

Lesson 13

Logics

Discrete Mathematics on 2013-2014

Nguyen Van Hieu
Information Technology Faculty
The University of Danang, University of Science
and Technology (UD-UST)

Content

- *Introduction*
- *Propositional Logic*
- *Compound proposition*
- *Translating Natural Sentences*
- *Logical Equivalences*
- *Exercise*

Introduction

Logic là gì?

- Là một nhánh của triết học và toán học nghiên cứu về nguyên tắc, phương pháp và tiêu chuẩn hình thức cho sự hợp lệ của suy luận và kiến thức.
- Là khoa học **ước lượng** các suy luận
- Xác định **ý nghĩa chính xác** của một lý luận

Logic dùng để làm gì?

- Suy luận toán học
- Thiết kế các mạng trong máy tính
- Xây dựng các chương trình
- Kiểm tra chính xác của chương trình
- Nhiều ứng dụng khác

Introduction

Definition (Averroes)

*The tool for distinguishing between the **true** and the **false**.*

Definition (Rosen)

*Rules of logic are used to distinguish between **valid** and **invalid** mathematical arguments.*

Introduction

Definition

- ✓ A language in which we describe another language is called a *metalanguage*.
- ✓ If a statement is true, then we shall say that its *logical value is "true"*, and if it is false, its *logical value is "false"*.
- ✓ *True - 1*
- ✓ *False - 0*

Example

The sentence:

"If it is raining and I go outside then I get wet".

The three simple statements:

1. *"It is raining."*
2. *"I go outside."*
3. *"I get wet."*

.

Propositional Logic

Definition

A **proposition** is a declarative sentence (câu trần thuật) that is either true or false, **but not both**.

Example

- ✓ Moscow is the capital of Russia.
- ✓ New York City is the capital of USA.
- ✓ $1 + 1 = 2$
- ✓ $2 + 2 = 3$
- ✓ $x + 1 = 4$

Propositional Logic

Definition

A *proposition* is a declarative sentence that is either true or false, *but not both*.

Examples (Which of these are propositions?)

- How easy is logic!
- Read this carefully.
- H1 building is in Ho Chi Minh City.
- $4 > 2$
- $2^n \geq 100$
- The sun circles the earth.
- Today is Thursday.
 - Proposition only when the time is **specified**

Propositional Logic

Notations

✓ Propositions are denoted by

p, q, r, \dots

Notations

✓ The **truth value** (giá trị chân lý) is **true** (T) or **false** (F).

✓ The **truth table** biểu diễn mối quan hệ giá trị chân lý giữa các mệnh đề

Compound proposition

- George Boole [1854] – nhà toán học người Anh
 - The Mathematical Analysis of Logic (1848)
 - The Law of Thought (1854)

- **Mệnh đề phức hợp** được tạo ra bằng cách **kết hợp** các mệnh đề hiện có bằng **các toán tử logic**

Compound proposition- **negation**

Definition

- ✓ \neg
- ✓ Negation of a statement is “false” when the statement is “true” and it is “true” when the statement is “false”.
- ✓ A statement and its negation always have different truth values.

Example:

- Giả sử “p là một mệnh đề”
Câu “không phải là p”
- $p = \text{“It is hot”}$
 $\neg p = \text{“It is not hot”}$
- Hôm nay là thứ tư
Hôm nay không phải là thứ tư

Compound proposition- Negation

Definition

• ✓ \neg

✓ *Truth Table for Negation*

p	$\neg p$
T	F
F	T

Activity 1:

What will be the negation of the following statement?

“All computer scientists are men.”

- a. “No computer scientists are men.”
- b. “Some computer scientists are men.”

Compound proposition - conjunction

definition

- ✓ \wedge , “and”
- ✓ $p \wedge q$: is read as “p and q”. This is called **conjunction of p and q**.
- ✓ *Truth Table for conjunction*

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Example

- p = “It is green”
 q = “It is an apple”
 $p \wedge q$ = “It is green and it is an apple”
- p = “Hôm nay thứ tư”
 q = “Hôm nay trời nắng”
 $p \wedge q$ = ?
- $p \wedge q$ - “hội” p và q.

