TP 1

EL Hadrami N'DOYE et Ismaïl RAMDÉ

15/01/2021

```
library(tinytex)
```

Exercice 1

```
# importation du fichier ScriptEtud.R
source("scriptsEtud.R")
```

Estimation d'une proportion dans le contexte d'une question délicate

```
n <- 500
P <- 1 / 10
theta <- 0.8
n.sim <- 1000
set.seed(2001)
piaw <- questDelicateMeth1(n,P,theta,n.sim)
```

Question 1 . Simulation 1000 fois de la methode 1

a. Calcul de la moyenne et l'ecart type estimés

On sait que la moyenne estimée correspsecarreond à l'espsecarreérance tant-disque l'écart-type estimé correspsecarreond à la racine carré de la variance. Ici X suit une loi Binomiale. Donc E(X) = a+ b$(n$P) et var = b^2 * (n*P(1-P))

```
probaoui1 <- P * (2 * theta - 1) - theta + 1
# X est une loi Binomiale
X <- rbinom(n.sim,n,probaoui1)
a <- (theta - 1) / ((2 * theta) - 1)
b <- 1 / (n * ((2 * theta) - 1))

# Moyenne estimée
moyenneEst1 <- a + (b * n * probaoui1)
# Ecart type estimé
varX1 <- n * probaoui1 * (1 - probaoui1)
ecarttype1 <- sqrt(b^2 * varX1)
```

b. Les valeurs theoriques correspondantes

```
# moyenne
mean(piaw)
```

```
## [1] 0,1007333
```

```
# écart-type
sd(piaw)
```

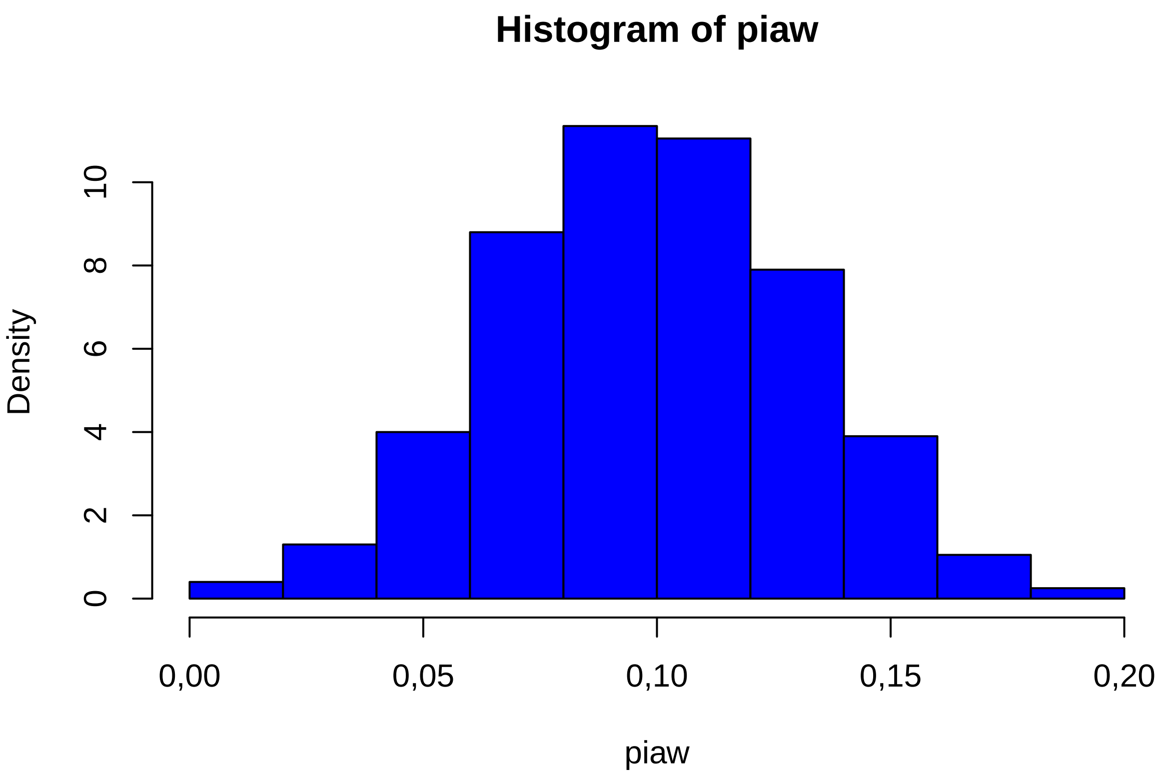
```
## [1] 0,03225096
```

c. Comment se compare la variance de cette méthode avec celle,ou l'on poserait directement la question da

