

주제 탐구 활동 계획서

학번 및 이름	
관련 과목	물리학, 수학
탐구 주제	우주 엘리베이터 정말 실현 가능할까?

1. 탐구 동기

어릴때 우주과학에 대한 흥미가 많아 우주에 대해 찾아보던중 우주를 가는 새로운 방법인 우주 엘리베이터에 대해 알게 되었다. 우주 엘리베이터는 우주로 화물 등을 운송하기 위해 지표면에서부터 우주로 뻗어있는 거대한 엘리베이터로 우주 엘리베이터가 실현된다면 현재 우주로 물체를 보내는 비용의 1/100만큼 줄일 수 있고 안정성도 매우 높으며 반복 사용을 할 수 있다. 우주 엘리베이터는 지구의 적도부근에 설치하여 원심력을 이용하여 물체를 운반하는 장치인데 예를 들어 우리가 물병을 돌리면 물이 물병 바깥쪽으로 쏠리는 것과 같다. 그리고 이를 실현할 우주 엘리베이터의 구조로는 앵커, 테더, 클라이머, 카운터 웨이트가 있다. 우주 엘리베이터에 대해 더 자세히 찾아보면서 우주 엘리베이터가 실현 불가능할수도 있다는 내용을 보게되었고 왜 그런지 찾아보았는데 먼저 가장 큰 문제는 우주 엘리베이터의 인장력을 버틸 물질이 거의 없고 그 물질이 있다 하더라도 우주 엘리베이터를 만들기 위한만큼 많이 구하려면 경제적으로도 비싸기 때문이다. 따라서 나는 이 우주 엘리베이터의 정지궤도 높이를 계산할 것이고 여기서 테더가 받는 인장력을 계산하여 이를 가장 강한 재료인 탄소 나노 튜브가 견딜 수 있을지에 대해 알아볼 것이다.

1. 탐구 계획(매우 구체적으로 작성)

