Bài 14

Lôgic vị từ

Discrete Mathematics on 2013-2014

Nguyen Van Hieu
Information Technology Faculty
The University of Danang, University of Science and Technology (UD-UST)

Nội dung

- Nhược điểm của lôgic mệnh đề
- Lôgic vị từ
- Tầm vực của lượng từ
- Thứ tự ưu tiên của lượng từ
- Diễn giải ý nghĩa
- Hình thức hóa ngôn ngữ
- Tóm tắt ý nghĩa lượng từ
- Phủ định lượng từ

Nhược điểm lôgic mênh đề

- Không thể biểu diễn được các phát biểu có biến
  - ✓ $x > 3$
  - ✓ $x = y + 3$
- Các dạng như trên gặp rất nhiều

- Không thể biểu diễn được sự tương đương sau
  - ✓ “Không phải tất cả bạn gái đều đẹp” và “chỉ có một số bạn gái đẹp”.
  - ✓ “Not all integers are even” and “some integers are even”

Lôgic vị từ

- Khắc phục các điểm nêu trên
- Phát biểu x > 3 có 2 phần
  - ✓ Biến x
  - ✓ Tính chất của biến x (x>3), được gọi là vị từ

- Vị từ mô tả tính chất của đối tượng và mối quan hệ giữa chúng.
- Ký hiệu phát biểu P(x)
  - ✓ P(2) là mệnh đề
  - ✓ P(4) là mện đề

Lôgic vị từ

- Xét các câu sau:
  - ✓ "The car Tom is driving is blue"
  - ✓ "The sky is blue"
  - ✓ "The cover of this book is blue"
- Chúng ta có 1 vị từ "Is blue" viết tắt B.

  B(x) nghĩa là "x is blue"

- Biểu diễn các câu
  - ✓ B(The car Tom is driving)
  - ✓ B(The sky)
  - ✓ B(The cover of this book)

Lôgic vị từ

Dạng tổng quát	**Ví dụ**
• Một phát biểu có n biến được ký hiệu P(x1,x2,…xn) được gọi là hàm mệnh đề . P được gọi là vị từ	$P(x, y, z) : x + y = z$ $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

Lôgic vị từ

- Phát biểu x > 3 không phải là mệnh đề
- Để biến x > 3 tạo thành 1 mệnh đề thực hiện 1 trong 2 cách:
- **Cách 1:**

  Gán giá trị cụ thể cho x

- **Cách 2:** Chuyển phát biểu sang dạng
  - ✓ There is a number x, for which x > 3

Lôgic vị từ

- Gán giá trị cho tất cả các biến của P tạo nên mệnh đề
- Cách khác dùng các lượng từ
  - ✓ ∀: với mọi ∀ xP(x) = P(x) là T với mọi x
  - ✓ ∃: tồn tại ∃ *x* P (x) = tồn tại x sao cho P (x) là T
- ➢ Cần miền giá trị của của x

- **Miền giá trị** là tập hợp các đối tượng quan tâm của một biến
- Mệnh đề có giá trị T hoặc F khi miền giá trị đã được xác định

Lôgic vị từ

Ví dụ

- ❑ Mọi sinh viên công nghệ thông tin phải học toán rời rạc
- ✓ P(x) = "x phải học môn toán rời rạc"
- ✓ Mệnh đề: $\forall$ P(x)

Ví dụ

- ❑ Chính xác hơn
- ✓ S(x) = "x là sinh viên cộng nghệ thông tin"
- ✓ P(x) = "x phải học môn toán rời rạc"
- ✓ Mệnh đề: $\forall S(x) \longrightarrow P(x)$

Lôgic vị từ

Ví dụ

- ❑ P(x) = "x>3"
- ✓ Miền giá trị x ∈ $\mathbb{R}$
- ✓ Mệnh đề $\exists x\, P(x)$ là T

Ví dụ

- ❑ Q(x) = "x=x+1"
- ✓ Miền giá trị x ∈ $\mathbb{R}$
- ✓ Mệnh đề: $\exists x\, Q(x)$ là F

Tầm vực của lượng từ

❑ Ký hiệu bởi [ ] hoặc (), nếu không có thì tầm vực là biểu thức nhỏ nhất ngay sau lượng từ.

