

## Chương 4

# Đại số Boole

- ❖ Các khái niệm
- ❖ Dạng tuyển chuẩn tắc
- ❖ Tìm biểu thức tối thiểu

# 4.1. Các khái niệm

*Đại số Boole* là một hệ thống  $\langle B; +, \cdot, ^-, 0, 1 \rangle$ ,  
thỏa mãn :

1) Luật kết hợp (*Associative*)

$$\forall x, y, z \in B : \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

2) Luật giao hoán (*Commutative*)

$$\forall x, y \in B : \quad x + y = y + x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$

# 4.1. Các khái niệm

## 3) Luật đồng nhất (*Identity*)

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{B} : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{x}$$

## 4) Luật phân phối (*distributive*)

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})$$

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{z})$$

## 5) Luật bù (*Inverse/Complement*)

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{B}, \exists \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{B} : \mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Phần tử  $\bar{x}$  gọi là phần tử bù của  $x$ .

# 4.1. Các khái niệm

Suy ra các luật sau

6) *Luật lũy đẳng* (Idempotent)

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{B} : \mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{x} \text{ và } \mathbf{x}.\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

7) *Luật nuốt* (giới nội-Boundedness)

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{B} : \mathbf{1} + \mathbf{x} = \mathbf{1} \text{ và } \mathbf{0}.\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

8) *Luật hấp thụ* (Absorption)

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B} : \quad \mathbf{x} + \mathbf{x}.\mathbf{y} = \mathbf{x} \quad \text{và} \\ \mathbf{x}.\mathbf{(x + y)} = \mathbf{x}$$

# 4.1. Các khái niệm

9) Luật bù kép (*Involution*)

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{B}: \quad \overline{\overline{\mathbf{x}}} = \mathbf{x}$$

10) Luật De Morgan

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B}: \quad \overline{\mathbf{x} + \mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}} \quad \text{và} \\ \overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}$$

11) Luật 0-1

$$\overline{0} = 1 \quad \text{và} \quad \overline{1} = 0$$

## 4.1. Các khái niệm

*Tục biến* (*Literal*) là một biến hoặc bù của một biến, như  $x$ ,  $\bar{x}$ ,  $y$ , ...

*Hội sơ cấp* (*Fundamental Product*) là một hằng  $(0,1)$ , một tục biến hoặc tích của hai hoặc nhiều tục biến, trong đó không có tục biến của cùng một biến.

*Tuyển chuẩn tắc* là một biểu thức Boole gồm một hội sơ cấp hoặc tổng của các hội sơ cấp không chứa trong nhau.

## 4.1. Các khái niệm

*Tuyển chuẩn tắc đầy đủ* (*Complete/Full disjunctive normal form*):

Biểu thức  $E = E(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là *tuyển chuẩn tắc đầy đủ* nếu mỗi hội sơ cấp đều chứa tất cả  $n$  biến. Một hội sơ cấp chứa tất cả  $n$  biến được gọi là một *tiểu hạng* và có nhiều nhất  $2^n$  tiểu hạng  $n$  biến.

## 4.2. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc

*Bước 1.* Dùng luật De Morgan và luật bù kép để đưa tất cả các phép bù vào trong các cặp ngoặc đơn cho đến khi phép bù chỉ dùng cho các biến. Biểu thức chỉ gồm tổng và tích của các hội sơ cấp.

*Bước 2.* Dùng luật phân phối để biến đổi tiếp thành tổng các tích.

*Bước 3.* Dùng luật giao hoán, luật lũy đẳng, luật bù để biến đổi mỗi tích thành 0 hoặc hội sơ cấp.

*Bước 4.* Cuối cùng dùng luật hấp thụ và luật đồng nhất để biến đổi thành tuyển chuẩn tắc.



## 4.2. Tìm dạng tuyến chuẩn tắc

*Ví dụ.*  $E = \overline{\overline{xy}z} \overline{(\bar{x}+y)(x+z)}$

$$E = (\overline{\overline{xy}} + \bar{z}) (\overline{(\bar{x} + y)} + \overline{(x + z)})$$

$$E = (xy + \bar{z}) (\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z})$$

$$E = (xy + \bar{z}) (x\bar{y} + \bar{x}\bar{z})$$

$$E = xyx\bar{y} + xy\bar{x}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z}\bar{z}$$

$$E = 0 + 0 + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z}$$

## 4.3. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ

*Bước 1* Tìm hội sơ cấp P trong E không chứa biến x, nhân P cho  $(x + \bar{x})$ , xóa các hội sơ cấp lặp (vì  $(x + \bar{x}) = 1$  và  $P+P=P$ ).

