# BÀI 5

# KỶ THUẬT ĐẾM NÂNG CAO

**Giáo viên: TS. Nguyễn Văn Hiệu**

Email: nvhieuqt@dut.udn.vn

# Nhắc lại!

- Quy tắc nhân
- Quy tắc cộng
- HV, CH, TH
- Chỉnh hợp lặp
- Tổ hợp lặp
- Nguyên lý bù trừ

# Nội dung

5.1. Giới thiệu

5.2. Một số khái niệm

5.5. Mô hình hóa

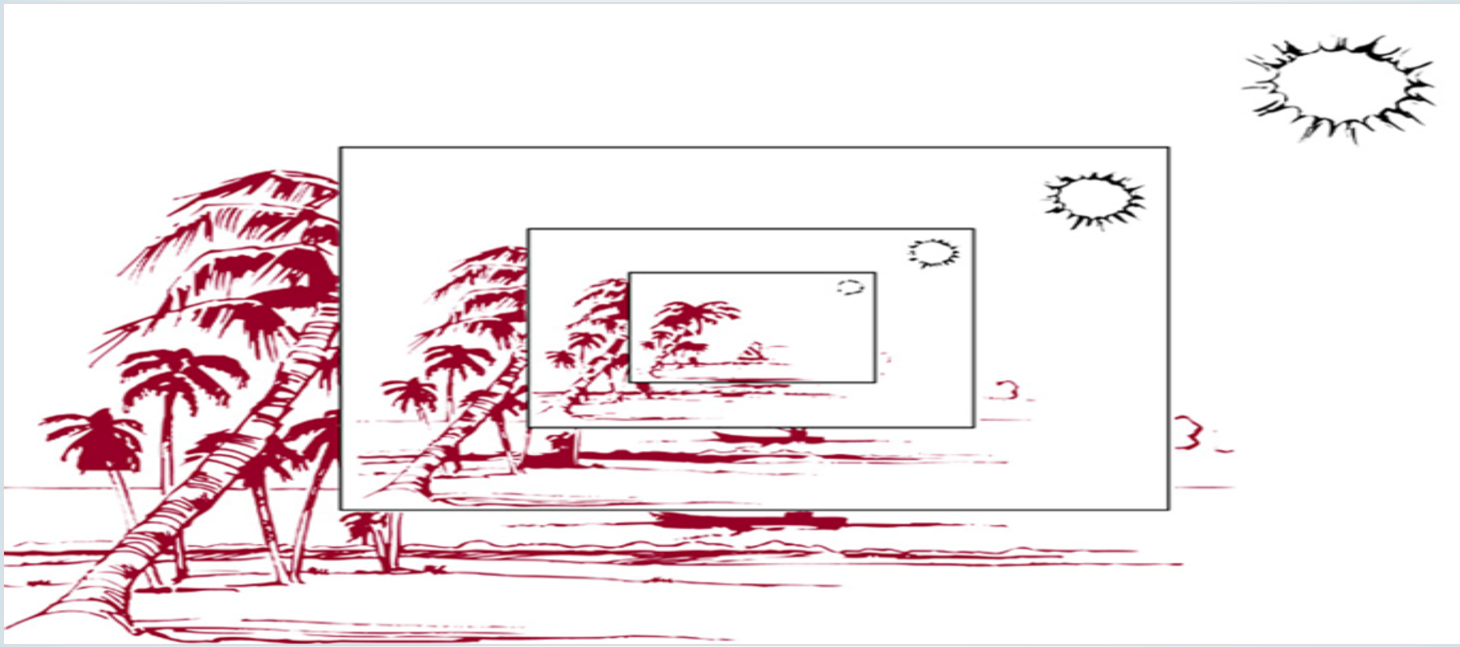
5.4.Định nghĩa

5.5. Phương pháp

- Phương pháp thế
- Phương trình đặc trưng

5.6. Bài tập

