TÀI LIỆU TOÁN CN - Hdhdhs

Toán ứng dụng CNTT (Trường Đại học Bách Khoa - Đại học Đà Nẵng)

TỔNG QUÁT VỀ ĐỊNH LÝ HEAVISIDE

1. Định lý *heaviside*:

giả sử $F(s)e^{st}$ *có* n *cực điểm tại* a_k

$$\boldsymbol{L^{-1}\big(F(s)\big) = \sum_{k=0}^{n} Res[F(s)e^{st}, a_k\,]}$$

2. Định lý *heaviside* 1:

$F(s)$ *có dạng* $\dfrac{p(s)}{q(s)}$

$*$ *nếu* $q(s)$ *chỉ có* n *nghiệm thực là* s_i *thì*:

số hạng tương ứng của nó trong $f(t)$ là: $\boldsymbol{\dfrac{p(s_i)}{q'(s_i)}e^{s_i t}}$ ***hoặc*** $\boldsymbol{\dfrac{p(s_i)}{Q_i(s_i)}e^{s_i t}}$

$$\boldsymbol{\rightarrow L^{-1}\big(F(s)\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p(s_i)}{q'(s_i)} e^{s_i t}}$$

hoặc

$$\boldsymbol{\rightarrow L^{-1}\big(F(s)\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p(s_i)}{Q_i(s_i)} e^{s_i t}}$$

trong đó $Q_i(s) = \dfrac{q(s)}{s - s_i}$ (*tích các thừa số của* $q(s)$ *ngoại trừ* $s - s_i$)

Lưu ý: Có thể áp dụng định lý này cho nghiệm phức

3. Định lý *heaviside* 2:

$F(s)$ *có dạng* $\dfrac{p(s)}{q(s)}$

Nếu $q(s)$ *chỉ có nghiệm kép bậc* n *là* $s = a$

thì số hạng tương ứng của nó trong $f(t)$ là: $\boldsymbol{e^{at} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(n-k)}(a)t^{k-1}}{(n-k)!\,(k-1)!}}$

trong đó: $f(s) = (s-a)^n F(s)$

$$\boldsymbol{\rightarrow L^{-1}\big(F(s)\big) = e^{at} \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(n-k)}(a)t^{k-1}}{(n-k)!\,(k-1)!}}$$

Lưu ý: Nếu mà $\boldsymbol{q(s)}$ ***có chứa nhiều nghiệm kép tương ứng với nhiều bậc khác nhau thì ta xét từng bậc một rồi tính số hạng tương ứng của nó trong*** $\boldsymbol{f(t)}$ ***rồi cộng tất cả các số hạng lại với nhau là ta thu được hàm*** $\boldsymbol{f(t) = L^{-1}\big(F(s)\big)}$

3. Định lý heaviside 3:

$F(s)$ *có dạng* $\dfrac{p(s)}{q(s)}$

$*$ *nếu* $q(s)$ *chỉ có chứa n thừa số* $(s+a_i)^2+{b_i}^2$

$f_i(s) = \left[(s+a_i)^2+{b_i}^2\right]F(s)$

nghiệm phức của $q(s)$ *là* $s=-a_i \pm b_i j$

chọn 1 nghiệm bất kì ở đây ta chọn $s=-a_i+b_i j$

$f_i(-a+bj) = x_i + y_i j$

$\rightarrow$ *số hạng tương ứng của nó trong* $f(t)$ *là:* $\dfrac{e^{-a_i t}}{b_i}[y_i \cos(b_i t) + x_i \sin(b_i t)]$

$$L^{-1}\big(F(s)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-a_i t}}{b_i}[y_i \cos(b_i t) + x_i \sin(b_i t)]$$

4. Tổng quát

Nếu $F(s)=\dfrac{p(s)}{q(s)}$ *trong đó* $q(s)$ *vừa chứa nghiệm đơn* s_i *, nghiệm kẹp* c_i *bậc n và thừa số* $(s+a_i)^2+{b_i}^2$ *thì ta chỉ cần tính các số hạng tương ứng của từng thành phần trong* $f(t)$ *rồi cộng các số hạng đó lại với nhau ta được hàm* $f(t)=L^{-1}\big(F(s)\big)$

Các công thức suy ra từ công thức euler:

$\cos z = \dfrac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}$	$ch z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$	$\sin jz = j\,sh z$	$sh jz = j \sin z$
$\sin z = \dfrac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}$	$sh z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$	$\cos jz = ch z$	$ch jz = \cos z$

$CÁC\ TÍNH\ CHẤT\ BIẾN\ ĐỔI\ LAPLACE$

$$\text{Đ}N: F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

1. $Laplace\ thuận$

$L\{1\} = \frac{1}{s}$	$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$	$L\{Chat\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$
$L\{t\} = \frac{1}{s^2}$	$L\{cosat\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$	$L\{shat\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$
$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$L\{sinat\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$	$L\{e^{at} sinbt\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
$L\{\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}$	$L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$L\{e^{at} cosbt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$

$Tính\ tuyến\ tính$	$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$
$Tính\ chất\ dời$	$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$
$Tính\ đồng\ dạng$	$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$Tính\ chậm\ trễ\ của\ gốc$	$L\{u(t-\tau) f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} F(s)$
$Tính\ đạo\ hàm\ f^{(n)}(t)$	$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n.F(s) - s^{n-1}.f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$Tính\ đạo\ hàm\ ảnh$	$L\{t^n.f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$
$Tính\ tích\ phân$	$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$
$Hàm\ \frac{f(t)}{t}$	$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)ds$

2. $Laplace\ ngược$

$Tính\ tuyến\ tính$	$L^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = af(t) + bg(t)$
$Tính\ chất\ dời$	$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$
$Tính\ đồng\ dạng$	$L^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = af(at)$
$Tính\ đạo\ hàm\ ảnh$	$L^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n.f(t)$
$Tính\ tích\ phân$	$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(t)dt$

CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

$$ĐN: F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-jwt}dt$$

$f(t)$	$F(w)$
$0,\ với\ t < 0$ $e^{-at},\ với\ t \geq 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$e^{at},\ với\ t \leq 0$ $e^{-at},\ với\ t \geq 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$-e^{at},\ với\ t \leq 0$ $e^{-at},\ với\ t \geq 0$	$\frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$
$0,\ với\ -\infty < t < -k$ $a, với\ -k \leq t \leq 0$ $b, với\ 0 \leq t \leq l$ $0,\ với\ l < t < \infty$	$\frac{1}{j\omega}[(b-a) + ae^{j\omega k} - be^{-j\omega l}]$
$e^{at},\ với\ t \leq 0$ $e^{-at},\ với\ t \geq 0$	$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ (\frac{a}{a^2+\omega^2})$
$-e^{at},\ với\ t \leq 0$ $e^{-at},\ với\ t \geq 0$	$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ (\frac{\omega}{a^2+\omega^2})$

