Chương 2
Kỹ thuật đếm nâng cao

2.1. Hệ thức truy hồi

2.2. Giải hệ thức truy hồi

2.1. Hệ thức truy hồi

2.1.1. Định nghĩa

- *Hệ thức truy hồi bậc k của dãy số $\{a_n\}$ là công thức tính a_n qua k phần tử trước nó.*
- *Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k hệ số hằng có dạng:*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}, c_k \neq 0 \quad (*)$$

Lưu ý rằng một hệ thức truy hồi bậc k với k giá trị đầu $a_0 = I_0, a_1 = I_1, \ldots, a_{k-1} = I_{k-1}$ *xác định duy nhất một dãy* $\{a_n\}$

2.1. Hệ thức truy hồi

2.1.2. Các ví dụ

- *Đếm số lần chuyển đĩa của bài toán tháp Hanoi (tháp Brahma- Bà la môn).*
- *Giả sử dân số Việt nam năm 2015 là 90 triệu. Tỉ lệ tăng dân số hằng năm là 0.2%. Tính dân số VN năm 2050.*
- *Đếm số xâu nhị phân độ dài n không chứa mẫu 00.*

2.1. Hệ thức truy hồi

➢ *Đếm số lần chuyển đĩa của bài toán tháp Hanoi.*

Giải.

Gọi H_n là số lần chuyển n đĩa.

Có hệ thức truy hồi: $H_n = 2H_{n-1} + 1$.

Đây là hệ thức truy hồi bậc 1 nên cần1 giá trị đầu là: $H_1=1$ (tuy nhiên, *chưa phải là lời giải*).

2.1. Hệ thức truy hồi

- *Giả sử dân số Việt nam năm 2015 là 90 triệu. Tỉ lệ tăng dân số hằng năm là 2%. Tính dân số VN năm 2050.*

Giải.

Gọi D_n là dân số n năm sau 2015.

Có hệ thức truy hồi: $D_n = D_{n-1} + 0.02\, D_{n-1}$.

Hay $D_n = 1.02\, D_{n-1}$.

Có giá trị đầu là: $D_0 = 90$(triệu).

2.1. Hệ thức truy hồi

- *Đếm số xâu nhị phân độ dài n không có hai bit 0 kề nhau.*

Giải.

Gọi $b=b_1b_2..b_n$ là xâu bit trên. Gọi a_n là số xâu b. Xét hai trường hợp sau:

a) $b_n=1$: số sâu b bằng số xâu $b_1b_2..b_{n-1}$ không có 00 và bằng a_{n-1}.

b) $b_n=0$ thì $b_{n-1}=1$: số sâu b bằng số xâu $b_1b_2..b_{n-2}$ không có 00 và bằng a_{n-2}.

Theo nguyên lý cộng, có hệ thức truy hồi:

$a_n= a_{n-1} + a_{n-2}$. Có giá trị đầu là: $a_1=2$, $a_2=3$.

2.2. Giải hệ thức truy hồi

Giải HTTH là tìm một công thức hiện cho số hạng tổng quát a_n mà không phải tính qua k phần tử trước nó.

- **Phương pháp thế**
- **Phương pháp phương trình đặc trưng**

2.2.1. Phương pháp thế

Để giải HTTH bậc 1:

$a_n=f(a_{n-1})$ với $a_0=I_0$

Bằng cách thay a_{n-1} bởi a_{n-2}, a_{n-2} bởi a_{n-3}, …, cho đến khi gặp giá trị đầu $a_0=I_0$ thì có được một công thức rõ ràng cho a_n.

2.2.1. Phương pháp thế

Ví dụ. Gọi H_n là số lần chuyển n đĩa của bài toán tháp Hanoi. Có HTTH

$H_n=2H_{n-1} + 1$ và $H_1=1$

$=2^2H_{n-2}+2+1$

…

$=2^{n-1}H_1+2^{n-2}+\ldots+2^2+2+1$

$= 1+2+\ldots+2^{n-1}= 2^n-1$ (*cấp số nhân*)

2.2.1. Phương pháp thế

Ví dụ (Lãi kép). Giả sử lãi suất hằng tháng là d, số tiền vay ban đầu là T. Tính số tiền phải trả sau n tháng.

Giải. Gọi t_n là số tiền phải trả sau n tháng. Có HTTH

$$t_n = t_{n-1} + dt_{n-1} = (1 + d)t_{n-1}.$$

Đây là HTTH bậc 1, có $t_0 = T$.

