BÀI 9

BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRÊN ĐỒ THỊ

Giáo viên: TS. Nguyễn Văn Hiệu
Email: nvhieuqt@dut.udn.vn

Nội dung

- Giới thiệu
- Bài toán
- Thuật toán Dijkstra
- Thuật toán Bellman-Ford
- Thuật toán Floyd – Warshall
- Ứng dụng

Giới thiệu

- **Đồ thị trọng số** (weighted graph) là đồ thị có gắn **một số** (số nguyên hay số thực) cho mỗi cạnh hoặc mỗi cung
- Số nguyên hay số thực cho mỗi cạnh:
  - ✓ cự ly,
  - ✓ thời gian
  - ✓ chi phí,
  - ✓ tốc độ.

Bài toán

- Cho đồ thị trọng số G =(V,E,W). Ký hiệu w(u,v) là trọng số của cạnh (u,v)
- Độ dài đường đi

$$d = v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{n-1} \to v_n$$

là tổng trọng số

$$L(d) = \sum_{i=1}^{n-1} w(v_i, v_{i+1})$$

Bài toán

Bài toán 1:Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a và đỉnh z

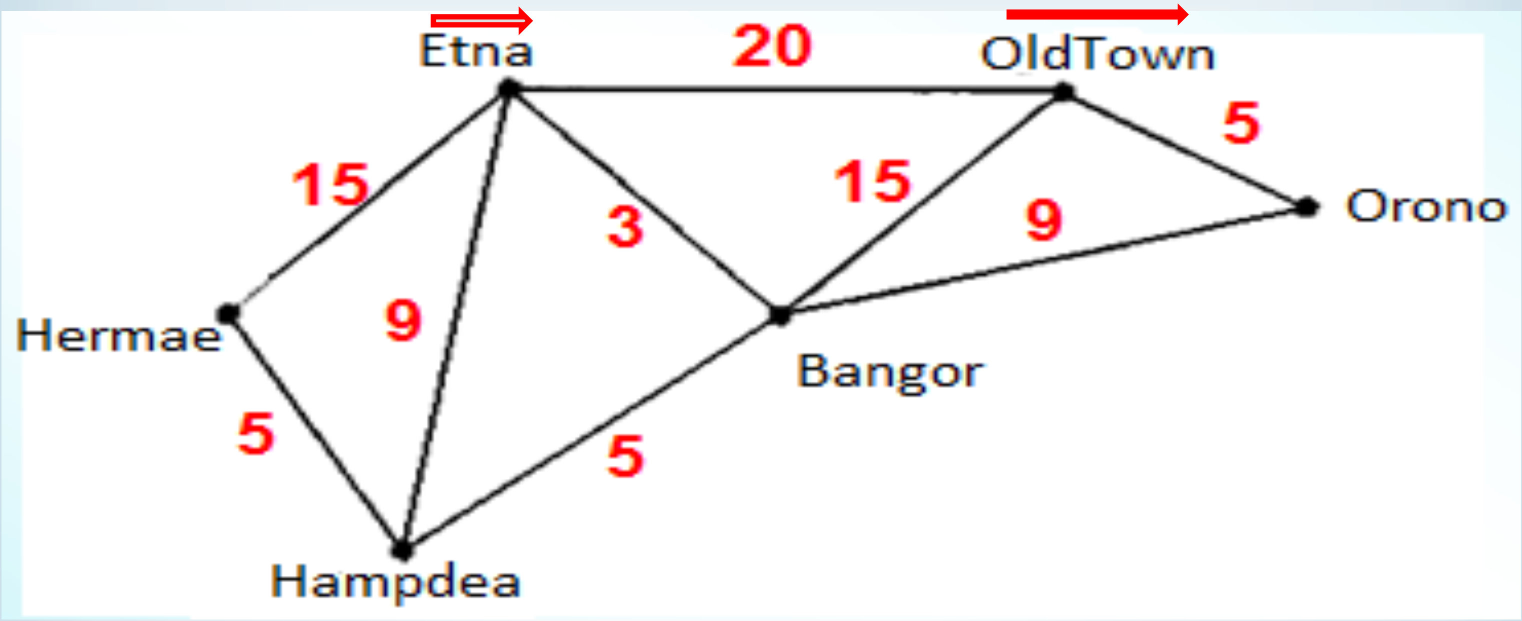
Bài toán 2: Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến tất cả các đỉnh còn lại

Bài toán 3: Tìm đường đi ngắn nhất giữa mọi cặp đỉnh

Bài toán

- Để chắc chắn tìm được đường đi ngắn nhất thì điều kiện
  - Phải tồn tại đường đi
    - Đồ thị vô hướng liên thông, đồ thị có hướng liên thông mạnh
  - Không tồn tại chu trình âm:
    - Đồ thị vô hướng không tồn tại cạnh âm

Bài toán



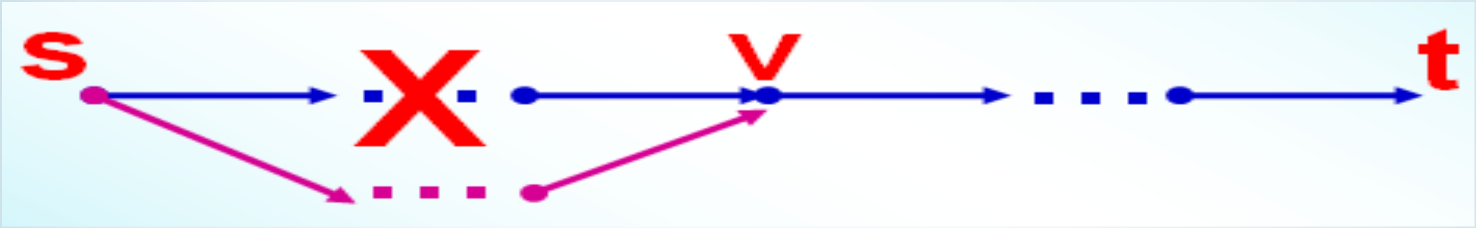
- Đường đi ngắn nhất từ Etna đến Oldtown là:

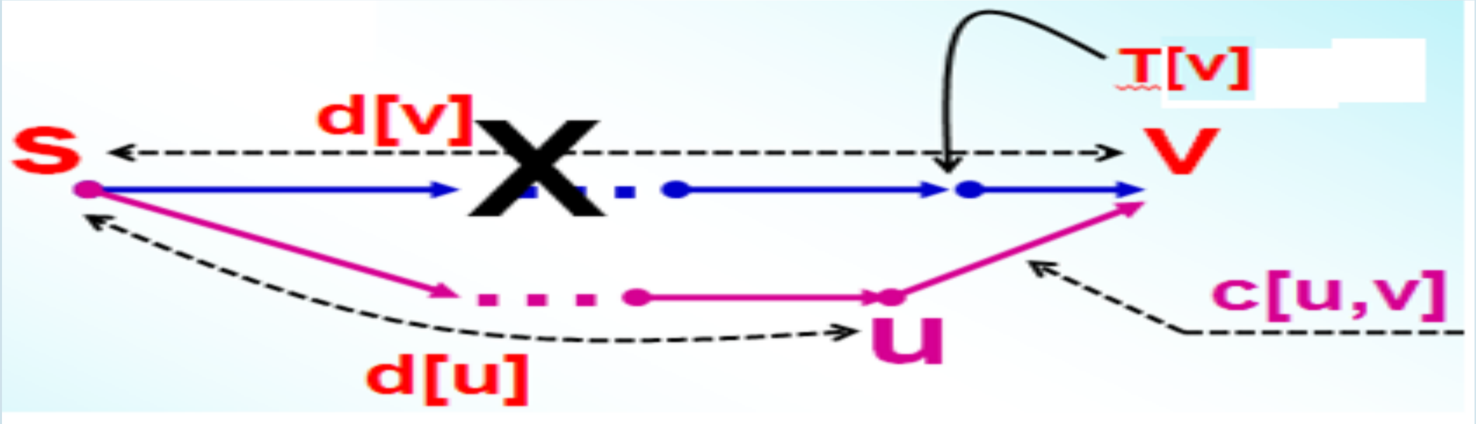
  Etna – Bangor – Orono – OldTown

- Đường đi ngắn nhất từ Hermae đến Etna là:

  Hermae – Hampdea – Bangor - Etna

Bài toán






```
If ( d[v] > d[u] + c[u,v])  {
            d[v] = d[u] + c[u,v];
            T[v] = u;
}
```

Thuật toán Dijkstra

- Mục tiêu: Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z
- Điều kiện: Trọng số của cạnh w(u,v)>0 với mọi cạnh (u,v)
- L(u) - chiều dài ngắn nhất từ a đến u.
- Thuật toán kết thúc thì L(z) – chiều dài ngắn nhất từ a đến z.