1-1.각속도와 원심력의 정의, 공식에 대한 설명

1-2.지구의 자전 각속도 구하기

1-3.우주 엘리베이터가 받는 중력과 원심력이 같아지고 공전 각속도가 지구와 같아지는 높이(정지궤도) 구하기

2-1.우주 엘리베이터의 구조 설명

2-2.인장력과 미분방정식의 정의와 계산법 설명

2-3.우주 엘리베이터의 테더가 받는 최대 인장력의 값을 구하는 식 정리, 높이 구하기

3-1.신소재 탄소 나노튜브에 대한 설명

3-2.탄소 나노튜브로 **2-3**에서 구한 식을 이용하여 테더를 만들 수 있는지 구하기

주제 탐구 활동 보고서

탐구 주제	우주 엘리베이터 정말 실현 가능할까?		
학번 및 이름		지도 교사	
탐구 내용 및 결과			
<p>3. 탐구 결과</p> <p>(탐구활동에 대한 객관적 자료(탐구활동 데이터, 도표, 사진, 측정결과 등)을 포함하고 자료를 인용한 경우는 출처를 반드시 밝힐 것)</p> <p>I. 서론</p> <p>인류는 오래전부터 우주로 나아가고 싶어하는 마음이 매우 컸었다. 그러던 중 20세기 중반 소련에서 최초로 우주로 인공위성을 쏘아 올린 후 몇 년 후 다시 소련에서 최초로 우주에 유리가가린을 보내며 우주에 대한 길을 열기 시작했다. 시간이 지나며 현재 항공우주 기술이 매우 발달되어 우주에 대해 우리 인류는 많은 것을 알게 되었고 우주에 여러 물체를 쏘아올리기 시작했다. 그러나 여기서 발생한 여러 문제가 발생하는데 바로 우주로 물체를 보낼때 쓰이는 로켓의 경제적 문제, 안정성 문제, 환경오염 문제가 발생한다. 이를 해결하기 위하여 고안된 방안이 바로 우주 엘리베이터이다. 우주 엘리베이터는 지구에서 테더 재료가 담긴 소량의 화물을 지구 정지궤도의 높이까지 쏘아 올린 후 그 화물에서 테더를 지구에 내리는 방식으로 만들어지는데 지구 적도를 둘러싸며 지구의 자전각속도와 같은 각속도로 공전을 하여 계속 같은 위치에서 떠있는것처럼 보이고 원심력을 이용하여 화물을 원래 로켓에 비해 ¹만100만큼 줄일 수 있다. 또한 계속 활용이 가능하기때문에 안정성도 높고 환경오염 문제도</p> <p>해결할 수 있는 매우 좋은 시설이다. 하지만 정지궤도높이만큼 테더를 길게 지구 지표면까지 내릴 경우 그 인장력을 테더가 버틸 수 있을지가 이 엘리베이터의 실현 가능 여부를 결정하기 때문에 실제로 가능할지와 가능하다면 어떤 재료가 그 인장력을 버틸 수 있을지에 대한 탐구를 할 것이다.</p> <p>II. 본론</p> <p>1) 지구에서 볼 때 항상 같은 위치에 물체가 떠있는 것처럼 보이려면 지구의 자전속도와 물체의 공전속도가 같아야 지구에서 볼때 상대속도가 0으로 정지해있는것처럼 보인다. 우주 엘리베이터를 만들기 위해서는 이와같은 정지궤도에 우주 엘리베이터가 떠있어야하는데 정지궤도는 지구로부터 받는 중력과 지구 바깥으로 나가려는 힘인 원심력이 같아 떠있는 것이다. 따라서 정지궤도를 계산하기 위해서는 각속도와 원심력에 대해 알아야 한다.</p> <p>1-1) 먼저 각속도의 정의는 원운동하는 물체가 단위시간동안 도는 각도를 나타낸 값으로 $\omega = \Delta\theta / \Delta t$로 구하며 단위는 rad/s이다 여기서 rad(라디안)이란 각도를 측정하는 단위 중 하나로 원의 반지름 길이와 같은 길이를 갖는 호가 원의 중심에서 이루는 각을 의미한다. 이 정의에 따라 그 각을 구해보면 $(\theta/360) \times 2\pi R = R\omega$를 만족시키므로 $\theta = (180/\pi)\omega$임을 알 수 있다 따라서 1라디안은 약 57.3도이다. 다음으로 원심력은 원운동을 하는 물체에 작용하는 관성력을 말한다. $F = mr\omega^2$로 구할 수있으며 단위는 N이다.</p>			

1-2) 위에서 구한 각속도와 원심력을 통하여 정지궤도를 구해보자. 먼저 자전하는 지구의 각속도와 공전하는 우주 엘리베이터의 각속도가 같아[㉠]하므로 지구의 자전 각속도를 구해보면 지구는 1일에 1바퀴를 돈다 이때 1일은 24X60X60초 즉 86400초이다. 그러나 이 시간은 평균 태양일로 실제로는 86164초가 걸린다. 이때 2π 라디안만큼 돈다 따라서 $(2\pi/86164)\text{rad/s}$ 가 지구의 자전 각속도이다. 다음으로 정지궤도는 지구로부터 받는 중력과 원심력이 같아[㉠]하므로

먼저 만유인력의 공식인 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ 을 이용해보면 이때 m_1 은 지구의 질량 m_2 는 우주 엘리베이터의