Compound proposition- Disjunction

definition

- ✓ $p \vee q$: “*p or q*”
- ✓ This version of “OR” is sometimes known as “*inclusive or*”
- ✓ *Truth Table for conjunction*

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Example:

- We need students who have experience in Java *or* C++.
- Tomorrow, I will eat Pho *or* Bun.
- $p \vee q$ – “*tuyển*” của p và q
- Tuyển đúng khi một trong hai đúng hoặc cả hai đều đúng

Compound proposition- Exclusive OR

Exclusive OR

- ✓ “ p or q (but not both)”
- ✓ $p \neq q$
- ✓ Truth Table for exclusive or

p	q	$p \neq q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Example

- “Các sinh viên học công nghệ phần mềm hoặc hệ thống thông tin, nhưng không cả hai đều có thể theo học lớp này”.
- Thực đơn của nhà hàng ghi
“món khai vị: súp hoặc xa lát”
- p = “Tôi sẽ đạt loại A môn học này.”
 q = “Tôi sẽ hỏng môn học này.”
“Hoặc là tôi sẽ đạt loại A môn học này, hoặc là tôi sẽ hỏng môn học này. (nhưng không cả hai!)”

Compound proposition - conditional

Conditional (Implication)

✓ \Rightarrow

✓ $p \Rightarrow q$ “if p , then q ”

✓ Truth Table for the conditional

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Example:

■ “If it rains, the pavement will be wet.”

■ p = “Bạn học chăm.”
 q = “Bạn đạt kết quả tốt.”

$p \Rightarrow q$ = “Nếu bạn học chăm thì bạn đạt kết quả tốt.” (ngược lại, có thể đạt kết quả tốt hoặc không tốt)

Compound proposition- conditional

expressions for $p \Rightarrow q$

- ✓ *If p , then q*
- ✓ *p implies q*
- ✓ *p is sufficient for q*
- ✓ *q if p*
- ✓ *p only if q*
“ q chỉ nếu p ”

Example

- ✓ If you get 100 % on the final, you will get 10 grade.
- ✓ If the sun shines today, 19 is prime.
- ✓ If the sun shines today, 8 is prime.

Compound proposition- conditional

Note:

- ✓ We call “p” is the **hypothesis** (or premise) and “q” is the **consequence** (or conclusion).
- ✓ Try this:
 - “If you score 85% or above in this class, then you will get an A.”
 - ✓ $p = \text{“your score} \geq 85\% \text{”}$
 - ✓ $q = \text{“you will get a grade A”}$
- ✓ And you can view this statement as a promise. It says
 - “You are guaranteed an A provided you scores 85% or above.”

Example

Line no.	P	q	$p \Rightarrow q$ (implication)
1	You score 75%	You got a B	Promise is kept
2	You score 84%	You got an A	Promise is kept
3	You score 90%	You got a B	Broken promise
4	You score 90%	You got an A	Promise is kept

- ✓ Line 1: If you score 75% and received a “B”, you cannot complaint that promise was broken (i.e. the implication $p \Rightarrow q$ is “False”).
- ✓ Line 2: If you score 84% and ended with “A”, you still cannot say that the promise was broken.

Compound proposition

Conditional statements from

$$p \Rightarrow q$$

- ✓ **Converse:** “đảo”

$$q \Rightarrow p$$

- ✓ **Contrapositive** (phản đảo)

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

- ✓ **Inverse** (ngược)

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

- ✓ Prove that only contrapositive have the same truth table with $p \Rightarrow q$

Activity 3:

What are the **converse** and **contrapositive** of the following conditional statement

“ If he plays online games too much, his girlfriend leaves him.”

