Module : Analyse numériques

Chapitre 3 : Intégration Numérique

Exercice 3

esprit
Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Énoncé

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(1) a) (0.5 point) Justifier l'existence d'un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ qui interpole f en $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

b) (1.5 points) Déterminer l'expression du polynôme P_2 par la méthode d'interpolation de Lagrange.

c) (1 point) Donner la valeur approximative de $f(1/2)$, puis déduire l'erreur d'interpolation en ce point.

Dans la suite on s'intéresse à approcher l'intégrale suivante:

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

(2) a) (0.5 point) Calculer la valeur exacte de $I(f)$.

b) (1 point) Calculer $I_p = \displaystyle\int_0^1 P_2(x)dx$, où P_2 est le polynôme trouvé dans la première question, puis déduire l'erreur d'intégration E_p pour cette méthode.

Énoncé (suite)

(3) Soient g une fonction continue sur $[0,1]$ et $Q(g)$ la formule de quadrature suivante approchant l'intégrale $I(g)$:

$$Q(g) = \alpha g(0) + (1-\alpha) g(1)$$

a) (0.5 point) Quelle méthode d'intégration numérique retrouve-t-on lorsque $\alpha = 1$ puis lorsque $\alpha = 0$.

b) (1 point) Sachant que la formule $Q(g)$ est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 1, trouver la valeur de α.

(4) (1 point) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, donner la valeur de $Q(f)$ et déduire l'erreur d'intégration E_q pour cette méthode.

(5) (1 point) Approcher l'intégrale $I(f)$ par la méthode composite des trapèzes I_T en considérant un pas de discrétisation $h = \frac{1}{2}$, puis déduire l'erreur d'intégration E_T pour cette méthode.

(6) (0.5 point) Comparer les trois méthodes $Q(f)$, I_p et I_T en terme de précision. Justifier votre réponse.

Correction

(1) a) Les abscisses sont deux à deux distances, alors il existe un unique polynôme d'interpolation P_2. Comme le nombre de point est 3 alors $P_2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

b) Les éléments de la base de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés respectivement à $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ sont définies comme suit :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}x(x - 1) = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -(x + 1)(x - 1) = 1 - x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{2}x(x + 1) = \frac{x^2 + x}{2}$$

Le polynôme de Lagrange P_2 qui interpole f aux points d'abscisses $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ est

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\ &= \frac{1}{2}x(x - 1)f(-1) - (x + 1)(x - 1)f(0) + \frac{1}{2}x(x + 1)f(1) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{2}}x(x - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}x(x + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}x \end{aligned}$$

Correction (suite)

(1) c) Valeur approximative :

$$P_2(1/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.3535.$$

Erreur d'interpolation :

$$E(1/2) = |f(1/2) - P_2(1/2)| = \left|\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right| \approx 0.0936$$

Correction (suite)

(2) a) $I(f) = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = -1+\sqrt{2} \approx 0.4142$

b) L'intégrale :

$$I_p = \int_0^1 P_2(x)dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'erreur :

$$E_p = |I(f) - I_p| = \left|-1+\sqrt{(2)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right| \approx 0.0606$$

Correction (suite)

(3) a) Pour $\alpha = 1$, on a $Q(f) = g(0) = (1-0)g(0)$, c'est la méthode d'intégration de rectangle simple à gauche.
Pour $\alpha = 0$, on a $Q(g) = g(1) = (1-0)g(1)$, c'est la méthode d'intégration de rectangle simple à droite.

b) Soit $P(x) = x \in \mathbb{R}_1[x]$, la formule est exacte pour tous polynôme de degré 1, alors

$$\int_0^1 P(x)dx = Q(P)$$

D'une part, on a $\int_0^1 P(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$
D'autre part, $Q(P) = \alpha P(0) + (1-\alpha)P(1) = 1 - \alpha$
Par identification, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}$

esprit Se former autrement HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Correction (suite)

(4) La valeur de $Q(f)$:

$$Q(f) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'erreur E_q :

$$E_q = |I(f) - I_p| = \left| -1 + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right| \approx 0.0606$$

(5) Le nombre de sous-intervalles n est donné par $n = (1-0)/h = 2$, La formule d'intégration des trapèzes composites est donnée par :

$$I_T = (h/2)(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2))$$

avec $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h = 1/2$ et $x_2 = x_0 + 2h = 1$. On obtient

$$I_T = \frac{1}{4}(f(0) + 2f(1/2) + f(1)) = \frac{1}{4}(\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 0.4003$$

L'erreur E_T est

$$E_T = |I(f) - I_T| = |-1 + \sqrt{2} - 0.4003| \approx 0.0139.$$

Correction (suite)

(6) La méthode composite des trapèzes I_T approche le mieux la valeur de $I(f)$ car $E_T < E_q = E_p$