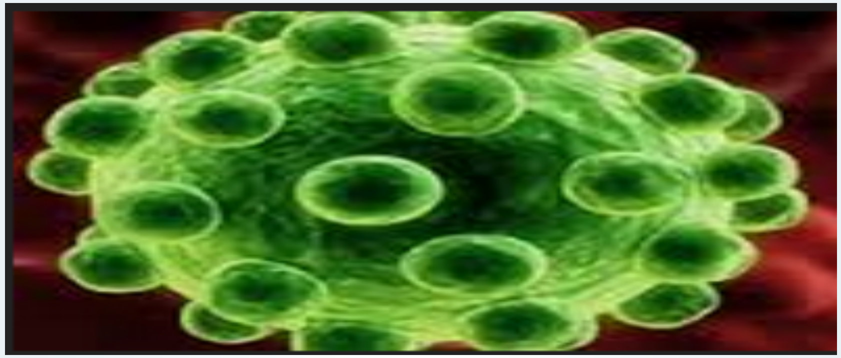
# 5.1. Giới thiệu



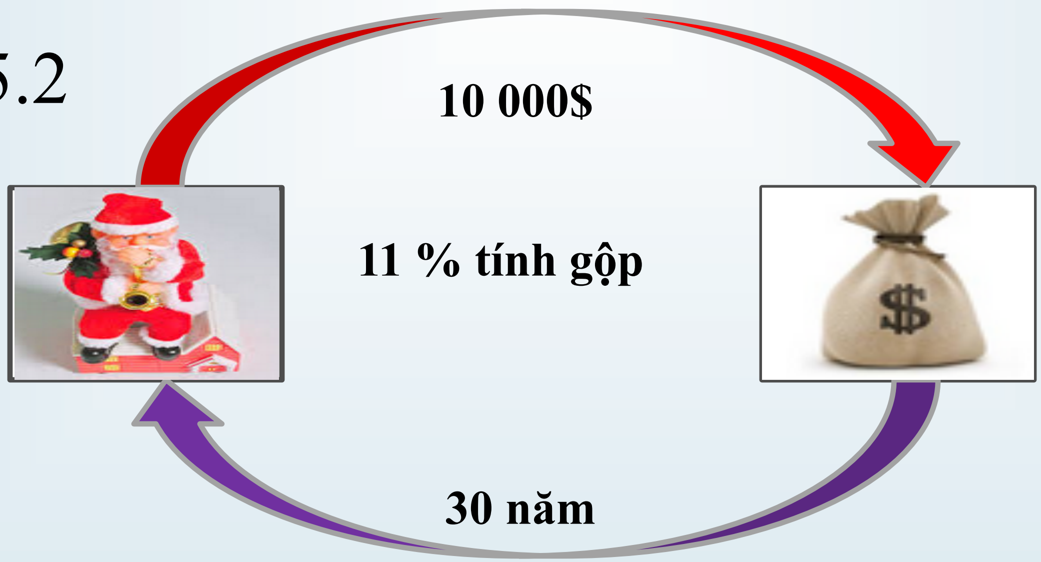
- Khó định nghĩa đối tượng một cách tường minh
- Có thể định nghĩa đối tượng qua chính nó
- **Kỷ thuật = đệ quy.**

# 5.1. Giới thiệu

- Ví dụ 5.1



- Ví dụ 5.2



# 5.2. Các khái niệm

Xác định một hay nhiều số hạng đầu tiên

$a_0 = 5$

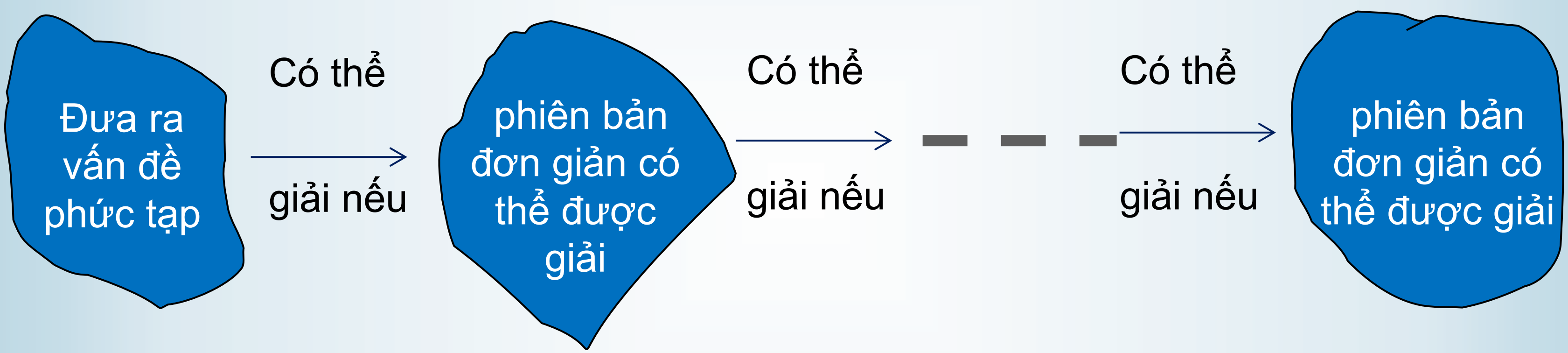
Xác định số hạng tiếp theo từ số hạng đi trước