Thuật toán Dijkstra

- Input:

  $G = (V,E,W)$,

  $w(i,j)>0, \forall\, (i, j) \in E$,

  $a, z \in V$,

- Output:

  $L(z)$,

  đường đi từ a đến z (nếu có)

Thuật toán Dijkstra

Step 1

L(a)=0, L(x)=∞, $\forall x \neq a$,

T=V, P(x) =∅.

Step 2

$$m = \min \{L(u), u \in T\}$$

- Nếu m=+∞ $\rightarrow KT, \nexists$ đường đi từ a đến z
- Nếu m<+∞ →
  - chọn $v \in T: L(v) = m$,
  - T = T- {v}
  - step 3

Thuật toán Dijkstra

<u>Step 3</u>

- Nếu v = z $\rightarrow$ *KT* và L(z), P(z)

  $(z_1 = P(z), z_2 = P(z_1), \ldots, z_n = P(z_{n-1}), a = P(z_n))$
- Nếu v $\neq$ z $\rightarrow$ Step 4

<u>Step 4:</u>

$$\forall u \in T, kề\ (kề\ sau)\ v$$

$$Nếu\ L(u) > L(v) + w(v,u), thì$$

$$L(u) = L(v) + w(v,u)$$

P(u) = v

$\rightarrow$ Step 2.

Thuật toán Dijkstra

G – đồ thị liên thông có trọng số với n đỉnh

f(n) – số lần thuật toán Dijkstra khảo sát một cạnh của G:

f(n) = 0(n*n)

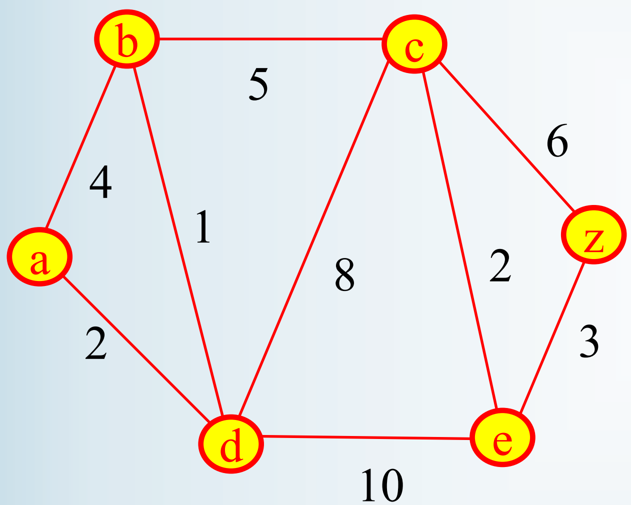
Thuật toán Dijkstra là tối ưu

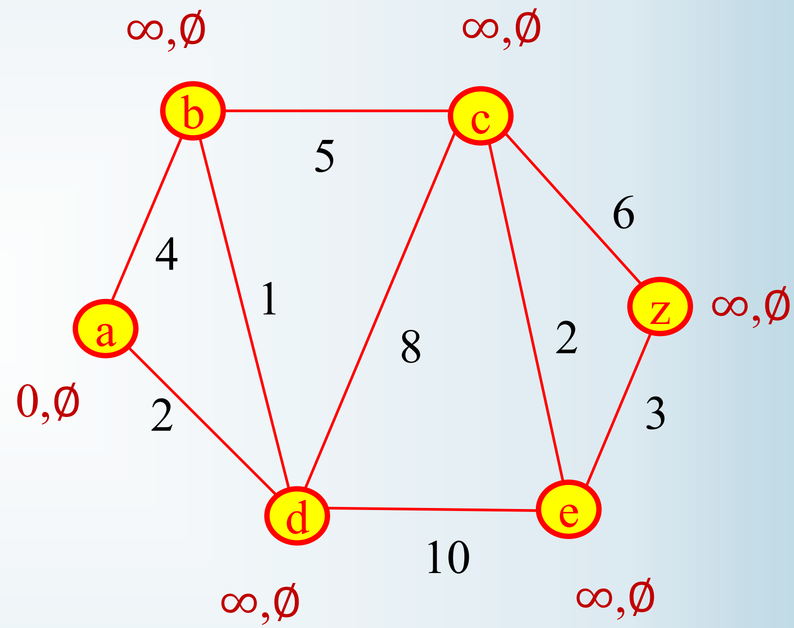
K_n - có số cạnh là n(n-1)/2

Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z phải khảo sát qua mỗi cạnh một lần.

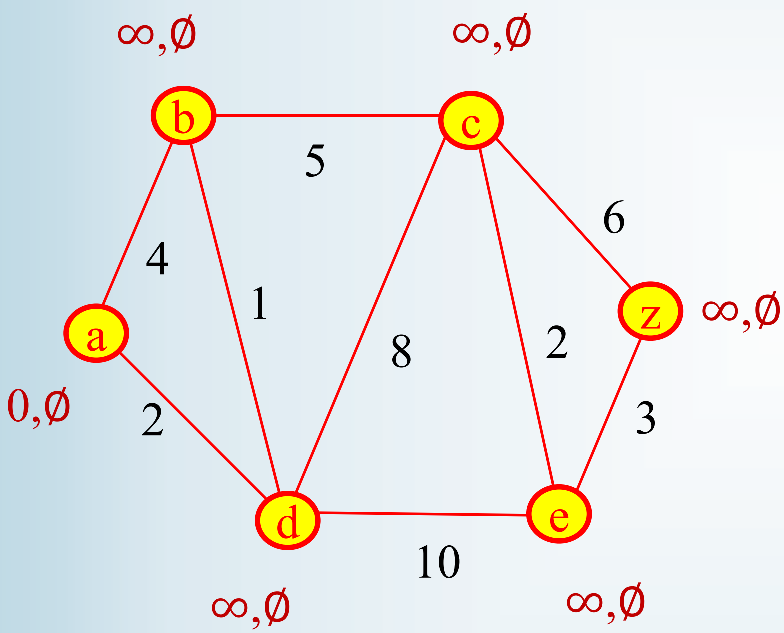
Thuật giải khảo sát ít nhất 0(n*n)

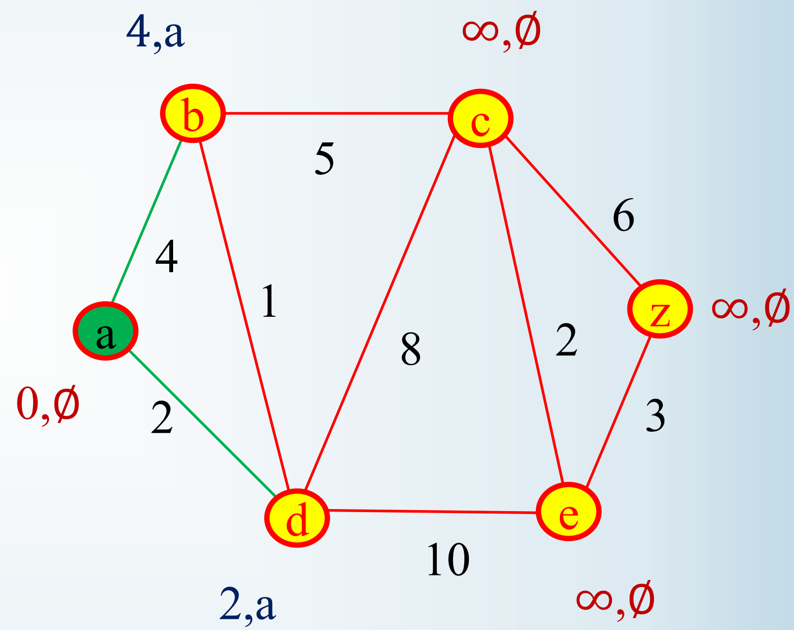
Ví dụ thuật toán Dijkstra (1)



