Chương 1
Bài toán đếm-tồn tại

- Các nguyên lý cơ bản
- Các cấu hình tổ hợp cơ bản
- Các công thức tổ hợp
- Các cấu hình tổ hợp suy rộng

1.1. Các nguyên lý cơ bản

1.1.1. Nguyên lý nhân

1.1.2. Nguyên lý cộng

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

1.1.4. Nguyên lý Dirichlet

1.1.1. Nguyên lý nhân

Một hoạt động được thực hiện bởi k *bước:*

Bước 1 có n_1 *cách, bước 2 có* n_2 *cách,*

…,

bước k *có* n_k *cách.*

Tổng số hoạt động là

$$n = n_1.n_2 \ldots n_k$$

$$n = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

1.1.1. Nguyên lý nhân

Dạng tập hợp

Cho k *tập $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Có số phần tử của tập tích Đề-các*

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_k|$$

$$\left|\prod_{i=1}^{k} A_i\right| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$$

1.1.1. Nguyên lý nhân

Ví dụ. Đếm số xâu chữ độ dài 3 gồm các chữ cái trong tập {A, B, C, D, E}

a) *Có thể lặp chữ cái*

b) *Không lặp chữ cái*

Giải.

Gọi $S=s_1s_2s_3$ là xâu chữ độ dài 3 gồm các chữ cái trong tập {A, B, C, D, E}.

a) $\forall i=1..3$, s_i có 5 cách chọn. Theo nguyên lý nhân, số xâu chữ trên là 5x5x5=125.

1.1.1. Nguyên lý nhân

b) *Không lặp chữ cái*

s_1 có 5 cách chọn,

sau khi có s_1 thì s_2 có 4 cách chọn,

sau khi có s_1s_2 thì s_3 có 3 cách chọn.

Theo nguyên lý nhân, số xâu chữ trên là 5x4x3=60

1.1.1. Nguyên lý nhân

Ví dụ Đếm số xâu nhị phân độ dài *n*.

Giải

Gọi $b=b_1b_2...b_n$ là xâu nhị phân độ dài *n*.

$\forall i=1..n$, b_i có 2 cách chọn (0 hoặc 1).

Theo nguyên lý nhân, số xâu nhị phân độ dài n là $2x2x...x2=2^n$.

1.1.1. Nguyên lý nhân

Ví dụ. Đếm số các số lẻ gồm hai chữ số.

Giải.

Gọi n =$\overline{ab}$ là một số lẻ gồm hai chữ số.
Chữ số *a* có 9 cách chọn (1..9), chữ số *b* có 5 cách chọn (1,3,5,7,9).
Theo nguyên lý nhân, số các số lẻ gồm hai chữ số là 9x5=45.

1.1.2. Nguyên lý cộng

Một hoạt động được thực hiện bởi 1 *trong* k *bước riêng biệt: Bước* 1 *có* n_1 *cách, bước* 2 *có* n_2 *cách, ..., bước* k *có* n_k *cách. Tổng số hoạt động là*

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

1.1.2. Nguyên lý cộng

Dạng tập hợp

Đơn giản

Cho hai tập A, B rời nhau. Có $|A \cup B| = |A| + |B|$

Tổng quát

Cho k tập rời nhau từng đôi một $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Có $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$$

1.1.2. Nguyên lý cộng

Ví dụ Đếm số 1 byte có hai bit đầu 00 hoặc 11.

Giải

Gọi A, B là tập các byte (xâu nhị phân độ dài 8) có hai bit đầu 00 hoặc 11 tương ứng.

Theo ví dụ trên, $|A|=|B|=2^6=64$.

Có $A\cap B=\emptyset$. Theo nguyên lý cộng, số byte có hai bit đầu 00 hoặc 11 là $|A|+|B|=64+64=128$.

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Dạng đơn giản: *Cho hai tập A, B. Có*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ví dụ. Đếm số nguyên dương không quá 100 chia hết cho 3 hoặc 7.