$a_n = 2\,a_{n-1}$

**Đệ quy** dãy số $\{a_n\}$

**Hệ thức truy hồi**

# 5.2. Các khái niệm




$a_n = 2a_{n-1}$ $a_{n-1} = 2a_{n-2}$, $a_1 = 2a_0$, $a_0 = 5$

# 5.2. Các khái niệm

- *Hệ thức truy hồi* của $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn $a_n$ qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy.
- *Nghiệm htth* là dãy $\{b_n\}$ nếu các số hạng thỏa mản hệ thức truy hồi.
- *Giải htth* là đi tìm công thức biểu diễn các số hạng của dãy mà không thông qua các số hạng phía trước

# 5.2. Các khái niệm

- $a_n = 3n$ với mọi n nguyên không âm, **có là lời giải của hệ thức truy hồi** $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$hay không?
- HD:

  Giả sử $a_n = 3n$ với mọi $n$, $n \geq 2$;

  $2a_{n-1} - a_{n-2} =$ ____________________

- $a_n = 5$ với mọi n nguyên không âm, **có là lời giải của hệ thức truy hồi** $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$hay không?
- HD

  $2a_{n-1} - a_{n-2} =$ ____________________

## 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

5.3.1. Tổ hợp C(n,k), k ≤ n,

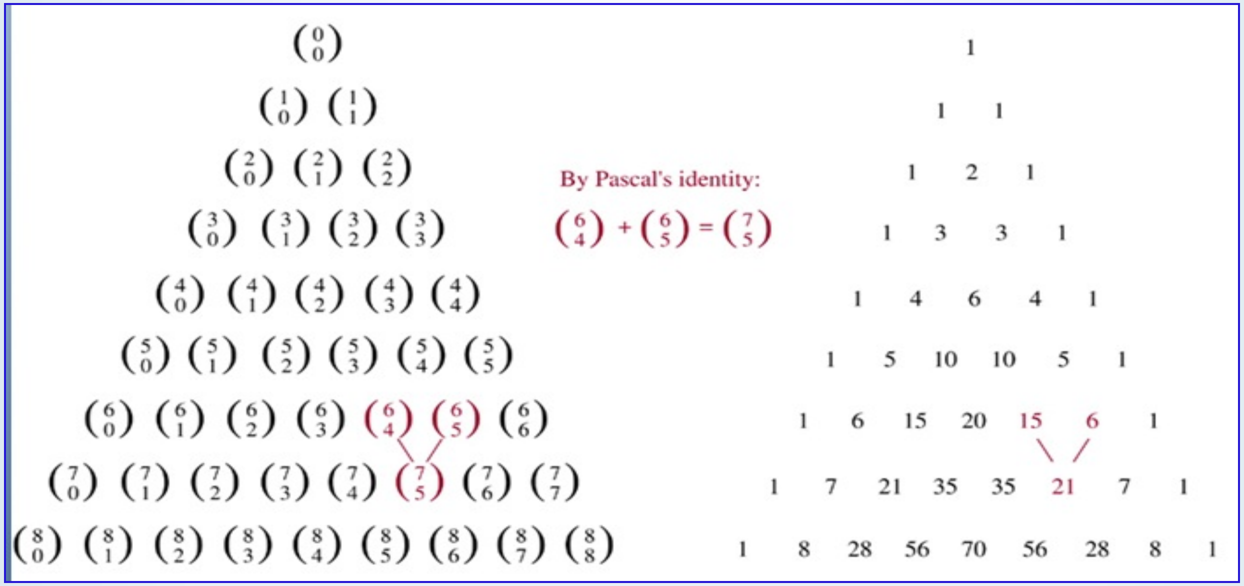
5.3.2. Bài toán tháp Hà nội,

5.3.3. Bài toán họ nhà thỏ

# 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

## 5.3.1. Tính C(n,k)

- C(n,k) = ?




