و αـ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین*

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t, \qquad (۱۰۲.۱۴)$$

هستند. در این صورت برای هر $s > \circ$، انتگرال زمان

$$\int_\circ^s X_t\mathrm{d}t \qquad (۱۰۳.۱۴)$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha) = \int_\circ^s X_t^\alpha\mathrm{d}t \qquad (۱۰۴.۱۴)$$

دارد.

برهان: برای هر زمان مشخص $s > \circ$، از خاصیت اساسی انتگرال زمان نتیجه می‌شود که

$$\left\{\int_\circ^s X_t\mathrm{d}t \le \int_\circ^s X_t^\alpha\mathrm{d}t\right\} \supset \{X_t \le X_t^\alpha,\ \forall t\}.$$

با استفاده از فرمول یائو_ جن داریم

$$\mathcal{M}\left\{\int_\circ^s X_t\mathrm{d}t \le \int_\circ^s X_t^\alpha\mathrm{d}t\right\} \ge \mathcal{M}\{X_t \le X_t^\alpha,\ \forall t\} = \alpha. \qquad (۱۰۵.۱۴)$$

به طور مشابه داریم

$$\mathcal{M}\left\{\int_\circ^s X_t\mathrm{d}t > \int_\circ^s X_t^\alpha\mathrm{d}t\right\} \ge \mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha,\ \forall t\} = ۱ - \alpha. \qquad (۱۰۶.۱۴)$$

از (۱۰۵.۱۴)، (۱۰۶.۱۴) و اصل موضوعه دوگانی نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\left\{\int_\circ^s X_t\mathrm{d}t \le \int_\circ^s X_t^\alpha\mathrm{d}t\right\} = \alpha. \qquad (۱۰۷.۱۴)$$

به این ترتیب قضیه ثابت شد.

تمرین ۹.۱۴: فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و αـ مسیر یک معادله دیفرانسیل نایقین هستند. برای هر $s > 0$ و هر تابع افزایشی یکنوا J، نشان دهید انتگرال زمان

$$\int_0^s J(X_t)\mathrm{d}t \tag{۱۰۸.۱۴}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \int_0^s J(X_t^\alpha)\mathrm{d}t. \tag{۱۰۹.۱۴}$$

دارد.

تمرین ۱۰.۱۴: فرض کنید X_t و X_t^α به ترتیب جواب و αـ مسیر یک معادله دیفرانسیل نایقین هستند. برای هر $s > 0$ و هر تابع کاهشی یکنوا J، نشان دهید انتگرال زمان

$$\int_0^s J(X_t)\mathrm{d}t \tag{۱۱۰.۱۴}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \int_0^s J(X_t^{1-\alpha})\mathrm{d}t \tag{۱۱۱.۱۴}$$

دارد.

۷.۱۴ روش‌های عددی

اغلب یافتن جواب‌های تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل نایقین در حالت کلی امکان پذیر نیست. این واقعیت انگیزه‌ای برای ابداع روش‌های عددی برای حل معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}t + g(t, X_t)\mathrm{d}C_t \tag{۱۱۲.۱۴}$$

است. برای این کار، نکته اساسی به دست آوردن طیف αـ مسیرهای معادله دیفرانسیل نایقین است. برای این منظور، یائوـ چن [۱۸۲] یک روش بر مبنای روش اویلر طراحی کردند:

گام ۱. مقدار α را در بازه $(0, 1)$ انتخاب کنید.

گام ۲. مساله $\mathrm{d}X_t^\alpha = f(t, X_t^\alpha)\mathrm{d}t + |g(t, X_t^\alpha)|\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}t$ را با استفاده از روشی در معادلات دیفرانسیل معمولی حل کنید و αـ مسیر X_t^α را مشخص کنید، به عنوان مثال با فرمول بازگشتی

$$X_{i+1}^\alpha = X_i^\alpha + f(t_i, X_i^\alpha)h + |g(t_i, X_i^\alpha)|\Phi^{-1}(\alpha)h \tag{۱۱۳.۱۴}$$

که در آن Φ^{-1} توزیع نایقینی نرمال استاندارد معکوس و h طول گام است.

گام ۳. αـ مسیر X_t^α تولید شده است.

تذکر ۵.۱۴: یانگ ـ شِن [۱۷۰] روش رانگ ـ کوتا را طراحی کردند که رابطه بازگشتی (۱۱۳.۱۴) را با

$$X_{i+1}^{\alpha} = X_i^{\alpha} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{۱۱۴.۱۴}$$

جایگزین می‌کند که در آن

$$k_1 = f(t_i, X_i^{\alpha}) + |g(t_i, X_i^{\alpha})|\Phi^{-1}(\alpha), \tag{۱۱۵.۱۴}$$

$$k_2 = f(t_i + h/2, X_i^{\alpha} + hk_1/2) + |g(t_i + h/2, X_i^{\alpha} + hk_1/2)|\Phi^{-1}(\alpha), \tag{۱۱۶.۱۴}$$

$$k_3 = f(t_i + h/2, X_i^{\alpha} + hk_2/2) + |g(t_i + h/2, X_i^{\alpha} + hk_2/2)|\Phi^{-1}(\alpha), \tag{۱۱۷.۱۴}$$

$$k_4 = f(t_i + h, X_i^{\alpha} + hk_3) + |g(t_i + h, X_i^{\alpha} + hk_3)|\Phi^{-1}(\alpha). \tag{۱۱۸.۱۴}$$

مثال ۱۳.۱۴: برای توصیف روش عددی، معادله دیفرانسیل

$$\mathrm{d}X_t = (t - X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{1 + X_t}\mathrm{d}C_t, \quad X_0 = 1 \tag{۱۱۹.۱۴}$$

را در نظر بگیرید. روش اویلر این معادله را حل می‌کند و همه αـ مسیرهای معادله دیفرانسیل نایقین را تولید می‌کند. همچنین داریم

$$E[X_1] \approx 0/870. \tag{۱۲۰.۱۴}$$

مثال ۱۴.۱۴: معادله دیفرانسیل نایقین غیرخطی

$$\mathrm{d}X_t = \sqrt{X_t}\mathrm{d}t + (1 - t)X_t\mathrm{d}C_t, \quad X_0 = 1 \tag{۱۲۱.۱۴}$$

را در نظر بگیرید. توجه کنید که $(1 - t)X_t$ نه تنها مقادیر مثبت بلکه مقادیر منفی را می‌گیرد. روش اویلر تمامی αـ مسیرهای این معادله دیفرانسیل نایقین را مشخص می‌کند و همچنین داریم

$$E[(X_2 - 3)^+] \approx 2/845. \tag{۱۲۲.۱۴}$$

۸.۱۴ نکات کتابشناسی

مطالعه و بررسی معادله دیفرانسیل نایقین توسط لیو [۸۵] در سال ۲۰۰۸ آغاز شد. ابن بررسی‌ها بلافاصله توسط بسیاری از پژوهشگران پیگیری شد. حال معادله دیفرانسیل نایقین به نتایج مفیدی هم در نظریه و هم در کاربرد منجر شده است.

قضیه وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل نایقین ابتدا توسط چن ـ لیو [۶] با شرط رشد خطی و شرط لیپ شیتز ثابت شد. بعد، قضیه مجددا توسط گائو [۵۲] با شرط رشد خطی موضعی و شرط لیپ شیتز موضعی مطالعه شد.

اولین مفهوم پایداری معادله دیفرانسیل نایقین توسط لیو [۸۷] ارائه شد و برخی قضیه‌های پایداری نیز توسط یائو ـ گائو ـ گائو [۱۷۹] ثابت شدند. در ادامه انواع مختلف پایداری معادلات دیفرانسیل

نایقین بررسی شدند، به عنوان مثال، پایداری در میانگین (یائو ـ کی ـ شنگ [۱۸۶])، پایداری در گشتاور (شنگ ـ وانگ [۱۴۶])، پایداری در توزیع (یانگ ـ نی ـ ژانگ [۱۷۲])، پایداری تقریبا قطعی (لی ـ کی ـ فی [۱۰۸]) و پایداری نمایی (شنگ ـ گائو [۱۵۰]).

برای حل معادلات دیفرانسیل نایقین، چن ـ لیو [۶] یک روش تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل نایقین خطی ارائه کردند. همچنین لیو [۱۱۲] و یائو [۱۸۳] یک طیف از روشهای تحلیلی برای حل برخی کلاس خاص از معادلات دیفرانسیل نایقین غیرخطی ارائه دادند.

مهمتر از همه، یائو ـ چن [۱۸۲] نشان دادند که جواب یک معادله دیفرانسیل نایقین را می‌توان با خانواده‌ای از جواب‌های معادله دیفرانسیل معمولی نشان داد و بنابراین معادلات دیفرانسیل نایقین و معادلات دیفرانسیل معمولی را به هم ارتباط دادند. بر اساس فرمول یائو ـ چن، یائو [۱۸۰] چند فرمول برای محاسبه مقدار فرین ، زمان اولین برخورد، و انتگرال زمان برای جواب معادله دیفرانسیل نایقین را ارائه داد. همچنین، چند روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل نایقین کلی توسط بسیاری طراحی شد در بین آنها می‌توان از یائو ـ چن [۱۸۲]، یائو ـ شن [۱۷۰]، یانگ ـ رالسکو [۱۶۹]، گائو [۳۶] و ژانگ ـ گائو ـ هوانگ [۲۱۵] نام برد.

معادله دیفرانسیل نایقین از جنبه‌های مختلفی توسعه یافته است، شامل معادله دیفرانسیل تاخیر نایقین (برباکیورو [۲]، گی ـ ژو [۵۵]، لیو ـ فی [۱۰۷])، معادله دیفرانسیل نایقین مرتبه بالاتر (یائو [۱۹۴])، معادله دیفرانسیل نایقین چندعاملی (لی ـ پنگ ـ ژانگ [۷۸]، حسن‌راده ـ مهردوست [۶۰] و چن ـ گائو [۱۸])، معادله دیفرانسیل نایقین با جهش (یائو [۱۷۷])، معادله دیفرانسیل کسری نایقین (ژو [۲۲۱]) و معادله دیفرانسیل پاره‌ای نایقین (یانگ ـ گائو [۱۷۳]).

معادله دیفرانسیل نایقین به طور گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف استفاده شده است مانند مالی (لیو [۹۶])، کنترل بهینه (ژو [۲۲۰])، بازی دیفرانسیلی (یانگ ـ گائو [۱۶۷])، انتقال حرارت (یانگ ـ یائو [۱۷۳])، رشد جمعیت (شنگ ـ گائو ـ ژانگ [۱۵۲])، ارتعاش سیم (گائو [۴۱]) و ارتعاش فنر (جیا ـ دیا [۷۰]).

فصل ۱۵

مالی نایقین

در این فصل، با استفاده از ابزار معادلات دیفرانسیل نایقین، مدل سهام نایقین، مدل نرخ بهره نایقین و مدل ارز نایقین معرفی خواهد شد. بر اساس اصل قیمت گذاری منصفانه، این فصل همچنین به قیمت اختیارهای اروپایی، اختیارهای آمریکایی، اختیارهای آسیایی، اوراق قرضه بدون سود، سقف نرخ بهره و کف نرخ بهره می‌پردازد.

۱.۱۵ مدل سهام نایقین

در سال ۲۰۰۹، لیو [۸۷] ابتدا فرض کرد قیمت سهام از یک معادله دیفرانسیل نایقین پیروی می‌کند و مدل سهام نایقین را ارائه می‌دهد که در آن X_t قیمت اوراق قرضه و Y_t قیمت سهام به صورت

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = rX_t\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}Y_t = eY_t\mathrm{d}t + \sigma Y_t\mathrm{d}C_t \end{cases} \tag{۱.۱۵}$$

است که در آن r نرخ بهره بدون ریسک، e لوگ‌ـ‌رانش، σ لوگ‌ـ‌انتشار و C_t یک فرایند لیو است. توجه کنید که قیمت اوراق قرضه به صورت

$$X_t = X_۰ \exp(rt) \tag{۲.۱۵}$$

است و قیمت سهام به صورت

$$Y_t = Y_۰ \exp(et + \sigma C_t) \tag{۳.۱۵}$$

است که توزیع نایقینی معکوس آن به صورت

$$\Phi_t^{-۱}(\alpha) = Y_۰ \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{۱-\alpha}\right) \tag{۴.۱۵}$$

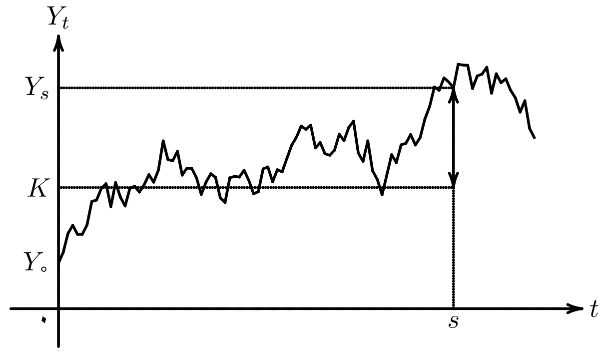
است.

۲.۱۵ اختیارهای اروپایی

این بخش به قیمت گذاری اختیارهای فروش و خرید اروپایی برای بازار مالی که با مدل سهام (۱.۱۵) تعیین می‌شود، اختصاص دارد.

اختیار خرید اروپایی

تعریف ۱.۱۵ *یک اختیار خرید اروپایی، قراردادی است که به مالک آن حق خرید یک سهم را در سررسید s به قیمت توافقی K می‌دهد.*



شکل ۱.۱۵: بازده $(Y_s - K)^+$ از اختیار خرید اروپایی

فرض کنید f_c نشان دهنده قیمت این قرارداد است. پس سرمایه‌گذار f_c را برای خرید قرارداد در زمان ۰ می‌پردازد و در زمان s بازده $(Y_s - K)^+$ را دارد، زیرا اختیار به طور منطقی اعمال می‌شود اگر و تنها اگر $Y_s > K$ باشد، شکل ۱.۱۵ را نگاه کنید. با توجه به ارزش زمانی پول حاصل از اوراق قرضه، ارزش فعلی بازده ، $\exp(-rs)(Y_s - K)^+$ است. بنابراین بازده خالص سرمایه‌گذار در زمان ۰ به صورت

$$-f_c + \exp(-rs)(Y_s - K)^+ \qquad (۵.۱۵)$$

است. از سوی دیگر، بانک f_c را برای فروش قرارداد در زمان ۰ دریافت و در سررسید ، $(Y_s - K)^+$ می‌پردازد. بنابراین بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f_c - \exp(-rs)(Y_s - K)^+ \qquad (۶.۱۵)$$

است. قیمت منصفانه این قرارداد باید باعث شود که سرمایه‌گذار و بانک بازده مورد انتظار یکسان داشته باشند (بعد از این آن را اصل قیمت منصفانه می‌نامیم)، [1] یعنی

$$-f_c + \exp(-rs)E[(Y_s - K)^+] = f_c - \exp(-rs)E[(Y_s - K)^+]. \qquad (۷.۱۵)$$

بنابراین $f_c = \exp(-rs)E[(Y_s - K)^+]$. یعنی قیمت اختیار خرید اروپایی همان ارزش فعلی مورد انتظار بازده است.

[1] قیمت منصفانه در اصل عدم وجود آربیتراژ صدق نمی‌کند (یعنی هیچگاه فرصتی برای سود بدون ریسک وجود ندارد). در واقع من [نویسنده] با اصل عدم وجود آربیتراژ موافق نیستم زیرا ممکن است به نتایج غیرمنطقی منجر شود.

تعریف ۲.۱۵ [۸۷] *فرض کنید یک اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار خرید اروپایی به صورت*

$$f_c = \exp(-rs)E[(Y_s - K)^+] \tag{۸.۱۵}$$

است که در آن Y_s قیمت سهام در زمان s، و r نرخ بهره بدون ریسک است.

قضیه ۱.۱۵ [۸۷] *فرض کنید یک اختیار خرید اروپایی برای مدل سهام نایقین (۱.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. بنابراین قیمت اختیار خرید اروپایی*

$$f_c = \exp(-rs)\int_{۰}^{۱}\left(Y_{۰}\exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right) - K\right)^+ \mathrm{d}\alpha \tag{۹.۱۵}$$

است.

برهان: از مدل سهام نایقین (۱.۱۵) نتیجه می‌گیریم که قیمت سهام Y_s توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_s^{-۱}(\alpha) = Y_{۰}\exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)$$

دارد. بنابراین $(Y_s - K)^+$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha) = \left(Y_{۰}\exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right) - K\right)^+$$

دارد. با استفاده از (۸.۱۵) و فرمول مقدار مورد انتظار، (۹.۱۵) را داریم.

اختیار فروش اروپایی

تعریف ۳.۱۵ *یک اختیار فروش اروپایی قراردادی است که به دارنده حق فروش (ولی نه تعهد) سهام را در سررسید s به قیمت توافقی K را می‌دهد.*

فرض کنید f_p نشان دهنده قیمت این قرارداد است. پس سرمایه‌گذار f_p را برای خرید قرارداد در زمان ۰ می‌پردازد و در لحظه s از آن $(K - Y_s)^+$ سود می‌گیرد. چون این اختیار به طور منطقی اعمال می‌شود اگر و فقط اگر $Y_s < K$، با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول ناشی از اوراق قرضه، ارزش فعلی بازده $\exp(-rs)(K - Y_s)^+$ است. بنابراین بازده خالص سرمایه‌گذار در زمان ۰

$$-f_p + \exp(-rs)(K - Y_s)^+ \tag{۱۰.۱۵}$$

است . از سوی دیگر، بانک برای فروش قرارداد در زمان ۰، f_p را دریافت می‌کند و در سررسید $(K - Y_s)^+$ می‌پردازد. بنابراین بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f_p - \exp(-rs)(K - Y_s)^+ \tag{۱۱.۱۵}$$

است. قیمت منصفانه این قرارداد باید بازده مورد انتظار یکسان برای سرمایه‌گذار و بانک داشته باشد، یعنی

$$-f_p + \exp(-rs)E[(K - Y_s)^+] = f_p - \exp(-rs)E[(K - Y_s)^+]. \tag{۱۲.۱۵}$$

پس $f_p = \exp(-rs)E[(K - Y_s)^+]$. به عبارت دیگر قیمت اختیار فروش اروپایی همان مورد انتظار ارزش فعلی بازده است.

تعریف ۴.۱۵ [۸۷] *فرض کنید یک اختیار فروش اروپایی با قیمت توافقی K و سررسید s است. در این صورت قیمت اختیار فروش اروپایی به صورت*

$$f_p = \exp(-rs)E[(K - Y_s)^+] \tag{۱۳.۱۵}$$

است که در آن Y_s قیمت سهام در زمان s، و r نرخ بهره بدون ریسک است.

قضیه ۲.۱۵ [۸۷] *فرض کنید یک اختیار فروش اروپایی برای مدل سهام نایقین (۱.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. در این صورت قیمت اختیار فروش اروپایی به صورت*

$$f_p = \exp(-rs)\int_۰^۱ \left(K - Y_۰ \exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)\right)^+ \mathrm{d}\alpha \tag{۱۴.۱۵}$$

است.

برهان: از مدل سهام نایقین (۱.۱۵) نتیجه می‌گیریم که قیمت سهام Y_s توزیع نایقینی معکوس به صورت

$$\Phi_s^{-۱}(\alpha) = Y_۰ \exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)$$

دارد. بنابراین $(K - Y_s)^+$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha) = \left(K - Y_۰ \exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{۱-\alpha}{\alpha}\right)\right)^+$$

دارد. بنابراین، با استفاده از فرمول مقدار مورد انتظار و تغییر متغیرهای انتگرال، داریم

$$\begin{aligned} f_p &= \exp(-rs)E[(K - Y_s)^+] \\ &= \exp(-rs)\int_۰^۱ \left(K - Y_۰ \exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{۱-\alpha}{\alpha}\right)\right)^+ \mathrm{d}\alpha \\ &= \exp(-rs)\int_۰^۱ \left(K - Y_۰ \exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)\right)^+ \mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

فرمول قیمت اختیار فروش اروپایی ارائه شده برقرار است.

۳.۱۵ اختیارهای امریکایی

این بخش اختیارهای فروش و خرید آمریکایی را برای بازار مالی تعیین شده با مدل سهام نایقین (۱.۱۵) ارائه می‌دهد.

اختیار خرید آمریکایی

تعریف ۵.۱۵ *اختیار خرید آمریکایی قراردادی است که به دارنده حق خرید سهام در هر زمان قبل از سررسید s به قیمت توافقی K را می‌دهد.*

فرض کنید f_c نشان دهنده قیمت این قرارداد است. پس بازده خالص سرمایه‌گذار در زمان ۰

$$-f_c + \sup_{\circ \leq t \leq s} \exp(-rt)(Y_t - K)^+, \tag{۱۵.۱۵}$$

است و بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f_c - \sup_{\circ \leq t \leq s} \exp(-rt)(Y_t - K)^+ \tag{۱۶.۱۵}$$

است. قیمت منصفانه این قرارداد باید بازده مورد انتظار یکسان برای سرمایه‌گذار و بانک داشته باشد، یعنی

$$-f_c + E\left[\sup_{\circ \leq t \leq s} \exp(-rt)(Y_t - K)^+\right] = f_c - E\left[\sup_{\circ \leq t \leq s} \exp(-rt)(Y_t - K)^+\right].$$

بنابراین قیمت اختیار خرید آمریکایی همان مقدار فعلی بازده مورد انتظار است.

تعریف ۶.۱۵ [۷] *فرض کنید یک اختیار خرید آمریکایی با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار خرید معامله آمریکایی به صورت*

$$f_c = E\left[\sup_{\circ \leq t \leq s} \exp(-rt)(Y_t - K)^+\right] \tag{۱۷.۱۵}$$

است که در آن Y_t قیمت سهام ، و r نرخ بهره بدون ریسک است.

قضیه ۳.۱۵ [۷] *فرض کنید یک اختیار خرید آمریکایی برای مدل سهام نایقین (۱.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار خرید آمریکایی به صورت*

$$f_c = \int_\circ^\text{۱} \sup_{\circ \leq t \leq s} \exp(-rt)\left(Y_\circ \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{\text{۳}}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{\text{۱} - \alpha}\right) - K\right)^+ \mathrm{d}\alpha$$

است.

برهان: توجه کنید که قیمت سهام Y_t در مدل سهام نایقین توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_t^{-\text{۱}}(\alpha) = Y_\circ \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{\text{۳}}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{\text{۱} - \alpha}\right)$$

دارد. چون $\exp(-rt)(Y_t - K)^+$ یک تابع افزایشی بر حسب Y_t است، از مقدار فرین جواب معادله دیفرانسیل نایقین

$$\sup_{\circ \leq t \leq s} \exp(-rt)(Y_t - K)^+$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)\left(Y_0 \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) - K\right)^+$$

دارد. با استفاده از (۱۷.۱۵) و فرمول مقدار انتظار، نتیجه حاصل می‌شود.

اختیار فروش آمریکایی

تعریف ۷.۱۵ *اختیار فروش آمریکایی قراردادی است که مالک آن حق دارد سهام خود را در هر زمان قبل از سررسید s به قیمت توافقی K به فروش برساند.*

فرض کنید f_p نشان دهنده قیمت این قرارداد است. پس بازده خالص سرمایه‌گذار در زمان ۰

$$-f_p + \sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(K - Y_t)^+, \tag{۱۸.۱۵}$$

است. بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f_p - \sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(K - Y_t)^+ \tag{۱۹.۱۵}$$

است. قیمت منصفانه این قرارداد باید بازده مورد انتظار یکسان برای سرمایه‌گذار و بانک داشته باشد، یعنی

$$-f_p + E\left[\sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(K - Y_t)^+\right] = f_p - E\left[\sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(K - Y_t)^+\right].$$

بنابراین قیمت اختیار فروش آمریکایی همان مقدار فعلی مورد انتظار بازده است.

تعریف ۸.۱۵ [۷] *فرض کنید در اختیار فروش آمریکایی یک قرارداد قیمت توافقی K و سررسید s دارد. پس قیمت اختیار فروش آمریکایی*

$$f_p = E\left[\sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(K - Y_t)^+\right] \tag{۲۰.۱۵}$$

است، که در آن Y_t قیمت سهام است، و r نرخ بهره بدون ریسک است.

قضیه ۴.۱۵ [۷] *فرض کنید یک اختیار فروش آمریکایی برای مدل نایقین (۱.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار فروش آمریکایی به صورت*

$$f_p = \int_0^1 \sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)\left(K - Y_0 \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right)^+ \mathrm{d}\alpha$$

است.

برهان: توجه کنید که قیمت سهام Y_t در مدل سهام نایقین، (۱.۱۵) توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = Y_\circ \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

دارد. چون $\exp(-rt)(K-Y_t)^+$ یک تابع کاهشی بر حسب Y_t است، از مقدار فرین جواب معادله دیفرانسیل نایقین نتیجه می‌شود که

$$\sup_{\circ\le t\le s}\exp(-rt)(K-Y_t)^+$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \sup_{\circ\le t\le s}\exp(-rt)\left(K - Y_\circ\exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^+$$

دارد. با استفاده از (۲۰.۱۵)؛ فرمول مقدار مورد انتظار و تغییر متغیرهای انتگرال، نتیجه حاصل می‌شود.

۴.۱۵ اختیارهای آسیایی

این بخش به قیمت گذاری اختیارهای فروش و خرید آسیایی برای بازارمالی تعیین شده با مدل سهام نایقین (۱.۱۵) می‌پردازد.

اختیار خرید آسیایی

تعریف ۹.۱۵ *یک اختیار معامله آسیایی قراردادی است که بازده آن در سررسید s*

$$\left(\frac{1}{s}\int_\circ^s Y_t\mathrm{d}t - K\right)^+ \tag{۲۱.۱۵}$$

که در آن K یک قیمت توافقی است.

فرض کنید f_c نشان دهنده قیمت این قرارداد است. پس سرمایه‌گذار برای خرید قرارداد در زمان ۰، f_c را پرداخت می‌کند و بازده آن در زمان s

$$\left(\frac{1}{s}\int_\circ^s Y_t\mathrm{d}t - K\right)^+ \tag{۲۲.۱۵}$$

است. با توجه به ارزش زمانی پول ناشی از اوراق قرضه، ارزش فعلی بازده

$$\exp(-rs)\left(\frac{1}{s}\int_\circ^s Y_t\mathrm{d}t - K\right)^+ \tag{۲۳.۱۵}$$

است. بنابراین بازده خالص سرمایه‌گذار در زمان ۰

$$-f_c + \exp(-rs)\left(\frac{1}{s}\int_\circ^s Y_t\mathrm{d}t - K\right)^+ \tag{۲۴.۱۵}$$

است. از سوی دیگر، بانک در زمان ۰، f_c برای فروش قرارداد دریافت می‌کند و در سررسید s

$$\left(\frac{۱}{s}\int_{۰}^{s} Y_t \mathrm{d}t - K\right)^{+} \tag{۲۵.۱۵}$$

پرداخت می‌کند. بنابراین بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f_c - \exp(-rs)\left(\frac{۱}{s}\int_{۰}^{s} Y_t \mathrm{d}t - K\right)^{+} \tag{۲۶.۱۵}$$

است. قیمت منصفانه این قرارداد باید بازده مورد انتظار یکسان برای سرمایه‌گذار و بانک داشته باشد، یعنی

$$\begin{aligned} -f_c + \exp(-rs)E\left[\left(\frac{۱}{s}\int_{۰}^{s} Y_t \mathrm{d}t - K\right)^{+}\right] \\ = f_c - \exp(-rs)E\left[\left(\frac{۱}{s}\int_{۰}^{s} Y_t \mathrm{d}t - K\right)^{+}\right]. \end{aligned} \tag{۲۷.۱۵}$$

بنابراین قیمت اختیار خرید آسیایی همان ارزش فعلی مورد انتظار بازده است.

تعریف ۱۰.۱۵ [۱۵۳] *فرض کنید یک اختیار خرید آسیایی با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار خرید آسیایی*

$$f_c = \exp(-rs)E\left[\left(\frac{۱}{s}\int_{۰}^{s} Y_t \mathrm{d}t - K\right)^{+}\right] \tag{۲۸.۱۵}$$

است، که در آن Y_t قیمت سهام و r نرخ بهره بدون ریسک است.

قضیه ۵.۱۵ [۱۵۳] *فرض کنید یک اختیار خرید آسیایی برای مدل سهام نایقین (۱.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار خرید آسیایی*

$$f_c = \exp(-rs)\int_{۰}^{۱}\left(\frac{Y_{۰}}{s}\int_{۰}^{s}\exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)\mathrm{d}t - K\right)^{+}\mathrm{d}\alpha$$

است.

برهان: توجه کنید که قیمت سهام Y_t در مدل سهام نایقین (۱.۱۵) توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_t^{-۱}(\alpha) = Y_{۰}\exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)$$

دارد. از انتگرال زمان جواب معادله دیفرانسیل نایقین نتیجه می‌شود که

$$\int_{۰}^{s} Y_t \mathrm{d}t$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha) = Y_۰ \int_۰^s \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{۱-\alpha}\right) \mathrm{d}t$$

دارد. بنابراین

$$\left(\frac{۱}{s}\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t - K\right)^+$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Upsilon_s^{-۱}(\alpha) = \left(\frac{Y_۰}{s}\int_۰^s \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{۱-\alpha}\right) \mathrm{d}t - K\right)^+$$

دارد. با استفاده از (۲۸.۱۵) و فرمول مقدار مورد انتظار، نتیجه حاصل می‌شود.

اختیار فروش آسیایی

تعریف ۱۱.۱۵ *یک اختیار فروش آسیایی قراردادی است که بازده آن در سررسید* s

$$\left(K - \frac{۱}{s}\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t\right)^+ \tag{۲۹.۱۵}$$

است، که در آن K *یک قیمت توافقی است.*

فرض کنید که f_p نشان دهنده قیمت این قرارداد است. پس سرمایه‌گذار برای خرید قرارداد در زمان ۰، f_p را پرداخت می‌کند و در لحظه s بازده

$$\left(K - \frac{۱}{s}\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t\right)^+ \tag{۳۰.۱۵}$$

دارد. با توجه به ارزش زمانی پول ناشی از اوراق قرضه، ارزش فعلی بازده

$$\exp(-rs)\left(K - \frac{۱}{s}\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t\right)^+ \tag{۳۱.۱۵}$$

است. بنابراین بازده خالص سرمایه‌گذار در زمان ۰

$$-f_p + \exp(-rs)\left(K - \frac{۱}{s}\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t\right)^+ \tag{۳۲.۱۵}$$

است. از سوی دیگر، بانک برای فروش قرارداد در زمان ۰، f_p دریافت می‌کند و در لحظه s

$$\left(K - \frac{۱}{s}\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t\right)^+ \tag{۳۳.۱۵}$$

پرداخت می‌کند. بنابراین بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f_p - \exp(-rs)\left(K - \frac{۱}{s}\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t\right)^+ \tag{۳۴.۱۵}$$

است. قیمت منصفانه این قرارداد، باید بازده مورد انتظار یکسان برای سرمایه‌گذار و بانک داشته باشد، یعنی

$$\begin{aligned} &-f_p + \exp(-rs)E\left[\left(K - \frac{۱}{s}\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t\right)^+\right] \\ &= f_p - \exp(-rs)E\left[\left(K - \frac{۱}{s}\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t\right)^+\right]. \end{aligned} \tag{۳۵.۱۵}$$

بنا بر این قیمت اختیار فروش آسیایی باید مقدار مورد انتظار فعلی بازده باشد.

تعریف ۱۲.۱۵ [۱۵۳] *فرض کنید یک اختیار فروش آسیایی قیمت توافقی K و سررسید s دارد. پس قیمت اختیار فروش آسیایی*

$$f_p = \exp(-rs)E\left[\left(K - \frac{۱}{s}\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t\right)^+\right] \tag{۳۶.۱۵}$$

است، که در آن Y_t قیمت سهام و r نرخ بهره بدون ریسک است.

قضیه ۶.۱۵ [۱۵۳] *فرض کنید اختیار فروش آسیایی برای مدل سهام نایقین (۱.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار فروش آسیایی*

$$f_p = \exp(-rs)\int_۰^۱\left(K - \frac{Y_۰}{s}\int_۰^s \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)\mathrm{d}t\right)^+ \mathrm{d}\alpha$$

است.

برهان: توجه کنید که قیمت سهام Y_t در مدل سهام نایقین (۱.۱۵) توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_t^{-۱}(\alpha) = Y_۰ \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)$$

دارد. از انتگرال زمان جواب معادله دیفرانسیل نایقین نتیجه می‌گیریم که

$$\int_۰^s Y_t \mathrm{d}t$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha) = Y_۰\int_۰^s \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)\mathrm{d}t$$

دارد. بنابراین

$$\left(K-\frac{۱}{s}\int_{۰}^{s}Y_t\mathrm{d}t\right)^+$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Upsilon_s^{-۱}(\alpha)=\left(K-\frac{Y_۰}{s}\int_{۰}^{s}\exp\left(et+\frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{۱-\alpha}{\alpha}\right)\mathrm{d}t\right)^+$$

دارد. با استفاده از (۳۶.۱۵)، فرمول مقدار مورد انتظار و تغییر متغیرهای انتگرال، نتیجه حاصل می‌شود.

۵.۱۵ مدل عمومی سهام

در حالت کلی فرض می‌کنیم قیمت سهام از یک معادله دیفرانسیل معمولی نایقین پیروی می‌کند و یک مدل عمومی سهام مشخص می‌شود که در آن قیمت اوراق قرضه X_t و قیمت سهام Y_t با

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=rX_t\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}Y_t=F(t,Y_t)\mathrm{d}t+G(t,Y_t)\mathrm{d}C_t\end{cases}\qquad(۳۷.۱۵)$$

تعیین می‌شوند، که در آن r نرخ بهره بدون ریسک است، F و G دو تابع، و C_t فرایند لیو است.

قضیه ۷.۱۵ [۱۰۲] *فرض کنید یک اختیار اروپایی برای مدل سهام نایقین (۳۷.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار خرید اروپایی*

$$f_c=\exp(-rs)\int_{۰}^{۱}(Y_s^{\alpha}-K)^+\mathrm{d}\alpha\qquad(۳۸.۱۵)$$

است، و قیمت اختیار فروش اروپایی

$$f_p=\exp(-rs)\int_{۰}^{۱}(K-Y_s^{\alpha})^+\mathrm{d}\alpha\qquad(۳۹.۱۵)$$

است که در آن Y_s^{α} ، αـ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین متناظر است.

برهان: از یک سو، از اصل قیمت منصفانه نتیجه می‌شود که قیمت اختیار خرید اروپایی

$$f_c=\exp(-rs)E[(Y_s-K)^+]\qquad(۴۰.۱۵)$$

است. از سوی دیگر، از فرمول یائوـچن نتیجه می‌شود که $(Y_s-K)^+$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha)=(Y_s^{\alpha}-K)^+\qquad(۴۱.۱۵)$$

دارد. با استفاده از فرمول مقدار مورد انتظار، (۳۸.۱۵) حاصل می‌شود. به طور مشابه، قیمت اختیار فروش اروپایی

$$f_p=\exp(-rs)E[(K-Y_s)^+],\qquad(۴۲.۱۵)$$

است و $(K-Y_s)^+$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = (K - Y_s^{1-\alpha})^+ \tag{۴۳.۱۵}$$

دارد. با استفاده از فرمول مقدار مورد انتظار و تغییر متغیرهای انتگرال، (۳۹.۱۵) را داریم.

قضیه ۸.۱۵ [۱۰۲] *فرض کنید یک اختیار آمریکایی برای مدل سهام نایقین (۳۷.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار خرید آمریکایی*

$$f_c = \int_0^1 \sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(Y_t^\alpha - K)^+ \mathrm{d}\alpha \tag{۴۴.۱۵}$$

است و اختیار فروش آمریکایی

$$f_p = \int_0^1 \sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(K - Y_t^\alpha)^+ \mathrm{d}\alpha \tag{۴۵.۱۵}$$

است که Y_t^α، αــ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین مربوطه است.

برهان: ازطرفی، از اصل قیمت منصفانه نتیجه می شود که قیمت اختیار خرید آمریکایی

$$f_c = E\left[\sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(Y_t - K)^+\right] \tag{۴۶.۱۵}$$

است. از سوی دیگر، از مقدار فرین جواب معادله دیفرانسیل نایقین نتیجه می‌شود که

$$\sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(Y_t - K)^+$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(Y_t^\alpha - K)^+ \tag{۴۷.۱۵}$$

دارد. با استفاده از فرمول مقدار مورد انتظار، (۴۴.۱۵) حاصل می‌شود. به همین ترتیب، قیمت اختیار فروش آمریکایی

$$f_p = E\left[\sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(K - Y_t)^+\right], \tag{۴۸.۱۵}$$

است و

$$\sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(K - Y_t)^+$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \sup_{0\le t\le s} \exp(-rt)(K - Y_t^{1-\alpha})^+ \tag{۴۹.۱۵}$$

دارد. با استفاده از فرمول مقدار مورد انتظار و تغییر متغیرهای انتگرال، به (۴۵.۱۵) می‌رسیم.

قضیه ۹.۱۵ [۱۰۲] *فرض کنید یک اختیار آسیایی برای مدل سهام نایقین (۳۷.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار خرید آسیایی به صورت*

$$f_c = \exp(-rs) \int_0^1 \left(\frac{1}{s} \int_0^s Y_t^\alpha \mathrm{d}t - K \right)^+ \mathrm{d}\alpha \tag{۵۰.۱۵}$$

است، و قیمت اختیار فروش آسیایی

$$f_p = \exp(-rs) \int_0^1 \left(K - \frac{1}{s} \int_0^s Y_t^\alpha \mathrm{d}t \right)^+ \mathrm{d}\alpha \tag{۵۱.۱۵}$$

است که در آن Y_t^α، αــ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین متناظر است.

برهان: از طرفی، از اصل قیمت منصفانه نتیجه می‌شود که قیمت اختیار خرید آسیایی

$$f_c = \exp(-rs) E \left[\left(\frac{1}{s} \int_0^s Y_t \mathrm{d}t - K \right)^+ \right] \tag{۵۲.۱۵}$$

است. از طرف دیگر، بر اساس انتگرال زمان، جواب معادله دیفرانسیل نایقین

$$\left(\frac{1}{s} \int_0^s Y_t \mathrm{d}t - K \right)^+$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \left(\frac{1}{s} \int_0^s Y_t^\alpha \mathrm{d}t - K \right)^+ \tag{۵۳.۱۵}$$

دارد. با استفاده از فرمول مقدار مورد انتظار، (۵۰.۱۵) حاصل می‌شود. به همین ترتیب، قیمت اختیار فروش آسیایی

$$f_p = \exp(-rs) E \left[\left(K - \frac{1}{s} \int_0^s Y_t \mathrm{d}t \right)^+ \right], \tag{۵۴.۱۵}$$

است و

$$\left(K - \frac{1}{s} \int_0^s Y_t \mathrm{d}t \right)^+$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \left(K - \frac{1}{s} \int_0^s Y_t^{1-\alpha} \mathrm{d}t \right)^+ \tag{۵۵.۱۵}$$

دارد. با استفاده از فرمول مقدار مورد انتظار و تغییر متغیرهای انتگرال، (۵۱.۱۵) حاصل می‌شود.

۶.۱۵ مدل سهام چند عاملی

حال فرض می‌کنیم که چند سهام وجود دارند و قیمت آنها با چند فرایند لیو تعیین می‌شود. در این صورت، یک مدل سهام چندعاملی داریم که در آن قیمت اوراق قرضه X_t و قیمت سهام Y_{it} با

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = rX_t\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}Y_{it} = e_iY_{it}\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}Y_{it}\mathrm{d}C_{jt},\ i = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{۵۶.۱۵}$$

تعیین می‌شوند، که در آنها r نرخ بهره بدون ریسک است، e_I لوگ‌ـ‌رانش، σ_{ij} لوگ‌ـ‌انتشار هستند، و C_{jt} فرایندهای مستقل لیو هستند، که در آن$i = 1, 2, \ldots, m$،$j = 1, 2, \ldots, n$.

انتخاب سبد سهام

برای مدل سهام چند عاملی (۵۶.۱۵)، $m + 1$ انتخاب مختلف سرمایه‌گذاری داریم. در هر زمان t می‌توانیم سبد سهام $(\beta_t, \beta_{1t}, \ldots, \beta_{mt})$ (به عنوان مثال، کسری از سرمایه‌گذاری که در $\beta_t + \beta_{1t} + \cdots + \beta_{mt} = 1$ صدق می‌کند). آنگاه سرمایه Z_t در زمان t باید از معادله دیفرانسیل نایقین

$$\mathrm{d}Z_t = r\beta_tZ_t\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m}e_i\beta_{it}Z_t\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\beta_{it}Z_t\mathrm{d}C_{jt}. \tag{۵۷.۱۵}$$

پیروی کند. بدین معنی که مسئله، انتخاب سبد سهام بهینه $(\beta_t, \beta_{1t}, \ldots, \beta_{mt})$ است طوری که سرمایه Z_s به مفهوم مقدار مورد انتظار بیشینه می‌شود.

بدون آربیتراژ

مدل سهام (۵۶.۱۵) بی‌آربیتراژ است اگر سبد سهام $(\beta_t, \beta_{1t}, \ldots, \beta_{mt})$ وجود نداشته باشد طوری که برای برخی از زمان $s > 0$ داشته باشیم

$$\mathcal{M}\{\exp(-rs)Z_s \ge Z_0\} = 1 \tag{۵۸.۱۵}$$

و

$$\mathcal{M}\{\exp(-rs)Z_s > Z_0\} > 0 \tag{۵۹.۱۵}$$

که در آن Z_t با (۵۷.۱۵) تعیین می‌شود و سرمایه را در زمان t نشان می‌دهد.

قضیه ۱۰.۱۵ *(قضیه بی‌آربیتراژ [۱۸۵]) مدل سهام چندعاملی (۵۶.۱۵) بی‌آربیتراژ است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات خطی*

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - r \\ e_2 - r \\ \vdots \\ e_m - r \end{pmatrix} \tag{۶۰.۱۵}$$

جواب داشته باشد، یعنی $(e_1 - r, e_2 - r, \ldots, e_m - r)$ *یک ترکیب خطی از بردارهای ستونی* $(\sigma_{11}, \sigma_{21}, \ldots, \sigma_{m1})$، $(\sigma_{12}, \sigma_{22}, \ldots, \sigma_{m2})$، $\cdots$، $(\sigma_{1n}, \sigma_{2n}, \ldots, \sigma_{mn})$ *است.*

برهان: هنگامی که سبد سهام $(\beta_t, \beta_{1t}, \ldots, \beta_{mt})$ پذیرفته می‌شود، سرمایه در هر زمان t

$$Z_t = Z_0 \exp(rt) \exp\left(\int_0^t \sum_{i=1}^m (e_i - r)\beta_{is}\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}\beta_{is}\mathrm{d}C_{js}\right)$$

است. بنابراین

$$\ln(\exp(-rt)Z_t) - \ln Z_0 = \int_0^t \sum_{i=1}^m (e_i - r)\beta_{is}\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}\beta_{is}\mathrm{d}C_{js}$$

یک متغیر نایقین نرمال با مقدار مورد انتظار

$$\int_0^t \sum_{i=1}^m (e_i - r)\beta_{is}\mathrm{d}s$$

و واریانس

$$\left(\sum_{j=1}^n \int_0^t \left|\sum_{i=1}^m \sigma_{ij}\beta_{is}\right| \mathrm{d}s\right)^2$$

است. فرض کنید دستگاه (۶۰.۱۵) جواب دارد. استدلال به دو حالت تقسیم می‌شود. حالت اول: برای هر زمان t و پورتفوی $(\beta_t, \beta_{1t}, \ldots, \beta_{mt})$ فرض کنید،

$$\sum_{j=1}^n \int_0^t \left|\sum_{i=1}^m \sigma_{ij}\beta_{is}\right| \mathrm{d}s = 0.$$

پس

$$\sum_{i=1}^m \sigma_{ij}\beta_{is} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,\ s \in (0, t].$$

چون دستگاه (۶۰.۱۵) جواب دارد، داریم

$$\sum_{i=1}^m (e_i - r)\beta_{is} = 0, \quad s \in (0, t]$$

و

$$\int_0^t \sum_{i=1}^m (e_i - r)\beta_{is}\mathrm{d}s = 0.$$

این واقعیت به این معنی است که

$$\ln(\exp(-rt)Z_t) - \ln Z_0 = 0$$

و
$$\mathcal{M}\{\exp(-rt)Z_t > Z_\circ\} = \circ.$$
به عبارت دیگر، مدل سهام (۵۶.۱۵) بی‌آربیتراژ است.

حالت دوم: برای هر زمان t و پورتفوی $(\beta_t, \beta_{\text{۱}t}, \ldots, \beta_{mt})$، فرض کنید

$$\sum_{j=\text{۱}}^{n}\int_\circ^t \left|\sum_{i=\text{۱}}^{m}\sigma_{ij}\beta_{is}\right|\mathrm{d}s \neq \circ.$$

در این صورت $\ln(\exp(-rt)Z_t) - \ln Z_\circ$ یک متغیر نایقین نرمال با واریانس غیر صفر است و

$$\mathcal{M}\{\ln(\exp(-rt)Z_t) - \ln Z_\circ \geq \circ\} < \text{۱}.$$

یعنی،
$$\mathcal{M}\{\exp(-rt)Z_t \geq Z_\circ\} < \text{۱}$$
و مدل سهام چند عاملی (۵۶.۱۵) بی‌آربیتراژ است.

برعکس فرض کنید دستگاه (۶۰.۱۵) جواب ندارد. پس اعداد حقیقی $\alpha_\text{۱}, \alpha_\text{۲}, \ldots, \alpha_m$ وجود دارد طوری که
$$\sum_{i=\text{۱}}^{m}\sigma_{ij}\alpha_i = \circ, \quad j = \text{۱}, \text{۲}, \ldots, n$$
و
$$\sum_{i=\text{۱}}^{m}(e_i - r)\alpha_i > \circ.$$

حال سبد سهام

$$(\beta_t, \beta_{\text{۱}t}, \ldots, \beta_{mt}) \equiv (\text{۱} - (\alpha_\text{۱} + \alpha_\text{۲} + \cdots + \alpha_m), \alpha_\text{۱}, \alpha_\text{۲}, \ldots, \alpha_m)$$

را در نظرمی‌گیریم. در این صورت

$$\ln(\exp(-rt)Z_t) - \ln Z_\circ = \int_\circ^t \sum_{i=\text{۱}}^{m}(e_i - r)\alpha_i \mathrm{d}s > \circ.$$

لذا داریم
$$\mathcal{M}\{\exp(-rt)Z_t > Z_\circ\} = \text{۱}.$$
پس مدل سهام چند عاملی (۵۶.۱۵) با آربیتراژ است. بنابراین قضیه ثابت شده است.

قضیه ۱۱.۱۵ *مدل سهام چند عاملی (۵۶.۱۵) بی‌آربیتراژ است هرگاه ماتریس لوگ‌ـ انتشار*

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\text{۱۱}} & \sigma_{\text{۱۲}} & \cdots & \sigma_{\text{۱}n} \\ \sigma_{\text{۲۱}} & \sigma_{\text{۲۲}} & \cdots & \sigma_{\text{۲}n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m\text{۱}} & \sigma_{m\text{۲}} & \cdots & \sigma_{mn} \end{pmatrix} \tag{۶۱.۱۵}$$

از رتبه m است، یعنی بردارهای سطری آن مستقل خطی هستند.

برهان: اگر ماتریس لوگ‌ـ انتشار (۶۱.۱۵) از رتبه m باشد، دستگاه معادلات (۶۰.۱۵) جواب دارد. از قضیه ۱۰.۱۵ نتیجه می‌شود که مدل سهام چندعاملی (۵۶.۱۵) بی‌آربیتراژ است.

قضیه ۱۲.۱۵ *مدل سهام چندعاملی (۵۶.۱۵) بی‌آربیتراژ است هرگاه لوگ‌ـ رانش آن با نرخ بهره r برابر باشد، یعنی*

$$e_i = r, \quad i = ۱, ۲, \ldots, m. \qquad (۶۲.۱۵)$$

برهان: چون برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, m$ لوگ‌ـ رانش $e_i = r$ است، بلافاصله داریم

$$(e_۱ - r, e_۲ - r, \ldots, e_m - r) \equiv (۰, ۰, \ldots, ۰)$$

که ترکیب خطی از $(\sigma_{۱۱}, \sigma_{۲۱}, \ldots, \sigma_{m۱})$، $(\sigma_{۱۲}, \sigma_{۲۲}, \ldots, \sigma_{m۲})$، $\cdots$، $(\sigma_{۱n}, \sigma_{۲n}, \ldots, \sigma_{mn})$ است. از قضیه ۱۰.۱۵ نتیجه می‌شود که مدل سهام چندعاملی (۵۶.۱۵) بی‌آربیتراژ است.

۷.۱۵ مدل نرخ بهره نایقین

نرخ بهره واقعی بدون تغییرباقی نمی‌ماند. چن‌ـ گائو [۱۵] فرض کردند نرخ بهره از یک معادله دیفرانسیل نایقین پیروی می‌کند و با مدل نرخ بهره نایقین

$$\mathrm{d}X_t = (m - aX_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}C_t \qquad (۶۳.۱۵)$$

ارائه شده است، که m, a, σ اعداد مثبت هستند. علاوه بر این، جیائو‌ـ یائو [۷۱] مدل نرخ بهره نایقین

$$\mathrm{d}X_t = (m - aX_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\mathrm{d}C_t. \qquad (۶۴.۱۵)$$

را بررسی کردند. به طور کلی، فرض کنیم که نرخ بهره X_t از یک معادله دیفرانسیل معمولی نایقین پیروی می‌کند و یک مدل نرخ بهره کلی

$$\mathrm{d}X_t = F(t, X_t)\mathrm{d}t + G(t, X_t)\mathrm{d}C_t \qquad (۶۵.۱۵)$$

است، که در آن F و G دو تابع و C_t فرایند لیو است.