Giải. Gọi S={1..100}, A là tập các số trong S chia hết cho 3 và B là tập các số trong S chia hết cho 7. Thì $|A|=33$ và $|B|=14$. $A \cap B$ là tập các số nguyên như thế chia hết cho 3 và 7, nghĩa là chia hết cho 21, $|A \cap B| = 4$. Do đó, số nguyên dương không quá 100 chia hết cho 3 hoặc 7 là

$$|A \cup B| = |A|+|B| - |A \cap B| = 33+14 - 4 = 43.$$

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Ví dụ. Một lớp gồm 50 sinh viên, có 30 sinh viên nữ, và có 35 sinh viên tóc vàng. Chứng tỏ rằng có ít nhất 15 sinh viên nữ tóc vàng.

Giải. Gọi A là tập các sinh viên nữ, B là tập các sinh viên tóc vàng. Thì

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 30 + 35 - |A \cup B|$$
$$\geq 15 \qquad \text{vì } |A \cup B| \leq 50$$

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Ví dụ. Đếm số 1 byte có 2 bit đầu 00 hoặc 2 bit cuối 11.

Giải

Gọi A là tập các số 1 byte có 2 bit đầu 00; B là tập các số 1 byte có hai bit cuối 11.

Có $|A|=|B|=64$.

Số byte có 2 bit đầu 00 và 2 bit cuối 11 là $|A\cap B|=2^4=16$ (4 bit giữa bất kỳ).

Theo nguyên lý bù trừ, số byte có 2 bit đầu 00 hoặc 2 bit cuối 11 là

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=$ 64+64-16=112.

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Đơn giản

Cho hai tập A,B. Có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Cho ba tập A,B,C. Có

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Tổng quát

Cho k *tập A_1, A_2, ... A_k. Có*

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{k+1} N_k$

Trong đó N_i là số phần tử của tất cả các giao của *i* tập trong *k* tập này

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} N_i$$

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Ứng dụng

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = N_1 - N_2 + \ldots (-1)^{k+1} N_k$

Số phần tử thuộc ít nhất một trong *k* tập trên được tính như trên.

Tuy nhiên, có khi cần đếm số phần tử không thuộc tập nào ở trên cả.

Gọi U là tập vũ trụ hữu hạn, chứa *tất cả các tập trên* và chứa *tất cả các phần tử không thuộc tập nào cả*.

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Ứng dụng

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{k+1} N_k$

Đặt $N=|U|$ và N^* là số phần tử không thuộc tập nào cả.

Có $N^* = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$

$= N - N_1 + N_2 - N_3 + \ldots + (-1)^k N_k$

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Ví dụ. *Có* n *người dự tiệc mỗi người đội một mũ và để mũ nơi móc. Khi ra về, do cúp điện nên mọi người có thể lấy lại nhầm mũ của mình. Đếm số trường hợp mà không một ai nhận đúng mũ của mình cả.*

Giải. Gọi U là tập tất cả các cách phân *n* mũ cho *n* người. Có N=n!

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

∀ i=1..n, N_i là số hoán vị mà có *i* người nhận đúng mũ. Số cách chọn ra *i* người là C(n,i); số cách phân mũ bất kỳ cho *n-i* người còn lại là (n-i)!

Hay N_i=(n-i)!C(n,i)

Vậy

$$N^* = n! - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (n-i)! C_n^i$$

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

$$N^* = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (n-i)! C_n^i$$

$$N^* = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!}$$

$$N^* = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Ví dụ. Đếm số toàn ánh từ X vào Y,

$|X|=k$, $|Y|=n$.

Giải.

Gọi U là tập tất cả các ánh xạ f: $X \rightarrow Y$.

Có $N=n^k$.

Giả sử $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

$\forall$ i=1..n-1, N_i là số ánh xạ với *i* phần tử không có tạo ảnh.