- Xây dựng

# 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

## 5.3.1. Tính C(n,k)

- Cố định a trong n phần tử
- Chia số cách chọn tập con k pt của tập n pt thành 2 lớp:
  - Lớp chứa a: C(n-1,k-1)
  - Lớp không chứa a: C(n-1,k)
- Nguyên lý cộng

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$$

$$C(n,0) = C(n,n) = 1$$

# 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

## 5.3.1. Tính C(n,k)

- ```
  int c(int m,int n)
  {
        if(m==0) return 1;
        else if(m==n) return 1;
        else return (c(m-1,n-1)+c(m,n-1));
  }
  ```

- **Nhược điểm đệ quy**
  ```

# 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

## 5.3.2. Bài toán tháp Hà nội

- Mô tả bài toán toán:
  - Cho 3 cái cọc A, B, C và tập n đĩa có kích cỡ khác nhau;
  - Đĩa được bố trí theo thứ tự đường kính giảm dần từ dưới lên trên
  - Số đĩa ban đầu được đặt trên cọc A;
  - **Mục đích**: xếp được tất cả đĩa lên cọc C

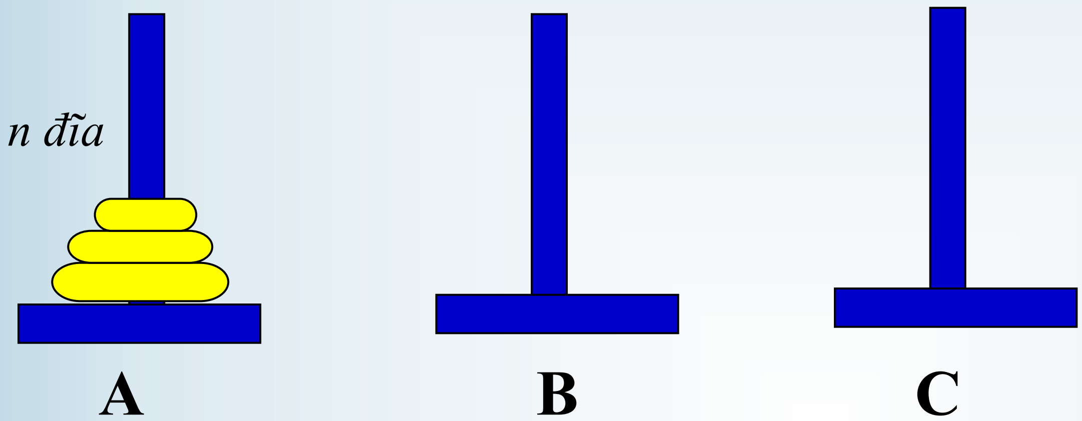
# 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

## 5.3.2. Bài toán tháp Hà nội

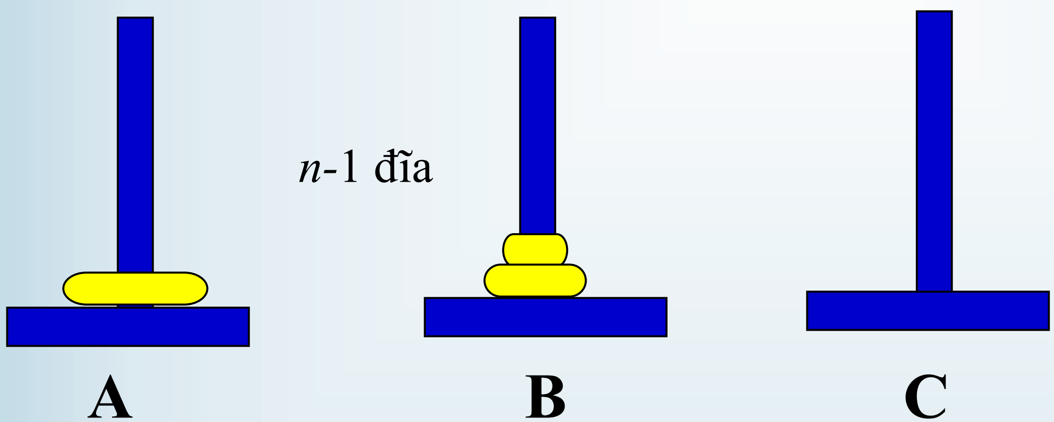
- **Quy tắc chơi**
  - Mỗi lần chuyển chỉ được chuyển 1 đĩa và chỉ được xếp đĩa có đường kính nhỏ lên trên đĩa có đường kính lớn hơn.
  - Mỗi đĩa có thể chuyển từ cọc này sang cọc khác;