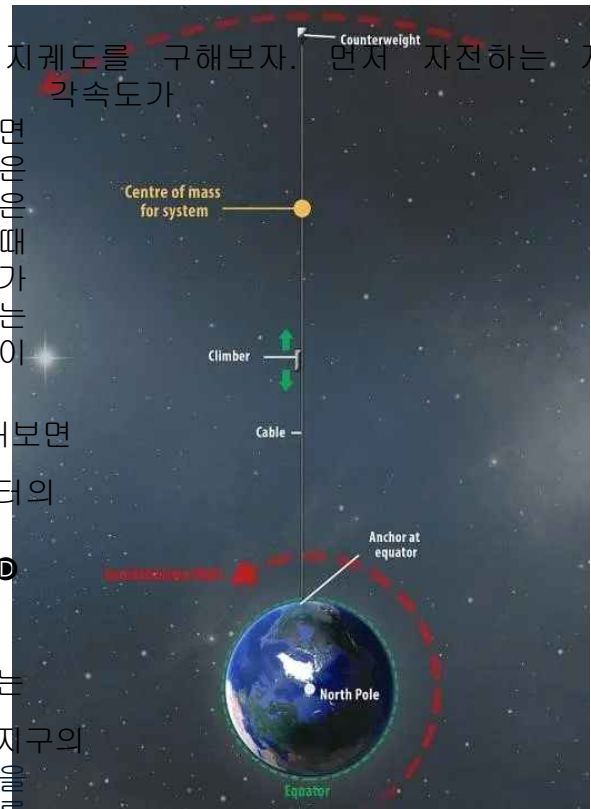
질량으로 계산한다. $G \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 r \omega^2$ 에서 구해[㉠]

하는것은 r 이므로 $r^3 = G \frac{m_1}{\omega^2}$, $r = \sqrt[3]{\frac{G m_1}{\omega^2}}$ G 는

중력상수이므로 $G = 6.674 \times 10^{-11}$, m_1 은 지구의 질량이므로 $m_1 = 5.972 \times 10^{24}$ 을 넣어 계산을 해주면 높이는 $r = 42,163,111\text{m}$ 가 나오고 이를 km단위로 고치면 42,163km임을 알 수 있다.

이때 이 높이는 지구의 무게중심으로부터의 높이이므로 지구의

반지름인 6,371km를 빼주면 정지궤도의 높이는 지표면으로부터 대략 35,800km임을 알 수 있었다.



1) 인장력을 버티기 위한 재료를 찾기 위해서는 먼저 인장력을 계산해[㉠]하고 그 인장력을 받는 우주 엘리베이터의 구조에 대해 알아[㉠] 한다.

2-1) 우주 엘리베이터의 구조는 크게 카운터웨이트, 테더, 앵커, 클라이머로 구분되는데 카운터웨이트는 지표면으로부터 아주 멀리 떨어져있어 무게중심의 높이가 정지궤도의 높이인 35,800km가 되게 하는 역할을 한다. 이 카운터웨이트에서 테더를 지표면으로 내리는데 테더는 엘리베이터의 역할을 하는 클라이머가 타고갈 줄 역할을 하는 기둥이다. 앵커는 테더를 땅과 이어 고정시키는 역할을 하여 우주 엘리베이터의 안전성에 기여한다. 클라이머는 테더를 타고 화물을 실어 올리는 장치로 모터와 바퀴를 사용하며 원심력을 이용하여 화물을 실어올린다.

2-2) 인장력, 인장응력, 인장강도에 대해 설명을 해보자면 인장력이란 어떠한 재료를 양쪽으로 잡아당길때 재료가 내부의 지점마다 다른 크기로 버티는 힘을 말한다. 인장응력은 단위 면적당

작용하는 인장력으로 인장응력(σ) = $\frac{\text{인장력}(F)}{\text{면적}(A)}$ 로 구할 수 있다. 인장강도란 재료가 끊어지기 전까지

버틸 수 있는 가장 높은 인장응력이며 이 값은 물체의 고유한 값이다. 텐더에 인장력이 생기는 이유는 지구로부터는 중력을 받고있고 원심력에 의해 중력의 반대방향으로 힘을 받고있기 때문이다. 이때 모든 줄은 정지해있기 때문에 알짜힘이 0으로 작용해[㉠]한다. 따라서 이때 아주 조금의 차이에도 줄이 받는 인장력의 차이가 발생하고 내부의 지점마다 다른 크기의 값을 받기 때문에 이런 매우 작은 차이를 알아내기 위해 미분방정식이 사용된다. 미분방정식이란 연속적으로 변화하는 대상을 수학적으로 분석하기 위한 도구로 순간적인 변화가 일어나는 독립변수와 그 변수에 의해 종속적으로 일어나는 종속변수를 포함하여 식을 풀어내는 방정식이다.