Tính tuyến tính	$F\,\{af(t) + bg(t)\} = aF\{f(t)\} + bF\,\{g(t)\}$
Tính đối xứng	$F\{f(t)\} = F(\omega)\ thì\ \ F\{F(t)\} = 2\pi\, f(\omega)$
Tính chất thay đổi thang thời gian	$F\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), với\ a\ là\ số\ thực\ dương$
Tính dịch thời gian	$F\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}F(\omega)$
Tính dịch tần số	$F\{e^{j\omega_0 t}f(t)\} = F(\omega - \omega_0)$
Tính vi phân thời gian và hệ quả	$F\{f'(t)\} = j\omega\, F(\omega)$ $F\left\{f^{(n)}(t)\right\} = (j\omega)^n\, F(\omega)$
Tính vi phân tần số và hệ quả	$F\{-jt\, f(t)\} = F'(\omega)$ $F\{t\, f(t)\} = j\, F'(\omega)$ $F\{t^n f(t)\} = j^n F^{(n)}\,(\omega)$

$*$ ***Tích chập**: Cho $f(t)$ và $g(t)$, hàm $h(t)$ xác định bởi tích phân*

$$h(t) = \int_a^{t-a} f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$$

$DN\text{Đ}$

Ký hiệu: $\boldsymbol{h = f * g = g * f}$

Khi $\boldsymbol{a = 0}$

$$\boldsymbol{h(t) = \int_0^t f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda}$$

được ***gọi là tích chập một phía của*** $\boldsymbol{f(t)}$ ***và*** $\boldsymbol{g(t)}$ ***trên khoảng*** $\boldsymbol{[0,\ t]}$.

Khi $\boldsymbol{a = -\infty}$

$$\boldsymbol{h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda}$$

được ***gọi là tích chập hai phía của*** $\boldsymbol{f(t)}$ ***và*** $\boldsymbol{g(t)}$ **trên *khoảng*** $\boldsymbol{(-\infty, \infty)}$.

$*$ ***Tích chập tần số***

$F\{\boldsymbol{f(t) \cdot g(t)}\} = \boldsymbol{\frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)}$

BÀI TẬP VỀ LAPLACE

Laplace thuận:

BT1: $\boldsymbol{f(t) = sin^2 t}$

ta có $f(t) = sin^2 t = \frac{1 - cos2t}{2} = \frac{1}{2}(1 - cos2t)$

Áp dụng tính chất tuyến tính:

$L(sin^2 t) = L\left(\frac{1}{2}(1 - cos2t)\right) = \frac{1}{2}(L(1) - L(cos2t)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{2}{s(s^2+4)}$

BT2: $\boldsymbol{f(t) = te^t cost}$

$F(s) = L(e^t cost) = G(s-1) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$

Áp dụng tính chất đạo hàm ảnh:

$\rightarrow L\big(f(t)\big) = L(te^t cost) = -F'(s) = -\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right]' = \frac{(s-1)^2-1}{[(s-1)^2+1]^2}$

BT3: $\boldsymbol{f(t) = \int_0^t x^2 e^{-x} dx}$

ta có: $G(s) = L(e^{-x}) = \frac{1}{s+1}$

Áp dụng tính chất đạo hàm ảnh:

$DNĐ$

$$F(s) = L(x^2e^{-x}) = (-1)^2G^{(2)}(s) = \left(\frac{1}{s+1}\right)^{(2)} = \left(\frac{-1}{(s+1)^2}\right)^{(1)} = \frac{2}{(s+1)^3}$$

Áp dụng tính chất tích phân gốc:

$$\rightarrow L\big(f(s)\big) = L\left(\int_0^t x^2e^{-x}dx\right) = \frac{F(s)}{s} = \frac{2}{s(s+1)^3}$$

BT4: $\boldsymbol{f(t) = t^2\sin(bt)}$

ta có: $F(s) = L\big(sin(bt)\big) = \dfrac{b}{s^2+b^2}$ *Áp dụng tính chất đạo hàm ảnh*:

$$\rightarrow\ L\big(f(t)\big) = L\big(t^2\sin(bt)\big) = (-1)^2F^{(2)}(s) = \left(\frac{b}{s^2+b^2}\right)^{(2)}$$

$$= \left(\frac{-2sb}{(s^2+b^2)^2}\right)^{(1)}$$

$$= \frac{-2b(s^2+b^2)^2 + 2sb.2(s^2+b^2).2s}{(s^2+b^2)^4}$$

$$= \frac{6s^2b - 2b^3}{(s^2+b^2)^3}$$

Laplace ngược:

BT1: $\boldsymbol{F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+3}}$

Cách 1: $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+3} = \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+3}\right)$

Áp dụng tính chất tuyến tính:

$$\rightarrow f(t) = L^{-1}\big(F(s)\big) = L^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)\right) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$$

Cách 2:

$F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+3} = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ *trong đó* $p(s) = 1$ *và* $q(s) = s^2+4s+3 \rightarrow q'(s) = 2s+4$

$s^2+4s+3 = 0 \rightarrow s_1 = -1$ *hoặc* $s_2 = -3$

$p(-1) = p(-3) = 1; q'(-1) = \dfrac{1}{2}; q'(-3) = \dfrac{-1}{2}$

Áp dụng định lý heaviside 1:

$$f(t) = L^{-1}\big(F(s)\big) = \sum_{i=1}^{2}\frac{p(s_i)}{q'(s_i)}e^{s_it} = \frac{p(-1)}{q'(-1)}e^{-t} + \frac{p(-3)}{q'(-3)}e^{-3t} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$$

$DNĐ$

***Cách* 3**:

$$F(s)=\frac{1}{s^2+4s+3}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

Đặt $G(s)=\frac{1}{s+1}\to g(t)=L^{-1}\big(G(s)\big)=e^{-t}\to g(x)=e^{-x}$

$H(s)=\dfrac{1}{s+3}\to h(t)=L^{-1}\big(H(s)\big)=e^{-3t}\to h(t-x)=e^{-3(t-x)}=e^{3x}.e^{-3t}$

Áp dụng tích phân chập ta có:

$$\begin{aligned}f(t)=L^{-1}\big(F(s)\big)=L^{-1}\big(G(s).H(s)\big)&=\int_0^t g(x).h(t-x)dx\\&=\int_0^t e^{-x}.e^{3x}.e^{-3t}dx\\&=e^{-3t}\int_0^t e^{2x}dx\\&=e^{-3t}\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^t=\frac{e^{-t}}{2}-\frac{e^{-3t}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)\end{aligned}$$

***BT*2**: $\boldsymbol{F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+4)}}$

***Cách* 1**: $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+4)}=\dfrac{\frac{2}{s^2+2^2}}{2s}=\dfrac{G(s)}{2s}$ *với* $G(s)=\dfrac{2}{s^2+2^2}$

đặt $g(t)=L^{-1}\big(G(s)\big)=L^{-1}\left(\dfrac{2}{s^2+2^2}\right)=\sin(2t)$

Áp dụng tính chất tích phân gốc:

$$\begin{aligned}\to f(t)=L^{-1}\big(F(s)\big)=L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+4)}\right)=L^{-1}\left(\frac{G(s)}{2s}\right)&=\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\\&=\frac{1}{2}\int_0^t g(t)dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^t\sin(2t)\,dt=\frac{1-\cos(2t)}{4}=\frac{sin^2t}{2}\end{aligned}$$

