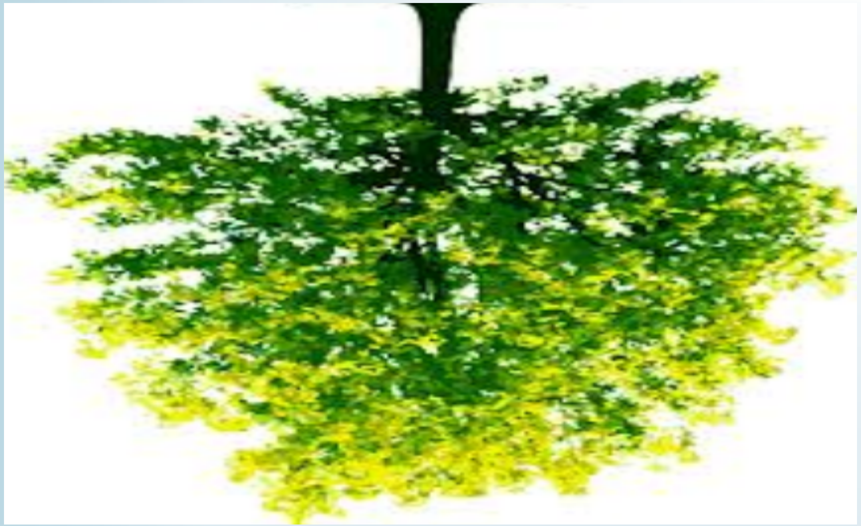
CÂY & CÂY TỐI ĐẠI



Giáo viên: TS. Nguyễn Văn Hiệu
Email: nvhieuqt@dut.udn.vn

Nội dung

Khái niệm cây

Khái niệm cây tối đại

Cây tối đại ngắn nhất

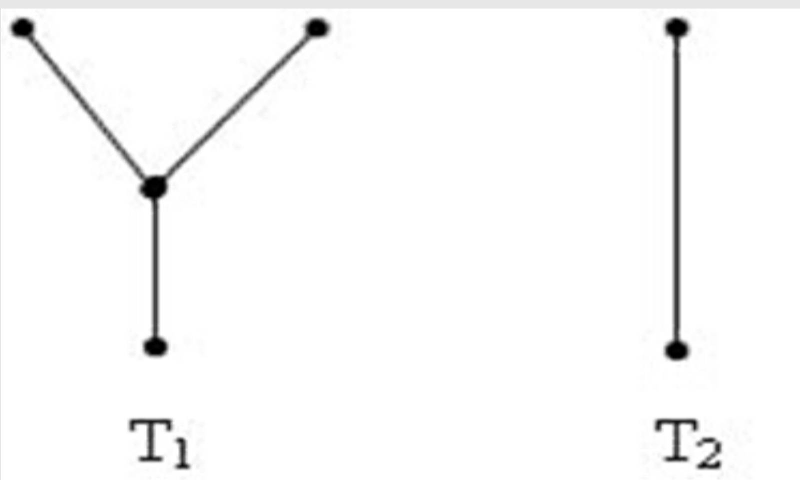
Thuật toán Kruskal

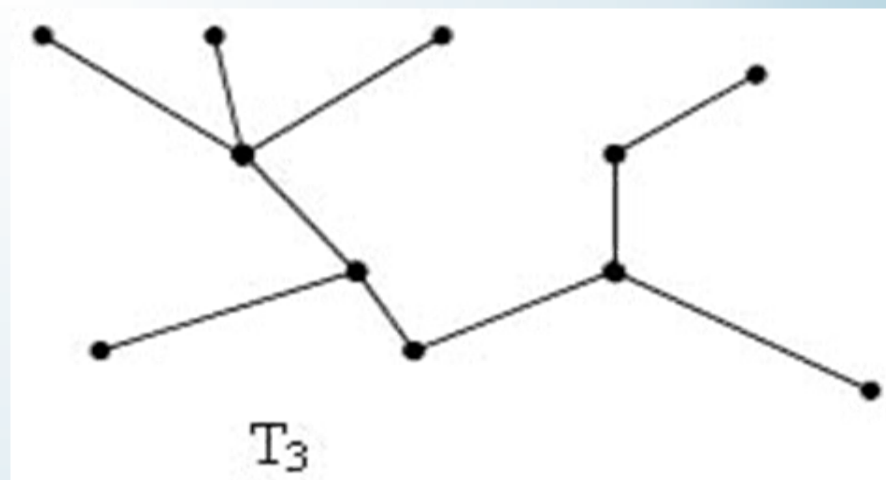
Thuật toán Prim

Khái niệm cây

Khái niệm	Ví dụ

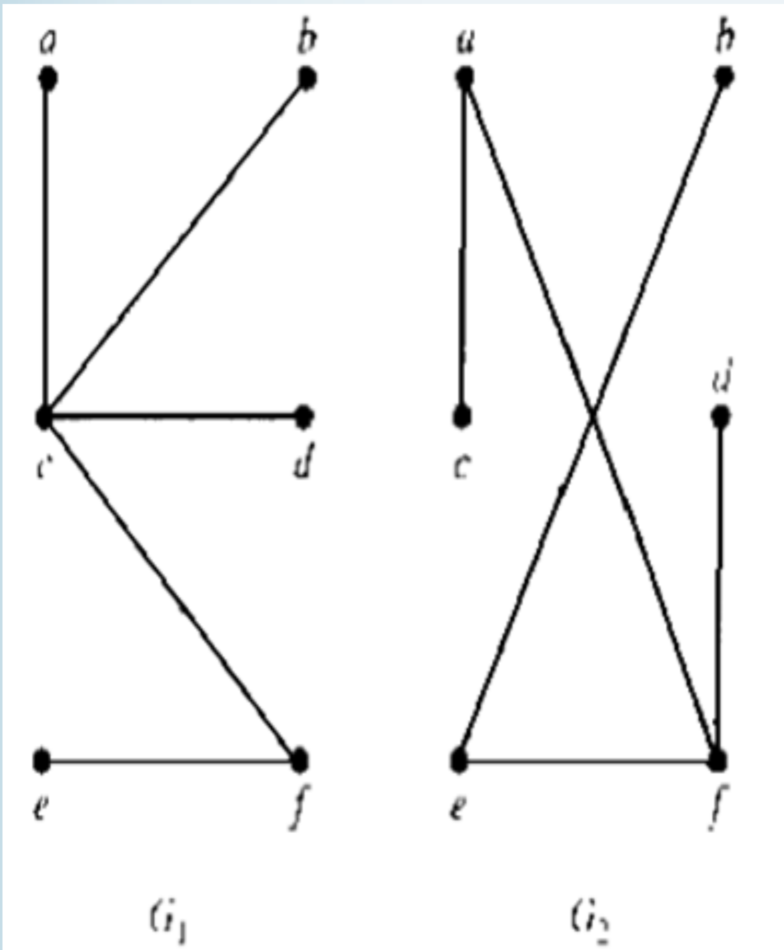
Cây là đồ thị liên thông và không chứa chu trình.