2-3)테더가 받는 최대 인장력을 구하기 전에 먼저 상황을 이해해보면 지표면으로부터 r만큼 떨어진 지점에서 높이가 dr인 테더가 있다고 할때 길이가 r인 지점에서 받는 장력을 T(r), r+dr인 지점에서 받는 장력을 T(r+dr)이라 하자. 이때 그 물체에 작용하는 알짜힘이 0이 나와 ㉠ 물체가 그 위치에서

정지해있는 것이므로 이 식을 세워보면 먼저 중력 $dF(g)=G \frac{M(\text{지구질량})dm}{r^2}$ 이고 원심력 $dF(c)=dmr\omega^2$ 임을 알 수 있다. 이때 $dF(c)$ 와 $T(r+dr)$ 은 힘을 위로 받으므로 +방향이고 $dF(g)$ 와 $T(r)$ 은 아래 방향으로 힘을 받으므로 -방향으로 둘 수 있다. 따라서 $T(r+dr)+dF(c)-T(r)-dF(g)=0$ 인데 여기서 $T(r+dr)-T(r)$ 은 미분의 정의에 의해 인장력의 변화량 즉 dT 임을 알 수 있다. 따라서 $dT=dF(g)-dF(c)$ 이다. 이때 이 미분방정식은 dT/dr 을 구해 ㉡ 하므로 $dF(g)$ 와 $dF(c)$ 에서

$m=\rho(\text{밀도})A(\text{단면적})r(\text{높이})$ 로 바꾸어주면 $dT=\frac{GM\rho A dr}{r^2}-\rho A r \omega^2 dr$ 의 식이 나와 양변을 dr로 나누어주면

$\frac{dT}{dr}=\frac{GM\rho A}{r^2}-\rho A r \omega^2$ 임을 알 수 있다. 이때 최댓값을 구하려면 이 함수의 극값을 조사해 ㉢하는데 여기서

다시 이론적으로 생각해보면 정지 궤도 높이보다 아래지점에서는 중력의 크기가 원심력의 크기보다 크므로 항상 증가함을 알수있고 정지 궤도 높이보다 위지점에서는 원심력이 크므로 항상 감소함을 알 수 있다 이때 정지 궤도 높이에서는 두 값이 같으므로 값이 0이어서 정지 궤도가 유일한 극값(극댓값)임을 알 수 있었다. 따라서 위 식을 r에 대해 부정적분한 후 42,000,000m(이때의 r은 지구 중심부터 계산한 값이므로 지구반지름을 더함) 값에 대입하여 인장력의 최댓값을 나타내는 식을

구해보았다. 먼저 $\frac{dT}{dr}=\frac{GM\rho A}{r^2}-\rho A r \omega^2$ 을 r에 대해 부정적분해보면 $T=-\frac{GM\rho A}{r}-\frac{\rho A r^2 \omega^2}{2}+C$ 이고

적분상수는 지표면에서 인장력이 10^5N 임을 이용해보면 구할 수 있다. 따라서 $C=10^5\text{N}+\frac{GM\rho A}{R}+\frac{\rho A R^2 \omega^2}{2}$

얻을 수 있다. 따라서 최대 인장력 $T_{\text{max}}=10^5\text{N}+\frac{GM\rho A}{R}+\frac{\rho A R^2 \omega^2}{2}-\frac{GM\rho A}{r}-\frac{\rho A (1.764 \times 10^{15})\omega^2}{2}$ 임을

있었다. (이때 R은 지구 반지름이다.)