***Cách* 2**: $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+4)}=\dfrac{1}{4s}-\dfrac{s}{4(s^2+4)}$

Áp dụng tính chất tuyến tính:

$$\begin{aligned}f(t)=L^{-1}\big(F(s)\big)=L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+4)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{4s}-\frac{s}{4(s^2+4)}\right)&=\frac{1}{4}\left(L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\right)\\&=\frac{1}{4}(1-cos2t)=\frac{sin^2t}{2}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{Cách\ 3}: F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$

$ta\ có: s(s^2+4) = 0\ có\ nghiệm\ thực\ là\ s = 0$

$*\ xét\ s = 0$

$p(s) = 1$

$q(s) = s(s^2+4) \rightarrow q'(s) = 3s^2 + 4$

$p(0) = 1; q'(0) = 4$

$áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 1:$

$\rightarrow số\ hạng\ tương\ ứng\ của\ nó\ trong\ f(t)\ là: \dfrac{p(0)}{q'(0)}e^{0t} = \dfrac{1}{4}$

$*\ xét\ s^2 + 4$

$vì\ q(s) có\ chứa\ thừa\ số\ (s+a)^2 + b^2\ trong\ đó\ a = 0\ và\ b = 2$

$chọn\ s = 2j$

$f(s) = (s^2+4)F(s) = \dfrac{1}{s} \rightarrow f(2j) = \dfrac{-1}{2}\mathrm{j}$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 3:$

$\rightarrow số\ hạng\ tương\ ứng\ của\ nó\ trong\ f(t)\ là:$

$\dfrac{e^{-at}}{b}\left[Im\big(f(2j)\big)cosbt + Re\big(f(2i)\big)sinbt\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-1}{2}cos2t + 0\right] = -\dfrac{1}{4}cos2t$

$\rightarrow\ f(t) = L^{-1}\big(F(s)\big) = L^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}cos2t = \dfrac{1}{4}(1-\cos(2\mathrm{t})) = \dfrac{sin^2t}{2}$

$\boldsymbol{BT3}:\ \boldsymbol{F(s)} = \dfrac{\boldsymbol{2s+5}}{\boldsymbol{s^2+4s+13}}$

$\boldsymbol{Cách\ 1}:$

$Ta\ có: F(s) = \dfrac{2s+5}{s^2+4s+13} = \dfrac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2} = 2\dfrac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \dfrac{3}{3[(s+2)^2+3^2]}$

$$\begin{aligned}\rightarrow f(t) = L^{-1}\big(F(s)\big) = L^{-1}\left(\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}\right) &= L^{-1}\left(2\dfrac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \dfrac{3}{3[(s+2)^2+3^2]}\right)\\ &= 2.L^{-1}\left(\dfrac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right) + \dfrac{1}{3}L^{-1}\left(\dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}\right)\\ &= 2e^{-2t}\cos(3t) + \dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin(3t)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{Cách\ 2}:$

$F(s) = \dfrac{2s+5}{s^2+4s+13} = \dfrac{2s+5}{(s+2)^2+3^2}$

$DNĐ$
$xét\ (s+2)^2+3^2$

$vì\ q(s) có\ chứa\ thừa\ số\ (s+a)^2+b^2\ trong\ đó\ a=2\ và\ b=3$

$f(s)=(s^2+4s+13)F(s)=2s+5 \rightarrow f(-2+3j)=1+6j$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 3$:

$số\ hạng\ tương\ ứng\ của\ nó\ trong\ f(t)\ là$:

$$\frac{e^{-at}}{b}\left[Im\big(f(1+6j)\big)cosbt+Re\big(f(1+6j)\big)sinbt\right]=2.e^{-2t}\cos(3t)+\frac{1}{3}e^{-2t}\sin(3t)$$

$$\rightarrow\ f(t)=L^{-1}\big(F(s)\big)=L^{-1}\left(\frac{2s+5}{(s+2)^2+3^2}\right)=2e^{-2t}\cos(3t)+\frac{1}{3}e^{-2t}\sin(3t)$$

$\boldsymbol{BT\ 4}$: $\boldsymbol{F(s)=\ \ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)}$

$Ta\ có$: $F(s)=\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)=ln(s+1)-ln(s-1)$

$$F'(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}$$

$$đặt\ g(t)=\ L^{-1}\big(F'(s)\big)=L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right)=e^{-t}-e^{t}\ =-t.f(t)$$

$$\rightarrow f(t)=\frac{e^{t}-e^{-t}}{t}$$

$\boldsymbol{BT\ 5}$: $\boldsymbol{F(s)=\frac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}}$

$\boldsymbol{Cách\ 1}$:

$$ta\ có: F(s)=\frac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{3}{s+1}+\frac{3}{s+2}$$

$Áp\ dụng\ tính\ chất\ tuyến\ tính$:

$$\rightarrow f(t)=L^{-1}\big(F(s)\big)=L^{-1}\left(\frac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{3}{s+1}+\frac{3}{s+2}\right)$$
$$=L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-3.L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+3.L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$
$$=1-3e^{-t}+3e^{-2t}$$

$\boldsymbol{Cách\ 2}$:

$$F(s)=\frac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{p(s)}{q(s)}\ trong\ đó\ p(s)=s^2+2\ và\ q(s)=s(s+1)(s+2)$$

$$q'(s)=3s^2+6s+2$$

$DN\text{Đ}$

$ta\ có: s(s+1)(s+2)=0 \rightarrow s_1=0, s_2=-1, s_3=-2$

$p(0)=2, p(-1)=3, p(-2)=6; q'(0)=2, q'(-1)=-1, q'(-2)=2$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 1:$

$$f(t)=L^{-1}\big(F(s)\big)=\sum_{i=1}^{3}\frac{p(s_i)}{q'(s_i)}e^{s_i t}=\frac{p(0)}{q'(0)}e^{-0}+\frac{p(-1)}{q'(-1)}e^{-t}+\frac{p(-2)}{q'(-2)}e^{-2t}=1-3e^{-t}+3e^{-2t}$$

$\boldsymbol{BT\ 6}: \boldsymbol{F(s)=\frac{s}{(s+2)^2(s^2+2s+10)}}$

$$F(s)=\frac{s}{(s+2)^2(s^2+2s+10)}=\frac{p(s)}{q(s)}$$

$trong\ đó\ p(s)=s\ và\ q(s)=(s+2)^2(s^2+2s+10)=(s+2)^2((s+1)^2+3^2)$

$ta\ có: q(s)=(s+2)^2(s^2+2s+10)=0\ có\ nghiệm\ kép\ là\ s=-2$

$*\ xét\ s=-2$

$$đặt: f(s)=(s+2)^2F(s)=\frac{s}{s^2+2s+10}\rightarrow f(-2)=\frac{-1}{5}$$

$$f'(s)=\frac{s^2+2s+10-s(2s+2)}{(s^2+2s+10)^2}=\frac{-s^2+10}{(s^2+2s+10)^2}\rightarrow f'(-2)=\frac{3}{50}$$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 2:$