  - Trong quá trình chuyển được phép sử dụng cọc B làm trung gian.
- **Bài toán đặt là**: Tìm số lần dịch chuyển đĩa ít nhất cần thực hiện để thực hiện xong nhiệm vụ đặt ra trong trò chơi tháp Hà Nôi

# 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

**MINH HỌA**




Vị trí bắt đầu trên tháp Hà Nội




Vị trí trung gian trên tháp Hà Nội

**NGHIỆM**

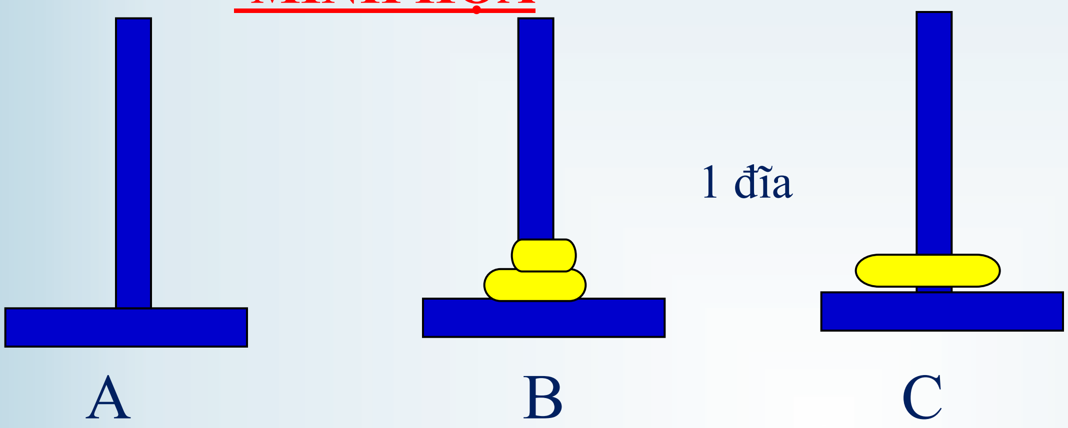
Gọi $H_n$ :
Số lần
chuyển *n* đĩa

Chuyển *n*-1 đĩa
ở phần trên sang cọc B

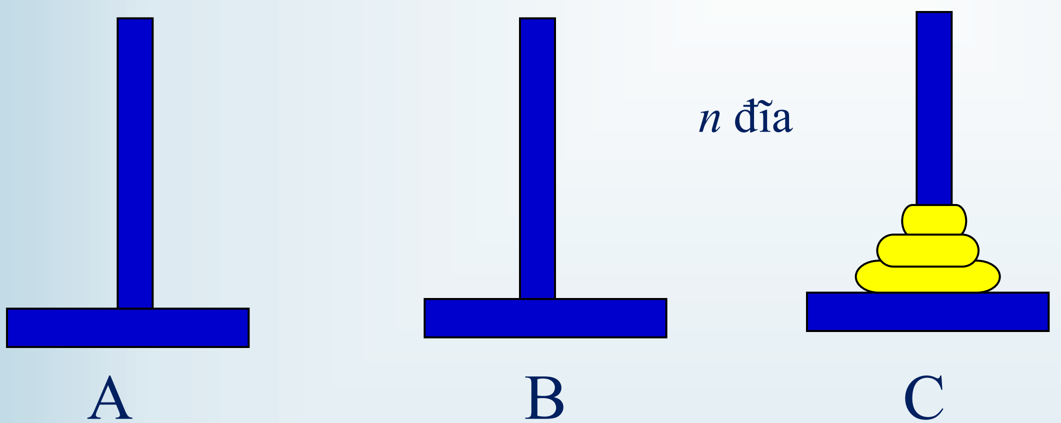
**$H_{n-1}$ số lần chuyển n-1 đĩa**

# 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

**MINH HỌA**




Vị trí trung gian trên Tháp Hà Nội




Vị trí cuối cùng trên Tháp Hà Nội

**NGHIỆM**

Chuyễn đĩa lớn nhất sang cọc C

**1 lần chuyển**

Chuyển phần trên n-1 đĩa sang cọc C

**$H_{n-1}$ lần chuyển**

# 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

$$H_n = 2H_{n-1} + 1,\ \mathrm{n} \geq 2; \quad H_1 = 1$$

| Chuyển *n*-1 đĩa phần trên sang cọc B | Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc C | Chuyển *n*-1 đĩa phần trên sang cọc C |
| --- | --- | --- |
| $\mathrm{H}_{\mathrm{n-1}}$ | 1 | $\mathrm{H}_{\mathrm{n-1}}$ |

$$\mathrm{H}_{\mathrm{n-1}} + 1 + \mathrm{H}_{\mathrm{n-1}}$$

# Towers of Hanoi Problem

- Nhập số nguyên n
- Xuất ra chuỗi cách chuyển n-đĩa

