École **S**upérieure **Pr**ivée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

Analyse Numériques

Série d'exercices : Intégration numérique

Niveau : 3ème année | Année universitaire : 2023-2024

1. Partie Synchrone

Exercice 1 *On s'intéresse dans cet exercice à approcher l'intégrale*

$$I = \int_1^2 cos(x^2)dx$$

1. *Donner une approximation de I en appliquant la méthode du rectangle à gauche en considérant 8 intervalles*
2. *Majorer l'erreur commise. On rappelle que l'erreur d'intégration $E^c_{Rg}(f)$ relative à la méthode composite des rectangles à gauche, pour le calcul approché de l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur$[a;b] \subset R$, est majorée par :*

$$|E^c_{Rg}(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

3. *Quel pas de discrétisation maximal h^* faut-il choisir pour avoir une erreur d'intégration de $I(f)$, par la méthode composite des rectangles à gauche composites, inférieure à 10^{-4} ?*

Exercice 2 *Soit g une fonction continue sur $[-1;1]$. On choisit deux points d'intégration $x_1 = -1, x_2 = \alpha$ où $\alpha \in]0;1[$. Pour approcher l'intégrale $I = \int_{-1}^1 g(t)dt$, la formule de quadrature suivante est considérée :*

$$I_q(g) = \sum_{j=1}^{2} \omega_j g(x_j) = \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha)$$

1. *Trouver les poids d'intégration ω_1 et ω_2 en fonction de α tels que la formule de quadrature soit de degré de précision supérieur ou égal à 1.*
2. a) *Trouver ensuite α tel que $I_q(g) = I = \displaystyle\int_{-1}^1 g(t)dt$ pour tout polynôme g de degré 2.*
   b) *Vérifier que le degré de précision de la formule de quadrature $I_q(g)$ est 2.*

Exercice 3 *(Examen AN Juin 2022)*

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(1) a) *(0.5 point) Justifier l'existence d'un unique polynôme* $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ *qui interpole* f *en* $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ *et* $x_2 = 1$.

b) *(1.5 points) Déterminer l'expression du polynôme* P_2 *par la méhode d'interpolation de Lagrange.*

c) *(1 point) Donner la valeur approximative de* $f(1/2)$*, puis déduire l'erreur d'interpolation en ce point.*

Dans la suite on s'intéresse à approcher l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

(2) a) *(0.5 point) Calculer la valeur exacte de* $I(f)$.

b) *(1 point) Calculer* $I_p = \displaystyle\int_0^1 P_2(x)dx$, *où* P_2 *est le polynôme trouvé dans la première question, puis déduire l'erreur d'intégration* E_p *pour cette méhode.*

(3) *Soient* g *une fonction continue sur* $[0,1]$ *et* $Q(g)$ *la formule de quadrature suivante approchant l'intégrale* $I(g)$:

$$Q(g) = \alpha g(0) + (1-\alpha)g(1)$$

a) *(0.5 point) Quelle méhode d'intégration numérique retrouve-t-on lorsque* $\alpha = 1$ *puis lorsque* $\alpha = 0$.

b) *(1 point) Sachant que la formule* $Q(g)$ *est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à* 1*, trouver la valeur de* α.

(4) *(1 point) Pour* $\alpha = \dfrac{1}{2}$, *donner la valeur de* $Q(f)$ *et déduire l'erreur d'intégration* E_q *pour cette méhode.*

(5) *(1 point) Approcher l'intégrale* $I(f)$ *par la méhode composite des trapèzes* I_T *en considérant un pas de discrétisation* $h = \dfrac{1}{2}$, *puis déduire l'erreur d'intégration* E_T *pour cette méthode.*

(6) *(0.5 point) Comparer les trois méthodes* $Q(f)$, I_p *et* I_T *en terme de précision. Justifier votre réponse.*

2. Partie en Asynchrone

Exercice 4 *Le but de cet exercice est de déterminer une approximation de la valeur* $\ln(2)$.
On considère la fonction $f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie aux points d'abscisses* $-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$ *et* 1 *par :*

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$

On désigne par $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx$

1. *Déterminer* $I_T^c(f)$ *la valeur approchée de* $I(f)$ *par la formule composite des trapèzes, avec* 4 *sous intervalles de* $[-1;1]$.
2. *Déterminer* $I_S^c(f)$ *la valeur approchée de* $I(f)$ *par la formule composite de Simpson, avec* 2 *sous intervalles de* $[-1;1]$.

3. *Sachant que* $f(x) = \frac{1}{3+x}$, *calculer la valeur exacte de* $I(f)$.
4. *Calculer l'erreur d'intégration pour les deux approximations* $I_T^c(f)$ *et* $I_S^c(f)$ *de l'intégrale* $I(f)$. *En déduire laquelle des deux méthodes qui approche le mieux la valeur de* $\ln(2)$.

Exercice 5 *Cet exercice porte sur l'approximation de l'intégrale* $I(g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)dx$ *où* g *est une fonction continue sur l'intervalle* $[-1, 1]$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$.
On fixe $\omega \in]0, 1]$ *et on considère la méthode d'intégration numérique sur* $[-1, 1]$ *donnée par :*

$$J_\omega(g) = \frac{4}{3} g\left(-\frac{\omega}{2}\right) + \frac{2}{3} g(\omega)$$

1. a. *Montrer que la méthode numérique est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 quel que soit* ω.
   b. *Déterminer* ω *pour que la méthode d'intégration numérique est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.*
   c. *Quel est alors son degré d'exactitude ?*
   Pour la suite on prend la fonction g *défine par*

$$g(x) = xe^{x^2},\ \forall x \in [-1, 1].$$

2. a. *Justifier l'existence d'un unique polynôme* $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ *qui interpole* g *en* $x_0 = -1$, $x_1 = 1$,
   b. *Déterminer l'expression du polynôme* P_1 *par une méthode d'interpolation vue en cours.*
   c. *Calculer* $I_p(P_1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_1(x)dx$. *Conclure.*
3. *Approcher l'intégrale* $I(g)$ *par la méthode simple des trapèzes* I_T.
4. *Calculer l'erreur d'intégration* E_J *commise par* J_ω