$số\ hạng\ tương\ ứng\ của\ nó\ trong\ f(t)\ là:$

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{f^{(2-k)}(-2)t^{k-1}e^{-2t}}{(2-k)!\,(k-1)!}=\left(\frac{f'(-2)t^0}{1!\,0!}+\frac{f(-2)t^1}{0!\,1!}\right)e^{-2t}=\frac{3}{50}e^{-2t}+\frac{-1}{5}te^{-2t}=\frac{(3-10t)e^{-2t}}{50}$$

$*\ xét\ s^2+2s+10=(s+1)^2+3^2$

$vì\ q(s)có\ chứa\ thừa\ số\ (s+a)^2+b^2\ trong\ đó\ a=1\ và\ b=3$

$chọn\ s=-1+3j$

$$đặt\ g(s)=(s^2+2s+10)F(s)=\frac{s}{(s+2)^2}\rightarrow g(-1+3j)=\frac{13}{50}-\frac{9}{50}j$$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 3:$

$số\ hạng\ tương\ ứng\ của\ nó\ trong\ f(t)\ là:$

$$\frac{e^{-at}}{b}\big[Im\big(g(-1+3j)\big)cosbt+Re\big(g(-1+3j)\big)sinbt\big]=\frac{e^{-t}}{3}\left[-\frac{9}{50}cos3t+\frac{13}{50}sin3t\right]$$

$$=\frac{e^{-t}(-9cos3t+13sin3t)}{150}$$

$DNĐ$

$$\rightarrow f(t) = L^{-1}\big(F(s)\big) = \frac{(3-10t)e^{-2t}}{50} + \frac{e^{-t}(-9cos3t + 13sin3t)}{150}$$

Ứng dụng giải phương trình vi phân

***BT1**: $\boldsymbol{y'' + 4y = 2sin2t}$ **với** $\boldsymbol{y(0) = 0}$ **và** $\boldsymbol{y'(0) = -1}$*

Lấy lacplace 2 vế: $\rightarrow L(y'' + 4y) = L(2sin2t)$

$$L(y'') = s^2Y(s) - s.y(0) - y'(0) = s^2Y(s) + 1$$

$$L(4y) = 4Y(s)$$

$$L(2sin2t) = \frac{4}{s^2+4}$$

$$\rightarrow s^2Y(s) + 1 + 4Y(s) = \frac{4}{s^2+4} \rightarrow Y(s) = Y(s)(s^2+4) = \frac{4}{s^2+4} - 1$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{4}{(s^2+4)^2} - \frac{1}{s^2+4}$$

$$L^{-1}\big(Y(s)\big) = L^{-1}\left(\frac{4}{(s^2+4)^2}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

xét: $L^{-1}\left(\frac{4}{(s^2+4)^2}\right)$

$$\frac{4}{(s^2+4)^2} = \frac{4}{(s-2j)^2(s+2j)^2}$$

với $s = 2j$ *ta có* $f(s) = \frac{4}{(s+2j)^2} \rightarrow f'(s) = \frac{-8}{(s+2j)^3}$

Áp dụng định lý heaviside 2:

$$\frac{f'(2j)}{1!\,0!}e^{2jt} + \frac{f(2j)t}{0!\,1!}e^{2jt} = \frac{-1}{8}ie^{2jt} - \frac{1}{4}te^{2jt}$$

với $s = -2j$ *ta có* $f(s) = \frac{4}{(s-2j)^2} \rightarrow f'(s) = \frac{-8}{(s-2j)^3}$

$$\frac{f'(-2j)}{1!\,0!}e^{-2jt} + \frac{f(-2j)t}{0!\,1!}e^{-2jt} = \frac{1}{8}ie^{-2jt} - \frac{1}{4}te^{-2jt}$$

$$\rightarrow L^{-1}\left(\frac{4}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{-1}{8}ie^{2jt} - \frac{1}{4}te^{2jt} + \frac{1}{8}ie^{-2jt} - \frac{1}{4}te^{-2jt}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2i}\right) + \frac{-1}{2}t\left(\frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2}\right) = \frac{1}{4}sin2t - \frac{1}{2}tcos2t$$

$DNĐ$

$xét: L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{1}{2}sin2t$

$\rightarrow y(t) = \frac{1}{4}sin2t - \frac{1}{2}tcos2t - \frac{1}{2}sin2t = -\frac{1}{2}tcos2t - \frac{1}{4}sin2t$

$\boldsymbol{BT2}: \boldsymbol{x' + 2x = sint\ với\ x(0) = 0}$

$lấy\ laplace\ 2\ vế \rightarrow L(x' + 2x) = L(sint)$

$L(x') = sX(s) - x(0) = sX(s)$

$L(2x) = 2X(s)$

$L(sint) = \frac{1}{s^2+1}$

$\rightarrow sX(s) + 2X(s) = \frac{1}{s^2+1} \rightarrow X(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+2)}$

$L^{-1}\big(X(s)\big) = L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

$xét\ s = -2\ ta\ có\ p(s) = 1\ và\ Q(s) = s^2 + 1$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 1:$

$\frac{p(-2)}{Q(-2)}e^{-2t} = \frac{1}{5}e^{-2t}$

$xét\ s^2 + 1\ có\ dạng\ (s+a)^2 + b^2\ với\ a = 0, b = 1$

$f(s) = \frac{1}{s+2}$

$chọn\ s = j \rightarrow f(j) = \frac{1}{2+j} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}j$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 3:$

$\frac{e^{-0t}}{1}\left(-\frac{1}{5}cost + \frac{2}{5}sint\right) = -\frac{1}{5}cost + \frac{2}{5}sint$

$\rightarrow x(t) = \frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}cost + \frac{2}{5}sint$

$\boldsymbol{BT3}: \boldsymbol{x'' + 3x' + 2x = e^{-t} + e^{2t}\ với\ x(0) = 2\ và\ x'(0) = -3}$

$Lấy\ laplace\ 2\ vế: \rightarrow L(x'' + 3x' + 2x) = L(e^{-t} + e^{2t})$

$L(x'') = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s + 3$

$L(3x') = 3\big(sX(s) - y(0)\big) = 3sX(s) + 9$

$DNĐ$

$L(2x) = 2X(s)$

$L(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$

$L(e^{2t}) = \frac{1}{s-2}$

$\rightarrow s^2X(s) - 2s + 3 + 3sX(s) + 9 + 2X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2}$

$\rightarrow X(s)(s^2 + 3s + 2) - 2s + 12 = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2}$

$$\rightarrow \ X(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)} + \frac{1}{(s-2)(s^2+3s+2)} + \frac{2s-12}{s^2+3s+2}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-2)} + \frac{2(s-6)}{(s+1)(s+2)}$$

$$L^{-1}\big(X(s)\big) = L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-2)} + \frac{2(s-6)}{(s+1)(s+2)}\right)$$