```
void THN(int n,char a, char b,
char c){
   if(n==1) Move(a,b);
    else {
       THN(n-1,a,c,b);
       Move(a,b);
       THN(n-1,c,b,a);}
 }
```

```
void Move(char a, char b){
     printf("\t%c ---> %c\n",a,b);
  }
```

# 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

## 5.3.3. Bài toán họ nhà thỏ (population of rabbits)

| Đôi tái tạo (từ hai tháng tuổi) | Đôi thỏ con (dưới hai tháng tuổi) | Tháng | Đôi tái tạo | Đôi thỏ con | Tổng |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | | 2 | 0 | 1 | 1 |
| | | 3 | 1 | 1 | 2 |
| | | 4 | 1 | 2 | 3 |
| | | 5 | 2 | 3 | 5 |
| | | 6 | 3 | 5 | 8 |

# 5.3. Mô hình hóa hệ thức truy hồi

## 5.3.3. Bài toán họ nhà thỏ

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ ,\ n \geq 3$$

*Số đôi thỏ sau n-1 tháng*

\+

*số đôi thỏ mới sinh*

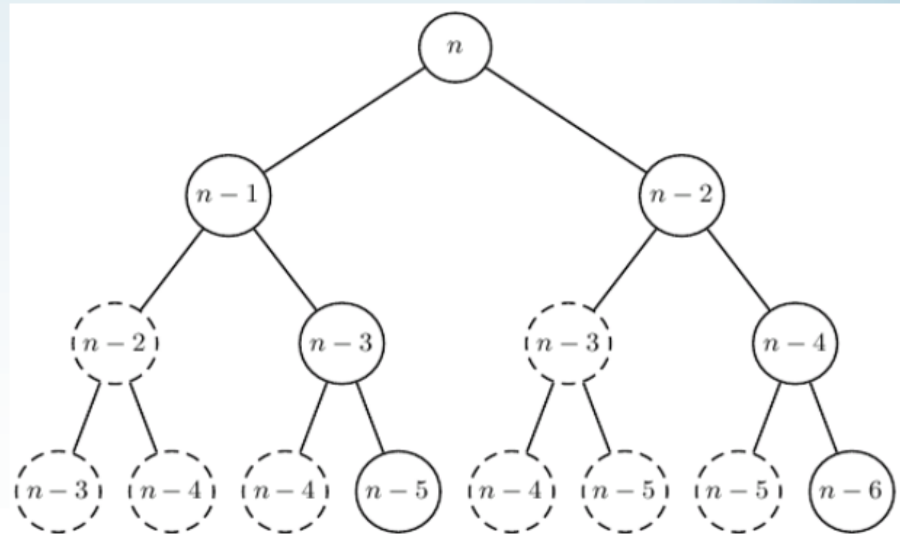
=

Số đôi thỏ trên đảo sau *n* tháng

*số đôi thỏ sau n-2 tháng*

# Fibonacci Problem

- Nhập số nguyên n
- Xuất ra số Fibonacci thứ n




```
RecursiveFibonacci(n)
  if n = 1 or n = 2
        return 1
  else
        a ← RecursiveFibonacci(n − 1)
        b ← RecursiveFibonacci(n − 2)
        return a + b
```

