Espace Probabilisé -Probabilité conditionnelle

Présenté par: **Sonia Chaari**

Faculté des sciences de Bizerte

AU 2020-2021

Théorie des ensembles

Définitions

1. Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.
2. $\emptyset$ ensemble vide : il ne contient aucun élément.
3. Soit Ω un ensemble:
   Un ensemble A est un sous ensemble de Ω si tous les éléments de A sont éléments de Ω.
   On dit aussi que A est une partie de Ω.
   L'ensembles de tous les parties de Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.
4. **Exemple:** Donner l'ensemble des parties de Ω avec $\Omega = \{a, b, c\}$.
   $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$.

Théorie des ensembles

Définitions

1. Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.
2. $\emptyset$ ensemble vide : il ne contient aucun élément.
3. Soit Ω un ensemble:
   Un ensemble A est un sous ensemble de Ω si tous les éléments de A sont éléments de Ω.
   On dit aussi que A est une partie de Ω.
   L'ensembles de tous les parties de Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.
4. **Exemple:** Donner l'ensemble des parties de Ω avec $\Omega = \{a, b, c\}$.
   $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$.

Théorie des ensembles

Définitions

1. Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.
2. $\emptyset$ ensemble vide : il ne contient aucun élément.
3. Soit Ω un ensemble:
   Un ensemble A est un sous ensemble de Ω si tous les éléments de A sont éléments de Ω.
   On dit aussi que A est une partie de Ω.
   L'ensembles de tous les parties de Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.
4. **Exemple:** Donner l'ensemble des parties de Ω avec $\Omega = \{a, b, c\}$.
   $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$.

Théorie des ensembles

Définitions

1. Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.
2. $\emptyset$ ensemble vide : il ne contient aucun élément.
3. Soit Ω un ensemble:
   Un ensemble A est un sous ensemble de Ω si tous les éléments de A sont éléments de Ω.
   On dit aussi que A est une partie de Ω.
   L'ensembles de tous les parties de Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.
4. **Exemple:** Donner l'ensemble des parties de Ω avec $\Omega = \{a, b, c\}$.
   $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$.

Théorie des ensembles

Suite Définitions

Soient $\Omega, A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$:

- Appartenance:
  $x \in A$ signifie que l'élément x est un élément de A.
  $x \notin A$ signifie que l'élément x n'est pas un élément de A.
- Inclusion:
  $A \subset B$ signifie que tous les éléments de A sont dans B.
  $A \not\subset B$ signifie qu'il existe au moin un élément $x \in A$ mais $x \notin B$.
- Complémentaire:
  $\overline{A}$ ou A^c ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.
- Union:
  $A \cup B$: $x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$.

Théorie des ensembles

Suite Définitions

- Intersection:
  $A \cap B$: $x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A$ et $x \in B$.
- Différence:
  $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
- Application:
  Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est une correspondance qui chaque élément $X \in E$ associe au moins un élément y de F.

Théorie des ensembles

Remarque

1. $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$.
2. $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
3. Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.
4. Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$.

Définition

A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Théorie des ensembles

Propriétés

1. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Théorie des ensembles

Notion de cardinal

Si Ω a un nombre fini d'éléments, alors pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, A a également un nombre fini d'éléments. Le nombre des éléments de A est le cardinal de A, on le note $card(A)$.

1. $card(\overline{A}) = card(\Omega) - card(A)$.
2. $card(A \cup B) = card(A) + card(b) - card(A \cap B)$.
3. $card(A \backslash B) = card(A) - card(A \cap B)$.
4. $card(\emptyset) = 0$.

Analyse combinatoire

Introduction

L'analyse combinatoire a pour but de dénombrer les différents choix de p éléments parmi n, avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ dans les cas suivants:

* Choix avec ordre : $\nearrow$ avec répétition. $\searrow$ sans répétition.
* Choix sans ordre $=$ avoir un sous ensemble.

Arrangement (sans répétition)

Définition

Etant donné un ensemble de n objets, $(n \in \mathbb{N})$, distincts. On appelle arrangements de p objets parmi n, $(p \in \mathbb{N}^*,\ p \leq n)$ toute suite de p de ces objets, c'est à dire, une disposition ordonnée sans répétition de p objets distincts.

Exemple

On a 3 lettres a,b,c. Combien y-a-t-ils de mots de 2 lettres différents?

Solution

Le nombre de mots de 2 lettres différents parmi les lettres a.b,c est le nombre d'arrangements de 2 objets parmi 3.