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Ví dụ. *Đếm số toàn ánh từ X vào Y, |X|=k, |Y|=n.*

$\forall$ i=1..n-1, N_i là số ánh xạ với *i* phần tử không có tạo ảnh. Cách lấy ra *i* phần tử để không có tạo ảnh là C(n, i) và các phần tử còn lại bất kỳ. Vậy N_i bằng C(n, i) nhân với số ánh xạ từ X vào tập con gồm *n-i* phần tử còn lại.

$$N_i = C(n, i)(n-i)^k$$

1.1.3. Nguyên lý bù trừ

Theo nguyên lý bù trừ, số toàn ánh là

$$N^* = n^k + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (n-i)^k C_n^i$$

a) k=4, n=2: $N^*=2^4-1^4C(2,1) = 16-2 = 14$

b) k=4, n=3: $N^*=3^4-2^4C(3,1)+1^4C(3,2)= 81- 48+3=36$

c) k=4, n=4: $N^*=4^4-3^4C(4,1)+2^4C(4,2)-1^4C(4,3)$

$=256 - 324 + 96 - 4=24$ (=4!)

1.1.4. Nguyên lý Dirichlet

Đơn giản

Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$.
Nếu $|X| > |Y|$ thì tồn tại hai phần tử phân biệt $x_1, x_2 \in X$ sao cho $f(x_1) \equiv f(x_2)$.

Tổng quát

Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$.
Đặt $m=|X|$, $n=|Y|$ *và* $k=\lceil m/n \rceil$.
Tồn tại k phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ sao cho $f(x_1) \equiv f(x_2) \equiv \ldots \equiv f(x_k)$

1.1.4. Nguyên lý Dirichlet

Ví dụ

1. Chứng tỏ rằng trong *n+1* số nguyên dương có giá trị không quá *2n* thì có một số là bội của số khác.
2. Chứng tỏ rằng số hữu tỉ là một số thập phân vô hạn tuần hoàn.
3. Một bữa tiệc có *n* người. Chứng tỏ rằng có hai người cùng số người quen.
4. Cho tam giác đều cạnh 2. Phải chọn trong tam giác này *ít nhất* bao nhiêu điểm để đảm bảo có hai điểm cách nhau không quá 1.

1.1.4. Nguyên lý Dirichlet

Ví dụ(tt)

5. Một võ sĩ thi đấu liên tục trong 10 ngày, mỗi ngày ít nhất một trận và tổng số không quá 15 trận. Chứng tỏ rằng có những ngày liên tiếp võ sĩ đã thi đấu đúng 4 trận.

HD: gọi a_i là số trận đấu đến hết ngày thứ i. Có

$1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_{10} \le 15$ và $5 \le 4+a_1 < 4+a_2 < \ldots < 4+a_{10} \le 19$

20 số này nhận giá trị 1..19.

1.2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản

1.2.1. Chỉnh hợp lặp

1.2.2. Chỉnh hợp

1.2.3. Hoán vị

1.2.4. Tổ hợp

1.2.5. Các công thức tổ hợp

1.2.1. Chỉnh hợp lặp

Cho tập X gồm n *phần tử,* |X|=n. *Một chỉnh hợp lặp chập* k *của* X *là một bộ có thứ tự gồm* k *phần tử của* X, *trong đó các phần tử có thể lặp.*

1.2.1. Chỉnh hợp lặp

Gọi $S=s_1s_2..s_k$ là một chỉnh hợp lặp X chập *k*.

$\forall i=1..k$, s_i có *n* cách chọn.

Theo ngyên lý nhân, số chỉnh hợp lặp X chập *k* là

$$F_n^k = n^k$$

1.2.2. Chỉnh hợp

Cho tập X *gồm* n *phần tử,* |X|=n. *Một chỉnh hợp (không lặp) chập* k *của* X *là một bộ có thứ tự gồm* k *phần tử của* X, *trong đó các phần tử không được lặp.*

1.2.2. Chỉnh hợp

Gọi $S=s_1s_2..s_k$ là một chỉnh hợp X chập *k*.

s_1 có *n* cách chọn.

Sau khi có s_1 thì s_2 có *n-1* cách chọn.

Sau khi có s_1s_2 thì s_3 có *n-2* cách chọn.

…

Sau khi có $s_1s_2\ldots s_{k-1}$ thì s_k có *n-k+1* cách chọn.

1.2.2. Chỉnh hợp

Theo ngyên lý nhân, số chỉnh hợp không lặp n chập k là

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1.2.3. Hoán vị

Cho tập X *gồm* n *phần tử,* |X|=n.
Một hoán vị của X *là một cách sắp xếp* n *phần tử của* X.

