BÀI 1

Bài toán đếm

Giáo viên: Nguyễn Văn Hiệu
Bộ môn: Công Nghệ Phần Mêm
Email: nvhieuqt@dut.udn.vn

Nội dung

- Nguyên lý cộng
- Nguyên lý nhân
- Chỉnh hợp không lặp
- Chỉnh hợp lặp
- Hoán vị không lặp
- Hoán vị lặp
- Tổ hợp không lặp
- Tổ hợp lặp

Nguyên lý cộng

- Nếu A và B là hai tập hợp rời nhau thì

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$$

- Nếu $\{ A_1, A_2, ..., A_k \}$ là một *phân hoạch* của X thì

$$N(X) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_k)$$

- Nếu A là một tính chất cho trên X thì

$$N(A) = N(X) - N(\overline{A})$$

Ứng dụng

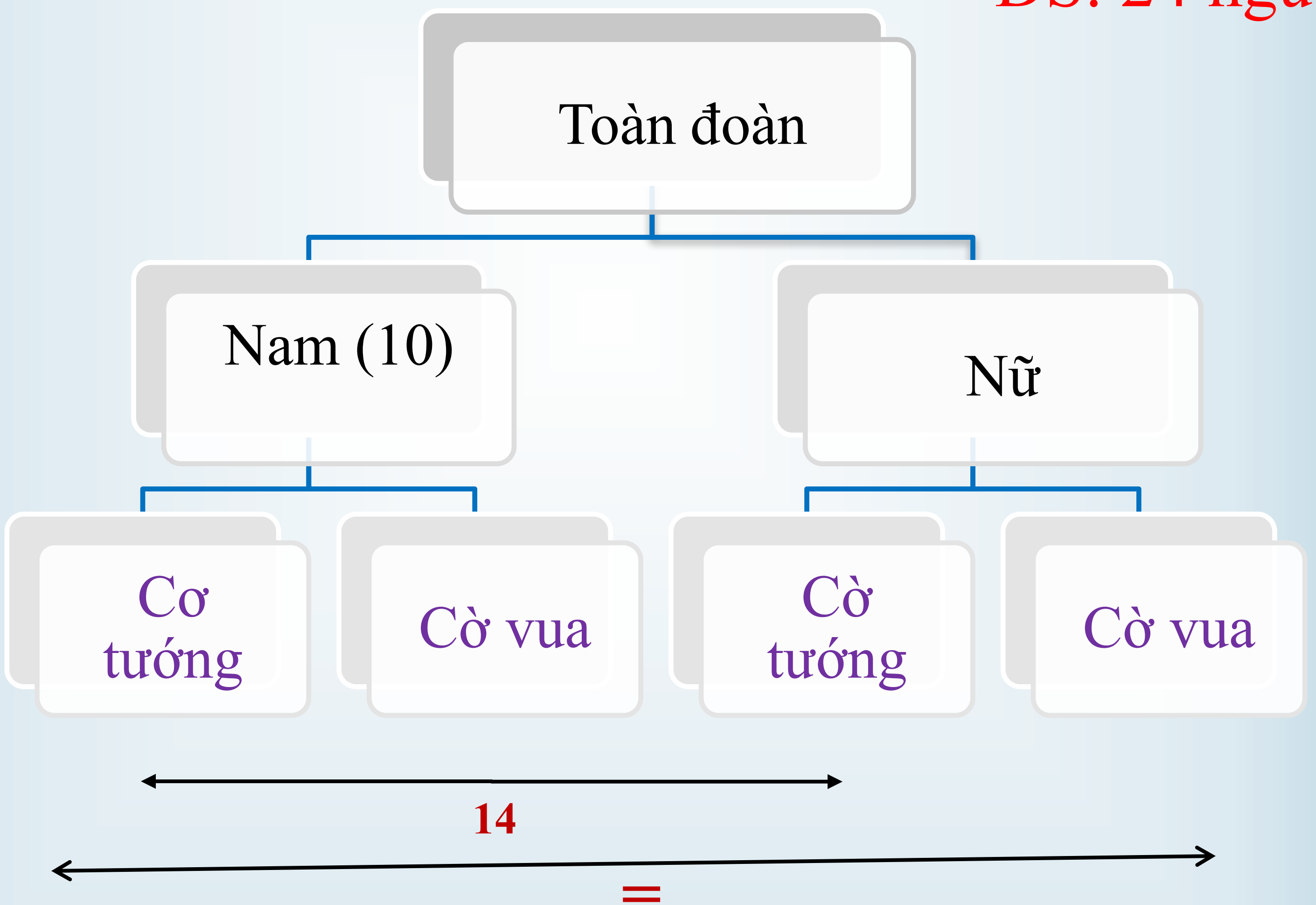
Ví dụ 1 <Đoàn vận động viên>

- {Cờ tướng, Cờ vua}
- {Nam, Nữ }
- Nam có 10 người.
- Số thi cờ tướng(cả nam lẫn nữ) là 14.
- Số Nữ thi cờ vua = Số Nam thi cờ tướng.

Ứng dụng

Ví dụ 1

ĐS: 24 người



Ứng dụng

__**Ví dụ 2** *<chọn đề tài>*__

- Tóm tắt

manager SYSTEMS

EXPERT SYSTEM

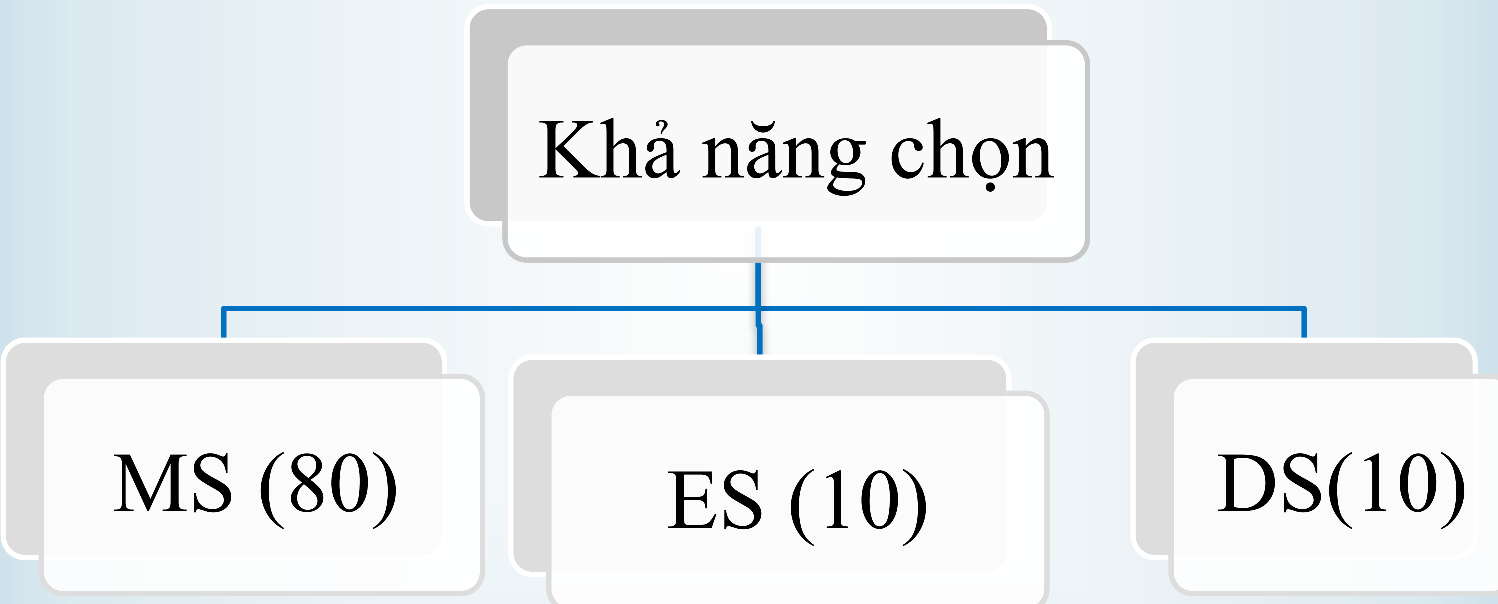
DECISION SYSTEMS

- 80 “MS”
- 10 “ES”,
- 10 “DS”