اوراق قرضه بدون بهره

اوراق قرضه بدون بهره یک اوراق قرضه خریداری شده با قیمت پایینتر از ارزش اسمی آن است که مبلغی است که وعده پرداخت آن در سررسید است. برای سادگی، فرض کنیم که ارزش اسمی همیشه یک دلار است.

فرض کنید f نشان دهنده قیمت این اوراق قرضه بدون بهره است. پس سرمایه‌گذار f را برای خرید آن در زمان ۰ می‌پردازد و در سررسید ۱ دلار دریافت می‌کند. چون نرخ بهره X_t است، ارزش فعلی ۱ دلار به صورت

$$\exp\left(-\int_۰^s X_t \mathrm{d}t\right) \qquad (۶۶.۱۵)$$

است. بنابراین بازده خالص سرمایه‌گذار در زمان ۰

$$-f + \exp\left(-\int_۰^s X_t \mathrm{d}t\right) \qquad (۶۷.۱۵)$$

است. از سوی دیگر، بانک در زمان ۰، f برای فروش اوراق قرضه بدون بهره دریافت می‌کند و در سررسید s ۱ دلار می‌پردازد. بنابراین بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f-\exp\left(-\int_{0}^{s} X_t\mathrm{d}t\right) \tag{۶۸.۱۵}$$

است. در قیمت منصفانه این قرارداد، باید سرمایه‌گذار و بانک بازده مورد انتظار یکسان داشته باشد، یعنی

$$-f+E\left[\exp\left(-\int_{0}^{s} X_t\mathrm{d}t\right)\right]=f-E\left[\exp\left(-\int_{0}^{s} X_t\mathrm{d}t\right)\right] \tag{۶۹.۱۵}$$

بنابراین قیمت اوراق قرضه بدون بهره همان ارزش فعلی مقدار مورد انتظار ارزش اسمی آن است.

تعریف ۱۳.۱۵ [۱۵] *فرض کنید X_t نرخ بهره نایقین است. پس قیمت اوراق قرضه بدون بهره با سررسید s*

$$f=E\left[\exp\left(-\int_{0}^{s} X_t\mathrm{d}t\right)\right] \tag{۷۰.۱۵}$$

است.

قضیه ۱۳.۱۵ [۷۱] *فرض کنید نرخ بهره نایقین X_t به معادله دیفرانسیل نایقین (۱۵ .۶۵) منتهی شود. پس قیمت اوراق قرضه بدون بهره با سررسید s*

$$f=\int_{0}^{1}\exp\left(-\int_{0}^{s} X_t^{\alpha}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\alpha \tag{۷۱.۱۵}$$

است، که در آن X_t^{α}، αـ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین متناظر است.

برهان: از انتگرال زمان جواب معادله دیفرانسیل نایقین نتیجه می‌شود که

$$\int_{0}^{s} X_t\mathrm{d}t$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha)=\int_{0}^{s} X_t^{\alpha}\mathrm{d}t$$

دارد. لذا

$$\exp\left(-\int_{0}^{s} X_t\mathrm{d}t\right)$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Upsilon_s^{-1}(\alpha)=\exp\left(-\int_{0}^{s} X_t^{1-\alpha}\mathrm{d}t\right)$$

دارد. با استفاده از (۷۰.۱۵)، فرمول مقدار مورد انتظار و با به کارگیری تغییر متغیرهای انتگرال، (۷۱.۱۵) حاصل می‌شود.

سقف نرخ بهره

سقف نرخ بهره، یک قرارداد مشتقه است که در آن وام گیرنده بیش از یک سطح از پیش تعیین شده نرخ بهره نسبت به وام خود را پرداخت نمی‌کند. فرض کنید K حداکثر نرخ بهره است و s سررسید است. برای سادگی، همچنین فرض کنید مقدار وام همیشه یک دلار است.

فرض کنید f نشان دهنده قیمت این قرارداد است. پس وام گیرنده f را برای خرید قرارداد در زمان ۰ می‌پردازد، و بازده آن در سررسید s

$$\exp\left(\int_0^s X_t \mathrm{d}t\right) - \exp\left(\int_0^s X_t \wedge K \mathrm{d}t\right) \tag{۷۲.۱۵}$$

است. با توجه به ارزش زمانی پول، ارزش بازده فعلی

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\int_0^s X_t \mathrm{d}t\right)\left(\exp\left(\int_0^s X_t \mathrm{d}t\right) - \exp\left(\int_0^s X_t \wedge K \mathrm{d}t\right)\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\int_0^s X_t \mathrm{d}t + \int_0^s X_t \wedge K \mathrm{d}t\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\int_0^s (X_t - K)^+ \mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

است. بنابراین بازده خالص قرض گیرنده در زمان ۰

$$-f + 1 - \exp\left(-\int_0^s (X_t - K)^+ \mathrm{d}t\right) \tag{۷۳.۱۵}$$

است. به طور مشابه، می‌توان بررسی کرده که بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f - 1 + \exp\left(-\int_0^s (X_t - K)^+ \mathrm{d}t\right) \tag{۷۴.۱۵}$$

است. قیمت منصفانه این قرارداد، باید برای وام گیرنده و بانک بازده مورد انتظار یکسان داشته باشند، یعنی

$$-f+1-E\left[\exp\left(-\int_0^s (X_t - K)^+ \mathrm{d}t\right)\right] = f-1+E\left[\exp\left(-\int_0^s (X_t - K)^+ \mathrm{d}t\right)\right].$$

بنابراین تعریف زیر از قیمت سقف نرخ بهره را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۴.۱۵ [۲۱۸] *فرض کنید سقف نرخ بهره، حداکثر نرخ بهره K و سررسید s دارد. پس ارزش سقف نرخ بهره*

$$f = 1 - E\left[\exp\left(-\int_0^s (X_t - K)^+ \mathrm{d}t\right)\right] \tag{۷۵.۱۵}$$

است.

قضیه ۱۴.۱۵ [۲۱۸] *فرض کنید که نرخ بهره نایقین Xt از معادله دیفرانسیل نایقین (۱۵ .۶۵) پیروی می‌کند. پس ارزش سقف نرخ بهره با حداکثر نرخ بهره K و سررسید s*

$$f = ۱ - \int_{\circ}^{۱} \exp\left(-\int_{\circ}^{s} (X_t^{\alpha} - K)^{+}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\alpha \qquad (۷۶.۱۵)$$

است، که در آن X_t^{α} ، αــ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین متناظر است.

برهان: از انتگرال زمان جواب معادله دیفرانسیل نایقین نتیجه می‌شود که

$$\int_{\circ}^{s} (X_t - K)^{+}\mathrm{d}t$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha) = \int_{\circ}^{s} (X_t^{\alpha} - K)^{+}\mathrm{d}t$$

دارد. پس

$$\exp\left(-\int_{\circ}^{s} (X_t - K)^{+}\mathrm{d}t\right)$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Upsilon_s^{-۱}(\alpha) = \exp\left(-\int_{\circ}^{s} (X_t^{۱-\alpha} - K)^{+}\mathrm{d}t\right)$$

دارد. با استفاده از (۷۵.۱۵)، فرمول مقدار مورد انتظار و تغییر متغیرهای انتگرال، به (۷۶.۱۵) می‌رسیم.

کف نرخ بهره

کف نرخ بهره قیمت یک قرارداد مشتقه است که در آن سرمایه‌گذار کمتر از یک سطح از پیش تعیین شده نرخ بهره نسبت به سرمایه‌گذاری خود دریافت نمی‌کند. فرض کنید K کف نرخ بهره و s سررسید است. برای سادگی، همچنین فرض می‌کنیم مقدار سرمایه‌گذاری همیشه یک دلار است.

فرض کینم f نشان دهنده قیمت این قرارداد است. پس سرمایه‌گذار f را برای خرید قرارداد در زمان ۰ پرداخت می‌کند، و بازده آن در سررسید s

$$\exp\left(\int_{\circ}^{s} X_t \vee K\mathrm{d}t\right) - \exp\left(\int_{\circ}^{s} X_t\mathrm{d}t\right) \qquad (۷۷.۱۵)$$

است. با توجه به ارزش زمانی پول، ارزش فعلی بازده

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\int_{\circ}^{s} X_t\mathrm{d}t\right)\left(\exp\left(\int_{\circ}^{s} X_t \vee K\mathrm{d}t\right) - \exp\left(\int_{\circ}^{s} X_t\mathrm{d}t\right)\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\circ}^{s} X_t\mathrm{d}t + \int_{\circ}^{s} X_t \vee K\mathrm{d}t\right) - ۱ \\
&= \exp\left(\int_{\circ}^{s} (K - X_t)^{+}\mathrm{d}t\right) - ۱
\end{aligned}$$

است. بنابراین بازده خالص سرمایه‌گذار در زمان ۰

$$-f+\exp\left(\int_۰^s (K-X_t)^+\mathrm{d}t\right)-۱ \tag{۷۸.۱۵}$$

است. به طور مشابه، می‌توان بررسی کرد که بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f-\exp\left(\int_۰^s (K-X_t)^+\mathrm{d}t\right)+۱ \tag{۷۹.۱۵}$$

است. در قیمت منصفانه این قرارداد باید بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار و بانک یکسان باشند، یعنی

$$-f+E\left[\exp\left(\int_۰^s (K-X_t)^+\mathrm{d}t\right)\right]-۱=f-E\left[\exp\left(\int_۰^s (K-X_t)^+\mathrm{d}t\right)\right]+۱.$$

بنابراین تعریف زیر، قیمت کف نرخ بهره را تعریف می‌کند.

تعریف ۱۵.۱۵ [۲۱۸] *فرض کنید یک کف نرخ بهره با حداقل نرخ بهره K نرخ بهره و سررسید s است. پس قیمت کف نرخ بهره*

$$f=E\left[\exp\left(\int_۰^s (K-X_t)^+\mathrm{d}t\right)\right]-۱ \tag{۸۰.۱۵}$$

است.

قضیه ۱۵.۱۵ [۲۱۸] *فرض نرخ بهره نایقین X_t ازمعادله دیفرانسیل نایقین (۶۵.۱۵) پیروی کند. پس قیمت کف نرخ بهره با حداقل نرخ بهره K و سررسید s*

$$f=\int_۰^۱ \exp\left(\int_۰^s (K-X_t^\alpha)^+\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\alpha-۱ \tag{۸۱.۱۵}$$

است که در آن X_t^α، αـ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین متناظر است.

برهان: از انتگرال زمان جواب معادله دیفرانسیل نایقین نتیجه می‌گیریم که

$$\int_۰^s (K-X_t)^+\mathrm{d}t$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha)=\int_۰^s (K-X_t^{۱-\alpha})^+\mathrm{d}t$$

دارد. پس

$$\exp\left(\int_۰^s (K-X_t)^+\mathrm{d}t\right)$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Upsilon_s^{-۱}(\alpha)=\exp\left(\int_۰^s (K-X_t^{۱-\alpha})^+\mathrm{d}t\right)$$

دارد. با استفاده از (۸۰.۱۵)، فرمول مقدار مورد انتظار و تغییر متغیرهای انتگرال، به (۸۱.۱۵) می‌رسیم.

۸.۱۵ مدل ارز نایقین

لیو ـ چن ـ رالسکو [۱۱۶] فرض کردند که نرخ ارز از یک معادله دیفرانسیل نایقین پیروی می‌کند و مدل ارز نایقین

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = uX_t\mathrm{d}t & (\text{ارز داخلی}) \\ \mathrm{d}Y_t = vY_t\mathrm{d}t & (\text{ارز خارجی}) \\ \mathrm{d}Z_t = eZ_t\mathrm{d}t + \sigma Z_t \mathrm{d}C_t & (\text{نرخ تبدیل}) \end{cases} \tag{۸۲.۱۵}$$

را پیشنهاد کردند که در آن X_t نشان دهنده ارز داخلی با نرخ بهره داخلی، Y_t نشان دهنده ارز خارجی با نرخ بهره خارجی و Z_t نشان دهنده نرخ تبدیل ارز است که قیمت ارز داخلی یک واحد ارز خارجی در زمان t است. توجه کنید که قیمت ارز داخلی $X_t = X_\circ \exp(ut)$، قیمت ارز خارجی$=Y_t$ $Y_\circ \exp(vt)$، و نرخ تبدیل ارز

$$Z_t = Z_\circ \exp(et + \sigma C_t) \tag{۸۳.۱۵}$$

است که توزیع نایقینی معکوس آن

$$\Phi_t^{-۱}(\alpha) = Z_\circ \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{۱-\alpha}\right) \tag{۸۴.۱۵}$$

است.

اختیار ارز اروپایی

تعریف ۱۶.۱۵ *یک اختیار ارز اروپایی، قراردادی است که به دارنده آن حق مبادله ی یک واحد ارز خارجی در سررسید برای K واحد ارز داخلی می‌دهد.*

فرض کنید که قیمت این قرارداد f به ارز داخلی است. پس، سرمایه‌گذار برای خرید قرارداد در زمان ۰، f را می‌پردازد و در سررسید، به ارز داخلی $(Z_s - K)^+$ دریافت می‌کند. بنابراین بازده خالص سرمایه‌گذار در زمان ۰

$$-f + \exp(-us)(Z_s - K)^+ \tag{۸۵.۱۵}$$

است. از سوی دیگر، بانک برای فروش قرارداد در زمان ۰، f را دریافت می‌کند و در سررسید ، به ارز خارجی $(۱ - K/Z_s)^+$ می‌پردازد. بنابراین بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f - \exp(-vs)Z_\circ(۱ - K/Z_s)^+ \tag{۸۶.۱۵}$$

است. بر اساس قیمت منصفانه این قرارداد، باید سرمایه‌گذار و بانک بازده مورد انتظار یکسان داشته باشند، یعنی

$$-f + \exp(-us)E[(Z_s - K)^+] = f - \exp(-vs)Z_\circ E[(۱ - K/Z_s)^+]. \tag{۸۷.۱۵}$$

بنابراین قیمت اختیار ارز اروپایی، با تعریف زیر ارائه می‌شود.

تعریف ۱۷.۱۵ [۱۱۶] *فرض کنید یک اختیار ارز اروپایی با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار ارز اروپایی*

$$f = \frac{۱}{۲}\exp(-us)E[(Z_s - K)^+] + \frac{۱}{۲}\exp(-vs)Z_\circ E[(۱ - K/Z_s)^+] \quad (۸۸.۱۵)$$

است.

قضیه ۱۶.۱۵ [۱۱۶] *فرض کنید یک اختیار ارز اروپایی برای مدل نایقین ارز (۸۲.۱۵) با قیمت توافقی K و زمان سررسید s است. پس قیمت اختیار ارز اروپایی*

$$\begin{aligned} f = {} & \frac{۱}{۲}\exp(-us)\int_\circ^۱ \left(Z_\circ \exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right) - K\right)^+ \mathrm{d}\alpha \\ & +\frac{۱}{۲}\exp(-vs)\int_\circ^۱ \left(Z_\circ - K/\exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)\right)^+ \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

است.

برهان: توجه کنید که نرخ ارز Z_s در مدل ارزی نایقین (۸۲.۱۵) توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_s^{-۱}(\alpha) = Z_\circ \exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)$$

دارد. چون $(Z_s - K)^+$ و $Z_\circ(۱ - K/Z_s)^+$ تابع‌های افزایشی نسبت به Z_s هستند، پس توزیع نایقینی معکوس آنها به ترتیب

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha) = \left(Z_\circ \exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right) - K\right)^+,$$

$$\Upsilon_s^{-۱}(\alpha) = \left(Z_\circ - K/\exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)\right)^+,$$

هستند. با استفاده از (۸۸.۱۵) و فرمول مقدار مورد انتظار به نتیجه می‌رسیم.

اختیار ارز آمریکایی

تعریف ۱۸.۱۵ *یک اختیار ارز آمریکایی یک قرارداد است که به دارنده حق تبدیل یک واحد ارز خارجی را در هر زمان قبل از سررسید s در مقابل K واحد از ارز داخلی می‌دهد.*

فرض کنید که قیمت این قرارداد f به ارز داخلی است. پس بازده خالص سرمایه‌گذار در زمان ۰

$$-f + \sup_{\circ \le t \le s} \exp(-ut)(Z_t - K)^+, \quad (۸۹.۱۵)$$

است و بازده خالص بانک در زمان ۰

$$f - \sup_{0\le t\le s} \exp(-vt) Z_0 (1 - K/Z_t)^+ \tag{۹۰.۱۵}$$

است. بر اساس قیمت منصفانه قرارداد، باید سرمایه‌گذار و بانک بازده مورد انتظار یکسان داشته باشند، یعنی

$$\begin{aligned} &-f + E\left[\sup_{0\le t\le s} \exp(-ut)(Z_t - K)^+\right] \\ &= f - E\left[\sup_{0\le t\le s} \exp(-vt) Z_0 (1 - K/Z_t)^+\right]. \end{aligned} \tag{۹۱.۱۵}$$

به این ترتیب قیمت اختیار ارز آمریکایی با تعریف زیر ارائه می‌شود.

تعریف ۱۹.۱۵ [۱۱۶] *فرض کنید یک اختیار ارز آمریکایی با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار ارز آمریکایی*

$$f = \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\le t\le s} \exp(-ut)(Z_t - K)^+\right] + \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\le t\le s} \exp(-vt) Z_0 (1 - K/Z_t)^+\right]$$

است.

قضیه ۱۷.۱۵ [۱۱۶] *فرض کنید یک اختیار ارز آمریکایی برای مدل نایقین ارز (۸۲.۱۵) قیمت توافقی K دارد و سررسید آن s است. پس قیمت اختیار ارز آمریکایی*

$$\begin{aligned} f = &\frac{1}{2}\int_0^1 \sup_{0\le t\le s} \exp(-ut)\left(Z_0 \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) - K\right)^+ \mathrm{d}\alpha \\ &+\frac{1}{2}\int_0^1 \sup_{0\le t\le s} \exp(-vt)\left(Z_0 - K/\exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right)^+ \mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

است.

برهان: توجه کنید که نرخ تبدیل ارز Z_s در مدل ارز نایقین (۸۲.۱۵) توزیع نایقینی معکوس

$$\Phi_s^{-1}(\alpha) = Z_0 \exp\left(es + \frac{\sigma s\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

دارد. از مقدار فرین جواب معادله دیفرانسیل نایقین نتیجه می‌شود که

$$\sup_{0\le t\le s} \exp(-ut)(Z_t - K)^+ \quad \text{و} \quad \sup_{0\le t\le s} \exp(-vt) Z_0 (1 - K/Z_t)^+$$

به ترتیب توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \sup_{0\le t\le s} \exp(-ut)\left(Z_0 \exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) - K\right)^+,$$

$$\Upsilon_s^{-۱}(\alpha) = \sup_{\circ \le t \le s} \exp(-vt)\left(Z_\circ - K/\exp\left(et + \frac{\sigma t\sqrt{۳}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{۱-\alpha}\right)\right)^+,$$

دارند. با استفاده از فرمول مقدار مورد انتظار، نتیجه حاصل می‌شود.

مدل عمومی ارز

اگر نرخ تبدیل ارز از یک معادله دیفرانسیل معمولی نایقین پیروی کند، پس یک مدل عمومی ارز

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = uX_t\mathrm{d}t & (\text{ارز داخلی}) \\ \mathrm{d}Y_t = vY_t\mathrm{d}t & (\text{ارز خارجی}) \\ \mathrm{d}Z_t = F(t,Z_t)\mathrm{d}t + G(t,Z_t)\mathrm{d}C_t & (\text{نرخ تبدیل}) \end{cases} \qquad (۹۲.۱۵)$$

داریم، که در آن u و v نرخ بهره، F و G دو تابع و C_t یک فرایند لیو است.

قضیه ۱۸.۱۵ *(لیو[۱۰۲]) فرض کنید یک اختیار ارز اروپایی برای مدل ارز نایقین (۹۲.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار ارز اروپایی*

$$f = \frac{۱}{۲}\int_\circ^۱ \left(\exp(-us)(Z_s^\alpha - K)^+ + \exp(-vs)Z_\circ(۱ - K/Z_s^\alpha)^+\right)\mathrm{d}\alpha \qquad (۹۳.۱۵)$$

است، که در آن Z_t^α، αــ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین متناظر است.

برهان: از یک طرف، از اصل قیمت منصفانه نتیجه می‌شود که قیمت اختیار اروپایی

$$f = \frac{۱}{۲}\exp(-us)E[(Z_s - K)^+] + \frac{۱}{۲}\exp(-vs)Z_\circ E[(۱ - K/Z_s)^+] \qquad (۹۴.۱۵)$$

است. از سوی دیگر، $(Z_s - K)^+$ و $Z_\circ(۱ - K/Z_s)^+$ به ترتیب توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-۱}(\alpha) = (Z_s^\alpha - K)^+,$$
$$\Upsilon_s^{-۱}(\alpha) = Z_\circ(۱ - K/Z_s^\alpha)^+,$$

دارند. با استفاده از فرمول مقدار مورد انتظار، نتیجه حاصل می‌شود.

قضیه ۱۹.۱۵ *(لیو[۱۰۲]) فرض کنید یک اختیار ارز آمریکایی برای مدل ارز نایقین (۹۲.۱۵) با قیمت توافقی K و سررسید s است. پس قیمت اختیار ارز آمریکایی*

$$f = \frac{۱}{۲}\int_\circ^۱\left(\sup_{\circ\le t\le s}\exp(-ut)(Z_t^\alpha - K)^+ + \sup_{\circ\le t\le s}\exp(-vt)Z_\circ(۱ - K/Z_t^\alpha)^+\right)\mathrm{d}\alpha$$

است، که در آن Z_t^α، αــ مسیر معادله دیفرانسیل نایقین متناظر است.

برهان: از یک طرف، از اصل قیمت منصفانه نتیجه می‌شود که قیمت اختیار آمریکایی

$$f = \frac{۱}{۲}E\left[\sup_{\circ\le t\le s}\exp(-ut)(Z_t - K)^+\right] + \frac{۱}{۲}E\left[\sup_{\circ\le t\le s}\exp(-vt)Z_\circ(۱ - K/Z_t)^+\right]$$

است. از سوی دیگر، از مقدار فرین جواب معادله دیفرانسیل نایقین نتیجه می‌شود که

$$\sup_{\circ\le t\le s} \exp(-ut)(Z_t-K)^+ \quad \text{و} \quad \sup_{\circ\le t\le s} \exp(-vt)Z_\circ(\text{۱}-K/Z_t)^+$$

به ترتیب توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi_s^{-\text{۱}}(\alpha)=\sup_{\circ\le t\le s}\exp(-ut)(Z_t^\alpha-K)^+,$$

$$\Upsilon_s^{-\text{۱}}(\alpha)=\sup_{\circ\le t\le s}\exp(-vt)Z_\circ(\text{۱}-K/Z_t^\alpha)^+,$$

دارند. با استفاده از فرمول مقدار مورد انتظار، نتیجه حاصل می‌شود.

۹.۱۵ نکات کتابشناسی

در نظریه مالی کلاسیک فرض بر این است که قیمت سهام، نرخ بهره و نرخ ارز از معادلات دیفرانسیل تصادفی پیروی می‌کند. اما، علاوه بر دیگران، توسط لیو [۹۶] با بیان یک پارادوکس قانع کننده، این پیش فرض به چالش کشیده شد (پیوست ب.۷ را نیز نگاه کنید). به عنوان یک جایگزین، لیو [۹۶] توسعه نظریه مالی نایقین را پیشنهاد کرد.

معادلات دیفرانسیل نایقین برای اولین بار توسط لیو [۸۷] در سال ۲۰۰۹ به منظور سرمایه‌گذاری معرفی شد که در آن مدل سهام نایقین ارائه شد و فرمول قیمت اختیارهای اروپایی ارائه شد. علاوه بر این، چن [۷] فرمول‌های اختیار آمریکایی را طراحی کرد، سان–چن [۱۵۳] و ژانگ–لیو [۲۱۷] فرمول قیمت اختیارهای آسیایی را بررسی کردند، و یائو [۱۸۵] قضیه بی‌آربیتراژ را برای این نوع مدل سهام نایقین ثابت کرد. بر تاکید می‌شود که الگوهای سهام نایقین نیز به طور پیوسته توسط پنگ–یائو [۱۲۹]، یو [۲۰۲]، چن–لیو–رالسکو [۱۳]، یائو [۱۹۰] و جی–ژو [۶۸] به طور کامل بررسی شدند.

معادلات دیفرانسیل نایقین برای شبیه سازی نرخ بهره شناور توسط چن–گائو [۱۵] در سال ۲۰۱۳ استفاده شد. پس از آن، جیائو–یائو [۷۱] فرمول قیمت اوراق قرضه بدون بهره را ارائه کردند و ژانگ–رالسکو–لیو [۲۱۸] سقف و کف نرخ بهره ارز را مطالعه کردند.

معادلات دیفرانسیل نایقین در سال ۲۰۱۵ برای مدل سازی نرخ ارز توسط لیو–چن–رالسکو [۱۱۶] استفاده شد، که در آن برخی از فرمول‌های قیمت اختیار برای بازارهای نایقینی مشخص شده بود. پس از آن، مدل‌های ارز نایقین نیز به طور گسترده توسط لیو [۱۰۲]، شن–یائو [۱۴۵] و وانگ–نینگ [۱۵۹] بررسی شد.

فصل ۱۶

آمار نایقین

مطالعه ی آمار نایقین در سال ۲۰۱۰ توسط لیو [۹۱] آغاز شد. این روش برای جمع آوری و تفسیر داده‌های تجربی با نظریه نایقینی است. در این فصل، یک نظرسنجی برای جمع آوری داده‌های تجربی و معرفی روش درونیابی خطی، اصل کمترین مربعات، روش گشتاورها و روش دلفی برای تعیین توزیع نایقینی از داده‌های تجربی طراحی شده است. در پایان فصل، تحلیل رگرسیون نایقینی و تحلیل سری زمانی نایقینی بیان شده است.

۱.۱۶ داده تجربی کارشناس

آمار نایقین بر اساس داده‌های تجربی کارشناس به جای داده‌های تاریخی است. چگونه داده‌های تجربی کارشناس را به دست آوریم؟ لیو [۹۱] یک نظرسنجی برای جمع آوری آنها پیشنهاد کرد. نقطه شروع این است که یک یا چند کارشناس را دعوت کنیم تا پرسشنامه‌ای در معنابخشی یک متغیر نایقین ξ نظیر «پکن از تیانجین چقدر فاصله دارد» تکمیل شود.

فرد با تجربه ابتدا درخواست یک مقدار ممکن x که متغیر نایقین ξ می‌گیرد را می‌کند (مثلاً ۱۱۰ کیلومتر)، سپس بررسی می‌شود که

«چقدر ممکن است ξ کمتر یا مساوی x باشد؟»

درجه باور کارشناس را با α بیان کنید (مثلا ۰٫۶). توجه کنید که درجه باور کارشناس ξ بزرگتر از x باید $1-\alpha$ به علت اصل موضوعه دوگانی اندازه نایقین باشد. بنابراین یک داده تجربی کارشناس حوزه

$$(110, 0.6) \tag{1.16}$$

است. با تکرار فرایند فوق، داده‌های تجربی تعیین شده کارشناس با استفاده از پرسشنامه به صورت

$$(x_1, \alpha_1),\ (x_2, \alpha_2),\ \ldots,\ (x_n, \alpha_n) \tag{2.16}$$

است.

تذکر ۱.۱۶: قبل از پرسش از کارشناس حوزه نمی‌توان مقداری برای x، α و n اختصاص داد. درغیراین صورت، کارشناس این حوزه ممکن است برای پاسخ دادن به سوالات شما، هیچ دانش یا تجربه‌ای نداشته باشد.

مروری بر پرسشنامه

پکن پایتخت چین و تیانجین یک شهر ساحلی است. فرض کنید فاصله واقعی بین آنها دقیقاً برای ما معلوم نیست و به عنوان یک متغیر نایقین در نظر گرفته شده است. چن_رالسکو [۱۲] از آمار نایقین برای براورد فاصله بین پکن و تیانجین استفاده کردند. روند مشاوره به شرح زیر است:

سوال ۱: به نظرشما فاصله پکن تا تیانجین چقدراست؟ در مورد این فاصله چه نظری دارید:

پاسخ ۱: ۱۳۰ کیلومتر.

سوال ۲: تا چه میزان فکر می‌کنید که فاصله واقعی کمتر از ۱۳۰ کیلومتر است؟

پاسخ ۲: ۶۰ درصد. (اطلاعات تجربی کارشناس (۰٫۶ ,۱۳۰) به دست می‌آید)

سوال ۳: آیا این فاصله ممکن است مقدار دیگری باشد؟ اگر پاسخ بله است، چیست؟

پاسخ ۳: ۱۴۰ کیلومتر.

سوال ۴: تا چه میزان فکر می‌کنید که فاصله واقعی بیشتر از ۱۴۰ کیلومتر است؟

پاسخ ۴: ۱۰ درصد. (اطلاعات تجربی کارشناس (۰٫۹ ,۱۴۰) به دست می‌آید)

سوال ۵: آیا این فاصله ممکن است مقدار دیگری باشد؟ اگر پاسخ بله است، چیست؟

پاسخ ۵: ۱۲۰ کیلومتر.

سوال ۶: تا چه میزان فکر می‌کنید که فاصله واقعی کمتر از ۱۲۰ کیلومتر است؟

پاسخ ۶: ۳۰ درصد. (اطلاعات تجربی کارشناس (۰٫۳ ,۱۲۰) به دست می‌آید)

سوال ۷: آیا این فاصله ممکن است مقدار دیگری باشد؟ اگر پاسخ بله است، چیست؟

پاسخ ۷: ۱۰۰ کیلومتر.

سوال ۸: تا چه میزان فکر می‌کنید که فاصله واقعی کمتر از ۱۰۰ کیلومتر است؟

پاسخ ۸: امکان ندارد. (اطلاعات تجربی کارشناس (۰٫۰ ,۱۰۰) به دست می‌آید)

سوال ۹: آیا این فاصله ممکن است مقدار دیگری باشد؟ اگر پاسخ بله است، چیست؟

پاسخ ۹: ۱۵۰ کیلومتر.

سوال ۱۰: تا چه میزان فکر می‌کنید که فاصله واقعی بیشتر از ۱۵۰ کیلومتر است؟

پاسخ ۱۰: امکان ندارد. (اطلاعات تجربی کارشناس (۱٫۰ ,۱۵۰) به دست می‌آید)

سوال ۱۱: آیا این فاصله ممکن است مقدار دیگری باشد؟ اگر پاسخ بله است، چیست؟

پاسخ ۱۱: فکر نمی‌کنم عدد دیگری باشد.

با استفاده از این پرسشنامه، پنج داده تجربی کارشناس از فاصله بین پکن و تیانجین (پس از مرتب کردن) به دست می‌آید.

$$(۱۰۰, ۰), (۱۲۰, ۰/۳), (۱۳۰, ۰/۶), (۱۴۰, ۰/۹), (۱۵۰, ۱). \qquad (۳.۱۶)$$

تمرین ۱.۱۶: یک نظر سنجی را در مورد قد یکی از دوستان خود انجام دهید.

۲.۱۶ توزیع نایقینی تجربی

چگونه می‌توان توزیع نایقینی را برای یک متغیر نایقین تعیین کرد؟ فرض کنید مجموعه‌ای از داده‌های تجربی کارشناس به صورت

$$(x_۱, \alpha_۱), (x_۲, \alpha_۲), \ldots, (x_n, \alpha_n) \qquad (۴.۱۶)$$

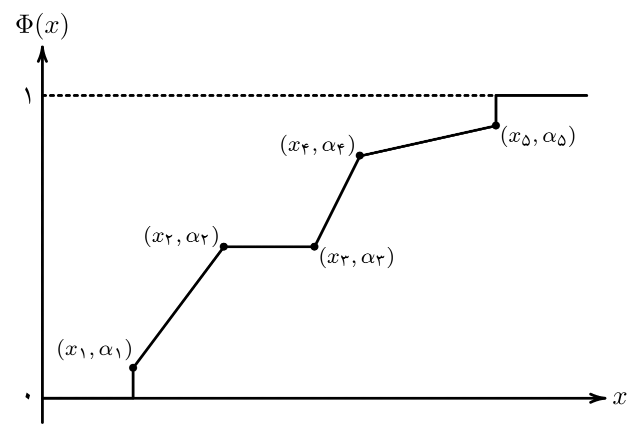
با شرایط سازگاری (شاید پس از مرتب سازی)

$$x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n, \quad ۰ \le \alpha_۱ \le \alpha_۲ \le \cdots \le \alpha_n \le ۱ \qquad (۵.۱۶)$$

جمع آوری شده است. بر اساس داده‌های تجربی این کارشناس، لیو [۹۱] توزیع نایقینی تجربی

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۰, & x < x_۱ \text{ اگر} \\ \alpha_i + \dfrac{(\alpha_{i+۱} - \alpha_i)(x - x_i)}{x_{i+۱} - x_i}, & x_i \le x \le x_{i+۱},\ ۱ \le i < n \text{ اگر} \\ ۱, & x > x_n \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۶.۱۶)$$

را پیشنهاد کرد. اساساً، این یک نوع روش درونیابی خطی است.



شکل ۱.۱۶: توزیع نایقینی تجربی $\Phi(x)$

توزیع نایقینی تجربی Φ تعیین شده با (۶.۱۶) مقدار مورد انتظار

$$E[\xi] = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}x_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}}{2}x_i + \left(1 - \frac{\alpha_{n-1} + \alpha_n}{2}\right)x_n \qquad (۷.۱۶)$$

دارد. اگر تمام x_iها نامنفی باشند، گشتاورهای k ام آن

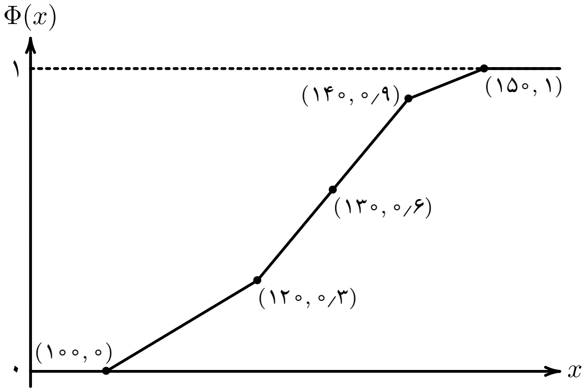
$$E[\xi^k] = \alpha_1 x_1^k + \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)x_i^j x_{i+1}^{k-j} + (1 - \alpha_n)x_n^k \qquad (۸.۱۶)$$

هستند.

مثال ۱.۱۶: پنج داده تجربی کارشناس

$$(100, 0), (120, 0.3), (130, 0.6), (140, 0.9), (150, 1),$$

در مورد فاصله بین پکن و تیانجین در بخش ۱.۱۶ را دوباره نگاه کنید. بر اساس داده‌های تجربی این کارشناسن، توزیع نایقینی تجربی فاصله در شکل ۲.۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۲.۱۶: توزیع نایقینی تجربی فاصله بین پکن و تیانجین. توجه کنید که فاصله مورد انتظار تجربی ۱۲۵٫۵ کیلومتر است و فاصله واقعی ۱۲۷ کیلومتر در Google Earth است.

۳.۱۶ اصل کمترین مربعات

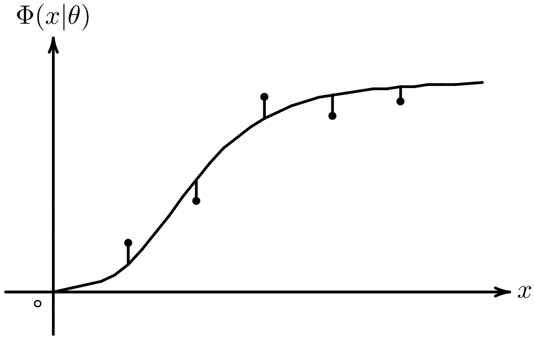
فرض کنید یک توزیع نایقینی به شکل تابعی معلوم $\Phi(x|\theta)$ با یک پارامتر نامعلوم θ است. برای برآورد پارامتر θ، لیو [۹۱] از اصل کمترین مربعات استفاده کرد که مجموع مربعات فاصله داده‌های تجربی کارشناس از توزیع نایقینی را به حداقل می‌رساند. این کمینه‌سازی را می‌توان در جهت عمودی یا افقی انجام داد. اگر داده تجربی کارشناس

$$(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2), \ldots, (x_n, \alpha_n) \qquad (۹.۱۶)$$

مشخص شده و در جهت عمودی پذیرفته شده باشد،

$$\min_{\theta} \sum_{i=۱}^{n} (\Phi(x_i|\theta) - \alpha_i)^{۲}. \qquad (۱۰.۱۶)$$

جواب بهینه $\hat{\theta}$ حاصل از (۱۰.۱۶) تقریب کمترین مربعات θ نامیده می‌شود و لذا توزیع نایقینی کمترین مربعات $\Phi(x|\hat{\theta})$ است.



شکل ۳.۱۶: اصل کمترین مربعات

مثال ۲.۱۶: فرض کنید توزیع نایقینی یک شکل خطی با دو پارامتر نامعلوم a و b دارد، یعنی

$$\Phi(x|a,b) = \begin{cases} \circ, & x \le a \text{ اگر} \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \text{ اگر} \\ ۱, & x \ge b \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱۱.۱۶)$$

همچنین داده‌های تجربی کارشناس را به صورت

$$(۱, ۰/۱۵), (۲, ۰/۴۵), (۳, ۰/۵۵), (۴, ۰/۸۵), (۵, ۰/۹۵) \qquad (۱۲.۱۶)$$

در نظر می‌گیریم. از اصل کمترین مربعات نتیجه می‌شود که: $\hat{a} = ۰/۲۲۷۳$، $\hat{b} = ۴/۷۷۲۷$ و توزیع نایقینی کمترین مربعات به صورت

$$\Phi(x) = \begin{cases} \circ, & x \le ۰/۲۲۷۳ \text{ اگر} \\ (x - ۰/۲۲۷۳)/۴/۵۴۵۴, & ۰/۲۲۷۳ \le x \le ۴/۷۷۲۷ \text{ اگر} \\ ۱, & x \ge ۴/۷۷۲۷ \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱۳.۱۶)$$

است.

مثال ۳.۱۶: فرض کنید یک توزیع نایقینی یک شکل لوگ‌ـنرمال با دو پارامتر نامعلوم e و σ دارد، یعنی

$$\Phi(x|e,\sigma) = \left(۱ + \exp\left(\frac{\pi(e - \ln x)}{\sqrt{۳}\sigma}\right)\right)^{-۱}. \qquad (۱۴.۱۶)$$

همچنین داده‌های تجربی کارشناس را به صورت
(۱۵.۱۶)
$$(۰/۶, ۰/۱), (۱/۰, ۰/۳), (۱/۵, ۰/۴), (۲/۰, ۰/۶), (۲/۸, ۰/۸), (۳/۶, ۰/۹)$$

در نظر می‌گیریم. از اصل کمترین مربعات نتیجه می‌شود که: $\hat{e} = ۰/۴۸۲۵$ ، $\hat{\sigma} = ۰/۷۸۵۲$ و توزیع نایقینی کمترین مربعات به صورت

$$\Phi(x) = \left(۱ + \exp\left(\frac{۰/۴۸۲۵ - \ln x}{۰/۴۳۲۹}\right)\right)^{-۱} \tag{۱۶.۱۶}$$

است.

۴.۱۶ روش گشتاورها

فرض کنید یک متغیر نامنفی نایقین با توزیع نایقینی

$$\Phi(x|\theta_۱, \theta_۲, \ldots, \theta_p) \tag{۱۷.۱۶}$$

با پارامترهای نامعلوم $\theta_۱, \theta_۲, \ldots, \theta_p$ است. با توجه به مجموعه‌ای از داده‌های تجربی کارشناس

$$(x_۱, \alpha_۱), (x_۲, \alpha_۲), \ldots, (x_n, \alpha_n) \tag{۱۸.۱۶}$$

$$۰ \le x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n, \quad ۰ \le \alpha_۱ \le \alpha_۲ \le \cdots \le \alpha_n \le ۱, \tag{۱۹.۱۶}$$

وانگ_پنگ [۱۶۳] یک روش گشتاوری برای برآورد پارامترهای نامعلوم توزیع نایقینی پیشنهاد کردند. ابتدا، k گشتاور تجربی داده‌های تجربی کارشناس، به عنوان توزیع نایقینی تجربی متناظر تعریف می‌شود، یعنی

$$\overline{\xi^k} = \alpha_۱ x_۱^k + \frac{۱}{k+۱}\sum_{i=۱}^{n-۱}\sum_{j=۰}^{k}(\alpha_{i+۱} - \alpha_i)x_i^j x_{i+۱}^{k-j} + (۱ - \alpha_n)x_n^k. \tag{۲۰.۱۶}$$

برآوردهای گشتاوری $\hat{\theta}_۱, \hat{\theta}_۲, \ldots, \hat{\theta}_p$ با مساوی قرار دادن p گشتاور $\Phi(x|\theta_۱, \theta_۲, \ldots, \theta_p)$ نظیر به نظیر با p گشتاور اول تجربی مشخص می‌شوند. به عبارت دیگر برآورد گشتاوری $\hat{\theta}_۱, \hat{\theta}_۲, \ldots, \hat{\theta}_p$ باید جواب دستگاه معادلات

$$\int_۰^{+\infty}(۱ - \Phi(\sqrt[k]{x}\,|\,\theta_۱, \theta_۲, \ldots, \theta_p))\mathrm{d}x = \overline{\xi^k}, \quad k = ۱, ۲, \ldots, p \tag{۲۱.۱۶}$$

باشد که در آن $\overline{\xi^۱}, \overline{\xi^۲}, \ldots, \overline{\xi^p}$ گشتاورهای تجربی مشخص شده با (۲۰.۱۶) است.

مثال ۴.۱۶: فرض کنید یک پرسشنامه با داده‌های تجربی زیر
(۲۲.۱۶)
$$(۱/۲, ۰/۱), (۱/۵, ۰/۳), (۱/۸, ۰/۴), (۲/۵, ۰/۶), (۳/۹, ۰/۸), (۴/۶, ۰/۹)$$

فراهم شده است. در این صورت سه گشتاور تجربی ۲٫۵۱۰۰، ۷٫۷۲۲۶ و ۲۹٫۴۹۳۶ هستند. ممکن است بر این باور باشیم که پارامترهای نامعلوم سه گشتاور اول توزیع زیگزاگ نایقین a, b و c هستند. یعنی

$$\Phi(x|a,b,c) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x \le a \\ \dfrac{x-a}{2(b-a)}, & \text{اگر } a \le x \le b \\ \dfrac{x+c-2b}{2(c-b}, & \text{اگر } b \le x \le c \\ 1, & \text{اگر } x \ge c \end{cases} \tag{23.16}$$

از داده‌های تجربی کارشناس، ممکن است بر این باور باشیم که پارامترهای نامعلوم اعدادی مثبت هستند. بنابراین سه گشتاوراول توزیع زیگزاگ نایقینی $\Phi(x|a,b,c)$

$$\frac{a+2b+c}{4},$$
$$\frac{a^2+ab+2b^2+bc+c^2}{6},$$
$$\frac{a^3+a^2b+ab^2+2b^3+b^2c+bc^2+c^3}{8}$$

هستند. از روش گشتاورها نتیجه می‌شود که برای پارامترهای مجهول a, b, c باید دستگاه معادلات

$$\begin{cases} a+2b+c = 4 \times 2/5100 \\ a^2+ab+2b^2+bc+c^2 = 6 \times 7/7226 \\ a^3+a^2b+ab^2+2b^3+b^2c+bc^2+c^3 = 8 \times 29/4936. \end{cases} \tag{24.16}$$

حل شود. از روش گشتاوری برآوردهای گشتاوری $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = (0/9804, 2/0303, 4/9991)$ هستند و توزیع نایقینی متناظر

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x \le 0/9804 \\ (x-0/9804)/2/0998, & \text{اگر } 0/9804 \le x \le 2/0303 \\ (x+0/9385)/5/9376, & \text{اگر } 2/0303 \le x \le 4/9991 \\ 1, & \text{اگر } x \ge 4/9991 \end{cases} \tag{25.16}$$

است.

۵.۱۶ استفاده از چند کارشناس

فرض کنید m کارشناس حوزه مربوطه وجود دارند و هر یک توزیع نایقینی خودش را تولید می‌کند. در این صورت m توزیع نایقینی $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_m(x)$ را داریم. لیو [۹۱] پیشنهاد کرد که m توزیع نایقینی باید در یک توزیع نایقینی

$$\Phi(x) = w_1\Phi_1(x) + w_2\Phi_2(x) + \cdots + w_m\Phi_m(x) \tag{26.16}$$

تجمیع شود که در آن $w_۱, w_۲, \ldots, w_m$ ضرایب ترکیب محدب هستند (یعنی، آنها اعداد نامنفی هستند، $w_۱ + w_۲ + \cdots + w_n = ۱$) و نشان دهنده وزن کارشناسان است. به عنوان مثال، ممکن است قرار دهیم

$$w_i = \frac{۱}{m}, \quad \forall i = ۱, ۲, \ldots, n. \qquad (۲۷.۱۶)$$

چون $\Phi_۱(x), \Phi_۲(x), \ldots, \Phi_m(x)$ توزیع نایقینی هستند، توابع افزایشی با مقادیر [۰، ۱] و مقادیر آنها صفر یا ۱ نیست. به آسانی میتوان تحقیق کرد که ترکیب محدب $\Phi(x)$ نیز یک تابع افزایشی با مقادیری در [۰، ۱] است و $\Phi(x) \not\equiv ۰$، $\Phi(x) \not\equiv ۱$ پس بنا به قضیه پنگ-ایوامورا، $\Phi(x)$ نیز یک توزیع نایقینی است.

۶.۱۶ روش دلفی

روش دلفی ابتدا در دهه ۱۹۵۰ توسط شرکت RAND بر اساس این فرض که تجربه گروهی معتبرتر از تجربه فردی است، توسعه یافت. این روش از کارشناسان حوزه میخواهد تا پرسشنامهها را در دو یا چند دور برگردانند. پس از هر دور، جمع بندی کننده یک خلاصه بدون نام از پاسخها از دور قبلی و همچنین دلایلی که کارشناسان حوزه برای نظراتشان دارند، ارائه میدهد. سپس از کارشناسان حوزه خواسته میشود تا در پاسخهای قبلی خود، با توجه به این جمع بندی، تجدید نظر کنند. باور بر این است که در طول این فرایند نظرات کارشناسان به یک پاسخ مناسب همگرا میشوند. وانگ-گائو-گیو [۱۶۱] روش دلفی را به عنوان یک فرایند برای تعیین توزیع نایقینی بازنگری کردند. مراحل اصلی آن به شرح زیر است:

گام ۱. m کارشناس حوزه، دادههای تجربی خود را ارائه دهند.

$$(x_{ij}, \alpha_{ij}), \quad j = ۱, ۲, \ldots, n_i,\ i = ۱, ۲, \ldots, m. \qquad (۲۸.۱۶)$$

گام ۲. از دادهای تجربی i امین کارشناس حوزه $(x_{i۱}, \alpha_{i۱}), (x_{i۲}, \alpha_{i۲}), \ldots, (x_{in_i}, \alpha_{in_i})$ برای تولید توزیع نایقینی Φ_i i امین کارشناس حوزه استفاده کنید.

گام ۳. مقدار $\Phi(x) = w_۱\Phi_۱(x) + w_۲\Phi_۲(x) + \cdots + w_m\Phi_m(x)$ را محاسبه کنید که در آن $w_۱, w_۲, \cdots, w_m$ ضرایب ترکیب محدب و وزن کارشناسان حوزه را نشان میدهند.

گام ۴. اگر برای تمام i و jها $|\alpha_{ij} - \Phi(x_{ij})|$ کمتر از یک سطح معین $\varepsilon > ۰$ است، به مرحله ۵ برو. در غیر این صورت، کارشناس i ام حوزه جمع بندی (مثلاً، تابع Φ به دست آمده در مرحله قبلی و دلایل دیگر کارشناسان) را دریافت کند، و سپس مجموعهای از داده تجربی تجدید نظر شده را $(x_{i۱}, \alpha_{i۱}), (x_{i۲}, \alpha_{i۲}), \ldots, (x_{in_i}, \alpha_{in_i})$ برای $i = ۱, ۲, \ldots, m$ تهیه کنید. به مرحله ۲ بروید.

گام ۵. آخرین تابع Φ توزیع نایقینی مورد نظر است.

۷.۱۶ تحلیل رگرسیون نایقین

فرض کنید $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ یک بردار از متغیرهای توصیفی و y یک متغیر پاسخ است. فرض کنید رابطه تابعی بین $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ و y با یک مدل رگرسیونی

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p|\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon \qquad (۲۹.۱۶)$$

بیان شود که در آن $\boldsymbol{\beta}$ یک بردار نامعلوم از پارامترها، و ε عامل اختلال است. به خصوص،

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon \qquad (۳۰.۱۶)$$

را مدل رگرسیون خطی و

$$y = \beta_0 - \beta_1 \exp(-\beta_2 x) + \varepsilon, \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0 \qquad (۳۱.۱۶)$$

را مدل رگرسیون مجانبی می‌نامیم.
به طور سنتی، فرض می‌شود که امکان مشاهده دقیق $(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)$ وجود دارد. با این حال، در بسیاری از موارد مشاهدات این داده‌ها نادقیق هستند و با متغیرهای نایقین مشخص می‌شوند. به این ترتیب، فرض می‌شود که ما مجموعه‌ای از داده‌های نادقیق مشاهده شده

$$(\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \ldots, \tilde{x}_{ip}, \tilde{y}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۳۲.۱۶)$$

داریم که در آن $\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \ldots, \tilde{x}_{ip}, \tilde{y}_i$ متغیرهای نایقین به ترتیب برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ با توزیع نایقینی $\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \ldots, \Phi_{ip}, \Psi_i$ هستند.
با توجه به داده‌های نادقیق مشاهده شده (۳۲.۱۶)، یائو–لیو [۱۹۸] پیشنهاد کردند که تقریب کمترین مربعات $\boldsymbol{\beta}$ در مدل رگرسیون

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p|\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon \qquad (۳۳.۱۶)$$

جواب مسئله کمینه‌سازی

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^{n} E[(\tilde{y}_i - f(\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \ldots, \tilde{x}_{ip}|\boldsymbol{\beta}))^2]. \qquad (۳۴.۱۶)$$

است. اگر جواب این کمینه‌سازی $\boldsymbol{\beta}^*$ باشد، مدل رگرسیون برازش شده به صورت

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p|\boldsymbol{\beta}^*) \qquad (۳۵.۱۶)$$

است.

