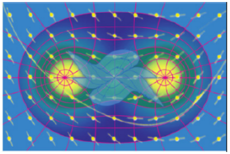
INTERPOLATION POLYNOMIALE

Correction-Exercice 4



Enoncé

Soit la fontion définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

1. Déterminer l'expression du polynôme de Newton interpolant les points $M_0\ (0, f(0)), M_1\ (1, f(1))$ et $M_2\ (2, 0)$.
2. Calculer la valeur approchée de f au point $x = \frac{1}{2}$, puis déterminer l'erreur d'interpolation en ce point.
3. Donner une majoration de l'erreur d'interpolation sur [0,2]. Conclure.
4. En ajoutant un point supplémentaire $M_3(3, f(3))$, déduire l'expression du nouveau polynôme qui interpole les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

Corrigé

:

Soit la fontion définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

1. Déterminer l'expression du polynôme de Newton interpolant les points

Corrigé

:

Soit la fontion définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

1. **Déterminer l'expression du polynôme de Newton interpolant les points $M_0\ (0,1), M_1\ (1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $M_2\ (2, \frac{1}{2})$.**

$$P_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x(x-1).$$

$$\beta_0 = [y_0] = y_0 = 1$$

$$\beta_1 = [y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{1 - 0} = -0.292$$

$$\beta_2 = [y_0, y_1, y_2] = \frac{[y_1, y_2] - [y_0, y_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + 0.292}{x_2 - x_0} = -0.207$$

2)Calculer la valeur approchée de f au point $x = \frac{1}{2}$, puis déterminer l'erreur d'interpolation en ce point.

2)Calculer la valeur approchée de f au point $x = \dfrac{1}{2}$, puis déterminer l'erreur d'interpolation en ce point.

$$P_2(0.5) = 0.905.$$

$$E = |0.905 - 0.923| = 0.018$$

3) Donner une majoration de l'erreur d'interpolation sur $[0, 2]$. Conclure.

5

3) Donner une majoration de l'erreur d'interpolation sur $[0,2]$. Conclure.
On sait que f est de classe C^3 sur $[0,2]$ et

$$f'(x) = -\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{4}x\Big).$$

$$f''(x) = -\Big(\frac{\pi^2}{4^2}\Big)\cos\Big(\frac{\pi}{4}x\Big).$$

$$f^{(3)}(x) = \Big(\frac{\pi^3}{4^3}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{4}x\Big).$$

d'où

$$|f^{(3)}(x)| \leq \Big(\frac{\pi^3}{4^3}\Big)$$

et par la suite

$$E(x) \leq \Big(\frac{\pi^3}{4^3 * 6}\Big)|x||x-1||x-2|$$

En remplaçant x par $\frac{1}{2}$, on obtient

$$E(1/2) \leq \Big(\frac{\pi^3}{4^3 * 2^4}\Big) = 0.03$$

4) En ajoutant un point supplémentaire $M_3(3, f(3))$, déduire l'expression du nouveau polynôme qui interpole les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

4) En ajoutant un point supplémentaire $M_3(3, f(3))$, déduire l'expression du nouveau polynôme qui interpole les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

$$P_3(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x(x-1) + \beta_3 x(x-1)(x-2).$$

avec,

$$\beta_3 = [y_0, y_1, y_2, y_3] = \frac{[y_1, y_2, y_3] - [y_0, y_1, y_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0.207}{3} = 0.069$$

$$[y_1, y_2, y_3] = \frac{[y_2, y_3] - [y_1, y_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - [y_1, y_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1} = 0.$$