$xét: L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right)$

$với\ s = -1\ ta\ có\ f(s) = \frac{1}{s+2} \rightarrow f'(s) = \frac{-1}{(s+2)^2}$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 2$:

$\frac{f'(-1)}{1!\,0!}e^{-t} + \frac{f(-1)t}{0!\,1!}e^{-t} = e^{-t} - te^{-t}$

$với\ s = -2 \rightarrow p(s) = 1, Q(s) = (s+1)^2$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 1$:

$\frac{p(-2)}{Q(-2)}e^{-2t} = e^{-2t}$

$\rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right) = e^{-t} - te^{-t} + e^{-2t}$

$xét: L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-2)}\right)$

$p(s) = 1, q(s) = (s+1)(s+2)(s-2) \rightarrow q'(s) = 3s^2 + 2s - 3$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 1$:

$DNĐ$

$$\rightarrow \frac{1}{q'(-1)}e^{-t} + \frac{1}{q'(-2)}e^{-2t} + \frac{1}{q'(2)}e^{2t} = \frac{-1}{2}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{13}e^{2t}$$

$$xét: L^{-1}\left(\frac{2(s-6)}{(s+1)(s+2)}\right)$$

$$p(s) = 2s - 12, q(s) = s^2 + 3s + 2 \rightarrow q'(s) = 2s + 3$$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 1$:

$$\rightarrow \frac{p(-1)}{q'(-1)}e^{-t} + \frac{p(-2)}{q'(-2)}e^{-2t} = -14e^{-t} + 16e^{-2t}$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-t} - te^{-t} + e^{-2t} + \frac{-1}{2}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{13}e^{2t} - 14e^{-t} + 16e^{-2t}$$

$$= \left(\frac{-27}{2} - t\right)e^{-t} + \frac{86}{5}e^{-2t} + \frac{1}{13}e^{2t}$$

BÀI TẬP VỀ FOURIER

BT1: Tìm hàm ảnh $F(w)$

$$\boldsymbol{f(t) = \begin{cases} 0\ khi\ t < -1 \\ t + 1\ khi - 1 \le t \le 0 \\ 1 - t\ khi\ 0 \le t \le 1 \\ 0\ khi\ t > 1 \end{cases}}$$

$$\rightarrow f'(t) = \begin{cases} 0\ khi\ t < -1 \\ 1\ khi - 1 \le t \le 0 \\ -1\ khi\ 0 \le t \le 1 \\ 0\ khi\ t > 1 \end{cases}$$

$Áp\ dụng\ tính\ chất\ vi\ phân\ thời\ gian\ ta\ có$ $F\big(f'(t)\big) = jwF(w) = \frac{1}{jw}[-2 + e^{jw} + e^{-jw}]$

$$\rightarrow F(w) = \frac{1}{jw.jw}[-2 + e^{jw} + e^{-jw}] = \frac{-2 + e^{jw} + e^{-jw}}{-w^2} = \frac{2}{w^2} - \frac{2}{w^2}cosw = \frac{2}{w^2}(1 - cosw)$$

BT2: Tìm hàm ảnh $F(w)$

$$\boldsymbol{f(t) = \begin{cases} 0\ với\ t \le 0 \\ t^k.e^{zt}\ với\ t \ge 0 \end{cases}}$$

$DN\text{Đ}$

$\boldsymbol{z = a + bj}$ ***với a, b số thực và*** $\boldsymbol{a < 0}$

đặt $f(t) = t^k.g(t)$

với $g(t) = \begin{cases} 0 \text{ với } t \le 0 \\ e^{zt} \text{ với } t \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{với } t \le 0 \\ e^{at}.e^{jbt} & \text{với } t \ge 0 \end{cases}$

đặt $g(t) = e^{jbt}.h(t)$

với $h(t) = \begin{cases} 0 \text{ với } t \le 0 \\ e^{at} \text{ với } t \ge 0 \end{cases}$

$\rightarrow H(w) = \dfrac{1}{|a| + jw}$ vì $a < 0$ nên ta có thể viết $a = -|a|$

Áp dụng tích chất dịch tần số: $G(w) = H(w - b) = \dfrac{1}{|a| + j(w - b)}$

Áp dụng hệ quả của tính vi phân tần số:

$F(w) = J^k.G^{(k)}(w)$

$$G'(w) = \frac{-j}{(|a| + j(w - b))^2}$$

$$G''(w) = \frac{2j^2}{(|a| + j(w - b))^3}$$

$$G''(w) = \frac{-2.3j^3}{(|a| + j(w - b))^4}$$

...

$$G^{(k)}(w) = \frac{j^k(-1)^k k!}{(|a| + j(w - b))^{k+1}}$$

$$\rightarrow F(w) = J^k \frac{j^k(-1)^k k!}{(|a| + j(w - b))^{k+1}} = \frac{j^{2k}(-1)^k k!}{(|a| + j(w - b))^{k+1}} = \frac{(-1)^{2k} k!}{(|a| + j(w - b))^{k+1}}$$

$$= \frac{k!}{(|a| + j(w - b))^{k+1}} = \frac{k!}{(-a - jb + jw)^{k+1}} = \frac{k!}{(-z + jw)^{k+1}}$$

BT3: Tìm hàm gốc $\boldsymbol{f(t)}$

$$\boldsymbol{F(w) = \frac{1}{6 + j5w - w^2}}$$

ta có $j^2 = -1 \rightarrow 6 + j5w - w^2 = 6 + j5w + j^2w^2 = 6 + 5t + t^2$ với $t = jw$

$\rightarrow 6 + j5w - w^2 = (t + 2)(t + 3) = (jw + 2)(jw + 3)$

$DNĐ$

$$\rightarrow F(w) = \frac{1}{(jw+2)(jw+3)} = G(w).H(w)$$

$$G(w) = \frac{1}{jw+2} \rightarrow g(t) = \begin{cases} 0\ khi\ t < 0 \\ e^{-2t}\ khi\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$H(w) = \frac{1}{jw+3} \rightarrow h(t) = \begin{cases} 0\ khi\ t < 0 \\ e^{-3t}\ khi\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{6+j5w-w^2}\right) = F^{-1}\big(G(w).H(w)\big) = g(t)*h(t) = \int_0^t g(x).h(t-x)dx$$

$$= \int_0^t e^{-2x}.e^{-3(t-x)}dx = e^{-2t} - e^{-3t}\ với\ t \geq 0$$

$$\rightarrow f(t) = \begin{cases} e^{-2t} - e^{-3t}\ với\ t \geq 0 \\ 0\ với\ t < 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{BT4}$: $\boldsymbol{Tìm\ hàm\ gốc\ f(t)}$

$$\boldsymbol{F(w) = \frac{4asinbw}{w(a^2+w^2)}\ với\ a, b > 0}$$

$$Ta\ có\ sinbw = \frac{e^{jbw} - e^{-jbw}}{2j}$$

$$\rightarrow F(w) = \frac{4a}{w(a^2+w^2)} \frac{e^{jbw} - e^{-jbw}}{2j} = 2a\frac{e^{jbw} - e^{-jbw}}{jw(a^2+w^2)}$$

$$\rightarrow jwF(w) = \left[\frac{2ae^{jbw}}{(a^2+w^2)} - \frac{2ae^{-jbw}}{(a^2+w^2)}\right]$$

$$xét\ G(w) = \frac{2a}{(a^2+w^2)}$$

$$\rightarrow g(t) = \begin{cases} e^{-at}\ khi\ t \geq 0 \\ e^{at}\ \ khi\ t \leq 0 \end{cases}$$