Compound proposition

Conditional statements from $p \Rightarrow q$

- ✓ **Converse:** “đảo”

$$q \Rightarrow p$$

- ✓ **Contrapositive** (phản đảo)

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

- ✓ **Inverse** (ngược)

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

- ✓ Prove that only contrapositive have the same truth table with $p \Rightarrow q$

Activity 3:

What are the **converse** and **contrapositive** of the following conditional statement

“If he plays online games too much, his girlfriend leaves him.”

- **Converse:** If his girlfriend leaves him, then he plays online games too much.
- **Contrapositive:** If his girlfriend does not leave him, then he does not play online games too much.

Compound proposition

Conditional statements from

$$p \Rightarrow q$$

- ✓ **Converse:** “đảo”

$$q \Rightarrow p$$

- ✓ **Contrapositive** (phản đảo)

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

- ✓ **Inverse** (ngược)

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

- ✓ Prove that only contrapositive have the same truth table with $p \Rightarrow q$

Ví dụ

- Tìm mệnh đề đảo, phản đảo và ngược của phép kéo theo:
 - “Hôm nay là thứ tư, thì tôi có giờ dạy toán rời rạc”
 - Nếu tôi có giờ dạy toán rời rạc thì hôm nay là thứ tư
 - Nếu tôi không có giờ dạy toán rời rạc thì hôm nay không phải là thứ tư
 - Nếu hôm nay không phải là thứ tư, thì tôi không có giờ toán rời rạc.

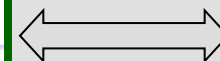
Compound proposition - Biconditional

- ✓ \Leftrightarrow or iff
- ✓ $p \Leftrightarrow q$ “ p if and only if q ”
- ✓ “ p is necessary and sufficient for q ”
- ✓ Truth Table

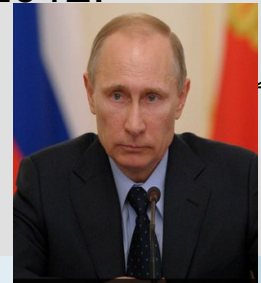
p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Example:

- ✓ Consider this statements: “You can go the singing concert if and only if you buy a ticket.”
- ✓ p = “Putin wins the 2011 election.”
 q = “Putin will be president for all of 2012.”
 $p \leftrightarrow q$ = “If, and only if, Putin wins the 2011 election, Putin will be president for all of 2012.”







2012



Compound proposition- Biconditional

Some Alternative Notations

Name:	not	and	or	xor	implies	iff
Propositional logic:	\neg	\wedge	\vee	\neq	\rightarrow	\leftrightarrow
Boolean algebra:	\bar{p}	pq	$+$	\oplus		
C/C++/Java (wordwise):	!	&&		!=		==
C/C++/Java (bitwise):	~	&		^		
Logic gates:						

Activity 2

Try to complete following truth table

p	$\neg p$	q	$\neg p \cup q$
F		F	
F		T	
T		F	
T		T	

$\neg p \cup q$ is equivalent to $p \Rightarrow q$.

Translating Natural Sentences

Truth Tables

- ✓ Why we use logic?
 - ✓ Có nhiều mục đích khác nhau khi dịch một câu thông thường thành các biểu thức logic
 - ✓ Sử dụng để phân tích các biểu thức logic và có thể xác định giá trị chân lý của biểu thức đó.
 - ✓ We hope to translate from English to symbols.

Activity 4:

“I will buy a new phone **only if** I have enough money to buy iPhone 5 **or** my phone is not working”

Translating Natural Sentences

Translating Natural Sentences

- ✓ p : I will buy a new phone
- ✓ q : I have enough money to buy iPhone 5
- ✓ r : My phone is working

$$✓ \quad p \rightarrow (q \vee \neg r)$$

Activity 4:

“I will buy a new phone only if I have enough money to buy iPhone 5 or my phone is not working”

Translating Natural Sentences

Translating Natural Sentences

- p
- p = “bạn lái xe máy”
 q = “bạn cao dưới 1.5m”
 r = “bạn trên 18 tuổi”
 $(q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$
- **Chú ý:** có nhiều cách khác nhau để biểu diễn câu như một biểu thức logic.