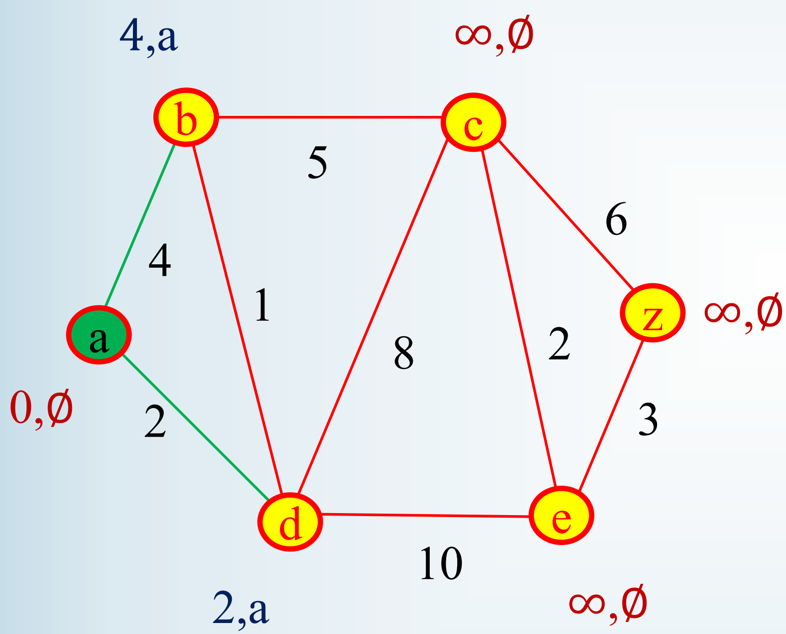


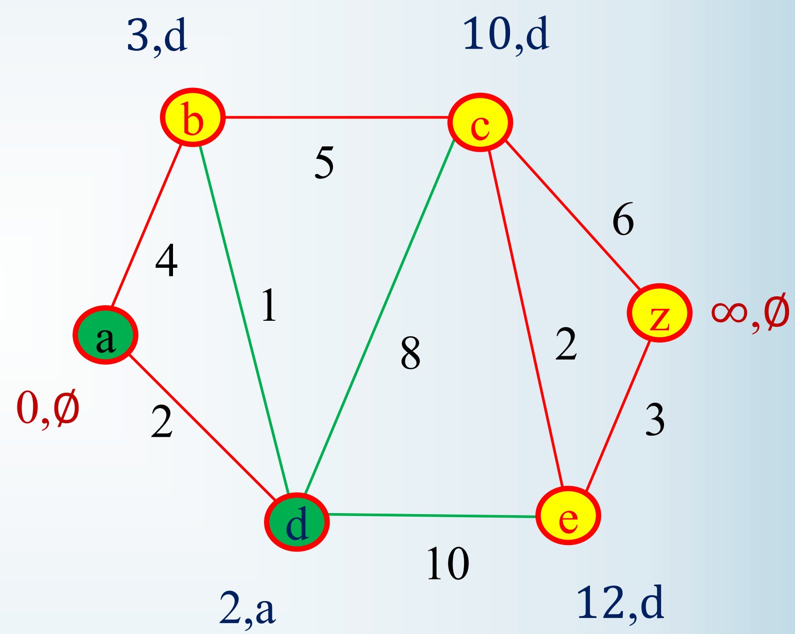
Ví dụ thuật toán Dijkstra(2)



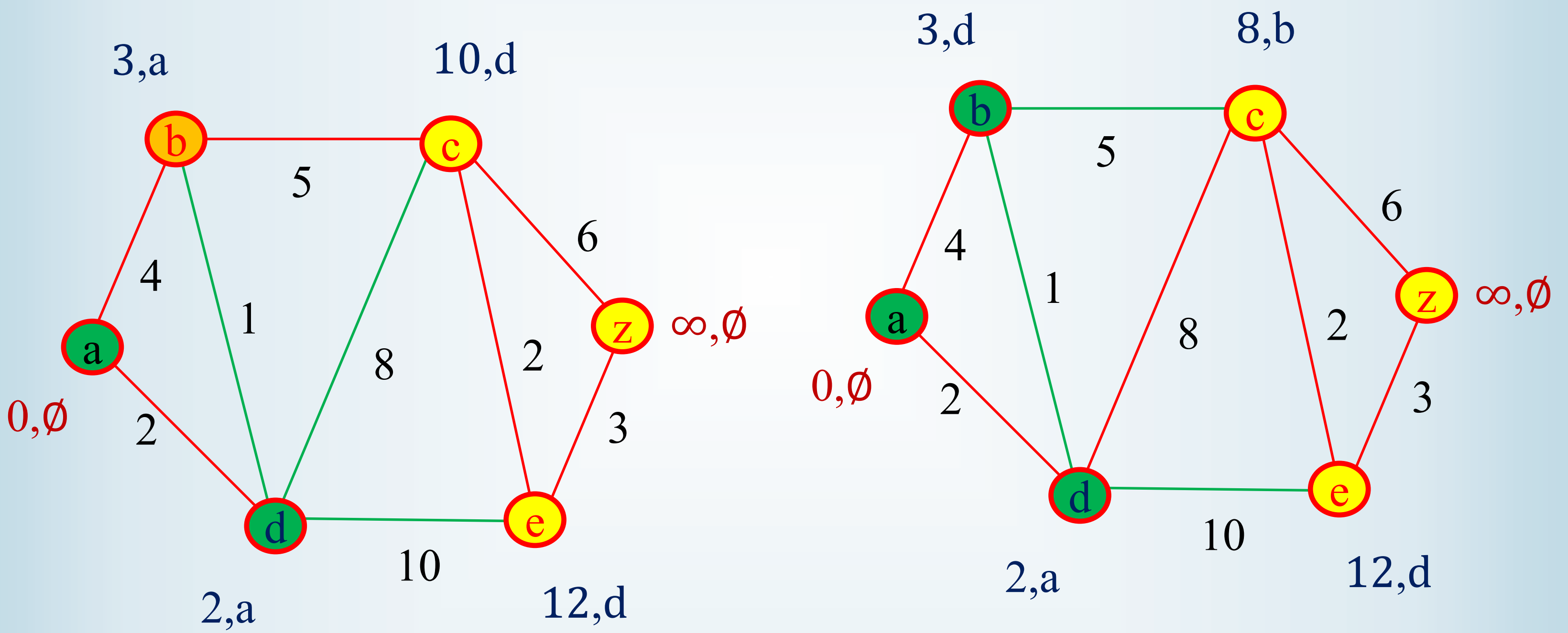


Ví dụ thuật toán Dijkstra (3)