$Áp\ dụng\ tích\ chất\ dịch\ thời\ gian$

$$F^{-1}\left(\frac{2ae^{jbw}}{(a^2+w^2)}\right) = \begin{cases} e^{-a(t+b)}\ khi\ t \geq -b \\ e^{a(t+b)}\ \ khi\ t \leq -b \end{cases}$$

$$F^{-1}\left(\frac{2ae^{-jbw}}{(a^2+w^2)}\right) = \begin{cases} e^{-a(t-b)}\ khi\ t \geq b \\ e^{a(t-b)}\ \ khi\ t \leq b \end{cases}$$

$$mà\ jwF(w) = \left[\frac{2ae^{jbw}}{(a^2+w^2)} - \frac{2ae^{-jbw}}{(a^2+w^2)}\right]$$

$DNĐ$

$$\rightarrow F^{-1}\big(jwF(w)\big) = f'(t) = \begin{cases} e^{a(t+b)} - e^{a(t-b)} & khi\ t \le -b \\ e^{-a(t+b)} - e^{a(t-b)} & khi - b \le t \le b \\ e^{-a(t+b)} - e^{-a(t-b)} & khi\ t \ge b \end{cases}$$

$$\rightarrow f(t) = \int f'(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(e^{a(t+b)} - e^{a(t-b)}\right) & khi\ t \le -b \\ \frac{1}{a}\left(-e^{-a(t+b)} - e^{a(t-b)}\right) & với - b \le t \le b \\ \frac{1}{a}\left(-e^{-a(t+b)} + e^{-a(t-b)}\right) & khi\ t \ge b \end{cases}$$

MỘT SỐ BÀI TẬP NĂM TRƯỚC

Laplace

1. $\boldsymbol{f(t) = t^2.cos5t}$

$ta\ có\ L(cos5t) = \frac{s}{s^2+25}$

Áp dụng tích chất đạo hàm ảnh:

$$L(t^2.cos5t) = (-1)^2\left(\frac{s}{s^2+25}\right)^{(2)} = \left(\frac{s^2+25-2s^2}{(s^2+25)^2}\right)^{(1)} = \frac{-2s(s^2+25)-(-s^2+25)4s}{(s^2+25)^3}$$

$$= \frac{2s^3-150s}{(s^2+25)^3}$$

2. $\boldsymbol{f(t) = t^2.cost}$

$ta\ có\ L(cost) = \frac{s}{s^2+1}$

Áp dụng tích chất đạo hàm ảnh:

$$L(t^2.cost) = (-1)^2\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^{(2)} = \left(\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right)^{(1)} = \frac{-2s(s^2+1)-(-s^2+1)4s}{(s^2+1)^3}$$

$$= \frac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3}$$

3. $\boldsymbol{f(t) = e^{-2t}\int_0^t xsinxdx = e^{-2t}.h(t)}$

$$L(sinx) = \frac{1}{s^2+1}$$

áp dụng tích chất đạo hàm ảnh:

$DNĐ$

$ta\ có\ g(x) = x.sinx \rightarrow G(s) = L(xsinx) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

$Áp\ dụng\ tính\ chất\ tích\ phân: H(s) = L\left(\int_0^t xsinxdx\right) = \frac{G(s)}{s} = \frac{2}{(s^2+1)^2}$

$Áp\ dụng\ tích\ chất\ dịch\ chuyển\ ảnh:$

$F(s) = L\left(e^{-2t}.h(t)\right) = H(s+2) = \frac{2}{((s+2)^2+1)^2}$

$\mathbf{4.}\ \boldsymbol{f(t) = e^{-3t}\int_0^t xsin2xdx = e^{-3t}.h(t)}$

$(sin2x) = \frac{2}{s^2+4}$

$áp\ dụng\ tích\ chất\ đạo\ hàm\ ảnh:$

$ta\ có\ g(x) = x.sin2x \rightarrow G(s) = L(xsin2x) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$

$Áp\ dụng\ tính\ chất\ tích\ phân: H(s) = L\left(\int_0^t xsinxdx\right) = \frac{G(s)}{s} = \frac{4}{(s^2+4)^2}$

$Áp\ dụng\ tích\ chất\ dịch\ chuyển\ ảnh:$

$F(s) = L\left(e^{-3t}.h(t)\right) = H(s+3) = \frac{4}{((s+3)^2+4)^2}$

$\boldsymbol{Phương\ trình\ vi\ phân}$

$\mathbf{1.}\ \boldsymbol{t.y'' + (1-t)y' + y = 0} \rightarrow\ t.y'' + y' - ty' + y = 0$

$\boldsymbol{xét\ y = 0\ thỏa\ mản\ pt \rightarrow y = 0\ là\ 1\ nghiệm\ của\ phương\ trình}$

$lấy\ laplace\ 2\ vế \rightarrow L(t.y'' + y' - ty' + y) = 0$

$L(y'') = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

$L(y') = sY(s) - y(0)$

$L(y) = Y(s)$

$Áp\ dụng\ tích\ chất\ đạo\ hàm\ ảnh:$

$L(t.y'') = -[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0))]^{(1)} = -2sY(s) - s^2.Y'(s) + y(0)$

$L(t.y') = -[sY(s) - y(0)]^{(1)} = -Y(s) - s.Y'(s)$

$\rightarrow -2sY(s) - s^2.Y'(s) + y(0) + sY(s) - y(0) + Y(s) + s.Y'(s) + Y(s) = 0$

$DNĐ$

$\rightarrow Y(s)(-s+2)+Y'(s)(-s^2+s)=0$

$\rightarrow Y(s)=\dfrac{s^2-s}{-s+2}Y'(s)=\dfrac{s^2-s}{-s+2}\dfrac{dY}{ds}$

$\rightarrow \dfrac{dY}{Y(s)}=\dfrac{2-s}{s^2-s}ds \rightarrow nguyên\ hàm{:}\ ln\big(Y(s)\big)=-2ln(s)+ln(s-1)+\ln(|C|)=ln\left(\dfrac{1-s}{s^2}|C|\right)$

$\rightarrow Y(s)=\dfrac{1-s}{s^2}|C| \rightarrow L^{-1}\big(Y(s)\big)=L^{-1}\left(\dfrac{1-s}{s^2}|C|\right)=(t-1)|C|$

$vậy\ y(t)=(t-1)|C|\ với\ C\ là\ hằng\ số$

2. $\boldsymbol{t.y''+2(t-1)y'+(t-2)y=0 \rightarrow t.y''+2ty'-2y'+ty-2y=0}$

$\boldsymbol{xét\ y=0\ thỏa\ mản\ phương\ trình\ nên\ y=0\ là\ một\ nghiệm\ của\ pt}$