Arrangement (sans répétition)

Dénombrer les cas

En utilisant le principe multiplicatif on peut déterminer ce nombre. En effet:

Principe Multiplicatif

Soit E une expérience qui comporte deux étapes: la 1^{iere} a p résultats possibles et chacun de ces résultats donne lieu à q résultats lors de la 2^{ieme} étape. Alors a $p.q$ résultats possibles.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq n$; $p \in \mathbb{N}$. Si une expérience E comporte p étapes:
La 1^{iere} a n résultats possibles.
La 2^{ieme} a $n-1$ résultats possibles.
$\vdots$
La p^{ieme} a $n-p+1$ résultats possibles.
Alors le nombre de résultats possibles pour l'expérience E est $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$. De plus, le nombre de résultats possibles pour l'expérience E est le nombre d'arrangements de p objets parmi n.

notation

On note par A_n^p le nombre d'arrangements de p objets parmi n .
Alors on

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1).$$

En particulier si $n = p$

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \overset{Def}{=} n!.$$

Par convention: $0! = 1$.

Propriétés

1. $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.
2. $A_n^p = A_{n-1}^p + pA_{n-1}^{p-1}$.

Permutations

Définition

On appelle permutation des n objets distincts toute suite de ces n objets. C'est a dire, une façon de ranger côté à côté ces n objets.

Proposition

Une permutation de n objets distincts est un arrangement de ces n objets, par suite:

le nombre de permutation de n objets distincts est $A_n^n = n!$.

Exemple

De combien de manière peut-on classer 4 individus?

solution: $4! = 24$.

Arrangement avec répétition

Définition

Un arrangement avec répétition de p objets parmi n ($p \leq n$ ou $p \geq n$) est une application d'un ensemble E tq $card(E) = p$ dans ensemble F tq $card(F) = n$.

En utilisant le principe multiplicatif on a :

Proposition

Le nombre d'arrangement avec répétition de p objets parmi n est $n^p = card(F)^{card(E)}$

Exemple

On a 3 lettres a, b, c. Combien y-a-t-ils de mots de 2 lettres?
solution: Il y a $3^2 = 9$ mots.

Combinaison

Définition

Etant donné un ensemble de n objets distincts. On appelle combinaison de p de ces n objets tout sous ensemble de p de ces objets.

Remarque:

La notion d'ordre a maintenant complètement disparu.
Notation: On note par C_n^p le nombre de combinaison de p de n objets distincts, avec $(p, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$.

Combinaison

Proposition

Pour tout $(p, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $p \leq n$, on a :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

En particulier: $C_n^0 = 1$ et $C_n^n = 1$.

Preuve

Deux arrangements comportant les mêmes éléments définissent une seule combinaison. Alors, a partir d'une combinaison de p objets distincts on peut faire $p!$ arrangements. C'est à dire: $A_n^p = p! C_n^p$ et par suite $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Combinaison

Proposition

Pour tout $(p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $p \leq n$, on a :

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$.
2. $C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p$.
3. Formule du binôme: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_n^k a^k b^{n-k}$.

Exemple

Pour passer l'oral d'un examen la personne doit choisir deux questions parmi quatre. Combien y-a-t-il de possibilités?

Introduction

Introduction

Le but de la théorie des probabilités est de dégager des méthodes permettant de faire des prédictions, qualitatives ou quantifiées, sur le déroulement des phénomènes qui sont régis par le hasard.
Dans chaque cas, le phénomène étudié peut etre concu comme une expérience dont le résultat est aléatoire : lorsqu'on reproduit l' expérience (dans des conditions précisées) le résultat de l'expérience varie et semble dépendre du hasard. On dit qu'il s'agit d'une *expérience aléatoire* ; on la représentera par la lettre $\mathcal{E}$.

Espace probabilisable

Espace fondamental

Toute Expérience aléatoire $\mathcal{E}$ se traduit par la donnée de l'ensemble des résultats possibles. Pour la définir, il s'agit de recenser l'ensemble de ses résultats possibles appelés <u>éventualités</u> ou <u>événements élémentaires</u>

Définition

On appelle ensemble fondamental ou univers associé à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, tout ensemble Ω dont les éléments représentent toutes les issues (ou résultats) possibles de $\mathcal{E}$.

Espace fondamental

Exemple

a) On jette un dé dont les faces sont numérotées 1,2,3,4,5,6 et note le numéro de la face supérieure. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Si $\mathcal{E}$ consiste à jouer 2 fois à pile ou face.
$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$.

c) On note la taille d'un individu pris au hasard dans une population donnée, le nombre consiste en un nombre réel (l'unité de longueur ayant été choisie). $\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
On pourra en pratique se restreindre à un intervalle plus petit.

Evénement aléatoire

Définition

Un évévenement aléatoire se traduit par un sous ensemble de l'espace fondamental Ω. La réalisation d'un événement est liée au résultat de l'expérience aléatoire.