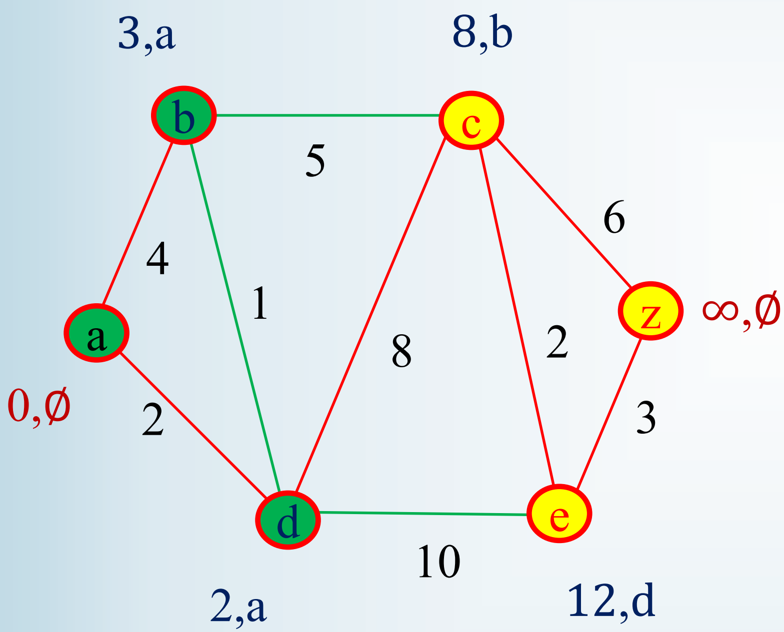


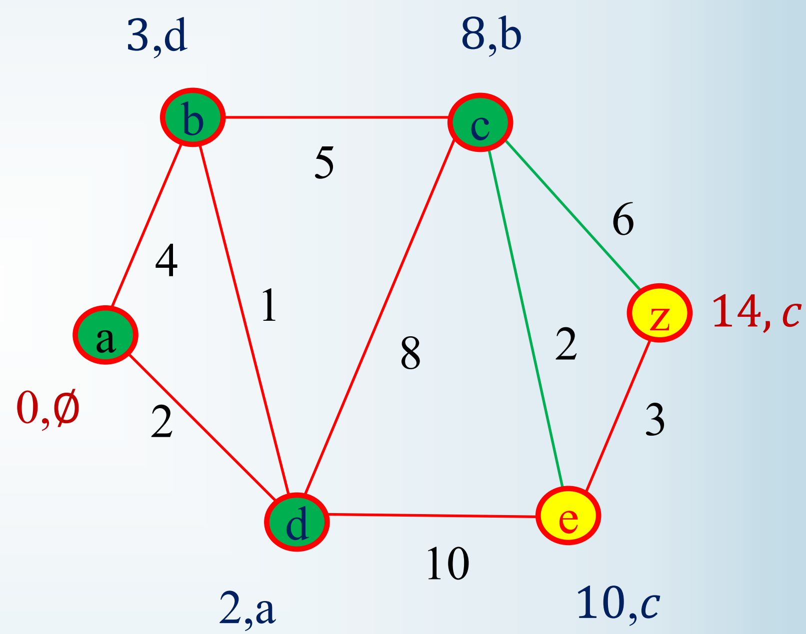


Ví dụ thuật toán Dijkstra (4)

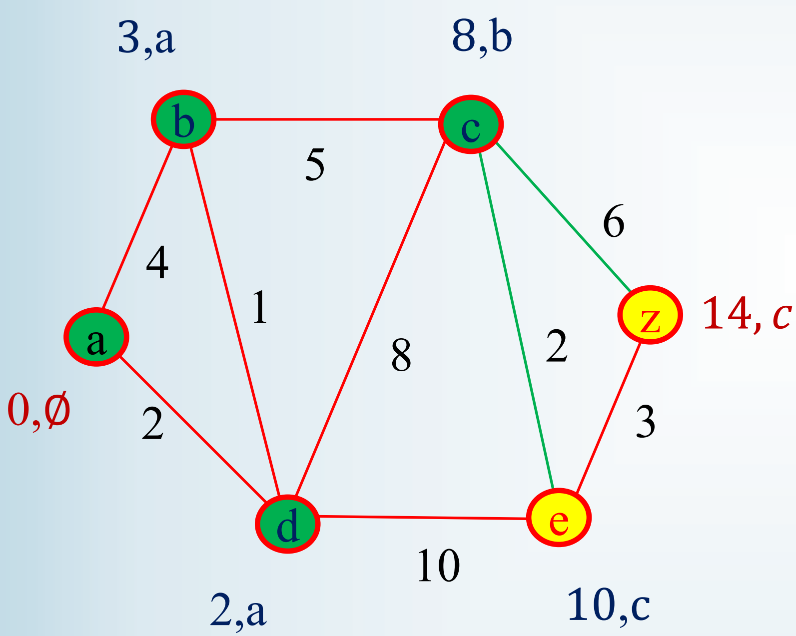


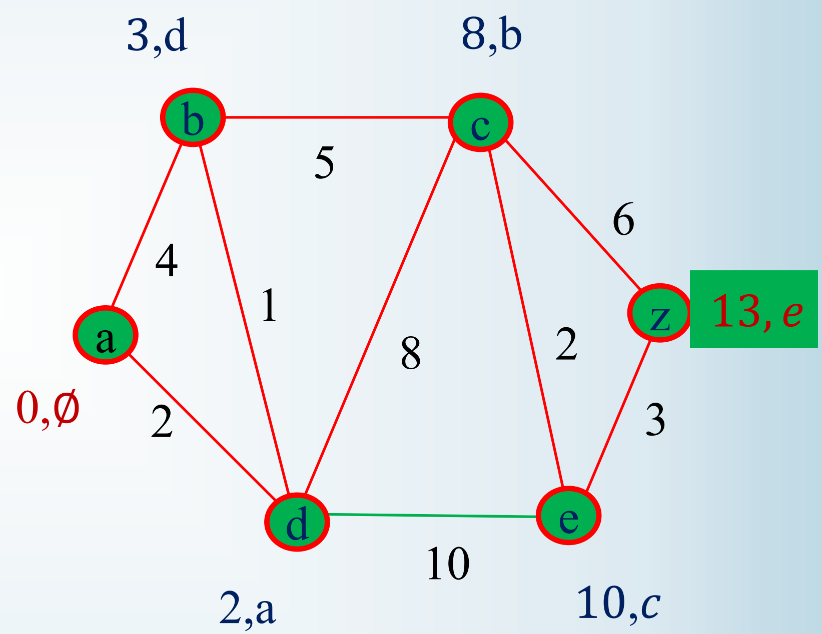
Ví dụ thuật toán Dijkstra(5)





Ví dụ thuật toán Dijkstra (6)

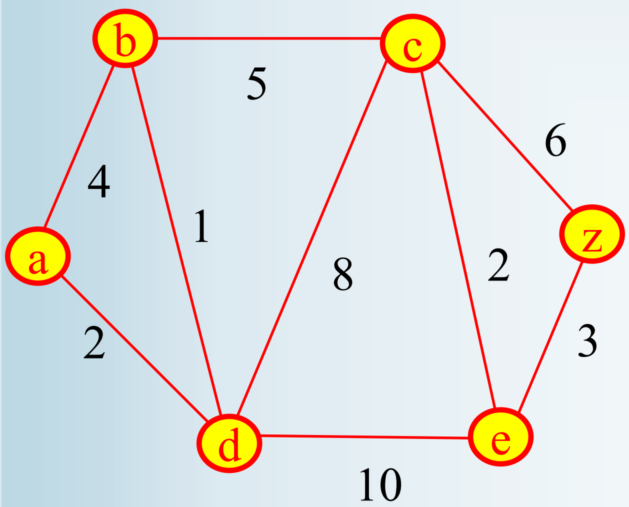




Phương pháp lập bảng ghi nhãn

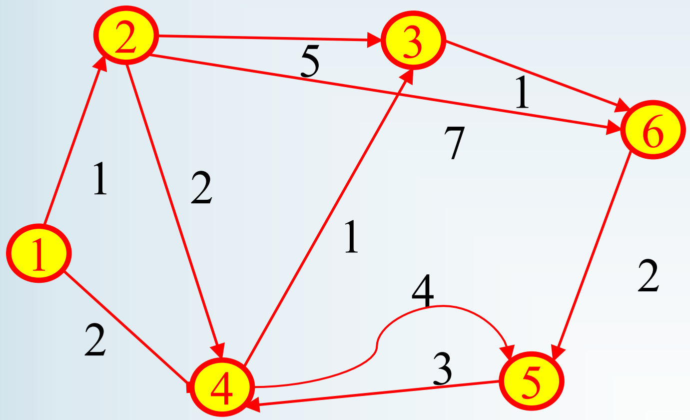
- Bản chất là thuât toán Dijkstra
- Các cột tương ứng với các đỉnh
- Các hàng tương ứng với số lần tính nhãn (bước 4)
- Các nhãn "gạch dưới" tương ứng với nhãn nhỏ nhất ở (bước 2)
- Số đỉnh được cố định chính là số đỉnh loại ra (bước 2)