Dans le cas où tous les repondants repondent honêtement, la variance serait inférieur à celle de la méthode precedente.

d. Tracé d'un histogramme des valeurs observées de $\widehat{\pi}_{AW}$

```r
hist(piaw,probability = TRUE,col = "blue")
```



e. Commentaires

2. Reprise du travail avec la méthode 2 en utilisant $\alpha = 0.217$

```r
alpha <- 0.217
pia <- questDelicateMeth2(n, P, theta, alpha, n.sim)
```

a. Calcul de la moyenne et l'ecart type estimés

```r
probaoui2 <- (theta * P) + ((1 - theta) * alpha)
a <- alpha * (theta - 1) / theta
b <- 1 / (n * theta)

# Moyenne estimée
moyenneEst2 <- a + (b * n * probaoui2)
# Ecart type estimé
varX2 <- n * probaoui2 * (1 - probaoui2)
ecarttype2 <- sqrt((1 / (n * theta)^2) * varX2)
```

b. Les valeurs theoriques correspsecarreondantes

```r
# moyenne
mean(pia)
```

```
## [1] 0,100005
```

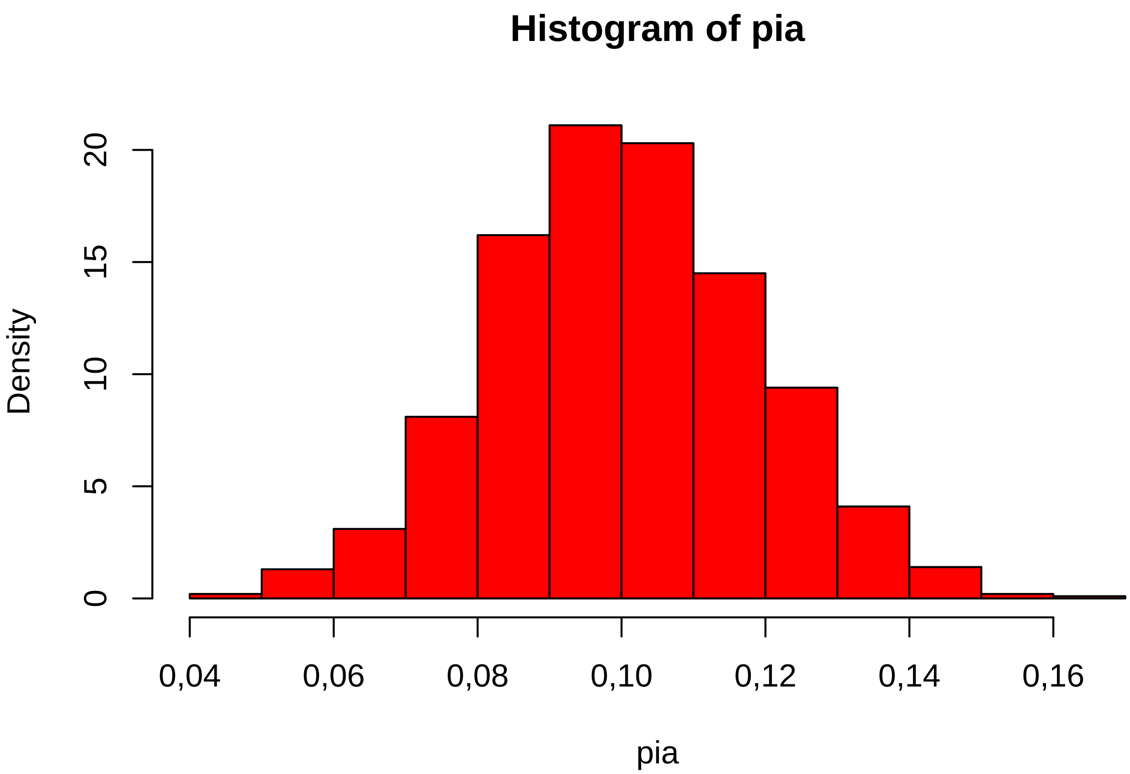
```r
# écart-type
sd(pia)
```

```
## [1] 0,01842001
```