Activity 4`:

“Bạn không lái xe máy nếu bạn cao dưới 1.5m, trừ khi bạn trên 18 tuổi”

Compound proposition

Truth Tables

✓ In brackets first

✓ Negate first, then and etc

Precedence	1(Highest)	2	3	4	5(Lowest)
Operator	\neg	\wedge	\vee	\Rightarrow	\Leftrightarrow

Example

Construct the truth table of the compound proposition
 $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$.

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

Compound proposition

Activity 5

Construct a truth table for

$$\neg p \wedge q.$$

Activity 6

Construct a truth table for

$$\neg(p \wedge q).$$

Propositional Logic- Operators

Activity 7

- ✓ Is the statement
“ $(p \vee q) \wedge \neg p$ ” equal to
“ $\neg p \wedge q$ ” ?

Activity 8

- ✓ Prove that
 $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q.$

Propositional Logic- Operators

Activity 9

- ✓ Prove that

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q.$$

Activity 10

- ✓ Construct truth table for

$$\neg(p \vee q) \wedge \neg(q \vee p)$$

Propositional Logic- Operators

Activity 11

- ✓ Construct truth table for
 $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Activity 12

- ✓ Construct truth table for
 $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Applications

Boolean search

- Type “Discrete Mathematics” in [Google](#).
- Means “Mathematics” AND “for computing”

System specifications

- When a user clicked on **Help button**. A **pop – up** will be shown up

Bit string

- True – 1 ; False – 0
- \wedge - AND; \vee - OR
- \neq - XOR

using two hands

- Did you know that you can count to 1.023?
- 0000000000, 0000000001, 0000000010, ...
..., 1111111101, 1111111110, 1111111111

exercises

Bài 1

Cho p và q là hai mệnh đề.

p : Tôi đã mua vé xổ số tuần này.

q : Tôi đã trúng giải độc đắc 1 triệu đô la vào hôm thứ sáu.

Diễn đạt các mệnh đề sau bằng các câu thông thường :

a) $\neg p$

b) $p \vee q$

c) $p \rightarrow q$

d) $p \wedge q$

e) $p \leftrightarrow q$

f) $\neg p \rightarrow \neg q$

Bài 2

Cho p và q là hai mệnh đề.

p : Nhiệt độ dưới không.

q : Tuyết rơi..

Dùng p và q và các liên từ logic viết các mệnh đề sau :

a) Nhiệt độ dưới không và tuyết rơi.

h) Nhiệt độ dưới không nhưng không có tuyết rơi.

c) Nhiệt độ không dưới không và không có tuyết rơi.

d) Có tuyết rơi hoặc nhiệt độ dưới không (hoặc cả hai).

e) Nếu nhiệt độ dưới không thì cũng có tuyết rơi.

f) Hoặc nhiệt độ dưới không hoặc có tuyết rơi nhưng sẽ không có tuyết rơi nếu nhiệt độ dưới không.

g) Nhiệt độ dưới không là điều kiện cần và đủ để có tuyết rơi.

exercises

Bài 3

Viết các mệnh đề sau dưới dạng "p nếu và chỉ nếu q" trong ngôn ngữ thông thường.

- a) Để nhận được điểm giỏi trong khoá học này cần và đủ là phải học giải được các bài tập của toán học rời rạc.
- b) Nếu bạn đọc báo mỗi ngày bạn sẽ thạo tin tức và ngược lại.
- c) Trời mưa nếu là ngày cuối tuần và là ngày cuối tuần nếu trời mưa.
- d) Bạn có thể nhìn thấy lão phù thủy nếu lão không ở trong đó và lão phù thủy không ở trong đó nếu bạn nhìn thấy lão.