❑ Biến x là bound nếu
  - ✓ Biến x được gán giá trị
  - ✓ Biến x được lượng từ hóa

❑ Biến x là free nếu nó không có bound

Ví dụ

- $\forall x P(x, y)$
  $thì\ x\ là\ bound\ và\ ý\ là\ free$
- $\forall x(\exists y P(x, y) \vee Q(x, y))$ thì x, y trong P(x,y) là bound, trong khi y trong Q(x,y) là free

Thứ tự các lượng từ

Thứ tự ưu tiên

- Thứ tự lượng từ là quan trọng, chỉ trừ khi Tất cả các lượng từ là "với mọi" hoặc Tất cả là "Tồn tại"
- Đọc từ trái sang phải, áp dụng từ trong ra

Ví dụ

☞ **Ví dụ:**

$\forall x \forall y (x + y = y + x)$

Tvới tất cả $x, y \in \mathbb{R}$

☞ **Ví dụ:**

$\forall x \exists y (x + y = 0)$ **là** T,

trong khi

$\exists y \forall x (x + y = 0)$ **là** F

Diễn giải ý nghĩa

Ví dụ 1

- *Diễn giải phát biểu sau:*

$$\forall x \, \forall y \, (x + y = y + x),$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

➢ x + y = y + x đúng với tất cả số thực x, y

Ví dụ 2

- *Diễn giải phát biểu sau"*

$$\forall x \, \exists y \, (x + y = 0),$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

➢ Mọi số thực x, tồn tại số thực y thỏa mãn x + y = 0

Diễn giải ý nghĩa

Ví dụ 3

- *Diễn giải phát biểu sau:*

$\forall x\, (C(x) \vee \exists\, y(C(y) \wedge F(x,y))$

Trong đó

- C(x): x có máy tính
- F(x,y): x, y là bạn
- x,y thuộc tất cả sinh viên trong trường

Với mọi sinh viên x trong trường, hoặc x có máy tính, hoặc tồn tại sinh viên y có máy tính và sinh viên x, y là bạn

Ví dụ 4

- *Diễn giải phát biểu sau:*

$\exists x\, \forall y \forall z(((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \longrightarrow \neg F(y,z)))$

Trong đó

- F(x,y): x, y là bạn
- x,y, z thuộc tất cả sinh viên trong trường.

Tồn tại một sinh viên x, sao cho với mọi sinh viên y, với mọi sinh viên z khác y, nếu x là bạn của y và x là bạn của z thì y, z không là bạn của nhau.

Hình thức hóa ngôn ngữ

Ví dụ 1

1. "Có sinh viên nào đó trong lớp tham quan Hà nội"
2. "Mọi sinh viên trong lớp đã tham quan Huế hoặc Nha Trang "

Nếu ta đặt câu:
$C(x)$: x **đã thăm Hà Nội**
$D(x)$: x **đã thăm Nha Trang**
$E(x)$: x **đã thăm Vũng Tàu**
Ta có:
(1): $\exists x C(x)$
(2): $\forall x(D(x) \vee E(x))$

Ví dụ 2

- "Mọi người đều có một người bạn tốt nhất"

Nếu ta đặt câu:

- $B(x,y)$: y là bạn tốt nhất của x

Ta có:

$$\forall x \exists y \forall z (B(x,y) \wedge ((y \neq z) \rightarrow \neg B(x,z)))$$

Hình thức hóa ngôn ngữ

Ví dụ 3

"Nếu một người phụ nữ và là cha mẹ, thì người này là mẹ của ai đó"

Nếu ta đặt câu:

- $C(x)$: x **là phụ nữ**
- $D(x)$: x **là cha mẹ**
- $E(x, y)$: x **là mẹ của** y

Ta có:

$$\forall x((C(x) \wedge D(x)) \rightarrow \exists y E(x, y))$$

Tóm tắt ý nghĩa của lượng từ

Phát biểu	Khi nào đúng ?	Khi nào sai ?
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$	$P(x,y)$ là T với mọi x, y	Có một cặp x, y làm cho $P(x,y)$ là F
$\forall x \exists y P(x,y)$	Với mọi x, tồn tại y làm cho $P(x,y)$ là T	Có một x sao cho $P(x,y)$ là Fvới mọi y
$\exists x \forall y P(x,y)$	Tồn tại x sao cho $P(x,y)$ là Tvới mọi y	Với mọi x, tồn tại y làm cho $P(x,y)$ là F
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists y \exists x P(x,y)$	Tồn tại một cặp x, y sao cho $P(x,y)$ là T	$P(x,y)$ là Fvới mọi x, y

Phủ định lượng từ

Mọi sinh viên công nghệ thông tin đều học môn toán rời rạc

$$\forall x\ P(x)$$

Không phải mọi sinh viên công nghệ thông tin đều học môn toán rời rạc.

$$\exists x\ \neg P(x)$$

- $\neg\ \forall x\ P(x)$ tương đương $\exists x\ \neg P(x)$
- $\neg \exists x\ P(x)$ tương đương $\forall x\ \neg P(x)$

What NEXT?