**c. Comment se compare la variance de cette méthode avec celle où,
l'on poserait directement la question dans le contexte où tous les répondants répondent honnêtement?**

d. Tracage d'un histogramme des valeurs observées *de* $\widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{AW}}$

```r
hist(pia,probability = TRUE,col = "red")
```



3. Évaluons les différentes EQM

- Pour p.neg = 0}

```r
# méthode 1
varX1 + (moyenneEst1 - theta)
```

```
## [1] 95,5
```

```r
# méthode 1
varX2 + (moyenneEst2 - theta)
```

```
## [1] 53,38622
```

- Pour p.neg = 0.1
- Pour p.neg = 0.2
- Pour p.neg = 0.3 .

Question 4 . Échantillonnage classique

a. Calcul de $\bar{y}_u$ et S pour la population

```
source("Script2.R")
ybarru <- sum(pop) / N
sigmacarre <- (1 / N) * sum((pop - ybarru)^2)
S <- sqrt((sigmacarre * N) / (N - 1))
```

b. Generation d'une trame de données contenant toutes les echantillons possibles

```
head(ech.all)
```

```
##    i  1  i  2  i  3  pop [ i  1  ]  pop [ i  2  ]  pop [ i  3  ]
## 1     1     2     3             3             6            24
## 2     1     2     4             3             6            27
## 3     1     2     5             3             6            30
## 4     1     2     6             3             6            36
## 5     1     2     7             3             6            51
## 6     1     2     8             3             6            57
```

c. Création de la nouvelle trame de données

```
options(OutDe=",")
pop <- c (3 , 6 , 24 , 27 , 30 , 36 , 51 , 57)
N <- length ( pop )
n <- 3
(n.ech <- choose (N , n))
```

```
## [1] 56
```

```
ech.all <- cbind ( choix <- t ( matrix ( combn (1: N , n ) ,n , n.ech ) ) ,( matrix (pop [ choix ] , n.e
head (ech.all)
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
## [1,]    1    2    3    3    6   24
## [2,]    1    2    4    3    6   27
## [3,]    1    2    5    3    6   30
## [4,]    1    2    6    3    6   36
## [5,]    1    2    7    3    6   51
## [6,]    1    2    8    3    6   57
```

```
donneepop <- ech.all[,4:6]
ybar <- apply(donneepop,1,mean)
s <- apply(donneepop,1,sd)
sigmachapeau.ybar <- (1 - (n / N)) * (s^2 / n)
b.inf <- ybar - (1.96 * sqrt(sigmachapeau.ybar))
b.sup <- ybar + (1.96 * sqrt(sigmachapeau.ybar))
size <- 56
incl <- rep(0,size)
for (i in 1:size){
  if(ybarru <= b.sup[i] && ybar >= b.inf[i]){
    incl[i] <- 1
  }
  else{
    incl[i] <- 0
```

```
  }
}
tram.donnee <- cbind(ybar,s,b.inf,b.sup,incl)
head(tram.donnee,5)
```

```
##      ybar        s      b.inf    b.sup incl
## [1,]   11 11,35782  0,8391437 21,16086    0
## [2,]   12 13,07670  0,3014103 23,69859    0
## [3,]   13 14,79865 -0,2390710 26,23907    0
## [4,]   15 18,24829 -1,3251646 31,32516    1
## [5,]   20 26,88866 -4,0549579 44,05496    1
```

d. Verifions numeriquement que $\mu_{\bar{y}} = \bar{y_u}$ et que $\sigma_{\bar{y}}$=$(\sqrt{1-f})\frac{S}{n}$

```
# moyenne de chaque population a 3 echantillons
muybarr <- mean(tram.donnee[,1])
muybarr
```

```
## [1] 29,25
```

```
ybarru
```

```
## [1] 29,25
```

```
f <- n / N
head(sqrt(1 - f) * (S / sqrt(n)),5)
```

