Module : Analyse numériques

Chapitre 3 : Intégration Numérique

Exercice 4

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Énoncé

Le but de cet exercice est de déterminer une approximation de la valeur $\ln(2)$.
On considère la fonction $f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie aux points d'abscisses $-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$ et 1 par :

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$

On désigne par $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$

1. Déterminer $I_T^c(f)$ la valeur approchée de $I(f)$ par la formule composite des trapèzes, avec 4 sous intervalles de $[-1; 1]$.
2. Déterminer $I_S^c(f)$ la valeur approchée de $I(f)$ par la formule composite de Simpson, avec 2 sous intervalles de $[-1; 1]$.
3. Sachant que $f(x) = \frac{1}{3+x}$, calculer la valeur exacte de $I(f)$.
4. Calculer l'erreur d'intégration pour les deux approximations $I_T^c(f)$ et $I_S^c(f)$ de l'intégrale $I(f)$. En déduire laquelle des deux méthodes qui approche le mieux la valeur de $\ln(2)$.

Correction

1. Pour $a=-1$, $b=1$, $n=4$, et $h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{2}$; on a:

$$\begin{aligned}
I_T^c &= \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right)\\
&= \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(f(-1)+f(1)+2\sum_{k=1}^{4-1} f(-1+kh)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(f(-1)+2(f(-\frac{1}{2})+f(0)+f(\frac{1}{2}))+f(1)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+2(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7})+\frac{1}{4}\right)\\
&= 0.697
\end{aligned}$$

Correction (suite)

2. Pour $a = -1$, $b = 1$, $n = 2p$, $p = 1$, et $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{2} = 1$; on a:

$$
\begin{aligned}
I_S^c &= \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + \underbrace{2\sum_{k=1}^{p-1} f(a+2kh)}_{=0} + 4\sum_{k=0}^{p-1} f(a+(2k+1)h) \right) \\
&= \frac{1}{3}\left(f(-1) + f(1) + 4\sum_{k=0}^{0} f(-1+(2k+1)) \right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 4\frac{1}{3} \right) \\
&= 0.6944
\end{aligned}
$$

Correction (suite)

2. Pour $a = -1$, $b = 1$, $n = 2p$, $p = 1$, et $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{2} = 1$; on a:

$$\begin{aligned} I_S^c &= \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} f(a+2kh)}_{=0} + 4\sum_{k=0}^{p-1} f(a+(2k+1)h) \right) \\ &= \frac{1}{3}\left(f(-1) + f(1) + 4\sum_{k=0}^{0} f(-1+(2k+1)) \right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 4\frac{1}{3} \right) \\ &= 0.6944 \end{aligned}$$

3. $I = [\ln(3+x)]_{-1}^{1} = \ln(2)$.

Correction (suite)

2. Pour $a=-1$, $b=1$, $n=2p$, $p=1$, et $h=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{2}=1$; on a:

$$\begin{aligned}
I_S^c &= \frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+\underbrace{2\sum_{k=1}^{p-1} f(a+2kh)}_{=0}+4\sum_{k=0}^{p-1} f(a+(2k+1)h)\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(f(-1)+f(1)+4\sum_{k=0}^{0} f(-1+(2k+1))\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+4\frac{1}{3}\right)\\
&= 0.6944
\end{aligned}$$

3. $I=[\ln(3+x)]_{-1}^{1}=\ln(2)$.

4. On a $|I-I_T^c|=0.004$, $|I-I_S^c|=0.001$. Donc parmi les méthodes proposées, la méthode de Simpson approche le mieux la valeur de $\ln(2)$.