Bài 4

Phát biểu mệnh đề đảo và phản đảo của các mệnh đề kéo theo sau :

- a) Nếu hôm nay tuyết rơi, ngày mai tôi sẽ đi trượt tuyết.
- b) Tôi tới lớp mỗi khi sắp có kỳ thi.
- c) Một số nguyên dương là số nguyên tố nếu nó không có một ước số nào khác 1 và chính nó.

Phát biểu mệnh đề đảo và phản đảo của các mệnh đề kéo theo sau :

- a) Nếu đêm nay có tuyết rơi, tôi sẽ ở nhà.
- b) Tôi đều đi ra bãi tắm bất cứ ngày nào trời nắng.
- c) Khi tôi ở lại muộn, cần phải để tôi ngủ đến trưa.

exercises

Bài 5

Lập bảng giá trị chân lý cho các mệnh đề phức hợp sau

a) $(p \vee q) \vee r$

b) $(p \vee q) \wedge r$

c) $(p \wedge q) \vee r$

d) $(p \wedge q) \wedge r$

e) $(p \vee q) \wedge \neg r$

f) $(p \wedge q) \vee \neg r$

Bài 6

Lập bảng giá trị chân lý cho các mệnh đề phức hợp sau :

a) $p \rightarrow (\neg q \vee r)$

h) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$

c) $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$

d) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$

e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$

f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

Logical Equivalences

Definition

- ✓ A compound proposition that is **always true** is called a **tautology**
 - ✓ A tautology if its truth table has **no value F**
- ✓ A compound proposition that is **always false** is called a **contradiction**
 - ✓ A contradiction if its truth table has **no value T**.

Example

- - ✓ $p \vee \neg p$ - **tautology**
 - ✓ $p \wedge \neg p$ - **contradiction**

Logical Equivalences

Definition

- ✓ Compound proposition **p** is **logically equivalent** to compound proposition **q**, written $p \Leftrightarrow q$, **IFF** the compound proposition $p \Leftrightarrow q$ is a **tautology**.
- ✓ Compound propositions **p** and **q** are **logically equivalent** to each other **IFF** p and q contain the **same truth values as each other in all rows of their truth tables**.

Example

- Shown that:

$$1. \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$


- $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$.
- $((p \cup q) \cap p) \Leftrightarrow p$ is a **tautology**.

Logical Equivalences

Some Laws

$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$	Identity laws
$p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Luật đồng nhất
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	Domination laws
$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Luật nuốt
$p \vee p \equiv p$	Idempotent laws
$p \wedge p \equiv p$	Luật lũy đẳng
$\neg(\neg p) \equiv p$	Double negation law
	Luật phủ định kép

Some Laws

$p \vee q \equiv q \vee p$	Commutative laws
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	Luật giao hoán
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Associative laws
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Luật kết hợp
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributive laws
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Luật phân phối
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	 De Morga (1806-187
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Absorption laws
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Luật hút thu

Exercise

Construct truth tables for

1. $\neg(p \wedge q)$
2. $\neg(p \vee q) \wedge \neg(q \vee p)$
3. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
4. $(p \vee q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s)$
5. $(p \vee q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Equivalence

$p \vee \neg p$	\equiv	T
$p \wedge \neg p$	\equiv	F
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	\equiv	$p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	\equiv	$(p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$	\equiv	$p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	\equiv	$(p \wedge q) \rightarrow r$
$p \leftrightarrow q$	\equiv	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Exercise

Chứng minh các dạng mệnh đề sau là các hằng đúng:

- a. $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q.$
- b. $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p .$
- c. $((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p.$
- d. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \rightarrow 0).$
- e. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r).$
- f. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)).$

Chứng minh các mệnh đề tương đương sau

- a. $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \vee r)$
- b. $((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \vee r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r.$
- c. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r$
- d. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge r).$



THAT'S ALL; THANK YOU

What NEXT?

Lôgic vị tù