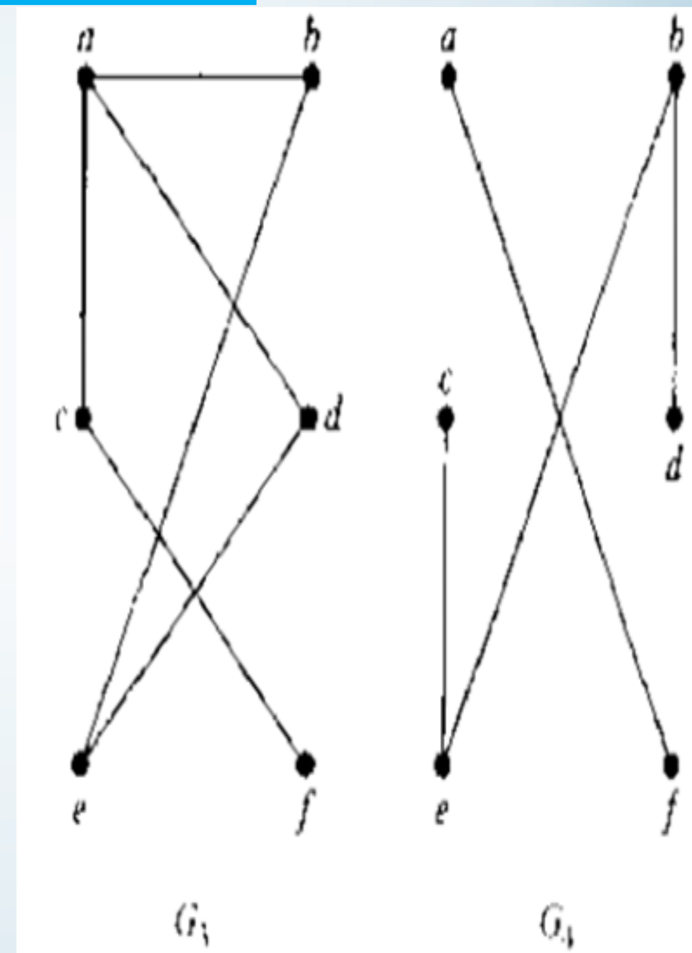




Khái niệm cây

Đồ thị nào là cây?





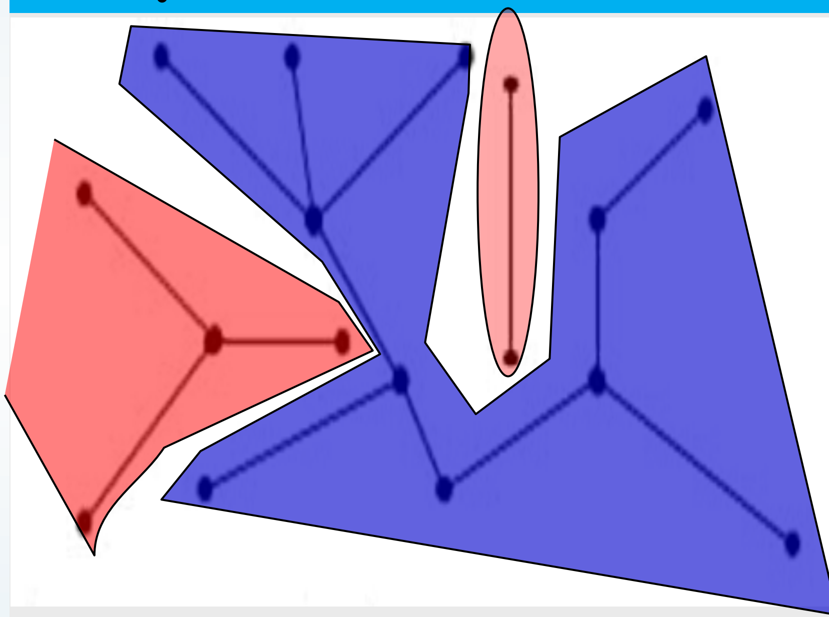
Khái niệm cây

Khái niệm

Rừng là một đồ thị gồm nhiều thành phần liên thông, trong đó mỗi thành phần là một cây.

Lưu ý: cây không chứa khuyên và cạnh song song

Ví dụ

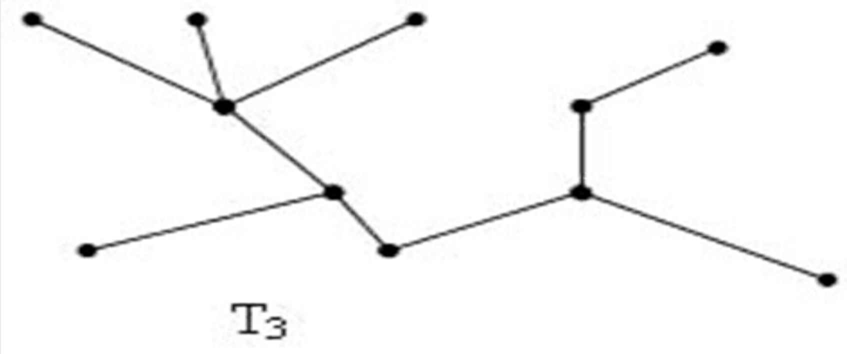


Khai niệm cây

Định lý

Cây có n đỉnh (n ≥ 2) chứa ít nhất hai đỉnh treo

Ví dụ



Khái niệm cây

Định lý

T là đồ thị vô hướng có n đỉnh. Có các mệnh đề tương đương:

1. T là cây.
2. T không chứa chu trình và có n – 1 cạnh.
3. T liên thông và có n – 1 cạnh.

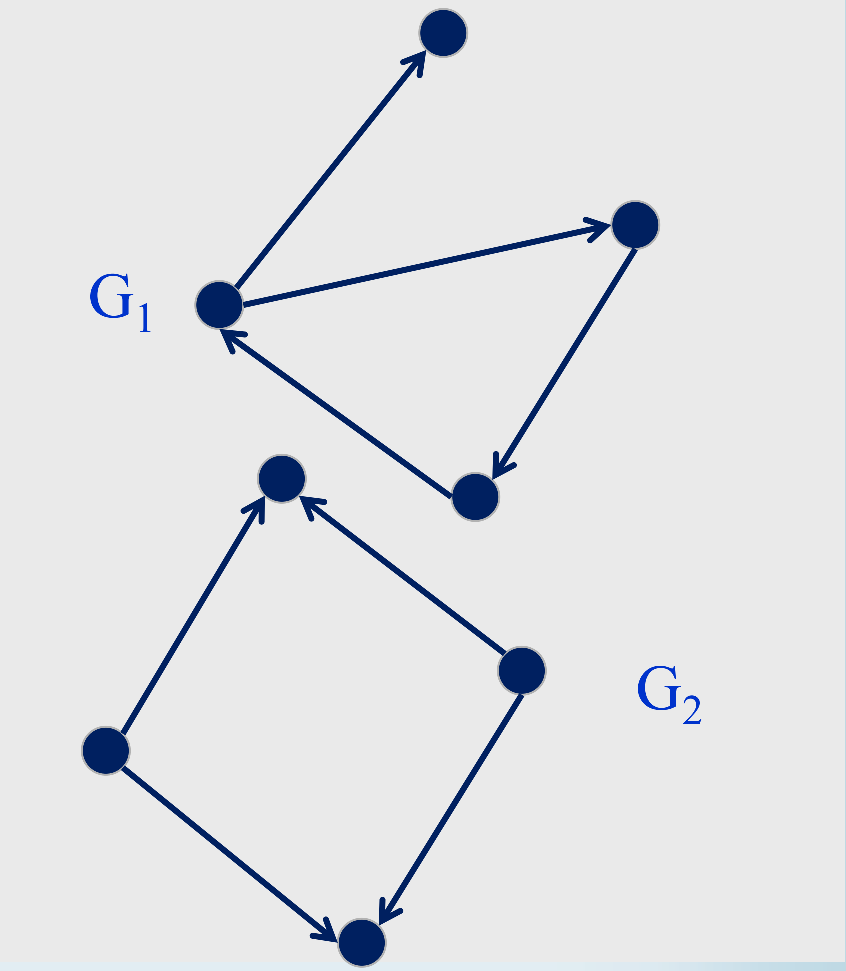
Định lý

4. T liên thông và mỗi cạnh của T đều là cạnh cắt (cầu).
5. Hai đỉnh bất kỳ của T được nối với nhau bằng đúng 1 đường đi đơn.
6. T không chứa chu trình nhưng nếu thêm 1 cạnh bất kỳ vào T thì ta sẽ được thêm đúng 1 chu trình.