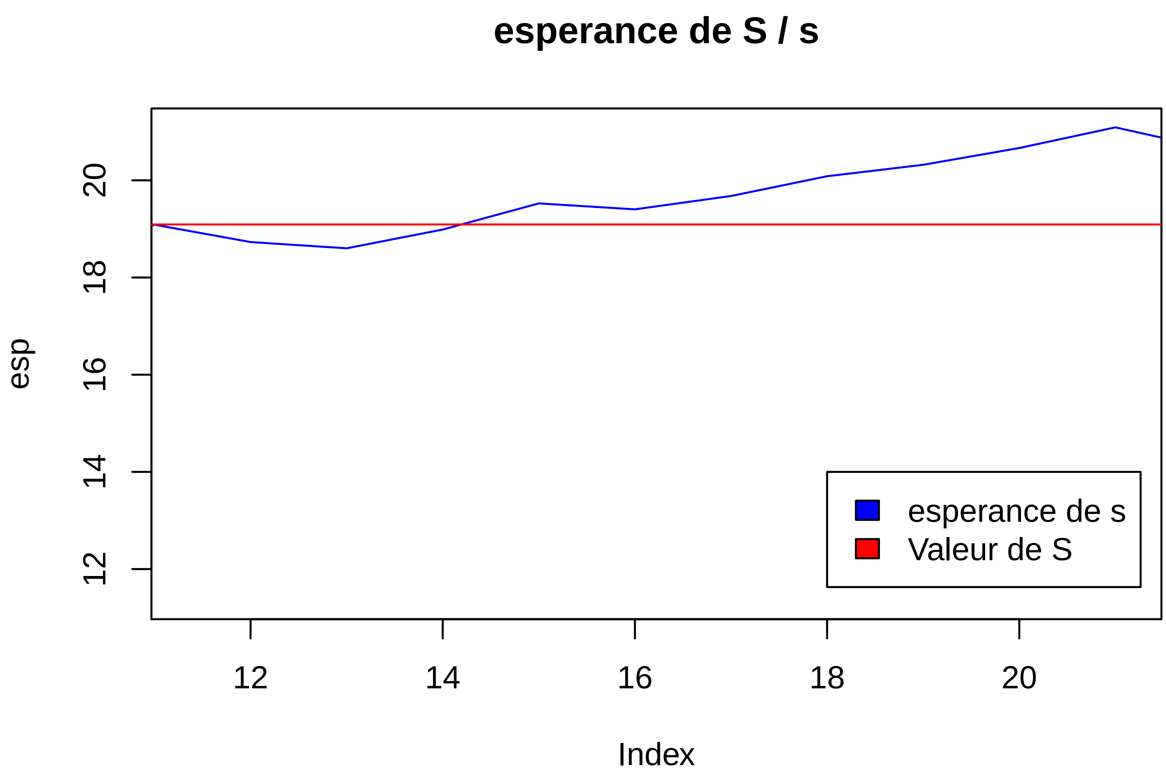
```
## [1] 8,714213
```

```
sygmaybarr <- sqrt((1 - (n / N)) * (S^2 / n))
sygmaybarr
```

```
## [1] 8,714213
```

e. s est-il un estimateur sans biais de S ?

```
esp <- cumsum(tram.donnee[,2]) / (1:size)
plot(esp,xlim = c(min(esp),max(esp)),type = "l",col="blue",main = "esperance de S / s")
abline(h = S,col="red")
legend(x = 18,y = 14,legend=c("esperance de s","Valeur de S"),fill = c("blue","red"),col=c("blue,red"))
```



D'après la figure on observe que l'esperance de s ne converge pas vers la valeur de S. Donc s n'est pas un estimateur sans biais de S.

f. Déterminer la probabilité de commettre dans l'estimation de la moyenne une erreur

- plus de deux unités

On compte toutes les indices du vecteurs ybar dont leurs valeurs sont superieur a $\bar{y_u} + 5$ puis on divise par le nombre d'element du vecteur ybar pour avoir la probabilité.

```
length(which(ybar > ybarru + 2 )) / size
```

```
## [1] 0,3571429
```

- plus de cinq unités

On compte toutes les indices du vecteurs ybar dont leurs valeurs sont superieur a $\bar{y_u} + 5$ puis on divise par le nombre d'element du vecteur ybar pour avoir la probabilité.

```
length(which(ybar > ybarru + 5 )) / size
```

```
## [1] 0,3035714
```