قضیه ۱.۱۶ [۱۹۸]، [۸۱] *فرض کنید $(\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \ldots, \tilde{x}_{ip}, \tilde{y}_i)$، $i = 1, 2, \ldots, n$ یک مجموعه از داده‌های مشاهده شده نادقیق است، که در آن $\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \ldots, \tilde{x}_{ip}, \tilde{y}_i$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع نایقینی منظم $\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \ldots, \Phi_{ip}, \Psi_i$، $i = 1, 2, \cdots, n$ هستند. پس تقریب کمترین مربعات $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ در مدل رگرسیون خطی*

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j + \varepsilon \qquad (۳۶.۱۶)$$

جواب مسئله کمینه‌سازی

$$\min_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left(\Psi_i^{-1}(\alpha) - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \Upsilon_{ij}^{-1}(\alpha, \beta_j)\right)^2 \mathrm{d}\alpha \qquad (۳۷.۱۶)$$

است، که در آن برای $i = 1, 2, \ldots, n$ *و* $j = 1, 2, \ldots, p$،

$$\Upsilon_{ij}^{-1}(\alpha, \beta_j) = \begin{cases} \Phi_{ij}^{-1}(1-\alpha), & \beta_j \geq 0 \text{ اگر } \\ \Phi_{ij}^{-1}(\alpha), & \beta_j < 0 \text{ اگر } \end{cases} \qquad (۳۸.۱۶)$$

برهان: توجه کنید که تقریب کمترین مربعات $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ در مدل رگرسیون خطی، جواب مسئله کمینه سازی

$$\min_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p} \sum_{i=1}^{n} E\left[\left(\tilde{y}_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \tilde{x}_{ij}\right)^2\right]. \qquad (۳۹.۱۶)$$

است. برای هر اندیس i توزیع نایقینی معکوس متغیر نایقین

$$\tilde{y}_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \tilde{x}_{ij}$$

همان

$$F_i^{-1}(\alpha) = \Psi_i^{-1}(\alpha) - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \Upsilon_{ij}^{-1}(\alpha, \beta_j)$$

است. از قضیه ۴۴.۲ نتیجه می‌شود که

$$E\left[\left(\tilde{y}_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \tilde{x}_{ij}\right)^2\right] = \int_0^1 \left(\Psi_i^{-1}(\alpha) - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \Upsilon_{ij}^{-1}(\alpha, \beta_j)\right)^2 \mathrm{d}\alpha.$$

پس مسئله کمینه سازی (۳۷.۱۶) معادل (۳۹.۱۶) است. بنابراین قضیه ثابت شده است.

تمرین ۲.۱۶: [۸۱] فرض کنید برای $i = 1, 2, \ldots, n$، $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ یک مجموعه‌ای از داده‌های مشاهده شده نادقیق هستند، که در آن $\tilde{x}_i$ و $\tilde{y}_i$ متغیرهای مستقل نایقین هستند، و برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ به ترتیب توزیع نایقینی منظم Φ_i و Ψ_i دارند. نشان دهید تقریب کمترین مربعات $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ در مدل رگرسیونی مجانبی

$$y = \beta_0 - \beta_1 \exp(-\beta_2 x) + \varepsilon, \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0 \qquad (۴۰.۱۶)$$

جواب مسئله کمینه‌سازی

$$\min_{\beta_0,\beta_1>0,\beta_2>0} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left(\Psi_i^{-1}(\alpha) - \beta_0 + \beta_1 \exp(-\beta_2 \Phi_i^{-1}(1-\alpha))\right)^2 \mathrm{d}\alpha \qquad (۴۱.۱۶)$$

است.

تمرین ۳.۱۶: [۸۱] فرض کنید $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$، $i = ۱, ۲, \dots, n$ یک مجموعه از داده‌های نادقیق است که در آن $\tilde{x}_i$ و $\tilde{y}_i$ متغیرهای مستقل و مثبت هستند، و برای $i = ۱, ۲, \dots, n$ به ترتیب توزیع‌های نایقینی منظم Φ_i و Ψ_i دارند. نشان دهید تقریب کمترین مربعات $\beta_۱, \beta_۲$ در مدل رگرسیون

$$y = \frac{\beta_۱ x}{\beta_۲ + x} + \varepsilon, \quad \beta_۱ > ۰, \beta_۲ > ۰ \tag{۴۲.۱۶}$$

جواب مسئله کمینه‌سازی

$$\min_{\beta_۱ > ۰, \beta_۲ > ۰} \sum_{i=۱}^{n} \int_۰^۱ \left(\Psi_i^{-۱}(\alpha) - \frac{\beta_۱ \Phi_i^{-۱}(۱-\alpha)}{\beta_۲ + \Phi_i^{-۱}(۱-\alpha)} \right)^۲ \mathrm{d}\alpha \tag{۴۳.۱۶}$$

است.

تحلیل مانده

تعریف ۱.۱۶ [۸۱] *فرض کنید $(\tilde{x}_{i۱}, \tilde{x}_{i۲}, \dots, \tilde{x}_{ip}, \tilde{y}_i)$، $i = ۱, ۲, \dots, n$ مجموعه‌ای از داده‌های مشاهده شده نادقیق است و مدل رگرسیون برازش شده*

$$y = f(x_۱, x_۲, \dots, x_p | \boldsymbol{\beta}^*) \tag{۴۴.۱۶}$$

است. برای هر اندیس i $(i = ۱, ۲, \dots, n)$ جمله

$$\hat{\varepsilon}_i = \tilde{y}_i - f(\tilde{x}_{i۱}, \tilde{x}_{i۲}, \dots, \tilde{x}_{ip} | \boldsymbol{\beta}^*) \tag{۴۵.۱۶}$$

i امین مانده نامیده می‌شود.

اگر جمله اختلال ε متغیر نایقین فرض شود، آنگاه مقدار مورد انتظار آن را می‌توان میانگین برآورد مقادیر مورد انتظار مانده‌ها در نظر گرفت، یعنی

$$\hat{e} = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} E[\hat{\varepsilon}_i] \tag{۴۶.۱۶}$$

و پراش را می‌توان به صورت

$$\hat{\sigma}^۲ = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} E[(\hat{\varepsilon}_i - \hat{e})^۲] \tag{۴۷.۱۶}$$

برآورد کرد، که در آن برای $i = ۱, ۲, \dots, n$، $\hat{\varepsilon}_i$ به ترتیب i امین مانده است.

قضیه ۲.۱۶ [۸۱] *فرض کنید $(\tilde{x}_{i۱}, \tilde{x}_{i۲}, \dots, \tilde{x}_{ip}, \tilde{y}_i)$، $i = ۱, ۲, \dots, n$ مجموعه‌ای از داده‌های مشاهده شده نادقیق است که در آن $\tilde{x}_{i۱}, \tilde{x}_{i۲}, \dots, \tilde{x}_{ip}, \tilde{y}_i$ متغیرهای نایقین مستقل هستند و برای $i = ۱, ۲, \dots, n$ به ترتیب توزیع نایقینی منظم $\Phi_{i۱}, \Phi_{i۲}, \dots, \Phi_{ip}, \Psi_i$ دارند. فرض کنید مدل رگرسیون خطی برازش شده به صورت*

$$y = \beta_۰^* + \sum_{j=۱}^{p} \beta_j^* x_j \tag{۴۸.۱۶}$$

است. در این صورت برآورد مقدار امید ریاضی عبارت خطای ε

$$\hat{e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\left(\Psi_i^{-1}(\alpha) - \beta_0^* - \sum_{j=1}^{p}\beta_j^*\Upsilon_{ij}^{-1}(\alpha,\beta_j^*)\right)\mathrm{d}\alpha \qquad (۴۹.۱۶)$$

است، و پراش برآورد شده

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\left(\Psi_i^{-1}(\alpha) - \beta_0^* - \sum_{j=1}^{p}\beta_j^*\Upsilon_{ij}^{-1}(\alpha,\beta_j^*) - \hat{e}\right)^2\mathrm{d}\alpha \qquad (۵۰.۱۶)$$

است که در آن برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ *و* $j = 1, 2, \ldots, p$

$$\Upsilon_{ij}^{-1}(\alpha,\beta_j^*) = \begin{cases} \Phi_{ij}^{-1}(1-\alpha), & \beta_j^* \geq 0 \text{ اگر} \\ \Phi_{ij}^{-1}(\alpha), & \beta_j^* < 0 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۵۱.۱۶)$$

برهان: برای هر اندیس i، توزیع نایقینی معکوس متغیر نایقین

$$\tilde{y}_i - \beta_0^* - \sum_{j=1}^{p}\beta_j^*\tilde{x}_{ij}$$

همان

$$F_i^{-1}(\alpha) = \Psi_i^{-1}(\alpha) - \beta_0^* - \sum_{j=1}^{p}\beta_j^*\Upsilon_{ij}^{-1}(\alpha,\beta_j^*)$$

است. از قضیه‌های ۲۵.۲ و ۴۴.۲ برقراری (۴۹.۱۶) و (۵۰.۱۶) نتیجه می‌شود.

تمرین ۴.۱۶: [۸۱] فرض کنید $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$، $i = 1, 2, \ldots, n$ مجموعه‌ای از داده‌های مشاهده شده نایقین است که در آن $\tilde{x}_i$ و $\tilde{y}_i$ متغیرهای نایقین مستقل هستند و برای $i = 1, 2, \ldots, n$ به ترتیب توزیع نایقینی منظم Φ_i و Ψ_i دارند، و فرض کنید مدل رگرسیونی مجانبی برازش شده به صورت

$$y = \beta_0^* - \beta_1^*\exp(-\beta_2^* x), \quad \beta_1^* > 0, \beta_2^* > 0 \qquad (۵۲.۱۶)$$

است. نشان دهید مقدار برآورد شده عبارت اختلال ε

$$\hat{e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\left(\Psi_i^{-1}(\alpha) - \beta_0^* + \beta_1^*\exp(-\beta_2^*\Phi_i^{-1}(1-\alpha))\right)\mathrm{d}\alpha \qquad (۵۳.۱۶)$$

است و مقدار برآورد شده پراش

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\left(\Psi_i^{-1}(\alpha) - \beta_0^* + \beta_1^*\exp(-\beta_2^*\Phi_i^{-1}(1-\alpha)) - \hat{e}\right)^2\mathrm{d}\alpha \qquad (۵۴.۱۶)$$

است.

تمرین ۵.۱۶: [۸۱] فرض کنید $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$ مجموعه‌ای از داده‌های مشاهده شده نادقیق است، که در آن $\tilde{x}_i$ و $\tilde{y}_i$ متغیرهای نایقین مستقل و مثبت هستند و برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، به ترتیب توزیع نایقینی منظم Φ_i و Ψ_i دارند؛ و فرض کنید مدل رگرسیون برازش شده به صورت

$$y = \frac{\beta_۱^* x}{\beta_۲^* + x}, \quad \beta_۱^* > ۰, \beta_۲^* > ۰ \tag{۵۵.۱۶}$$

است. نشان دهید مقدار برآورد شده مورد انتظار عبارت اختلال ε به صورت

$$\hat{e} = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \int_۰^۱ \left(\Psi_i^{-۱}(\alpha) - \frac{\beta_۱^* \Phi_i^{-۱}(۱-\alpha)}{\beta_۲^* + \Phi_i^{-۱}(۱-\alpha)} \right) \mathrm{d}\alpha \tag{۵۶.۱۶}$$

است و پراش برآورد شده

$$\hat{\sigma}^۲ = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \int_۰^۱ \left(\Psi_i^{-۱}(\alpha) - \frac{\beta_۱^* \Phi_i^{-۱}(۱-\alpha)}{\beta_۲^* + \Phi_i^{-۱}(۱-\alpha)} - \hat{e} \right)^۲ \mathrm{d}\alpha \tag{۵۷.۱۶}$$

است.

مقدار پیش بینی

حال فرض کنید $(\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \ldots, \tilde{x}_p)$ یک بردار توصیفی است، که در آن $\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \ldots, \tilde{x}_p$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع نایقینی منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_p$ هستند. فرض کنید (۱) مدل رگرسیون خطی برازش شده به صورت

$$y = \beta_۰^* + \sum_{j=۱}^{p} \beta_j^* x_j, \tag{۵۸.۱۶}$$

است. (۲) عبارت ε مقدار مورد انتظار $\hat{e}$ و واریانس $\hat{\sigma}^۲$ دارد و مستقل از $\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \ldots, \tilde{x}_p$ است. لی‌او_لیو [۸۱] برای تعیین متغیر نایقین متغیر پیش بینی پاسخ y برحسب $\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \ldots, \tilde{x}_p$ رابطه

$$\hat{y} = \beta_۰^* + \sum_{j=۱}^{p} \beta_j^* \tilde{x}_j + \varepsilon, \tag{۵۹.۱۶}$$

را پیشنهاد کردند، و مقدار پیش بینی به عنوان مقدار مورد انتظار متغیر نایقین پیش بینی $\hat{y}$ تعریف می‌شود، یعنی

$$\mu = \beta_۰^* + \sum_{j=۱}^{p} \beta_j^* E[\tilde{x}_j] + \hat{e}. \tag{۶۰.۱۶}$$

بازه اطمینان

همچنین اگر فرض کنیم که عبارت اختلال ε از توزیع نایقینی نرمال تبعیت کند، آنگاه توزیع نایقینی معکوس متغیر پیش بینی $\hat{y}$ به صورت

$$\hat{\Psi}^{-۱}(\alpha) = \beta_۰^* + \sum_{j=۱}^{p} \beta_j^* \Upsilon_j^{-۱}(\alpha, \beta_j^*) + \Phi^{-۱}(\alpha) \tag{۶۱.۱۶}$$

است که در آن برای هر $j = ۱, ۲, \ldots, p$

$$\Upsilon_j^{-۱}(\alpha, \beta_j^*) = \begin{cases} \Phi_j^{-۱}(\alpha), & \beta_j^* \geq ۰ \text{ اگر} \\ \Phi_j^{-۱}(۱-\alpha), & \beta_j^* < ۰ \text{ اگر} \end{cases} \quad (۶۲.۱۶)$$

و $\Phi^{-۱}(\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس $\mathcal{N}(\hat{e}, \hat{\sigma})$ است یعنی،

$$\Phi^{-۱}(\alpha) = \hat{e} + \frac{\hat{\sigma}\sqrt{۳}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{۱-\alpha}. \quad (۶۳.۱۶)$$

از $\hat{\Psi}^{-۱}$، همچنین توزیع نایقینی $\hat{\Psi}$ از $\hat{y}$ را مشخص می‌کنیم. α را (مثلاً ۹۵ درصد) به عنوان سطح اطمینان در نظر می‌گیریم و حداقل مقدار b را چنان پیدا می‌کنیم که

$$\hat{\Psi}(\mu + b) - \hat{\Psi}(\mu - b) \geq \alpha. \quad (۶۴.۱۶)$$

چون $\mathcal{M}\{\mu - b \leq \hat{y} \leq \mu + b\} \geq \hat{\Psi}(\mu + b) - \hat{\Psi}(\mu - b) \geq \alpha$، لی‌او–لیو [۸۱] پیشنهاد کردند که بازه اطمینان متناظر با سطح اطمینان α متغیر پاسخ y برابر $[\mu - b, \mu + b]$ است که اغلب به اختصار به صورت

$$\mu \pm b \quad (۶۵.۱۶)$$

نوشته می‌شود.

تمرین ۶.۱۶: [۸۱] فرض کنید $(\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \ldots, \tilde{x}_p)$ یک بردار توصیفی است که در آن $\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \ldots, \tilde{x}_p$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع نایقینی منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_p$ هستند. فرض کنید (۱) مدل رگرسیون خطی برازش شده به صورت

$$y = \beta_۰^* + \sum_{j=۱}^{p} \beta_j^* x_j, \quad (۶۶.۱۶)$$

است. (۲) عبارت اختلال ε از توزیع نایقینی خطی با مقدار مورد انتظار $\hat{e}$ و پراش $\hat{\sigma}^۲$ پیروی می‌کند و مستقل از $\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \ldots, \tilde{x}_p$ است. بازه اطمینان متغیر پاسخ y متناظر با سطح α چیست؟ (راهنمایی: متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(\hat{e} - \sqrt{۳}\hat{\sigma}, \hat{e} + \sqrt{۳}\hat{\sigma})$ مقدار مورد انتظار $\hat{e}$ و پراش $\hat{\sigma}^۲$ دارد.)

تمرین ۷.۱۶: [۸۱] فرض کنید $\tilde{x}$ یک متغیر توصیفی با توزیع نایقینی منظم Φ است. فرض کنید (۱) مدل رگرسیون مجانبی برازش شده به صورت

$$y = \beta_۰^* - \beta_۱^* \exp(-\beta_۲^* x), \quad \beta_۱^* > ۰, \beta_۲^* > ۰, \quad (۶۷.۱۶)$$

است. (۲) عبارت اختلال ε از توزیع نایقینی نرمال با مقدار مورد انتظار $\hat{e}$ و پراش $\hat{\sigma}^۲$ پیروی می‌کند و مستقل از $\tilde{x}$ است. بازه اطمینان متغیر پاسخ y متناظر با سطح اطمینان α چیست؟

تمرین ۸.۱۶: [۸۱] فرض کنید $\tilde{x}$ یک متغیر توصیفی با توزیع نایقینی منظم Φ است. فرض کنید (۱) مدل رگرسیون به صورت

$$y = \frac{\beta_۱^* x}{\beta_۲^* + x}, \quad \beta_۱^* > ۰, \beta_۲^* > ۰. \quad (۶۸.۱۶)$$

است. (۲) عبارت اختلال ε از توزیع نایقینی نرمال با مقدار مورد انتظار $\hat{e}$ و پراش $\hat{\sigma}^۲$ پیروی می‌کند و مستقل از $\tilde{x}$ است. بازه اطمینان متغیر پاسخ y متناظر با سطح اطمینان α چیست؟

یک مثال عددی

فرض کنید که ۲۴ دادهٔ نادقیق مشاهده شده $(\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \tilde{x}_{i3}, \tilde{y}_i)$، $i = 1, 2, \ldots, 24$ وجود دارند. برای هر i، $\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \tilde{x}_{i3}, \tilde{y}_i$ متغیرهای نایقین خطی مستقل هستند. به جدول ۱.۱۶ مراجعه کنید. نشان می‌دهیم چگونه از تحلیل رگرسیون نایقینی برای تعیین رابطه تابعی بین (x_1, x_2, x_3) و y استفاده می‌شود.

جدول ۱.۱۶: داده‌های نایقین مشاهده شده (متغیرهای نایقین خطی)

شماره	x_1	x_2	x_3	y
۱	$\mathcal{L}(3, 4)$	$\mathcal{L}(9, 10)$	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(33, 36)$
۲	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(20, 22)$	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(40, 43)$
۳	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(18, 20)$	$\mathcal{L}(7, 8)$	$\mathcal{L}(38, 41)$
۴	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(33, 36)$	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(46, 49)$
۵	$\mathcal{L}(4, 5)$	$\mathcal{L}(31, 34)$	$\mathcal{L}(7, 8)$	$\mathcal{L}(41, 44)$
۶	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(13, 15)$	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(37, 40)$
۷	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(25, 28)$	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(39, 42)$
۸	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(30, 33)$	$\mathcal{L}(4, 5)$	$\mathcal{L}(40, 43)$
۹	$\mathcal{L}(3, 4)$	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(30, 33)$
۱۰	$\mathcal{L}(7, 8)$	$\mathcal{L}(47, 50)$	$\mathcal{L}(8, 9)$	$\mathcal{L}(52, 55)$
۱۱	$\mathcal{L}(4, 5)$	$\mathcal{L}(25, 28)$	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(38, 41)$
۱۲	$\mathcal{L}(4, 5)$	$\mathcal{L}(11, 13)$	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(31, 34)$
۱۳	$\mathcal{L}(8, 9)$	$\mathcal{L}(23, 26)$	$\mathcal{L}(7, 8)$	$\mathcal{L}(43, 46)$
۱۴	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(35, 38)$	$\mathcal{L}(7, 8)$	$\mathcal{L}(44, 47)$
۱۵	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(39, 44)$	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(42, 45)$
۱۶	$\mathcal{L}(3, 4)$	$\mathcal{L}(21, 24)$	$\mathcal{L}(4, 5)$	$\mathcal{L}(33, 36)$
۱۷	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(7, 8)$	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(34, 37)$
۱۸	$\mathcal{L}(7, 8)$	$\mathcal{L}(40, 43)$	$\mathcal{L}(7, 8)$	$\mathcal{L}(48, 51)$
۱۹	$\mathcal{L}(4, 5)$	$\mathcal{L}(35, 38)$	$\mathcal{L}(6, 7)$	$\mathcal{L}(38, 41)$
۲۰	$\mathcal{L}(4, 5)$	$\mathcal{L}(23, 26)$	$\mathcal{L}(3, 4)$	$\mathcal{L}(35, 38)$
۲۱	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(33, 36)$	$\mathcal{L}(4, 5)$	$\mathcal{L}(40, 43)$
۲۲	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(27, 30)$	$\mathcal{L}(4, 5)$	$\mathcal{L}(36, 39)$
۲۳	$\mathcal{L}(4, 5)$	$\mathcal{L}(34, 37)$	$\mathcal{L}(8, 9)$	$\mathcal{L}(45, 48)$
۲۴	$\mathcal{L}(3, 4)$	$\mathcal{L}(15, 17)$	$\mathcal{L}(5, 6)$	$\mathcal{L}(35, 38)$

برای تعیین آن، از مدل رگرسیون خطی نایقین

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon. \qquad (69.16)$$

استفاده می‌کنیم. با حل مسئله کمینه‌سازی (۳۷.۱۶)، برآورد کمترین مربعات

$$(\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*) = (21.5196, 0.8678, 0.3110, 1.0053) \qquad (70.16)$$

را به دست می‌آوریم. بنابراین مدل رگرسیون خطی برازش شده

$$y = 21.5196 + 0.8678 x_1 + 0.3110 x_2 + 1.0053 x_3. \qquad (71.16)$$

است. با استفاده از فرمول‌های (۴۹.۱۶) و (۵۰.۱۶)، مقدار مورد انتظار و پراش عبارت اختلال ε را به ترتیب

$$\hat{e} = ۰/۰۰۰۰۰, \quad \hat{\sigma}^۲ = ۵/۶۳۰۵, \tag{۷۲.۱۶}$$

مشخص می‌کنیم. حال فرض کنید

$$(\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \tilde{x}_۳) \sim (\mathcal{L}(۵, ۶), \mathcal{L}(۲۸, ۳۰), \mathcal{L}(۶, ۷)) \tag{۷۳.۱۶}$$

یک بردار توصیفی نایقین است. هرگاه $\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \tilde{x}_۳, \varepsilon$ مستقل باشند، با محاسبه فرمول (۶۰.۱۶)، مقدار پیش بینی متغیر پاسخ y

$$\mu = ۴۱/۸۴۶۰ \tag{۷۴.۱۶}$$

است. با در نظر گرفتن سطح اطمینان $\alpha = ۹۵\%$، اگر فرض شود که عبارت ε از توزیع نایقینی نرمال پیروی کند، آنگاه

$$b = ۵/۹۷۸۰ \tag{۷۵.۱۶}$$

کمترین مقداری است که (۶۴.۱۶) برقرار است. بنابراین بازه اطمینان متغیر پاسخ y متناظر با سطح اطمینان ۹۵٪

$$۴۱/۸۴۶۰ \pm ۵/۹۷۸۰ \tag{۷۶.۱۶}$$

است.

تمرین ۹.۱۶: فرض کنید عبارت اختلال ε در این مثال از توزیع نایقینی خطی پیروی کند. بازه اطمینان پاسخ متغیر y متناظر با سطح اطمینان ۹۵٪ چیست؟

۸.۱۶ تحلیل سری زمانی نایقین

یک سری زمانی نایقین دنباله‌ای از مقادیر مشاهده شده نادقیق است که با متغیرهای نایقین مشخص می‌شود. به زبان ریاضی، یک سری زمانی نایقین با

$$X = \{X_۱, X_۲, \ldots, X_n\} \tag{۷۷.۱۶}$$

نشان داده می‌شود که در آن X_t مقادیر مشاهده شده نایقین (یعنی متغیرهای نایقین) به ترتیب در زمان‌های t، $t = ۱, ۲, \ldots, n$ است. یک مسئله اساسی از سری‌های زمانی نایقین تحلیل آنها برای پیش بینی مقدار $X_{n+۱}$ بر اساس مقادیر قبلی $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ است.

ساده ترین روش برای مدل سازی سری زمانی نایقین، مدل خودکاهنده

$$X_t = a_۰ + \sum_{i=۱}^{k} a_i X_{t-i} + \varepsilon_t \tag{۷۸.۱۶}$$

است، که در آن $a_۰, a_۱, \ldots, a_k$ پارامترهای نامعلوم هستند و ε_t عبارت اختلال و k مرتبه مدل خودکاهنده نامیده می‌شود.

بر اساس مقادیر نادقیق مشاهده شده $X_1, X_2, \ldots, X_n$، یانگ_لیو [۱۷۵] پیشنهاد کردند که تقریب کمترین مربعات $a_0, a_1, \ldots, a_k$ در مدل خودکاهنده (۷۸.۱۶)، جواب مسئله کمینه‌سازی

$$\min_{a_0, a_1, \ldots, a_k} \sum_{t=k+1}^{n} E\left[\left(X_t - a_0 - \sum_{i=1}^{k} a_i X_{t-i}\right)^2\right] \qquad (۷۹.۱۶)$$

است. اگر $a_0^*, a_1^*, \ldots, a_k^*$ جواب کمینه‌سازی باشد، آنگاه مدل خودکاهنده برازش شده

$$X_t = a_0^* + \sum_{i=1}^{k} a_i^* X_{t-i}. \qquad (۸۰.۱۶)$$

است.

قضیه ۳.۱۶ *[۱۷۵] فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مقادیر مشاهده شده نادقیق هستند که با متغیرهای نایقین مستقل و به ترتیب با توزیع نایقینی منظم $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ مشخص شده‌اند. پس تقریب کمترین مربعات $a_0, a_1, \ldots, a_k$ در مدل خودکاهنده*

$$X_t = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i X_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (۸۱.۱۶)$$

جواب مسئله کمینه‌سازی

$$\min_{a_0, a_1, \ldots, a_k} \sum_{t=k+1}^{n} \int_0^1 \left(\Phi_t^{-1}(\alpha) - a_0 - \sum_{i=1}^{k} a_i \Upsilon_{t-i}^{-1}(\alpha, a_i)\right)^2 \mathrm{d}\alpha \qquad (۸۲.۱۶)$$

است، که در آن برای هر $i = 1, 2, \ldots, k$،

$$\Upsilon_{t-i}^{-1}(\alpha, a_i) = \begin{cases} \Phi_{t-i}^{-1}(1-\alpha), & a_i \geq 0 \text{ اگر} \\ \Phi_{t-i}^{-1}(\alpha), & a_i < 0 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۸۳.۱۶)$$

برهان: برای هر اندیس t توزیع نایقینی معکوس متغیر نایقین

$$X_t - a_0 - \sum_{i=1}^{k} a_i X_{t-i}$$

همان

$$F_t^{-1}(\alpha) = \Phi_t^{-1}(\alpha) - a_0 - \sum_{i=1}^{k} a_i \Upsilon_{t-i}^{-1}(\alpha, a_i)$$

است. از قضیه ۴۴.۲ نتیجه می‌شود که

$$E\left[\left(X_t - a_0 - \sum_{i=1}^{k} a_i X_{t-i}\right)^2\right] = \int_0^1 \left(\Phi_t^{-1}(\alpha) - a_0 - \sum_{i=1}^{k} a_i \Upsilon_{t-i}^{-1}(\alpha, a_i)\right)^2 \mathrm{d}\alpha.$$

پس مسئله کمینه سازی (۸۲.۱۶) معادل (۷۹.۱۶) است، بنابراین قضیه ثابت شد.

تحلیل مانده

تعریف ۲.۱۶ [۱۷۵] *فرض کنید که $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مقادیرمشاهده شده نادقیق هستند و مدل خودکاهنده برازش شده*

$$X_t = a_0^* + \sum_{i=1}^{k} a_i^* X_{t-i} \tag{۸۴.۱۶}$$

است. برای هر اندیس t ($t = k+1, k+2, \ldots, n$)، تفاوت بین مقدار واقعی مشاهده شده و مقدار پیش بینی شده با مدل، یعنی

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - a_0^* - \sum_{i=1}^{k} a_i^* X_{t-i} \tag{۸۵.۱۶}$$

k امین مانده نامیده می‌شود.

اگر عبارت‌های اختلال $\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots, \varepsilon_n$ متغیرهای نایقین مستقل و همتوزیع فرض شوند (بعد از این، آن را فرض همتوزیعی گوییم)، آنگاه مقدار انتظار اختلال به عنوان میانگین مقادیر مورد انتظار مانده‌ها محاسبه می‌شود، یعنی

$$\hat{e} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^{n} E[\hat{\varepsilon}_t] \tag{۸۶.۱۶}$$

و پراش به صورت زیر برآورد می‌شود،

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^{n} E[(\hat{\varepsilon}_t - \hat{e})^2] \tag{۸۷.۱۶}$$

که در آن $\hat{\varepsilon}_t$، t امین مانده برای $t = k+1, k+2, \ldots, n$ است.

قضیه ۴.۱۶ *و*[۱۷۵] *فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مقادیر مشاهده شده نادقیق برحسب متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع نایقینی منظم $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ مشخص شده اند و مدل خودکاهنده برازش شده*

$$X_t = a_0^* + \sum_{i=1}^{k} a_i^* X_{t-i} \tag{۸۸.۱۶}$$

است. پس مقدار مورد انتظار برآورد شده از عبارت‌های اختلال با فرض همتوزیعی

$$\hat{e} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^{n} \int_0^1 \left(\Phi_t^{-1}(\alpha) - a_0^* - \sum_{i=1}^{k} a_i^* \Upsilon_{t-i}^{-1}(\alpha, a_i^*) \right) \mathrm{d}\alpha \tag{۸۹.۱۶}$$

است و پراش برآورد شده

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^{n} \int_0^1 \left(\Phi_t^{-1}(\alpha) - a_0^* - \sum_{i=1}^{k} a_i^* \Upsilon_{t-i}^{-1}(\alpha, a_i^*) - \hat{e} \right)^2 \mathrm{d}\alpha \tag{۹۰.۱۶}$$

است، که در آن برای $i = ۱, ۲, \ldots, k$،

$$\Upsilon_{t-i}^{-۱}(\alpha, a_i^*) = \begin{cases} \Phi_{t-i}^{-۱}(۱-\alpha), & a_i^* \geq ۰ \text{ اگر } \\ \Phi_{t-i}^{-۱}(\alpha), & a_i^* < ۰ \text{ اگر } \end{cases} \quad (۹۱.۱۶)$$

برهان: برای هر اندیس t، توزیع نایقینی معکوس متغیر نایقین

$$X_t - a_۰^* - \sum_{i=۱}^{k} a_i^* X_{t-i}$$

همان

$$F_t^{-۱}(\alpha) = \Phi_t^{-۱}(\alpha) - a_۰^* - \sum_{i=۱}^{k} a_i^* \Upsilon_{t-i}^{-۱}(\alpha, a_i^*)$$

است. از قضیه‌های ۲۵.۲ و ۴۴.۲ برقراری (۸۹.۱۶) و (۹۰.۱۶) نتیجه می‌شود.

مقدار پیش بینی

حال فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ مقادیر نادقیق مشاهده شده هستند که با متغیرهای نایقین مستقل با توزیع نایقینی منظم $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ مشخص شده اند. فرض کنید (۱) مدل خودکاهنده برازش شده

$$X_t = a_۰^* + \sum_{i=۱}^{k} a_i^* X_{t-i}, \quad (۹۲.۱۶)$$

است و (۲) عبارت اختلال $\varepsilon_{n+۱}$ مقدار انتظار $\hat{e}$ و پراش $\hat{\sigma}^۲$ دارد و مستقل از $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ است. یانگ‌ـ لیو [۱۷۵] پیشنهاد کردند که متغیر نایقین پیش بینی $X_{n+۱}$ براساس $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ را با

$$\hat{X}_{n+۱} = a_۰^* + \sum_{i=۱}^{k} a_i^* X_{n+۱-i} + \varepsilon_{n+۱}, \quad (۹۳.۱۶)$$

مشخص کنیم و مقدار پیش بینی به عنوان مقدار مورد انتظار متغیر نایقین پیش بینی $\hat{X}_{n+۱}$ تعریف شود، یعنی

$$\mu = a_۰^* + \sum_{i=۱}^{k} a_i^* E[X_{n+۱-i}] + \hat{e}. \quad (۹۴.۱۶)$$

بازه اطمینان

همچنین اگر فرض کنیم که عبارت اختلال $\varepsilon_{n+۱}$ از توزیع نایقینی نرمال پیروی کند، آنگاه توزیع نایقینی معکوس متغیر پیش بینی $\hat{X}_{n+۱}$

$$\hat{\Phi}_{n+۱}^{-۱}(\alpha) = a_۰^* + \sum_{i=۱}^{k} a_i^* \Upsilon_{n+۱-i}^{-۱}(\alpha, a_i^*) + \Phi^{-۱}(\alpha) \quad (۹۵.۱۶)$$

است، که در آن برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$،

$$\Upsilon^{-۱}_{n+۱-i}(\alpha, a_i^*) = \begin{cases} \Phi^{-۱}_{n+۱-i}(\alpha), & a_i^* \geq ۰ \text{ اگر } \\ \Phi^{-۱}_{n+۱-i}(۱-\alpha), & a_i^* < ۰ \text{ اگر } \end{cases} \tag{۹۶.۱۶}$$

و $\Phi^{-۱}(\alpha)$ توزیع نایقینی معکوس $\mathcal{N}(\hat{e}, \hat{\sigma})$ است، یعنی

$$\Phi^{-۱}(\alpha) = \hat{e} + \frac{\hat{\sigma}\sqrt{۳}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{۱-\alpha}. \tag{۹۷.۱۶}$$

بر اساس $\hat{\Phi}^{-۱}_{n+۱}$، توزیع نایقینی $\hat{\Phi}_{n+۱}$ برای $\hat{X}_{n+۱}$ را مشخص می‌کنیم. α را (به عنوان مثال ۹۵ درصد) سطح اطمینان بگیرید و کمترین مقدار b را چنان بیابید که

$$\hat{\Phi}_{n+۱}(\mu + b) - \hat{\Phi}_{n+۱}(\mu - b) \geq \alpha. \tag{۹۸.۱۶}$$

چون $\mathcal{M}\{\mu - b \leq \hat{X}_{n+۱} \leq \mu + b\} \geq \hat{\Phi}_{n+۱}(\mu + b) - \hat{\Phi}_{n+۱}(\mu - b) \geq \alpha$، یانگ‌ـ‌لیو [۱۷۵] α بازه اطمینان $[\mu - b, \mu + b]$ را برای $X_{n+۱}$ را پیشنهاد کردند که اغلب به اختصار

$$\mu \pm b \tag{۹۹.۱۶}$$

نوشته می‌شود.

تمرین ۱۰.۱۶: [۱۷۵] فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ مقادیر مشاهده شده نادقیق از متغیر نایقین مستقل و به ترتیب با توزیع نایقینی $\Phi_۱, \Phi_۲, \ldots, \Phi_n$ هستند. فرض کنید (۱) مدل خودکاهنده برازش شده

$$X_t = a_۰^* + \sum_{i=۱}^{k} a_i^* X_{t-i}, \tag{۱۰۰.۱۶}$$

است و (۲) عبارت اختلال $\varepsilon_{n+۱}$ از توزیع نایقینی خطی با مقدار مورد انتظار $\hat{e}$ و پراش $\hat{\sigma}^۲$ پیروی می‌کند و مستقل از $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ است. بازه اطمینان $X_{n+۱}$ متناظر با سطح اطمینان α چیست؟ (راهنمایی: متغیر نایقین خطی $\mathcal{L}(\hat{e} - \sqrt{۳}\hat{\sigma}, \hat{e} + \sqrt{۳}\hat{\sigma})$ مقدار مورد انتظار $\hat{e}$ و پراش $\hat{\sigma}^۲$ دارد.)

یک مثال عددی

فرض کنید ۲۰ مقدار کربن منتشر شده نادقیق $X_۱, X_۲, \cdots, X_{۲۰}$ که برحسب متغیرهای نایقین مستقل خطی مشخص شده اند، وجود دارند. به جدول ۲.۱۶ مراجعه کنید.

نشان می‌دهیم چگونه از تحلیل سری‌های نایقین برای پیش بینی انتشار کربن در سال ۲۱ ام استفاده می‌شود.

برای این پیش بینی، از مدل خودکاهنده نایقین مرتبه ۲

$$X_t = a_۰ + a_۱ X_{t-۱} + a_۲ X_{t-۲} + \varepsilon_t \tag{۱۰۱.۱۶}$$

استفاده می‌کنیم. با حل مسئله مینیمم سازی (۸۲.۱۶)، تقریب کمترین مربعات

$$(a_۰^*, a_۱^*, a_۲^*) = (۲۸/۴۷۱۵, ۰/۲۳۶۷, ۰/۷۰۱۸) \tag{۱۰۲.۱۶}$$

جدول ۲.۱۶: میزان نادقیق انتشار کربن در طی ۲۰ سال

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$\mathcal{L}(330, 341)$	$\mathcal{L}(333, 346)$	$\mathcal{L}(335, 347)$	$\mathcal{L}(338, 350)$	$\mathcal{L}(340, 354)$
X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
$\mathcal{L}(343, 359)$	$\mathcal{L}(344, 364)$	$\mathcal{L}(346, 366)$	$\mathcal{L}(350, 366)$	$\mathcal{L}(355, 369)$
X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}
$\mathcal{L}(360, 372)$	$\mathcal{L}(362, 376)$	$\mathcal{L}(365, 381)$	$\mathcal{L}(370, 384)$	$\mathcal{L}(373, 390)$
X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}
$\mathcal{L}(379, 391)$	$\mathcal{L}(380, 398)$	$\mathcal{L}(384, 402)$	$\mathcal{L}(388, 410)$	$\mathcal{L}(390, 415)$

را مشخص می‌کنیم. بنابراین مدل خودکاهنده برازش شده

$$X_t = 28/4715 + 0/2367X_{t-1} + 0/7018X_{t-2} \tag{103.16}$$

است. با استفاده از فرمول‌های (۸۹.۱۶) و (۹۰.۱۶)، مقدار مورد انتظار و پراش عبارت اختلال ε_{21} به ترتیب

$$\hat{e} = 0/0000, \quad \hat{\sigma}^2 = 84/7422, \tag{104.16}$$

هستند. وقتی عبارت اختلال ε_{21} مستقل از X_{20} و X_{19} فرض شود، با محاسبه فرمول (۹۴.۱۶)، مقدار پیش بینی شده انتشار کربن سال ۲۱ ام (یعنی X_{21})

$$\mu = 403/7361 \tag{105.16}$$

است. با در نظر گرفتن سطح اطمینان $\alpha = 95\%$، و با فرض اینکه عبارت اختلال ε_{21} از توزیع نایقینی نرمال پیروی کند،

$$b = 28/7376 \tag{106.16}$$

کمترین مقدار که رابطه (۹۸.۱۶) برقرار باشد را می‌گیرد. بنابراین، بازه اطمینان انتشار کربن در سال ۲۱ ام (یعنی X_{21}) متناظر با سطح اطمینان ٪۹۵

$$403/7361 \pm 28/7376 \tag{107.16}$$

است.

تمرین ۱۱.۱۶: فرض کنید عبارت اختلال ε_{21} در این مثال از توزیع نایقینی خطی پیروی کند. بازه اطمینان میزان انتشار کربن در سال ۲۱ام (یعنی X_{21}) متناظر با سطح اطمینان ٪۹۵ چیست؟

۹.۱۶ نکات کتابشناسی

مطالعه آمار نایقین توسط لیو [۹۱] در سال ۲۰۱۰ آغاز شد و در آن یک نظرسنجی برای جمع آوری اطلاعات تجربی کارشناس طراحی شد. علاوه بر سایرین، چن–رالسکو [۱۲] نشان دادند که نظرسنجی می‌تواند به طور موفقیت آمیزی داده‌های تجربی کارشناس را بیان کند.

در آمار نایقین پارامتری فرض می‌شود که توزیع نایقینی تعیین شده به شکل یک تابعک معلوم با پارامترهای نامعلوم است. برای برآورد پارامترهای نامعلوم، لیو [۹۱] اصل کمترین مربعات، و وانگ ـ پنگ [۱۶۳] روش گشتاوری را پیشنهاد کردند. آمار نایقینی ناپارامتری بر روی داده‌های تجربی کارشناس که متعلق به توزیع نایقینی خاصی است، تکیه نمی‌کند. برای تعیین توزیع نایقینی، لیو [۹۱] روش درونیابی خطی (یعنی توزیع نایقینی تجربی) را معرفی کرد و چن ـ رالسکو [۱۲] یک سری از روش‌های درونیابی تکه‌ای را پیشنهاد کردند. زمانی که چند کارشناس حوزه وجود دارند، وانگ ـ گائو ـ گوا [۱۶۱] روش دلفی را به عنوان فرایندی برای تعیین توزیع‌های نایقین در نظر گرفتند.

برای تعیین توابع عضویت، یک نظرسنجی برای جمع آوری داده‌های تجربی کارشناس توسط لیو [۹۲] طراحی شد. بر اساس داده‌های تجربی کارشناس، لیو [۹۲] همچنین روش درونیابی خطی و اصل کمترین مربعات را برای تعیین توابع عضویت پیشنهاد کرد. هنگامی که چند کارشناس حوزه در دسترس هستند، روش دلفی برای آمار نایقین، توسط گائو ـ ونگ ـ ونگ ـ چن [۵۸] معرفی شد.

تحلیل رگرسیون نایقینی برای مدل سازی رابطه بین متغیرهای توصیفی و متغیرهای پاسخ، زمانی که مشاهدات نادقیق هستند، برحسب متغیرهای نایقین مشخص می‌شود. برای این موضوع، گائو ـ لیو [۱۹۸] اصل کمترین مربعات را برای برآورد پارامترهای نامعلوم در مدل‌های خودکاهنده پیشنهاد کردند. لی‌او ـ لیو [۸۱] تحلیل مانده‌ها و بازه اطمینان مقادیر پیش بینی شده را انجام دادند.

تحلیل سری زمانی نایقین توسط یانگ ـ لیو [۱۷۵] برای پیش بینی مقادیر آینده، بر اساس مشاهدات نادقیق که برحسب متغیرهای نایقین مشخص می‌شوند، طرح شد.

پیوست آ

نظریه شانس

نایقینی و تصادفی بودن دو نوع اساسی عدم اطمینان هستند. متغیر تصادفی نایقین اولین بار توسط لیو [۱۱۳] در سال ۲۰۱۳ برای مدل بندی سیستم‌های پیچیده که علاوه بر نایقینی، تصادفی نیز هستند، پایه گذاری شد. این پیوست مفاهیم اندازه شانس، متغیر تصادفی نایقین، توزیع شانس، قاعده عملیاتی، مقدار مورد انتظار، واریانس و قانون اعداد بزرگ را مطرح می‌کند. این پیوست همچنین روش حل مساله انتخاب در آزمایش اِلسبِرگ را با استفاده از نظریه شانس بیان می‌کند. سرانجام، برنامه‌ریزی تصادفی نایقین، تحلیل ریسک تصادفی نایقین، تحلیل اطمینان‌پذیری تصادفی نایقین، گراف تصادفی نایقین، شبکه تصادفی نایقین و فرایند تصادفی نایقین را مطرح می‌کند.

آ.۱ اندازه شانس

فرض کنید $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ یک فضای نایقینی و $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ یک فضای احتمال است. در این صورت حاصلضرب $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}) \times (\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ فضای شانس نامیده می‌شود. اساساً فضای شانس یک سه تایی به صورت

$$(\Gamma \times \Omega, \mathcal{L} \times \mathcal{A}, \mathcal{M} \times \Pr) \tag{آ.۱}$$

است که در آن $\Gamma \times \Omega$ مجموعه جهانی، $\mathcal{L} \times \mathcal{A}$ یک σـ جبر ضربی و $\mathcal{M} \times \Pr$ یک اندازه ضربی است.

واضح است که مجموعه جهانی $\Gamma \times \Omega$ مجموعه همه جفت‌های مرتب به شکل (γ, ω) است که در آن $\gamma \in \Gamma$ و $\omega \in \Omega$. یعنی

$$\Gamma \times \Omega = \{(\gamma, \omega) \mid \gamma \in \Gamma, \omega \in \Omega\}. \tag{آ.۲}$$

توجه کنید که $\Gamma \times \Omega$ را می‌توان به عنوان یک سیستم مختصات مستطیلی فرض کرد که در آن Γ محور مختصات افقی آن و Ω محور مختصات عمودی آن است.

σـ جبر ضربی $\mathcal{L} \times \mathcal{A}$ کوچک‌ترین σـ جبری است که شامل مستطیل‌های اندازه‌پذیر به شکل $\Lambda \times A$ است که در آن $\Lambda \in \mathcal{L}$ و $A \in \mathcal{A}$. هر عضو در $\mathcal{L} \times \mathcal{A}$ یک **رویداد** در فضای شانس نامیده می‌شود. اندازه ضربی $\mathcal{M} \times \Pr$ برای رویداد Θ چیست؟ ما $\mathcal{M} \times \Pr$ را اندازه شانس گوییم و آن را با $\mathrm{Ch}\{\Theta\}$ نشان خواهیم داد.

تعریف آ.۱ *(لیو[۱۱۳]) فرض کنید* $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})\times(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ *یک فضای شانس و* $\Theta\in\mathcal{L}\times\mathcal{A}$ *یک رویداد است. در این صورت اندازه شانس* Θ *به صورت*

$$\mathrm{Ch}\{\Theta\}=\int_{0}^{1}\Pr\left\{\omega\in\Omega\,|\,\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Theta\}\geq x\right\}\mathrm{d}x \qquad (\text{آ.۳})$$

تعریف می‌شود.

نکته آ.۱: توجه کنید که $\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Theta\}$ یک اندازه نایقین از برش Θ در ω است. چون $\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Theta\}$ را می‌توان به عنوان یک تابع از فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ به $[0,1]$ در نظر گرفت، پس یک متغیر تصادفی است. بنابراین، اندازه شانس $\mathrm{Ch}\{\Theta\}$ همان مقدار مورد انتظار (یعنی میانگین) این متغیر تصادفی است.

تمرین آ.۱: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})$ بازه $[0,1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است و فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ نیز بازه $[0,1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. پس

$$\Theta=\{(\gamma,\omega)\in\Gamma\times\Omega\,|\,\gamma+\omega\leq 1\} \qquad (\text{آ.۴})$$

یک رویداد در فضای شانس $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})\times(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ است. نشان دهید

$$\mathrm{Ch}\{\Theta\}=\frac{1}{2}. \qquad (\text{آ.۵})$$

تمرین آ.۲: فرض کنید فضای نایقینی $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})$ بازه $[0,1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است و فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ نیز بازه $[0,1]$ با جبر بورل و اندازه لبگ است. پس

$$\Theta=\left\{(\gamma,\omega)\in\Gamma\times\Omega\,|\,(\gamma-0.5)^2+(\omega-0.5)^2\leq 0.5^2\right\} \qquad (\text{آ.۶})$$

یک رویداد در فضای شانس $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})\times(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ است. نشان دهید

$$\mathrm{Ch}\{\Theta\}=\frac{\pi}{4}. \qquad (\text{آ.۷})$$

قضیه آ.۱ *[۱۱۳] فرض کنید* $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})\times(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ *یک فضای شانس است. پس برای هر* $\Lambda\in\mathcal{L}$ *و هر* $A\in\mathcal{A}$ *داریم*

$$\mathrm{Ch}\{\Lambda\times A\}=\mathcal{M}\{\Lambda\}\times\Pr\{A\}. \qquad (\text{آ.۸})$$

همچنین داریم

$$\mathrm{Ch}\{\varnothing\}=0,\quad \mathrm{Ch}\{\Gamma\times\Omega\}=1. \qquad (\text{آ.۹})$$

برهان: ابتدا برابری (آ.۸) را ثابت می‌کنیم. برای هر عدد حقیقی $x\in(0,1]$، اگر $\mathcal{M}\{\Lambda\}\geq x$، آنگاه

$$\Pr\left\{\omega\in\Omega\,|\,\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Lambda\times A\}\geq x\right\}=\Pr\{A\}.$$

اگر $\mathcal{M}\{\Lambda\}<x$، آنگاه

$$\Pr\left\{\omega\in\Omega\,|\,\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Lambda\times A\}\geq x\right\}=\Pr\{\varnothing\}=0.$$

پس

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}\{\Lambda\times A\} &= \int_{\circ}^{\backprime} \Pr\{\omega\in\Omega\,|\,\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Lambda\times A\}\ge x\}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\circ}^{\mathcal{M}\{\Lambda\}}\Pr\{A\}\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{M}\{\Lambda\}}^{\backprime}\circ\,\mathrm{d}x\\ &= \mathcal{M}\{\Lambda\}\times\Pr\{A\}.\end{aligned}$$

همچنین از (آ.۸) نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Ch}\{\varnothing\}=\mathcal{M}\{\varnothing\}\times\Pr\{\varnothing\}=\circ,$$

$$\mathrm{Ch}\{\Gamma\times\Omega\}=\mathcal{M}\{\Gamma\}\times\Pr\{\Omega\}=\backprime.$$

درستی قضیه نتیجه می‌شود.