```
Fibonacci(n)
  F_1 ← 1
  F_2 ← 1
  for i ← 3 to n
        F_i ← F_{i−1} + F_{i−2}
  return F_n
```

# 5.4. Định nghĩa

- Hệ thức truy hồi **tuyến tính thuần nhất bậc k hệ số hằng** có dạng:

$$\boldsymbol{a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \ldots + c_k\, a_{n-k}}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_k$ - *hằng số*, $c_k \neq 0$ .

- Hệ thức truy hồi bậc k với k giá đầu:

$$a_0 = I_0,\ a_1 = I_1, \ldots, a_{k-1} = I_{k-1}$$

sẽ xác định duy nhất một dãy $\{a_n\}$

# 5.4. Định nghĩa

- Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng

$P_n = (1.11)\ P_{n-1}$ bậc một

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ bậc hai

$a_n = a_{n-5}$ bậc năm

1. Thường xuyên tồn tại trong các mô hình hóa các bài toán
2. Có thể giải một cách có hệ thống

- Hệ thưc truy hồi không tuyến tính, không thuần nhất, không hệ số hằng

$H_n = 2H_{n-1} + 1$ → Không thuần nhất

$B_n = nB_{n-1}$ → Không có hệ sô hằng

$a_n = a_{n-1} + a^2_{n-2}$ → Không tuyến tính

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

- Giải hệ thức truy hồi
  – Tìm công thức tổng quát cho số hạng $a_n$
  – Số hạng $a_n$ không phải tính qua k phần tử trước nó.
- Phương pháp giải:
  – Phương pháp thế
  – Phương pháp phương trình đặc trưng

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

## 5. 5.1 Phương pháp thế:

- Dùng để giải hệ thức truy hồi bậc 1
- Các bược giải:
  - Thay $a_n$ bởi $a_{n-1}$
  - Thay $a_{n-1}$ bởi $a_{n-2}$
  - ---
  - Thay $a_0$ bởi $I_0$
- Thu được công thức trực tiếp cho $a_n$
- Chứng minh tính đúng đắn

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

## 5.5.1. Phương pháp thế:

– Gọi $H_n$ là số lần chuyển đĩa ít nhất của bài toán tháp Hà nội.

– $H_n = 2H_{n-1} + 1,\ n \geq 1$, với $H_1 = 1$

– $$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\ &= 2\left(2H_{n-2} + 1\right) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2\left(2H_{n-3} + 1\right) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\ldots \\ &= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Chứng minh

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

## 5.5.2. Phương pháp phương trình đặc trưng

– Dùng giải hệ thức truy hồi bậc 2 tuyến tính thuần nhất hệ số hằng.

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}\ ,\ n \geq 2 \qquad (1)$$

*$c_1$, $c_2$- hằng số, $c_2 \neq 0$ .*

– *Có phương trình đặc trưng:*

$$r^2 = c_1 r + c_2 \qquad (2)$$

*$r$ - hằng số.*

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

## 5.5.2. Phương pháp phương trình đặc trưng

- Nếu (2) có hai nghiệm thực phân biệt $r_1, r_2$ và có $a_0 = I_0$ ,$a_1 = I_1$, thì tồn tại duy nhất hằng số $d_1$ , $d_2$:

  $$\mathbf{a_n = d_1 r^n{}_1 + d_2 r^n{}_2}$$

  là nghiệm của (1)

- Nếu (2) có nghiệm thực kép $r_1$, có $a_1 = I_0$ ,$a_1 = I_1$ thì tồn tại duy nhất hằng số $d_1$ , $d_2$:

  $$\mathbf{a_n = (d_1 + d_2 n) r^n{}_1}$$

  là nghiệm của (1)

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

## 5.5.2. Phương pháp phương trình đặc trưng

- **Cần chứng minh:**
  - $a_n = d_1 r^n_1 + d_2 r^n_2$ là nghiệm của (1)
  - tồn tại $d_1$ $d_2$ duy nhất không ?
- **chứng minh:**
  - $c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = d_1 r^n_1 + d_2 r^n_2$ với mọi $n \geq 2$
  - $\begin{cases} I_0 = d_1 + d_2 \\ I_1 = d_1 r_1 + d_2 r_2 \end{cases}$ Suy ra $d_1$ $d_2$ duy nhất
  -

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

- Bài toán họ nhà thỏ có hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,,\ n \geq 2;\ a_0 = 1,\ a_1 = 1$$