2.2.1. Phương pháp thế

Ví dụ (Lãi kép).

$$
\begin{aligned}
t_n &= (1+d)t_{n-1}\\
&= (1+d)^2 t_{n-2}\\
&\dots\\
&= (1+d)^n t_0
\end{aligned}
$$

Vậy $t_n = (1+d)^n T.$

2.2.2. PP Phương trình đặc trưng

Để giải HTTH bậc 2 tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, c_2 \neq 0 \quad (1)$$

với giá trị đầu $a_0 = I_0$, $a_1 = I_1$.

có phương trình đặc trưng

$$x^2 = c_1 x + c_2 \quad (2)$$

2.2.2. PP Phương trình đặc trưng

Định lý 1

Nếu α_1 và α_2 là hai nghiệm phân biệt của (2) thì tồn tại duy nhất các hằng *b* và *d* để

$$a_n = b\alpha_1^n + d\alpha_2^n$$

b, d tìm được qua 2 giá trị đầu.

2.2.2. PP Phương trình đặc trưng

❖ Các ví dụ

1. Giải HTTH

$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}, a_0=0, a_1=1$

2. Mỗi cặp thỏ sau 2 tháng tuổi sinh liên tục mỗi tháng một cặp. Giả sử thả lên đảo hoang một cặp thỏ mới sinh và thỏ không chết. Tính số cặp thỏ sau n tháng.

3. Cho X={0,1}, Y={A,B,C,D}. Gọi S là xâu chữ độ dài n gồm các chữ số hoặc chữ cái trong X hoặc Y. Đếm số xâu S không có hai chữ cái kề nhau.

2.2.2. PP Phương trình đặc trưng

1. Giải HTTH

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},\ a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

Giải.

PTĐT: $x^2 = 5x - 6$ có hai nghiệm $x_1 = 3$ và $x_2 = 2$. $a_n = b3^n + d2^n$

$a_0 = 0$ và $a_1 = 1$ có được $b = 1$ và $d = -1$.

Vậy

$$a_n = 3^n - 2^n.$$

2.2.2. PP Phương trình đặc trưng

2. Mỗi cặp thỏ sau 2 tháng tuổi sinh liên tục mỗi tháng một cặp. Giả sử thả lên đảo một cặp thỏ mới sinh. Tính số cặp thỏ sau n tháng.

Giải.

Gọi F_n là số cặp thỏ sau *n* tháng.

F_n bằng số cặp thỏ tháng trước (F_{n-1}) cộng với số cặp thỏ mới sinh. Mà số cặp thỏ mới sinh bằng số cặp thỏ đã có cách đó 2 tháng (F_{n-2}).

Có hệ thức truy hồi:

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \text{ với } F_0=F_1=1.$$

2.2.2. PP Phương trình đặc trưng

PTĐT: $x^2 = x + 1$ có hai nghiệm

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$F_0 = F_1 = 1$ có được $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

và $d = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

Vậy

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{[n+1]} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{[n+1]}$$

2.2.2. PP Phương trình đặc trưng

3. Cho X={0,1}, Y={A,B,C,D}.Gọi S là xâu chữ độ dài n gồm các chữ số hoặc chữ cái trong X hoặc Y. Đếm số xâu S không có hai chữ cái kề nhau.

Giải. Đặt $S=s_1s_2..s_n$ và gọi a_n là số xâu S.

Xét 2 trường hợp:

a) $s_n \in X$: có 2 khả năng xảy ra cho s_n và số xâu S bằng 2 lần số xâu độ dài n-1 không có hai chữ số kề nhau. Tổng số là $2a_{n-1}$.

b) $s_n \in Y$: thì $s_{n-1} \in X$, có 4 khả năng xảy ra cho s_n và có 2 khả năng xảy ra cho s_{n-1}. Số xâu S bằng 4x2=8 lần số xâu độ dài n-2 không có hai chữ số kề nhau. Tổng số là $8a_{n-2}$.

2.2.2. PP Phương trình đặc trưng

Theo nguyên lý cộng, có HTTH:

$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$ với $a_0=1$, $a_1=6$.

PTĐT: $x^2 = 2x+8$ có hai nghiệm

$x_1 = 4$ và $x_2 = -2$

$a_n = b4^n + d(-2)^n$.

$a_0=1$, $a_1=6$ có được $b= 4/3$ và $d= -1/3$

Vậy

$$a_n = 4^{n+1}/3 - (-2)^n/3$$

2.2.2. PP Phương trình đặc trưng

Định lý 2

Nếu α nghiệm kép của (2) thì tồn tại duy nhất các hằng b và d để

$$a_n = b\alpha^n + dn\alpha^n$$

2.2.2. PP Phương trình đặc trưng

- *Giải HTTH*

  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

Giải.

PTĐT: $x^2 = 4x - 4$ có nghiệm kép $x=2$.

$a_n = b2^n + dn2^n$.

$a_0=1$ và $a_1=3$ có được $b=1$ và $d=1/2$.

Vậy

$$a_n = 2^n + n2^{n-1}.$$