قضیه آ.۲ ([۱۱۳]، *قضیه یکنوایی) اندازه شانس یک تابع یک مجموعه افزایشی یکنوا است. یعنی برای رویدادهای $\Theta_۱$ و $\Theta_۲$ با $\Theta_۱\subset\Theta_۲$ داریم*

$$\mathrm{Ch}\{\Theta_۱\}\le\mathrm{Ch}\{\Theta_۲\}. \tag{آ.۱۰}$$

برهان: چون $\Theta_۱$ و $\Theta_۲$ با $\Theta_۱\subset\Theta_۲$ هستند، برای هر ω داریم

$$\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Theta_۱\}\subset\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Theta_۲\}$$

و

$$\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Theta_۱\}\le\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Theta_۲\}.$$

پس

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}\{\Theta_۱\} &= \int_{\circ}^{\backprime}\Pr\{\omega\in\Omega\,|\,\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Theta_۱\}\ge x\}\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_{\circ}^{\backprime}\Pr\{\omega\in\Omega\,|\,\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma\,|\,(\gamma,\omega)\in\Theta_۲\}\ge x\}\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{Ch}\{\Theta_۲\}.\end{aligned}$$

یعنی $\mathrm{Ch}\{\Theta\}$ یک تابع افزایشی یکنوا نسبت به Θ است. به این ترتیب قضیه ثابت شد.

قضیه آ.۳ ([۱۱۳]، *قضیه دوگانی) اندازه شانس خودــ دوگان است. یعنی برای هر رویداد Θ داریم*

$$\mathrm{Ch}\{\Theta\}+\mathrm{Ch}\{\Theta^c\}=\backprime. \tag{آ.۱۱}$$

برهان: چون هر دو اندازه شانس و اندازه احتمال خودـ دوگان هستند، داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}\{\Theta\} &= \int_{۰}^{۱} \Pr\{\omega\in\Omega \,|\, \mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma \,|\, (\gamma,\omega)\in\Theta\}\geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{۰}^{۱} \Pr\{\omega\in\Omega \,|\, \mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma \,|\, (\gamma,\omega)\in\Theta^c\}\leq ۱-x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{۰}^{۱} (۱-\Pr\{\omega\in\Omega \,|\, \mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma \,|\, (\gamma,\omega)\in\Theta^c\}> ۱-x\})\,\mathrm{d}x \\
&= ۱-\int_{۰}^{۱} \Pr\{\omega\in\Omega \,|\, \mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma \,|\, (\gamma,\omega)\in\Theta^c\}> x\}\,\mathrm{d}x \\
&= ۱-\mathrm{Ch}\{\Theta^c\}.
\end{aligned}$$

یعنی $\mathrm{Ch}\{\Theta\}+\mathrm{Ch}\{\Theta^c\}=۱$. پس اندازه شانس خودـ دوگان است.

قضیه آ.۴ ([۶۱]، قضیه زیرجمعی بودن) *اندازه شانس زیرجمعی است. یعنی برای دنباله شمارا از رویدادهای* $\Theta_۱,\Theta_۲,\ldots$ *، داریم*

$$\mathrm{Ch}\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty}\Theta_i\right\}\leq\sum_{i=۱}^{\infty}\mathrm{Ch}\{\Theta_i\}. \tag{آ.۱۲}$$

برهان: ابتدا، از زیرجمعی بودن اندازه نایقین نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\left\{\gamma\in\Gamma \,|\, (\gamma,\omega)\in\bigcup_{i=۱}^{\infty}\Theta_i\right\}\leq\sum_{i=۱}^{\infty}\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma \,|\, (\gamma,\omega)\in\Theta_i\}.$$

پس

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty}\Theta_i\right\} &= \int_{۰}^{۱}\Pr\left\{\omega\in\Omega \,|\, \mathcal{M}\left\{\gamma\in\Gamma \,|\, (\gamma,\omega)\in\bigcup_{i=۱}^{\infty}\Theta_i\right\}\geq x\right\}\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{۰}^{+\infty}\Pr\left\{\omega\in\Omega \,|\, \sum_{i=۱}^{\infty}\mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma \,|\, (\gamma,\omega)\in\Theta_i\}\geq x\right\}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=۱}^{\infty}\int_{۰}^{۱}\Pr\{\omega\in\Omega \,|\, \mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma \,|\, (\gamma,\omega)\in\Theta_i\}\geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=۱}^{\infty}\mathrm{Ch}\{\Theta_i\}.
\end{aligned}$$

یعنی اندازه شانس زیرجمعی است.

آ.۲ متغیر تصادفی نایقین

تعریف آ.۲ [۱۱۳] *یک متغیر تصادفی نایقین یک تابع مانند* ξ *از فضای شانس*

$$(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})\times(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$$

به مجموعه اعداد حقیقی است طوری که $\{\xi \in B\}$ *برای هر مجموعه بورل* B *از اعداد حقیقی یک رویداد در* $\mathcal{L} \times \mathcal{A}$ *است.*

نکته آ.۲: متغیر تصادفی نایقین $\xi(\gamma, \omega)$ به یک متغیر تصادفی تباهیده است اگر نسبت به γ تغییر نکند. پس متغیر تصادفی یک متغیر تصادفی نایقین خاص است.

نکته آ.۳: متغیر تصادفی نایقین $\xi(\gamma, \omega)$ به یک متغیر نایقین تباهیده است اگر نسبت به ω تغییر نکند. پس متغیر نایقین یک متغیر تصادفی نایقین خاص است.

قضیه آ.۵ *فرض کنید* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *متغیرهای تصادفی نایقین روی فضای شانس* $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}) \times (\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ *و* f *یک تابع اندازه‌پذیر است. پس*

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \tag{آ.۱۳}$$

یک متغیر تصادفی نایقین است که برای هر $(\gamma, \omega) \in \Gamma \times \Omega$ *با*

$$\xi(\gamma, \omega) = f(\xi_1(\gamma, \omega), \xi_2(\gamma, \omega), \ldots, \xi_n(\gamma, \omega)) \tag{آ.۱۴}$$

مشخص می‌شود.

برهان: چون $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای تصادفی نایقین هستند، پس روی فضای شانس تابع‌های اندازه پذیر هستند، و $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ نیز یک تابع اندازه‌پذیر است. پس ξ یک متغیر تصادفی نایقین است.

مثال آ.۱: جمع یک متغیر تصادفی η و یک متغیر نایقین τ، متغیر تصادفی نایقین ξ را ایجاد می‌کند، یعنی برای هر $(\gamma, \omega) \in \Gamma \times \Omega$

$$\xi(\gamma, \omega) = \eta(\omega) + \tau(\gamma). \tag{آ.۱۵}$$

مثال آ.۲: ضرب یک متغیر تصادفی η در یک متغیر نایقین τ یک متغیر تصادفی نایقین ξ به وجود می‌آورد، یعنی برای هر $(\gamma, \omega) \in \Gamma \times \Omega$

$$\xi(\gamma, \omega) = \eta(\omega) \cdot \tau(\gamma). \tag{آ.۱۶}$$

قضیه آ.۶ [۱۱۳] *فرض کنید* ξ *یک متغیر تصادفی نایقین روی فضای شانس*

$$(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}) \times (\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$$

و B *یک مجموعه بورل از اعداد حقیقی است. پس* $\{\xi \in B\}$ *یک رویداد تصادفی نایقین با اندازه شانس*

$$\mathrm{Ch}\{\xi \in B\} = \int_0^1 \Pr\left\{\omega \in \Omega \,|\, \mathcal{M}\{\gamma \in \Gamma \,|\, \xi(\gamma, \omega) \in B\} \geq x\right\} \mathrm{d}x \tag{آ.۱۷}$$

است.

برهان: چون $\{\xi \in B\}$ یک رویداد در فضای شانس است، معادله (آ.۱۷) مستقیماً از تعریف آ.۱ نتیجه می‌شود.

نکته آ.۴: اگر متغیر تصادفی شانس به یک متغیر تصادفی η تباهیده باشد، آنگاه

$$\mathrm{Ch}\{\eta \in B\} = \mathrm{Ch}\{\Gamma \times (\eta \in B)\} = \mathcal{M}\{\Gamma\} \times \mathrm{Pr}\{\eta \in B\} = \mathrm{Pr}\{\eta \in B\}.$$

یعنی

$$\mathrm{Ch}\{\eta \in B\} = \mathrm{Pr}\{\eta \in B\}. \tag{آ.۱۸}$$

نکته آ.۵: اگر متغیر تصادفی نایقین به یک متغیر نایقین τ تباهید باشد، آنگاه

$$\mathrm{Ch}\{\tau \in B\} = \mathrm{Ch}\{(\tau \in B) \times \Omega\} = \mathcal{M}\{\tau \in B\} \times \mathrm{Pr}\{\Omega\} = \mathcal{M}\{\tau \in B\}.$$

یعنی

$$\mathrm{Ch}\{\tau \in B\} = \mathcal{M}\{\tau \in B\}. \tag{آ.۱۹}$$

قضیه آ.۷ [۱۱۳] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین است. پس اندازه شانس $\mathrm{Ch}\{\xi \in B\}$ یک تابع افزایشی یکنوا از B است و*

$$\mathrm{Ch}\{\xi \in \varnothing\} = ۰, \quad \mathrm{Ch}\{\xi \in \Re\} = ۱. \tag{آ.۲۰}$$

برهان: فرض کنید $B_۱$ و $B_۲$ دو مجموعه بورل از اعداد حقیقی با خاصیت $B_۱ \subset B_۲$ هستند. پس، مستقیماً داریم $\{\xi \in B_۱\} \subset \{\xi \in B_۲\}$. از یکنوایی اندازه شانس نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Ch}\{\xi \in B_۱\} \le \mathrm{Ch}\{\xi \in B_۲\}.$$

پس $\mathrm{Ch}\{\xi \in B\}$ یک تابع افزایشی یکنوا از B است. همچنین داریم

$$\mathrm{Ch}\{\xi \in \varnothing\} = \mathrm{Ch}\{\varnothing\} = ۰,$$

$$\mathrm{Ch}\{\xi \in \Re\} = \mathrm{Ch}\{\Gamma \times \Omega\} = ۱.$$

قضیه ثابت شد.

قضیه آ.۸ [۱۱۳] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین است. پس برای هر مجموعه بورل از اعداد حقیقی داریم*

$$\mathrm{Ch}\{\xi \in B\} + \mathrm{Ch}\{\xi \in B^c\} = ۱. \tag{آ.۲۱}$$

برهان: از $\{\xi \in B\}^c = \{\xi \in B^c\}$ و دوگانی اندازه شانس مستقیماً نتیجه می‌شود.

آ.۳ توزیع شانس

تعریف آ.۳ [۱۱۳] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین است. توزیع شانس آن برای هر $x \in \Re$ با*

$$\Phi(x) = \mathrm{Ch}\{\xi \le x\} \tag{آ.۲۲}$$

تعریف می‌شود.

مثال آ.۳: به عنوان یک متغیر تصادفی نایقین، توزیع شانس متغیر تصادفی η همان توزیع احتمال آن است، یعنی

$$\Phi(x) = \mathrm{Ch}\{\eta \le x\} = \Pr\{\eta \le x\}. \tag{آ.۲۳}$$

مثال آ.۴: به عنوان یک متغیر تصادفی نایقین، توزیع شانس متغیر نایقین τ همان توزیع نایقینی آن است، یعنی

$$\Phi(x) = \mathrm{Ch}\{\tau \le x\} = \mathcal{M}\{\tau \le x\}. \tag{آ.۲۴}$$

قضیه آ.۹ ([۱۱۳]، *شرط لازم و کافی برای توزیع شانس*) *یک تابع $\Phi : \Re \to [۰, ۱]$ یک توزیع شانس است اگر و تنها اگر یک تابع افزایشی یکنوا به جز در $\Phi(x) \equiv ۰$ و $\Phi(x) \equiv ۱$ باشد.*

برهان: فرض کنید Φ توزیع شانس متغیر تصادفی نایقین ξ است. فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ دو عدد حقیقی با خاصیت $x_۱ < x_۲$ هستند. از قضیه آ.۷ نتیجه می‌شود که

$$\Phi(x_۱) = \mathrm{Ch}\{\xi \le x_۱\} \le \mathrm{Ch}\{\xi \le x_۲\} = \Phi(x_۲).$$

پس توزیع شانس Φ یک تابع افزایشی یکنوا است. علاوه بر این، اگر $\Phi(x) \equiv ۰$، آنگاه

$$\int_۰^۱ \Pr\{\omega \in \Omega \,|\, \mathcal{M}\{\gamma \in \Gamma \,|\, \xi(\gamma, \omega) \le x\} \ge r\}\, \mathrm{d}r \equiv ۰.$$

پس برای تقریباً هر $\omega \in \Omega$ داریم

$$\mathcal{M}\{\gamma \in \Gamma \,|\, \xi(\gamma, \omega) \le x\} \equiv ۰, \quad \forall x \in \Re$$

که این با قضیه مجانبی متناقض است، و به این ترتیب برقراری $\Phi(x) \not\equiv ۰$ بررسی شد. به طور مشابه، اگر $\Phi(x) \equiv ۱$، آنگاه

$$\int_۰^۱ \Pr\{\omega \in \Omega \,|\, \mathcal{M}\{\gamma \in \Gamma \,|\, \xi(\gamma, \omega) \le x\} \ge r\}\, \mathrm{d}r \equiv ۱.$$

پس برای تقریباً هر $\omega \in \Omega$ داریم

$$\mathcal{M}\{\gamma \in \Gamma \,|\, \xi(\gamma, \omega) \le x\} \equiv ۱, \quad \forall x \in \Re$$

که این با قضیه مجانبی متناقض است، و به این ترتیب $\Phi(x) \not\equiv ۱$ ثابت شد.
برعکس، فرض کنید $\Phi : \Re \to [۰, ۱]$ یک تابع افزایشی یکنوا است و $\Phi(x) \not\equiv ۰$ و $\Phi(x) \not\equiv ۱$. از قضیه پنگـ ایوامورا نتیجه می‌شود که یک متغیر نایقین وجود دارد که توزیع نایقینی آن $\Phi(x)$ است. چون هر متغیر نایقین یک متغیر تصادفی نایقین خاص است، پس Φ یک توزیع شانس است.

قضیه آ.۱۰ ([۱۱۳]، قضیه معکوس شانس) *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین با توزیع شانس Φ است. پس برای هر عدد حقیقی x داریم*

$$\mathrm{Ch}\{\xi \le x\} = \Phi(x), \quad \mathrm{Ch}\{\xi > x\} = 1 - \Phi(x). \tag{آ.۲۵}$$

برهان: معادله $\mathrm{Ch}\{\xi \le x\} = \Phi(x)$ مستقیماً از تعریف توزیع شانس نتیجه می‌شود. با استفاده از دوگانی اندازه شانس نتیجه می‌گیریم.

$$\mathrm{Ch}\{\xi > x\} = 1 - \mathrm{Ch}\{\xi \le x\} = 1 - \Phi(x).$$

نکته آ.۶: وقتی توزیع شانس Φ یک تابع پیوسته است، همچنین داریم

$$\mathrm{Ch}\{\xi < x\} = \Phi(x), \quad \mathrm{Ch}\{\xi \ge x\} = 1 - \Phi(x). \tag{آ.۲۶}$$

آ.۴ قانون عملیاتی

فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های احتمال $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ هستند. همچنین $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل با توزیع نایقینی $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. توزیع شانس متغیر تصادفی نایقین

$$\xi = f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \tag{آ.۲۷}$$

چیست؟
این بخش قانون عملیاتی برای پاسخ به این سوال را فراهم می‌کند.

قضیه آ.۱۱ [۱۱۴] *فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ هستند. همچنین فرض کنید $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع نایقینی $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. اگر f تابع اندازه‌پذیر باشد، آنگاه متغیر تصادفی نایقین*

$$\xi = f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \tag{آ.۲۸}$$

توزیع شانس به صورت

$$\Phi(x) = \int_{\Re^m} F(x; y_1, y_2, \ldots, y_m) \mathrm{d}\Psi_1(y_1) \mathrm{d}\Psi_2(y_2) \ldots \mathrm{d}\Psi_m(y_m) \tag{آ.۲۹}$$

دارد که در آن

$$F(x; y_1, y_2, \ldots, y_m) = \mathcal{M}\{f(y_1, y_2, \ldots, y_m, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \le x\} \tag{آ.۳۰}$$

توزیع نایقینی $f(y_1, y_2, \ldots, y_m, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ برای اعداد حقیقی $y_1, y_2, \ldots, y_m$ است و با $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_n$ مشخص می‌شود.

برهان: از قضیه آ.۶ نتیجه می‌شود که متغیر تصادفی نایقین ξ توزیع شانس به صورت

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_0^1 \Pr\{\omega\in\Omega \mid \mathcal{M}\{\gamma\in\Gamma \mid \xi(\gamma,\omega)\le x\}\ge r\}\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^1 \Pr\{\omega\in\Omega \mid \mathcal{M}\{f(\eta_1(\omega),\ldots,\eta_m(\omega),\tau_1,\ldots,\tau_n)\le x\}\ge r\}\,\mathrm{d}r\\ &= \int_{\Re^m}\mathcal{M}\{f(y_1,y_2,\ldots,y_m,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)\le x\}\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m)\\ &= \int_{\Re^m} F(x;y_1,y_2,\ldots,y_m)\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m)\end{aligned}$$

دارد. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین آ.۳: فرض کنید $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_m$ و $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$ و $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_1,\Upsilon_2,\ldots,\Upsilon_n$ هستند. نشان دهید مجموع

$$\xi=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_m+\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n \tag{آ.۳۱}$$

توزیع شانس

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Upsilon(x-y)\mathrm{d}\Psi(y) \tag{آ.۳۲}$$

دارد که در آن

$$\Psi(y)=\int_{y_1+y_2+\cdots+y_m\le y}\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m) \tag{آ.۳۳}$$

توزیع احتمال $\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_m$، است و

$$\Upsilon(z)=\sup_{z_1+z_2+\cdots+z_n=z}\Upsilon_1(z_1)\wedge\Upsilon_2(z_2)\wedge\ldots\wedge\Upsilon_n(z_n) \tag{آ.۳۴}$$

توزیع نایقینی $\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n$ است.

تمرین آ.۴: فرض کنید $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل مثبت به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_m$ و $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$ و $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل مثبت با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_1,\Upsilon_2,\ldots,\Upsilon_n$ هستند. نشان دهید حاصلضرب

$$\xi=\eta_1\eta_2\ldots\eta_m\tau_1\tau_2\ldots\tau_n \tag{آ.۳۵}$$

توزیع شانس

$$\Phi(x)=\int_0^{+\infty}\Upsilon(x/y)\mathrm{d}\Psi(y) \tag{آ.۳۶}$$

دارد که در آن

$$\Psi(y) = \int_{y_۱ y_۲ \ldots y_m \le y} \mathrm{d}\Psi_۱(y_۱)\mathrm{d}\Psi_۲(y_۲)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m) \qquad (\text{آ.۳۷})$$

توزیع احتمال $\eta_۱\eta_۲\ldots\eta_m$، و

$$\Upsilon(z) = \sup_{z_۱ z_۲ \ldots z_n = z} \Upsilon_۱(z_۱) \wedge \Upsilon_۲(z_۲) \wedge \ldots \wedge \Upsilon_n(z_n) \qquad (\text{آ.۳۸})$$

توزیع نایقینی $\tau_۱\tau_۲\ldots\tau_n$ است.

تمرین آ.۵: فرض کنید $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_۱, \Psi_۲, \ldots, \Psi_m$ و $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ و $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_۱, \Upsilon_۲, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. نشان دهید کمینه

$$\xi = \eta_۱ \wedge \eta_۲ \wedge \ldots \wedge \eta_m \wedge \tau_۱ \wedge \tau_۲ \wedge \ldots \wedge \tau_n \qquad (\text{آ.۳۹})$$

توزیع شانس

$$\Phi(x) = \Psi(x) + \Upsilon(x) - \Psi(x)\Upsilon(x) \qquad (\text{آ.۴۰})$$

دارد که در آن

$$\Psi(x) = ۱ - (۱ - \Psi_۱(x))(۱ - \Psi_۲(x))\ldots(۱ - \Psi_m(x)) \qquad (\text{آ.۴۱})$$

توزیع احتمال $\eta_۱ \wedge \eta_۲ \wedge \ldots \wedge \eta_m$، و

$$\Upsilon(x) = \Upsilon_۱(x) \vee \Upsilon_۲(x) \vee \ldots \vee \Upsilon_n(x) \qquad (\text{آ.۴۲})$$

توزیع نایقینی $\tau_۱ \wedge \tau_۲ \wedge \ldots \wedge \tau_n$ است.

تمرین آ.۶: فرض کنید $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_۱, \Psi_۲, \ldots, \Psi_m$ و $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ و $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_۱, \Upsilon_۲, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. نشان دهید بیشینه

$$\xi = \eta_۱ \vee \eta_۲ \vee \ldots \vee \eta_m \vee \tau_۱ \vee \tau_۲ \vee \ldots \vee \tau_n \qquad (\text{آ.۴۳})$$

توزیع شانس

$$\Phi(x) = \Psi(x)\Upsilon(x) \qquad (\text{آ.۴۴})$$

دارد که در آن

$$\Psi(x) = \Psi_۱(x)\Psi_۲(x)\ldots\Psi_m(x) \qquad (\text{آ.۴۵})$$

توزیع احتمال $\eta_۱ \vee \eta_۲ \vee \ldots \vee \eta_m$، و

$$\Upsilon(x) = \Upsilon_۱(x) \wedge \Upsilon_۲(x) \wedge \ldots \wedge \Upsilon_n(x) \qquad (\text{آ.۴۶})$$

توزیع شانس $\tau_۱ \vee \tau_۲ \vee \ldots \vee \tau_n$ است.

قضیه آ.۱۲ [۱۱۴] *فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ و $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین منظم به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. فرض کنید $f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ افزایشی اکید نسبت به $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ و کاهشی اکید نسبت به $\tau_{k+1}, \tau_{k+2}, \ldots, \tau_n$ است. پس متغیر تصادفی نایقین*

$$\xi = f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \qquad \text{(آ.۴۷)}$$

توزیع شانس

$$\Phi(x) = \int_{\Re^m} F(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m) \qquad \text{(آ.۴۸)}$$

دارد که در آن $F(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ریشه α معادله

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_m, \Upsilon_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Upsilon_k^{-1}(\alpha), \Upsilon_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-1}(1-\alpha)) = x$$

است.

برهان: چون $F(x; y_1, y_2, \ldots, y_m) = \mathcal{M}\{f(y_1, y_2, \ldots, y_m, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \le x\}$ همان ریشه α معادله

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_m, \Upsilon_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Upsilon_k^{-1}(\alpha), \Upsilon_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-1}(1-\alpha)) = x,$$

است، نتیجه از قضیه آ.۱۱ حاصل می‌شود.

ترتیب آماری

تعریف آ.۴ ([۴۲]، *آماره ترتیب*) *فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای تصادفی نایقین هستند و k یک اندیس با $1 \le k \le n$ است.*

$$\xi = k\text{-}\min[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] \qquad \text{(آ.۴۹)}$$

آماره ترتیب kام $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ نامیده می‌شود.

قضیه آ.۱۳ [۴۲] *فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ و $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. اگر $f_1, f_2, \ldots, f_n$ تابع‌های افزایشی اکید و پیوسته باشند، آنگاه آماره ترتیب k ام*

$$f_1(\eta_1, \tau_1), f_2(\eta_2, \tau_2), \ldots, f_n(\eta_n, \tau_n)$$

توزیع شانس

$$\Phi(x) = \int_{\Re^n} k\text{-}\max\begin{bmatrix} \sup\limits_{f_1(y_1, z_1)=x} \Upsilon_1(z_1) \\ \sup\limits_{f_2(y_2, z_2)=x} \Upsilon_2(z_2) \\ \cdots \\ \sup\limits_{f_n(y_n, z_n)=x} \Upsilon_n(z_n) \end{bmatrix} \mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2)\ldots\mathrm{d}\Psi_n(y_n)$$

دارد.

برهان: برای هر اندیس i و هر عدد حقیقی y_i، چون f_i یک تابع افزایشی اکید است، متغیر نایقین $f_i(y_i, \tau_i)$ توزیع نایقینی

$$F_i(x; y_i) = \sup_{f_i(y_i, z_i)=x} \Upsilon_i(z_i)$$

دارد. قضیه ۱۷.۲ بیان می‌کند که k امین آماره ترتیب $f_1(y_1, \tau_1), f_2(y_2, \tau_2), \dots, f_n(y_n, \tau_n)$ توزیع نایقینی

$$F(x; y_1, y_2, \dots, y_n) = k\text{-}\max\left[\sup_{f_1(y_1, z_1)=x} \Upsilon_1(z_1), \dots, \sup_{f_n(y_n, z_n)=x} \Upsilon_n(z_n)\right]$$

دارد. به این ترتیب قضیه مستقیماً از قانون عملیاتی متغیرهای تصادفی نایقین نتیجه می‌شود.

تمرین آ.۷: فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m$ و همچنین، $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_n$ هستند. فرض کنید $f_1, f_2, \dots, f_n$ تابع‌های کاهشی اکید و پیوسته هستند. نشان دهید آماره ترتیب k ام $f_1(\eta_1, \tau_1), f_2(\eta_2, \tau_2), \dots, f_n(\eta_n, \tau_n)$ توزیع شانس

$$\Phi(x) = \int_{\Re^n} k\text{-}\max\begin{bmatrix} \sup_{f_1(y_1, z_1)=x} (1 - \Upsilon_1(z_1)) \\ \sup_{f_2(y_2, z_2)=x} (1 - \Upsilon_2(z_2)) \\ \cdots \\ \sup_{f_n(y_n, z_n)=x} (1 - \Upsilon_n(z_n)) \end{bmatrix} \mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2)\dots\mathrm{d}\Psi_n(y_n)$$

دارد.

تمرین آ.۸: فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m$ و $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_n$ هستند. آماره ترتیب k ام $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ چیست؟

قانون عملیاتی برای سیستم بولی

قضیه آ.۱۴ [۱۱۴] *فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی بولی مستقل هستند، یعنی برای هر $i = 1, 2, \dots, m$*

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & \text{با اندازه احتمال } a_i \\ 0 & \text{با اندازه احتمال } 1 - a_i \end{cases} \tag{آ.۵۰}$$

و $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ متغیرهای نایقین بولی مستقل هستند، یعنی برای هر $j = 1, 2, \dots, n$

$$\tau_j = \begin{cases} 1 & \text{با اندازه نایقین } b_j \\ 0 & \text{با اندازه نایقین } 1 - b_j \end{cases} \tag{آ.۵۱}$$

اگر f یک تابع بولی باشد، آنگاه

$$\xi = f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n) \tag{آ.۵۲}$$

یک متغیر تصادفی نایقین بولی است که

$$\mathrm{Ch}\{\xi = 1\} = \sum_{(x_1,\ldots,x_m)\in\{0,1\}^m} \left(\prod_{i=1}^{m} \mu_i(x_i)\right) f^*(x_1, \ldots, x_m) \tag{آ.۵۳}$$

که در آن

$$f^*(x_1,\ldots,x_m) = \begin{cases} \sup\limits_{f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=1} \min\limits_{1\le j\le n} \nu_j(y_j), & \\ \qquad \text{اگر } \sup\limits_{f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=1} \min\limits_{1\le j\le n} \nu_j(y_j) < 0.5 & \\ 1 - \sup\limits_{f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=0} \min\limits_{1\le j\le n} \nu_j(y_j), & \\ \qquad \text{اگر } \sup\limits_{f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=1} \min\limits_{1\le j\le n} \nu_j(y_j) \ge 0.5 & \end{cases} \tag{آ.۵۴}$$

$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} a_i, & \text{اگر } x_i = 1 \\ 1 - a_i, & \text{اگر } x_i = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{آ.۵۵}$$

$$\nu_j(y_j) = \begin{cases} b_j, & \text{اگر } y_j = 1 \\ 1 - b_j, & \text{اگر } y_j = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{آ.۵۶}$$

برهان: ابتدا، وقتی $(x_1, \ldots, x_m)$ مشخص است، $f(x_1, \ldots, x_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ ذاتاً یک تابع بولی از متغیرهای نایقین است. از قانون عملیاتی متغیرهای نایقین نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{f(x_1, \ldots, x_m, \tau_1, \ldots, \tau_n) = 1\} = f^*(x_1, \ldots, x_m)$$

که با (آ.۵۴) تعیین می‌شود. از طرف دیگر، از قانون عملیاتی متغیرهای تصادفی نایقین نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Ch}\{\xi = 1\} = \sum_{(x_1,\ldots,x_m)\in\{0,1\}^m} \left(\prod_{i=1}^{m} \mu_i(x_i)\right) \mathcal{M}\{f(x_1, \ldots, x_m, \tau_1, \ldots, \tau_n) = 1\}.$$

پس برقراری (آ.۵۳) بررسی شد.

نکته آ.۷: وقتی متغیرهای نایقین وجود نداشته باشند، قانون عملیاتی به صورت

$$\Pr\{\xi = 1\} = \sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\{0,1\}^m} \left(\prod_{i=1}^{m} \mu_i(x_i)\right) f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \tag{آ.۵۷}$$

است.

نکته آ.۸: وقتی متغیرهای تصادفی وجود نداشته باشند، قانون عملیاتی به صورت

$$\mathcal{M}\{\xi=۱\}=\begin{cases}\dfrac{\sup\limits_{f(y_۱,y_۲,\ldots,y_n)=۱}\min\limits_{۱\le j\le n}\nu_j(y_j)}{\sup\limits_{f(y_۱,y_۲,\ldots,y_n)=۱}\min\limits_{۱\le j\le n}\nu_j(y_j)}, & \text{اگر } \ldots<۰/۵\\[2ex] ۱-\dfrac{\sup\limits_{f(y_۱,y_۲,\ldots,y_n)=۰}\min\limits_{۱\le j\le n}\nu_j(y_j)}{\sup\limits_{f(y_۱,y_۲,\ldots,y_n)=۱}\min\limits_{۱\le j\le n}\nu_j(y_j)}, & \text{اگر } \ldots\ge ۰/۵\end{cases}\tag{آ.۵۸}$$

است.

تمرین آ.۹: فرض کنید $\eta_۱,\eta_۲,\ldots,\eta_m$ متغیرهای تصادفی بولی مستقل تعریف شده با (آ.۵۰) و $\tau_۱,\tau_۲,\ldots,\tau_n$ متغیرهای نایقین بولی مستقل تعریف شده با (آ.۵۱) هستند. پس کمینه

$$\xi=\eta_۱\wedge\eta_۲\wedge\ldots\wedge\eta_m\wedge\tau_۱\wedge\tau_۲\wedge\ldots\wedge\tau_n\tag{آ.۵۹}$$

یک متغیر تصادفی نایقین بولی است. نشان دهید

$$\mathrm{Ch}\{\xi=۱\}=a_۱a_۲\ldots a_m(b_۱\wedge b_۲\wedge\ldots\wedge b_n).\tag{آ.۶۰}$$

تمرین آ.۱۰: فرض کنید $\eta_۱,\eta_۲,\ldots,\eta_m$ متغیرهای تصادفی بولی مستقل تعریف شده با (آ.۵۰) و $\tau_۱,\tau_۲,\ldots,\tau_n$ متغیرهای نایقین بولی مستقل تعریف شده با (آ.۵۱) هستند. پس بیشینه

$$\xi=\eta_۱\vee\eta_۲\vee\ldots\vee\eta_m\vee\tau_۱\vee\tau_۲\vee\ldots\vee\tau_n\tag{آ.۶۱}$$

یک متغیر تصادفی نایقین بولی است. نشان دهید

$$\mathrm{Ch}\{\xi=۱\}=۱-(۱-a_۱)(۱-a_۲)\ldots(۱-a_m)(۱-b_۱\vee b_۲\vee\ldots\vee b_n).\tag{آ.۶۲}$$

تمرین آ.۱۱: فرض کنید $\eta_۱,\eta_۲,\ldots,\eta_m$ متغیرهای تصادفی بولی مستقل تعریف شده با (آ.۵۰) و $\tau_۱,\tau_۲,\ldots,\tau_n$ متغیرهای نایقین بولی مستقل تعریف شده با (آ.۵۱) هستند. پس آماره ترتیب k ام

$$\xi=k\text{-}\min\,[\eta_۱,\eta_۲,\ldots,\eta_m,\tau_۱,\tau_۲,\ldots,\tau_n]\tag{آ.۶۳}$$

یک متغیر تصادفی نایقین بولی است. نشان دهید

$$\mathrm{Ch}\{\xi=۱\}=\sum_{(x_۱,\ldots,x_m)\in\{۰,۱\}^m}\left(\prod_{i=۱}^{m}\mu_i(x_i)\right)k\text{-}\min\,[x_۱,\ldots,x_m,b_۱,\ldots,b_n]$$

که در آن

$$\mu_i(x_i)=\begin{cases}a_i, & \text{اگر } x_i=۱\\ ۱-a_i, & \text{اگر } x_i=۰\end{cases}\qquad(i=۱,۲,\ldots,m).\tag{آ.۶۴}$$

تمرین آ.۱۲: فرض کنید $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی بولی مستقل تعریف شده با (آ.۵۰) و $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین بولی مستقل تعریف شده با (آ.۵۱) هستند. پس

$$\xi = k\text{\_}\max\left[\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n\right] \qquad (\text{آ.۶۵})$$

آماره ترتیب $(n - k + ۱)$ ام است. نشان دهید

$$\mathrm{Ch}\{\xi = ۱\} = \sum_{(x_۱,\ldots,x_m)\in\{۰,۱\}^m} \left(\prod_{i=۱}^{m} \mu_i(x_i)\right) k\text{\_}\max\left[x_۱, \ldots, x_m, b_۱, \ldots, b_n\right]$$

که در آن

$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} a_i, & x_i = ۱ \text{ اگر} \\ ۱ - a_i, & x_i = ۰ \text{ اگر} \end{cases} \qquad (i = ۱, ۲, \ldots, m). \qquad (\text{آ.۶۶})$$

آ.۵ مقدار مورد انتظار

تعریف آ.۵ [۱۱۳] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین است. مقدار مورد انتظار آن با*

$$E[\xi] = \int_۰^{+\infty} \mathrm{Ch}\{\xi \geq x\}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{۰} \mathrm{Ch}\{\xi \leq x\}\mathrm{d}x \qquad (\text{آ.۶۷})$$

تعریف می‌شود به شرط آن که حداقل یکی از انتگرال‌ها متناهی باشد.

قضیه آ.۱۵ [۱۱۳] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین با توزیع شانس Φ است. پس*

$$E[\xi] = \int_۰^{+\infty} (۱ - \Phi(x))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{۰} \Phi(x)\mathrm{d}x. \qquad (\text{آ.۶۸})$$

برهان: از قضیه معکوس شانس نتیجه می‌شود که تقریباً برای هر x داریم $\mathrm{Ch}\{\xi \geq x\} = ۱ - \Phi(x)$ و $\mathrm{Ch}\{\xi \leq x\} = \Phi(x)$. با استفاده از تعریف عملگر مقدار مورد انتظار، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_۰^{+\infty} \mathrm{Ch}\{\xi \geq x\}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{۰} \mathrm{Ch}\{\xi \leq x\}\mathrm{d}x \\ &= \int_۰^{+\infty} (۱ - \Phi(x))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{۰} \Phi(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

به این ترتیب معادله (آ.۶۸) به دست می‌آید.

قضیه آ.۱۶ *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین با توزیع شانس Φ است. در این صورت*

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}\Phi(x). \qquad (\text{آ.۶۹})$$

برهان: از شانس متغیرهای انتگرال و قضیه آ.۱۵ نتیجه می‌شود که مقدار مورد انتظار

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_{0}^{+\infty}(1-\Phi(x))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0}\Phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{+\infty} x\mathrm{d}\Phi(x) + \int_{-\infty}^{0} x\mathrm{d}\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}\Phi(x) \end{aligned}$$

است. قضیه ثابت می‌شود.

قضیه آ.۱۷ *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین با توزیع شانس منظم Φ است. پس*

$$E[\xi] = \int_{0}^{1}\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{آ.۷۰}$$

برهان: از شانس متغیرهای انتگرال و قضیه آ.۱۵ نتیجه می‌شود که مقدار مورد انتظار

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_{0}^{+\infty}(1-\Phi(x))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0}\Phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Phi(0)}^{1}\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_{0}^{\Phi(0)}\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_{0}^{1}\Phi^{-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

است. قضیه ثابت می‌شود.

قضیه آ.۱۸ [۱۱۴] *فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ و $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ نیز متغیرهای نایقین مستقل با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. اگر f یک تابع اندازه‌پذیر باشد، آنگاه*

$$\xi = f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \tag{آ.۷۱}$$

مقدار مورد انتظار

$$E[\xi] = \int_{\Re^m} G(y_1, y_2, \ldots, y_m)\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m) \tag{آ.۷۲}$$

دارد که برای اعداد حقیقی $y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = E[f(y_1, y_2, \ldots, y_m, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)] \tag{آ.۷۳}$$

مقدار مورد انتظار متغیر نایقین $f(y_1, y_2, \ldots, y_m, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ است و با $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_n$ مشخص می‌شود.

برهان: برای سادگی فقط حالت $m = n = 2$ را ثابت می‌کنیم. توزیع نایقینی $f(y_1, y_2, \tau_1, \tau_2)$ را برای اعداد حقیقی y_1 و y_2 با $F(x; y_1, y_2)$ نشان دهید. پس

$$E[f(y_1, y_2, \tau_1, \tau_2)] = \int_{0}^{+\infty}(1 - F(x; y_1, y_2))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} F(x; y_1, y_2)\mathrm{d}x.$$

از طرف دیگر، متغیر تصادفی نایقین $\xi = f(\eta_1, \eta_2, \tau_1, \tau_2)$ توزیع شانس

$$\Phi(x) = \int_{\Re^2} F(x; y_1, y_2)\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2)$$

دارد. از قضیه آ.۱۵ و قضیه فوبینی نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
E[\xi] &= \int_0^{+\infty}(1-\Phi(x))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \Phi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\left(1 - \int_{\Re^2} F(x; y_1, y_2)\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2)\right)\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{-\infty}^0 \int_{\Re^2} F(x; y_1, y_2)\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Re^2}\left(\int_0^{+\infty}(1 - F(x; y_1, y_2))\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 F(x; y_1, y_2)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2) \\
&= \int_{\Re^2} E[f(y_1, y_2, \tau_1, \tau_2)]\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\mathrm{d}\Psi_2(y_2).
\end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین آ.۱۳: فرض کنید η یک متغیر تصادفی و τ یک متغیر نایقین است. نشان دهید

$$E[\eta + \tau] = E[\eta] + E[\tau] \tag{آ.۷۴}$$

و

$$E[\eta\tau] = E[\eta]E[\tau]. \tag{آ.۷۵}$$

قضیه آ.۱۹ [۱۱۴] *فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ و $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ نیز متغیرهای نایقین مستقل با توزیع‌های نایقینی منظم $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. اگر $f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ افزایشی اکید یا کاهشی اکید نسبت به $\tau_1, \ldots, \tau_n$ باشند آنگاه مقدار مورد انتظار*

$$E[f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)] \tag{آ.۷۶}$$

با

$$\int_{\Re^m}\int_0^1 f(y_1, \ldots, y_m, \Upsilon_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-1}(\alpha))\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\Psi_1(y_1)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m)$$

برابر است.

برهان: چون $f(y_1, \ldots, y_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ یک تابع افزایشی اکید یا یک تابع کاهشی اکید نسبت به $\tau_1, \ldots, \tau_n$ است، داریم

$$E[f(y_1, \ldots, y_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)] = \int_0^1 f(y_1, \ldots, y_m, \Upsilon_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-1}(\alpha))\mathrm{d}\alpha.$$

از قضیه آ.۱۸ برقراری حکم نتیجه می‌شود.

نکته آ.۹: هرگاه تابع $f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ نسبت به $\tau_1, \ldots, \tau_k$ افزایشی اکید و نسبت به $\tau_{k+1}, \ldots, \tau_n$ کاهشی اکید باشد، آنگاه باید انتگرالده در فرمول مقدار مورد انتظار

$$E[f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)]$$

با

$$f(y_1, \ldots, y_m, \Upsilon_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Upsilon_k^{-1}(\alpha), \Upsilon_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-1}(1-\alpha))$$

جایگزین شود.

تمرین آ.۱۴: فرض کنید η یک متغیر تصادفی با توزیع احتمال Ψ و τ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی منظم Υ است. نشان دهید

$$E[\eta \vee \tau] = \int_{\Re} \int_0^1 \left(y \vee \Upsilon^{-1}(\alpha)\right) \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\Psi(y) \tag{آ.۷۷}$$

و

$$E[\eta \wedge \tau] = \int_{\Re} \int_0^1 \left(y \wedge \Upsilon^{-1}(\alpha)\right) \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\Psi(y). \tag{آ.۷۸}$$

قضیه آ.۲۰ ([۱۱۴]، *خطی بودن عملگر مقدار مورد انتظار) فرض کنید η_1 و η_2 متغیرهای تصادفی (الزاماً مستقل نیستند) و τ_1 و τ_2 دو متغیر نایقین مستقل هستند. همچنین فرض کنید f_1 و f_2 دو تابع اندازه‌پذیر هستند. پس*

$$E[f_1(\eta_1, \tau_1) + f_2(\eta_2, \tau_2)] = E[f_1(\eta_1, \tau_1)] + E[f_2(\eta_2, \tau_2)]. \tag{آ.۷۹}$$

برهان: چون τ_1 و τ_2 متغیرهای نایقین مستقل هستند، برای اعداد حقیقی y_1 و y_2، تابع‌های $f_1(y_1, \tau_1)$ و $f_2(y_2, \tau_2)$ نیز متغیرهای نایقین مستقل هستند. پس

$$E[f_1(y_1, \tau_1) + f_2(y_2, \tau_2)] = E[f_1(y_1, \tau_1)] + E[f_2(y_2, \tau_2)].$$

فرض کنید Ψ_1 و Ψ_2 به ترتیب توزیع‌های احتمال متغیرهای تصادفی η_1 و η_2 هستند. داریم

$$\begin{aligned}
&E[f_1(\eta_1, \tau_1) + f_2(\eta_2, \tau_2)]\\
&= \int_{\Re^2} E[f_1(y_1, \tau_1) + f_2(y_2, \tau_2)] \mathrm{d}\Psi_1(y_1) \mathrm{d}\Psi_2(y_2)\\
&= \int_{\Re^2} (E[f_1(y_1, \tau_1)] + E[f_2(y_2, \tau_2)]) \mathrm{d}\Psi_1(y_1) \mathrm{d}\Psi_2(y_2)\\
&= \int_{\Re} E[f_1(y_1, \tau_1)] \mathrm{d}\Psi_1(y_1) + \int_{\Re} E[f_2(y_2, \tau_2)] \mathrm{d}\Psi_2(y_2)\\
&= E[f_1(\eta_1, \tau_1)] + E[f_2(\eta_2, \tau_2)].
\end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت شد.

تمرین آ.۱۵: فرض کنید η_1 و η_2 متغیرهای تصادفی و τ_1 و τ_2 متغیرهای نایقین مستقل هستند. نشان دهید

$$E[\eta_1 \vee \tau_1 + \eta_2 \wedge \tau_2] = E[\eta_1 \vee \tau_1] + E[\eta_2 \wedge \tau_2]. \tag{آ.۸۰}$$

قضیه آ.۲۱ [۱۱۳] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین و f یک تابع نامنفی زوج است. اگر f روی $(-\infty, 0]$ کاهشی و روی $[0, \infty)$ افزایشی باشد، آنگاه برای هر عدد $t > 0$ داریم*

$$\mathrm{Ch}\{|\xi| \geq t\} \leq \frac{E[f(\xi)]}{f(t)}. \tag{آ.۸۱}$$

برهان: واضح است که $\mathrm{Ch}\{|\xi| \geq f^{-1}(r)\}$ یک تابع کاهشی یکنوا از r روی $[0, \infty)$ است. از نامنفی بودن $f(\xi)$ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
E[f(\xi)] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{Ch}\{f(\xi) \geq x\}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{Ch}\{|\xi| \geq f^{-1}(x)\}\mathrm{d}x \\
&\geq \int_0^{f(t)} \mathrm{Ch}\{|\xi| \geq f^{-1}(x)\}\mathrm{d}x \geq \int_0^{f(t)} \mathrm{Ch}\{|\xi| \geq f^{-1}(f(t))\}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{f(t)} \mathrm{Ch}\{|\xi| \geq t\}\mathrm{d}x = f(t) \cdot \mathrm{Ch}\{|\xi| \geq t\}
\end{aligned}$$

که برقراری نابرابری را نتیجه می‌دهد.

قضیه آ.۲۲ ([۱۱۳]، *نابرابری مارکف) فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین است. پس برای اعداد معلوم $t > 0$ و $p > 0$ داریم*

$$\mathrm{Ch}\{|\xi| \geq t\} \leq \frac{E[|\xi|^p]}{t^p}. \tag{آ.۸۲}$$

برهان: این قضیه حالت یک خاص از قضیه آ.۲۱ برای $f(x) = |x|^p$ است.

آ.۶ واریانس

تعریف آ.۶ [۱۱۳] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین با مقدار مورد انتظار متناهی e است. واریانس آن با*

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^2] \tag{آ.۸۳}$$

تعریف می‌شود.

چون $(\xi - e)^2$ یک متغیر تصادفی نایقین نامنفی است، داریم

$$V[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathrm{Ch}\{(\xi - e)^2 \geq x\}\mathrm{d}x. \tag{آ.۸۴}$$

قضیه آ.۲۳ [۱۱۳] *اگر ξ یک متغیر تصادفی نایقین با مقدار مورد انتظار متناهی باشد و a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه*

$$V[a\xi+b]=a^{۲}V[\xi]. \tag{آ.۸۵}$$

برهان: فرض کنید e مقدار مورد انتظار ξ است. پس $ae+b$ مقدار مورد انتظار $a\xi+b$ است. پس واریانس به صورت

$$V[a\xi+b]=E[(a\xi+b-(ae+b))^{۲}]=E[a^{۲}(\xi-e)^{۲}]=a^{۲}V[\xi]$$

است. برقراری قضیه بررسی شد.

قضیه آ.۲۴ [۱۱۳] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین با مقدار مورد انتظار متناهی است. پس $V[\xi]=۰$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Ch}\{\xi=e\}=۱$.*

برهان: ابتدا فرض کنیم $V[\xi]=۰$. از قضیه (آ.۸۴) نتیجه می‌شود که

$$\int_{۰}^{+\infty}\mathrm{Ch}\{(\xi-e)^{۲}\ge x\}\mathrm{d}x=۰$$

و از آن برای هر $x>۰$ رابطه $\mathrm{Ch}\{(\xi-e)^{۲}\ge x\}=۰$ نتیجه می‌شود. پس داریم

$$\mathrm{Ch}\{(\xi-e)^{۲}=۰\}=۱.$$

یعنی $\mathrm{Ch}\{\xi=e\}=۱$. برعکس، فرض کنیم $\mathrm{Ch}\{\xi=e\}=۱$. پس مستقیماً برای هر $x>۰$ داریم $\mathrm{Ch}\{(\xi-e)^{۲}=۰\}=۱$ و $\mathrm{Ch}\{(\xi-e)^{۲}\ge x\}=۰$. بنابراین

$$V[\xi]=\int_{۰}^{+\infty}\mathrm{Ch}\{(\xi-e)^{۲}\ge x\}\mathrm{d}x=۰.$$

قضیه ثابت می‌شود.

قضیه آ.۲۵ ([۱۱۳]، *نابرابری چبیشف) فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین است که واریانس آن وجود دارد. پس برای هر عدد مشخص $t>۰$ داریم*

$$\mathrm{Ch}\left\{|\xi-E[\xi]|\ge t\right\}\le\frac{V[\xi]}{t^{۲}}. \tag{آ.۸۶}$$

برهان: این قضیه یک حالت خاص از قضیه آ.۲۱ است که متغیر تصادفی نایقین ξ با $\xi-E[\xi]$ جایگزین می‌شود و $f(x)=x^{۲}$.

چگونه می‌توان واریانس را از توزیع استنتاج کرد؟

فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین با مقدار مورد انتظار e است. اگر تنها از توزیع شانس Φ اطلاع داشته باشیم، آنگاه واریانس

$$\begin{aligned}V[\xi] &= \int_{۰}^{+\infty} \mathrm{Ch}\{(\xi-e)^{۲} \geq x\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} \mathrm{Ch}\{(\xi \geq e+\sqrt{x}) \cup (\xi \leq e-\sqrt{x})\}\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{۰}^{+\infty} (\mathrm{Ch}\{\xi \geq e+\sqrt{x}\} + \mathrm{Ch}\{\xi \leq e-\sqrt{x}\})\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{+\infty} (۱-\Phi(e+\sqrt{x})+\Phi(e-\sqrt{x}))\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

است. پس قرارداد زیر را داریم.