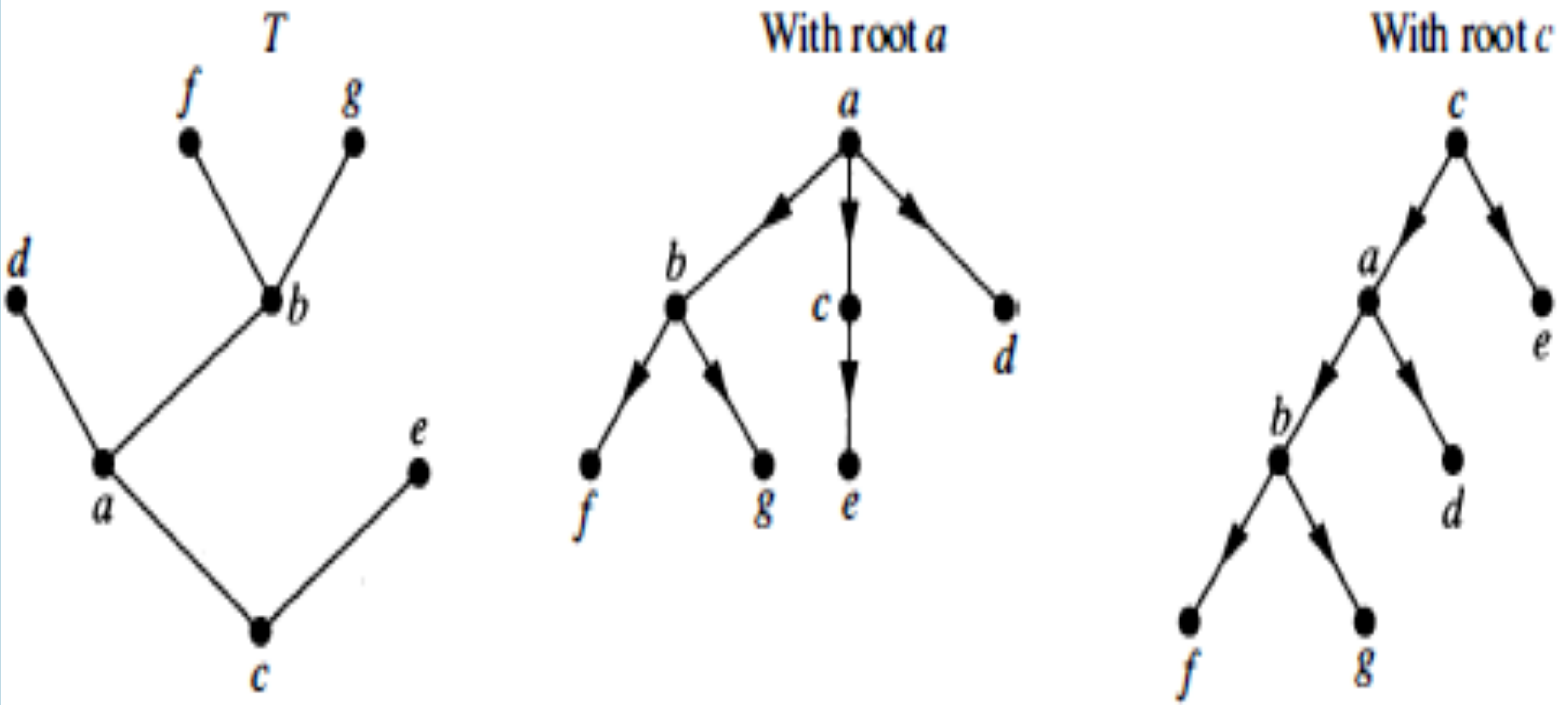
Khái niệm cây

Định nghĩa

- ✓ **CÂY CÓ HƯỚNG** là đồ thị có hướng mà đồ thị nền của nó là một cây.
- ✓ **CÂY CÓ GỐC** là cây trong đó có một đỉnh được chọn làm gốc và mỗi cạnh được định hướng trùng với hướng đi của đường đi đơn duy nhất từ gốc tới mỗi đỉnh.
- ✓ Chú ý: Trong cây có gốc thì gốc có bậc vào bằng 0, còn tất cả các đỉnh khác đều có bậc vào bằng 1.



Khái niệm cây



Khái niệm cây

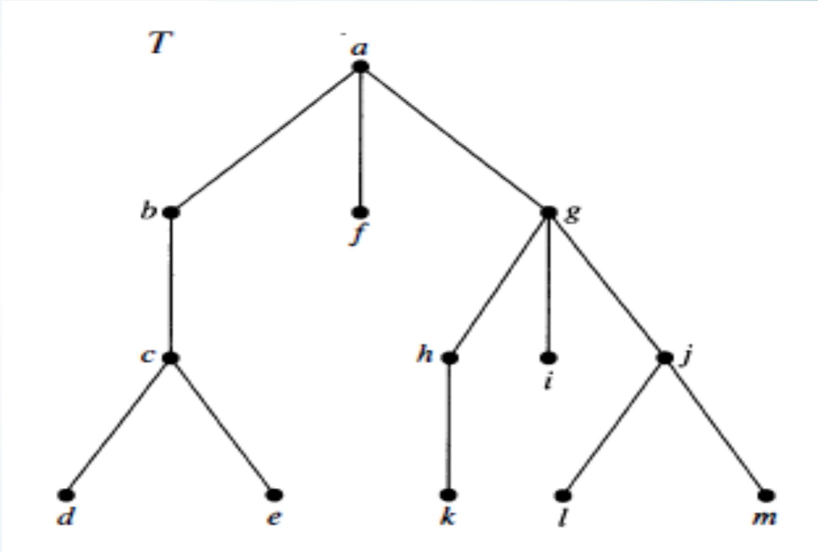
Định nghĩa

✓ Cây T có gốc v_0.

Giả sử $v_0, v_1, ..., v_n$ là một đường đi trong T:

- v_{i+1} là con của v_i và v_i là cha
- $v_0, v_1, ..., v_{n-1}$ là các tổ tiên của v_n
- Đỉnh treo v_n là đỉnh không có con; đỉnh treo cũng gọi là lá hay đỉnh ngoài;
- Đỉnh không là lá gọi đỉnh trong.

Ví dụ

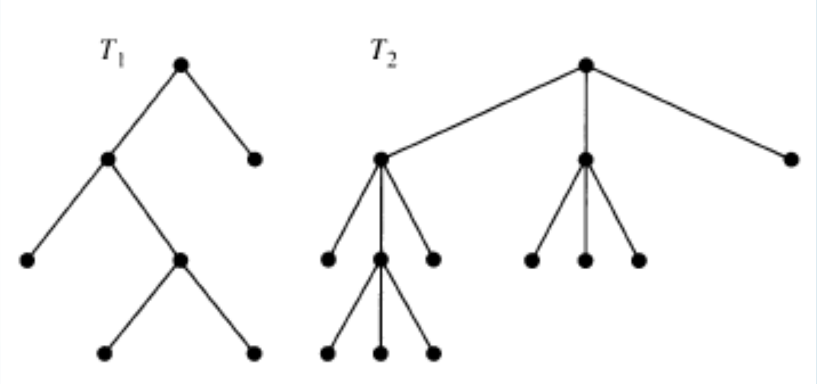


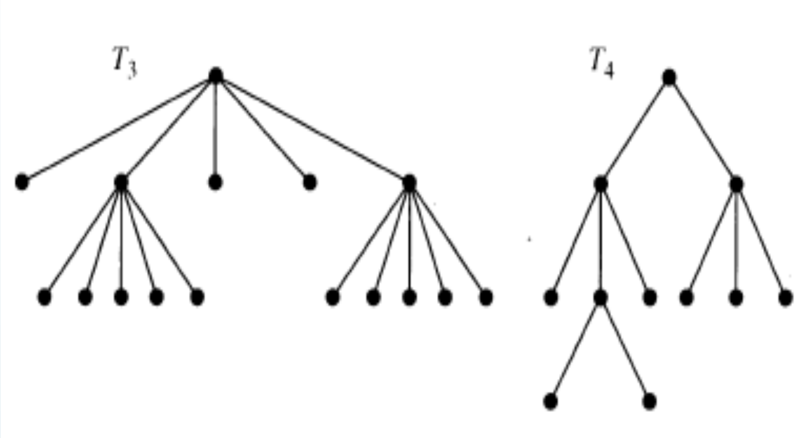
Khái niệm cây

Định nghĩa

- ✓ Một cây có gốc T gọi là CÂY k- PHÂN nếu mỗi đỉnh của T có nhiều nhất là k đỉnh con.
- ✓ Cây có gốc T gọi là CÂY k- PHÂN ĐẦY ĐỦ nếu mỗi đỉnh trong của T đều có đúng k con.
- ✓ Cây k- phân đầy đủ với m đỉnh trong có, n = m*k+1 đỉnh

Ví dụ





Khái niệm cây

✓ Cây k phân đầy đủ với

- n đỉnh có $m=(n-1)/k$ đỉnh trong và $l=\left[(k-1)\times n+1\right]/k$ đỉnh lá,
- m đỉnh trong có $n=k\times m+1$ đỉnh và $l=(k-1)\times m+1$ đỉnh lá,
- l đỉnh lá có $n=(k\times l-1)/(k-1)$ đỉnh và $m=(l-1)/(k-1)$ đỉnh trong.