1) 우주 엘리베이터를 만들기 위해서는 최대한 다양한 조건에서 위에서 구한 식을 만족해 ㉣하는데 그러기 위해선 일단 가벼우며 인장강도가 높아 ㉤한다 현재 개발된 신소재중 가장 위 조건을 잘 만족시키는 신소재가 바로 탄소 나노 튜브이다. 따라서 탄소 나노 튜브의 특징과 위 식을 만족시키기 위한 최적의 조건을 찾아볼것이다.

3-1)탄소 나노튜브란 탄소 원자들이 육각형 벌집 모양으로 연결되어 튜브 형태를 이루는 나노 물질이다. 강철보다 강하면서도 질량이 가볍고 인장강도가 매우 높다. 또한 이 신소재는 밀도도 매우 낮아 테더의 재료로 아주 알맞다. 탄소 나노튜브의 인장강도는 대략 150GPa로 강철의 100배 이상 강하고 밀도는 2g/cm³, 즉 2000kg/m³으로 강철의 밀도의 1/4정도이다. 따라서 탄소 나노튜브는 밀도에 비해 인장강도가 매우 강하기때문에 테더의 재료로 적절하다.

3-2)탄소 나노튜브의 특성(밀도, 인장강도)을 이용하여 2-3에서 구한 식에 대입을 해보면 먼저

$T_{\text{max}} < 150\text{GPa}$ 의 조건이 있고

$T_{\text{max}}=10^5\text{N}+\frac{GM\rho A}{R}+\frac{\rho A R^2 \omega^2}{2}-\frac{GM\rho A}{r}-\frac{\rho A (1.764 \times 10^{15})\omega^2}{2}$ 의 $G=6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, $M=5.972 \times 10^{24}\text{kg}$, ρ

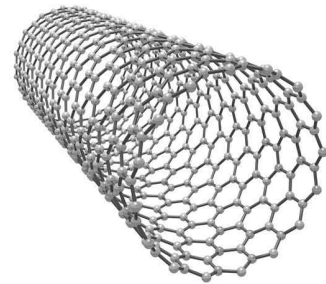
$=2000\text{kg/m}^3$, $R=6,378\text{km}=6,378,000\text{m}$, $\omega=2\pi/86164$ 을 넣어 계산해보면 대략 $T_{\text{max}}=A \times$

96.7Gpa

+10⁵N임을 알 수 있고 여기서 Tmax는 인장력을 구한것인데 인장강도는 인장응력에 속하므로 위 식도

인장응력에 대한 식으로
$$\frac{T_{max}}{A} = 96.7 \text{GPa} + \frac{10^5}{A} \text{N}$$
가 나옴을 알 수 있다. 단면적A의 걱정값은

10⁻³~10⁻⁵인데 이 범위의 값은 모두 위 부등식을 만족시킴을 알 수 있다. 따라서 탄소 나노튜브의 인장강도가 최대 인장 응력보다 크므로 우주 엘리베이터의 실현은 가능하다는 것을 알 수 있었다.



III. 결론

이 탐구를 하며 지구의 자전각속도를 바탕으로 한 우주 엘리베이터의 공전 각속도로 우주 엘리베이터의 정지궤도의 높이를 원심력, 중력의 방정식을 이용하여 $35,800\text{km}$ 정도인 것을 알 수 있었고 이 높이를 통해 신소재인 탄소 나노튜브를 텐더로 사용할때 실제로 가능할지에 대한 식을

미분방정식을 이용하여 세워본 후 여러 상수 값들을 대입하여 부등식을 풀어볼 수 있었다. T_{max}

A

$=96.7\text{GPa} + \frac{10^5}{A} \text{N} < 150\text{GPa}$ 에서 A의 적정값의 범위를 대입하여 이 부등식이 성립함을 이끌어내어

우주 엘리베이터가 이론적으로 가능하다는 결론을 이끌어낼 수 있었다.