Ứng dụng

Ví dụ 2

ĐS: 100



Ứng dụng

Ví dụ 3

Tính giá trị của s = ?

```
s = 0;
for( i = 0; i <10 ; i ++)   s += 1;
for( j = 0; j < 20; j++)    s += 1;
for (k = 0; k <30; k++)  s += 1;
```

Ứng dụng

Ví dụ 3

ĐS: 60

s = ?

```
for( i = 0; i <10 ; i ++)
    s += 1;
```

```
for( j = 0; j < 20; j++)
    s += 1;
```

```
for (k = 0; k <30; k++)
    s += 1;
```

Nguyên lý nhân

- Một bộ có 2 thành phần (a_1, a_2) và mỗi a_i có n_i khả năng chọn, thì số bộ sẽ được tạo ra là: $\mathbf{n_1 . n_2}$
  - Hệ quả :

$$N(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = N(A_1)\mathrm{N}(A_2)\ldots N(A_k)$$

- *Phát biểu lại:* để thực hiện một thủ tục có 2 công việc kế tiếp nhau:
  - Thực hiện công việc thứ nhất có $\mathbf{n_1}$ cách
  - Ứng với cách thực hiện công việc thứ nhất có $\mathbf{n_2}$ cách thực hiện công việc thứ hai
  - Để hoàn thành thủ tục có số cách là : $\mathbf{n_1 . n_2}$.