Trong đó: m – số đỉnh trong,

l – số lá

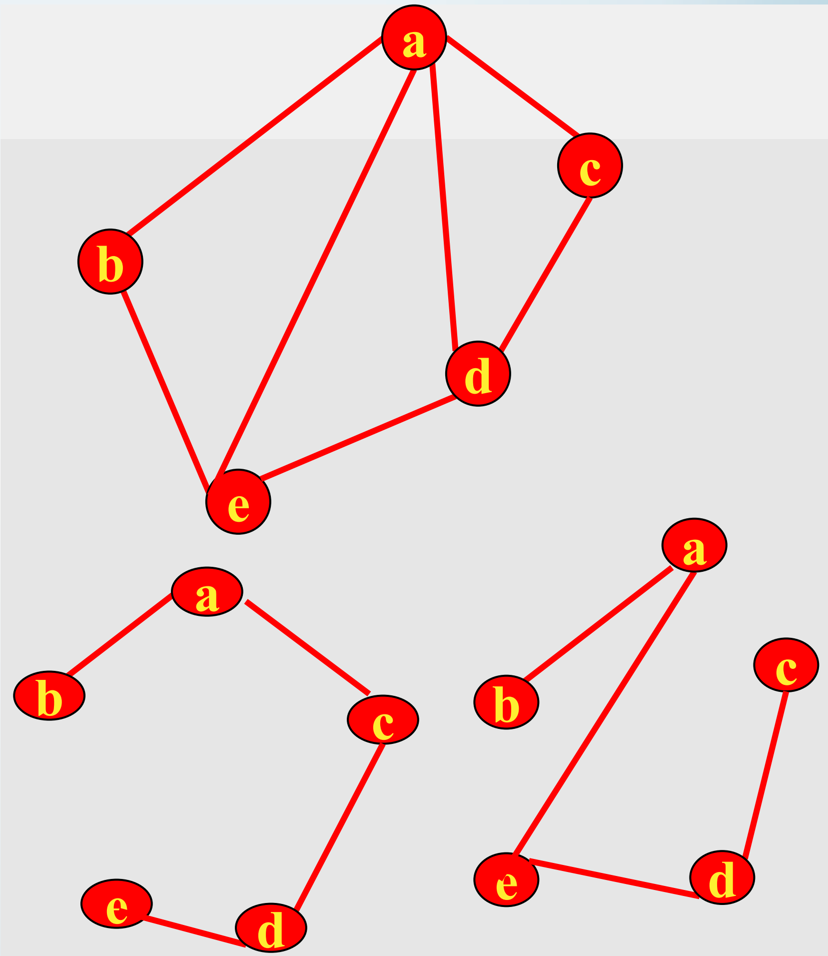
Cây tối đại

Định nghĩa

G=(X, E) - đồ thị liên thông và T=(X, F) - đồ thị bộ phận của G.

Nếu T là cây thì T được gọi là **một cây tối đại** của G.

- ✓ Các tên gọi khác:
  - ✓ cây khung,
  - ✓ cây bao trùm,
  - ✓ cây phủ

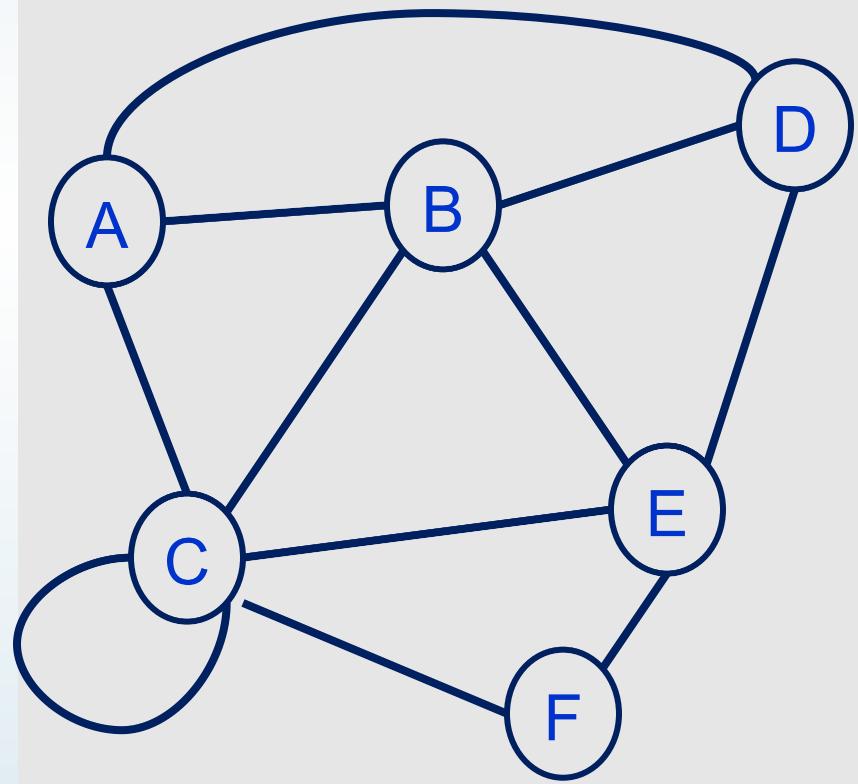


Cây tối đại

Tính chất

✓ Mọi đồ thị liên thông đều có chứa ít nhất một cây tối đại

Ví dụ



Cây tối đại

Xác định cây tối đại

Thuật toán tựa PRIM

Input:

Đồ thị liên thông G=(X, E), X gồm N đỉnh

Output:

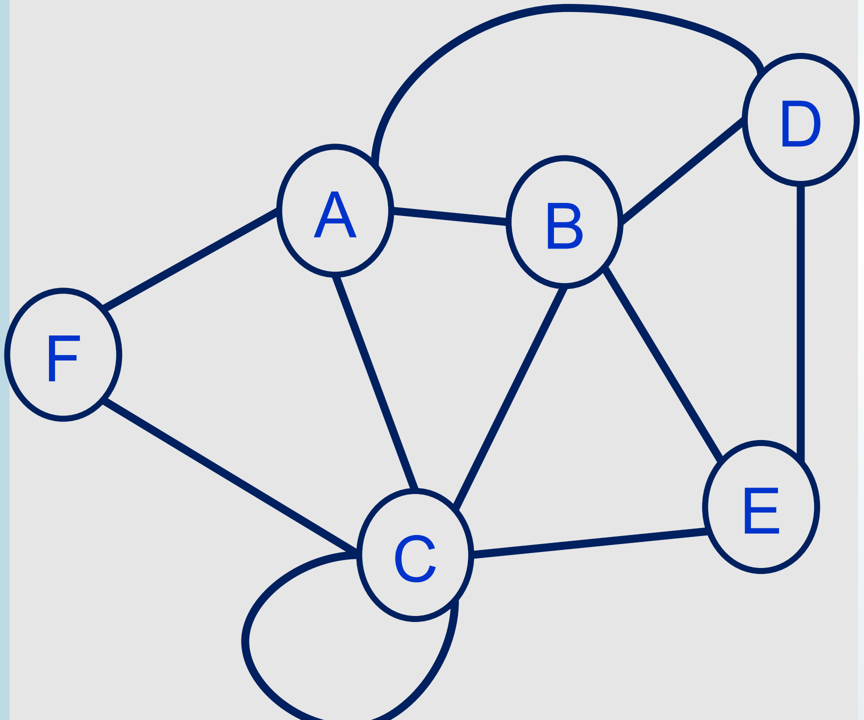
Cây tối đại T=(V, U) của G

Thuật toán

1. Chọn v ∈ X và khởi tạo V := { v }; U := ∅;
2. Chọn w∈ X \ V sao cho ∃e ∈ E, e nối w với một đỉnh trong V: không tạo chu trình
3. V := V ∪ {w}; U := U ∪ {e}
4. Nếu U đủ N-1 cạnh thì dừng, ngược lại lặp từ bước 2.