Ví dụ lập bảng tính nhãn (1)



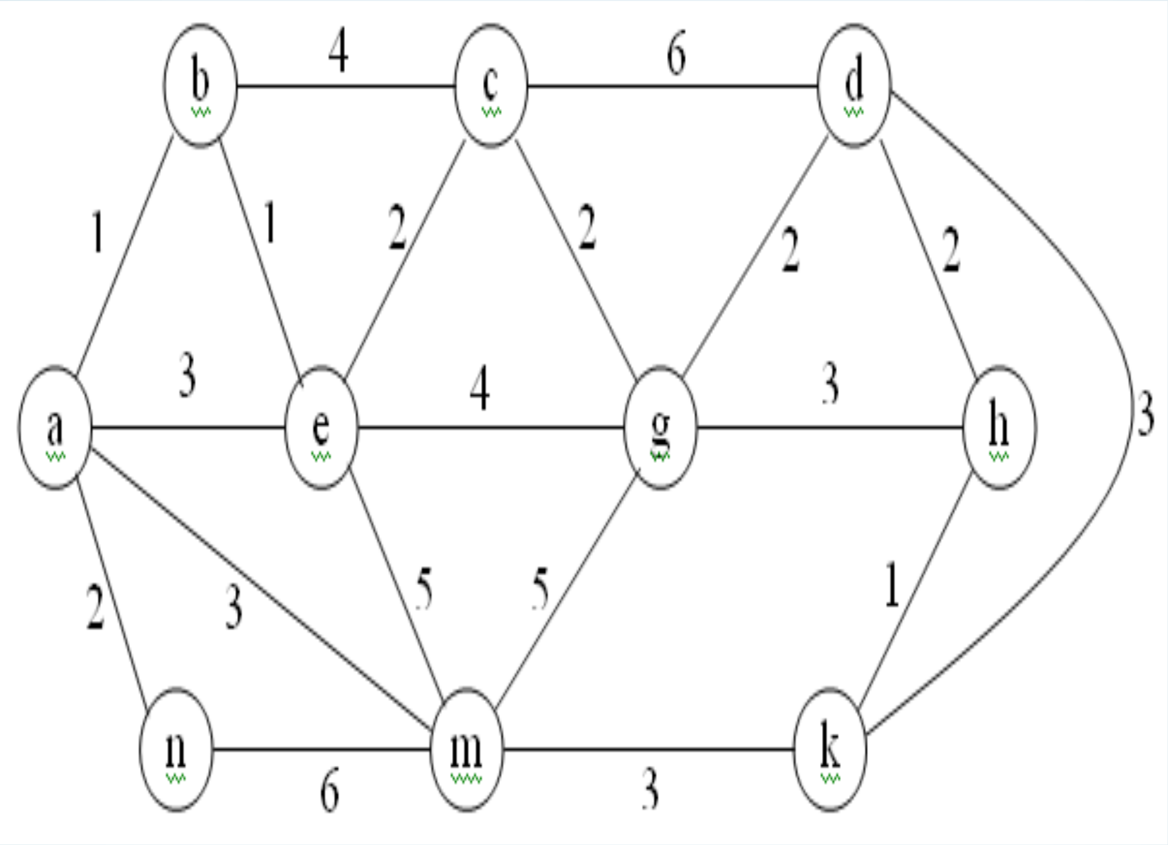
	a	b	c	d	e	z	
	$\mathbf{0}, \emptyset$	$\infty, \emptyset$	$\infty, \emptyset$	$\infty, \emptyset$	$\infty, \emptyset$	$\infty, \emptyset$	***a***
		$\mathbf{4}, \boldsymbol{a}$	$\infty, \emptyset$	$\mathbf{2}, \boldsymbol{a}$	$\infty, \emptyset$	$\infty, \emptyset$	***d***
	-	***3,d***	***10,d***	-	***12,d***	$\infty, \emptyset$	***b***
	-	-	***8,b***	-	***12,d***	$\infty, \emptyset$	***c***
	-	-	-	-	***10.c***	***14,c***	***e***
	-	-	-	-	-	***13,e***	***z***
	-	-	-	-	-	-	

Ví dụ lập bảng tính nhãn (2)



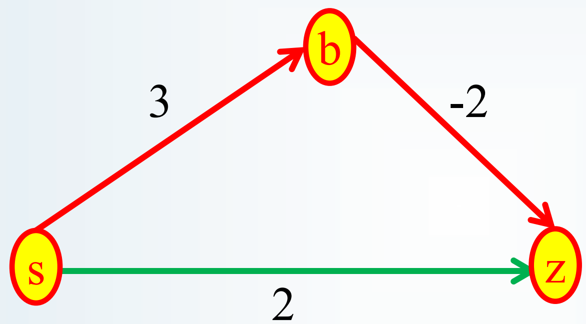
k	1	2	3	4	5	6
	0,o	oo,o	oo,o	oo,o	oo,o	oo,o
1	-	1,1	oo,o	2,1	oo,o	oo,o
2		-	6,2	2,1	oo,o	8,2
3			3,4	-	6,4	8,2
4			-		6,4	4,3
					6,4	-

Ví dụ lập bảng tính nhãn (3)



Thuật toán Bellman-Ford

- Dijkstra cho kết quả sai nếu đồ thị có trọng số âm



- Bellman-Ford khắc phục kết quả trên
- Belman-Ford giúp xác định đồ thị có chu trình âm hay không

Thuật toán Bellman-Ford

- Input:

  $G = (V,E,W)$,

  $s \in V$,

- Output:

  $L(v)$,

  $P(v)$ – đỉnh kề trước v (s---v)

  Đồ thị có chu trình âm qua đỉnh khả nối với s

Thuật toán Bellman-Ford

<u>Step 1</u>

$L(s)=0$, $L(v)=+\infty, \forall v \neq s$,

$P(v) = \text{nil}, \forall v \in V$,

<u>Step 2</u>

```
For i:=1 to n do // |V| = n
    For (u,v) ∈ E do
        if L(v)>L(u)+w(u,v) then {
            L(v)=L(u)+w(u,v);
            P(v)= u;
        }
```

Thuật toán Bellman-Ford

Step 3

If $\exists\, (u, v) \in E\colon L(v) > L(u) + w(u, v)\ then$

$$\rightarrow KL\ (1)$$

Else

{

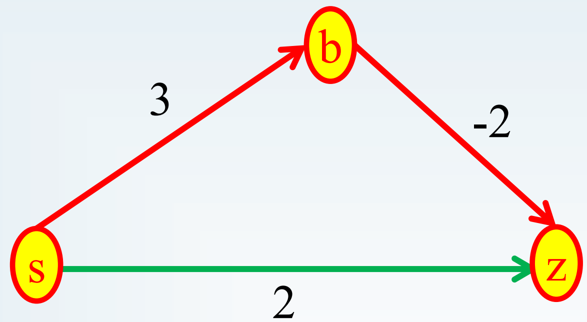
L(v); P(v);

}

Độ phức tạp của thuật toán Bellman – Ford

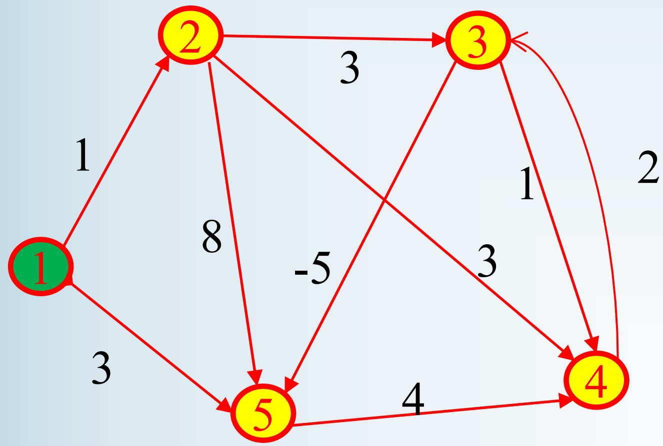
0(n*m)

