Chapitre 5 : Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires

Motivation & Rappel

Analyse Numérique 3ème année

Plan

1. Motivation
2. Les différents types d'équations différentielles
3. Existence et unicité de la solution

Motivation

Motivation

Exemple introductif :

- Considérons une tasse de café à la température de $75°C$ dans une salle à $25°C$.
- Après 5 minutes le café est à $50°C$.
- Si on suppose que la vitesse de refroidissement du café est proportionnelle à la différence des températures (i.e. que la température du café suit la loi de Newton), cela signifie qu'il existe une constante $K < 0$ telle que la température T vérifie l'EDO du premier ordre suivante :

$$T'(t) = K(T(t) - 25)$$

le temps t est exprimé en minutes et la température T en degré Celsius.

Question :

Déterminer la température du café à l'instant $t = 15mn$?

Réponse :

- On a $T'(t) = K(T(t) - 25)$. Alors $\frac{T'(t)}{T(t)-25} = K$, $T(t) \neq 25$

$$\Longrightarrow \int_0^t \frac{T'(s)}{T(s) - 25} ds = \int_0^t K ds$$

Ce qui implique que

$$\ln(|T(t) - 25|) - \ln(|T(0) - 25|) = Kt.$$

Sachant que $T(0) = 75^\circ$, l'expression de la solution analytique est de la forme :

$$T(t) = 25 + 50e^{Kt}, t \geq 0.$$

Réponse :

- Sachant que $T(5) = 50°\mathrm{C}$, on obtient

$$T(5) = 25 + 50e^{5K} = 50.$$

$\Longrightarrow$ la valeur de la constante de refroidissement $K = -\frac{\ln(2)}{5}$.

- Ainsi L'expression analytique de la solution est donnée par :

$$T(t) = 25 + 50e^{-\frac{\ln(2)}{5}t}, t \geq 0$$

- La température du café à l'instant $t = 15\mathrm{mn}$ est donnée par :

$$T(15) = 25 + 50e^{-\frac{h(2)}{5}15} = 25 + 50e^{-3\ln(2)} = 31.25.$$

Les différents types d'équations différentielles

Les différents types d'équations différentielles

Définition 1 : équation différentielle ordinaire

- Une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) d'ordre p est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \to x(t)$ et ses dérivées $x', x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$ au point t définie par :

$$f\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(p)}(t)\right) = 0, \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}. \tag{1}$$

- On dit que cette équation est scalaire si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. -
- Par abus de notation, l'équation (1) est notée aussi par $f\left(t, x, x', \dots, x^{(p)}\right) = 0$.
- Une solution à cette EDO sur un intervalle $I \subseteq R$ est une fonction $x : I \to \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}^*$, de classe C^p, et vérifiant (1).

Exemple

- $x'(t) - x(t) = t$ est une équation différentielle d'ordre 1.
- $x^{(3)}(t) + x'(t) - x(t)^2 = e^t$ est une équation différentielle d'ordre 3.

Les différents types d'équations différentielles

Dans ce cours on va se limiter à $d = 1$ et $p = 1$.

Définition 2 : équation différentielle normale

On appelle équation différentielle normale d'ordre p toute équation de la forme :

$$x^{(p)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(p-1)}(t)\right)$$

avec f est une fonction de $p+1$ variables.

Exemple :

- $x'(t) = x(t) + e^{t^2}$ est une équation différentielle normale d'ordre 1.
- $x^{(4)}(t) = tx^{(3)}(t) + 2x^{(2)}(t)$ est une équation différentielle normale d'ordre 4.

Les différents types d'équations différentielles

Définition 3 : équation différentielle linéaire

- Une EDO de type (1) d'ordre p est linéaire si elle est de la forme

$$a_p(t)x^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)x^{(p-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t)$$

où les fonctions $t \to a_i(t), 0 \leq i \leq p$, désignent les coefficients de L'EDO et la fonction $t \to g(t)$ son second membre.

- On parle d'équation différentielle linéaire d'ordre 1 sans second membre si $g(t) = 0$.

Exemple :

- $2x'(t) + x(t) = e^{t^2}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- $x^{(5)}(t) + tx'(t) + 2x(t) = t$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 5.

Existence et unicité de la solution

Problème de Cauchy

On s'intéresse aux équations differentielles du premier ordre de la forme :

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

avec $f : I \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ (I, intervalle de $\mathbb{R}$) une fonction continue. Le problème avec condition initiale est appelé problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Une solution du problème de Cauchy est la donnée d'un intervalle J et d'une fonction $\phi \in C^1(J, \mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{cases} t_0 \in J \subset I \\ \phi'(t) = f(t, \phi(t)), \quad \forall t \in J \\ \phi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $f : I \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

Existence et unicité de la solution

Théorème

Considérons le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

tels que

- f est continue sur $I \times \mathbb{R}$.
- f est lipschitzienne en x, uniformément continue en t : il existe $L > 0$ telle que $\forall t \in I, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

Alors, le problème de Cauchy possède une unique solution.

Dans ce cours on s'intéresse à des problèmes de Cauchy qui possèdent une unique solution.

Existence et unicité de la solution

Rappelons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\surd$ Si f(t, x(t))*estlinaire*!!!

Question

Comment résoudre les EDOs linéaires d'ordre 1 ?

Existence et unicité de la solution

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est de la forme :

$$a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t) \tag{2}$$

La solution générale de l'équation (2) sur I (intervalle de $\mathbb{R}$) est donnée par :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

avec

- x_p est une solution particulière de l'équation (2).
- x_h est une solution de l'équation (2) sans second membre (i.e $g(t) = 0$), vérifiant $x_h(t) = x_0 e^{-G(t)}$, tels que

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{a_0(s)}{a_1(s)} \; et \; x(t_0) = x_0$$

Existence et unicité de la solution

$\surd$ Si $f(t, x(t))$ est non-linéaire ! ! !

Question

Comment résoudre les équations différentielles non-linéaires ?

Alternative : Résolution numérique des problèmes de Cauchy admettant une solution unique, en utilisant la méthode d'euler explicite et la méthode d'euler implicite qui sont basées sur des méthodes de dérivation numérique ou d'intégration numérique.