IV. 자료 출처

우주엘리베이터의 구조(사진)

<https://namu.wiki/w/%EA%B6%A4%EB%8F%84%20%EC%97%98%EB%A6%AC%EB%B2%A0%EC%9D%B4%ED%84%B0>

탄소 나노튜브의 모양(사진)과 특성

<https://kidd.co.kr/news/205780>

4. 탐구 과정 중 발생한 문제점 및 해결 방법

탐구를 하며 생긴 문제점은 인장력에 대해 공부를 했을때 인장력이 물체 내부의 여러 지점마다 다 다르게 작용하기때문에 인장력을 어떻게 구할지 고민이 많았었는데 결국 이 뜻은 미세한 지점차이마다 인장력의 변화량이 존재한다는 것이므로 미분을 이용해보자는 생각이 들었다. 따라서 dr 과 dT 를 나타내기 위해 특정 지점 r 에서의 식을 세우고 그 높이를 dr 로 세우고 물체가 공중에서 정지해있기 때문에 중력+원심력+위로 당기는 장력+아래로 당기는 장력=0이 됨을 이용하여 항등식을 세우고 두 장력을 dT 로 나타낼 수 있어 미분방정식을 세울 수 있었다. 그 후 그래프의 개형을 생각해보았는데 처음에는 그냥 식에

대한 함수를 그리려하니 어려웠지만 이론적으로 돌아가 훨씬 간단하게 $\frac{GM\rho A}{r^2}$ 과 $\rho A r \omega^2$ 에서 $\frac{GM\rho A}{r^2}$ 는

중력에서 dr 을 나누었고 $\rho A r \omega^2$ 에서도 똑같이 원심력의 식에서 dr 을 나누었으므로 중력이 원심력보다 클 경우는 항상 증가하고 원심력이 더 클 경우에는 감소하게 되기 때문에 최댓값은 정지궤도에서

나타남을 알게되었다. 또 어려웠던 점은 $\frac{dT}{dr} = \frac{GM\rho A}{r^2} - \rho A r \omega^2$ 이 식을 부정적분할때 부정적분을 하면

높이에 따른 인장력의 함수가 나오는데 이때 적분상수를 어떻게 구할지에 대한 고민이 많았었다. 그러던중 경계조건에 대해 알게되었다. 경계 조건이란 해당 영역의 경계에서 특정 값을 고정하거나 특정 조건을 만족하도록 하는 조건 적분 상수는 경계조건없이 구할 수 없으므로 지표면의 지점이 바람과 같은 외부 요인에 영향을 받을때 이를 견뎌 팽팽한 위한 장력인 10^5N 이라고 한 후 계산하여 최대 인장 응력을 구할 수 있었다.

느낀점(배운점 / 본인이 성장했다고 생각되는 점 등)

예전부터 우주 엘리베이터에 대한 궁금증이 많았는데 우주 엘리베이터가 실제로 가능하지 불가능한지에 대한 이야기가 사람들 사이에서 많은 논란이 되었었다. 그런데 우주 엘리베이터가 물리학, 수학적으로 실제로 가능한지에 대한 글은 없었기 때문에 내가 실제로 계산을 해보고싶었다. 따라서 이 활동을 하며 내가 궁금했었던 우주 엘리베이터에 대한 비밀을 풀어나가는 과정이 너무 재미있었으며 이 과정에서 많은 공부를 하였는데 먼저 여러 물리학 공식 만유인력 공식, 원심력 공식 등등에 대해 알 수 있었고 물리학 개념 각속도, 인장력, 인장응력, 인장강도에 대해서도 알 수 있었으며 마지막으로 미분방정식에 대해 배우고 어떤상황에서 이런 미분방정식을 써야 알맞게 활용할 수 있는지도 알게 되어 뿌듯했다.