Thuật toán Bellman-Ford



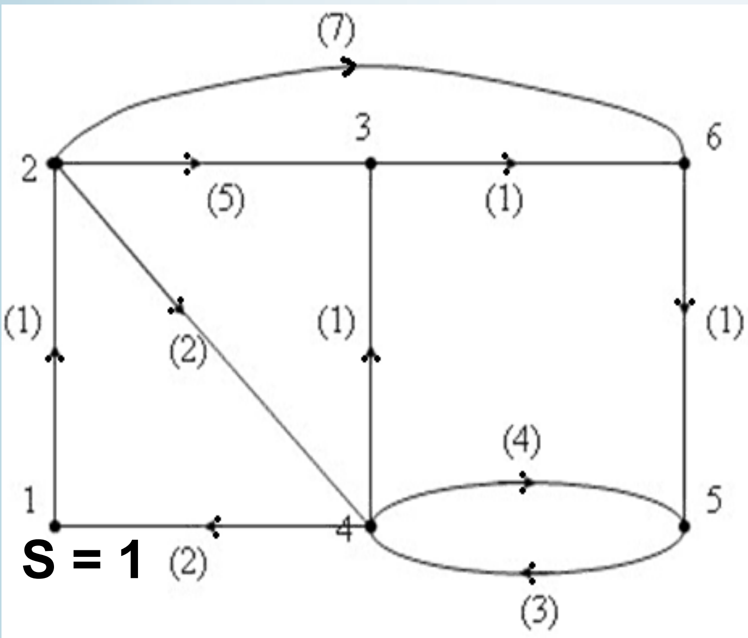
Bước	s	b	z
1	0	+∞,nil	+∞ ,nil
2	0	3,s	2 ,s
	0	3,s	1,b
3	$\nexists\ (u,v) \in E:\ L(v) > L(u) + w(u,v)$		

Ví dụ thuật toán Bellman-Ford



k	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
5					

Ví dụ thuật toán Bellman-Ford



k	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						

Thuật toán Floyd- Warshall

- Mục tiêu: Tìm đường đi ngắn nhất giữa mọi cặp đỉnh của đồ thị (có hướng) có trọng số
- Giải pháp
  - Dijkstra nhiều lần
  - Floyd- Warshall

Thuật toán Floyd- Warshall

- Input:

  $G = (V, E, W), V = \{1,2,\ldots,n\}$

- Output:

  $D = \{d[i,j]\}_{nxn}$,

  d[i,j] độ dài đường đi ngắn nhất từ i đến j

  $P = \{p[i,j]\}_{nxn}$,

  p[i,j] – đỉnh đi trước j trên đường đi ngắn nhất từ i đến j

Thuật toán Floyd- Warshall

Step 1

$$D_0 = \{d_0[i,j]\}\ ,\ d_0[i,j] = \begin{cases} w(i,j), \exists\ (i,j) \in E \\ +\infty, \quad (i,j) \notin E \end{cases}$$

$$P_0 = \{p_0[i,j]\}, p_0[i,j] = \begin{cases} j, \exists\ (i,j) \in E \\ \nexists, \quad (i,j) \notin E \end{cases}$$

Thuật toán Floyd- Warshall

<u>Step 2</u>

For k:=1 to n do // |V| = n

// Tính D_k và P_k theo D_{k-1}, P_{k-1}

For n:=1 to n do

For m:=1 to n do $\Big\} \; //\forall(i,j) \in E$

if $d_{k-1}[i,j] > d_{k-1}[i,k] + d_{k-1}[k,j]$ then {

$d_k[i,j]=d_{k-1}[i,k]+d_{k-1}[k,j]$;

$p_k[i,j]= p_{k-1}[i,k]$;

}

else {

$d_k[i,j]=d_{k-1}[i,j]$; $p_k[i,j]= p_{k-1}[i,j]$;

}

Thuật toán Floyd- Warshall

Step 3

D = D_n

P = P_n

// Phương pháp xác định đường đi ngắn nhất từ i đến j

// Đường đi ngắn nhất từ i đến j là các đỉnh:

$$i \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_k \rightarrow i_{k+1} \rightarrow i_n \rightarrow j:$$

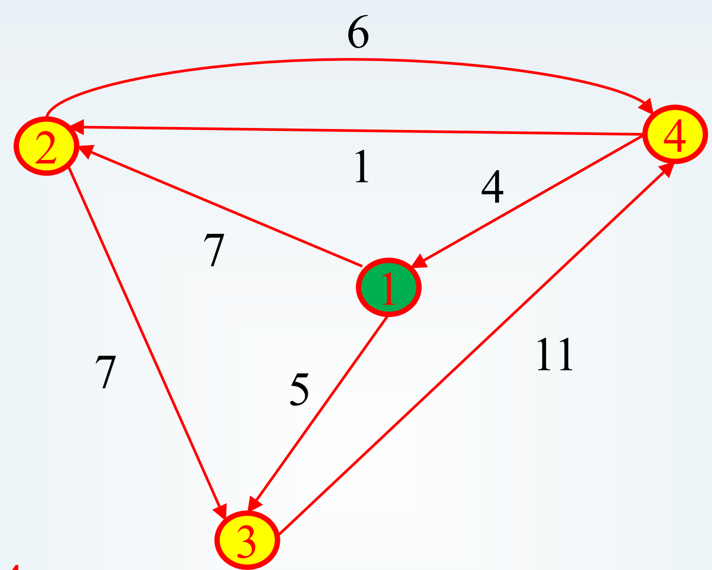
$$i_1 = p(i,j),\ i_2 = \mathrm{p}(i_1, \mathrm{j}), \ldots., i_{k+1} = \mathrm{p}(i_k, \mathrm{j}),$$

$$j \quad = \mathrm{p}(i_{k+1}, \mathrm{j}),$$

Độ phức tạp của thuật Floyd Warshall

0(n*n*n)

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall (1)



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 11 \\ 4 & 1 & \infty & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

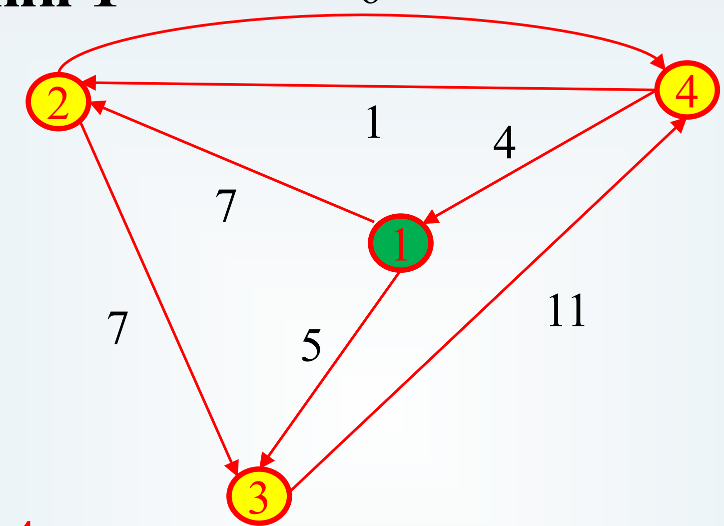
Ma trận D_0

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 4 \\ 1 & 2 & \infty & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Ma trận P_0

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall (2)

Cập nhật qua đỉnh 1



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 7 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & \infty & 7 & 6 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & 11 \\ 4 & 4 & 1 & \boxed{9} & \infty \end{array}$$