$\rightarrow t(y''+2y'+y)-2y'-2y=0$

$lấy\ laplace\ 2\ vế \rightarrow L(t(y''+2y'+y)-2y'-2y)=0$

$L(y'')=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$

$L(y')=sY(s)-y(0)$

$L(y)=Y(s)$

$Áp\ dụng\ tích\ chất\ đạo\ hàm\ ảnh{:}$

$$\begin{aligned} L\big(t(y''+2y'+y)\big) &= [s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)+Y(s)]^{(1)} \\ &= -2sY(s)-s^2.Y'(s)+y(0)-2Y(s)-2s.Y'(s)-Y'(s) \\ &= -2Y(s)(s+1)+Y'(s)(-s^2-2s-1)+y(0) \end{aligned}$$

$\rightarrow -2Y(s)(s+1)+Y'(s)(-s^2-2s-1)+y(0)-2sY(s)+2y(0)-2Y(s)=0$

$\rightarrow Y(s)(-4s-4)+Y'(s)(-s^2-2s-1)+3y(0)=0$

$\rightarrow Y(s)+Y'(s)\dfrac{(s+1)}{4}=\dfrac{3y(0)}{4(s+1)}$

$giả\ sử\ y(0)=0 \rightarrow Y(s)=Y'(s)\dfrac{(s+1)}{-4}=\dfrac{(s+1)}{-4}\dfrac{dY}{ds}$

$\rightarrow \ln\big(\mathrm{Y(s)}\big)=-4\ln(s+1)+\ln(|C|) \rightarrow Y(s)=\dfrac{|C|}{(s+1)^4}$

$\rightarrow L^{-1}\left(Y(s)\right)=L^{-1}\left(\dfrac{|C|}{(s+1)^4}\right)$

$s=-1\ ,ta\ có\ q(s)=1 \rightarrow q'(s)=0 \rightarrow q^{(n)}(s)=0\ với\ n=1,2,\dots,n$

$DN\text{Đ}$

$\acute{A}p\ d\d{u}ng\ \text{đ}\d{i}ch\ l\acute{y}\ heaviside\ 2$:

$$L^{-1}\left(\frac{|C|}{(s+1)^4}\right)=|C|e^{-t}\frac{t^3}{0!\,3!}=|C|\frac{t^3e^{-t}}{6}$$

$v\hat{\d{a}}y\ y(t)=|C|\frac{t^3e^{-t}}{6}$ *với* C *là hằng số*

3. Tìm hàm $\mathbf{z(t)}$ từ hệ phương trình vi phân sau:

$$\boldsymbol{y'+y+4\int_0^t z(x)dx=u(t)}$$

$$\boldsymbol{y'+z'+z=0}$$

với $\boldsymbol{y(0)=1}$ ***và*** $\boldsymbol{z(0)=-1}$ ***và*** $\boldsymbol{u(t)}$ ***là hàm bước đơn vị***

Xét: $y'+y+4\int_0^t z(x)dx=u(t)$

laplace 2 vế:

$$L\left(y'+y+4\int_0^t z(x)dx\right)=L(u(t))$$

$$L(y')=sY(s)-y(0)=sY(s)-1$$

$$L(y)=Y(s)$$

$$L\left(4\int_0^t z(x)dx\right)=4\frac{Z(s)}{s}$$

$$L\big(u(t)\big)=\frac{1}{s}$$

$$\to sY(s)-1+Y(s)+4\frac{Z(s)}{s}=\frac{1}{s}\to Y(s)(s^2+s)+4Z(s)=1+s\ (*)$$

xét: $y'+z'+z=0$

Laplace 2 vế: $\to\ L(y'+z'+z)=0$

$$L(y')=sY(s)-y(0)=sY(s)-1$$

$$L(z')=sZ(s)-z(0)=sZ(s)+1$$

$$L(z)=Z(s)$$

$$\to sY(s)-1+sZ(s)+1+Z(s)=0\to Y(s)=-\frac{1+s}{s}Z(s)$$

Thế vào $(*)\to -\frac{1+s}{s}Z(s)(s^2+s)+4Z(s)=1+s$

$DNĐ$

$$\rightarrow\ -Z(s)(1+s)^2+4Z(s)=1+s\rightarrow Z(s)=\frac{1+s}{-(1+s)^2+4}=\frac{1+s}{(1-s)(s+3)}$$

$Laplace\ ngược\ 2\ vế: \rightarrow z(t)=L^{-1}\left(\frac{1+s}{(1-s)(s+3)}\right)$

$xét\ s=1\ và\ s=-3$

$ta\ có\ p(s)=1+s, q(s)=(1-s)(s+3)\rightarrow q'(s)=-2-2s$

$Áp\ dụng\ định\ lý\ heaviside\ 1$

$$\rightarrow z(t)=\frac{p(1)}{q'(1)}e^t+\frac{p(-3)}{q'(-3)}e^{-3t}=\frac{-1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-3t}$$

$\boldsymbol{Fourier}$:

$\boldsymbol{tìm\ gốc\ của\ các\ ảnh}$

$\mathbf{1.}\boldsymbol{F(w)=\frac{e^{3jw}}{iw+1+i}=e^{3jw}G(w)}$

$$G(w)=\frac{1}{iw+1+i}\rightarrow g(t)=F^{-1}\big(G(w)\big)=\begin{cases}e^{-(1+i)t} & khi\ t\ge 0\\ 0 & khi\ t<0\end{cases}$$

$áp\ dụng\ tích\ chất\ dịch\ thời\ gian$

$$\rightarrow f(w)=F^{-1}\left(e^{3jw}.G(w)\right)=g(t+3)=\begin{cases}e^{-(1+i)(t+3)} & khi\ t\ge -3\\ 0 & khi\ t<-3\end{cases}$$

$\mathbf{2.}\boldsymbol{F(w)=\frac{sin3w}{(iw+5)^2}=\frac{e^{3iw}-e^{-3iw}}{2i(iw+5)^2}}$

$xét: \frac{1}{(iw+5)^2}=G(w).H(w)$

$$với\ G(w)=H(w)=\frac{1}{jw+5}\rightarrow g(t)=h(t)=F^{-1}\left(\frac{1}{jw+5}\right)=\begin{cases}e^{-5t} & khi\ t\ge 0\\ 0 & khi\ t<0\end{cases}$$

$Áp\ dụng\ phương\ pháp\ tích\ chập$:

$$F^{-1}\left(\frac{1}{(iw+5)^2}\right)=g(t)*h(t)=\int_0^t e^{-5x}.e^{-5(t-x)}dx=t.e^{-5t}\ với\ t\ge 0$$