Ứng dụng

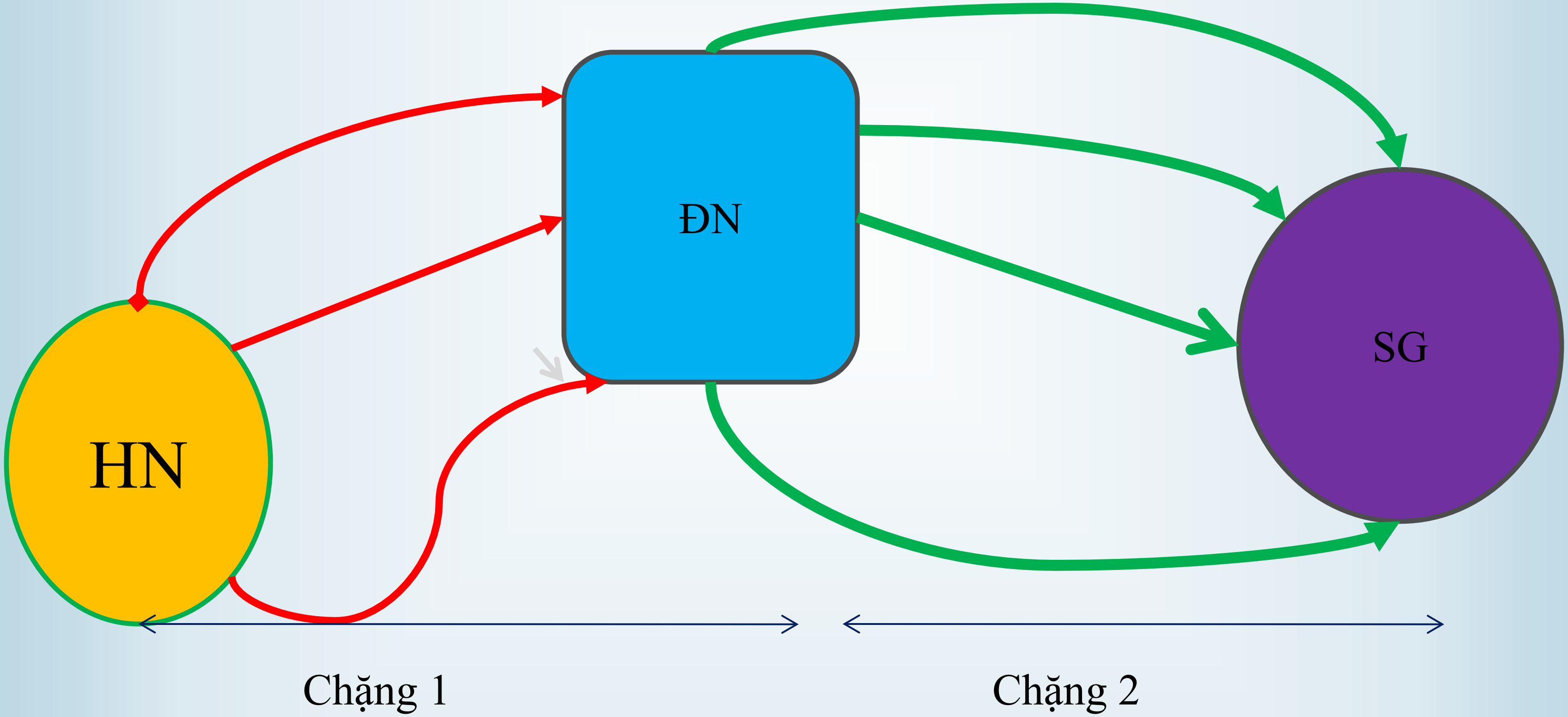
<u>Ví dụ 1</u> *<Hành trình>*

- Từ **Hà nội** đền **Đà nẵng** có 3 cách đi:
  - Máy bay;
  - Ô tô;
  - Tàu hỏa;
- Từ **Đà nẵng** đến **Sài gòn** có 4 cách đi:
  - Máy bay;
  - Ô tô ;
  - Tàu hỏa;
  - Tàu thủy.;

Ứng dụng

Ví dụ 1

ĐS: 12



Ứng dụng

Ví dụ 2 *<Tính S>*

```
S = 0;
for( i = 0; i <10 ; i ++)
    for( j = 0 ; j <20 ; j++)
        for (k= 0 ; k <30; k++) S += 1;
```

Ứng dụng

Ví du 2

```
for( S=0, i = 0; i <10 ; i ++)
    for( j = 0; j < 20 ; j ++)
        for(k= 0; k < 30 ; k ++)
            S+=1
```

ĐS: 6000

Lời khuyên

- Nếu đếm trực tiếp số cấu hình là khó,
  - Thì phân hoạch cấu hình cần đếm → s/d nguyên lý cộng
  - Thì xây dựng cấu hình theo tầng bước → s/d nguyên lý nhân
- Phối hợp cả 2 nguyên lý

Chỉnh hợp lặp

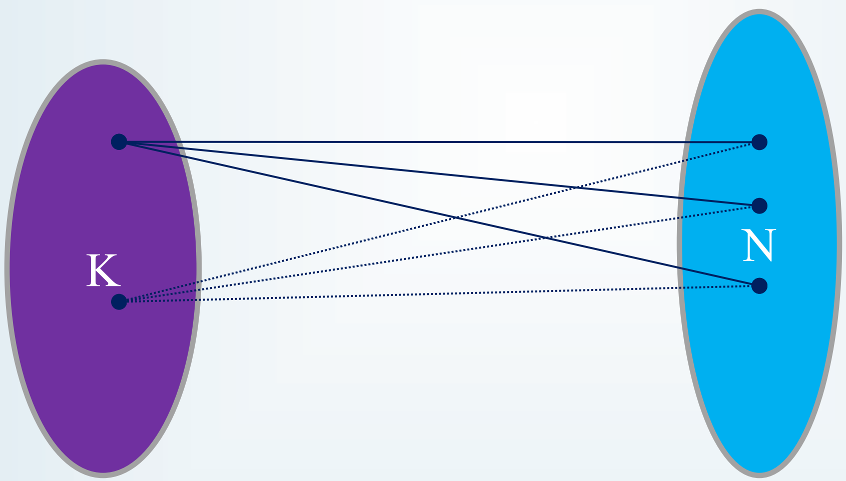
- Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ ***có thứ tự*** gồm k phần từ lấy từ n phần tử, trong đó các phần tử *có thể lặp*.
- Số tất cả chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là: n^k
- Liệt kê chỉnh hợp lặp của X