قرارداد آ.۱ [۵۷] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین با توزیع شانس Φ و مقدار مورد انتظار e است. پس*

$$V[\xi] = \int_{۰}^{+\infty} (۱-\Phi(e+\sqrt{x})+\Phi(e-\sqrt{x}))\mathrm{d}x. \qquad (\text{آ.۸۷})$$

قضیه آ.۲۶ [۱۴۷] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین با توزیع شانس Φ و مقدار مورد انتظار e است. پس*

$$V[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-e)^{۲}\mathrm{d}\Phi(x). \qquad (\text{آ.۸۸})$$

برهان: این قضیه بر اساس قرارداد آ.۱ است که بیان می‌کند واریانس ξ به صورت

$$V[\xi] = \int_{۰}^{+\infty} (۱-\Phi(e+\sqrt{y}))\mathrm{d}y + \int_{۰}^{+\infty} \Phi(e-\sqrt{y})\mathrm{d}y$$

است. با جایگزینی $e+\sqrt{y}$ با x و y با $(x-e)^{۲}$، توزیع شانس متغیرها و انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\int_{۰}^{+\infty} (۱-\Phi(e+\sqrt{y}))\mathrm{d}y = \int_{e}^{+\infty} (۱-\Phi(x))\mathrm{d}(x-e)^{۲} = \int_{e}^{+\infty} (x-e)^{۲}\mathrm{d}\Phi(x).$$

به طور مشابه، با جایگزینی $e-\sqrt{y}$ با x و y با $(x-e)^{۲}$ داریم

$$\int_{۰}^{+\infty} \Phi(e-\sqrt{y})\mathrm{d}y = \int_{e}^{-\infty} \Phi(x)\mathrm{d}(x-e)^{۲} = \int_{-\infty}^{e} (x-e)^{۲}\mathrm{d}\Phi(x).$$

پس واریانس به صورت

$$V[\xi] = \int_e^{+\infty} (x-e)^۲ \mathrm{d}\Phi(x) + \int_{-\infty}^{e} (x-e)^۲ \mathrm{d}\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-e)^۲ \mathrm{d}\Phi(x)$$

است و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه آ.۲۷ [۱۴۷] *فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی نایقین با توزیع شانس منظم Φ و مقدار مورد انتظار متناهی e است. پس*

$$V[\xi] = \int_{۰}^{۱} (\Phi^{-۱}(\alpha) - e)^۲ \mathrm{d}\alpha. \tag{آ.۸۹}$$

برهان: با جایگرینی $\Phi(x)$ با α و x با $\Phi^{-۱}(\alpha)$، از شانس متغیرهای انتگرال و قضیه آ.۲۶ نتیجه می‌شود که واریانس به صورت

$$V[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-e)^۲ \mathrm{d}\Phi(x) = \int_{۰}^{۱} (\Phi^{-۱}(\alpha) - e)^۲ \mathrm{d}\alpha$$

است و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه آ.۲۸ [۵۷] *فرض کنید $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_۱, \Psi_۲, \ldots, \Psi_m$ و $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل با توزیع‌های نایقینی منظم $\Upsilon_۱, \Upsilon_۲, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. همچنین فرض کنید $f(\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n)$ یک تابع افزایشی اکید نسبت به $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_k$ و کاهشی اکید نسبت به $\tau_{k+۱}, \tau_{k+۲}, \ldots, \tau_n$ است. آنگاه*

$$\xi = f(\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n) \tag{آ.۹۰}$$

واریانس به صورت

$$\begin{aligned} V[\xi] \ &= \int_{\Re^m}\int_{۰}^{+\infty}(۱ - F(e+\sqrt{x}; y_۱, y_۲, \ldots, y_m) \\ &\qquad + F(e-\sqrt{x}; y_۱, y_۲, \ldots, y_m))\mathrm{d}x\mathrm{d}\Psi_۱(y_۱)\mathrm{d}\Psi_۲(y_۲)\ldots\Psi_m(y_m) \end{aligned}$$

دارد که در آن $F(x; y_۱, y_۲, \ldots, y_m)$ ریشه α در معادله

$$f(y_۱, y_۲, \ldots, y_m, \Upsilon_۱^{-۱}(\alpha), \ldots, \Upsilon_k^{-۱}(\alpha), \Upsilon_{k+۱}^{-۱}(۱-\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-۱}(۱-\alpha)) = x$$

است.

برهان: از قانون عملیاتی متغیرهای تصادفی نایقین نتیجه می‌شود که توزیع شانس ξ به صورت

$$\Phi(x) = \int_{\Re^m} F(x; y_۱, y_۲, \ldots, y_m)\mathrm{d}\Psi_۱(y_۱)\mathrm{d}\Psi_۲(y_۲)\ldots\Psi_m(y_m)$$

است که $F(x; y_۱, y_۲, \ldots, y_m)$ توزیع نایقینی متغیر نایقین $f(y_۱, y_۲, \ldots, y_m, \tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n)$ است. پس قضیه از قرارداد آ.۱ نتیجه می‌شود.

تمرین آ.۱۶: فرض کنید η یک متغیر تصادفی با توزیع احتمال Ψ و τ یک متغیر نایقین با توزیع نایقینی Υ است. نشان دهید واریانس جمع

$$\xi = \eta + \tau \tag{آ.۹۱}$$

به صورت

$$V[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}(1 - \Upsilon(e+\sqrt{x}-y) + \Upsilon(e-\sqrt{x}-y))\mathrm{d}x\mathrm{d}\Psi(y) \tag{آ.۹۲}$$

است.

آ.۷ قانون اعداد بزرگ

قضیه آ.۲۹ ([۱۹۲]، *قانون اعداد بزرگ*) *فرض کنید* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *متغیرهای تصادفی همتوزیع با توزیع احتمال مشترک* Ψ *هستند و* $\tau_1, \tau_2, \ldots$ *متغیرهای نایقین با توزیع یکسان نایقین هستند. فرض کنید* f *یک تابع اکیدا یکنوا است. آنگاه*

$$S_n = f(\eta_1, \tau_1) + f(\eta_2, \tau_2) + \cdots + f(\eta_n, \tau_n) \tag{آ.۹۳}$$

یک دنباله از متغیرهای تصادفی نایقین هستند و وقتی $n \to \infty$*؛ حد*

$$\frac{S_n}{n} \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau_1)\mathrm{d}\Psi(y) \tag{آ.۹۴}$$

به مفهوم همگرایی در توزیع برقرار است.

برهان: بر اساس تعریف همگرایی در توزیع، کافی است ثابت کنیم برای هر عدد حقیقی z با

$$\begin{aligned}&\lim_{w\to z}\mathcal{M}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau_1)\mathrm{d}\Psi(y) \le \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, w)\mathrm{d}\Psi(y)\right\}\\ &= \mathcal{M}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau_1)\mathrm{d}\Psi(y) \le \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, z)\mathrm{d}\Psi(y)\right\}\end{aligned}$$

رابطه

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{S_n}{n} \le \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, z)\mathrm{d}\Psi(y)\right\}\\ &= \mathcal{M}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau_1)\mathrm{d}\Psi(y) \le \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, z)\mathrm{d}\Psi(y)\right\}\end{aligned} \tag{آ.۹۵}$$

برقرار است. استدلال را به دو حالت تفکیک می‌کنیم. حالت ۱: فرض کنید $f(y, z)$ یک تابع افزایشی اکید نسبت به z است. فرض کنید Υ توزیع نایقینی مشترک $\tau_1, \tau_2, \ldots$ است. واضح است که برای اعداد حقیقی دلخواه y و z داریم

$$\mathcal{M}\{f(y, \tau_1) \le f(y, z)\} = \Upsilon(z)$$

پس

$$\mathcal{M}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y,\tau_1)\mathrm{d}\Psi(y) \le \int_{-\infty}^{+\infty} f(y,z)\mathrm{d}\Psi(y)\right\} = \Upsilon(z). \qquad \text{(آ.۹۶)}$$

همچنین، چون $f(\eta_1,z), f(\eta_2,z),\ldots$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی همتوزیع است، قانون اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی بیان می‌کند که وقتی $n\to\infty$، رابطه

$$\frac{f(\eta_1,z)+f(\eta_2,z)+\cdots+f(\eta_n,z)}{n} \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(y,z)\mathrm{d}\Psi(y), \quad a.s.$$

برقرار است. پس

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{S_n}{n} \le \int_{-\infty}^{+\infty} f(y,z)\mathrm{d}\Psi(y)\right\} = \Upsilon(z). \qquad \text{(آ.۹۷)}$$

از (آ.۹۶) و (آ.۹۷) رابطه (آ.۹۵) نتیجه می‌شود.
حالت ۲: فرض کنید $f(y,z)$ نسبت به z کاهشی اکید است. پس $-f(y,z)$ یک تابع افزایشی اکید نسبت به z است. با استفاده از حالت ۱ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{-\frac{S_n}{n} < -z\right\} = \mathcal{M}\left\{-\int_{-\infty}^{+\infty} f(y,\tau_1)\mathrm{d}\Psi(y) < -z\right\}.$$

یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{S_n}{n} > z\right\} = \mathcal{M}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y,\tau_1)\mathrm{d}\Psi(y) > z\right\}.$$

از خاصیت دوگانی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{S_n}{n} \le z\right\} = \mathcal{M}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y,\tau_1)\mathrm{d}\Psi(y) \le z\right\}.$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

تمرین آ.۱۷: فرض کنید $\eta_1,\eta_2,\ldots$ متغیرهای تصادفی همتوزیع و $\tau_1,\tau_2,\ldots$ نیز متغیرهای نایقین همتوزیع هستند. تعریف کنید

$$S_n = (\eta_1+\tau_1)+(\eta_2+\tau_2)+\cdots+(\eta_n+\tau_n). \qquad \text{(آ.۹۸)}$$

نشان دهید وقتی $n\to\infty$، حد

$$\frac{S_n}{n} \to E[\eta_1]+\tau_1 \qquad \text{(آ.۹۹)}$$

به مفهوم همگرایی در توزیع برقرار است.

تمرین آ.۱۸: فرض کنید $\eta_1,\eta_2,\ldots$ متغیرهای تصادفی همتوزیع مثبت و $\tau_1,\tau_2,\ldots$ نیز متغیرهای نایقین همتوزیع مثبت هستند. تعریف کنید

$$S_n = \eta_1\tau_1+\eta_2\tau_2+\cdots+\eta_n\tau_n. \qquad \text{(آ.۱۰۰)}$$

نشان دهید وقتی $n \to \infty$، حد زیر

$$\frac{S_n}{n} \to E[\eta_1]\tau_1 \qquad (آ.۱۰۱)$$

به مفهوم همگرایی در توزیع برقرار است.

آ.۸ آزمون اِلسبرگ

این مساله از آزمون السبرگ است [۳۱]. یک کیسه شامل ۳۰ مهره قرمز و ۶۰ مهره دیگر که یا سیاه و یا زرد، ولی با نسبت نامعلوم هستند، را در نظر بگیرید. دو گزینه زیر را در نظر بگیرید:

الف: اگر یک مهره قرمز از کیسه قرعه شود، شما ۱۰۰ دلار دریافت می‌کنید.

ب: اگر یک مهره سیاه از کیسه قرعه شود، شما ۱۰۰ دلار دریافت می‌کنید.

انتخاب شما بین گزینه‌های **الف** و **ب** کدام است؟ بر اساس نظرسنجی‌های بسیار، السبرگ نشان داد [۳۱] که مردم اغلب **الف** را بر **ب** ترجیح می‌دهند چون مردم ترجیح دارند که قمار را بر تعداد معلوم مهره‌ها انجام دهند نه بر مهره‌هایی که تعداد آنها معلوم نیست. آیا واقعاً **الف** بر **ب** ترجیح دارد؟ لیو [۱۰۶] این سوال را با نظریه شانس پاسخ داد و نتیجه گرفت که ترجیحی بین این دو انتخاب وجود ندارد.

فرض کنید مهره‌ها از ۱ تا ۹۰ شماره گذاری شده اند، ابتدا مهره‌های سیاه، سپس مهره‌های زرد و در پایان مهره‌های قرمز. فضای نایقینی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ را به صورت مجموعه مرجع $\{۰, ۱, ۲, \ldots, ۶۰\}$ همراه با مجموعه توانی و اندازه نایقین

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \frac{|\Lambda|}{۶۱} \qquad (آ.۱۰۲)$$

در نظر بگیرید که در آن $|\Lambda|$ تعداد اعضای Λ را نشان می‌دهد. چون تعداد مهره‌های سیاه کاملا نامعلوم است، تعداد آنها عددی بین ۰ تا ۶۰ با درجه یقین یکسان است، و می‌توانیم آن را با متغیر نایقین

$$\xi(\gamma) = \gamma, \qquad (آ.۱۰۳)$$

نشان دهیم و تعداد مهره‌های زرد را با متغیر نایقین دیگر

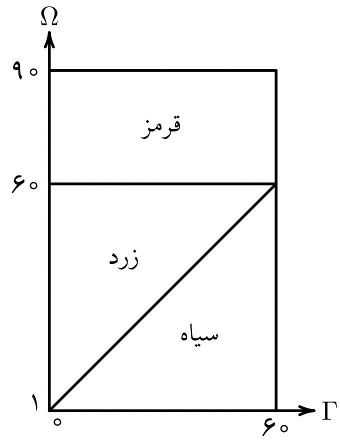
$$\eta(\gamma) = ۶۰ - \gamma. \qquad (آ.۱۰۴)$$

بیان کنیم. توجه کنید که ξ و η متغیرهای نایقین همتوزیع با خاصیت $\xi + \eta \equiv ۶۰$ هستند. این خاصیت به این معنی است که فرمول‌های (آ.۱۰۳) و (آ.۱۰۴) برای مهره‌های سیاه و زرد «منصفانه» هستند. پس مهره‌های سیاه از ۱ تا γ شماره‌گذاری شده‌اند و مهره‌های زرد از $\gamma + ۱$ تا ۶۰ شماره گذاری شده‌اند و مهره‌های قرمز از ۶۱ تا ۹۰ شماره دارند.

فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ را مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۹۰\}$ همراه با مجموعه توانی و اندازه احتمال

$$\Pr\{\Lambda\} = \frac{|\Lambda|}{۹۰}. \qquad (آ.۱۰۵)$$

در نظر بگیرید. پس قرعه یک مهره از کیسه با انتخاب یک ω از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ معادل است.



شکل آ.۱: سه رویداد «قرمز»، «سیاه» و «زرد».

چون قرعه یک مهره از کیسه نایقین ترکیبی از نایقینی (نامعلوم بودن تعداد مهره‌ها) و تصادفی بودن (انتخاب تصادفی یک مهره از کیسه) است، پس باید با یک رویداد در فضای شانس

$$(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}) \times (\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$$

نشان داده شود. به ویژه، یک مهره قرمز انتخاب می‌شود اگر و تنها اگر ۶۱ $\ge \omega$. پس قرعه یک مهره با رویداد

$$\text{«قرمز»} = \{(\gamma, \omega) \in \Gamma \times \Omega \,|\, \omega \ge ۶۱\} \qquad (\text{آ.۱۰۶})$$

نشان داده می‌شود. یک مهره سیاه قرعه می‌شود اگر و تنها اگر $\gamma \le \omega$. پس قرعه یک مهره سیاه با رویداد

$$\text{«سیاه»} = \{(\gamma, \omega) \in \Gamma \times \Omega \,|\, \omega \le \gamma\} \qquad (\text{آ.۱۰۷})$$

نشان داده می‌شود. همچنین یک مهره زرد قرعه می‌شود اگر و تنها اگر $\gamma < \omega$ و ۶۰ $\le \omega$. پس قرعه مهره زرد با رویداد

$$\text{«زرد»} = \{(\gamma, \omega) \in \Gamma \times \Omega \,|\, \gamma < \omega \le ۶۰\} \qquad (\text{آ.۱۰۸})$$

نشان داده می‌شود. شکل آ.۱ را نگاه کنید.

از تعریف آ.۱ نتیجه می‌شود که اندازه شانس قرعه مهره قرمز به صورت

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}\{\text{«قرمز»}\} &= \int_{۰}^{۱} \Pr\{\omega \in \Omega \mid \mathcal{M}\{\gamma \in \Gamma \mid (\gamma,\omega) \in \text{«قرمز»}\} \geq x\}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{۰}^{۱} \Pr\{\omega \in \{۶۱, ۶۲, \ldots, ۹۰\} \mid \mathcal{M}\{۰, ۱, \ldots, ۶۰\} \geq x\}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{۰}^{۱} \Pr\left\{\omega \in \{۶۱, ۶۲, \ldots, ۹۰\} \mid \frac{۶۱}{۶۱} \geq x\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_{۰}^{۱} \Pr\{۶۱, ۶۲, \ldots, ۹۰\}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{۰}^{۱} \frac{۳۰}{۹۰} \mathrm{d}x \\
&= \frac{۱}{۳},
\end{aligned}$$

است و اندازه شانس قرعه مهر سیاه به صورت

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}\{\text{«سیاه»}\} &= \int_{۰}^{۱} \Pr\{\omega \in \Omega \mid \mathcal{M}\{\gamma \in \Gamma \mid (\gamma,\omega) \in \text{«سیاه»}\} \geq x\}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{۰}^{۱} \Pr\{\omega \in \{۱, ۲, \ldots, ۶۰\} \mid \mathcal{M}\{\omega, \omega + ۱, \ldots, ۶۰\} \geq x\}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{۰}^{۱} \Pr\left\{\omega \in \{۱, ۲, \ldots, ۶۰\} \mid \frac{۶۱ - \omega}{۶۱} \geq x\right\} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=۰}^{۶۰} \int_{\frac{k}{۶۱}}^{\frac{k+۱}{۶۱}} \Pr\left\{\omega \in \{۱, ۲, \ldots, ۶۰\} \mid \frac{۶۱ - \omega}{۶۱} \geq x\right\} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=۰}^{۶۰} \int_{\frac{k}{۶۱}}^{\frac{k+۱}{۶۱}} \Pr\{۱, ۲, \ldots, ۶۰ - k\}\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=۰}^{۶۰} \int_{\frac{k}{۶۱}}^{\frac{k+۱}{۶۱}} \frac{۶۰ - k}{۹۰} \mathrm{d}x \\
&= \frac{۱}{۳},
\end{aligned}$$

است و نهایتاً اندازه شانس مهره زرد به صورت

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}\{\text{«زرد»}\} &= \int_{۰}^{۱} \Pr\{\omega \in \Omega \,|\, \mathcal{M}\{\gamma \in \Gamma \,|\, (\gamma,\omega) \in \text{«زرد»}\} \geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{۰}^{۱} \Pr\{\omega \in \{۱,۲,\ldots,۶۰\} \,|\, \mathcal{M}\{۰,۱,\ldots,\omega-۱\} \geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{۰}^{۱} \Pr\left\{\omega \in \{۱,۲,\ldots,۶۰\} \,|\, \frac{\omega}{۶۱} \geq x\right\}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=۰}^{۶۰} \int_{\frac{k}{۶۱}}^{\frac{k+۱}{۶۱}} \Pr\left\{\omega \in \{۱,۲,\ldots,۶۰\} \,|\, \frac{\omega}{۶۱} \geq x\right\}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=۰}^{۶۰} \int_{\frac{k}{۶۱}}^{\frac{k+۱}{۶۱}} \Pr\{k+۱, k+۲,\ldots,۶۰\}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=۰}^{۶۰} \int_{\frac{k}{۶۱}}^{\frac{k+۱}{۶۱}} \frac{۶۰-k}{۹۰}\mathrm{d}x \\
&= \frac{۱}{۳}
\end{aligned}$$

است.

حال می‌توانیم مساله شانس را حل کنیم. بازده گزینه **الف** یک متغیر تصادفی نایقین

$$A(\gamma,\omega) = \begin{cases} ۱۰۰, & (\gamma,\omega) \in \text{«قرمز»} \text{ اگر} \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{آ.۱۰۹}$$

است که مقدار مورد انتظار آن

$$E[A] = ۱۰۰ \times \mathrm{Ch}\{\text{«قرمز»}\} + ۰ \times (۱ - \mathrm{Ch}\{\text{«قرمز»}\}) = \frac{۱۰۰}{۳} \tag{آ.۱۱۰}$$

است. درامد گزینه **ب** یک متغیر تصادفی نایقین

$$B(\gamma,\omega) = \begin{cases} ۱۰۰, & (\gamma,\omega) \in \text{«سیاه»} \text{ اگر} \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \tag{آ.۱۱۱}$$

است که مقدار مورد انتظار آن

$$E[B] = ۱۰۰ \times \mathrm{Ch}\{\text{«سیاه»}\} + ۰ \times (۱ - \mathrm{Ch}\{\text{«سیاه»}\}) = \frac{۱۰۰}{۳} \tag{آ.۱۱۲}$$

است. پس

$$E[A] = E[B] \tag{آ.۱۱۳}$$

و بنابراین بین **الف** و **ب** ترجیحی وجود ندارد. آزمایشات شبیه سازی نیز این نتیجه را تایید می‌کند. بنابراین ترجیح **الف** به **ب** غیرمنطقی است.

برای بررسی بیشتر این مساله، لیو [۱۰۶] مساله شانس را به صورت زیر بازنگری کرد: اگر گزینه **ب** با گزینه

ج: اگر قرعه مهره سیاه باشد شما ۱۱۰ دلار دریافت می‌کنید.

جایگزین شود. شما کدام گزینه را ترجیح می‌دهید؟

بر اساس نظرسنجی‌های بسیار، لیو [۱۰۶] نشان داد که مردم اغلب **الف** را به **ج** ترجیح می‌دهد. با این حال، درآمد گزینه **ج** یک متغیر تصادفی نایقین

$$C(\gamma,\omega)=\begin{cases} 110, & \text{اگر } (\gamma,\omega)\in \text{«سیاه»} \\ 0, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \qquad (\text{آ.}114)$$

با مقدار مورد انتظار

$$E[C]=110\times \mathrm{Ch}\{\text{«سیاه»}\}+0\times(1-\mathrm{Ch}\{\text{«سیاه»}\})=\frac{110}{3} \qquad (\text{آ.}115)$$

است. پس

$$E[A]<E[C] \qquad (\text{آ.}116)$$

و باید گزینه **ج** را بر گزینه **الف** ترجیح داد. این نتیجه با آزمایشات شبیه سازی نیز تایید شد. پس ترجیح گزینه **الف** بر گزینه **ج** غیرمنطقی است.

تمرین آ.۱۹: یک کیسه شامل ۳۰ مهره قرمز و ۶۰ مهره دیگر که سیاه یا زرد هستند و نسبت آنها معلوم نیست را در نظر بگیرید. فرض کنید دو گزینه زیر را دارید:

د: اگر قرعه مهره زرد یا سیاه باشد شما ۱۰۰ دلار دریافت می‌کنید؛

ه: اگر قرعه مهر قرمز یا زرد باشد شما ۱۰۰ دلار دریافت می‌کنید.

شما بین **د** و **ه** کدام گزینه را انتخاب می‌کنید؟ جواب خود را توجیه کنید. گزینه **ه** را با گزینه زیر عوض کنید

و: اگر قرعه مهر قرمز یا زرد باشد شما ۱۱۰ دلار دریافت می‌کنید.

شما بین **د** و **و** کدام گزینه را انتخاب می‌کنید؟ جواب خود را توجیه کنید.

آ.۹ برنامه‌ریزی تصادفی نایقین

فرض کنید $\boldsymbol{x}$ یک بردار تصمیم و $\boldsymbol{\xi}$ یک بردار تصادفی نایقین است. چون نمی‌توان تابع هدف تصادفی نایقین $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ را مستقیماً کمینه کرد؛ می‌توان به جای آن از مقدار مورد انتظار استفاده کرد یعنی

$$\min_{\boldsymbol{x}} E[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]. \qquad (\text{آ.}117)$$

همچنین چون قید تصادفی نایقین $g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \circ, j = ۱, ۲, \ldots, p$ یک ناحیه شدنی قطعی را مشخص نمی‌کند، طبیعتاً بهتر است برقراری آن با سطوح اطمینان مختلف $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_p$ در نظر بگیریم. پس یک مجموعه از قیدهای شانس

$$\mathrm{Ch}\{g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \circ\} \geq \alpha_j, \quad j = ۱, ۲, \ldots, p \tag{آ.۱۱۸}$$

داریم.

برای تصمیم گیری در مورد مقدار کمینه تابع هدف که به صورت مقدار مورد انتظار بیان شده است و یک مجموعه از قیدهای شانس دارد، لیو [۱۱۴] مدل برنامه‌ریزی تصادفی نایقین زیر را پیشنهاد کرد.

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} E[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})] \\ \text{subject to:} \\ \qquad \mathrm{Ch}\{g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \circ\} \geq \alpha_j, \quad j = ۱, ۲, \ldots, p. \end{cases} \tag{آ.۱۱۹}$$

تعریف آ.۷ [۱۱۴] *بردار $\boldsymbol{x}$ را جواب شدنی مدل برنامه‌ریزی تصادفی نایقین (آ.۱۱۹) گویند اگر برای هر $j = ۱, ۲, \ldots, p$*

$$\mathrm{Ch}\{g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq \circ\} \geq \alpha_j. \tag{آ.۱۲۰}$$

تعریف آ.۸ [۱۱۴] *جواب شدنی $\boldsymbol{x}^*$ را برای مدل برنامه‌ریزی تصادفی نایقین (آ.۱۱۹) بهینه گویند هرگاه برای هر جواب شدنی $\boldsymbol{x}$ داشته باشیم*

$$E[f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\xi})] \leq E[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})]. \tag{آ.۱۲۱}$$

قضیه آ.۳۰ [۱۱۴] *فرض کنید $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_۱, \Psi_۲, \ldots, \Psi_m$ و $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_۱, \Upsilon_۲, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. اگر تابع $f(\boldsymbol{x}, \eta_۱, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \ldots, \tau_n)$ افزایشی یا کاهشی اکید نسبت به $\tau_۱, \ldots, \tau_n$ باشد، آنگاه مقدار مورد انتظار*

$$E[f(\boldsymbol{x}, \eta_۱, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \ldots, \tau_n)] \tag{آ.۱۲۲}$$

با

$$\int_{\Re^m} \int_\circ^۱ f(\boldsymbol{x}, y_۱, \ldots, y_m, \Upsilon_۱^{-۱}(\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-۱}(\alpha)) \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\Psi_۱(y_۱) \ldots \mathrm{d}\Psi_m(y_m)$$

برابر است.

برهان: از قضیه آ.۱۹ مستقیماً نتیجه می‌شود.

نکته آ.۱۰: اگر $f(\boldsymbol{x}, \eta_۱, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \ldots, \tau_n)$ نسبت به $\tau_۱, \ldots, \tau_k$ افزایشی اکید و نسبت به $\tau_{k+۱}, \ldots, \tau_n$ کاهشی اکید باشد، آنگاه انتگرالده در فرمول مقدار مورد انتظار

$$E[f(\boldsymbol{x}, \eta_۱, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \ldots, \tau_n)]$$

باید با

$$f(\boldsymbol{x}, y_۱, \ldots, y_m, \Upsilon_۱^{-۱}(\alpha), \ldots, \Upsilon_k^{-۱}(\alpha), \Upsilon_{k+۱}^{-۱}(۱-\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-۱}(۱-\alpha))$$

جایگزین شود.

قضیه آ.۳۱ [۱۱۴] *فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ و $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. اگر $g_j(\boldsymbol{x}, \eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ یک تابع پیوسته و افزایشی اکید نسبت به $\tau_1, \ldots, \tau_n$ باشد، آنگاه قید شانس*

$$\mathrm{Ch}\{g_j(\boldsymbol{x}, \eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n) \leq 0\} \geq \alpha_j \tag{آ.۱۲۳}$$

برقرار است اگر و تنها اگر

$$\int_{\Re^m} G_j(\boldsymbol{x}, y_1, \ldots, y_m) \mathrm{d}\Psi_1(y_1) \ldots \mathrm{d}\Psi_m(y_m) \geq \alpha_j \tag{آ.۱۲۴}$$

که در آن $G_j(\boldsymbol{x}, y_1, \ldots, y_m)$ ریشه α از معادله

$$g_j(\boldsymbol{x}, y_1, \ldots, y_m, \Upsilon_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-1}(\alpha)) = 0 \tag{آ.۱۲۵}$$

است.

برهان: از قضیه آ.۶ نتیجه می‌شود که سمت چپ قید شانس (آ.۱۲۳) به صورت

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ch}\{g_j(\boldsymbol{x}, \eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n) \leq 0\} \\
&= \int_0^1 \Pr\{\omega \in \Omega \mid \mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x}, \eta_1(\omega), \ldots, \eta_m(\omega), \tau_1, \ldots, \tau_n) \leq 0\} \geq r\} \, \mathrm{d}r \\
&= \int_{\Re^m} \mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x}, y_1, \ldots, y_m, \tau_1, \ldots, \tau_n) \leq 0\} \mathrm{d}\Psi_1(y_1) \ldots \mathrm{d}\Psi_m(y_m) \\
&= \int_{\Re^m} G_j(\boldsymbol{x}; y_1, \ldots, y_m) \mathrm{d}\Psi_1(y_1) \ldots \mathrm{d}\Psi_m(y_m)
\end{aligned}$$

است که در آن $G_j(\boldsymbol{x}, y_1, \ldots, y_m) = \mathcal{M}\{g_j(\boldsymbol{x}, y_1, \ldots, y_m, \tau_1, \ldots, \tau_n) \leq 0\}$ ریشه α از معادله (آ.۱۲۵) است. پس قید شانس (آ.۱۲۳) برقرار ست اگر و فقط اگر (آ.۱۲۴) درست باشد. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

نکته آ.۱۱: اگر $g_j(\boldsymbol{x}, \eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ نسبت به $\tau_1, \ldots, \tau_k$ افزایشی اکید و نسبت به $\tau_{k+1}, \ldots, \tau_n$ کاهشی اکید باشد، آنگاه معادله (آ.۱۲۵) به

$$g_j(\boldsymbol{x}, y_1, \ldots, y_m, \Upsilon_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Upsilon_k^{-1}(\alpha), \Upsilon_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-1}(1-\alpha)) = 0$$

تبدیل می‌شود.

قضیه آ.۳۲ [۱۱۴] *فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های احتمال $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ و $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ متغیرهای نایقین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نایقینی منظم $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \ldots, \Upsilon_n$ هستند.*
اگر تابع هدف $f(\boldsymbol{x}, \eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ و قیدهای $g_j(\boldsymbol{x}, \eta_1, \ldots, \eta_m, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ برای

هر $j = ۱, ۲, \ldots, p$ تابع‌های پیوسته و افزایشی اکید نسبت به $\tau_۱, \ldots, \tau_n$ باشد، آنگاه مساله برنامه‌ریزی تصادفی نایقین

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} E[f(\boldsymbol{x}, \eta_۱, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \ldots, \tau_n)] \\ \textit{subject to:} \\ \qquad \mathrm{Ch}\{g_j(\boldsymbol{x}, \eta_۱, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \ldots, \tau_n) \le ۰\} \ge \alpha_j, \;\; j = ۱, ۲, \ldots, p \end{cases}$$

با مساله قطعی

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} \int_{\Re^m} \int_۰^۱ f(\boldsymbol{x}, y_۱, \ldots, y_m, \Upsilon_۱^{-۱}(\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-۱}(\alpha)) \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\Psi_۱(y_۱) \ldots \mathrm{d}\Psi_m(y_m) \\ \textit{subject to:} \\ \qquad \int_{\Re^m} G_j(\boldsymbol{x}, y_۱, \ldots, y_m) \mathrm{d}\Psi_۱(y_۱) \ldots \mathrm{d}\Psi_m(y_m) \ge \alpha_j, \;\; j = ۱, ۲, \ldots, p \end{cases}$$

معادل است که در آن $G_j(\boldsymbol{x}, y_۱, \ldots, y_m)$ ریشه α از معادله

$$g_j(\boldsymbol{x}, y_۱, \ldots, y_m, \Upsilon_۱^{-۱}(\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-۱}(\alpha)) = ۰ \qquad (\text{آ.۱۲۶})$$

برای $j = ۱, ۲, \ldots, p$ است.

برهان: حکم از قضیه‌های آ.۳۰ و آ.۳۱ مستقیماً نتیجه می‌شود.

پس از آن که مساله برنامه‌ریزی تصادفی نایقین به یک مساله قطعی برنامه‌ریزی ریاضی تبدیل شد، می‌توان برای حل آن از روش‌های متداول عددی (مانند روش‌های تکراری) و یا الگوریتم‌های هوشمند (مانند الگوریتم ژنتیک) استفاده کرد.

آ.۱۰ تحلیل ریسک تصادفی نایقین

بررسی تحلیل ریسک تصادفی نایقین ابتدا توسط لیو ـ رالسکو [۱۱۵] با ارائه مفهوم شاخص ریسک آغاز شد.

تعریف آ.۹ *[۱۱۵] فرض کنید یک سیستم عامل‌های تصادفی نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ را شامل است و تابع زیان آن f است. شاخص ریسک یک اندازه شانس است که سیستم زیان مثبت است، یعنی*

$$\text{ریسک} = \mathrm{Ch}\{f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) > ۰\}. \qquad (\text{آ.۱۲۷})$$

اگر همه عامل‌های تصادفی نایقین به متغیرهای تصادفی تباهیده باشند، آنگاه شاخص ریسک یک اندازه احتمال است که سیستم یک زیان ـ مثبت است [۱۴۰]. اگر همه عامل‌های تصادفی نایقین به متغیرهای نایقین تباهیده باشند، آنگاه شاخص ریسک یک اندازه نایقین است که سیستم یک زیان ـ مثبت است [۹۰].

قضیه آ.۳۳ *فرض کنید یک سیستم شامل عامل‌های تصادفی نایقین $\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n$ است و تابع زیان آن f است. اگر $f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ توزیع شانس Φ داشته باشد، آنگاه شاخص ریسک به صورت*

$$\text{ریسک} = ۱ - \Phi(۰) \qquad (\text{آ.۱۲۸})$$

است.

برهان: از تعریف شاخص ریسک و خودـ دوگانی اندازه شانس نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\text{ریسک} &= \mathrm{Ch}\{f(\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_n)>۰\}\\ &= ۱-\mathrm{Ch}\{f(\xi_۱,\xi_۲,\ldots,\xi_n)\le ۰\}\\ &= ۱-\Phi(۰).\end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

قضیه آ.۳۴ ([۱۱۵]، قضیه شاخص ریسک) *فرض کنید یک سیستم شامل عامل‌های تصادفی مستقل $\eta_۱,\eta_۲,\ldots,\eta_m$ با توزیع‌های احتمال $\Psi_۱,\Psi_۲,\ldots,\Psi_m$ و عامل‌های نایقین مستقل $\tau_۱,\tau_۲,\ldots,\tau_n$ با توزیع‌های نایقینی $\Upsilon_۱,\Upsilon_۲,\ldots,\Upsilon_n$ است. اگر تابع زیان f باشد، آنگاه شاخص ریسک به صورت*

$$Risk=\int_{\Re^m} G(y_۱,\ldots,y_m)\mathrm{d}\Psi_۱(y_۱)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m) \tag{آ.۱۲۹}$$

است که در آن

$$G(y_۱,\ldots,y_m)=\mathcal{M}\{f(y_۱,\ldots,y_m,\tau_۱,\ldots,\tau_n)>۰\} \tag{آ.۱۳۰}$$

با $\Upsilon_۱,\Upsilon_۲,\ldots,\Upsilon_n$ مشخص می‌شود.

برهان: از تعریف شاخص ریسک و قضیه آ.۶ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\text{ریسک} &= \mathrm{Ch}\{f(\eta_۱,\ldots,\eta_m,\tau_۱,\ldots,\tau_n)>۰\}\\ &= \int_۰^۱ \Pr\{\omega\in\Omega\,|\,\mathcal{M}\{f(\eta_۱(\omega),\ldots,\eta_m(\omega),\tau_۱,\ldots,\tau_n)>۰\}\ge r\}\,\mathrm{d}r\\ &= \int_{\Re^m}\mathcal{M}\{f(y_۱,\ldots,y_m,\tau_۱,\ldots,\tau_n)>۰\}\mathrm{d}\Psi_۱(y_۱)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m)\\ &= \int_{\Re^m} G(y_۱,\ldots,y_m)\mathrm{d}\Psi_۱(y_۱)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m).\end{aligned}$$

پس قضیه ثابت شد.

تمرین آ.۲۰: (سیستم سری) یک سیستم سری در نظر بگیرید که در آن m عضو وجود دارند که طول عمر آنها متغیرهای تصادفی مستقل $\eta_۱,\eta_۲,\ldots,\eta_m$ با توزیع‌های احتمال پیوسته $\Psi_۱,\Psi_۲,\ldots,\Psi_m$ هستند و n عضو که طول عمر آنها متغیرهای نایقین مستقل $\tau_۱,\tau_۲,\ldots,\tau_n$ با توزیع‌های نایقینی پیوسته $\Upsilon_۱,\Upsilon_۲,\ldots,\Upsilon_n$ هستند. اگر زیان وقتی اتفاق افتد که سیستم قبل از زمان T از کار بیفتند، آنگاه تابع زیان به صورت

$$f=T-\eta_۱\wedge\eta_۲\wedge\ldots\wedge\eta_m\wedge\tau_۱\wedge\tau_۲\wedge\ldots\wedge\tau_n. \tag{آ.۱۳۱}$$

است. نشان دهید شاخص ریسک به صورت

$$\text{ریسک}=a+b-ab \tag{آ.۱۳۲}$$

است که در آن

$$a = ۱ - (۱ - \Psi_۱(T))(۱ - \Psi_۲(T)) \ldots (۱ - \Psi_m(T)), \qquad (\text{آ.۱۳۳})$$

$$b = \Upsilon_۱(T) \vee \Upsilon_۲(T) \vee \ldots \vee \Upsilon_n(T). \qquad (\text{آ.۱۳۴})$$

تمرین آ.۲۱: (سیستم موازی) یک سیستم موازی در نظر بگیرید که در آن m عضو وجود دارند که طول عمر آنها متغیرهای تصادفی مستقل $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ با توزیع‌های احتمال پیوسته $\Psi_۱, \Psi_۲, \ldots, \Psi_m$ هستند و n عضو که طول عمر آنها متغیرهای نایقین مستقل $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ با توزیع‌های نایقینی پیوسته $\Upsilon_۱, \Upsilon_۲, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. اگر زیان اتفاق افتد که سیستم قبل از زمان T از کار بیفتند، آنگاه تابع زیان به صورت

$$f = T - \eta_۱ \vee \eta_۲ \vee \ldots \vee \eta_m \vee \tau_۱ \vee \tau_۲ \vee \ldots \vee \tau_n. \qquad (\text{آ.۱۳۵})$$

نشان دهید شاخص ریسک به صورت

$$\text{ریسک} = ab \qquad (\text{آ.۱۳۶})$$

که در آن

$$a = \Psi_۱(T)\Psi_۲(T) \ldots \Psi_m(T), \qquad (\text{آ.۱۳۷})$$

$$b = \Upsilon_۱(T) \wedge \Upsilon_۲(T) \wedge \ldots \wedge \Upsilon_n(T). \qquad (\text{آ.۱۳۸})$$

قضیه آ.۳۵ ([۱۱۵]، قضیه شاخص ریسک) *فرض کنید یک سیستم شامل عامل‌های تصادفی مستقل $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ با توزیع‌های احتمال $\Psi_۱, \Psi_۲, \ldots, \Psi_m$ و عامل‌های نایقین مستقل $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ با توزیع‌های نایقینی منظم $\Upsilon_۱, \Upsilon_۲, \ldots, \Upsilon_n$ است. اگر تابع زیان $f(\eta_۱, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \ldots, \tau_n)$ پیوسته و افزایشی اکید نسبت به $\tau_۱, \ldots, \tau_k$ و کاهشی اکید نسبت به $\tau_{k+۱}, \ldots, \tau_n$ باشد، آنگاه شاخص ریسک به صورت*

$$\text{ریسک} = \int_{\Re^m} G(y_۱, \ldots, y_m) \mathrm{d}\Psi_۱(y_۱) \ldots \mathrm{d}\Psi_m(y_m) \qquad (\text{آ.۱۳۹})$$

است که در آن $G(y_۱, \ldots, y_m)$ ریشه α از معادله

$$f(y_۱, \ldots, y_m, \Upsilon_۱^{-۱}(۱-\alpha), \ldots, \Upsilon_k^{-۱}(۱-\alpha), \Upsilon_{k+۱}^{-۱}(\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-۱}(\alpha)) = ۰$$

است.

برهان: چون $G(y_۱, \ldots, y_m) = \mathcal{M}\{f(y_۱, \ldots, y_m, \tau_۱, \ldots, \tau_n) > ۰\}$ همان ریشه α از معادله

$$f(y_۱, \ldots, y_m, \Upsilon_۱^{-۱}(۱-\alpha), \ldots, \Upsilon_k^{-۱}(۱-\alpha), \Upsilon_{k+۱}^{-۱}(\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-۱}(\alpha)) = ۰,$$

است، حکم از قضیه آ.۳۴ نتیجه می‌شود.

تمرین آ.۲۲: (سیستم k از $m+n$) یک سیستم k از $m+n$ را در نظر بگیرید که در آن m عضو وجود دارند که طول عمر آنها متغیرهای تصادفی مستقل $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ با توزیع‌های احتمال پیوسته $\Psi_۱, \Psi_۲, \ldots, \Psi_m$ و n عضو نیز وجود دارند که طول عمر آنها متغیرهای مستقل نایقین $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ با توزیع‌های نایقینی منظم $\Upsilon_۱, \Upsilon_۲, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. اگر زیان وقتی اتفاق افتد که سیستم قبل از زمان T از کار بیفتند، آنگاه تابع زیان به صورت

$$f = T - k\text{\_}\max[\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n] \tag{آ.۱۴۰}$$

است. نشان دهید اندازه ریسک به صورت

$$\text{ریسک} = \int_{\Re^m} G(y_۱, y_۲, \ldots, y_m)\mathrm{d}\Psi_۱(y_۱)\mathrm{d}\Psi_۲(y_۲)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m) \tag{آ.۱۴۱}$$

است که در آن $G(y_۱, y_۲, \ldots, y_m)$ ریشه α از معادله

$$k\text{\_}\max[y_۱, y_۲, \ldots, y_m, \Upsilon_۱^{-۱}(\alpha), \Upsilon_۲^{-۱}(\alpha), \ldots, \Upsilon_n^{-۱}(\alpha)] = T \tag{آ.۱۴۲}$$

است.

تمرین آ.۲۳: (سیستم در انتظار) یک سیستم در انتظار را در نظر بگیرید که در آن m عضو وجود دارند که طول عمر آنها متغیرهای تصادفی مستقل $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ با توزیع‌های احتمال پیوسته $\Psi_۱, \Psi_۲, \ldots, \Psi_m$ و n عضو نیز وجود دارند که طول عمر آنها متغیرهای مستقل نایقین $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ با توزیع‌های نایقینی منظم $\Upsilon_۱, \Upsilon_۲, \ldots, \Upsilon_n$ هستند. اگر زیان وقتی اتفاق افتد که سیستم قبل از زمان T از کار بیفتد، آنگاه تابع زیان به صورت

$$f = T - (\eta_۱ + \eta_۲ + \cdots + \eta_m + \tau_۱ + \tau_۲ + \cdots + \tau_n) \tag{آ.۱۴۳}$$

است و نشان دهید شاخص ریسک به صورت

$$\text{ریسک} = \int_{\Re^m} G(y_۱, y_۲, \ldots, y_m)\mathrm{d}\Psi_۱(y_۱)\mathrm{d}\Psi_۲(y_۲)\ldots\mathrm{d}\Psi_m(y_m) \tag{آ.۱۴۴}$$

که در آن $G(y_۱, y_۲, \ldots, y_m)$ ریشه α از معادله

$$\Upsilon_۱^{-۱}(\alpha) + \Upsilon_۲^{-۱}(\alpha) + \cdots + \Upsilon_n^{-۱}(\alpha) = T - (y_۱ + y_۲ + \cdots + y_m) \tag{آ.۱۴۵}$$

است.

نکته آ.۱۲: به عنوان یک جایگزین برای شاخص ریسک، لیو ـ رالسکو [۱۱۷] مفهوم دارایی ـ در ـ خطر

$$\mathrm{VaR}(\alpha) = \sup\{x \mid \mathrm{Ch}\{f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n) \geq x\} \geq \alpha\} \tag{آ.۱۴۶}$$

را پیشنهاد کردند. توجه کنید که $\mathrm{VaR}(\alpha)$ نشان دهنده امکان بیشینه زیان است وقتی که α درصد از چولگی راست توزیع صرف نظر شود. به بیان دیگر، زیان با اندازه شانس α از $\mathrm{VaR}(\alpha)$ بیشتر خواهد شد. اگر توزیع شانس $\Phi(x)$ برای $f(\xi_۱, \xi_۲, \ldots, \xi_n)$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\mathrm{VaR}(\alpha) = \sup\{x \mid \Phi(x) \leq ۱ - \alpha\}. \tag{آ.۱۴۷}$$

اگر توزیع شانس معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ موجود باشد، آنگاه

$$\mathrm{VaR}(\alpha) = \Phi^{-1}(1 - \alpha). \tag{آ.۱۴۸}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $\mathrm{VaR}(\alpha)$ یک تابع کاهشی یکنوا نسبت به α است. وقتی متغیرهای تصادفی نایقین به متغیرهای تصادفی تباهیده شوند، دارایی‌ـ‌در‌ـ‌خطر از نوع مورگان خواهد بود [۱۲۳]. وقتی متغیرهای تصادفی نایقین به متغیرهای نایقین تباهیده شوند، دارایی‌ـ‌در‌ـ‌خطر از نوع پِنگ خواهد بود [۱۳۰].

نکته آ.۱۳: لیوـ‌رالسکو [۱۱۹] مفهوم زیان مورد انتظار را پیشنهاد کردند که همان مقدار مورد انتظار ضرر $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ است با این فرض که $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) > 0$. یعنی

$$L = \int_0^{+\infty} \mathrm{Ch}\{f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \geq x\}\mathrm{d}x. \tag{آ.۱۴۹}$$

اگر $\Phi(x)$ توزیع شانس زیان $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ باشد، آنگاه مستقیماً داریم

$$L = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))\mathrm{d}x. \tag{آ.۱۵۰}$$

اگر توزیع شانس معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ موجود باشد، آنگاه زیان مورد انتظار به صورت

$$L = \int_0^1 \left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)^+ \mathrm{d}\alpha \tag{آ.۱۵۱}$$

است.

آ.۱۱ تحلیل اطمینان‌پذیری تصادفی نایقین

بررسی تحلیل اطمینان‌پذیری تصادفی نایقین توسط وِن‌ـ کانگ [۱۶۴] با معرفی شاخص اطمینان‌پذیری آغاز شد.

تعریف آ.۱۰ [۱۶۴] *فرض کنید یک سیستم بولی شامل متغیرهای تصادفی نایقین* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *است و تابع ساختار* f *است. شاخص اطمینان‌پذیری یک متغیر شانس است که سیستم کار می‌کند، یعنی*

$$\text{اطمینان‌پذیری} = \mathrm{Ch}\{f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 1\}. \tag{آ.۱۵۲}$$

اگر همه عناصر تصادفی نایقین به عناصر تصادفی تباهیده باشند، آنگاه شاخص اطمینان‌پذیری یک اندازه احتمال است که سیستم کار می‌کند. اگر همه عناصر تصادفی نایقین به عناصر نایقین تباهید شوند، آنگاه شاخص اطمینان‌پذیری یک اندازه نایقین [۹۰] که سیستم کار می‌کند.

قضیه آ.۳۶ ([۱۶۴]، قضیه شاخص اطمینان‌پذیری) *فرض کنید تابع ساختار یک سیستم* f *است و شامل متغیرهای تصادفی مستقل* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ *با اطمینان‌پذیری* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *و متغیرهای*

نایقین مستقل $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ با اطمینان‌پذیری $b_۱, b_۲, \ldots, b_n$ است. آنگاه شاخص اطمینان‌پذیری به صورت

$$\text{اطمینان‌پذیری} = \sum_{(x_۱,\ldots,x_m)\in\{۰,۱\}^m} \left(\prod_{i=۱}^{m} \mu_i(x_i)\right) f^*(x_۱, \ldots, x_m) \qquad (\text{آ.۱۵۳})$$

است که در آن

$$f^*(x_۱,\ldots,x_m) = \begin{cases} \sup\limits_{f(x_۱,\ldots,x_m,y_۱,\ldots,y_n)=۱} \min\limits_{۱\le j\le n} \nu_j(y_j), \\ \quad \text{اگر } \sup\limits_{f(x_۱,\ldots,x_m,y_۱,\ldots,y_n)=۱} \min\limits_{۱\le j\le n} \nu_j(y_j) < ۰/۵ \\ ۱ - \sup\limits_{f(x_۱,\ldots,x_m,y_۱,\ldots,y_n)=۰} \min\limits_{۱\le j\le n} \nu_j(y_j), \\ \quad \text{اگر } \sup\limits_{f(x_۱,\ldots,x_m,y_۱,\ldots,y_n)=۱} \min\limits_{۱\le j\le n} \nu_j(y_j) \ge ۰/۵ \end{cases} \qquad (\text{آ.۱۵۴})$$

$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} a_i, & \text{اگر } x_i = ۱ \\ ۱ - a_i, & \text{اگر } x_i = ۰ \end{cases} \qquad (i = ۱, ۲, \ldots, m), \qquad (\text{آ.۱۵۵})$$

$$\nu_j(y_j) = \begin{cases} b_j, & \text{اگر } y_j = ۱ \\ ۱ - b_j, & \text{اگر } y_j = ۰ \end{cases} \qquad (j = ۱, ۲, \ldots, n). \qquad (\text{آ.۱۵۶})$$

برهان: از تعریف آ.۱۰ و قضیه آ.۱۴ مستقیماً نتیجه می‌شود.

تمرین آ.۲۴: (سیستم سری) یک سیستم سری در نظر بگیرید که در آن m عضو تصادفی مستقل $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ با اطمینان‌پذیری $a_۱, a_۲, \ldots, a_m$ و n عضو نایقین مستقل $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ با اطمینان‌پذیری $b_۱, b_۲, \ldots$، b_n وجود دارند. توجه کنید که تابع ساختار به صورت

$$f = \eta_۱ \wedge \eta_۲ \wedge \ldots \wedge \eta_m \wedge \tau_۱ \wedge \tau_۲ \wedge \ldots \wedge \tau_n. \qquad (\text{آ.۱۵۷})$$

است. نشان دهید شاخص اطمینان‌پذیری به صورت

$$\text{اطمینان‌پذیری} = a_۱ a_۲ \ldots a_m (b_۱ \wedge b_۲ \wedge \ldots \wedge b_n) \qquad (\text{آ.۱۵۸})$$

است.