*Bước 2* Lặp *bước 1* cho đến khi mọi hội sơ cấp P trong E đều là tiểu hạng, nghĩa là chứa đủ  $n$  biến

## 4.3. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ

*Ví dụ.*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{yz} + \mathbf{x}\bar{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}})\mathbf{yz} + \mathbf{x}\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{y}})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{xyz} + \bar{\mathbf{x}}\mathbf{yz} + \mathbf{xy}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{z}}$$

## 4.3. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ

*Ví dụ.*  $E(x,y,z) = xy+z$

$$E = xy(z+\bar{z}) + (x+\bar{x})z$$

$$E = xyz + xy\bar{z} + xz + \bar{x}z$$

$$E = xyz + xy\bar{z} + xz(y+\bar{y}) + \bar{x}z(y+\bar{y})$$

$$E = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$$

## 4.3. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ

$$E = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$$

Có bảng chân trị.

x	y	z	E(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

## 4.3. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ

Các giá trị 1 của E ứng với 5 tiểu hạng.  
Ngược lại, cho hàm Boole bằng bảng chân trị thì dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ là các tiểu hạng ứng với giá trị 1 trong bảng chân trị.

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

### 4.4.1. Mã Gray

Mã Gray là  $2^n$  xâu bit độ dài  $n$  được sắp xếp sao cho hai xâu kề nhau chỉ khác nhau đúng một bit, kể cả hai xâu đầu và cuối. Phương pháp liệt kê, theo thứ tự từ điển, các xâu bit độ dài  $n$  không có được tính chất này. Mỗi tục biến được biểu diễn bằng một bit: 1 ứng với biến và 0 ứng với bù của biến. Mục đích là hai tiểu hạng kề nhau (ngang/dọc) khác nhau đúng một tục biến có thể rút gọn được biến đó:  $xE + \bar{x}E = E$ .

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

Cách phát sinh như sau:

$2^n$  xâu bit độ dài  $n$  được tạo ra từ  $2^{n-1}$  xâu bit độ dài  $n-1$  bằng cách cho phản chiếu  $2^{n-1}$  xâu bit độ dài  $n-1$  để có đủ  $2^n$  xâu độ dài  $n-1$ . Sau đó, nửa đầu thêm 1 và nửa sau thêm 0. Được đủ  $2^n$  xâu độ dài  $n$  có tính chất này.

$n=1$ :  $2^1=2$  xâu độ dài 1 là: 1, 0.



# 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

n=1

1
0

n=2

1	1
1	0
0	0
0	1

n=3

1	1	1
1	1	0
1	0	0
1	0	1
0	0	1
0	0	0
0	1	0
0	1	1

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

### 4.4.2. Bản đồ Karnaugh

Bản đồ Karnaugh của biểu thức Boole bậc  $n$  gồm  $2^n$  ô, mỗi ô ứng với một tiểu hạng, được sắp xếp sao cho hai ô kề nhau chỉ khác nhau đúng một tục biến, *dùng mã Gray*. Mỗi tiểu hạng được đánh số 1 vào ô tương ứng.

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

Để tối thiểu hóa biểu thức Boole cần tìm *số ít nhất các hình chữ nhật lớn nhất* dạng  $1 \times 2$ ,  $2 \times 1$ ,  $1 \times 4$ ,  $4 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $2 \times 4$ ,  $4 \times 2$ , ... phủ được tất cả các ô số 1 kề nhau.

Mỗi hình chữ nhật là một hội sơ cấp của biểu thức tối thiểu.

# 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

n=2

x

$\bar{y}$

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$n=3$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	$xyz$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$xy$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	$xyz$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$xy$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	$xyz$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$$y\bar{z}$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	$xyz$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$



## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

XZ

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	$xyz$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$$\bar{x}$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	$xyz$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

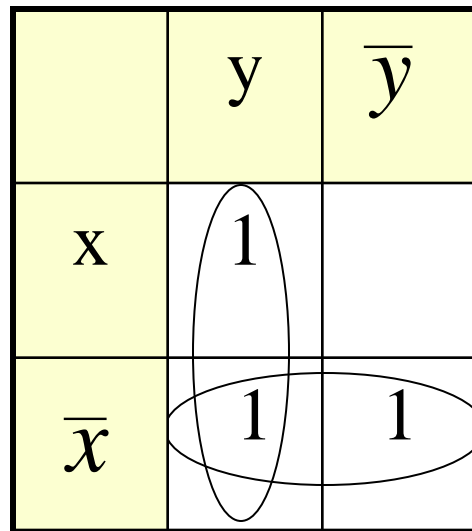
$Z$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	$xyz$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$$E = xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$$

	$y$	$\bar{y}$
$x$	1	
$\bar{x}$	1	1



Biểu thức tối thiểu  $E = \bar{x} + y$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$$E = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	1	1		
$\bar{x}$		1		1

Biểu thức tối thiểu:  $E = xy + y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$$E = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	1	1		1
$\bar{x}$	1			1

Biểu thức tối thiểu:  $E = xy + z$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$$E = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	1	1		
$\bar{x}$		1	1	1

Biểu thức tối thiểu:  $E = xy + \bar{x}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}$

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$$E = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	1	1		
$\bar{x}$		1	1	1

Biểu thức khác:  $E = xy + y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}$



## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$$E = w\bar{x} + wxy + \bar{w}\bar{x}\bar{y} + \bar{w}xy\bar{z}$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$wx$	1	1		
$w\bar{x}$	1	1	1	1
$\bar{w}\bar{x}$			1	1
$\bar{w}x$		1		

## 4.4. Tối thiểu hóa biểu thức Boole

$$E = wy + \bar{x}\bar{y} + xy\bar{z}$$

Là biểu thức tối thiểu