Exemple

On jette un dé une fois et soit A : l'événement obtenir un nombre pair. On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{2, 4, 6\}$.

Résumé

Ainsi à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ on associe un espace fondamental (univers) Ω et un ensemble de partie $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω qui traduit l'ensemble des événements. Dans la suite on établit un tableau qui nous donne la correspondance entre le langage ensembliste et celui des événements:

Notation	ensembliste	probabiliste
Ω	espace total	univers , événements certain
$\{\omega\};\ \omega \in \Omega$	Singleton	événements élémentaires
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
$A \cap B$	intersection de A et B	événement A et B
$A \cup B$	réunion de A et B	événement A ou B
$\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatible
$A \subset B$	A contenu dans B	l'événement A entraine l'événeme

Définition

On appelle système complet d'événement ou partition toute suite $A_1, ..., A_n$ d'événements deux à deux incompatibles, telle que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.
(Les ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$, forment alors une partition de Ω.)

Espace probabilisable

Définition

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de Ω qui possède les propriétés suivantes:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
3. Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est une tribu ou σ-algèbre sur Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est dit espace mesurable ou espace probabilisable.

Espace probabilisable

Propriété

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
3. Si $A,\ B \in \mathcal{A}$ alors $A\backslash B$ et $A\triangle B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ sont dans $\mathcal{A}$.
4. $\{\Omega, \emptyset\}$est la tribu grossière.
5. $\mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu discrète

Exemple

1. Si Ω est fini ou infini dénombrable, $\mathcal{P}$ est une tribu sur Ω.
2. Si par exemple $\Omega = \mathbb{R}$, l'ensemble des intervalles ouverts, fermés, semi-ouvert à droite à gauche et les singletons forme une tribu sur $\mathbb{R}$.

Espace probabilisé

Définir une probabilité c'est associer à chaque événement A un poid $P(A)$ représentant " La chance qu'il se réalise."

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle mesure de probabilité ou, tout simplement, probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, une application $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$, telle que:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Pour toute suite $(A_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, on a
$$P(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} P(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s'appelle espace de probabilité ou espace

Espace probabilisé

Propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, on a les propriétés suivantes:

1. pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ telle que $A \subset B$ alors
$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A),$$
et P est Croissante.
4. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
5. Pour toute suite $(A_n) \subset \mathcal{A}$, on a : $P(\cup_n A_n) \leq \sum_n P(A_n)$.

Espace probabilisé

Exemple

On lance une piéce de monnaie truquee. Sachant que la probabilté d'avoir pile est le triple d'avoir face, calculer $P(pile)$ et $P(face)$.

Ex

Une urne contient cinq boules: trois rouges numérotées 1, 2, 3 et deux boules noires numérotées 1, 2. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants:
A= les deux boules tirées ont la même couleur.
B= La somme des numéros portés sur les boules tirées est égale à trois.
C= B sachant que A est réalisée.

Ex

Probabilité sur une ensemble fini

équiprobabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On suppose que Ω est fini et $card(\Omega) = n$. P est une probabilité uniforme ou équiprobabilité si et seulement si toutes les éventualités ont la même probabilité, c'est à dire : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ et
$P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n)$.

Proposition

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ un ensemble fini et P une probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, alors

a) $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

b) Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{n}$.

Probabilité sur une ensemble fini

Ex

On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes dont 16 cartes sont rouges et 16 sont noires. Déterminer la probabilité d'avoir une carte noire.

Ex

On lance un dé cubique parfait deux fois de suite et on marque la somme des nomdres obtenu. Calculer la probabilité des événement suivants:

A:" avoir une somme $= 13$."

B:" " avoir une somme < 13."

C: " avoir une somme $= 5$."

D:" avoir un nombre pair lors du premier lancer."

Définition

Définition

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- A et B deux événements tel que $P(B) \neq 0$.
- On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B s'est réalisé, la probabilité :
- $P_B(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- P_B est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega \cap B, \mathcal{A} \cap B)$.

Définition

Définition

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- A et B deux événements tel que $P(B) \neq 0$.
- On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B s'est réalisé, la probabilité :
- $P_B(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- P_B est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega \cap B, \mathcal{A} \cap B)$.

Définition

Définition

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- A et B deux événements tel que $P(B) \neq 0$.
- On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B s'est réalisé, la probabilité :
- $P_B(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- P_B est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega \cap B, \mathcal{A} \cap B)$.

Définition

Définition

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- A et B deux événements tel que $P(B) \neq 0$.
- On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B s'est réalisé, la probabilité :
- $P_B(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- P_B est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega \cap B, \mathcal{A} \cap B)$.