- plus de 25%

On compte toutes les indices du vecteurs ybar dont leurs valeurs sont superieur a $\bar{y_u} + 0.25$ puis on divise par le nombre d'element du vecteur ybar pour avoir la probabilité.

```
length(which(ybar > ybarru + 0.25 )) / size
```

```
## [1] 0,4821429
```

g. Calcul de la probabilité de se tromper de plus de 20% dans l'estimation de l'écart type S de la population.

```r
length(which(s > S + 0.20 )) / size
```

```
## [1] 0,3571429
```

h.Le niveau de confiance de l'intervalle de confiance donné par la formule

$\bar{y} - 2\widehat{\sigma}_{\bar{y}} \leq \bar{y}_u \leq \bar{y} + 2\widehat{\sigma}_{\bar{y}}$

On compte le nombre d'element de $\bar{y} - 2\widehat{\sigma}_{\bar{y}}$ et $\bar{y} + 2\widehat{\sigma}_{\bar{y}}$ dont $\bar{y} - 2\widehat{\sigma}_{\bar{y}} \leq \bar{y}_u \leq \bar{y} + 2\widehat{\sigma}_{\bar{y}}$

```r
born.inf <- ybar - (2 * sqrt(sigmachapeau.ybar))
born.sup <- ybar + (2 * sqrt(sigmachapeau.ybar))
length(which(ybarru >= born.inf & ybarru <= born.sup)) / size
```

```
## [1] 0,8928571
```

Donc le niveau de confiance de cette intervall est de 89.28%

i.Le niveau de confiance de l'intervalle de confiance donné par la formule

$\bar{y} - 3\widehat{\sigma}_{\bar{y}} \leq \bar{y}_u \leq \bar{y} + 3\widehat{\sigma}_{\bar{y}}$

```r
born.inf <- ybar - (3 * sqrt(sigmachapeau.ybar))
born.sup <- ybar + (3 * sqrt(sigmachapeau.ybar))
length(which(ybarru >= born.inf & ybarru <= born.sup)) / size
```

```
## [1] 0,9642857
```

Donc le niveau de confiance de cette intervall est de 92.86%

j.Le niveau de confiance de l'intervalle de confiance donné par la formule

$\bar{y} - 2\sigma_{\bar{y}} \leq \bar{y}_u \leq \bar{y} + 2\sigma_{\bar{y}}$

```r
born.inf <- ybar - (2 * sygmaybarr)
born.sup <- ybar + (2 * sygmaybarr)
length(which(ybarru >= born.inf & ybarru <= born.sup)) / size
```

```
## [1] 0,9642857
```

Donc le niveau de confiance de cette intervall est de 92.86%

**5.a: Dans quelle mesure nos simulations confirment-elles que $\bar{y}$,
est un estimateur sans biais de $\bar{y}_u$**

```r
# Realisation d'un script creant un echantillon de taille 5 1000 fois
y <- c (36 , 36.5 , 37 , 37.5 , 38 , 38.5 , 39 , 39.5 ,
        40 , 40.5,41 ,41.5 , 42 , 42.5 , 43 ,
        43.5 , 44 , 44.5 , 45 , 45.5 , 46 ,46.5)
e <- c (0.02 , 0.03 , 0.04 , 0.06 , 0.10 , 0.12 , 0.13 , 0.10 , 0.07 , 0.05 ,
        0.05 , 0.04 , 0.04,
        0.03 , 0.03 , 0.02 , 0.02 , 0.01 , 0.01 , 0.01 , 0.01 ,  0.01)
# Taille de l'echantillon
NE <- 1000
ne <- 5
echt <- matrix(rep(NA,NE),nrow = NE,ncol = ne)
set.seed(2001)
for (i in 1:NE){
  echt[i,] <- sample (y ,ne , replace = TRUE , prob = e )
}
ybarr <- apply(echt, 1,mean)
mean(ybarr)
```

```
## [1] 39,768
```

```r
ybarru <- mean(y)
ybarru
```

```
## [1] 41,25
```

Apres avoir simuler 1000 fois des echantillons de taille 5 on constate que $\bar{y}$ est un estimateur sans biais de $\bar{y}_u$ a partir de la mesure 40.