Cây tối đại

Xác định cây tối đại



Xác định cây tối đại

- ✓ V = {F, A, B, E, C, D}
- ✓ U = {FA, AB, BE, FC, ED}

Cây tối đại ngắn nhất

Định nghĩa

Cho G=(X, E)

- ✓ G - ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG nếu mỗi cạnh của G được tương ứng với một số thực, nghĩa là có một ánh xạ như sau:

$$L: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$e \longmapsto L(e)$$

Định nghĩa

- ✓ TRỌNG LƯỢNG của một cây T của G bằng với tổng trọng lượng các cạnh trong cây:

$$L(T) = \sum_{(e \in T)} L(e)$$

- ✓ CÂY TỐI ĐẠI NGẮN NHẤT là cây tối đại có trọng lượng nhỏ nhất của G.
- ✓ Các tên gọi khác: cây khung bé nhất, cây bao trùm nhỏ nhất, cây phủ bé nhất

Cây tối đại ngắn nhất

Ứng dụng

- ✓ **Bài toán xây dựng hệ thống đường sắt**

  Cần xây dựng hệ thống đường sắt nối n thành phố sao cho khách hàng có thể đi bất cứ một thành phố nào đến bất kỳ một trong số các thành phố còn lại. Mặt khác, đòi hỏi chi phí để xây dựng hệ thống đường sắt là nhỏ nhất.

Ứng dụng

- ✓ **Bài toán nối mạng máy tính**

  Cần nối mạng một hệ thống gồm n máy vi tính. Biết chi phí nối máy i với máy j là c[i,j] (chi phí phụ thuộc vào độ dài cáp). Hãy tìm cách nối mạng sao cho tổng chi phí nối mạng là bé nhất.

Cây tối đại ngắn nhất

Chú ý

- Trong các thuật toán tìm cây tối đại ngắn nhất chúng ta có thể bỏ đi
  - ✓ các khuyên;
  - ✓ hướng các cạnh;
  - ✓ đối với các cạnh song song thì có thể bỏ đi và chỉ để lại một cạnh trọng lượng nhỏ nhất trong chúng.

Nhắc lại

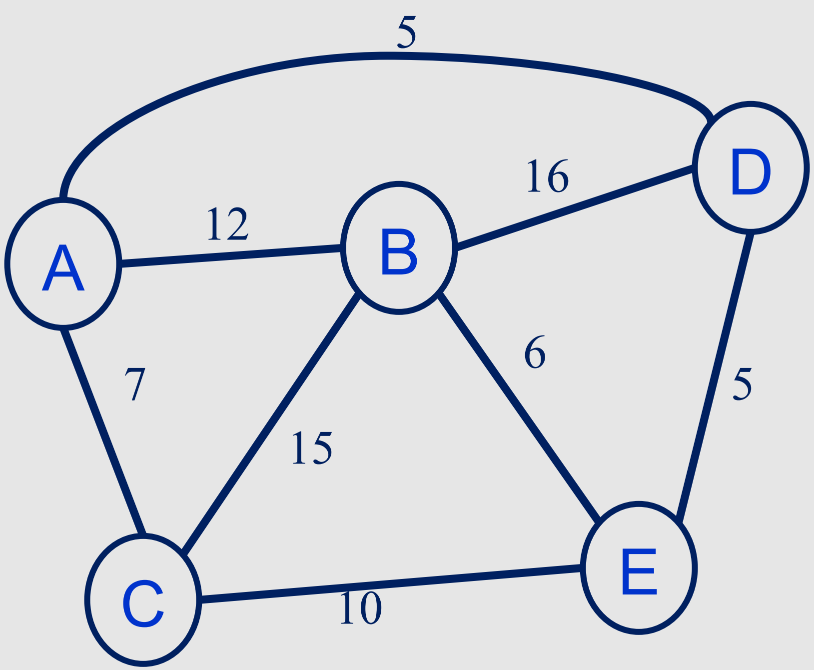
✓ MA TRẬN TRỌNG SỐ:

$\mathbf{L}_{\mathbf{N}\mathbf{x}\mathbf{N}}$:

- L_{ij} = trọng lượng cạnh nhỏ nhất nối i đến j (nếu có)
- $L_{ij} = \infty$ nếu không có cạnh nối i đến j

Cây tối đại ngắn nhất

Ví dụ



Ma trận trọng số

$$
\begin{pmatrix}
\infty & 12 & 7 & 5 & \infty \\
12 & \infty & 15 & 16 & 6 \\
7 & 15 & \infty & \infty & 10 \\
5 & 16 & \infty & \infty & 5 \\
\infty & 6 & 10 & 5 & \infty
\end{pmatrix}
$$

Xác định cây tối đại ngắn nhất

Tiếp cạnh truyền thống

- ✓ Liệt kê tất cả các cây khung của G
- ✓ TÍNH TRỌNG LƯỢNG của mỗi cây tối đại của G
- ✓ Chọn cây tối đại có trọng lượng bé nhất

Tiếp cạnh truyền thống

- ✓ **Số cây khung của đồ thị đầy đủ K_n là n^{n-2}**

Cây tối đại ngắn nhất

KRUSKAL

Input: G=(X, E) liên thông, X gồm N đỉnh

Output: cây tối đại ngắn nhất T=(V, U) của G

KRUSKAL

1. Sắp xếp các cạnh trong G tăng dần theo trọng lượng; khởi tạo T := ∅.
2. Lần lượt lấy từng cạnh e thuộc danh sách đã sắp xếp. Nếu T+{e} không chứa chu trình thì kết nạp e vào T:

   T := T+{e}.
3. Nếu T đủ N-1 cạnh thì dừng; ngược lại, lặp bước 2.

Cây tối đại ngắn nhất

KRUSKAL

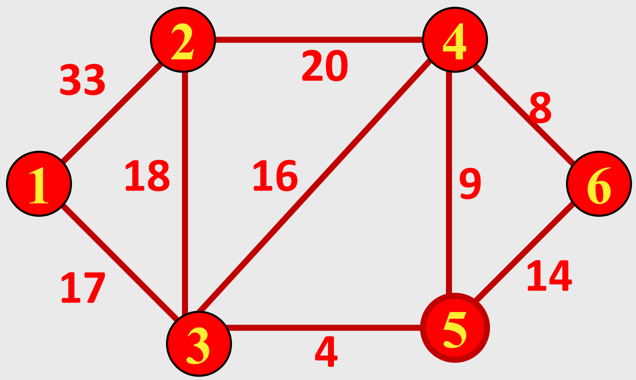
Input: G=(X, E) liên thông, X gồm N đỉnh

Output: cây tối đại ngắn nhất T=(V, U) của G

Mã giả

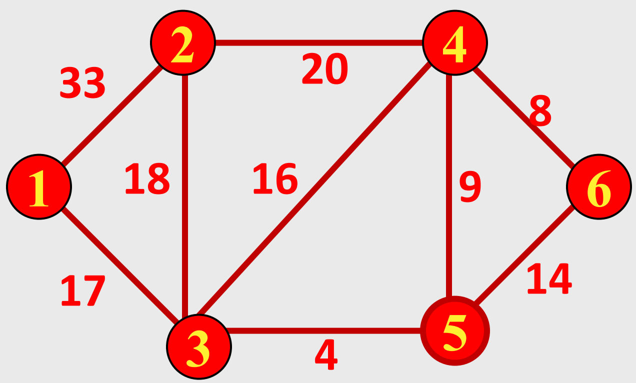
```
KRUSKAL(...){
    T = Θ;
    while(|T| < n-1 && E!= Θ) {
        E = E \{e}
        if(T hợp {e} không chu trình)
          T = T hợp {e};
    }
    if((|T| < n-1 ) <Đồ thị không liên thông>
}
```