تمرین آ.۲۵: (سیستم موازی) یک سیستم موازی در نظر بگیرید که در آن m عضو تصادفی مستقل $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ با اطمینان‌پذیری $a_۱, a_۲, \ldots, a_m$ و n عضو نایقین مستقل $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ با اطمینان‌پذیری $b_۱, b_۲, \ldots$، b_n وجود دارند. توجه کنید که تابع ساختار به صورت

$$f = \eta_۱ \vee \eta_۲ \vee \ldots \vee \eta_m \vee \tau_۱ \vee \tau_۲ \vee \ldots \vee \tau_n \qquad (\text{آ.۱۵۹})$$

است. نشان دهید شاخص اطمینان‌پذیری به صورت

$$\text{اطمینان‌پذیری} = ۱ - (۱ - a_۱)(۱ - a_۲)\ldots(۱ - a_m)(۱ - b_۱ \vee b_۲ \vee \ldots \vee b_n) \quad (\text{آ.۱۶۰})$$

است.

تمرین آ.۲۶: (سیستم k از n) یک سیستم k از n در نظر بگیرید که در آن m عضو تصادفی مستقل $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m$ با اطمینان‌پذیری $a_۱, a_۲, \ldots, a_m$ و n عضو نایقین مستقل $\tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n$ با اطمینان‌پذیری $b_۱, b_۲, \ldots$، b_n وجود دارند. توجه کنید که تابع ساختار به صورت

$$f = k\text{\_}\max\left[\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_m, \tau_۱, \tau_۲, \ldots, \tau_n\right] \quad (\text{آ.۱۶۱})$$

است. نشان دهید

$$\text{اطمینان‌پذیری} = \sum_{(x_۱,\ldots,x_m)\in\{۰,۱\}^m} \left(\prod_{i=۱}^{m} \mu_i(x_i)\right) k\text{\_}\max\left[x_۱, \ldots, x_m, b_۱, \ldots, b_n\right]$$

که در آن

$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} a_i, & \text{اگر } x_i = ۱ \\ ۱ - a_i, & \text{اگر } x_i = ۰ \end{cases} \qquad (i = ۱, ۲, \ldots, m). \quad (\text{آ.۱۶۲})$$

آ.۱۲ گراف تصادفی نایقین

در نظریه گراف کلاسیک، یال‌ها و راس‌ها قطعی هستند، یا وجود دارند یا وجود ندارند. در حالی که در کاربردهای خاصی، بدون شک برخی عوامل نایقین در گراف‌ها ظاهر می‌شوند. پس، فرض این که برخی از یال‌ها با یک اندازه احتمال وجود دارند و برخی دیگر با اندازه نایقین، منطقی است. برای مدل بندی چنین گراف‌هایی، لیو [۱۰۰] مفهوم گراف تصادفی نایقین را مطرح کرد.

گوییم یک گراف از مرتبه n است اگر n راس آن با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, n$ برچسب‌گذاری شود. در این بخش فرض می‌کنیم گراف همواره از مرتبه n است و مجموعه راس‌ها را با

$$\mathcal{V} = \{۱, ۲, \ldots, n\}. \quad (\text{آ.۱۶۳})$$

نشان می‌دهیم. دو گردایه زیر از یال‌ها را تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{U} = \{(i,j) \mid ۱ \le i < j \le n \text{ یال‌های نایقین هستند } (i,j)\}, \quad (\text{آ.۱۶۴})$$

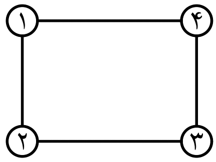
$$\mathcal{R} = \{(i,j) \mid ۱ \le i < j \le n \text{ یال‌های تصادفی هستند } (i,j)\}. \quad (\text{آ.۱۶۵})$$

توجه کنید که در اینجا تمامی یال‌های قطعی متغیرهای نایقین خاص در نظر گرفته می‌شوند. پس $\mathcal{U} \cup \mathcal{R} = \{(i,j) \mid ۱ \le i < j \le n\}$ شامل $n(n-۱)/۲$ یال است.

ماتریس

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \alpha_{۱۲} & \ldots & \alpha_{۱n} \\ \alpha_{۲۱} & \alpha_{۲۲} & \ldots & \alpha_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n۱} & \alpha_{n۲} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{آ.۱۶۶})$$

را **ماتریس همسایگی تصادفی نایقین** نامیم اگر α_{ij} نشان دهنده مقدارهای اندازه نایقین یا اندازه احتمال است که یال بین راس‌های i و j برای $i,j = ۱,۲,\ldots,n$ وجود دارد. توجه کنید که برای $i = ۱,۲,\ldots,n$، $\alpha_{ii} = ۰$ و ماتریس $\mathcal{T}$ متقارن است، یعنی برای $i,j = ۱,۲,\ldots,n$، $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.



$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰/۸ & ۰ & ۰/۵ \\ ۰/۸ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰/۳ \\ ۰/۵ & ۰ & ۰/۳ & ۰ \end{pmatrix}$$

شکل آ.۲: یک گراف تصادفی نایقین

تعریف آ.۱۱ [۱۰۰] *فرض کنید $\mathcal{V}$ گردایه‌ای از راس‌ها و $\mathcal{U}$ گردایه‌ای از یال‌های نایقین است. همچنین فرض کنید $\mathcal{R}$ گردایه‌ای از یال‌های تصادفی است و $\mathcal{T}$ ماتریس همسایگی تصادفی نایقین است. پس چهارتایی $(\mathcal{V},\mathcal{U},\mathcal{R},\mathcal{T})$ را یک گراف تصادفی نایقین گوییم.*

توجه کنید که گراف تصادفی نایقین به **گراف تصادفی** تبدیل می‌شود ([۳۲]، [۵۶]) اگر گردایه $\mathcal{U}$ از یال‌های نایقین تهی باشد؛ و به **گراف نایقین** تبدیل می‌شود هرگاه گردایه $\mathcal{R}$ از یال‌های تصادفی تهی باشد.

برای بررسی گراف تصادفی نایقین چند نماد را معرفی می‌کنیم. ماتریس

$$X = \begin{pmatrix} x_{۱۱} & x_{۱۲} & \cdots & x_{۱n} \\ x_{۲۱} & x_{۲۲} & \cdots & x_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n۱} & x_{n۲} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \tag{آ.۱۶۷}$$

و

$$\mathbb{X} = \left\{ X \,\middle|\, \begin{array}{ll} x_{ij} = ۰ \text{ یا } ۱, & \text{اگر } (i,j) \in \mathcal{R} \\ x_{ij} = ۰, & \text{اگر } (i,j) \in \mathcal{U} \\ x_{ij} = x_{ji},\ i,j = ۱,۲,\ldots,n & \\ x_{ii} = ۰, & i = ۱,۲,\ldots,n \end{array} \right\}. \tag{آ.۱۶۸}$$

را در نظر بگیرید. برای هر ماتریس معلوم

$$Y = \begin{pmatrix} y_{۱۱} & y_{۱۲} & \cdots & y_{۱n} \\ y_{۲۱} & y_{۲۲} & \cdots & y_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n۱} & y_{n۲} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}, \tag{آ.۱۶۹}$$

کلاس تعمیم Y با

$$Y^* = \left\{ X \mid \begin{array}{ll} x_{ij} = y_{ij}, & (i,j) \in \mathcal{R} \text{ اگر} \\ x_{ij} = \text{۰ یا ۱}, & (i,j) \in \mathcal{U} \text{ اگر} \\ x_{ij} = x_{ji},\ i,j = ۱,۲,\dots,n & \\ x_{ii} = ۰, & i = ۱,۲,\dots,n \end{array} \right\}. \quad \text{(آ.۱۷۰)}$$

تعریف می‌شود.

مثال آ.۵: ([۱۰۰]، شاخص همبندی) یک گراف تصادفی نایقین برای برخی تحققها از یال‌های نایقین و تصادفی همبند است، و برخی تحققهای دیگر نیر ناهمبند است. برای نشان دادن این که یک گراف تصادفی نایقین تا چه اندازه همبند است، شاخص همبندی یک گراف تصادفی نایقین را به صورت اندازه شانس که این گراف همبند باشد تعریف می‌کنیم. فرض کنید $(\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{R}, \mathcal{T})$ یک گراف تصادفی نایقین است. لیو [۱۰۰] ثابت کرد که شاخص همبندی به صورت

$$\rho = \sum_{Y \in \mathbb{X}} \left(\prod_{(i,j)\in\mathcal{R}} \nu_{ij}(Y) \right) f^*(Y) \quad \text{(آ.۱۷۱)}$$

است که در آن

$$f^*(Y) = \begin{cases} \sup\limits_{X\in Y^*,\, f(X)=۱} \min\limits_{(i,j)\in\mathcal{U}} \nu_{ij}(X), & \sup\limits_{X\in Y^*,\, f(X)=۱} \min\limits_{(i,j)\in\mathcal{U}} \nu_{ij}(X) < ۰/۵ \text{ اگر} \\ ۱ - \sup\limits_{X\in Y^*,\, f(X)=۰} \min\limits_{(i,j)\in\mathcal{U}} \nu_{ij}(X), & \sup\limits_{X\in Y^*,\, f(X)=۱} \min\limits_{(i,j)\in\mathcal{U}} \nu_{ij}(X) \ge ۰/۵ \text{ اگر} \end{cases}$$

$$\nu_{ij}(X) = \begin{cases} \alpha_{ij}, & x_{ij} = ۱ \text{ اگر} \\ ۱ - \alpha_{ij}, & x_{ij} = ۰ \text{ اگر} \end{cases} \quad (i,j) \in \mathcal{U}, \quad \text{(آ.۱۷۲)}$$

$$f(X) = \begin{cases} ۱, & I + X + X^۲ + \cdots + X^{n-۱} > ۰ \text{ اگر} \\ ۰, & \text{درغیراینصورت}, \end{cases} \quad \text{(آ.۱۷۳)}$$

در اینجا $\mathbb{X}$ و Y^* به ترتیب با رابطه‌های (آ.۱۶۸) و (آ.۱۷۰) تعریف می‌شوند.

نکته آ.۱۴: اگر گراف تصادفی نایقین به یک گراف تصادفی تبدیل شود؛ آنگاه شاخص همبندی

$$\rho = \sum_{X \in \mathbb{X}} \left(\prod_{۱\le i<j\le n} \nu_{ij}(X) \right) f(X) \quad \text{(آ.۱۷۴)}$$

است که درآن

$$\mathbb{X} = \left\{ X \mid \begin{array}{ll} x_{ij} = \text{۰ یا ۱}, & i,j = ۱,۲,\dots,n \\ x_{ij} = x_{ji}, & i,j = ۱,۲,\dots,n \\ x_{ii} = ۰, & i = ۱,۲,\dots,n \end{array} \right\}. \quad \text{(آ.۱۷۵)}$$

نکته آ.۱۵: [۴۸] اگر گراف تصادفی نایقین به یک گراف نایقین تبدیل شود، آنگاه شاخص همبندی

$$\rho = \begin{cases} \sup\limits_{X\in\mathbb{X}, f(X)=۱} \min\limits_{۱\le i<j\le n} \nu_{ij}(X), & \text{اگر } \sup\limits_{X\in\mathbb{X}, f(X)=۱} \min\limits_{۱\le i<j\le n} \nu_{ij}(X) < ۰/۵ \\ ۱ - \sup\limits_{X\in\mathbb{X}, f(X)=۰} \min\limits_{۱\le i<j\le n} \nu_{ij}(X), & \text{اگر } \sup\limits_{X\in\mathbb{X}, f(X)=۱} \min\limits_{۱\le i<j\le n} \nu_{ij}(X) \ge ۰/۵ \end{cases}$$

است که در آن $\mathbb{X}$ به صورت

$$\mathbb{X} = \left\{ X \mid \begin{array}{ll} x_{ij} = ۰ \text{ یا } ۱, & i,j = ۱,۲,\ldots,n \\ x_{ij} = x_{ji}, & i,j = ۱,۲,\ldots,n \\ x_{ii} = ۰, & i = ۱,۲,\ldots,n \end{array} \right\}. \quad (\text{آ.۱۷۶})$$

است.

تمرین آ.۲۷: [۲۱۰] یک دور اویلری در یک گراف دوری است که از تمام یال‌های گراف تنها یک بار عبور می‌کند. به بیان دیگر، یک گراف دور اویلری دارد اگر بتوان شکل آن را روی کاغذ بدون برداشتن قلم و هر یال را تنها یک بار رسم کرد. ثابت شده است که یک گراف اویلری است اگر و تنها اگر درجه هر راس زوج باشد (یعنی تعداد یال‌های مجاور در یک یال). برای اندازه گیری میزان داشتن دور اویلری در یک گراف تصادفی نایقین، شاخص اویلر به صورت اندازه شانس این که گراف تصادفی نایقین دور اویلری دارد؛ تعریف می‌شود. فرمولی برای محاسبه شاخص اویلر ارائه کنید.

آ.۱۳ شبکه تصادفی نایقین

عبارت **شبکه** با گراف وزن‌دار مترادف است که در آن وزن ممکن است به عنوان هزینه، فاصله و یا زمان طی شدن در نظر گرفته شود. فرض کنید در یک شبکه برخی از وزن‌ها متغیرهای تصادفی و برخی دیگر متغیرهای نایقین هستند. برای مدل بندی چنین شبکه‌ای، لیو [۱۰۰] مفهوم شبکه تصادفی نایقین را ارائه داد.

در این بخش، فرض می‌کنیم شبکه تصادفی نایقین همواره از مرتبه n است و گردایه گره‌ها با

$$\mathcal{N} = \{۱,۲,\ldots,n\} \quad (\text{آ.۱۷۷})$$

نشان داده می‌شئند که در آن ۱ همواره گره مبدا و n همواره گره مقصد است. دو گردایه از کمان‌ها را به صورت

$$\mathcal{U} = \{(i,j) \mid (i,j) \text{ کمان‌های نایقین هستند}\} \quad (\text{آ.۱۷۸})$$

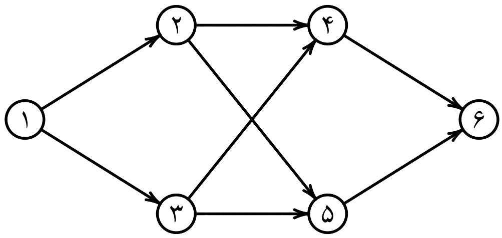
$$\mathcal{R} = \{(i,j) \mid (i,j) \text{ کمان‌های تصادفی هستند}\} \quad (\text{آ.۱۷۹})$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که همه کمان‌های قطعی را به عنوان حالت خاصی از متغیرهای نایقین در نظر می‌گیریم. فرض کنید w_{ij} وزن کمان (i,j) را نشان دهد که $(i,j)\in\mathcal{U}\cup\mathcal{R}$. پس w_{ij} متغیر نایقین است اگر $(i,j)\in\mathcal{U}$ و متغیر تصادفی است اگر $(i,j)\in\mathcal{R}$. فرض کنید

$$\mathcal{W} = \{w_{ij} \mid (i,j)\in\mathcal{U}\cup\mathcal{R}\}. \quad (\text{آ.۱۸۰})$$

تعریف آ.۱۲ [۱۰۰] *فرض کنید $\mathcal{N}$ گردایه‌ای از گره‌ها، $\mathcal{U}$ گردایه‌ای از کمان‌های نایقین، $\mathcal{R}$ گردایه‌ای از کمان‌های تصادفی، و $\mathcal{W}$ گردایه‌ای از وزن‌های تصادفی و نایقین است. چهارتایی $(\mathcal{N}, \mathcal{U}, \mathcal{R}, \mathcal{W})$ یک شبکه تصادفی نایقین نامیده می‌شود.*

توجه کنید که شبکه تصادفی نایقین،اگر همه وزن‌ها متغیرهای تصادفی باشند، به یک **شبکه تصادفی** تبدیل می‌شود [۳۳] ؛ و اگر همه وزن‌ها متغیرهای نایقین باشند، به یک **شبکه نایقین** تبدیل می‌شود.



شکل آ.۳: یک شبکه تصادفی نایقین

شکل آ.۳ یک شبکه تصادفی نایقین $(\mathcal{N}, \mathcal{U}, \mathcal{R}, \mathcal{W})$ از مرتبه ۶ را نشان می‌دهد که در آن

$$\mathcal{N} = \{۱,\ ۲,\ ۳,\ ۴,\ ۵,\ ۶\}, \tag{آ.۱۸۱}$$

$$\mathcal{U} = \{(۱, ۲),\ (۱, ۳),\ (۲, ۴),\ (۲, ۵),\ (۳, ۴),\ (۳, ۵)\}, \tag{آ.۱۸۲}$$

$$\mathcal{R} = \{(۴, ۶),\ (۵, ۶)\}, \tag{آ.۱۸۳}$$

$$\mathcal{W} = \{w_{۱۲},\ w_{۱۳},\ w_{۲۴},\ w_{۲۵},\ w_{۳۴},\ w_{۳۵},\ w_{۴۶},\ w_{۵۶}\}. \tag{آ.۱۸۴}$$

مثال آ.۶: ([۱۰۰]، توزیع کوتاه‌ترین مسیر) شبکه تصادفی نایقین $(\mathcal{N}, \mathcal{U}, \mathcal{R}, \mathcal{W})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید وزن‌های نایقین w_{ij} توزیع‌های نایقینی منظم Υ_{ij} برای هر $(i, j) \in \mathcal{U}$، و وزن‌های تصادفی w_{ij} توزیع‌های احتمال Ψ_{ij} برای $(i, j) \in \mathcal{R}$ دارند. پس توزیع کوتاه‌ترین مسیر از گره مبدا به گره مقصد به صورت

$$\Phi(x) = \int_{۰}^{+\infty} \cdots \int_{۰}^{+\infty} F(x; y_{ij}, (i, j) \in \mathcal{R}) \prod_{(i,j)\in\mathcal{R}} \mathrm{d}\Psi_{ij}(y_{ij}) \tag{آ.۱۸۵}$$

است که در آن $F(x; y_{ij}, (i, j) \in \mathcal{R})$ ریشه α از معادله

$$f(\Upsilon_{ij}^{-۱}(\alpha), (i, j) \in \mathcal{U};\ y_{ij}, (i, j) \in \mathcal{R}) = x \tag{آ.۱۸۶}$$

است و f طول کوتاه‌ترین مسیر است و اگر وزن‌ها برای $(i, j) \in \mathcal{R}$ به صورت y_{ij} و برای $(i, j) \in \mathcal{U}$ به صورت $\Upsilon_{ij}^{-۱}(\alpha)$ باشند، می‌توان با استفاده از الگوریتم دایکسترا [۲۷] محاسبه کرد.

نکته آ.۱۶: اگر شبکه تصادفی نایقین به یک شبکه تصادفی تبدیل شود، آنگاه توزیع کوتاه‌ترین مسیر به صورت

$$\Phi(x) = \int_{f(y_{ij},(i,j)\in\mathcal{R})\le x} \prod_{(i,j)\in\mathcal{R}} \mathrm{d}\Psi_{ij}(y_{ij}) \qquad (\text{آ.۱۸۷})$$

است.

نکته آ.۱۷: [۵۰] اگر شبکه تصادفی نایقین به یک شبکه نایقین تبدیل شود، آنگاه توزیع معکوس کوتاه‌ترین مسیر به صورت

$$\Phi^{-1}(\alpha) = f(\Upsilon_{ij}^{-1}(\alpha),(i,j)\in\mathcal{U}) \qquad (\text{آ.۱۸۸})$$

است.

تمرین آ.۲۸: [۱۴۸] مساله جریان بیشینه پیدا کردن مقدار بیشترین جریان از گره مبدا به گره مقصد در یک شبکه تصادفی نایقین است. توزیع جریان بیشینه چیست؟

آ.۱۴ فرایند تصادفی نایقین

فرایند تصادفی نایقین دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نایقین است که با زمان اندیس گذاری شده اند. تعریف رسمی آن چنین است.

تعریف آ.۱۳ [۳۴] *فرض کنید $(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})\times(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ یک فضای شانس است و T را یک مجموعه مرتب کلی (مانند زمان) در نظر بگیرید. یک فرایند تصادفی نایقین یک تابع مانند $X_t(\gamma,\omega)$ از $T\times(\Gamma,\mathcal{L},\mathcal{M})\times(\Omega,\mathcal{A},\Pr)$ به مجموعه اعداد حقیقی است طوری که برای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی، $\{X_t\in B\}$ در هر زمان t، یک رویداد در $\mathcal{L}\times\mathcal{A}$ است.*

مثال آ.۷: یک فرایند تصادفی دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی اندیس شده با زمان است و بنابراین حالت خاصی از فرایند تصادفی نایقین است.

مثال آ.۸: یک فرایند نایقین دنباله‌ای از متغیرهای نایقین اندیس شده با زمان است و بنابراین حالت خاصی از فرایند تصادفی نایقین است.

مثال آ.۹: فرض کنید Y_t یک فرایند تصادفی و Z_t یک فرایند نایقین است. اگر f یک تابع اندازه‌پذیر باشد، آنگاه

$$X_t = f(Y_t,Z_t) \qquad (\text{آ.۱۸۹})$$

یک فرایند تصادفی نایقین است.

تعریف آ.۱۴ [۳۴] *فرض کنید $\eta_1,\eta_2,\ldots$ متغیرهای تصادفی همتوزیع و $\tau_1,\tau_2,\ldots$ متغیرهای نایقین همتوزیع هستند. همچنین فرض کنید f یک تابع مثبت و یکنوای اکید است. تعریف کنید $S_0=0$ و برای هر $n\ge 1$*

$$S_n = f(\eta_1,\tau_1)+f(\eta_2,\tau_2)+\cdots+f(\eta_n,\tau_n). \qquad (\text{آ.۱۹۰})$$

آنگاه

$$N_t = \max_{n \geq 0} \{n \mid S_n \leq t\} \tag{آ.۱۹۱}$$

یک فرایند تجدید تصادفی نایقین با زمان‌های رسیدن $f(\eta_1, \tau_1), \ldots, f(\eta_2, \tau_2)$ نامیده می‌شود.

قضیه آ.۳۷ [۳۴] *فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \ldots$ متغیرهای تصادفی همتوزیع با توزیع احتمال مشترک Ψ و $\tau_1, \tau_2, \ldots$ متغیرهای نایقین همتوزیع هستند. همچنین فرض کنید f یک تابع مثبت و یکنوای اکید و N_t یک فرایند تجدید تصادفی نایقین با زمان‌های رسیدن $f(\eta_1, \tau_1), f(\eta_2, \tau_2), \ldots$ است. پس تعداد متوسط تجدید وقتی $t \to \infty$، به صورت*

$$\frac{N_t}{t} \to \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau_1) \mathrm{d}\Psi(y)\right)^{-1} \tag{آ.۱۹۲}$$

به مفهوم همگرایی در توزیع است.

برهان: برای هر $n \geq 1$ قرار دهید $S_n = f(\eta_1, \tau_1) + f(\eta_2, \tau_2) + \cdots + f(\eta_n, \tau_n)$. فرض کنید x یک نقطه پیوسته از توزیع نایقینی

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau_1) \mathrm{d}\Psi(y)\right)^{-1}$$

است. واضح است که $1/x$ یک نقطه پیوسته توزیع نایقینی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau_1) \mathrm{d}\Psi(y)$$

است. ابتدا، از تعریف فرایند تجدید تصادفی نایقین نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Ch}\left\{\frac{N_t}{t} \leq x\right\} = \mathrm{Ch}\left\{S_{\lfloor tx \rfloor + 1} > t\right\} = \mathrm{Ch}\left\{\frac{S_{\lfloor tx \rfloor + 1}}{\lfloor tx \rfloor + 1} > \frac{t}{\lfloor tx \rfloor + 1}\right\}$$

که در آن $\lfloor tx \rfloor$ نشان دهنده تابع کف است. چون $\lfloor tx \rfloor \leq tx < \lfloor tx \rfloor + 1$، مستقیماً داریم

$$\frac{\lfloor tx \rfloor}{\lfloor tx \rfloor + 1} \cdot \frac{1}{x} \leq \frac{t}{\lfloor tx \rfloor + 1} < \frac{1}{x}$$

و پس

$$\mathrm{Ch}\left\{\frac{S_{\lfloor tx \rfloor + 1}}{\lfloor tx \rfloor + 1} > \frac{1}{x}\right\} \leq \mathrm{Ch}\left\{\frac{S_{\lfloor tx \rfloor + 1}}{\lfloor tx \rfloor + 1} > \frac{t}{\lfloor tx \rfloor + 1}\right\} \leq \mathrm{Ch}\left\{\frac{S_{\lfloor tx \rfloor + 1}}{\lfloor tx \rfloor} > \frac{1}{x}\right\}.$$

از قانون اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی نایقین نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to \infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{S_{\lfloor tx \rfloor + 1}}{\lfloor tx \rfloor + 1} > \frac{1}{x}\right\} &= 1 - \lim_{t \to \infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{S_{\lfloor tx \rfloor + 1}}{\lfloor tx \rfloor + 1} \leq \frac{1}{x}\right\} \\
&= 1 - \mathcal{M}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau_1) \mathrm{d}\Psi(y) \leq \frac{1}{x}\right\} \\
&= \mathcal{M}\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \tau_1) \mathrm{d}\Psi(y)\right)^{-1} \leq x\right\}
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{S_{\lfloor tx\rfloor+۱}}{\lfloor tx\rfloor}>\frac{۱}{x}\right\}&=۱-\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{\lfloor tx\rfloor+۱}{\lfloor tx\rfloor}\cdot\frac{S_{\lfloor tx\rfloor+۱}}{\lfloor tx\rfloor+۱}\le\frac{۱}{x}\right\}\\&=۱-\mathcal{M}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(y,\tau_۱)\mathrm{d}\Psi(y)\le\frac{۱}{x}\right\}\\&=\mathcal{M}\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(y,\tau_۱)\mathrm{d}\Psi(y)\right)^{-۱}\le x\right\}.\end{aligned}$$

از سه رابطه فوق داریم

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{S_{\lfloor tx\rfloor+۱}}{\lfloor tx\rfloor+۱}>\frac{t}{\lfloor tx\rfloor+۱}\right\}=\mathcal{M}\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(y,\tau_۱)\mathrm{d}\Psi(y)\right)^{-۱}\le x\right\}$$

و لذا

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{N_t}{t}\le x\right\}=\mathcal{M}\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(y,\tau_۱)\mathrm{d}\Psi(y)\right)^{-۱}\le x\right\}.$$

به این ترتیب قضیه ثابت شد.

تمرین آ.۲۹: فرض کنید $\eta_۱,\eta_۲,\ldots$ متغیرهای تصادفی مثبت همتوزیع، و $\tau_۱,\tau_۲,\ldots$ متغیرهای مثبت نایقین هستند و N_t یک فرایند تجدید تصادفی نایقین با زمان‌های رسیدن $\eta_۱+\tau_۱,\eta_۲+\tau_۲,\ldots$ است. نشان دهید وقتی $t\to\infty$

$$\frac{N_t}{t}\to\frac{۱}{E[\eta_۱]+\tau_۱}\tag{آ.۱۹۳}$$

به مفهوم همگرایی در توزیع برقرار است.

تمرین آ.۳۰: فرض کنید $\eta_۱,\eta_۲,\ldots$ متغیرهای تصادفی مثبت همتوزیع، و $\tau_۱,\tau_۲,\ldots$ متغیرهای مثبت نایقین هستند و N_t یک فرایند تجدید تصادفی نایقین با زمان‌های رسیدن $\eta_۱\tau_۱,\eta_۲\tau_۲,\ldots$ است. نشان دهید وقتی $t\to\infty$، حد

$$\frac{N_t}{t}\to\frac{۱}{E[\eta_۱]\tau_۱}\tag{آ.۱۹۴}$$

به مفهوم همگرایی در توزیع برقرار است.

قضیه آ.۳۸ [۱۹۳] *فرض کنید $\eta_۱,\eta_۲,\ldots$ زمان‌های رسیدن تصادفی همتوزیع هستند و همچنین $\tau_۱,\tau_۲,\ldots$ پاداش‌های نایقین همتوزیع هستند. فرض کنید N_t یک فرایند تجدید تصادفی با زمان‌های رسیدن $\eta_۱,\eta_۲,\ldots$ است. پس*

$$R_t=\sum_{i=۱}^{N_t}\tau_i\tag{آ.۱۹۵}$$

یک فرایند پاداش تجدید تصادفی نایقین است و وقتی $t \to \infty$؛ حد

$$\frac{R_t}{t} \to \frac{\tau_1}{E[\eta_1]} \tag{آ.۱۹۶}$$

به مفهوم همگرایی در توزیع برقرار است.

برهان: فرض کنید Υ توزیع نایقینی τ_1 است. پس برای هر تحقق N_t، متغیر نایقین

$$\frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i$$

از توزیع نایقینی Υ پیروی می‌کند. همچنین بر اساس تعریف توزیع شانس، برای هر عدد حقیقی x داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}\left\{\frac{R_t}{t} \le x\right\} &= \int_0^1 \Pr\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{R_t}{t} \le x\right\} \ge r\right\}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \Pr\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i \le \frac{tx}{N_t}\right\} \ge r\right\}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \Pr\left\{\Upsilon\left(\frac{tx}{N_t}\right) \ge r\right\}\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

چون N_t یک فرایند تجدید تصادفی با زمانهای رسیدن همتوزیع $\eta_1, \eta_2, \ldots$ است، وقتی $t \to \infty$ داریم

$$\frac{t}{N_t} \to E[\eta_1], \quad a.s.$$

از قضیه همگرایی دامنه لبگ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{R_t}{t} \le x\right\} &= \lim_{t\to\infty}\int_0^1 \Pr\left\{\Upsilon\left(\frac{tx}{N_t}\right) \ge r\right\}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \Pr\left\{\Upsilon(E[\eta_1]x) \ge r\right\}\mathrm{d}r = \Upsilon(E[\eta_1]x)
\end{aligned}$$

این همان توزیع نایقینی $\tau_1/E[\eta_1]$ است. به این ترتیب قضیه ثابت شد.

قضیه آ.۳۹ [۱۹۷] *فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \ldots$ پاداش‌های تصادفی همتوزیع و $\tau_1, \tau_2, \ldots$ زمان‌های رسیدن نایقین همتوزیع هستند. فرض کنید N_t یک فرایند تجدید نایقین با زمان‌های رسیدن همتوزیع $\tau_1, \tau_2, \ldots$ هستند. پس*

$$R_t = \sum_{i=1}^{N_t}\eta_i \tag{آ.۱۹۷}$$

یک فرایند پاداش تجدید تصادفی نایقین است و وقتی $t \to \infty$، حد

$$\frac{R_t}{t} \to \frac{E[\eta_1]}{\tau_1} \tag{آ.۱۹۸}$$

به مفهوم همگرایی در توزیع برقرار است.

برهان: فرض کنید Υ توزیع نایقینی $\tau_۱$ را نشان دهد. از تعریف توزیع شانس نتیجه می‌شود که برای هر عدد حقیقی x داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}\left\{\frac{R_t}{t}\le x\right\} &= \int_۰^۱ \Pr\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{R_t}{t}\le x\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r\\ &= \int_۰^۱ \Pr\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{x}\cdot\frac{۱}{N_t}\sum_{i=۱}^{N_t}\eta_i\le\frac{t}{N_t}\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

چون N_t یک فرایند تجدید نایقین با زمانهای رسیدن همتوزیع $\tau_۱,\tau_۲,\ldots$ است، با استفاده از قضیه ۳.۱۲ وقتی $t\to\infty$ حد

$$\frac{t}{N_t}\to\tau_۱$$

به مفهوم همگرایی در توزیع برقرار است. همچنین، برای هر تحقق N_t، قانون اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی بیان می‌کند که برای هر عدد x، وقتی $t\to\infty$ داریم

$$\frac{۱}{N_t}\sum_{i=۱}^{N_t}\eta_i\to E[\eta_۱],\quad a.s.$$

از قضیه همگرایی دامنه لبگ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{R_t}{t}\le x\right\}=\int_۰^۱\Pr\left\{۱-\Upsilon\left(\frac{E[\eta_۱]}{x}\right)\ge r\right\}\mathrm{d}r=۱-\Upsilon\left(\frac{E[\eta_۱]}{x}\right)$$

که این همان توزیع نایقینی $E[\eta_۱]/\tau_۱$ است. به این ترتیب قضیه ثابت شد.

قضیه آ.۴۰ [۱۸۸] *فرض کنید $\eta_۱,\eta_۲,\ldots$ زمان‌های به موقع تصادفی همتوزیع، و $\tau_۱,\tau_۲,\ldots$ زمان‌های بی‌موقع نایقین همتوزیع هستند. فرض کنید N_t یک فرایند تجدید تصادفی نایقین با زمان‌های رسیدن $\eta_۱+\tau_۱,\eta_۲+\tau_۲,\ldots$ است. پس*

$$A_t=\begin{cases} t-\sum_{i=۱}^{N_t}\tau_i, & \sum_{i=۱}^{N_t}(\eta_i+\tau_i)\le t<\sum_{i=۱}^{N_t}(\eta_i+\tau_i)+\eta_{N_t+۱}\ \text{اگر}\\ \sum_{i=۱}^{N_t+۱}\eta_i, & \sum_{i=۱}^{N_t}(\eta_i+\tau_i)+\eta_{N_t+۱}\le t<\sum_{i=۱}^{N_t+۱}(\eta_i+\tau_i)\ \text{اگر}\end{cases}\tag{آ.۱۹۹}$$

یک فرایند تجدید متناوب تصادفی نایقین است (یعنی کل زمان که سیستم تا لحظه t کار می‌کند)، و وقتی $t\to\infty$، حد

$$\frac{A_t}{t}\to\frac{E[\eta_۱]}{E[\eta_۱]+\tau_۱}\tag{آ.۲۰۰}$$

به مفهوم همگرایی در توزیع برقرار است.

برهان: فرض کنید Φ توزیع نایقینی $\tau_۱$ را نشان دهد و Υ توزیع نایقینی $E[\eta_۱]/(E[\eta_۱]+\tau_۱)$ است. پس برای هر نقطه پیوستگی x از Υ داریم

$$\begin{aligned}\Upsilon(x) &= \mathcal{M}\left\{\frac{E[\eta_۱]}{E[\eta_۱]+\tau_۱} \le x\right\} = \mathcal{M}\left\{\tau_۱ \ge \frac{E[\eta_۱](۱-x)}{x}\right\} \\ &= ۱-\mathcal{M}\left\{\tau_۱ < \frac{E[\eta_۱](۱-x)}{x}\right\} = ۱-\Phi\left(\frac{E[\eta_۱](۱-x)}{x}\right).\end{aligned}$$

از طرف دیگر، با استفاده از قضیه همگرایی تسلطی لبگ و پیوستگی اندازه احتمال داریم

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\eta_i \le x\right\} &= \lim_{t\to\infty}\int_۰^۱ \Pr\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\eta_i \le x\right\} \ge r\right\}\mathrm{d}r \\ &= \int_۰^۱ \lim_{t\to\infty}\Pr\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\eta_i \le x\right\} \ge r\right\}\mathrm{d}r \\ &= \int_۰^۱ \Pr\left\{\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\eta_i \le x\right\} \ge r\right\}\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\eta_i \le x\right\} &= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{k}\eta_i \le x\right)\cap(N_t=k)\right\} \\ &\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۰}^{\infty}\left(\sum_{i=۱}^{k}\eta_i \le tx\right)\cap\left(\sum_{i=۱}^{k+۱}(\eta_i+\tau_i) > t\right)\right\} \\ &\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۰}^{\infty}\left(\sum_{i=۱}^{k}\eta_i \le tx\right)\cap\left(tx+\eta_{k+۱}+\sum_{i=۱}^{k+۱}\tau_i > t\right)\right\} \\ &= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=۰}^{\infty}(k \le N_{tx}^*)\cap\left(\frac{\eta_{k+۱}}{t}+\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{k+۱}\tau_i > ۱-x\right)\right\}\end{aligned}$$

که در آن N_t^* یک فرایند تجدید تصادفی با زمان‌های رسیدن تصادفی $\eta_۱, \eta_۲, \ldots$ است. چون

$$\frac{\eta_{k+۱}}{t} \to ۰ \text{ as } t \to \infty$$

و

$$\sum_{i=۱}^{k+۱}\tau_i \sim (k+۱)\tau_۱,$$

داریم

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\eta_i\le x\right\}&\le\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}(k\le N_{tx}^*)\cap\left(\tau_1>\frac{t-tx}{k+1}\right)\right\}\\&=\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{N_{tx}^*}\left(\tau_1>\frac{t-tx}{k+1}\right)\right\}\\&=\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\tau_1>\frac{t-tx}{N_{tx}^*+1}\right\}\\&=1-\lim_{t\to\infty}\Phi\left(\frac{t-tx}{N_{tx}^*+1}\right).\end{aligned}$$

با استفاده از قضیه تجدید مقدماتی در احتمال، وقتی $t\to\infty$ داریم

$$\frac{N_{tx}^*}{tx}\to\frac{1}{E[\eta_1]},\quad \text{a.s.}$$

و لذا

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\eta_i\le x\right\}\le 1-\Phi\left(\frac{E[\eta_1](1-x)}{x}\right)=\Upsilon(x).$$

پس

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\eta_i\le x\right\}\le\int_0^1\mathrm{Pr}\left\{\Upsilon(x)\ge r\right\}\mathrm{d}r=\Upsilon(x).\tag{آ.۲۰۱}$$

از طرف دیگر، با استفاده از قضیه همگرایی تسلطی لبگ و پیوستگی اندازه احتمال، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\eta_i>x\right\}&=\lim_{t\to\infty}\int_0^1\mathrm{Pr}\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\eta_i>x\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r\\&=\int_0^1\lim_{t\to\infty}\mathrm{Pr}\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\eta_i>x\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r\\&=\int_0^1\mathrm{Pr}\left\{\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\eta_i>x\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\eta_i > x\right\}\\
&= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k+1}\eta_i > x\right)\cap(N_t = k)\right\}\\
&\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\eta_i > tx\right)\cap\left(\sum_{i=1}^{k}(\eta_i+\tau_i)\le t\right)\right\}\\
&\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\eta_i > tx\right)\cap\left(tx-\eta_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\tau_i\le t\right)\right\}\\
&= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}(N_{tx}^*\le k)\cap\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k}\tau_i - \frac{\eta_{k+1}}{t}\le 1-x\right)\right\}.
\end{aligned}$$

چون

$$\sum_{i=1}^{k}\tau_i \sim k\tau_1$$

و

$$\frac{\eta_{k+1}}{t}\to 0 \text{ as } t\to\infty,$$

داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\eta_i > x\right\} &\le \lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}(N_{tx}^*\le k)\cap\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\le 1-x\right)\right\}\\
&= \lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=N_{tx}^*}^{\infty}\left(\tau_1\le\frac{t-tx}{k}\right)\right\}\\
&= \lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\tau_1\le\frac{t-tx}{N_{tx}^*}\right\}\\
&= \lim_{t\to\infty}\Phi\left(\frac{t-tx}{N_{tx}^*}\right).
\end{aligned}$$

با استفاده از قضیه تجدید مقدماتی، وقتی $t\to\infty$ داریم

$$\frac{N_{tx}^*}{tx}\to\frac{1}{E[\eta_1]},\quad \text{a.s.}$$

و لذا

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\eta_i > x\right\}\le\Phi\left(\frac{E[\eta_1](1-x)}{x}\right) = 1-\Upsilon(x).$$

پس

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\eta_i > x\right\} \le \int_{۰}^{۱} \Pr\{۱-\Upsilon(x)\ge r\}\,\mathrm{d}r = ۱-\Upsilon(x).$$

با استفاده از خاصیت دوگانی اندازه شانس، داریم

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\eta_i \le x\right\} \ge \Upsilon(x). \qquad (آ.۲۰۲)$$

چون

$$\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\eta_i \le \frac{A_t}{t} \le \frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\eta_i,$$

پس

$$\mathrm{Ch}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\eta_i \le x\right\} \le \mathrm{Ch}\left\{\frac{A_t}{t} \le x\right\} \le \mathrm{Ch}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\eta_i \le x\right\}.$$

از (آ.۲۰۱) و (آ.۲۰۲) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{A_t}{t} \le x\right\} = \Upsilon(x).$$

پس وقتی $t \to \infty$، نرخ در دسترس بودن A_t/t به توزیع $E[\eta_۱]/(E[\eta_۱]+\tau_۱)$ همگرا است. به این ترتیب قضیه ثابت شد.

قضیه آ.۴۱ [۱۸۸] *فرض کنید $\tau_۱, \tau_۲, \ldots$ متغیرهای به موقع نایقین همتوزیع و $\eta_۱, \eta_۲, \ldots$ متغیرهای تصادفی همتوزیع بی‌موقع هستند. فرض کنید N_t یک فرایند تجدید تصادفی نایقین با زمان‌های رسیدن $\tau_۱+\eta_۱, \tau_۲+\eta_۲, \ldots$ است. پس*

$$A_t = \begin{cases} t-\sum_{i=۱}^{N_t}\eta_i, & \sum_{i=۱}^{N_t}(\tau_i+\eta_i) \le t < \sum_{i=۱}^{N_t}(\tau_i+\eta_i)+\tau_{N_t+۱} \text{ اگر} \\ \sum_{i=۱}^{N_t+۱}\tau_i, & \sum_{i=۱}^{N_t}(\tau_i+\eta_i)+\tau_{N_t+۱} \le t < \sum_{i=۱}^{N_t+۱}(\tau_i+\eta_i) \text{ اگر} \end{cases} \qquad (آ.۲۰۳)$$

یک فرایند تجدید متناوب تصادفی نایقین است (یعنی کل زمان که سیستم تا لحظه t کار می‌کند) و وقتی $t\to\infty$ حد

$$\frac{A_t}{t} \to \frac{\tau_۱}{\tau_۱+E[\eta_۱]} \qquad (آ.۲۰۴)$$

به مفهوم همگرایی در توزیع برقرار است.

برهان: فرض کنید Φ توزیع نایقینی τ_1 را نشان دهد و Υ توزیع نایقینی $\tau_1/(\tau_1+E[\eta_1])$ است. پس برای هر نقطه پیوستگی x از Υ داریم

$$\Upsilon(x)=\mathcal{M}\left\{\frac{\tau_1}{\tau_1+E[\eta_1]}\le x\right\}=\mathcal{M}\left\{\tau_1\le\frac{E[\eta_1]x}{1-x}\right\}=\Phi\left(\frac{E[\eta_1]x}{1-x}\right).$$

از طرف دیگر، با استفاده از قضیه همگرایی تسلطی لبگ و پیوستگی اندازه احتمال، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathrm{Ch}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i\le x\right\}&=\lim_{t\to\infty}\int_0^1\Pr\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i\le x\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r\\&=\int_0^1\lim_{t\to\infty}\Pr\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i\le x\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r\\&=\int_0^1\Pr\left\{\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i\le x\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i\le x\right\}\\&=\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\le x\right)\cap(N_t=k)\right\}\\&\le\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\tau_i\le tx\right)\cap\left(\sum_{i=1}^{k+1}(\tau_i+\eta_i)>t\right)\right\}\\&\le\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\tau_i\le tx\right)\cap\left(tx+\tau_{k+1}+\sum_{i=1}^{k+1}\eta_i>t\right)\right\}\\&=\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\tau_i\le tx\right)\cap\left(\frac{\tau_{k+1}}{t}+\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k+1}\eta_i>1-x\right)\right\}.\end{aligned}$$

چون

$$\sum_{i=1}^{k}\tau_i\sim k\tau_1$$

و

$$\frac{\tau_{k+1}}{t}\to 0\ \text{as}\ t\to\infty,$$

داریم

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i \le x\right\} \\
&\le \lim_{t\to\infty} \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\tau_1 \le \frac{tx}{k}\right)\cap\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k+1}\eta_i > 1-x\right)\right\} \\
&= \lim_{t\to\infty} \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\tau_1 \le \frac{tx}{k}\right)\cap\left(N^*_{t-tx}\le k\right)\right\} \\
&= \lim_{t\to\infty} \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=N^*_{t-tx}}^{\infty}\left(\tau_1 \le \frac{tx}{k}\right)\right\} \\
&= \lim_{t\to\infty} \mathcal{M}\left\{\tau_1 \le \frac{tx}{N^*_{t-tx}}\right\} \\
&= \lim_{t\to\infty} \Phi\left(\frac{tx}{N^*_{t-tx}}\right)
\end{aligned}$$

که در آن N^*_t فرایند تجدید تصادفی با زمان‌های رسیدن تصادفی $\eta_1, \eta_2, \ldots$ است. با استفاده از قضیه تجدید مقدماتی وقتی $t \to \infty$ داریم

$$\frac{N^*_{t-tx}}{t-tx} \to \frac{1}{E[\eta_1]}, \quad \text{a.s.}$$

و لذا

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i \le x\right\} \le \Phi\left(\frac{E[\eta_1]x}{1-x}\right) = \Upsilon(x).$$

پس

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t}\tau_i \le x\right\} \le \int_0^1 \Pr\left\{\Upsilon(x)\ge r\right\}\mathrm{d}r = \Upsilon(x). \tag{آ.۲۰۵}$$

از طرف دیگر، با استفاده از قضیه همگرایی تسلطی لبگ و پیوستگی اندازه احتمال داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\tau_i > x\right\} &= \lim_{t\to\infty}\int_0^1 \Pr\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\tau_i > x\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \lim_{t\to\infty}\Pr\left\{\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\tau_i > x\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \Pr\left\{\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N_t+1}\tau_i > x\right\}\ge r\right\}\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\tau_i > x\right\}\\
&= \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=\circ}^{\infty}\left(\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{k+۱}\tau_i > x\right)\cap (N_t = k)\right\}\\
&\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=\circ}^{\infty}\left(\sum_{i=۱}^{k+۱}\tau_i > tx\right)\cap \left(\sum_{i=۱}^{k}(\tau_i+\eta_i) \le t\right)\right\}\\
&\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=\circ}^{\infty}\left(\sum_{i=۱}^{k+۱}\tau_i > tx\right)\cap \left(tx - \tau_{k+۱} + \sum_{i=۱}^{k}\eta_i \le t\right)\right\}\\
&\le \mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=\circ}^{\infty}\left(\sum_{i=۱}^{k+۱}\tau_i > tx\right)\cap \left(\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{k}\eta_i - \frac{\tau_{k+۱}}{t} \le ۱ - x\right)\right\}.
\end{aligned}$$

چون

$$\sum_{i=۱}^{k+۱}\tau_i \sim (k+۱)\tau_۱$$

و

$$\frac{\tau_{k+۱}}{t} \to \circ \text{ as } t \to \infty,$$

داریم

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\tau_i > x\right\}\\
&\le \lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=\circ}^{\infty}\left(\tau_۱ > \frac{tx}{k+۱}\right)\cap\left(\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{k}\tau_i \le ۱ - x\right)\right\}\\
&= \lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=\circ}^{\infty}\left(\tau_۱ > \frac{tx}{k+۱}\right)\cap\left(N^*_{t-tx} \ge k\right)\right\}\\
&= \lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\bigcup_{k=\circ}^{N^*_{t-tx}}\left(\tau_۱ > \frac{tx}{k+۱}\right)\right\}\\
&= \lim_{t\to\infty}\mathcal{M}\left\{\tau_۱ > \frac{tx}{N^*_{t-tx}+۱}\right\}\\
&= ۱ - \lim_{t\to\infty}\Phi\left(\frac{tx}{N^*_{tx}+۱}\right).
\end{aligned}$$

با استفاده از قضیه تجدید مقدماتی، وقتی $t \to \infty$ داریم

$$\frac{N^*_{t-tx}}{t-tx} \to \frac{۱}{E[\eta_۱]}, \quad \text{a.s.}$$

و لذا

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{M}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\tau_i > x\right\} \le ۱-\Phi\left(\frac{E[\eta_۱]x}{۱-x}\right) = ۱-\Upsilon(x).$$

پس

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\tau_i > x\right\} \le \int_۰^۱ \Pr\{۱-\Upsilon(x)\ge r\}\,\mathrm{d}r = ۱-\Upsilon(x).$$

با استفاده از خاصیت دوگانی اندازه شانس، نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\tau_i \le x\right\} \ge \Upsilon(x). \qquad (\text{آ.۲۰۶})$$

چون

$$\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\tau_i \le \frac{A_t}{t} \le \frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\tau_i,$$

داریم

$$\mathrm{Ch}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t+۱}\tau_i \le x\right\} \le \mathrm{Ch}\left\{\frac{A_t}{t}\le x\right\} \le \mathrm{Ch}\left\{\frac{۱}{t}\sum_{i=۱}^{N_t}\tau_i \le x\right\}.$$

از (آ.۲۰۵) و (آ.۲۰۶) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Ch}\left\{\frac{A_t}{t}\le x\right\} = \Upsilon(x).$$

پس وقتی $t\to\infty$، نرخ در دسترس بودن A_t/t در توزیع به $\tau/(\tau_۱+E[\eta_۱])$ همگرا است. به این ترتیب قضیه ثابت شد.

آ.۱۵ نکات کتابشناسی

نظریه احتمال توسط کلموگروف [۷۷] در سال ۱۹۳۳ برای مدل بندی پدیده‌های تکرار شونده توسعه یافت، در حالی که نظریه نایقینی در سال ۲۰۰۷ توسط لیو [۸۴] برای مدل بندی درجه باور پایه‌ریزی شد. با این حال، در بسیاری اوقات، نایقینی و تصادفی بودن در سیستم‌های پیچیده به طور همزمان ظاهر می‌شوند. برای توصیف چنین پدیده‌هایی، متغیر تصادفی نایقین توسط لیو [۱۱۳] در سال ۲۰۱۳ با معرفی اندازه شانس و توزیع شانس مطرح شد. مهمترین بخش، قانون عملیاتی متغیرهای تصادفی نایقین بود که توسط لیو [۱۱۴] بیان شد. همچنین، یائوــ گائو [۱۹۲]، گائوــ شنگ [۳۷] و گائوــ رالسکو [۴۴] برخی قوانین اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی نایقین را بررسی کردند.