**Giải:**

**Bước 1:** Tìm nghiệm tổng quát

**Bước 2**: Tìm  hệ số hằng

**Bước 3:** Nghiệm của hệ thức truy hồi

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

**Bước 1:** Tìm nghiệm tổng quát

- Phương trình đặc trưng: $\mathbf{r^2 = r + 1}$
- Nghiệm của pt đặc trưng: $\mathbf{r_1 = (1+\sqrt{5})/2}$ , $\mathbf{r_2 = (1-\sqrt{5})/2}$
- Nghiệm tổng quát: $\mathbf{a_n = d_1((1+\sqrt{5})/2)^n + d_2\,((1+\sqrt{5})/2)^n}$

**Bước 2**: Tìm hằng số $\mathbf{d_1}$ **và** $\mathbf{d_2}$ **:**

- Sử dụng điều kiện đầu:

$$\begin{cases} 1 = d_1 + d_2 \\ 1 = d_1\,(1+\sqrt{5})/2 + d_2\,(1+\sqrt{5})/2 \end{cases}$$

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

**Bước 2 (t.):**

$d_1 = (1+\sqrt{5}) / 2\sqrt{5}$

$d_2 = -(1-\sqrt{5}) / 2\sqrt{5}$

**Bước** 3: Nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, n \geq 0$$

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

Vi dụ 5.1

Giải hệ thức truy hồi sau:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} ,\ a_0 = 1,\ a_1 = 6.$$

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi

- Vi dụ 5.1
  - **Bước 1:** Tìm nghiệm tổng quát
    - Phương trình đặc trưng: $\mathbf{r^2 = 6r - 9}$
    - pt đặc trưng có nghiệm kép: $\mathbf{r_1 = r_2 = 3}$
    - Nghiệm tổng quát: $\mathbf{a_n = (d_1 + d_2 n) 3^n}$
  - **Bước 2**: Tìm hằng số $\mathbf{d_1}$ **và** $\mathbf{d_2}$
    - Sử dụng điều kiện đầu:

$$\begin{cases} 1 = d_1 \\ 6 = (d_1 + d_2)\, 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 1 \end{cases}$$

  - **Bước** 3: Nghiệm của hệ thức truy hồi

$$\mathbf{a_n = (1 + n)\, 3^n, \ n \geq 0}$$

# 5.5. Giải hệ thức truy hồi bậc k ≥ 3

❖ Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \qquad (*)$$

trong đó, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ - hằng số, $c_k \neq 0$ .

❖ Phương trình đặc trưng:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots + c_k \qquad (**)$$

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi bậc ≥ 3

- **Người ta chứng minh được kết quả sau:**
  - Nếu (*) có nghiệm thực phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$, thì (**) có nghiệm tổng quát sau:

$$a_n = d_1 \cdot r_1^{\,n} + d_2 \cdot r_2^{\,n} + \ldots + d_k \cdot r_k^{\,n}$$

  - Nếu (*) có t nghiệm thực phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_t$ tương ứng với các tính bội $m_1, m_2, \ldots, m_t$, thì (**) có nghiệm tổng quát:

$$a_n = (d_{10} + d_{11}n + \ldots + d_{1m_1-1}n^{m_1-1}) \cdot r_1^{\,n} + \ldots$$

$$+ (d_{t0} + d_{t1}n + \ldots + d_{tm_t-1}n^{m_t-1}) \cdot r_t^{\,n}$$

# 5.5. Giải hệ thức truy hồi bậc k ≥ 5

- Ví dụ 5.2

  Giải hệ thức truy hồi sau:

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3},$$

$a_0 = 1,$

$a_1 = -2,$

$a_2 = -1.$

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi bậc $\geq 3$

- Ví dụ 5.2

**Bước 1:** Tìm nghiệm tổng quát

- Phương trình đặc trưng: $\mathbf{r^3 = -3r^2 - 3r - 1}$
- Nghiệm của pt đặc trưng: $\mathbf{r_1 = r_2 = r_3} = -1$
- Nghiệm tổng quát: $\mathbf{a_n = (d_{10} + d_{11}\, n + d_{12}\, n^2)(-1)^n}$

**Bước 2**: Tìm hằng số $d_{10}$, $d_{11}$ và $d_{12}$

- Sử dụng điều kiện đầu:

$$\begin{cases} 1 = d_{10}\,, \\ \mathbf{-2} = (d_{10} + d_{11} + d_{12})(-1)\,, \\ \mathbf{-1} = d_{10} + d_{11}2 + d_{12}4 \end{cases}$$

# 5.5. Phương pháp giải hệ thức truy hồi bậc ≥ 3

Ví dụ 5.2

**Bước 2 (t.):**

$d_{10} = 1$

$d_{11} = 3$

$d_{12} = -2$

**Bước** 3: Nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n, \; n \geq 0$$

# 5. 6. Bài tập

1. $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ ,

$a_0 = 2$, $a_1 = 5$ , $a_2 = 15$.

- ĐS: $a_n = 1 - 2^n + 2.3^n$.


- WHAT NEXT?

BÀI TOÁN TỒN TẠI