5.b Calcule de la variance des $\bar{y}$ Théoriquement, que devrait être cette variance?, Énoncons le théorème qui justifie notre reponse

```r
varybarr <- var(ybarr)
varybarr
```

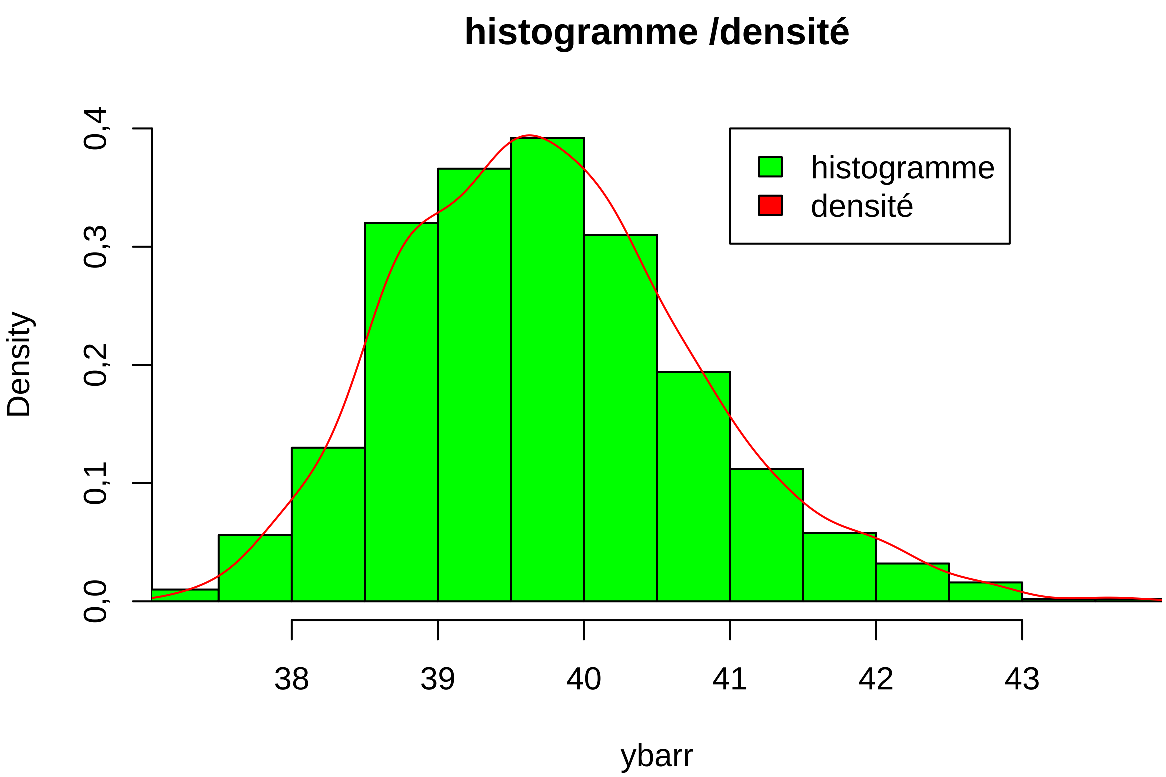
```
## [1] 1,048444
```

```r
(1 / (NE - 1)) * sum((ybarr - mean(ybarr))^2)
```

```
## [1] 1,048444
```

5.c: Realisation d'un graphique montrant que $\bar{y}$ suit une loi normale

```r
hist(ybarr,probability = TRUE,xlim = c(min(ybarr),max(ybarr)),ylim = c(0,0.4),col="green",
     main="histogramme /densité")
lines(density(ybarr),col="red")
legend(x=41,y=0.4,c("histogramme","densité"),fill = c("green","red"),col =c("green","red"))
```



Question d:

```r
# calcul de sigma y bar
sycarr <- (1 / length(y)) * sum((y - ybarru)^2)
sigmaybar <- sqrt(sycarr / ne)
```

```r
length(which(ybarr > 1.96 * sd(ybarr))) / NE
```

```
## [1] 1
```