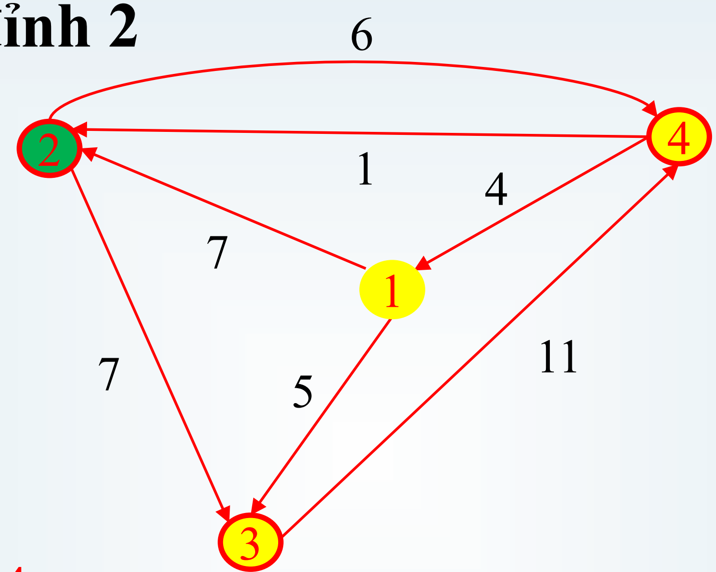
Ma trận D_1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 2 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & \infty & 3 & 4 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & 4 \\ 4 & 1 & 2 & \boxed{1} & \infty \end{array}$$

Ma trận P_1

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall(3)

Cập nhật qua đỉnh 2



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & \boxed{13} \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 11 \\ 4 & 1 & \boxed{8} & \boxed{7} \end{bmatrix} \end{array}$$

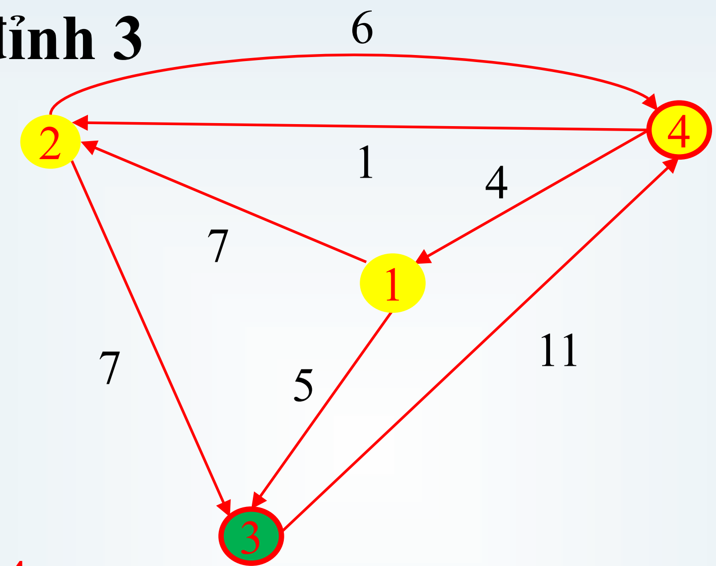
Ma trận D_2

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & \boxed{2} \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 4 \\ 1 & 2 & \boxed{2} & \boxed{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Ma trận P_2

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall (4)

Cập nhật qua đỉnh 3



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 11 \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

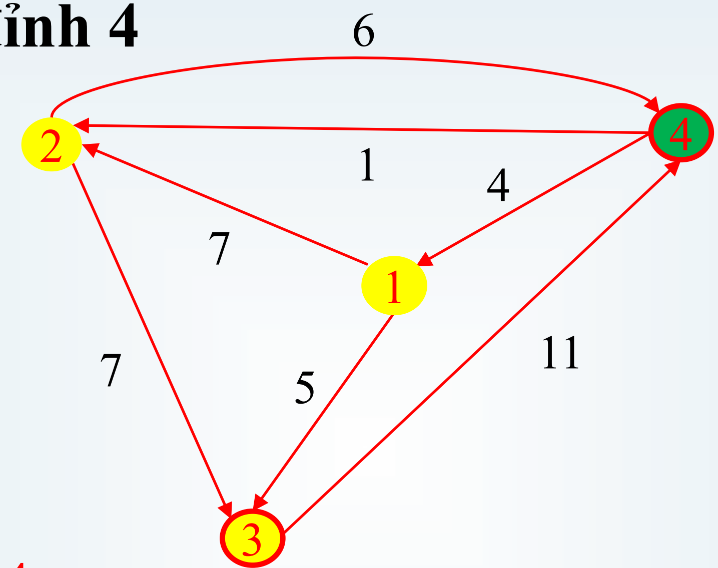
Ma trận D_3

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ma trận P_3

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall (5)

Cập nhật qua đỉnh 4



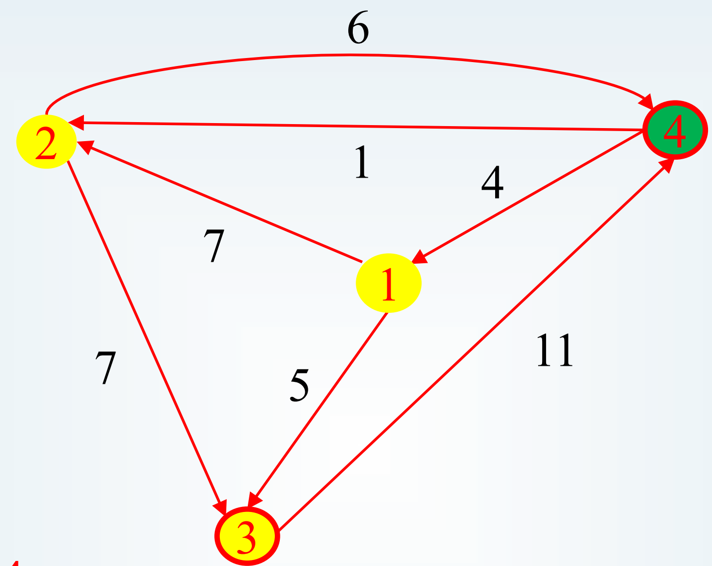
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & \boxed{17} & 7 & 5 & 13 \\
2 & \boxed{10} & \boxed{7} & 7 & 6 \\
3 & \boxed{15} & \boxed{12} & \boxed{19} & 11 \\
4 & 4 & 1 & 8 & 7
\end{array}
$$

Ma trận D_4

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & \boxed{2} & 2 & 3 & 2 \\
2 & \boxed{4} & \boxed{4} & 3 & 4 \\
3 & \boxed{4} & \boxed{4} & \boxed{4} & 4 \\
4 & 1 & 2 & 2 & 2
\end{array}
$$

Ma trận P_4

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall (6)



$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{bmatrix} 17 & 7 & 5 & 13 \\ 10 & 7 & 7 & 6 \\ 15 & 12 & 19 & 11 \\ 4 & 1 & \boxed{8} & 7 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kết quả: 4 → 3

+ **8**

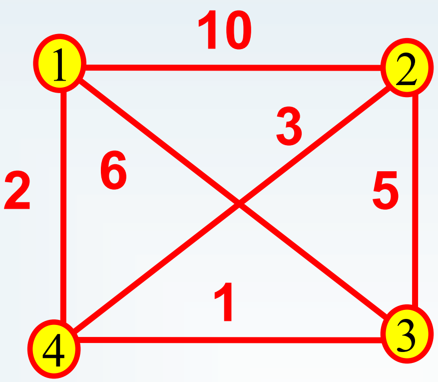
+ 4 –2 --3

p(4,3) = 2

p(2,3) = 3

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall (2.1)



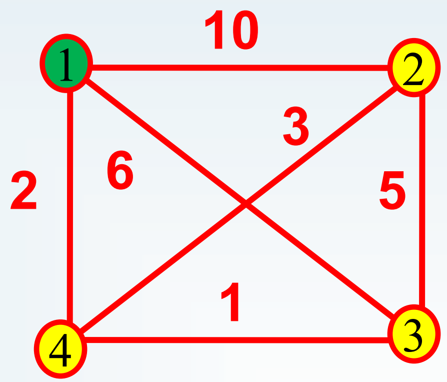
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
\infty & 10 & 6 & 2 \\
10 & \infty & 5 & 3 \\
6 & 5 & \infty & 1 \\
2 & 3 & 1 & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ma trận D_0