1.2.3. Hoán vị

Rõ ràng, một hoán vị của X là một chỉnh hợp không lặp X chập *n*.

Vậy số hoán vị của X là

$$P_n = A(n,n)$$

$$P_n = n!$$

1.2.4. **Tổ hợp**

Cho tập X gồm n *phần tử,* |X|=n. *Một tổ hợp chập* k *của* X *là một tập con gồm* k *phần tử của* X. *Nói cách khác, là một bộ không lặp và không thứ tự gồm* k *phần tử của* X.

1.2.4. Tổ hợp

Một tổ hợp chập k của X phát sinh được $k!$ hoán vị của nó là các chỉnh hợp X chập k. Vậy số tổ hợp X chập k là

$$C(n,k) = A(n,k)/k!$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

1.2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản

❖ *ví dụ*

Cho ánh xạ f: X→ Y, |X|=k, |Y|=n. Đếm số ánh xạ f

a) Bất kỳ.

b) Đơn ánh.

c) Song ánh.

1.2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản

- *Giải*

a) Bất kỳ. Bằng số chỉnh hợp lặp: n^k

b) Đơn ánh. Bằng số chỉnh hợp: $n!/(n-k)!$

c) Song ánh(n=k). Bằng số hoán vị: $n!$

1.2.5. Các công thức tổ hợp

$C(n,0)=C(n,n)=1$

$C(n,n\text{-}k)=C(n,k)$

$C(n,k)=C(n\text{-}1,k\text{-}1)+ C(n\text{-}1,k)$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

1.2.5. Các công thức tổ hợp

Ví dụ.

Đếm số tập con của tập X,|X|=*n*.

Giải.

Thay x = y = 1 vào nhị thức Newton có số tập con của tập X là 2^n.

1.2.5. Các công thức tổ hợp

Cách khác, gọi $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, mỗi tập con A của X đặt tương ứng với xâu bit $b= b_1b_2\ldots b_n$ với ý nghĩa: $b_i=1$ khi và chỉ khi $x_i \in A$.

Có 2^n xâu b nên có 2^n tập con A.

1.2.5. Các công thức tổ hợp

Ví dụ. Cho tập X, |X|=n.

Chứng tỏ số tập con có số lẻ và số chẵn phần tử bằng nhau.

Giải.

Thay x = 1 và y = -1 vào nhị thức Newton có kết quả.

1.3. Cấu hình tổ hợp suy rộng

1.3.1. Hoán vị lặp

1.3.2. Tổ hợp lặp

1.3.1. Hoán vị lặp

Cho **n** *phần tử với* k *loại: loại* 1 *có* n_1 *phần tử, loại* 2 *có* n_2 *phần tử, ..., loại* k *có* n_k *phần tử. Một cách sắp xếp* n *phần tử này gọi là một hoán vị lặp.*

1.3.1. Hoán vị lặp

Gọi $S=s_1s_2...s_n$ là một hoán vị lặp trên.

Có $C(n, n_1)$ cách chọn n_1 vị trí để đặt các phần tử loại 1.

Sau khi đặt các phần tử loại 1, có $C(n-n_1, n_2)$ cách chọn n_2 vị trí để đặt các phần tử loại 2.

...

Sau khi đặt các loại 1...k-1 có $C(n-n_1-...-n_{k-1}, n_k)$ cách chọn n_k vị trí để đặt các phần tử loại k.

1.3.1. Hoán vị lặp

Theo nguyên lý nhân, số hoán vị lặp trên là

$C(n, n_1)C(n\text{-}n_1, n_2)\ldots C(n\text{-}n_{1\text{-}}\ldots\text{-}n_{k\text{-}1}, n_k)$

$$P(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)=n!/(n_1!n_2!\ldots n_k!)$$

1.3.1. Hoán vị lặp

- Các ví dụ
- Đếm số cách sắp xếp các xâu chữ

a) MISSISSIPPI. ĐS: 11!/(1!4!4!2!)

b) SUCCESS. ĐS: 7!/(3!1!2!1!)