برنامه‌ریزی تصادفی ابتدا توسط دانتزیک [۲۳] در سال ۱۹۶۵ مطالعه شد، در حالی که برنامه‌ریزی نایقین برای اولین بار در سال ۲۰۰۹ توسط لیو [۸۶] پیشنهاد شد. برای مدل سازی مساله‌های بهینه‌سازی که در آنها علاوه برمتغیرهای تضادفی، متغیرهای نایقین نیز وجود دارند، برنامه‌ریزی تصادفی نایقین توسط لیو [۱۱۴] در سال ۲۰۱۳ پایه ریزی شد. به عنوان یک تعمیم، ژووــ یانگــ وانگ [۲۱۹]

برنامه‌ریزی چندهدفی تصادفی نایقین را براب بهینه‌سازی اهداف متضاد و ناهمگون پیشنهاد کردند، گین [۱۳۶] برنامه‌ریزی آرمانی تصادفی نایقین را برای بهینه‌سازی اهداف بیشتر که اولویت آنها از قبل مشخص شده است، مطرح کرد، و کی‌ــسوــنی [۷۳] بهینه‌سازی چند سطحی را برای سیستم‌های تصمیم گیری نامتمرکز مطرح کردند که در آنها پیشروها و پیروها ممکن است متغیرها و اهداف خاص خودشان را داشته باشند.

تحلیل ریسک احتمالی به سال ۱۹۵۲ برمی‌گردد که رُوی [۱۴۰] محک امنیت ــ اول [1] را در انتخاب پرتفو مطرح کرد. مفهوم مهمتر دیگر روش دارایی‌ــدرــخطر احتمالی بود که در سال ۱۹۹۶ توسط مورگان [۱۲۳] مطرح شد. از طرف دیگر، تحلیل ریسک نایقین توسط لیو در سال ۲۰۱۰ برای اندازه‌گیری شاخص ریسک مطرح شد که یک شاخص ریسک برای یک سیستم است که زیان مثبت دارد. در حالت کلی، برای اندازه گیری ریسک سیستم‌های تصادفی نایقین، رالسکوــلیو [۱۱۵] ابزار تحلیل ریسک نایقین را در سال ۲۰۱۴ ابداع کردند. همچنین، روش دارایی‌ــدرــخطر توسط لیوــرالسکو [۱۱۷] پیشنهاد شد و روش زیان متوسط نیز توسط لیوــرالسکو [۱۱۹] برای کار کردن با سیستم‌های تصادفی نایقین مطالعه شد.

تحلیل اطمینان‌پذیری احتمالی به سال ۱۹۴۴ بر می‌گردد که پوگسلی [۱۳۴] نرخ‌های تصادف ساختاری را برای صنعت هوانوردی مطرح کرد. امروزه، تحلیل اطمینان‌پذیری احتمالی در شاخه‌های زیادی کاربرد دارد. یک دیدگاه جدید، تحلیل اطمینان‌پذیری نایقین است که در سال ۲۰۱۰ توسط لیو [۹۰] برای اندازه گیری شاخص اطمینان‌پذیری مطرح شد. در حالت کلی، برای کار کردن با سیستم‌های تصادفی نایقین وِن‌ــ کانگ [۱۶۴] ابزار تحلیل اطمینان‌پذیری تصادفی نایقین را ارائه دادند و شاخص اطمینان‌پذیری را در سال ۲۰۱۶ تعریف کردند. پس از آن، تحلیل اطمینان‌پذیری تصادفی نایقین توسط گائوــیائو [۳۹] و ژانگ‌ــکانگ‌ــوِن [۲۱۲] مطالعه شد.

گراف تصادفی توسط اردوش و رنوی در سال ۱۹۵۹ [۳۲] و به طور تقریباً همزمان ولی مستقل توسط گیلبرت [۵۶] تعریف شد. به عنوان جایگزین، گراف نایقین توسط گائوــگائو [۴۸] در سال ۲۰۱۳ با استفاده از نظریه نایقینی مطرح شد. با فرض این که برخی یال‌ها با درجه‌ای از اندازه احتمال و برخی دیگر با درجه‌ای از اندازه نایقین وجود دارند، لیو [۱۰۰] مفهوم گراف تصادفی نایقین را در سال ۲۰۱۴ تعریف کرد و شاخص همبندی را تحلیل کرد. سپس، ژانگ‌ــپنگ‌ــلی [۲۱۰] و چن‌ــپنگ‌ــرائوــروزیدا [۵] ، به ترتیب شاخص اویلر و شاخص دوری گراف تصادفی نایقین را مطرح کردند.

شبکه تصادفی در سال ۱۹۶۵ برای مدل بندی شبکه‌های مخابراتی با ظرفیت‌های تصادفی توسط فرانک‌ــ حکیمی [۳۳] مطالعه شد. پس از آن، شبکه‌های تصادفی به طور وسیعی توسعه یافتند و به کار برده شدند. به عنوان یک روش راهبردی، شبکه نایقین ابتدا در سال ۲۰۱۰ توسط لیو [۹۱] برای مدل بندی مساله برنامه‌ریزی پروژه با زمان اجرای نایقین بررسی شد. در حالت کلی، با فرض این که برخی وزن‌ها متغیرهای تصادفی و برخی دیگر متغیرهای نایقین هستند، لیو [۱۰۰] مفهوم شبکه تصادفی نایقین را پایه ریزی کردند و مساله کوتاه‌ترین مسیر را با این فرض در سال ۲۰۱۴ مطالعه کرد. در ادامه، شبکه تصادفی نایقین توسط بسیاری از پژوهشگران بررسی شد. به عنوان مثال، شنگ‌ــگائو [۱۴۸] مساله جریان بیشینه، و شنگ‌ــگین‌ــشی [۱۵۱] مساله درخت فراگیر کمینه را در شبکه تصادفی نایقین مطالعه کردند.

یکی از بررسی‌های آغازین فرایند تصادفی توسط باخلیر [۱] در سال ۱۹۰۰ انجام شد، و مطالعه فرایند نایقین در سال ۲۰۰۸ توسط لیو شروع شد. برای بررسی پدیده تصادفی نایقین که در طی زمان متحول می‌شود، گائوــیائو [۳۴] فرایند تصادفی نایقین را در سال ۲۰۱۵ با دیدگاه نظریه شانس معرفی کردند. گائوــیائو [۳۴] همچنین فرایند تجدید تصادقی نایقین را پیشنهاد کردند. به عنوان

---

[1] safity-first

تعمیم، یائو ــ ژوو [۱۹۳][۱۹۷] و یائو [۱۹۹] فرایند پاداش تجدید تصادفی نایقین را مطالعه کردند و یائو ــ گائو [۱۸۸] فرایند پاداش متناوب تصادفی نایقین را مطالعه کردند.

پیوست ب

سوال‌های متداول

در این پیوست به سوالات متداولی که در رابطه با نظریه احتمال و نظریه نایقینی و کاربردهای آنها مطرح می‌شود، پاسخ داده خواهد شد. این پیوست همچنین نشان خواهد داد که نظریه مجموعه فازی، تحلیل بازه‌ای، نظریه مجموعه زمخت و سیستم خاکستری از دیدگاه ریاضی سازگار نیستند. در پایان، خلاصه‌ای از تکامل مفهوم نایقینی را مطرح می‌کنیم و نایقینی را واضح تر توصیف می‌کمیم.

ب.۱ منظور از این که ـ یک شی از قوانین نظریه احتمال پیروی می‌کند ـ چیست؟

وقتی می‌گوییم یک شی (مثلاً فراوانی) از قوانین احتمال پیروی می‌کند یعنی نه تنها در سه اصل موضوعه نظریه احتمال صدق می‌کند بلکه در قضیه احتمال ضرب نیز صدق می‌کند.

اصل موضوعه ۱ (*اصل موضوعه نرمال بودن*) *برای هر مجموعه مرجع* Ω، $\Pr\{\Omega\} = ۱$؛

اصل موضوعه ۲ (*اصل موضوعه نامنفی بودن*) *برای هر رویداد* A، $\Pr\{A\} \geq ۰$؛

اصل موضوعه ۳ (*اصل موضوعه جمع‌پذیری*) *برای هر دنباله شمارا از رویدادهای دو به دو مجزای* $A_۱, A_۲, \ldots$، *داریم*

$$\Pr\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=۱}^{\infty} \Pr\{A_i\}; \qquad (ب.۱)$$

قضیه احتمال ضرب *فرض کنید* $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, \Pr_k)$ *فضاهای احتمال برای* $k = ۱, ۲, \ldots$ *هستند. در این صورت اندازه احتمال یکتای* $\Pr$ *وجود دارد که*

$$\Pr\left\{\prod_{k=۱}^{\infty} A_k\right\} = \prod_{k=۱}^{\infty} \Pr_k\{A_k\} \qquad (ب.۲)$$

که در آن A_k *یک رویداد دلخواه از* $\mathcal{A}_k$ *برای هر* $k = ۱, ۲, \ldots$ *است.*

درک این مطلب که چرا باید یک شی در این سه اصل موضوعه صدق کند، آسان است. با این حال، برخی در توجیه صدق کردن در قضیه احتمال ضرب قانع نمی‌شوند. دلیل این افراد این است که

قضیه احتمال ضرب را نمی‌توان از سه اصل موضوعه کلموگروف نتیجه گرفت، مگر آن که قبلاً فرض کنیم که احتمال ضرب در این سه اصل موضوعه صدق می‌کند. از دیدگاه منطق، الزامی نیست که یک شی که در قضیه احتمال ضرب صدق می‌کند حتماً در سه اصل موضوعه هم صدق کند. آیا این موضوع برای شما حالب نیست؟

به خاطر داشته باشید که «یک شی از قوانین احتمال پیروی می‌کند» با جمله «یک شی در سه اصل موضوعه و قضیه احتمال ضرب صدق می‌کند» معادل است. این تاکید قوی‌تر از جمله «یک شی در سه اصل موضوعه کلموگروف صدق می‌کند» است. به بیان دیگر، صدق کردن در این سه اصل موضوعه تضمین نمی‌کند که یک شی از قوانین نظریه احتمال پیروی کند.

دو رده وسیع از تعبیر احتمال وجود دارد، «تعبیر فراوانی» و «تعبیر باور». تعبیر فراوانی، احتمال را به عنوان وقوع مکرر پدیده در نظر می‌گیرد (وِن [۱۵۵]، ریخه‌باخ [۱۳۸]، فون میسه [۱۵۶])، در حالی که تعبیر باور، احتمال را به عنوان درجه باور این که یک رویداد اتفاق می‌افتد، در نظر می‌گیرد (رمزی [۱۳۷]، دفینیتی [۲۴]، ساویج [۱۴۲]).

مجادله بین این دو دیدگاه از قرن نوردهم شروع شده است. شخصاً [از دیدگاه نویسنده کتاب] با تعبیر احتمال به عنوان فراوانی رویدادها موافق هستم ، ولی قویاً مخالف تعبیر باور از نظریه احتمال هستم زیرا فراوانی از قوانین احتمال پیروی می‌کند در حالی که میزان باور چنین نیست. دلایل مشروح در چند بخش دیگر مطرح می‌شود.

ب.۲ چرا فراوانی از قوانین احتمال پیروی می‌کند؟

برای نشان دادن این که فراوانی از قوانین احتمال پیروی می‌کند، باید بررسی کنیم که فراوانی نه تنها در سه اصل موضوعه کلموگروف صدق می‌کند بلکه در قضیه احتمال ضرب هم صدق می‌کند.

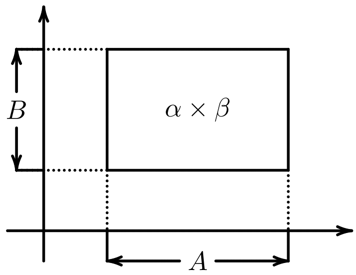
ابتدا، فراوانی مجموعه مرجع مقدار ۱ دارد، زیرا مجموعه مرجع همواره اتفاق می‌افتد. پس فراوانی در اصل موضوعه نرمال بودن صدق می‌کند. دوم، واضح است که فراوانی عددی بین صفر و یک است. پس فراوانی هر رویداد نامنفی است و اصل موضوعه نامنفی بودن هم برقرار است. سوم، برای دو رویداد مجزای A و B، اگر A α بار اتفاق افتد و B β بار اتفاق افتد (بر حسب درصد)، واضح است که $A \cup B$، $\alpha + \beta$ اتفاق می‌افتد. به بیان دیگر؛ فراوانی خاصیت جمعی دارد و بنابراین، در اصل موضوعه حمعی بودن صدق می‌کند. نهایتاً، آزمایشات زیاد نشان داد که اگر A و B دو رویداد با فضاهای احتمال متفاوت باشند (عملاً آنها از دو آزمایش متفاوت تولید شوند)، آنگاه ضرب $A \times B$ به تعداد $\alpha \times \beta$ اتفاق می‌افتد. شکل ب.۱ را نگاه کنید. پس فراوانی در قضیه احتمال ضرب نیز صدق می‌کند. بنابراین، فراوانی از قوانین نظریه احتمال پیروی می‌کند. در واقع، فراونی تنها پایه تجربی برای نظریه احتمال است.

ب.۳ چرا ـ کتاب هلندی ـ در اثبات این که درجه باور از قوانین احتمال پیروی می‌کند، موفق نیست؟

میزان باور، درجه اطمینان یک شخص به وقوع یک رویداد را نشان می‌دهد. برای توجیه این که نظریه احتمال برای مدل بندی میزان باور مناسب است یا نه، باید کنترل کنیم که آیا درجه باور از قوانین نظریه احتمال پیروی می‌کند.

رمزی [۱۳۷] پیشنهاد کرد که بحث کتاب هلندی[۱] که می‌گوید درجه باور غیرمنطقی است اگر کتابی وجود داشته باشد که زیان شما را قطعی کند. در حال حاضر فرض کنیم این ادعا درست است.

[۱] یک کتاب هلندی یک بازار شرط بندی است که مجموعه‌ای از شرط بندی‌ها است که صرف نظر از نتیجه شرط بندی زیان



شکل ب.۱: فرض کنید A و B دو رویداد در دو فضای احتمال متفاوت هستند (مخصوصاً از آزمایش‌های مختلف نتیجه شده اند). اگر A به تعداد α بار و B به تعداد β بار اتفاق افتد، آنگاه ضرب $A \times B$ به تعداد $\alpha \times \beta$ بار اتفاق می‌افند که در آن α و β به صورت درصد بیان شده‌اند.

اول فرض کنید Ω شرط بندی باشد که ۱ \$ برای اتفاق افتادن رویداد قطعی Ω پیشنهاد می‌کند (یعنی مجموعه مرجع). فرض کنید درجه باور Ω، α است. یعنی قیمت Ω برابر α \$ است. اگر $\alpha > ۱$، آنگاه واضح است که بهتر است Ω فروخته شود، و زیان قطعی شما $\alpha - ۱ > ۰$ است. پس یک کتاب هلندی وجود دارد و فرض $\alpha > ۱$ غیرمنطقی است. اگر $\alpha < ۱$، آنگاه بهتر است Ω خریده شود، و زیان قطعی شما $۱ - \alpha > ۰$ است. پس دوباره کتاب هلندی وجود دارد و فرض $\alpha < ۱$ نیز غیرمنطقی است. پس فرض کنید $\alpha = ۱$ و بنابراین، درجه باور در اصل موضوعه نرمال بودن نظریه احتمال صدق می‌کند.

دوم، A را شرط بندی در نظر بگیرید که ۱ \$ پیشهاد می‌کند اگر رویداد A اتفاق افتد. فرض کنید درجه باور A، α است. یعنی قیمت A، α \$ است. اگر $\alpha < ۰$ آنگاه فروش A به صرفه است و زیان قطعی $-\alpha > ۰$ یا $۱ - \alpha > ۰$. پس یک کتاب هلندی وجود دارد و فرض $\alpha < ۰$ غیرمنطقی است. پس داریم $\alpha \geq ۰$ و درجه باور در اصل موضوع نامنفی بودن صدق می‌کند.

سوم، A_1 را شرط بندی در نظر بگیرید که در صورت اتفاق افتادن ۱ \$ پیشنهاد می‌کند و A_2 را شرط بندی در نظر بگیرید که در صورت اتفاق افتادن ۱ \$ پیشنهاد می‌کند (پس A_1 و A_2 دو رویداد مجزا هستند). فرض کنید درجه‌های باور A_1 و A_2 به ترتیب α_1 و α_2 هستند. به عبارت دیگر، قیمت A_1 و A_2 به ترتیب α_1 \$ و α_2 \$ است. حال فرض کنید شرط بندی $A_1 \vee A_2$ در صورتی که A_1 یا A_2 اتفاق افتد، ۱ \$ پیشنهاد کند و درجه باور $A_1 \vee A_2$ را α قرار دهید. به عبارت دیگر، قیمت $A_1 \vee A_2$، α \$ است. اگر $\alpha > \alpha_1 + \alpha_2$، آنگاه شما

(۱) A_1 را می‌فروشید، (۲) A_2 را می‌فروشید و (۳) $A_1 \vee A_2$ را می‌خرید.

در این صورت، بدون در نظر گرفتن نتیجه شرط بندی، $\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 > ۰$ قطعاً می‌بازید. پس کتاب هلندی وجود دارد و فرض $\alpha > \alpha_1 + \alpha_2$ غیرمنطقی است. اگر $\alpha < \alpha_1 + \alpha_2$، آنگاه شما

(۱) A_1 را می‌خرید، (۲) A_2 را می‌خرید، و (۳) $A_1 \vee A_2$ را می‌فروشید.

را قطعی می‌کند. برای مثال فرض کنید A یک شرط است که اگر اتفاق افتاد بتوان ۱ دلار ببرد و B هم شرط بندی این باشد که اگر B اتقاق افتاد یک دلار ببرید و $A \vee B$ پیشنهاد کند که یک دلار می‌برید اگر A یا B اتفاق افتد. اگر قیمت شرط بندی‌های A؛ B و $A \vee B$ به ترتیب ۳۰، ۴۰ و ۸۰ دلار باشد، و شما (۱) A را بفروشید، (۲) B را بفروشید و (۳) $A \vee B$ را بخرید، آنگاه، صرف نظر از این که چه اتفاقی می‌افتد، قطعاً ۱۰ دلار زیان می‌کنید. پس یک «کتاب هلندی» در اینجا وجود دارد و قیمت‌ها غیرمنطقی هستند.

در این صورت واضح است که بدون در نظر گرفتن نتیجه شرط بندی، زیان $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha > 0$ شما قطعی است. پس کتاب هلندی وجود دارد و فرض $\alpha < \alpha_1 + \alpha_2$ غیرمنطقی است. پس فرض کنیم $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ و درجه باور در اصل جمع‌پذیری صدق می‌کند.

تاکنون، موضوع کتاب هلندی بررسی شد و نشان داد که درجه باور در هر سه اصل موضوعه نظریه احتمال صدق می‌کند. معمولاً ذهنگراها (عقل گراها) همین جا متوقف می‌شوند و تصور می‌کنند که درجه باور در قوانین نظریه احتمال صدق می‌کند.

به دلایل زیر، متاسفانه شواهد برای این نتیجه گیری کافی نیست:

(۱) در یک فرایند مشاوره واقعی شما نمی‌توانید به دلخواه «خرید» و «فروش» را معکوس کنید.

(۲) بر اساس نظر سنجی‌های فراوان، کانه‌مان و تورسکی [۷۲] نشان دادند که انسان اغلب اهمیت بیش از اندازه‌ای به رویدادهای بسیار نامحتمل‌تر می‌دهد. از طرف دیگر، لیو [۱۰۲] نشان داد که انسان اغلب تقریب بسیار محدودتری برای مقادیری که یک شی ممکن است داشته باشد، در نظر می‌گیرد. این محافظه کاری نوع بشر موجب می‌شود که درجه باور به مفهوم بحث کتاب هلندی الزاماً منطقی نباشد.

(۳) حتی اگر شخصی به مفهوم بحث کتاب هلندی منطقی باشد، چگونه می‌توان مطمئن شد که درجه باور اتفاق ترکیب شده از چند اتفاق مستقل که توسط افراد مختلف برآورد شده اند، هنوز منطقی است؟

(۴) از نظر ریاضی، بحث کتاب هلندی و سه اصل موضوعه نظریه احتمال دو گزاره معادل هستند. از دیدگاه منطق، یک گزاره اگر بر اساس یک گزاره ثابت نشده پایه ریزی شده باشد؛ هنوز اثبات نشده در نظر گرفته می‌شود. چون بحث کتاب هلندی هنوز اثبات نشده است، در واقع هنوز ثابت نشده است که درجه باور از قوانین نظریه احتمال پیروی می‌کند.

ب.۴ چرا قضیه کاکس در اثبات این که درجه باور از قوانین نظریه احتمال پیروی می‌کند، شکست می‌خورد؟

برخی تاکید دارند که *نظریه احتمال تنها روش منطقی است*. شاید این تصور نادرست از قضیه کاکس [۲۰] ناشی می‌شود که می‌گوید هر اندازه باور با اندازه احتمال «یکریخت» است. در حالی که اندازه نایقین منسجم بوده ولی با هیچ اندازه احتمالی یکریخت نیست. قضیه کاکس چه ایرادی دارد؟ دلیل اصلی این است که قضیه کاکس فرض می‌کند ارزش درستی $P \wedge Q$ یک تابع دوبار مشتق‌پذیر مانند f از ارزش درستی دو گزاره P و Q است، یعنی

$$T(P \wedge Q) = f(T(P), T(Q)) \qquad \text{(ب.۳)}$$

و بنابراین از همان ابتدا، اندازه نایقین را مستثنی می‌کند زیرا تابع $f(x, y) = x \wedge y$ که در نظریه نایقینی استفاده شده است نسبت به x و y مشتق پذیر نیست. در واقع، شواهدی وجود ندارند که نشان دهند ارزش درستی ترکیب عطفی دو گزاره با ارزش درستی تک تک گزاره‌های آن تعیین می‌شود، شرط دوبار مشتق‌پذیری را کنار بگذارید.

از یک طرف، مشخص شده است که نظریه احتمال یک روند منطقی برای کار کردن با فراوانی است. از طرف دیگر، هر طور تصور کنیم، این که نظریه احتمال تنها ابزار بررسی عدم قطعیت است پذیرفتنی نیست. در واقع، در این کتاب نشان داده شده است که نظریه نایقینی در بررسی درجه‌های باور موفق است.

ب.۵ نظریه احتمال و نظریه نایقینی چه تفاوتی با هم دارند؟

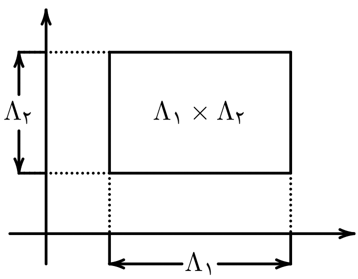
تفاوت نظریه احتمال (کلموگروف [۷۷]) و نظریه نایقینی (لیو [۸۴]) در این نیست که اندازه‌های آنها جمع‌پذیر است یا نه، بلکه در نحوه تعریف اندازه‌های ضرب است. اندازه ضرب در نظریه احتمال به صورت حاصلضرب اندازه‌های احتمال تک تک مولفه‌ها تعریف می‌شود، یعنی

$$\Pr\{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲\} = \Pr\{\Lambda_۱\} \times \Pr\{\Lambda_۲\}, \qquad (\text{ب.۴})$$

در حالی که اندازه نایقین ضرب، کمینه اندازه‌های نایقین تک تک مولفه‌های آن است، یعنی

$$\mathcal{M}\{\Lambda_۱ \times \Lambda_۲\} = \mathcal{M}\{\Lambda_۱\} \wedge \mathcal{M}\{\Lambda_۲\}. \qquad (\text{ب.۵})$$

شکل ب.۲ را نگاه کنید.



شکل ب.۲: رویدادهای $\Lambda_۱$، $\Lambda_۲$ و $\Lambda_۱ \times \Lambda_۲$

به طور خلاصه چنین می‌توان گفت که نظریه احتمال یک ساختار ریاضی «ضرب» است و نظریه نایقینی یک ساختار ریاضی «کمینه» است. این تفاوت موجب می‌شود تا متغیرهای تصادفی و متغیرهای نایقین از قواعد عملیاتی متفاوت پیروی کنند.

نظریه احتمال و نظریه نایقینی هر دو ساختارهای ریاضی مکمل هم هستند که دو مدل قابل قبول ریاضی را برای کار کردن با جهان نایقین فراهم می‌آورند. نظریه احتمال شاخه‌ای از ریاضی است که فراوانی‌ها را مدل بندی می‌کند و نظریه نایقینی شاخه‌ای دیگر از ریاضی است که درجه باور را مدل بندی می‌کند.

ب.۶ چگونه در عمل بین تصادفی بودن و نایقینی تمایز قایل شویم؟

دو نوع عدم قطعیت وجود دارد، تصادفی بودن و نایقینی. تصادفی بودن چیزی است که از قوانین احتمال پیروی می‌کند (یعنی سه اصل موضوعه نظریه احتمال و قضیه احتمال ضرب)، و نایقینی چیزی است که از قوانین نظریه نایقینی پیروی می‌کند (یعنی چهار اصل موضوعه نظریه نایقینی).

تمایز بین تصادفی بودن و نایقینی حتماً امکان پذیر است. با این حال در عمل، این دو را با روش زیر می‌توان از هم متمایز کرد: برای هر اندازه نایقین، بدون در نظر گرفتن این که چه روشی استفاده خواهد شد، تابع توزیع را تولید می‌کنیم. اگر باور داریم که تابع توزیع به اندازه کافی به فراوانی نزدیک است، در این صورت می‌توان آن را تصادفی در نظر گرفت. در غیر این صورت باید آن را نایقینی فرض کرد.

اغلب فکر می‌کنند که تولید توزیع احتمال از روی داده‌های تاریخی ساده است و لذا باید از نظریه احتمال استفاده کرد. در حالی که متاسفانه تابع توزیع که برای مساله کاربردی به دست می‌آید به اندازه کافی به فراوانی واقعی نزدیک نیست. در این حالت باید آن را توزیع نایقینی فرض کنیم و از نظریه نایقینی استفاده کنیم.

ب.۷ چرا معادله دیفرانسیل تصادفی برای مدل بندی قیمت بازار سهام مناسب نیست؟

منشاء نظریه مالی تصادفی را می‌توان رساله دکتری باچیلیر *Speculation la de Théorie* در سال ۱۹۰۰ دانست. با این حال، کار باچیلیر تاثیر زیادی تا پنجاه سال نداشت. پس از آن که کیوسی ایتو در سال ۱۹۴۴ حسابان تصادفی [۶۲] و در سال ۱۹۵۱ معادله دیفرانسیل تصادفی را ابداع کرد، مالی تصادفی به سرعت توسعه یافت و در بین پژوهشگران ساموئلسون [۱۴۱]، بلک‌ـ‌شولز [۳] و مرتون [۱۲۱] در طی دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ سهم زیادی در این توسعه داشتند.

به طور سنتی، نظریه مالی تصادفی فرض می‌کند که قیمت سهام (شامل نرخ سود و نرخ تبدیل پول) از معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو پیروی می‌کند. آیا چنین فرضی منطقی است؟ در واقع، این پیشفرض که پژوهشگران زیادی آن را پذیرفته اند، توسط عده‌ای دیگر از جمله لیو [۹۶] با برخی پارادوکس‌ها به چالش کشیده شده است.

پارادوکس اول: به عنوان مثال فرض کنیم قیمت سهام X_t از معادله دیفرانسیل

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = eX_t + \sigma X_t \cdot \text{اختلال} \qquad (\text{ب.۶})$$

پیروی می‌کند که در آن لوگ‌ـ‌رانش e و σ همان لوگ‌ـ‌انتشار است و «اختلال» یک فرایند تصادفی است. حال توصیف ریاضی عبارت «اختلال» را به صورت

$$\text{اختلال} = \frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{ب.۷})$$

در نظر بگیرید که در آن W_t فرایند وینر است [۲]. در این صورت قیمت سهام X_t از معادله دیفرانسیل تصادفی

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = eX_t + \sigma X_t \frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{ب.۸})$$

پیروی می‌کند. توجه کنید که جمله «اختلال»

$$\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} \sim \mathcal{N}\left(۰, \frac{۱}{\mathrm{d}t}\right) \qquad (\text{ب.۹})$$

یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر است و واریانس آن به ∞ میل می‌کند. این فرض با حوزه‌های دیگر علوم (مانند آمار) کاملاً متفاوت است که اغلب فرض می‌شود

$$\mathcal{N}(۰, ۱) \qquad (\text{ب.۱۰})$$

[۲] فرایند تصادفی W_t را فرایند وینر گویند هرگاه (۱) $W_۰ = ۰$ و تقریبا همه مسیرهای نمونه پیوسته باشند (ولی لیپشیتز نباشند)، (۲) W_t نمو مستقل ایستا داشته باشد و (۳) هر نمو $W_{s+t} - W_s$ یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس t باشد.

که واریانس آن برخلاف جمله «اختلال» که ∞ است ، ۱ در نظر گرفته می‌شود. همچنین، چون واریانس سمت راست (ب.۸) در هر لحظه t «بینهایت» است ، واریانس سمت چپ در هر لحظه t (یعنی نرخ رشد لحظه‌ای $\mathrm{d}X_t/\mathrm{d}t$) نیز بینهایت است. در حالی که نرخ رشد اغلب در عمل واریانس متناهی دارد، یا حداقل داشتن واریانس بینهایت در هر لحظه ناممکن است. پس امکان ندارد که قیمت سهام X_t از معادله دیفرانسیل ایتو پیروی کند.

پارادوکس دوم: از معادله دیفرانسیل (ب.۸) نتیجه می‌شود که X_t یک فرایند تصادفی هندسی است، یعنی

$$X_t = X_\circ \exp((e-\sigma^۲/۲)t+\sigma W_t) \tag{ب.۱۱}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$W_t = \frac{\ln X_t - \ln X_\circ - (e-\sigma^۲/۲)t}{\sigma} \tag{ب.۱۲}$$

که نمو آن به صورت

$$\Delta W_t = \frac{\ln X_{t+\Delta t} - \ln X_t - (e-\sigma^۲/۲)\Delta t}{\sigma} \tag{ب.۱۳}$$

است. قرار دهید

$$A = -\frac{(e-\sigma^۲/۲)\Delta t}{\sigma}. \tag{ب.۱۴}$$

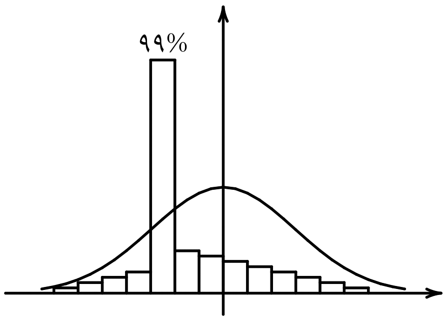
توجه کنید که قیمت سهام X_t در اصل یک تابع پله‌ای نسبت به زمان با تعداد متناهی جهش است، هرچند در ظاهر به صورت یک منحنی دیده می‌شود. در یک دوره مشخص (مثلاً یک هفته)، بدون از بین رفتن کلیت فرض می‌کنیم که قیمت سهام X_t، ۱۰۰ جهش را شاهد بود. حال این دوره را به ۱۰,۰۰۰ بازه مساوی افراز کنید. پس ۱۰,۰۰۰ نمونه از X_t را مشاهده خواهیم کرد. از (ب.۱۳) نتیجه می‌شود که ΔW_t تعداد ۱۰,۰۰۰ نمونه دارد که ۹,۹۰۰ تا از آنها از نوع A است و ۱۰۰ تای دیگر از نوع دیگر:

$$\underbrace{A,\ A, \ldots, A}_{۹۹۰۰},\quad \underbrace{B,\ C, \ldots, Z.}_{۱۰۰} \tag{ب.۱۵}$$

واضح است که هیچ کس باور نمی‌کند که همه آن ۱۰,۰۰۰ نمونه از توزیع احتمال نرمال با میانگین صفر و واریانس Δt پیروی کنند. این واقعیت با این خاصیت فرایند وینر که نمو ΔW_t یک متغیر تصادفی نرمال است، متناقض است. بنابراین، قیمت واقعی سهام X_t از معادله دیفرانسیل تصادفی پیروی نمی‌کند.

شاید برخی فکر می‌کنند قیمت سهام حتماً مانند فرایند هندسی وینر (یا فرایند اورنشتین‌ـ‌اولنبرگ) در دیدگاه کلان رفتار می‌کند، گرچه آنها نیز این پارادوکس را در دیدگاه خرد متوجه شده‌اند. با این حال، از دیدگاه اساسی نظریه مالی تصادفی، حسابان ایتو، نه بر دیدگاه کلان، بلکه بر مبنای ساختار خرد فرایند وینر طراحی شده است (یعنی دیفرانسیل $\mathrm{d}W_t$).

بر اساس دو پارادوکس اشاره شده، شخصاً [از دیدگاه نویسنده کتاب] اعتقاد ندارم که حسابان ایتو بتواند به عنوان یک ابزار ذاتی نظریه مالی نقش بازی کند زیرا معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو از مدل کردن قیمت سهام عاجز است. به عنوان یک جایگزین، حسابان نایقین ممکن است مبنای ریاضی بالقوه‌ای برای نظریه مالی باشد. اگر فرض کنیم قیمت سهام، نرخ بهره و نرخ مبادله پول از معادله دیفرانسیل نایقین پیروی می‌کنند، آنگاه نظریه مالی نایقین را خواهیم داشت.



شکل ب.۳: توزیع احتمال پیوسته‌ای وجود ندارد (منحنی) که فراوانی (هستوگرام) ΔW_t را براورد کند. پس امکان ندارد که قیمت واقعی سهام X_t از معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو پیروی کند.

ب.۸ چه زمانی باید از نظریه نایقینی استفاده کرد؟

نظریه نایقینی شاخه‌ای از ریاضیات برای مدل بندی میزان باور است و مخصوصاً، من [نویسنده کتاب] فکر می‌کنم نظریه نایقینی باید در پنج موقعیت زیر استفاده شود.

(۱) ما باید نظریه نایقینی را (در اینجا منظور متغیر نایقین است) برای کمّی‌سازی آینده وقتی نمونه‌ای وجود ندارد استفاده کنیم. در این حالت، لازم است متخصصین را دعوت کنیم و از آنها میزان باور بر اتفاق افتادن رویدادی را بپرسیم، نظریه نایقینی تنها ابزار برای کار کردن با این میزان باورها است.

(۲) ما باید نظریه نایقینی را (در اینجا منظور متغیر نایقین است) برای کمّی‌سازی آینده وقتی وضعیت اضطراری مانند جنگ، سیل، زلزله، تصادف و شایعه، اتفاق می‌افتد، استفاده کنیم. در واقع در چنین مواقعی داده‌های قبلی برای پیش بینی آینده معتبر نیستند. ذاتاً چنین موقعیتی شبیه موقعیت (۱) است.

(۳) ما باید نظریه نایقینی را (در اینجا منظور متغیر نایقین است) برای کمّی‌سازی گذشته که امکان مشاهده دقیق و اندازه گیری وجود ندارد؛ مانند تصاعد گازهای گلخانه‌ای، منافع اجتماعی تصمیمات و میزان منابع نفتی، استفاده کنیم. در این حالت از متخصصین این حوزه میخواهیم تا برآورد خود را اعلام کنند و به این ترتیب توزیع‌های نایقینی مشخص می‌شوند.

(۴) ما باید نظریه نایقینی را (در اینجا منظور مجموعه نایقین است) برای مدل سازی مفاهیم نادقیق مانند «جوان»، « قدبلند»، «گرم» و «اغلب» که به علت پیچیدگی در نحوه صحبت کردن انسان است، استفاده کنیم.

(۵) ما باید نظریه نایقینی را (در اینجا منظورمعادله دیفرانسیل نایقین است) برای مدل سازی سیستم‌های پویا با اختلال پیوسته وابسته به زمان مانند قیمت سهام، انتقال حرارت و رشد جمعیت، استفاده کنیم.

ب.۹ چرا به نظرم نظریه فازی ریاضی خوبی نیست؟

مجموعه فازی با تابع عضویتش μ تعریف می‌شود که برای هر عضو x، عدد حقیقی $\mu(x)$ را در بازه $[0, 1]$ نسبت می‌دهد که مقدار $\mu(x)$ بیانگر درجه عضویت x در مجموعه فازی است. این تعریف توسط زاده [۲۰۳] در سال ۱۹۶۵ ارائه شد. پس از آن، نظریه مجموعه فازی به طور وسیعی گسترش

یافت. گرچه من [نویسنده]، به موفقیت‌های پرفسور لطفی زاده احترام قائل هستم، باید اذعان کنم که نظریه مجموعه فازی ریاضیات بدی است.

یک پدیده عجیب در مجامع علمی است که افراد مختلف نظریه مجموعه‌های فازی متفاوتی دارند. با این حال باید اعتراف کرد که تقریبا همه گونه‌های مختلف نظریه فازی حداقل چهار مورد را در بر می‌گیرند. اولین مورد یک مجموعه فازی ξ با تابع عضویت μ است. دومین مورد مجموعه مکمل فازی ξ^c با تابع عضویت

$$\lambda(x) = ۱ - \mu(x) \tag{ب.۱۶}$$

است. سومین مورد اندازه امکان است که با سه اصل موضوعه تعریف می‌شود، (۱) برای هر مجموعه مرجع Ω

$$\text{Pos}\{\Omega\} = ۱, \tag{ب.۱۷}$$

(۲) برای مجموعه $\varnothing$،

$$\text{Pos}\{\varnothing\} = ۰, \tag{ب.۱۸}$$

(۳) برای هر دو رویداد $\Lambda_۱$ و $\Lambda_۲$

$$\text{Pos}\{\Lambda_۱ \cup \Lambda_۲\} = \text{Pos}\{\Lambda_۱\} \vee \text{Pos}\{\Lambda_۲\} \tag{ب.۱۹}$$

(۴) چهارمین مورد رابطه بین تابع عضویت و اندازه امکان [۲۰۴] است،

$$\mu(x) = \text{Pos}\{x \in \xi\}. \tag{ب.۲۰}$$

حال برای هر نقطه x، واضح است که $\{x \in \xi\}$ و $\{x \in \xi^c\}$ رویدادهای متضاد هستند[۳] و لذا

$$\{x \in \xi\} \cup \{x \in \xi^c\} = \Omega. \tag{ب.۲۱}$$

از یک طرف، با استفاده از اصول موضوعه امکان، داریم

$$\text{Pos}\{x \in \xi\} \vee \text{Pos}\{x \in \xi^c\} = \text{Pos}\{\Omega\} = ۱. \tag{ب.۲۲}$$

از طرف دیگر، با استفاده از رابطه (ب.۲۰)، داریم

$$\text{Pos}\{x \in \xi\} = \mu(x), \tag{ب.۲۳}$$

$$\text{Pos}\{x \in \xi^c\} = ۱ - \mu(x). \tag{ب.۲۴}$$

از رابطه‌های (ب.۲۲)، (ب.۲۳) و (ب.۲۴) نتیجه می‌شود که

$$\mu(x) \vee (۱ - \mu(x)) = ۱. \tag{ب.۲۵}$$

[۳] شاید افرادی که نظریه فاری کار میکنند اصرار داشته باشند که $\{x \in \xi\}$ و $\{x \in \xi^c\}$ رویدادهای متضاد نیستند. اینجا توصیه میکنم چنین باوری نداشته باشند زیرا چنین باوری با این فرض که $\lambda(x) = ۱ - \mu(x)$ تابع عضویت ξ^c است تناقض دارد.

پس

$$\mu(x) = \text{۰ یا ۱}. \quad \text{(ب.۲۶)}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که تابع عضویت μ همان تابع نشانگر مجموعه قطعی (نه فازی) است. به بیان دیگر، تنها مجموعه قطعی به طور همزمان در (ب.۱۶)∼(ب.۲۰) صدق می‌کند. به این مفهوم **نظریه فازی از نظر ریاضی همان مجموعه قطعی است**. یعنی نظریه مجموعه فازی همان نظریه مجموعه کلاسیک است.

همچنین، هم در نظریه و هم در عمل مشاهده می‌شود که وجود و تعریف رابطه شمول بین مجموعه‌های فازی لازم است. برای این کار، نظریه مجموعه فازی تعریف زیر را در نظر می‌گیرد [۲۰۴]،

$$\mathrm{Pos}\{\xi \subset B\} = \sup_{x\in B} \mu(x) \quad \text{(ب.۲۷)}$$

که در آن B یک مجموعه معمولی است. حال دو بازه قطعی [۱,۲] و [۲,۳] را در نظر بگیرید. در جامعه ریاضی به طور یقین شمول [۱,۲] در [۲,۳] پذیرفتنی نیست، یعنی رابطه شمول

$$[۱,۲] \subset [۲,۳] \quad \text{(ب.۲۸)}$$

صد درصد نادرست است. توجه کنید که [۱,۲] یک مجموعه فازی خاص با تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } ۱ \le x \le ۲ \\ ۰, & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \quad \text{(ب.۲۹)}$$

است. از فرمول (ب.۲۷) نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Pos}\{[۱,۲] \subset [۲,۳]\} = \sup_{x\in[۲,۳]} \mu(x) = ۱. \quad \text{(ب.۳۰)}$$

یعنی نظریه مجموعه فازی می‌گوید که [۲,۳] ⊂ [۱,۲] صد درصد درست است. آیاشما چنین نتیجه‌ای را می‌پذیرید؟ اگر پاسخ شما منفی است پس نظریه مجموعه فازی هم پذیرفتنی نیست.

شاید برخی از افرادی که در نظریه فازی کار میکنند بگویند که آنها هرگز از اندازه امکان در نظریه مجموعه فازی استفاده نمی‌کنند. در اینجا می‌خواهم به این افراد یادآوری کنم که درجه عضویت $\mu(x)$ همان اندازه امکان است که یک مجموعه فازی ξ نقطه مانند x را شامل شود (یعنی x به ξ متعلق باشد). به خاطر داشته باشید که نمی‌توانیم بین مجموعه فازی، مجموعه تصادفی (روبینز [۱۳۹] و ماترون [۱۲۰]) و مجموعه نایقین (لیو [۸۹])، اگر اندازه‌های به وجود آوردنده آنها وجود نداشته باشند، تمایز قایل شویم.

با توجه به بحث فوق، مشاهده می‌کنیم که نظریه مجموعه فازی یک ساختار ریاضی سازگار نیست و در عمل به نتیجه‌گیری‌های نادرست منجر می‌شود. بنابراین، میخواهم [نویسنده کتاب] چنین نتیجه بگیرم که **نظریه مجموعه فازی ریاضی بدی است**. اگر بخواهم صریح بگویم، نظریه مجموعه فازی را نمی‌توان ریاضی نامید. آیا امکان اصلاح نظریه فازی وجود دارد؟ جواب بلی است. ما می‌توانیم. ولی این تغییر آنچنان وسیع است که من نام جدید «نظریه مجموعه نایقین» را برای آن به کار می‌برم. فصل ۸ را نگاه کنید.

ب.۱۰ چرا متغیر فازی برای مدل بندی کمیت نایقین نامناسب است؟

متغیر فازی یک تابع از فضای امکان به مجموعه اعداد حقیقی است (ناهمیاس [۱۲۴]). برخی فکر می‌کنند که متغیر فازی ابزار مناسبی برای مدل کردن کمیت نایقین است. آیا این تلقی درست است؟ متاسفانه جواب منفی است.

برای مثال برخی تصور می‌کنند که قد انسان یک متغیر فازی ξ است و تابع عضویت

$$\mu(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x \le ۱/۶۰ \\ (x - ۱/۶۰)/۰/۰۴, & \text{اگر } ۱/۶۰ \le x \le ۱/۶۴ \\ ۱, & \text{اگر } ۱/۶۴ \le x \le ۱/۶۶ \\ (۱/۷۰ - x)/۰/۰۴, & \text{اگر } ۱/۶۶ \le x \le ۱/۷۰ \\ ۰, & \text{اگر } x \ge ۱/۷۰ \end{cases} \qquad (\text{ب.۳۱})$$

را به آن متناظر می‌کنند که همان تابع عضویت ذورنقه‌ای $(۱/۶۰, ۱/۶۴, ۱/۶۶, ۱/۷۰)$ بر حسب متر است. بر سر این که چرا عدد فازی ذورنقه‌ای را انتخاب کردم بحث نکنید زیرا چنین انتخابی در این بحث مهم نیست. بر اساس تابع عضویت μ و تعریف اندازه امکان

$$\mathrm{Pos}\{\xi \in B\} = \sup_{x \in B} \mu(x), \qquad (\text{ب.۳۲})$$

به سادگی می‌توان به ترتیب با قرار دادن $B = \{۱/۶۵\}$ و $B = \{۱/۶۵\}^c$ نتیجه گرفت که

$$\mathrm{Pos}\{\text{قد من} = ۱/۶۵\mathrm{m}\} = ۱ \qquad (\text{ب.۳۳})$$

و

$$\mathrm{Pos}\{\text{قد من} \ne ۱/۶۵\mathrm{m}\} = ۱ \qquad (\text{ب.۳۴})$$

پس بلافاصله سه گزاره زیر را نتیجه می‌گیریم:

الف: قد من با اندازه امکان ۱ «دقیقاً ۱/۶۵ متر» است.

ب: قد من با اندازه امکان ۱ «۱/۶۵ متر نیست».

ج: «قد من دقیقا ۱/۶۵ متر است» به همان اندازه امکان‌پذیر است که «قد من ۱/۶۵ متر نیست».

گزاره اول میگوید که صد در صد مطمئن هستیم که قد من «دقیقاً ۱/۶۵ متر» است، نه کمتر و نه بیشتر. آیا چنین انطباقی شدنی است! باور این که قد من «دقیقاً ۱/۶۵ متر» است بدون شک تقریباً صفر است، و کسی نمی‌تواند چنان نابخرد باشد که انتظار داشته باشد مقدار دقیق قد من ۱/۶۵ متر باشد. گزاره دوم منطقی تر به نظر می‌رسد. گزاره سوم می‌گوید که «دقیقاً ۱/۶۵ متر» قد من و «۱/۶۵ متر نبودن قد من اندازه امکان یکسان دارند. با توجه به موارد فوق، شرط بندی زیر را در نظر بگیرید:

> *اگر قد من دقیقا ۱/۶۵ متر باشد شما ۱۰۰ $ برنده می‌شوید، در غیر این صورت (یعنی قد من ۱/۶۵ متر نباشد) ۱۰۰ $ می‌بازید.*

آیا به نظر شما چنین شرط بندی منصفانه است؟ به نظر می‌رسد که کسی چنین عقیده‌ای ندارد. پس نتیجه گیری (ج) پذیرفتنی نیست زیرا مقایسه «دقیقاً ۱/۶۵ متر بودن» با «۱/۶۵ متر نبودن» تقریباً مقایسه ناپذیر است. این پارادوکس نشان می‌دهد که کمیت‌های نایقین مانند قد را نمی‌توان با استفاده از نظریه امکان کمی‌سازی کرد و بنابراین آنها متغیر فازی نیستند.

ب.۱۱ تفاوت بین نظریه نایقینی و نظریه امکان چیست؟

تفاوت ذاتی نظریه نایقینی (لیو [۸۴]) و نظریه امکان (زاده [۲۰۴]) در این است که در اولی رابطه

$$\mathcal{M}\{\Lambda_1 \cup \Lambda_2\} = \mathcal{M}\{\Lambda_1\} \vee \mathcal{M}\{\Lambda_2\} \qquad (\text{ب.۳۵})$$

فقط زمانی برقرار است که رویدادهای Λ_1 و Λ_2 مستقل باشند و در دومی رابطه

$$\text{Pos}\{\Lambda_1 \cup \Lambda_2\} = \text{Pos}\{\Lambda_1\} \vee \text{Pos}\{\Lambda_2\} \qquad (\text{ب.۳۶})$$

برای هر دو رویداد Λ_1 و Λ_2 بدون در نظر گرفتن این که مستقل هستند یا نه، برقرار است.

بررسی‌های زیاد نشان داد که اندازه اجتماع دو رویداد که مستقل نیستند، اغلب بزرگتر از بیشینه اندازه‌های تک تک آنها است. این واقعیت بیان می‌کند که تفکر انسان رفتار فازی ندارد.

هم نظریه نایقینی و هم نظریه امکان می‌خواهند درجه باور را مدل بندی کنند، در حالی که اولی از اندازه نایقین استفاده می‌کند و دومی از اندازه امکان. پس آنها دو رقیب جدی هستند.

ب.۱۲ با اعداد بازه‌ای چگونه به طور منطقی کار کنیم؟

در عمل، معمولاً به دلیل مشاهدات نادقیق یا تقریب انسانی، برای اطلاعات کران پایین و کران بالا ارائه می‌شود. برای مثال *«فکر می‌کنم قد شما بین ۱/۶ و ۱/۷ متر است.»* از این عبارت ممکن است چنین نتیجه بگیریم که:

(۱) قد شما دقیقا برای ما مشخص نیست؛

(۲) قد واقعی شما در بازه $[۱/۶, ۱/۷]$ است؛

(۳) قد شما با امکان یکسان ممکن است هر عددی از بازه $[۱/۶, ۱/۷]$ باشد.

چنین اطلاعاتی را بازه‌ــ مقدار می‌نامند. برای توصیف اطلاعات بازه‌ــ مقدار، «عدد بازه‌ای» را به عنوان عددی که به طور یکسان در یک بازه توزیع شده است، تعریف می‌کنیم. با استفاده از این مفهوم، ادعای من چنین خواهد بود: *«فکر می‌کنم قد شما عدد بازه‌ای $[۱/۶, ۱/۷]$ است»*. چگونگی کار با اعداد بازه‌ای در علوم و مهندسی موضوع بسیار مهمی است.