$Áp\ dụng\ phương\ pháp\ dịch\ chuyển\ ảnh$

$$F^{-1}\left(\frac{e^{3iw}}{(iw+5)^2}\right)=(t+3)e^{-5(t+3)}\ với\ t\ge -3$$

$$F^{-1}\left(\frac{e^{-3iw}}{(iw+5)^2}\right)=(t-3)e^{-5(t-3)}\ với\ t\ge 3$$

DNĐ

$$\rightarrow f(t) = F^{-1}\left(\frac{e^{3iw} - e^{-3iw}}{2i(iw+5)^2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2i}\left((t+3)e^{-5(t+3)} - (t-3)e^{-5(t-3)}\right) \text{với } t \geq 3 \\ \frac{1}{2i}\left((t+3)e^{-5(t+3)}\right) \quad \text{với} -3 \leq t < 3 \\ 0 \quad \text{với } t < -3 \end{cases}$$

$$\mathbf{3.}\ \boldsymbol{F(w) = \frac{e^{-jw}}{iw+1-i}}$$

$$G(w) = \frac{1}{iw+1-i} \rightarrow g(t) = F^{-1}\big(G(w)\big) = \begin{cases} e^{-(1-i)t} \text{ khi } t \geq 0 \\ 0 \quad \text{khi } t < 0 \end{cases}$$

áp dụng tích chất dịch thời gian

$$\rightarrow f(w) = F^{-1}\left(e^{-jw}.G(w)\right) = g(t-1) = \begin{cases} e^{-(1-i)(t-1)} \text{ khi } t \geq 1 \\ 0 \quad \text{khi } t < 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{4.}\ \boldsymbol{F(w) = \frac{sinw}{(iw+1)^2} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i(iw+1)^2}}$$

xét: $\frac{1}{(iw+1)^2} = G(w).H(w)$

$$\text{với } G(w) = H(w) = \frac{1}{jw+1} \rightarrow g(t) = h(t) = F^{-1}\left(\frac{1}{jw+1}\right) = \begin{cases} e^{-t} \text{ khi } t \geq 0 \\ 0 \quad \text{khi } t < 0 \end{cases}$$

Áp dụng phương pháp tích chập:

$$F^{-1}\left(\frac{1}{(iw+1)^2}\right) = g(t) * h(t) = \int_0^t e^{-x}.e^{-(t-x)}dx = t.e^{-t} \text{ với } t \geq 0$$

Áp dụng phương pháp dịch chuyển ảnh

$$F^{-1}\left(\frac{e^{iw}}{(iw+1)^2}\right) = (t+1)e^{-(t+1)} \text{ với } t \geq -1$$

$$F^{-1}\left(\frac{e^{-iw}}{(iw+1)^2}\right) = (t-1)e^{-(t-1)} \text{ với } t \geq 1$$

$$\rightarrow f(t) = F^{-1}\left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i(iw+1)^2}\right) = \frac{1}{2i}\left((t+1)e^{-(t+1)} - (t-1)e^{-(t-1)}\right) \text{với } t \geq 1$$

$$\text{vậy } f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2i}\left((t+1)e^{-(t+1)} - (t-1)e^{-(t-1)}\right) \text{ với } t \geq 1 \\ \frac{1}{2i}\left((t+1)e^{-(t+1)}\right) \quad \text{với} -1 \leq t < 1 \\ 0 \quad \text{với } t < -1 \end{cases}$$

$DNĐ$

5.

$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{khi\ t < -3} \\ \boldsymbol{t+3} & \boldsymbol{khi -3 \le t \le -2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{khi -2 < t < 0} \\ \boldsymbol{1-t} & \boldsymbol{khi\ 0 \le t \le 1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{khi\ t > 1} \end{cases}$$

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & khi\ t < -3 \\ 1 & khi -3 \le t \le -2 \\ 0 & khi -2 < t < 0 \\ -1 & khi\ 0 \le t \le 1 \\ 0 & khi\ t > 1 \end{cases}$$

$$ta\ có\ F\big(f'(t)\big) = \int_{-3}^{-2} e^{-jwt}dt - \int_0^1 e^{-jwt}dt = \frac{-e^{2jw} + e^{3jw} + e^{-jw} - 1}{jw}$$

$Áp\ dụng\ tính\ chất\ vi\ phân\ thời\ gian$:

$$F\big(f'(t)\big) = jwF(w) \to F(w) = \frac{-e^{2jw} + e^{3jw} + e^{-jw} - 1}{-w^2}$$

$$\mathbf{6.}\,\boldsymbol{F(w)} = \frac{\boldsymbol{e^{-5jw}}}{\boldsymbol{(2+jw)(3+jw)}} = \boldsymbol{e^{-5jw}.P(w)}$$

$$ta\ có: P(w) = \frac{1}{(2+jw)(3+jw)} = G(w).H(w)$$

$$g(t) = F^{-1}\left(\frac{1}{2+jw}\right) = \begin{cases} e^{-2t} & với\ t \ge 0 \\ 0 & với\ t < 0 \end{cases}$$

$$h(t) = F^{-1}\left(\frac{1}{3+jw}\right) = \begin{cases} e^{-3t} & với\ t \ge 0 \\ 0 & với\ t < 0 \end{cases}$$

$Áp\ dụng\ phương\ pháp\ tích\ chập$

$$p(t) = g(t) * h(t) = \int_0^t e^{-2x}.e^{-3(t-x)}dx = e^{-2t} - e^{-3t}\ với\ t \ge 0$$

$áp\ dụng\ tính\ dịch\ thời\ gian$

$$f(t) = F^{-1}\left(e^{-5jw}.P(w)\right) = p(t-5) = e^{-2(t-5)} - e^{-3(t-5)}\ với\ t \ge 5$$

$$\to f(t) = \begin{cases} e^{-2(t-5)} - e^{-3(t-5)} & với\ t \ge 5 \\ 0 & với\ t < 5 \end{cases}$$

$DNĐ$

$* \, kiểm \; tra \; lại \; bằng \; phương \; pháp \; phân \; tích$

$$G(w) = \frac{1}{(2+jw)(3+jw)} = \frac{1}{2+jw} - \frac{1}{3+jw}$$

$$\rightarrow F(w) = \frac{e^{-5jw}}{2+jw} - \frac{e^{-5jw}}{3+jw} = e^{-5jw}.G(w)$$

$$\rightarrow g(t) = e^{-2t} - e^{-3t} \; với \; t \geq 0$$

$Áp \; dụng \; tính \; dịch \; thời \; gian$

$$f(t) = F^{-1}\left(e^{-5jw}.G(w)\right) = g(t-5) = e^{-2(t-5)} - e^{-3(t-5)} \; với \; t \geq 5$$

$$\rightarrow f(t) = \begin{cases} e^{-2(t-5)} - e^{-3(t-5)} & với \; t \geq 5 \\ 0 & với \; t < 5 \end{cases}$$

$$\mathbf{7.} \; \boldsymbol{F(w)} = \frac{\boldsymbol{jw+3}}{\boldsymbol{(jw+1)^2}}$$

$$\mathbf{8.} \; \boldsymbol{F(w)} = \frac{\boldsymbol{5+2jw}}{\boldsymbol{(jw)^2+5jw+6}}$$

GOOD LUCK FOR YOU