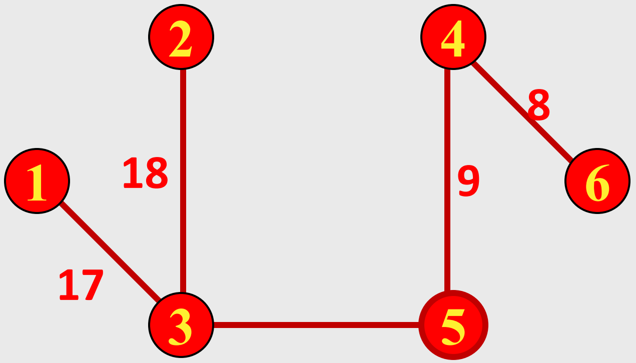
Cây tối đại ngắn nhất



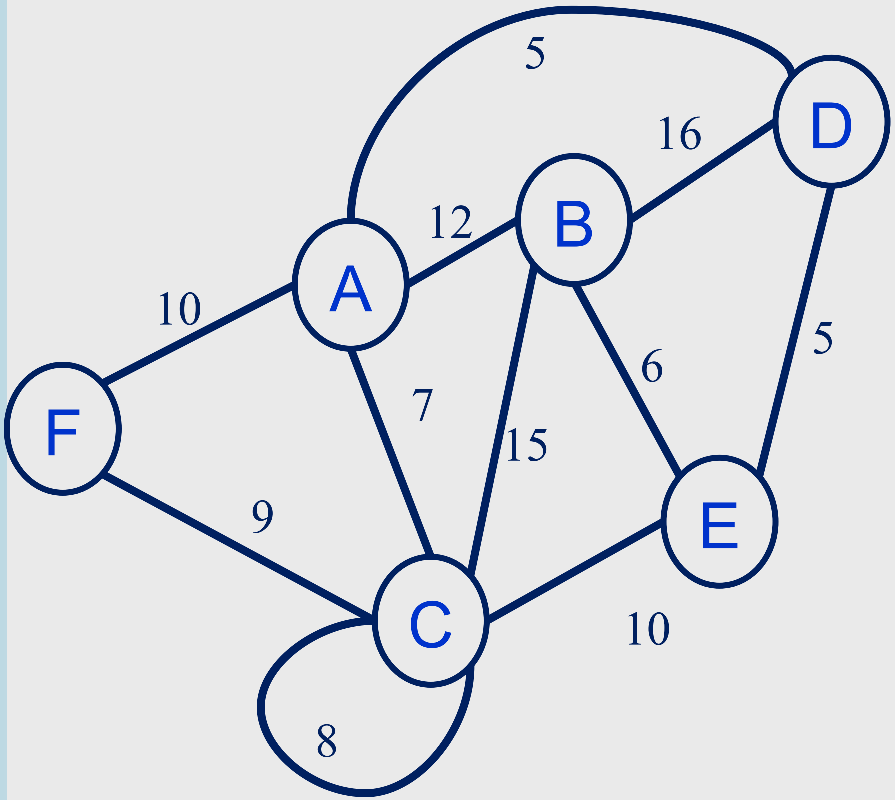
Trọng số	Cạnh	
4	(3,5)	Chọn
8	(4,6)	Chọn
9	(4,5)	Chọn
14	(5,6)	Không
16	(3,4)	Không
17	(1,3)	Chọn
18	(2,3)	Chọn. Dừng vì đã đủ cạnh.
20	(2,4)	
33	(1,2)	

Cây tối đại ngắn nhất



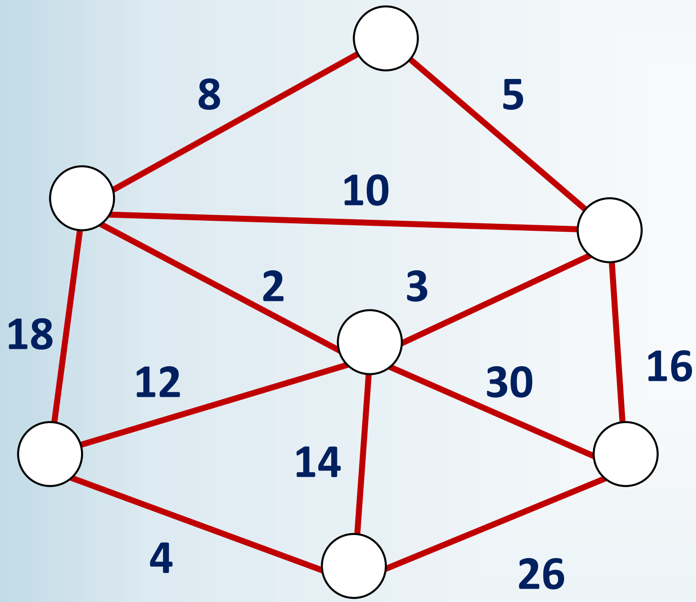


Cây tối đại ngắn nhất



- ✓ E = {AD, DE, EB, AC, CC, FC, AF, CE, AB, BC, DB}
- ✓ Trọng lượng: 32

Cây tối đại ngắn nhất



- ✓ E = ?
- ✓ Trọng lượng = ?

Cây tối đại ngắn nhất

Nhược điểm thuật toán

- ✓ Thuật toán Kruskal làm việc kém hiệu quả đối với những đồ thị dày.
- ✓ Đồ thị có số cạnh $m \approx n(n-1)/2$.

Hướng tiếp cạnh

- ✓ Sử dụng thuật toán Prim

Cây tối đại ngắn nhất

Prim

Input:

G=(X, E) – liên thông, X gồm N đỉnh

Output:

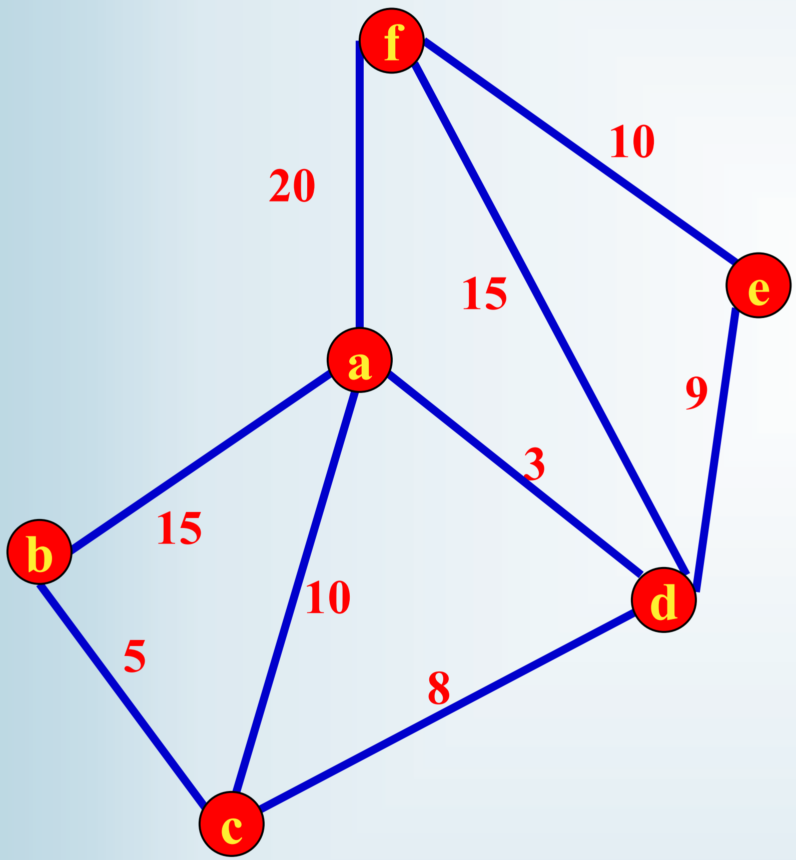
Cây tối đại ngắn nhất

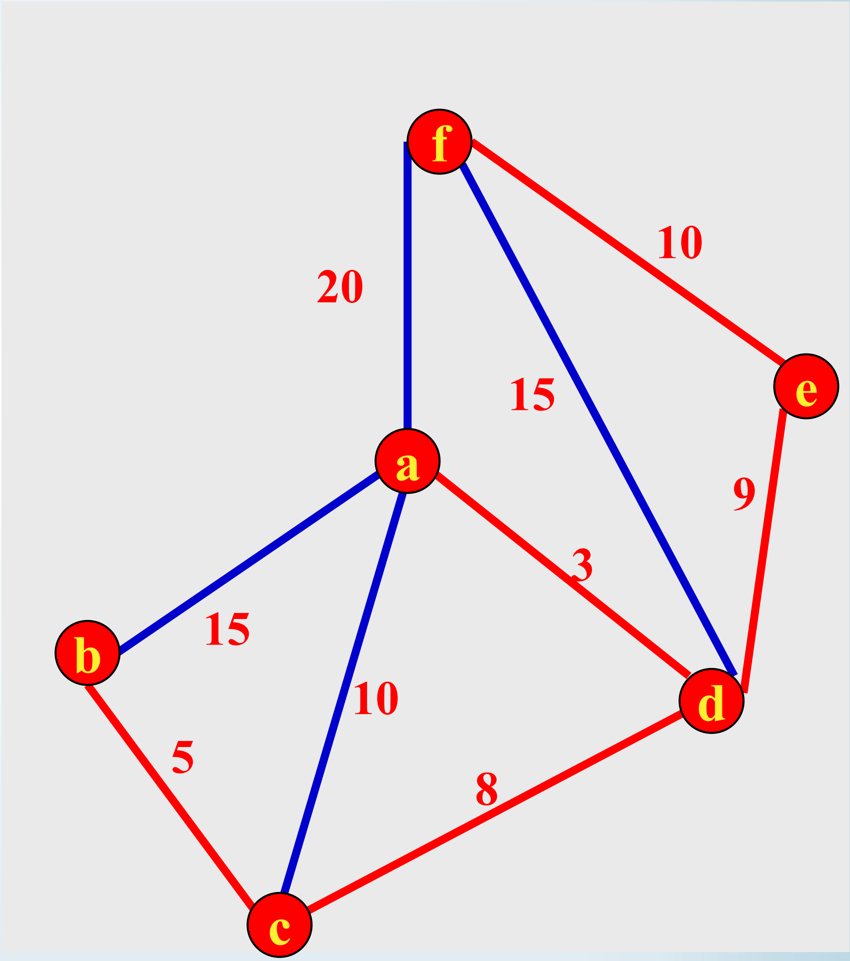
T=(V, U) của G

Prim

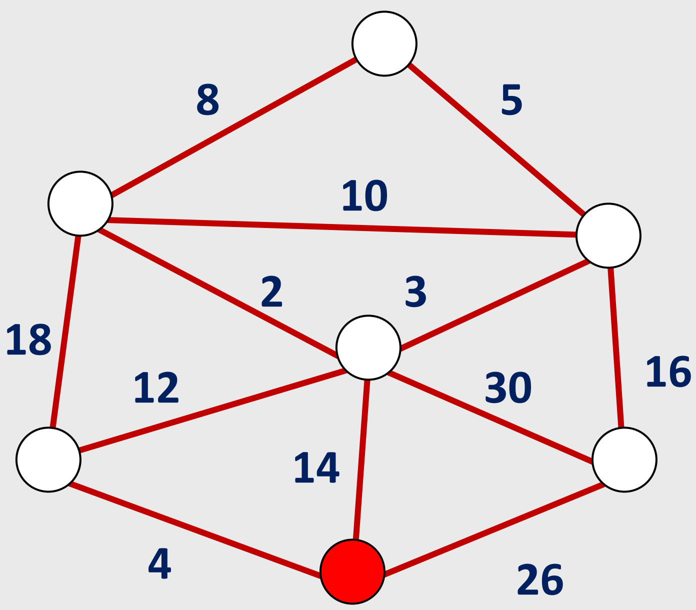
1. Chọn tùy ý $v \in X$ và khởi tạo $V := \{ v \}$; $U := \varnothing$;
2. Chọn cạnh e có trọng lượng nhỏ nhất trong các cạnh (w, v) mà $w \in X \setminus V$ và $v \in V$: sao cho không tạo chu trình
3. $V := V \cup \{w\}$; $U := U \cup \{e\}$
4. Nếu U đủ N-1 cạnh thì dừng, ngược lại lặp từ bước 2.