$$X = \{x,y,z\},\ k = 2$$

Ứng dụng

Ví dụ 1 *<xác định số hàm>*

- Tập k phần tử
- Tập n phần tử



- f = (f1, f2, …, fk).
- fi có n giá trị.
- Kq: **n mũ k**

Ứng dụng

2.1. Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 2 <Số xâu bít>

Tính số xâu nhị phân có độ dài n?

- 1bit có hai khả năng chọn
- Kq: **2 mũ n.**

Ứng dụng

2.1. Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 3 <*số tập con*>

Tính số tập con của một tập gồm n phần tử?

HD:

X = {x1,x2,…,xn},

Tập con A thuộc X: b =(b1,b2,…,bn)

Chỉnh hợp không lặp

- Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là <u>**một bộ có thứ tự**</u> gồm k phần tử lấy từ n phần tử , trong đó các phần tử không được lặp.
- Số chỉnh hợp không lặp chập k không lặp của n phần tư:

$$n*(n-1)*....(n-k+1), \text{ với } k <= n$$

- Liệt kê chỉnh hợp không lặp của $X = \{x,y,z\}$, $k = 2$

Ứng dụng

Ví dụ 1

Tính số đơn ánh từ tập k phần tử vào tập n phần tử

Hoán vị không lặp

- Một hoán vị của một tập n phần tử là một cách sắp sếp có thứ tự các phần tử đó.
- Một hoán vị của n phần tử là trường hợp riêng của chỉnh hợp không lặp khi k = n.
- Số hoán vị của tập n phần tử là n*(n-1)*...*1 = n!
- Minh họa X = {x,y,z}

Ứng dụng

Ví dụ 1

Có 6 người đứng xếp thành một hàng ngang để chụp ảnh. Hỏi có thể bố trí bao nhiêu kiểu?

Ví dụ 2

Cần bố trí thực hiện n chương trình trên máy vi tính. Hỏi có bao nhiêu cách?

Tổ hợp không lặp

- Một tổ hợp chập k của n phần tử là một bộ không kể thứ tự gồm k thành phần khác nhau lấy từ tập n phần tử.
- Số tổ hợp chập k của n phần tử là

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$$

Tổ hợp không lặp

- **Tính chất 1**: (*đối xứng*)

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

- **Tính chất 2:** (*điều kiện đầu*)

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

- **Tính chất 3:** (*công thức đệ quy*)

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, n \; \mathrm{f} \; k \; \mathrm{f} \; 0$$

Why

Ứng dụng

<u>Ví dụ 1</u>

Có n đội bóng thi đấu vòng tròn.

Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận?

<u>Ví dụ 2</u>

Cho một đa giác lồi n (n>=4) đỉnh , nếu biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy tại điểm ở trong đa giác.

Hỏi có bao nhiêu giao điểm của các đường chéo nằm trong đa giác?