e.La probabalité de recouvrement de l'intervalle de confiance

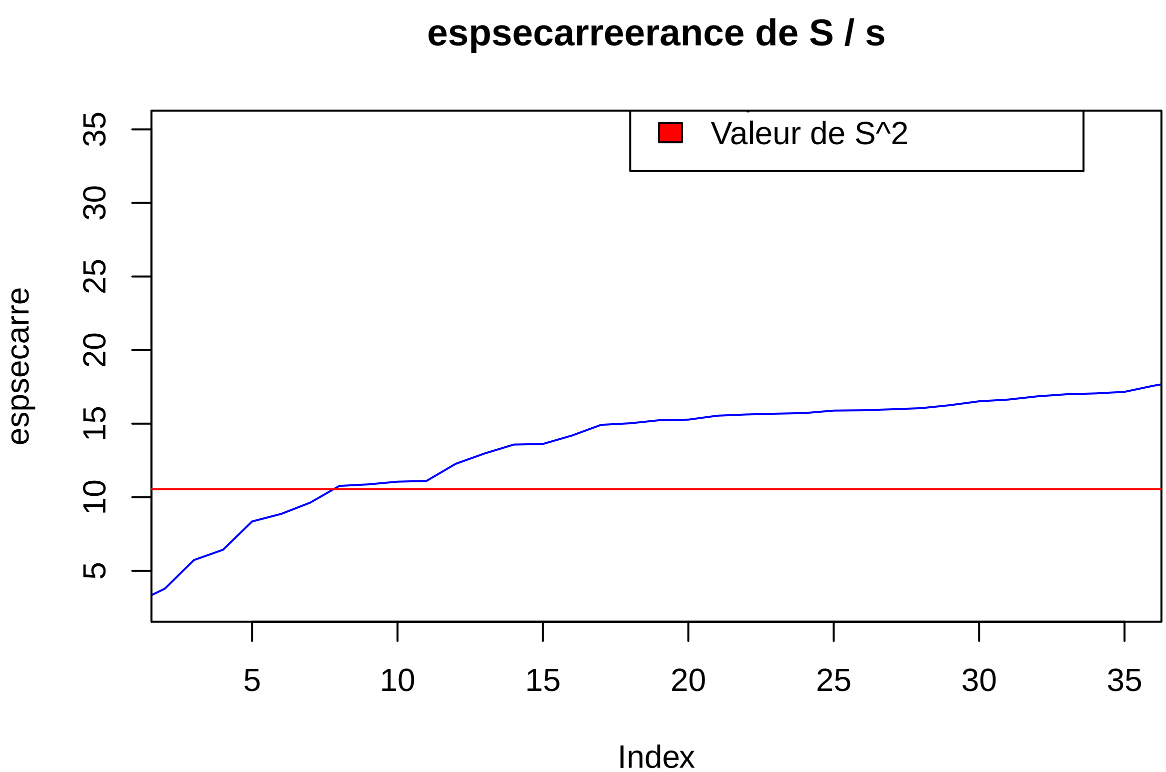
```r
se <- apply(echt,1,sd)
a <- ybarr - (1.96 * (se / sqrt(ne)))
b <- ybarr + (1.96 * (se / sqrt(ne)))
length(which(ybarru <= b & ybarru >=a)) / NE
```

```
## [1] 0,546
```

Donc la probabilité que l'intervall de confiance qui recouvre la vraie moyenne est de 54.6%.

Question f : Est-ce que vos simulations semblent indiquer que l'estimateur s^2 est sans biais de S^2

```r
secarr <- se^2
sizey <- length(y)
# calcul de S^2
S.carre <- (1 / (sizey - 1)) * sum((y - mean(y))^2)
espsecarre <- cumsum(secarr / (1:length(secarr)))
plot(espsecarre,xlim = c(min(espsecarre),max(espsecarre)),type = "l",
     col="blue",main = "espsecarreerance de S / s")
abline(h = S.carre,col="red")
legend(x = 18,y = 40,legend=c("espsecarreerence de s^2","Valeur de S^2"),
       fill = c("blue","red"),col=c("blue,red"))
```



D'après la figure on observe que l'esperance de s^2 ne converge pas vers la valeur de S^2. Donc s^2 n'est pas un estimateur sans biais de S^2.

Question g:La théorie statistique indique que dans certaines conditions l'intervalle de confiance

calculé par la formule

$$\frac{(n-1)*s^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}} < S^2 < \frac{(n-1)*s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}$$

est un intervalle de confiance à 95%. Estimons le niveau réel de cet intervalle de confiance.

```
alhaseuil <- 0.05
bsup <- ((ne - 1) * secarr) / qchisq(alhaseuil/2,ne - 1)
binf<- ((ne - 1) * secarr) / qchisq(1-(alhaseuil / 2),ne - 1)
length(which(S.carre < bsup & S.carre > binf)) / NE
```

```
## [1] 0,85
```

Le niveau reel de cet intervall de confiance est de 86.6%.