Cây tối đại ngắn nhất





Cây tối đại ngắn nhất

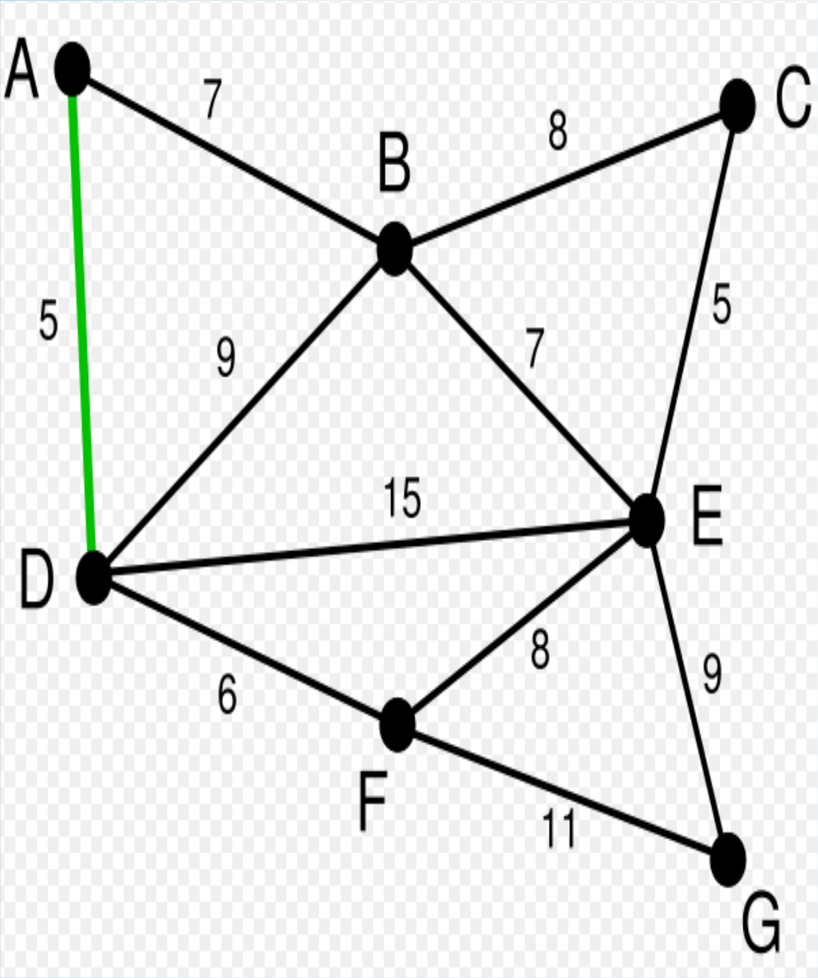


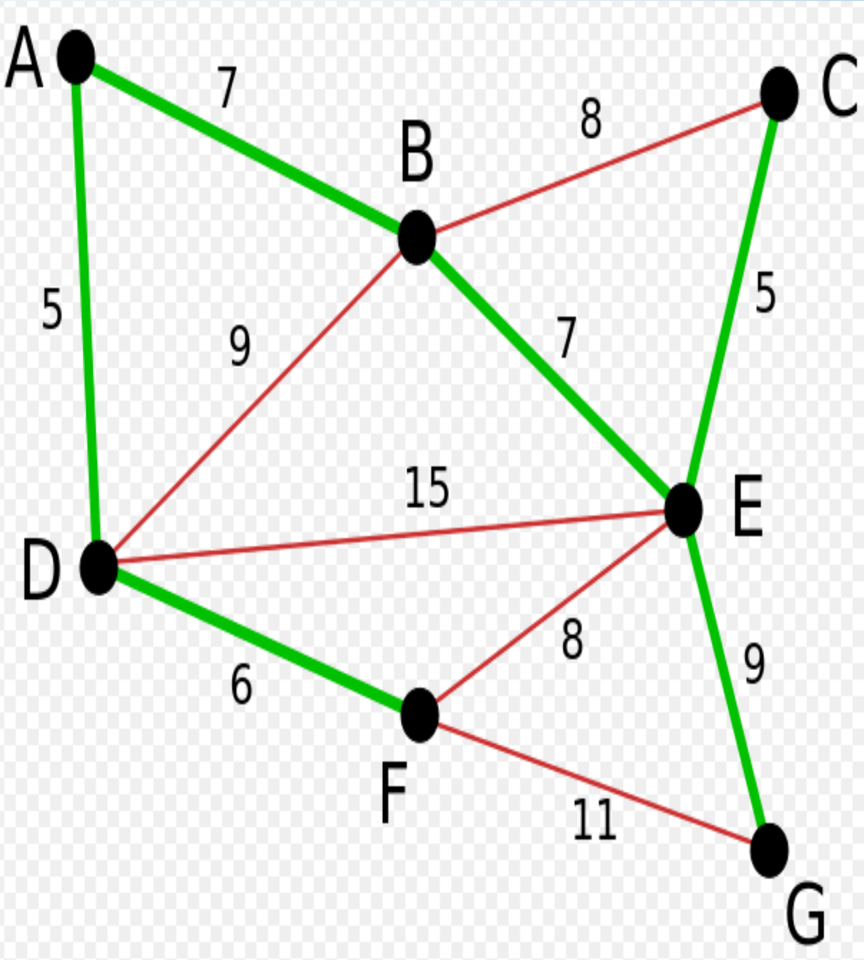
- ✓ E = ?
- ✓ Trọng lượng = ?

Bài tập

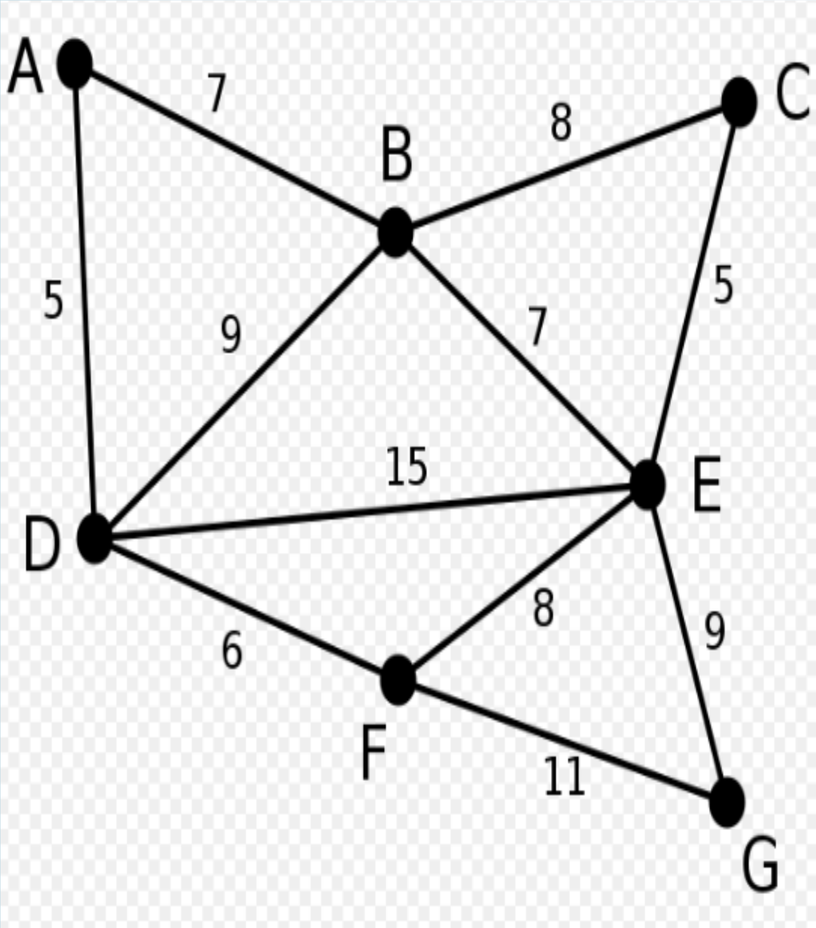
1. Chứng minh các định lý tương đương
2. Xác định số lượng cây tối đại của đồ thị dạng CÂY, CHU TRÌNH SƠ CẤP, ĐỦ, …
3. Chứng minh tính đúng đắn của các giải thuật PRIM, KRUSKAL
4. Lập trình đối với Prim và Kruskal

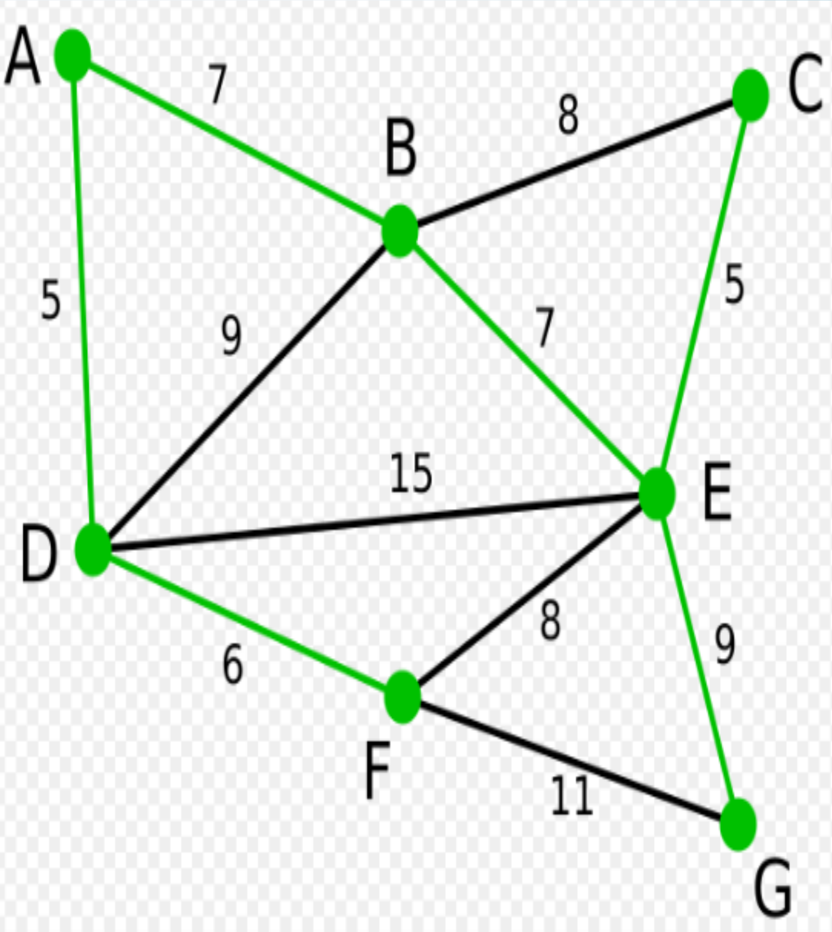
Bài tập - Kruskal





Bài tập - Prim





Tóm lại

- ✓ Các khái niệm và tính chất về cây và cây tối đại
- ✓ Thuật toán Kruskal
- ✓ Thuật toán Prim
- ✓ Khái niệm và tính chất về cây có gốc

What NEXT?

BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN ĐỒ THỊ