Ứng dụng

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8}$$

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Ứng dụng

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k y^{n-k}$$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$$

Hoán vị lặp

- *<u>Bài toán</u>: Số hoán vị của n phần tử:*
  - *có n_1 phần tử **như nhau** thuộc loại 1,*
  - *có n_2 phần tử **như nhau** thuộc loại 2,*
  - *……………………………………………. ,*
  - *có n_k phần tử **như nhau** thuộc lại k.*
- *<u>ĐN</u>: Một cách sắp xếp n phân tử trên gọi là **một hoán vi lặp**.*
- Tổng số hoán vị lặp của n phần là:

$$C(n,n_1)\cdot C(n-n_1,n_2)\cdot\ldots\cdot C(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1},n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

Ứng dụng

•Ví dụ 1: SUCCESS

SUCCESS

- 3 S
- 2 C
- 1 U
- 1 E

7!

- C(7,3)- chọn 3 chổ cho kí tự S, còn lại 4 chổ
- C(4,2) – chọn 2 chổ cho kí tự C, còn 2 chổ
- C(2,1)- chọn 1 chổ cho kí tự U, còn lại 1 chổ
- C(1,1)- chọn 1 chổ cho kí tự S

$$C(7,3)\cdot C(4,2)\cdot C(2,1)\cdot C(1,1)=\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}=420$$

Ứng dụng

Ví dụ 2. **MISSISSIPPI**

$$C(11,1)\cdot C(10,4)\cdot C(6,4)\cdot C(2,2)=\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!}$$

Tổ hợp lặp

Cho n loại, mỗi loại có không ít hơn k phần tử:

Một tổ hợp lặp chập k từ n loại – một bộ không có thứ tự k phần tử lấy từ n loại (các phần tử có thể lặp, k >n)

Số tổ hợp lặp chập k của n loại:

$$C(n+k-1,n-1)=C(n+k-1,k)$$

Ứng dụng

Đếm cách mua mâm ngũ quả từ 3 loại: Cam, Quýt, Xoài.

$$\star\star\star \;\Big|\; \star \;\Big|\; \star$$

$$C(3-1+5,5)=C(3-1+5,3-1)$$

Ứng dụng

Ví dụ 2.

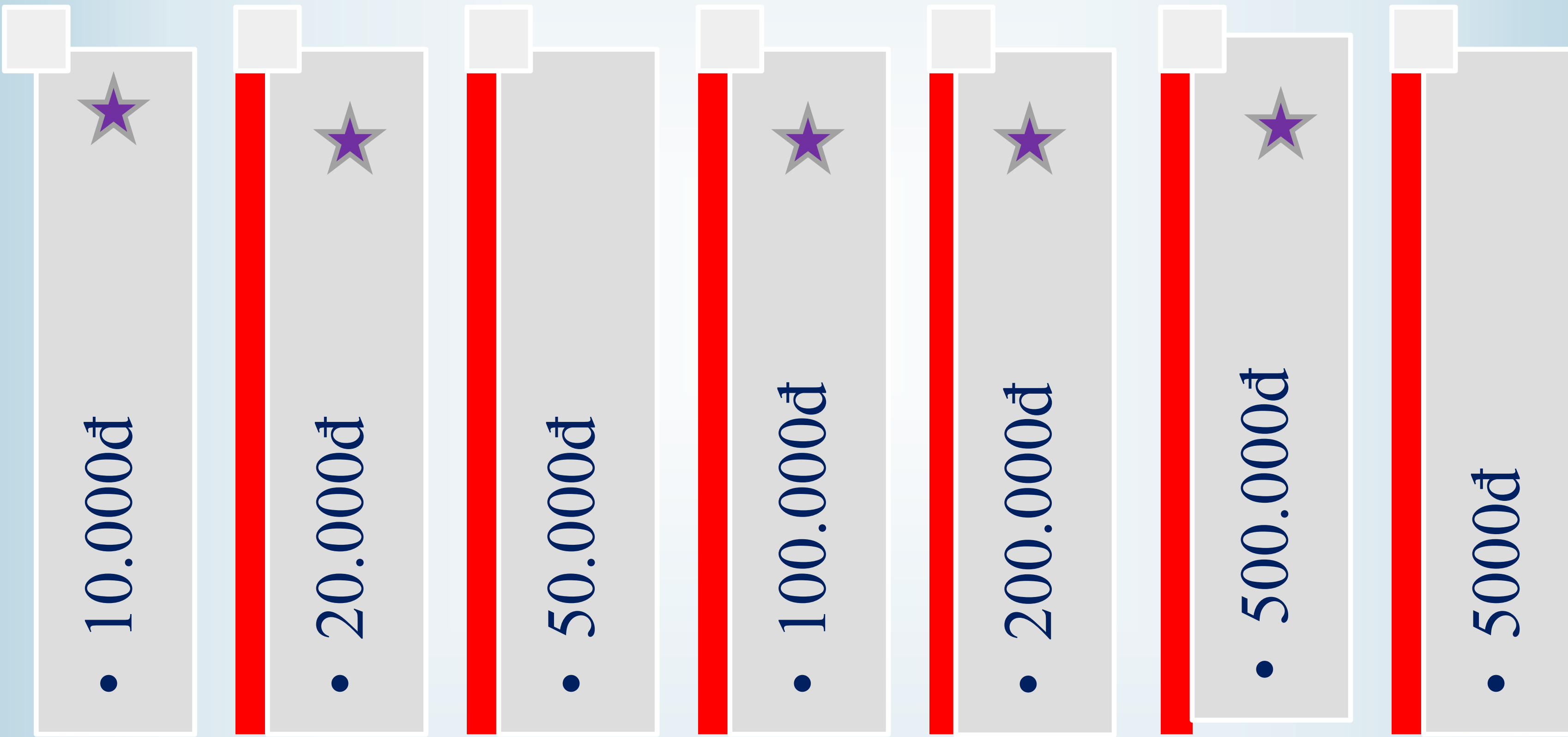
- 10000đ
- 20000đ
- 50000đ
- 100000đ
- 200000đ
- 500000đ
- 5000đ