- Đếm số cách sắp xếp 9 viên bi gồm 2 bi xanh, 3 bi đỏ và 4 bi vàng thành một hàng.

  ĐS: 9!/(2!3!4!)

1.3.2. Tổ hợp lặp

Cho n *loại phần tử, mỗi loại có không ít hơn* k *phần tử. Một cách chọn ra* k *phần tử (có thể lặp)từ* n *loại phần tử này gọi là một tổ hợp lặp .*

1.3.2. Tổ hợp lặp

Nói cách khác, *cho* $|X|=n$, *một tổ hợp lặp chập* k *của X là một bộ không thứ tự gồm* k *phần tử của X, trong đó các phần tử có thể lặp.*

1.3.2. Tổ hợp lặp

Giả sử mỗi tổ hợp lặp $S=s_1s_2..s_k$ được sắp xếp như sau: *đầu tiên là tất cả các phần tử* loại 1, *đến các phần tử* loại 2, ..., *cuối cùng là các phần tử* loại n.

Biểu diễn *k* phần tử bởi *k* dấu "x" và dùng *n-1* dấu"|" để ngăn cho *n* loại

1.3.2. Tổ hợp lặp

Vậy mỗi tổ hợp lặp tương ứng với một cách chọn *n-1* vị trí trong *k+n-1* vị trí để đặt n-1dấu "|". Có C(k+n-1, n-1) cách chọn. Nên số tổ hợp lặp trên là

C(k+n-1, n-1) = C(k+n-1, k)

1.3.2. Tổ hợp lặp

Ví dụ. Đếm số cách mua 10 trái cây với 3 loại: *cam*, *quít*, *xoài*.

ĐS: C(10+2, 2)=C(12, 2)=66

Ví dụ. Đếm số nghiệm nguyên $x+y+z = 12$ với $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

ĐS: C(12+2, 2)=C(14, 2)=91

1.3.2. Tổ hợp lặp

Ví dụ. Đếm số nghiệm nguyên $x+y+z = 12$ với $x \geq 1$, $y \geq -2$, $z \geq 3$.

Đặt $x'=x-1$, $y'=y+2$, $z'=z-3$

Tương đương

$x'+y'+z' = 10$ với $x' \geq 0$, $y' \geq 0$, $z' \geq 0$.

ĐS: $C(10+2, 2)=C(12, 2)=66$

1.3.2. **Tổ hợp lặp**

Ví dụ. Đếm số nghiệm nguyên

$x+y+z \le 12$ với $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Thêm ẩn phụ $t=12-(x+y+z) \ge 0$

Tương đương

$x+y+z+t = 12$ với $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $t \ge 0$.

ĐS: $C(12+3, 3)=C(15, 3)=455$

1.3.2. **Tổ hợp lặp**

Ví dụ. Đếm số nghiệm nguyên

$x+y+z=11,\ 0\le x\le 3,\ \ 0\le y\le 4,\ 0\le z\le 6$

Gọi U là tập tất cả các nghiệm không âm của phương trình. Có N=C(11+2,2)

Gọi A_1 là tập nghiệm với $x\ge 4,\ y\ge 0,\ z\ge 0$

A_2 là tập nghiệm với $y\ge 5,\ x\ge 0,\ z\ge 0$

A_3 là tập nghiệm với $z\ge 7,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

1.3.2. **Tổ hợp lặp**

Theo nguyên lý bù trừ

Có $N^* = N - |A1| - |A2| - |A3|$

$+ |A1 \cap A2| + |A1 \cap A3| + |A2 \cap A3|$

$- |A1 \cap A2 \cap A3|$

$N = 78$, $|A1| + |A2| + |A3| = 79$,

$|A1 \cap A2| + |A1 \cap A3| + |A2 \cap A3| = 7$

$|A1 \cap A2 \cap A3| = 0$. Vậy $N^* = 6$

1.3.2. Tổ hợp lặp

6 nghiệm đó là:

(1, 4, 6), (2, 3, 6)

(2, 4, 5), (3, 2, 6)

(3, 3, 5), (3, 4, 4)