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
\infty & 2 & 3 & 4 \\
1 & \infty & 3 & 4 \\
1 & 2 & \infty & 4 \\
1 & 2 & 3 & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ma trận P_0

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall (2.2)



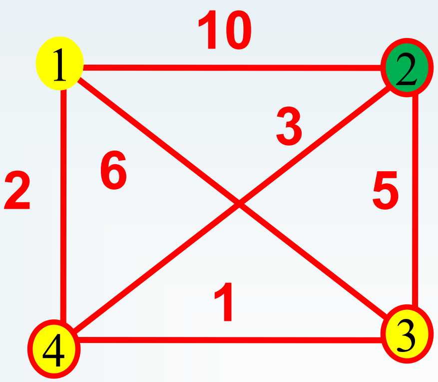
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 10 & 6 & 2 \\ 2 & 10 & \infty & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & \infty & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & \infty \end{array}$$

Ma trận D_1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & \infty & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & \infty \end{array}$$

Ma trận P_1

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall(2.3)



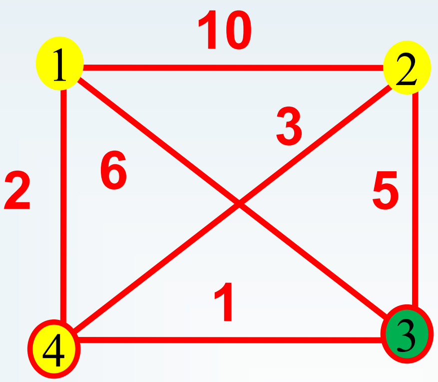
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 10 & 6 & 2 \\ 10 & \infty & 5 & 3 \\ 6 & 5 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Ma trận D_2

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \infty & 3 & 4 \\ 1 & 2 & \infty & 4 \\ 1 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Ma trận P_2

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall(2.4)



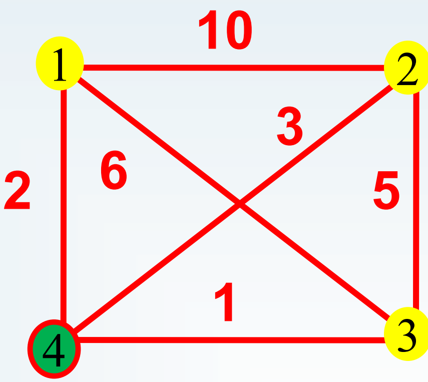
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{bmatrix} \infty & 10 & 6 & 2 \\ 10 & \infty & 5 & 3 \\ 6 & 5 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ma trận D_3

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{bmatrix} \infty & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \infty & 3 & 4 \\ 1 & 2 & \infty & 4 \\ 1 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ma trận P_3

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall(2.5)



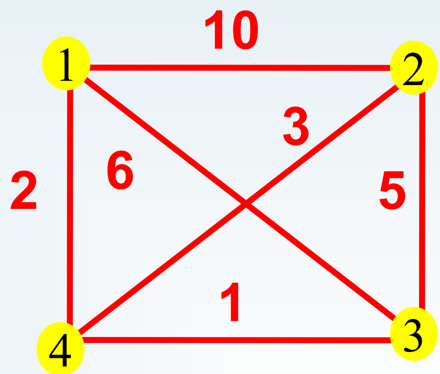
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array}\quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 5 & 3 & 2 \\ 5 & \infty & 4 & 3 \\ 3 & 4 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

Ma trận D_4

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{bmatrix} \infty & 4 & 4 & 4 \\ 4 & \infty & 4 & 4 \\ 4 & 4 & \infty & 4 \\ 1 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

Ma trận P_4

Ví dụ thuật toán Floyd- Warshall(2.6)



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 5 & 3 & 2 \\ 5 & \infty & 4 & 3 \\ 3 & 4 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Ma trận D_4

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 4 & 4 & 4 \\ 4 & \infty & 4 & 4 \\ 4 & 4 & \infty & 4 \\ 1 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Ma trận P_4

Ứng dụng

- Bài toán chọn địa điểm đặt cơ sở dịch vụ, sao cho hiệu quả nhất về mặt kinh tế
  - **Bài toán cực tiểu tổng**
    - Tìm vị trí để đặt cơ sở sao cho khoảng cách giữa các vùng đến cơ sở là nhỏ nhất
    - Vị trí đặt trường học, bưu điện, bệnh viện.
  - **Bài toán cực tiểu trị lớn nhất**
    - Tìm vị trí đặt cơ sở sao cho khoảng cách từ cơ sở đến điểm xa nhất của cộng đồng là nhỏ nhất
    - Vị trí đặt cơ quan phòng cháy chữa cháy.

Ứng dụng

- **Bài toán cực tiểu tổng**

G=(V, E, W), V={1,2,…,n},w(i,j)>0,$\forall\ (i,j) \in E$

D={d[i,j]} là ma trận khoảng cách ngắn nhất của G (Floyd-Warshall)

$\forall i \in V, s(i) - tổng\ các\ phần\ tử\ trên$ hàng i của ma trận D

Đỉnh j gọi là **cực tiểu tổng** nếu $s(j) \leq s(i), \forall i \in V$.

- **Tập tất cả các đỉnh tâm gọi là tâm đồ thị**

Ứng dụng

❑ **Bài toán cực tiểu trị lớn nhất**

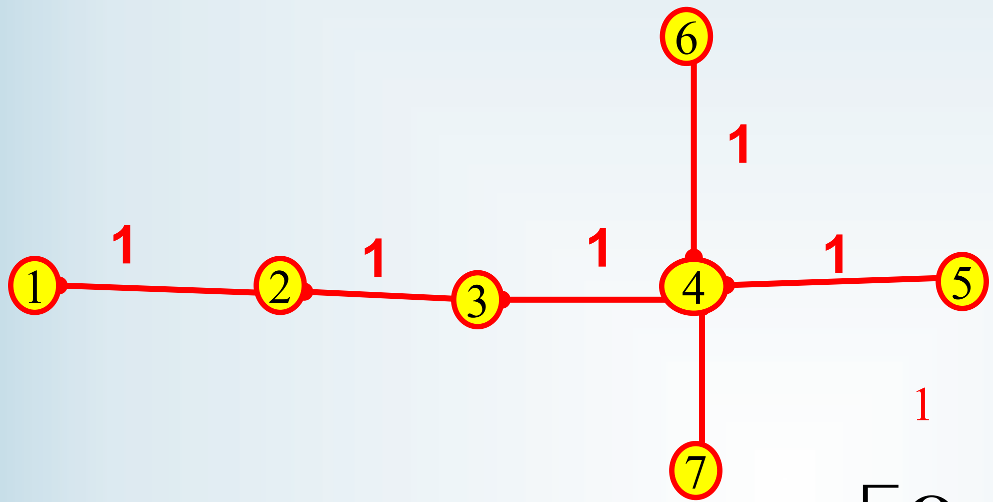
G=(V, E, W), V={1,2,…,n},w(i,j)>0,∀ $(i, j) \in E$

D={d[i,j]} là ma trận khoảng cách nhỏ nhất của G (Floyd-Warshall)

$\forall i \in V, e(i) - phần\ tử\ lớn\ nhất$(độ $lệch\ tâm)trên\ hàng$ i của ma trận D

Đỉnh j gọi là **đỉnh tâm** tổng nếu e$(j) \leq e(i), \forall i \in V$

Ứng dụng



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Đỉnh 4 là đỉnh cực tiểu
- Đỉnh 3 là tâm đồ thị

Bài tập

- Lập trình thực hiện các thuật toán mô tả:
  - Thuật toán Dijkstra
  - Thuật toán Floyd-Warshall
  - Thuật toán Bellman-Ford
- Xác định độ phức tạp của 3 thuật toán trên

What NEXT?