در نظریه نایقینی، یک عدد بازه‌ای $[a, b]$ به عنوان یک متغیر نایقین خطی (در این کتاب به صورت $\mathcal{L}(a, b)$ نوشته شده است) با توزیع نایقینی

$$\Phi(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \le x \le b \text{ اگر} \qquad (\text{ب.۳۷})$$

در نظر گرفته می‌شود و توزیع نایقینی معکوس آن به صورت

$$\Phi^{-1}(\alpha) = (1-\alpha)a + \alpha b, \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (\text{ب.۳۸})$$

است.

قانون عملیاتی: فرض کنید $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$ اعداد بازه‌ای مستقل هستند. فرض کنید $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک تابع افزایشی اکید نسبت به $x_1, x_2, \ldots, x_m$ و کاهشی اکید نسبت

به $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ است. از قضیه ۱۵.۲ (یعنی قانون عملیاتی متغیرهای نایقین) نتیجه می‌شود که

$$\xi = f([a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]) \tag{ب.۳۹}$$

توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \ldots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)) \tag{ب.۴۰}$$

دارد که در آن برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\Phi_i^{-1}(\alpha) = (1-\alpha)a_i + \alpha b_i. \tag{ب.۴۱}$$

توجه کنید که ξ مشخص شده با (ب.۳۹) یک متغیر نایقین است، ولی الزاماً یک عدد بازه‌ای نیست.

جمع: فرض کنید $[a_1, b_1]$ و $[a_2, b_2]$ اعداد بازه‌ای مستقل هستند. از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که جمع $[a_1, b_1] + [a_2, b_2]$ توزیع نایقینی معکوس

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(\alpha) &= ((1-\alpha)a_1 + \alpha b_1) + ((1-\alpha)a_2 + \alpha b_2) \\ &= (1-\alpha)(a_1 + a_2) + \alpha(b_1 + b_2)\end{aligned} \tag{ب.۴۲}$$

دارد که یک عدد بازه ای به صورت $[a_1 + a_2, b_1 + b_2]$ است، یعنی

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]. \tag{ب.۴۳}$$

تفریق: فرض کنید $[a_1, b_1]$ و $[a_2, b_2]$ اعداد بازه‌ای مستقل هستند. از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که تفاضل $[a_1, b_1] - [a_2, b_2]$ توزیع نایقینی معکوس

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(\alpha) &= ((1-\alpha)a_1 + \alpha b_1) - (\alpha a_2 + (1-\alpha)b_2) \\ &= (1-\alpha)(a_1 - b_2) + \alpha(b_1 - a_2)\end{aligned} \tag{ب.۴۴}$$

دارد که یک عدد بازه ای به صورت $[a_1 - b_2, b_1 - a_2]$ است، یعنی

$$[a_1, b_1] - [a_2, b_2] = [a_1 - b_2, b_1 - a_2]. \tag{ب.۴۵}$$

ضرب اسکالر: فرض کنید $[a, b]$ یک عدد بازه‌ای و k یک عدد اسکالر است. از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که ضرب اسکالر $k \cdot [a, b]$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1-\alpha)(ka) + \alpha(kb), & \text{اگر } k \geq 0 \\ (1-\alpha)(kb) + \alpha(ka), & \text{اگر } k < 0 \end{cases} \tag{ب.۴۶}$$

دارد که یک عدد بازه ای است و

$$k \cdot [a, b] = \begin{cases} [ka, kb], & \text{اگر } k \geq 0 \\ [kb, ka], & \text{اگر } k < 0 \end{cases} \tag{ب.۴۷}$$

تابع خطی فرض کنید $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots,[a_n,b_n]$ اعداد بازه‌ای مستقل هستند. از جمع، تفریق و ضرب اسکالر اعداد بازه‌ای نتیجه می‌شود که تابع خطی

$$k_1\cdot[a_1,b_1]+k_2\cdot[a_2,b_2]+\cdots+k_n\cdot[a_n,b_n] \qquad (\text{ب.۴۸})$$

یک عدد بازه‌ای است.

ضرب: دو عدد بازه‌ای مستقل $[a_1,b_1]$ و $[a_2,b_2]$ را با $a_1>0$ و $a_2>0$ در نظر بگیرید. از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که ضرب $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha)=((1-\alpha)a_1+\alpha b_1)\times((1-\alpha)a_2+\alpha b_2) \qquad (\text{ب.۴۹})$$

دارد که دیگر یک عدد بازه‌ای نیست، یعنی

$$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\neq[a_1\times a_2,b_1\times b_2]. \qquad (\text{ب.۵۰})$$

تقسیم: دو عدد بازه‌ای مستقل $[a_1,b_1]$ و $[a_2,b_2]$ را با $a_1>0$ و $a_2>0$ در نظر بگیرید. از قانون عملیاتی نتیجه می‌شود که تقسیم $[a_1,b_1]\div[a_2,b_2]$ توزیع نایقینی معکوس

$$\Psi^{-1}(\alpha)=((1-\alpha)a_1+\alpha b_1)\div(\alpha a_2+(1-\alpha)b_2) \qquad (\text{ب.۵۱})$$

دارد که دیگر یک عدد بازه‌ای نیست، یعنی

$$[a_1,b_1]\div[a_2,b_2]\neq[a_1\div b_2,b_1\div a_2]. \qquad (\text{ب.۵۲})$$

روش رتبه بندی: عدد بازه‌ای $[a,b]$ را در نظر بگیرید و فرض کنید c یک مقدار ثابت است. از قضیه ۳.۲ (یعنی قضیه معکوس اندازه) نتیجه می‌شود که درجه باور اینکه $[a,b]$ از c نابیشتر باشد به صورت

$$\mathcal{M}\{[a,b]\le c\}=\begin{cases}0, & \text{اگر } c<a\\ \dfrac{c-a}{b-a}, & \text{اگر } a\le c\le b\\ 1, & \text{اگر } c>b\end{cases} \qquad (\text{ب.۵۳})$$

است و درجه باور اینکه $[a,b]$ ناکمتر از c باشد به صورت

$$\mathcal{M}\{[a,b]\ge c\}=\begin{cases}0, & \text{اگر } b<c\\ \dfrac{b-c}{b-a}, & \text{اگر } a\le c\le b\\ 1, & \text{اگر } a>c\end{cases} \qquad (\text{ب.۵۴})$$

است. برای اعداد بازه‌ای مستقل $[a_1,b_1]$ و $[a_2,b_2]$، از تفریق اعداد بازه‌ای نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{M}\{[a_1,b_1]\le[a_2,b_2]\}=\mathcal{M}\{[a_1-b_2,b_1-a_2]\le 0\}. \qquad (\text{ب.۵۵})$$

با استفاده از (ب.۵۳) داریم

$$\mathcal{M}\{[a_۱, b_۱] \le [a_۲, b_۲]\} = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } a_۱ > b_۲ \\ ۱, & \text{اگر } a_۲ > b_۱ \\ \dfrac{b_۲ - a_۱}{b_۱ - a_۱ + b_۲ - a_۲}, & \end{cases} \quad \text{(ب.۵۶)}$$

مقدار مورد انتظار: از قضیه ۲.۲۵ (یعنی عملگر مقدار مورد انتظار) نتیجه می‌گیرم که مقدار مورد انتظار عدد بازه‌ای $[a, b]$ به صورت

$$E[a, b] = \frac{a + b}{۲} \quad \text{(ب.۵۷)}$$

است.

واریانس: از قضیه ۲.۴۱ نتیجه می‌شود که واریانس عدد بازه‌ای $[a, b]$ به صورت

$$V[a, b] = \frac{(b - a)^۲}{۱۲} \quad \text{(ب.۵۸)}$$

است.

گشتاور دوم: از قضیه ۲.۴۴ نتیجه می‌شود که گشتاور دوم عدد بازه‌ای $[a, b]$ به صورت

$$E[a, b]^۲ = \frac{a^۲ + ab + b^۲}{۳} \quad \text{(ب.۵۹)}$$

است.

فاصله: از قضیه ۲.۴۸ نتیجه می‌شود که فاصله بین دو عدد بازه‌ای مستقل $[a_۱, b_۱]$ و $[a_۲, b_۲]$ به صورت

$$d([a_۱, b_۱], [a_۲, b_۲]) = \begin{cases} \dfrac{|(a_۱ - b_۲) + (b_۱ - a_۲)|}{۲}, & \text{اگر } [a_۱, b_۱] \cap [a_۲, b_۲] = \varnothing \\ \dfrac{(a_۱ - b_۲)^۲ + (b_۱ - a_۲)^۲}{۲(b_۱ - a_۲ - a_۱ + b_۲)}, & \text{اگر } [a_۱, b_۱] \cap [a_۲, b_۲] \ne \varnothing \end{cases}$$

است.

ب.۱۳ چرا عقیده دارم که تحلیل بازه‌ای، نظریه مجموعه‌های زمخت و سیستم خاکستری سازگار نیستند؟

تحلیل بازه‌ای (مور [۱۲۲])، مجموعه زمخت (پاولاک [۱۲۸]) و سیستم خاکستری (دِنگ [۲۶]) ادعا دارند که توانایی کارکردن با اعداد بازه‌ای را دارند و هر سه آنها پنج فرض زیر را شامل هستند:

(۱) $[a_۱, b_۱] + [a_۲, b_۲] = [a_۱ + a_۲, b_۱ + b_۲]$، (۲) $[a_۱, b_۱] - [a_۲, b_۲] = [a_۱ - b_۲, b_۱ - a_۲]$،

(۳) اگر $a_۱ > ۰, a_۲ > ۰$، $[a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] = [a_۱ \times a_۲, b_۱ \times b_۲]$

(۴) اگر $a_۱ > ۰, a_۲ > ۰$، $[a_۱, b_۱] \div [a_۲, b_۲] = [a_۱ \div b_۲, b_۱ \div a_۲]$

(۵) اگر $a \leq c \leq b$، $\pi\{[a, b] \leq c\} = (c - a)/(b - a)$؛

که در آنها $\pi\{[a, b] \leq c\}$ نشان دهنده درجه نابیشتر بودن عدد بازه‌ای $[a, b]$ از مقدار ثابت c است. گرچه مهندسین این نوع از سیستم ریاضی را دوست دارند، ولی متاسفانه هیچ ساختار ریاضی وجود ندارد که به طور هم زمان (۱)، (۳) و (۵) را شامل شود، زیرا این سه مورد با هم در تناقض هستند. به این دلیل، هیچکدام از تحلیل بازه ای، مجموعه زمخت و سیستم خاکستری سازگار نیستند.

برای نشان دادن ناسازگاری، دو عدد بازه‌ای $[۰, ۱]$ و $[۰, ۱]$ را در نظر بگیرید. از موردهای (۱) و (۵) نتیجه می‌شود که

$$[۰, ۱] + [۰, ۱] = [۰, ۲]$$

و

$$\begin{aligned} ۰/۵ &= \pi\{[۰, ۲] \leq ۱\} \\ &= \pi\{[۰, ۱] + [۰, ۱] \leq ۱\} \\ &= \pi\{(x, y) \,|\, x + y \leq ۱, x \geq ۰, y \geq ۰\}. \end{aligned}$$

از طرف دیگر از (۳) و (۵) نتیجه می‌شود که

$$[۰, ۱] \times [۰, ۱] = [۰, ۱]$$

و

$$\begin{aligned} ۰/۴ &= \pi\{[۰, ۱] \leq ۰/۴\} \\ &= \pi\{[۰, ۱] \times [۰, ۱] \leq ۰/۴\} \\ &= \pi\{(x, y) \,|\, xy \leq ۰/۴, ۰ \leq x \leq ۱, ۰ \leq y \leq ۱\}. \end{aligned}$$

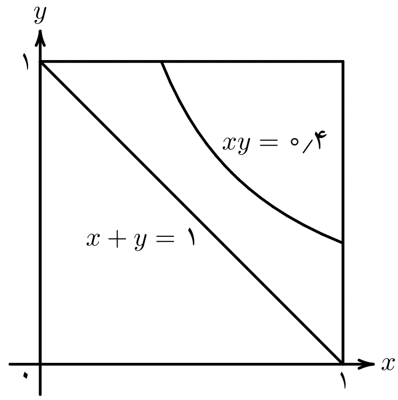
به طور خلاصه؛ از (۱)، (۳) و (۵) دو معادله زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\pi\{\underbrace{(x, y) \,|\, x + y \leq ۱, x \geq ۰, y \geq ۰}_{\Lambda}\} = ۰/۵, \qquad (\text{ب.}۶۰)$$

$$\pi\{\underbrace{(x, y) \,|\, xy \leq ۰/۴, ۰ \leq x \leq ۱, ۰ \leq y \leq ۱}_{\Delta}\} = ۰/۴. \qquad (\text{ب.}۶۱)$$

یعنی، $\pi\{\Lambda\} > \pi\{\Delta\}$.

این تناقض نشان می‌دهد که اگر یک ساختار ریاضی همزمان موردهای (۱)، (۳) و (۵) را شامل شود، سازگار نیست. پس هیچکدام از تحلیل بازه‌ای، نظریه مجموعه زمخت و سیستم خاکستری در ریاضیات سازگار نیستند.



شکل ب.۴: رویدادهای Λ و Δ مشخص شده در (ب.۶۰) و (ب.۶۱)

ب.۱۴ نایقینی در صد سال گذشته چه مسیری را طی کرده است؟

پس از آن که کلمه «تصادفی بودن» برای بیان پدیده‌های احتمالی استفاده شد، نایت (۱۹۲۱) و کینز (۱۹۳۶) استفاده از کلمه «نایقینی» برای بیان پدیده‌های که غیراحتمالی هستند، را آغاز کردند. مجامع اکادمیک نیز آن را نایقینی نایتی، نایقینی کینزی، یا نایقینی درست می‌نامند. متاسقانه توسعه نظریه ریاضی برای چنین رسته وسیع از نایقینی ناممکن به نظر می‌رسد زیرا «غیر احتمالی بودن» بیان گر مفاهیم زیادی است. این ایراد باعث می‌شود تا نتوان نایقینی به مفهوم نایت و کینز را به عنوان یک واژه علمی استفاده کرد. با این حال مشخص است که آنان پیروزی بزرگی در شکستن انحصار نظریه احتمال داشتند.

علیرغم آن، دو پسرفت عمده در این موضوع وجود دارد. اولین پسرفت با رمزی در سال ۱۹۳۱ با مطرح کردن بحث کتاب هلندی سرچشمه می‌گیرد که «ثابت می‌کند» درجه باور از نظریه احتمال پیروی می‌کند. از دیدگاه ریاضی، مبحث کتاب هلندی و نظریه احتمال موضوعات یکسانی هستند. از نظر منطقی یک گزاره اگر بر اساس یک گزاره ثابت نشده اثبات شود؛ هنوز ثابت نشده تلقی می‌شود. چون مبحث کتاب هلندی هنوز ثابت نشده است، پس پیروی درجه باور از نظریه احتمال نیز هنوز ثابت نشده است. پسرفت از قضیه کاکس در سال ۱۹۴۶ ناشی میشود که درجه باور را با اندازه احتمال یکریخت می‌داند. بسیاری نمی‌دانند که قضیه کاکس بر اساس یک فرض نامعقول پایه ریزی شده است، و بنابراین، به اشتباه چنین پنداشته می‌شود که نایقینی و احتمال مترادف هستند. این موضوع تحت عنوان احتمال ذهنی (دی فانتی ۱۹۳۷) هنوز مطرح است. آزمایش‌های زیادی نشان داد که درجه باور از قوانین نظریه احتمال پیروی نمی‌کند.

یک رهیافت موثر توسط زاده (۱۹۶۵) نظریه مجموعه فازی بود که به طور گسترده و موثری در بسیاری از حوزه‌ها استفاده شد. با این حال، نظریه فازی نه به یک سیستم ریاضی تبدیل شد و نه ابزار مناسبی برای مدل بندی میزان باور است. اشتباه اساسی نظریه مجموعه فازی این فرض نادرست است که درجه باور اجتماع رویدادها با بیشترین مقدار درجه باور تک تک رویدادها، صرف نظر از این که مستقل هستند یا نه، برابر است. توسعه نظریه فازی نیز نتوانست به یک سیستم ریاضی سازگار منجر شود.

علاوه بر اینها، تحلیل بازه ای (۱۹۶۶)، نظریه مجموعه زمخت (۱۹۸۲)، سیستم خاکستری (۱۹۸۲)، هر کدام نقش مهمی در مهندسی و مدیریت دارند. با این حال، هیچ یک از آنها از نظر

ریاضی سازگار نیستند.

آخرین تحول نظریه نایقینی بود که در سال ۲۰۰۷ توسط لیو پایه ریزی شد. امروزه، نظریه نایقینی شاخه‌ای از ریاضیات است که نه تنها یک مطالعه ساختاری مجرد است (یعنی فضای نایقینی)، بلکه برای مدل بندی درجه‌های باور قابل استفاده است. شاید برخی ایراد بگیرند که من [نویسنده] هرگز در این کتاب نایقینی را تشریح نمی‌کنم. حال برای این تعریف آماده هستیم. نایقینی آن چیزی است که از قوانین نظریه نایقینی پیروی می‌کند (یعنی چهار اصل موضوعه نظریه نایقینی). از این پس، «نایقینی» یک کلمه علمی بر مبنای نظریه نایقینی است.

کتاب‌نامه

[1] Bachelier L, Théorie de la spéculation, *Annales Scientifiques de L'École Normale Supérieure*, Vol.17, 21-86, 1900.

[2] Barbacioru IC, Uncertainty functional differential equations for finance, *Surveys in Mathematics and its Applications*, Vol.5, 275-284, 2010.

[3] Black F, and Scholes M, The pricing of option and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, 637-654, 1973.

[4] Charnes A, and Cooper WW, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming,* Wiley, New York, 1961.

[5] Chen L, Peng J, Rao CJ, and Rosyida I, Cycle index of uncertain random graph, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol.34, No.6, 4249-4259, 2018.

[6] Chen XW, and Liu B, Existence and uniqueness theorem for uncertain differential equations, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.9, No.1, 69-81, 2010.

[7] Chen XW, American option pricing formula for uncertain financial market, *International Journal of Operations Research*, Vol.8, No.2, 32-37, 2011.

[8] Chen XW, and Ralescu DA, A note on truth value in uncertain logic, *Expert Systems with Applications*, Vol.38, No.12, 15582-15586, 2011.

[9] Chen XW, and Dai W, Maximum entropy principle for uncertain variables, *International Journal of Fuzzy Systems*, Vol.13, No.3, 232-236, 2011.

[10] Chen XW, Kar S, and Ralescu DA, Cross-entropy measure of uncertain variables, *Information Sciences*, Vol.201, 53-60, 2012.

[11] Chen XW, Variation analysis of uncertain stationary independent increment process, *European Journal of Operational Research*, Vol.222, No.2, 312-316, 2012.

[12] Chen XW, and Ralescu DA, B-spline method of uncertain statistics with applications to estimate travel distance, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.6, No.4, 256-262, 2012.

[13] Chen XW, Liu YH, and Ralescu DA, Uncertain stock model with periodic dividends, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.12, No.1, 111-123, 2013.

[14] Chen XW, and Ralescu DA, Liu process and uncertain calculus, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.1, Article 3, 2013.

[15] Chen XW, and Gao J, Uncertain term structure model of interest rate, *Soft Computing*, Vol.17, No.4, 597-604, 2013.

[16] Chen XW, Li XF, and Ralescu DA, A note on uncertain sequence, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Vol.22, No.2, 305-314, 2014.

[17] Chen XW, Uncertain calculus with finite variation processes, *Soft Computing*, Vol.19, No.10, 2905-2912, 2015.

[18] Chen XW, and Gao J, Two-factor term structure model with uncertain volatility risk, *Soft Computing*, Vol.22, No.17, 5835-5841, 2018.

[19] Chen XW, *Theory of Uncertain Finance*, http://orsc.edu.cn/chen/tuf.pdf.

[20] Cox RT, Probability, frequency and reasonable expectation, *American Journal of Physics*, Vol.14, 1-13, 1946.

[21] Dai W, and Chen XW, Entropy of function of uncertain variables, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.55, Nos.3-4, 754-760, 2012.

[22] Dai W, Quadratic entropy of uncertain variables, *Soft Computing*, Vol.22, No.17, 5699-5706, 2018.

[23] Dantzig GB, Linear programming under uncertainty, *Management Science*, Vol.1, 197-206, 1955.

[24] de Finetti B, La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, Vol.7, 1-68, 1937.

[25] de Luca A, and Termini S, A definition of nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory, *Information and Control*, Vol.20, 301-312, 1972.

[26] Deng JL, Control problems of grey systems, *Systems & Control Letters*, Vol.1, No.5, 288-294, 1982.

[27] Dijkstra EW, A note on two problems in connection with graphs, *Numerical Mathematics*, Vol.1, No.1, 269-271, 1959.

[28] Ding SB, Uncertain minimum cost flow problem, *Soft Computing*, Vol.18, No.11, 2201-2207, 2014.

[29] Dubois D, and Prade H, *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum, New York, 1988.

[30] Elkan C, The paradoxical success of fuzzy logic, *IEEE Expert*, Vol.9, No.4, 3-8, 1994.

[31] Ellsberg D, Risk, ambiguity, and the Savage axioms, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.75, No.4, 643-669, 1961.

[32] Erdős P, and Rényi A, On random graphs, *Publicationes Mathematicae*, Vol.6, 290-297, 1959.

[33] Frank H, and Hakimi SL, Probabilistic flows through a communication network, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol.12, 413-414, 1965.

[34] Gao J, and Yao K, Some concepts and theorems of uncertain random process, *International Journal of Intelligent Systems*, Vol.30, No.1, 52-65, 2015.

[35] Gao J, Yao K, Zhou J, and Ke H, Reliability analysis of uncertain weighted k-out-of-n systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, to be published.

[36] Gao R, Milne method for solving uncertain differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.274, 774-785, 2016.

[37] Gao R, and Sheng YH, Law of large numbers for uncertain random variables with different chance distributions, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol.31, No.3, 1227-1234, 2016.

[38] Gao R, and Yao K, Importance index of component in uncertain reliability system, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.4, Article 7, 2016.

[39] Gao R, and Yao K, Importance index of components in uncertain random systems, *Knowledge-Based Systems*, Vol.109, 208-217, 2016.

[40] Gao R, and Ahmadzade H, Moment analysis of uncertain stationary independent increment processes, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.10, No.4, 260-268, 2016.

[41] Gao R, Uncertain wave equation with infinite half-boundary, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.304, 28-40, 2017.

[42] Gao R, Sun Y, and Ralescu DA, Order statistics of uncertain random variables with application to k-out-of-n system, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.16, No.2, 159-181, 2017.

[43] Gao R, and Chen XW, Some concepts and properties of uncertain fields, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol.32, No.6, 4367-4378, 2017.

[44] Gao R, and Ralescu DA, Covergence in distribution for uncertain random variables, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.26, No.3, 1427-1434, 2018.

[45] Gao X, Some properties of continuous uncertain measure, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness & Knowledge-Based Systems*, Vol.17, No.3, 419-426, 2009.

[46] Gao X, Gao Y, and Ralescu DA, On Liu's inference rule for uncertain systems, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Vol.18, No.1, 1-11, 2010.

[47] Gao X, Jia LF, and Kar S, A new definition of cross-entropy for uncertain variables, *Soft Computing*, Vol.22, No.17, 5617-5623, 2018.

[48] Gao XL, and Gao Y, Connectedness index of uncertain graphs, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness & Knowledge-Based Systems*, Vol.21, No.1, 127-137, 2013.

[49] Gao XL, Regularity index of uncertain graph, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol.27, No.4, 1671-1678, 2014.

[50] Gao Y, Shortest path problem with uncertain arc lengths, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.62, No.6, 2591-2600, 2011.

[51] Gao Y, Uncertain inference control for balancing inverted pendulum, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.11, No.4, 481-492, 2012.

[52] Gao Y, Existence and uniqueness theorem on uncertain differential equations with local Lipschitz condition, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.6, No.3, 223-232, 2012.

[53] Gao Y, Gao R, and Yang LX, Analysis of order statistics of uncertain variables, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.3, Article 1, 2015.

[54] Gao Y, and Qin ZF, On computing the edge-connectivity of an uncertain graph, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.24, No.4, 981-991, 2016.

[55] Ge XT, and Zhu Y, Existence and uniqueness theorem for uncertain delay differential equations, *Journal of Computational Information Systems*, Vol.8, No.20, 8341-8347, 2012.

[56] Gilbert EN, Random graphs, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.30, No.4, 1141-1144, 1959.

[57] Guo HY, and Wang XS, Variance of uncertain random variables, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.2, Article 6, 2014.

[58] Guo HY, Wang XS, Wang LL, and Chen D, Delphi method for estimating membership function of uncertain set, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.4, Article 3, 2016.

[59] Han SW, Peng ZX, and Wang SQ, The maximum flow problem of uncertain network, *Information Sciences*, Vol.265, 167-175, 2014.

[60] Hassanzadeh S, and Mehrdoust F, Valuation of European option under uncertain volatility model, *Soft Computing*, Vol.22, No.12, 4153-4163, 2018.

[61] Hou YC, Subadditivity of chance measure, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.2, Article 14, 2014.

[62] Ito K, Stochastic integral, *Proceedings of the Japan Academy Series A*, Vol.20, No.8, 519-524, 1944.

[63] Ito K, On stochastic differential equations, *Memoirs of the American Mathematical Society*, No.4, 1-51, 1951.

[64] Iwamura K, and Kageyama M, Exact construction of Liu process, *Applied Mathematical Sciences*, Vol.6, No.58, 2871-2880, 2012.

[65] Iwamura K, and Xu YL, Estimating the variance of the square of canonical process, *Applied Mathematical Sciences*, Vol.7, No.75, 3731-3738, 2013.

[66] Jaynes ET, Information theory and statistical mechanics, *Physical Reviews*, Vol.106, No.4, 620-630, 1957.

[67] Jaynes ET, *Probability Theory: The Logic of Science*, Cambridge University Press, 2003.

[68] Ji XY, and Zhou J, Option pricing for an uncertain stock model with jumps, *Soft Computing*, Vol.19, No.11, 3323-3329, 2015.

[69] Ji XY, and Zhou J, Solving high-order uncertain differential equations via Runge-Kutta method, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.26, No.3, 1379-1386, 2018.

[70] Jia LF, and Dai W, Uncertain forced vibration equation of spring mass system, Technical Report, 2017.

[71] Jiao DY, and Yao K, An interest rate model in uncertain environment, *Soft Computing*, Vol.19, No.3, 775-780, 2015.

[72] Kahneman D, and Tversky A, Prospect theory: An analysis of decision under risk, *Econometrica*, Vol.47, No.2, 263-292, 1979.

[73] Ke H, Su TY, and Ni YD, Uncertain random multilevel programming with application to product control problem, *Soft Computing*, Vol.19, No.6, 1739-1746, 2015.

[74] Ke H, and Yao K, Block replacement policy in uncertain environment, *Reliability Engineering & System Safety*, Vol.148, 119-124, 2016.

[75] Keynes JM, *The General Theory of Employment, Interest, and Money*, Harcourt, New York, 1936.

[76] Knight FH, *Risk, Uncertainty, and Profit*, Houghton Mifflin, Boston, 1921.

[77] Kolmogorov AN, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Julius Springer, Berlin, 1933.

[78] Li SG, Peng J, and Zhang B, Multifactor uncertain differential equation, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.3, Article 7, 2015.

[79] Li X, and Liu B, Hybrid logic and uncertain logic, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.3, No.2, 83-94, 2009.

[80] Lio W, and Liu B, Uncertain data envelopment analysis with imprecisely observed inputs and outputs, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.17, No.3, 357-373, 2018.

[81] Lio W, and Liu B, Residual and confidence interval for uncertain regression model with imprecise observations, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, to be published.

[82] Liu B, *Theory and Practice of Uncertain Programming*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.

[83] Liu B, and Liu YK, Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.10, No.4, 445-450, 2002.

[84] Liu B, *Uncertainty Theory*, 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[85] Liu B, Fuzzy process, hybrid process and uncertain process, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.2, No.1, 3-16, 2008.

[86] Liu B, *Theory and Practice of Uncertain Programming*, 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[87] Liu B, Some research problems in uncertainty theory, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.3, No.1, 3-10, 2009.

[88] Liu B, Uncertain entailment and modus ponens in the framework of uncertain logic, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.3, No.4, 243-251, 2009.

[89] Liu B, Uncertain set theory and uncertain inference rule with application to uncertain control, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.4, No.2, 83-98, 2010.

[90] Liu B, Uncertain risk analysis and uncertain reliability analysis, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.4, No.3, 163-170, 2010.

[91] Liu B, *Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[92] Liu B, Uncertain logic for modeling human language, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.5, No.1, 3-20, 2011.

[93] Liu B, Why is there a need for uncertainty theory? *Journal of Uncertain Systems*, Vol.6, No.1, 3-10, 2012.

[94] Liu B, and Yao K, Uncertain integral with respect to multiple canonical processes, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.6, No.4, 250-255, 2012.

[95] Liu B, Membership functions and operational law of uncertain sets, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.11, No.4, 387-410, 2012.

[96] Liu B, Toward uncertain finance theory, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.1, Article 1, 2013.

[97] Liu B, Extreme value theorems of uncertain process with application to insurance risk model, *Soft Computing*, Vol.17, No.4, 549-556, 2013.

[98] Liu B, A new definition of independence of uncertain sets, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.12, No.4, 451-461, 2013.

[99] Liu B, Polyrectangular theorem and independence of uncertain vectors, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.1, Article 9, 2013.

[100] Liu B, Uncertain random graph and uncertain random network, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.8, No.1, 3-12, 2014.

[101] Liu B, Uncertainty distribution and independence of uncertain processes, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.13, No.3, 259-271, 2014.

[102] Liu B, *Uncertainty Theory*, 4th edn, Springer-Verlag, Berlin, 2015.

[103] Liu B, and Chen XW, Uncertain multiobjective programming and uncertain goal programming, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.3, Article 10, 2015.

[104] Liu B, and Yao K, Uncertain multilevel programming: Algorithm and applications, *Computers & Industrial Engineering*, Vol.89, 235-240, 2015.

[105] Liu B, Totally ordered uncertain sets, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.17, No.1, 1-11, 2018.

[106] Liu B, Uncertain urn problems and Ellsberg experiment, *Soft Computing*, to be published.

[107] Liu HJ, and Fei WY, Neutral uncertain delay differential equations, *Information: An International Interdisciplinary Journal*, Vol.16, No.2, 1225-1232, 2013.

[108] Liu HJ, Ke H, and Fei WY, Almost sure stability for uncertain differential equation, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.13, No.4, 463-473, 2014.

[109] Liu JJ, Uncertain comprehensive evaluation method, *Journal of Information & Computational Science*, Vol.8, No.2, 336-344, 2011.

[110] Liu W, and Xu JP, Some properties on expected value operator for uncertain variables, *Information: An International Interdisciplinary Journal*, Vol.13, No.5, 1693-1699, 2010.

[111] Liu YH, and Ha MH, Expected value of function of uncertain variables, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.4, No.3, 181-186, 2010.

[112] Liu YH, An analytic method for solving uncertain differential equations, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.6, No.4, 244-249, 2012.

[113] Liu YH, Uncertain random variables: A mixture of uncertainty and randomness, *Soft Computing*, Vol.17, No.4, 625-634, 2013.

[114] Liu YH, Uncertain random programming with applications, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.12, No.2, 153-169, 2013.

[115] Liu YH, and Ralescu DA, Risk index in uncertain random risk analysis, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness & Knowledge-Based Systems*, Vol.22, No.4, 491-504, 2014.

[116] Liu YH, Chen XW, and Ralescu DA, Uncertain currency model and currency option pricing, *International Journal of Intelligent Systems*, Vol.30, No.1, 40-51, 2015.

[117] Liu YH, and Ralescu DA, Value-at-risk in uncertain random risk analysis, *Information Sciences*, Vol.391, 1-8, 2017.

[118] Liu YH, and Yao K, Uncertain random logic and uncertain random entailment, *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, Vol.8, No.5, 695-706, 2017.

[119] Liu YH, and Ralescu DA, Expected loss of uncertain random systems, *Soft Computing*, Vol.22, No.17, 5573-5578, 2018.

[120] Matheron G, *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, New York, 1975.

[121] Merton RC, Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol.4, 141-183, 1973.

[122] Moore RE, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, New Jersey, 1966.

[123] Morgan JP, *Risk Metrics TM – Technical Document*, 4th edn, Morgan Guaranty Trust Companies, New York, 1996.

[124] Nahmias S, Fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1, 97-110, 1978.

[125] Nejad ZM, and Ghaffari-Hadigheh A, A novel DEA model based on uncertainty theory, *Annals of Operations Research*, Vol.264, Nos.1-2, 367-389, 2018.

[126] Nilsson NJ, Probabilistic logic, *Artificial Intelligence*, Vol.28, 71-87, 1986.

[127] Ning YF, Ke H, and Fu ZF, Triangular entropy of uncertain variables with application to portfolio selection, *Soft Computing*, Vol.19, No.8, 2203-2209, 2015.

[128] Pawlak Z, Rough sets, *International Journal of Information and Computer Sciences*, Vol.11, No.5, 341-356, 1982.

[129] Peng J, and Yao K, A new option pricing model for stocks in uncertainty markets, *International Journal of Operations Research*, Vol.8, No.2, 18-26, 2011.

[130] Peng J, Risk metrics of loss function for uncertain system, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.12, No.1, 53-64, 2013.

[131] Peng ZX, and Iwamura K, A sufficient and necessary condition of uncertainty distribution, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, Vol.13, No.3, 277-285, 2010.

[132] Peng ZX, and Iwamura K, Some properties of product uncertain measure, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.6, No.4, 263-269, 2012.

[133] Peng ZX, and Chen XW, Uncertain systems are universal approximators, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.2, Article 13, 2014.

[134] Pugsley AG, A philosophy of strength factors, *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, Vol.16, No.1, 18-19, 1944.

[135] Qin ZF, and Gao X, Fractional Liu process with application to finance, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.50, Nos.9-10, 1538-1543, 2009.

[136] Qin ZF, Uncertain random goal programming, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, to be published.

[137] Ramsey FP, Truth and probability, In *Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, Humanities Press, New York, 1931.

[138] Reichenbach H, *The Theory of Probability*, University of California Press, Berkeley, 1948.

[139] Robbins HE, On the measure of a random set, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.15, No.1, 70-74, 1944.

[140] Roy AD, Safety-first and the holding of assets, *Econometrica*, Vol.20, 431-149, 1952.

[141] Samuelson PA, Rational theory of warrant pricing, *Industrial Management Review*, Vol.6, 13-31, 1965.

[142] Savage LJ, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954.

[143] Savage LJ, *The Foundations of Statistical Inference*, Methuen, London, 1962.

[144] Shannon CE, *The Mathematical Theory of Communication*, The University of Illinois Press, Urbana, 1949.

[145] Shen YY, and Yao K, A mean-reverting currency model in an uncertain environment, *Soft Computing*, Vol.20, No.10, 4131-4138, 2016.

[146] Sheng YH, and Wang CG, Stability in the p-th moment for uncertain differential equation, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol.26, No.3, 1263-1271, 2014.

[147] Sheng YH, and Yao K, Some formulas of variance of uncertain random variable, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.2, Article 12, 2014.

[148] Sheng YH, and Gao J, Chance distribution of the maximum flow of uncertain random network, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.2, Article 15, 2014.

[149] Sheng YH, and Kar S, Some results of moments of uncertain variable through inverse uncertainty distribution, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.14, No.1, 57-76, 2015.

[150] Sheng YH, and Gao J, Exponential stability of uncertain differential equation, *Soft Computing*, Vol.20, No.9, 3673-3678, 2016.

[151] Sheng YH, Qin ZF, and Shi G, Minimum spanning tree problem of uncertain random network, *Journal of Intelligent Manufacturing*, Vol.28, No.3, 565-574, 2017.

[152] Sheng YH, Gao R, and Zhang ZQ, Uncertain population model with age-structure, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol.33, No.2, 853-858, 2017.

[153] Sun JJ, and Chen XW, Asian option pricing formula for uncertain financial market, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.3, Article 11, 2015.

[154] Tian JF, Inequalities and mathematical properties of uncertain variables, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.10, No.4, 357-368, 2011.

[155] Venn J, *The Logic of Chance*, MacMillan, London, 1866.

[156] von Mises R, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Springer, Berlin, 1928.

[157] von Mises R, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik*, Leipzig and Wien, Franz Deuticke, 1931.

[158] Wang X, Ning YF, Moughal TA, and Chen XM, Adams-Simpson method for solving uncertain differential equation, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.271, 209-219, 2015.

[159] Wang X, and Ning YF, An uncertain currency model with floating interest rates, *Soft Computing*, Vol.21, No.22, 6739-6754, 2017.

[160] Wang XS, Gao ZC, and Guo HY, Uncertain hypothesis testing for two experts' empirical data, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.55, 1478-1482, 2012.

[161] Wang XS, Gao ZC, and Guo HY, Delphi method for estimating uncertainty distributions, *Information: An International Interdisciplinary Journal*, Vol.15, No.2, 449-460, 2012.

[162] Wang XS, and Ha MH, Quadratic entropy of uncertain sets, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.12, No.1, 99-109, 2013.

[163] Wang XS, and Peng ZX, Method of moments for estimating uncertainty distributions, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.2, Article 5, 2014.

[164] Wen ML, and Kang R, Reliability analysis in uncertain random system, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.15, No.4, 491-506, 2016.

[165] Wen ML, Zhang QY, Kang R, and Yang Y, Some new ranking criteria in data envelopment analysis under uncertain environment, *Computers & Industrial Engineering*, Vol.110, 498-504, 2017.

[166] Wiener N, Differential space, *Journal of Mathematical Physics*, Vol.2, 131-174, 1923.

[167] Yang XF, and Gao J, Uncertain differential games with application to capitalism, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.1, Article 17, 2013.

[168] Yang XF, and Gao J, Some results of moments of uncertain set, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol.28, No.6, 2433-2442, 2015.

[169] Yang XF, and Ralescu DA, Adams method for solving uncertain differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.270, 993-1003, 2015.

[170] Yang XF, and Shen YY, Runge-Kutta method for solving uncertain differential equations, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.3, Article 17, 2015.

[171] Yang XF, and Gao J, Linear-quadratic uncertain differential game with application to resource extraction problem, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.24, No.4, 819-826, 2016.

[172] Yang XF, Ni YD, and Zhang YS, Stability in inverse distribution for uncertain differential equations, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol.32, No.3, 2051-2059, 2017.

[173] Yang XF, and Yao K, Uncertain partial differential equation with application to heat conduction, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.16, No.3, 379-403, 2017.

[174] Yang XF, Gao J, and Ni YD, Resolution principle in uncertain random environment, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.26, No.3, 1578-1588, 2018.

[175] Yang XF, and Liu B, Uncertain time series analysis with imprecise observations, Technical Report, 2017.

[176] Yang XH, On comonotonic functions of uncertain variables, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.12, No.1, 89-98, 2013.

[177] Yao K, Uncertain calculus with renewal process, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.11, No.3, 285-297, 2012.

[178] Yao K, and Li X, Uncertain alternating renewal process and its application, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.20, No.6, 1154-1160, 2012.

[179] Yao K, Gao J, and Gao Y, Some stability theorems of uncertain differential equation, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.12, No.1, 3-13, 2013.

[180] Yao K, Extreme values and integral of solution of uncertain differential equation, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.1, Article 2, 2013.

[181] Yao K, and Ralescu DA, Age replacement policy in uncertain environment, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Vol.10, No.2, 29-39, 2013.

[182] Yao K, and Chen XW, A numerical method for solving uncertain differential equations, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol.25, No.3, 825-832, 2013.

[183] Yao K, A type of nonlinear uncertain differential equations with analytic solution, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.1, Article 8, 2013.

[184] Yao K, and Ke H, Entropy operator for membership function of uncertain set, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.242, 898-906, 2014.

[185] Yao K, A no-arbitrage theorem for uncertain stock model, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.14, No.2, 227-242, 2015.

[186] Yao K, Ke H, and Sheng YH, Stability in mean for uncertain differential equation, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.14, No.3, 365-379, 2015.

[187] Yao K, A formula to calculate the variance of uncertain variable, *Soft Computing*, Vol.19, No.10, 2947-2953, 2015.

[188] Yao K, and Gao J, Uncertain random alternating renewal process with application to interval availability, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.23, No.5, 1333-1342, 2015.

[189] Yao K, Inclusion relationship of uncertain sets, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, Vol.3, Article 13, 2015.

[190] Yao K, Uncertain contour process and its application in stock model with floating interest rate, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.14, No.4, 399-424, 2015.

[191] Yao K, and Qin ZF, A modified insurance risk process with uncertainty, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol.62, 227-233, 2015.

[192] Yao K, and Gao J, Law of large numbers for uncertain random variables, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.24, No.3, 615-621, 2016.

[193] Yao K, and Zhou J, Uncertain random renewal reward process with application to block replacement policy, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.24, No.6, 1637-1647, 2016.

[194] Yao K, *Uncertain Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2016.

[195] Yao K, and Zhou J, Ruin time of uncertain insurance risk process, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.26, No.1, 19-28, 2018.

[196] Yao K, Conditional uncertain set and conditional membership function, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.17, No.2, 233-246, 2018.

[197] Yao K, and Zhou J, Renewal reward process with uncertain interarrival times and random rewards, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.26, No.3, 1757-1762, 2018.

[198] Yao K, and Liu B, Uncertain regression analysis: An approach for imprecise observations, *Soft Computing*, Vol.22, No.17, 5579-5582, 2018.

[199] Yao K, First hitting time of uncertain random renewal reward process and its application in insurance risk process, *Soft Computing*, to be published.

[200] Yao K, Extreme value and time integral of uncertain independent increment process, http://orsc.edu.cn/online/130302.pdf.

[201] You C, Some convergence theorems of uncertain sequences, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.49, Nos.3-4, 482-487, 2009.

[202] Yu XC, A stock model with jumps for uncertain markets, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness & Knowledge-Based Systems*, Vol.20, No.3, 421-432, 2012.

[203] Zadeh LA, Fuzzy sets, *Information and Control*, Vol.8, 338-353, 1965.

[204] Zadeh LA, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1, 3-28, 1978.

[205] Zadeh LA, A theory of approximate reasoning, In: J Hayes, D Michie and RM Thrall, eds., *Mathematical Frontiers of the Social and Policy Sciences*, Westview Press, Boulder, Cororado, 69-129, 1979.

[206] Zeng ZG, Wen ML, Kang R, Belief reliability: A new metrics for products' reliability, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.12, No.1, 15-27, 2013.

[207] Zeng ZG, Kang R, Wen ML, and Zio E, A model-based reliability metric considering aleatory and epistemic uncertainty, *IEEE Access*, Vol.5, 15505-15515, 2017.

[208] Zeng ZG, Kang R, Wen ML, and Zio E, Uncertainty theory as a basis for belief reliability, *Information Sciences*, Vol.429, 26-36, 2018.

[209] Zhang B, and Peng J, Euler index in uncertain graph, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.218, No.20, 10279-10288, 2012.

[210] Zhang B, Peng J, and Li SG, Euler index of uncertain random graph, *International Journal of Computer Mathematics*, Vol.94, No.2, 217-229, 2017.

[211] Zhang CX, and Guo CR, Uncertain block replacement policy with no replacement at failure, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, Vol.27, No.4, 1991-1997, 2014.

[212] Zhang QY, Kang R, and Wen ML, Belief reliability for uncertain random systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, to be published.

[213] Zhang XF, Ning YF, and Meng GW, Delayed renewal process with uncertain interarrival times, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.12, No.1, 79-87, 2013.

[214] Zhang XF, and Li X, A semantic study of the first-order predicate logic with uncertainty involved, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.13, No.4, 357-367, 2014.

[215] Zhang Y, Gao J, and Huang ZY, Hamming method for solving uncertain differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.313, 331-341, 2017.

[216] Zhang ZM, Some discussions on uncertain measure, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.10, No.1, 31-43, 2011.

[217] Zhang ZQ, and Liu WQ, Geometric average Asian option pricing for uncertain financial market, *Journal of Uncertain Systems*, Vol.8, No.4, 317-320, 2014.

[218] Zhang ZQ, Ralescu DA, and Liu WQ, Valuation of interest rate ceiling and floor in uncertain financial market, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.15, No.2, 139-154, 2016.

[219] Zhou J, Yang F, and Wang K, Multi-objective optimization in uncertain random environments, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.13, No.4, 397-413, 2014.

[220] Zhu Y, Uncertain optimal control with application to a portfolio selection model, *Cybernetics and Systems*, Vol.41, No.7, 535-547, 2010.

[221] Zhu Y, Uncertain fractional differential equations and an interest rate model, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol.38, No.15, 3359-3368, 2015.

[222] Zu TP, Kang R, Wen ML, and Zhang QY, Belief reliability distribution based on maximum entropy principle, *IEEE Access*, Vol.6, 1577-1582, 2018.

نمادهایی که زیاد استفاده شده‌اند

$\mathcal{M}$	اندازه نایقین
$(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$	فضای نایقینی
$\xi,\ \eta,\ \tau$	متفیرهای نایقین
$\Phi,\ \Psi,\ \Upsilon$	توزیع‌های نایقینی
$\Phi^{-۱},\ \Psi^{-۱},\ \Upsilon^{-۱}$	توزیع‌های نایقینی معکوس
$\mu,\ \nu,\ \lambda$	تابع‌های عضویت
$\mu^{-۱},\ \nu^{-۱},\ \lambda^{-۱}$	تابع‌های عضویت معکوس
$\mathcal{L}(a, b)$	متغیر نایقین خطی
$\mathcal{Z}(a, b, c)$	متغیر نایقین زیگزاگ
$\mathcal{N}(e, \sigma)$	متغیر نایقین نرمال
$\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$	متغیر نایقین لوگ نرمال
(a, b, c)	مجموعه نایقین مثلثی
(a, b, c, d)	مجموعه تایقین ذوزنقه‌ای
E	مقدار مورد انتظار
V	پراش
H	آنتروپی
X_t, Y_t, Z_t	فرایندهای نایقین
C_t	فرایند لیو
N_t	فرایند تجدید
$\mathcal{Q}$	سور نایقین
$(\mathcal{Q}, S, P)$	گزاره نایقین
$\forall$	سور عمومی
$\exists$	سور وجودی
$\vee$	عملگر بیشینه
$\wedge$	عملگر کمینه
$\neg$	نماد نقیض
$\Pr$	اندازه احتمال
$(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$	فضای احتمال
Ch	اندازه شانس
$k\text{\_}\max$	بزرگترین مقدار k ام
$k\text{\_}\min$	کوچکترین مقدار k ام
$\varnothing$	مجموعه تهی
$\Re$	مجموعه اعداد حقیقی
$\|A\|$	کاردینالیتی مجموعه A

نمایه

بائودینگ لیو
نظریه نایقینی

وقتی نمونه‌ای برای برآورد تابع توزیع وجود ندارد؛ یا در برخی موارد غیرمترقبه (مانند جنگ، سیل، زلزله، تصادف و حتی شایعه) لازم است که از متخصصین حوزه مربوطه برای مشخص کردن درجه باور آنها که این پدیده رخ خواهد داد، دعوت کنیم. شاید برخی فکر می‌کنند که درجه باور را می‌توان با احتمال دهنی و یا نظریه مجموعه فازی مدل بندی کرد. ولی این کار گاهی نامناسب است و هر دو ممکن است به نتایج نامعقول منجر شوند. برای بررسی منطقی درجه‌های باور اشخاص، نظریه نایقینی در سال ۲۰۰۷ توسط لیو پایه ریزی شد و در ادامه توسط محققین زیادی پیگیری شد. امروزه نظریه نایقینی به شاخه‌ای از ریاضیات تبدیل شده است.

این کتاب، یک مرجع درسی مقدماتی درباره نظریه نایقینی، برنامه ریزی نایقین، تحلیل ریسک نایقین، تحلیل اطمینان پذیری نایقین، مجموعه نایقین، منطق نایقین، استنتاج نایقین، فرایند نایقین، حسابان نایقین، معادله دیفرانسیل نایقین، و آمار نایقین است. این کتاب همچنین کاربردهایی از نظریه نایقینی در زمان بندی، لجستیک، بهینه سازی شبکه، داده کاوی، کنترل و مالی را نشان می‌دهد.

اصل موضوعه ۱. (اصل موضوعه نرمال بودن) برای مجموعه مرجع Γ، $\mathcal{M}\{\Gamma\} = ۱$.

اصل موضوعه ۲. (اصل موضوعه دوگانی) برای هر رویداد Λ، $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = ۱$.

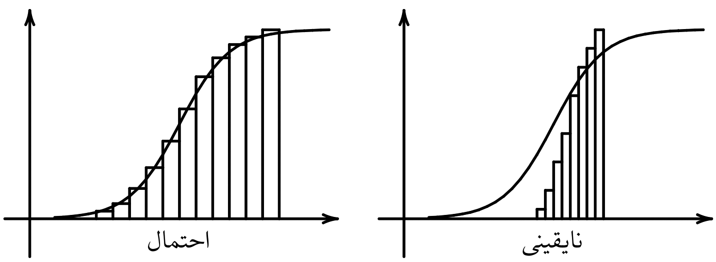
اصل موضوعه ۳. (اصل موضوعه زیرجمعی بودن) برای هر دنباله شمارا از رویدادهای $\Lambda_۱$، $\Lambda_۲, \cdots$، داریم

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=۱}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=۱}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\}.$$

اصل موضوعه ۴. (اصل موضوعه ضرب) فرض کنید برای $k = ۱, ۲, \cdots$، $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ فضاهای نایقینی هستند. اندازه نایقین ضرب $\mathcal{M}$، یک اندازه نایقین است که در

$$\mathcal{M}\left\{\prod_{k=۱}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \bigwedge_{k=۱}^{\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}$$

صدق می‌کند که در آن Λ_k یک رویداد دلخواه از $\mathcal{L}_k$ برای هر $k = ۱, ۲, \cdots$ است.



نظریه احتمال شاخه‌ای از ریاضی است که فراوانی را مدل بندی می‌کند و نظریه نایقینی شاخه‌ای از ریاضی برای مدل بندی نظریه باور است.