Définition

Définition

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- A et B deux événements tel que $P(B) \neq 0$.
- On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B s'est réalisé, la probabilité :
- $P_B(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- P_B est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega \cap B, \mathcal{A} \cap B)$.

Propriétés

Propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$, on a (formule des probabilités composées):
$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B).$$
2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$, on a
$$P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A).$$
3. Pour toute suite finie $(B_i)_{i\in\{1,2,\dots,n\}}$ d'événements on a :
$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) =$$
$$P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap B_2)\dots P(B_n \mid B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}).$$

Propriétés

Propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$, on a (formule des probabilités composées):
$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B).$$
2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$, on a
$$P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A).$$
3. Pour toute suite finie $(B_i)_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}$ d'événements on a :
$$P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) =$$
$$P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap B_2)\ldots P(B_n \mid B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1}).$$

Propriétés

Propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$, on a (formule des probabilités composées):
$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B).$$
2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$, on a
$$P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A).$$
3. Pour toute suite finie $(B_i)_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$ d'événements on a :
$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) =$$
$$P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap B_2) \dots P(B_n \mid B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}).$$

Théorème

Théorème :Des probabilités totales

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- Si les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω,
- on a pour tout $B \in \mathcal{A}$:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B).$$

- Si de plus, $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i).$$

Théorème

Théorème :Des probabilités totales

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- Si les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω,
- on a pour tout $B \in \mathcal{A}$:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B).$$

- Si de plus, $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i).$$

Théorème

Théorème :Des probabilités totales

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- Si les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω,
- on a pour tout $B \in \mathcal{A}$:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B).$$

- Si de plus, $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i).$$

Théorème

Théorème :Des probabilités totales

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- Si les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω,
- on a pour tout $B \in \mathcal{A}$:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B).$$

- Si de plus, $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i).$$

Probabilités totales

Exemple

Soit un sac contenant 6 jetons: 5 numérotés 1 et 1 numéroté 2. Soit 2 urnes : U_1 contenant 6 boules Blanches et 4 Noires et U_2 contenant 8 boules Blanches et 2 boules Noires. L'expérience aléatoire comporte deux étapes.On pioche au hasard dans le sac, on regarde le numéro et on pioche dans l'urne correspondante. Calculer la probabilité que la boule soit blanche?

Formule de Bayes

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition (un système complet) de Ω, tel que, $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pour tout $B \in \mathcal{A}$:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

Formule de Bayes

Exemple

Une Population est constituée de 10 Français: 7 sont bruns et 3 sont blonds, et 10 allemands : 1 Brun et 9 blonds. On rencontre un blond, qu'elle est la probabilité qu'il soit Allemend?

Indépendance stochastique

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Deux événements A et B sont dit stochastiquement indépendants ou tout simplement indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Indépendance stochastique

Propriétés

1. Si $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$ alors pour tout $B \in \mathcal{A}$ on a A et B sont indépendants.
2. Si $P(A) \neq 0$ ou $P(B) \neq 0$, on a A et B sont indépendants si et seulement si $P(B \mid A) = P(B)$ ou $P(A \mid B) = P(A)$.
3. A et B sont indépendants alors il en est de même pour A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
4. Sioit A et B deux événements tel que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Si A et B sont indépendants alors A et B ne sont pas incompatibles.
5. Si A et B sont incompatibles alors A et B ne sont pas indépendants.

Indépendance d'une suites d'événements

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont mutuellement indépendants ou complètement indépendants ou tout simplement indépendants si et seulement si la probabilité d'une intersection quelconque est le ptoduit des probabilités, c'est à dire pour toute partie J de $\{1, 2, ..., n\}$, on a : $P(\cap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$.

Indépendance d'une suites d'événements

Propriétés

1. $A_1, A_2, ..., A_n$ sont indépendants si est seulement si pour tout $i, i_1, i_2, ..., i_k \in \{1, 2, ..., n\}$ deux à deux distincts on a

$$P(A_i \mid A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_i).$$

2. Si $A_1, A_2, ..., A_n$ sont indépendants alors les événements A_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sont deux à deux indépendants.
   Attention: la réciproque est fausse.

Exemple

Dans une entreprise, la probabilité q'un ouvrier A quitte l'entreprise dans l'année est $\frac{1}{5}$, probabilité qu'un cadre B quitte l'entreprise dans l'année est $\frac{1}{8}$ et la probabilité que A et B quittent l'entreprise est $\frac{1}{40}$.

1. Les événements A et B sont-ils indépendants?
2. Calculer la probabilité que l'un des deux quitte l'entreprise.
3. Calculer la probabilité que ni l'un ni l'autre quitte l'entreprise.