Ứng dụng

- 10.000đ
- 20.000đ
- 50.000đ
- 100.000đ
- 200.000đ
- 500.000đ
- 5000đ

Ứng dụng

C(7+5−1,5) = *462.*



Ứng dụng

Ví dụ 3 <xác định số nghiệm nguyên không âm>

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15,\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3 \geq 0.$$

Loai 1

$x1 \leq 15$

Loai 2

$x2 \leq 15$

Loại 3

$x3 \leq 15$

C(3+15−1, 15) = C(3+15−1, 2) = *136*

Ứng dụng

Ví dụ 4- 6 <*xác định số nghiệm nguyên không âm*>

Ví dụ .4:

$x_1 + x_2 + x_3 = 12$ với $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq -2$, $x_3 \geq 3$.

Ví dụ 5:

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$ với $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Ví dụ 6:

$x_1 + x_2 + x_3 = 11$ với $3 \geq x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Ứng dụng

- ***Ví dụ 4:***

  Đặt:

  $\grave{x}_1 = x_1 - 1 \geq 0,$

  $\grave{x}_2 = x_2 + 2 \geq 0 ,$

  $\grave{x}_3 = x_3 - 3 \geq 0,$

  Bài toán gốc tương đương:

  $\grave{x}_1 + \grave{x}_2 + \grave{x}_3 = 10$ với $\grave{x}_1 \geq 0$, $\grave{x}_2 \geq 0$, $\grave{x}_3 \geq 0$.

  Kết quả:

  C(3+10−1, 10) = C(3+10−1, 2) = *66.*

Ứng dụng

Ví dụ 5:

- *Đặt ẩn phụ*

$$x_4 \geq 0\,,$$

- *Bài toán gốc tương đương:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

với $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, .

- *Kết quả:*

C(12+4-1,12) = C(12+4-1,3)=455

Ứng dụng

Ví dụ 6:

$$x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \text{ , } x_3 \geq 0$$

$$3 \geq x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$x_1 \geq 4 \text{ , } x_2 \geq 0 \text{ , } x_3 \geq 0$$

Trao đổi