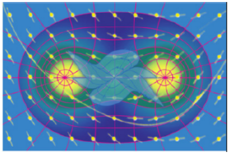
Interpolation polynomiale

Correction-Exercice 2



Enoncé

Partie I : Interpolation polynomiale

(a) Justifier l'existence d'un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ interpolant les points $(-2, 16), (0, -4)$ et $(2, 8)$.

(b) Déterminer l'expression du polynôme P_2 par une méthode (vue en cours) de votre choix

Corrigé

Partie I : Interpolation polynomiale

(a) Les abscisses des points $(-2,16);(0,-4)$ et $(2,8)$ sont deux à deux distincts donc il existe un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ passant par ces points. un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ passant par ces points.

(b) **Méthode de Lagrange:**

On considère les polynôme $(L_i)_{0\leq i\leq 2}$ de Lagrange associés aux $(-2,16);(0,-4)$ et $(2,8)$.

$$L_0(x) = \frac{x(x-2)}{8},\ L_1(x) = \frac{x^2-4}{-4},\ L_2(x) = \frac{x(x+2)}{8}$$

Alors $P_2(x) = 16L0(x) - 4L_1(x) + 8L_2(x) = 4x^2 - 2x - 4$

Corrigé

Partie I : Interpolation polynomiale

(a) Les abscisses des points $(-2, 16)$; $(0, -4)$ et $(2, 8)$ sont deux à deux distincts donc il existe un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ passant par ces points. un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ passant par ces points.

(b) **Méthode de Newton:**
Le polynôme de Newton est donné par :

$$P_2(x) = \alpha_0 w_0(x) + \alpha_1 w_1(x) + \alpha_2 w_2(x)$$

avec

$$\begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_1(x) = x + 2 \\ w_2(x) = x(x + 2) \end{cases}$$

Détermination des coefficients α_0, α_1 et α_2 par la méthode des differences divisées:
On a :
$x_0 = -2, y_0 = 16$
$x_1 = 0, y_1 = -4$
$x_2 = 2,\ y_2 = 8$
alors $\alpha_0 = 16 = f[x_0], \alpha_1 = f[x0, x1] = -10, \alpha_2 = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = 4$
Ainsi $\alpha_0 = 16, \alpha_1 = -10$ et $\alpha_2 = 4$ d'où:

$$P_2(x) = 16w_0(x) - 10w_1(x) + 4w_2(x) = 4x^2 - 2x - 4$$

Enoncé

Partie II : Approximation au sens des moindres carrées

Dans l'objectif d'étudier le chemin de freinage d'un véhicule, correspondant à la distance parcourue en mètres (m) du début du freinage jusqu'à l'arrêt total du véhicule, en fonction de la vitesse en Kilomètres par heure (Km/h) de ce dernier, 12 expériences indépendantes ont été réalisées. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous. On note par $X = (x_i)_{1 \leq i \leq 12}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq 12}$, où x_i, et y_i, désignent, respectivement, la vitesse du véhicule et le chemin de freinage associés à l'éxpérience i.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
y_i	9	11	20	27	39	45	58	78	79	93	108	12

(a) Déterminer les coefficients $Z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de la droite $f(t, Z) = a + bt$, qui ajuste au mieux les points $(x_i; y_i)_{1 \leq i \leq 12}$ au sens des moindres carrées. On donne les valeurs des sommes suivantes:

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 1140;\ \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 122600;\ \sum_{i=1}^{12} y_i = 691;\ \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 80840$$

(b) Rouler à une vitesse de $105Km/h$, le conducteur de ce véhicule pourrait-il éviter un obstacle survenant à une distance de $60m$? Justifir votre réponse.

Corrigé

Partie II : Approximation au sens des moindres carrées

(a) Le vecteur $Z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de la droite $f(t, Z) = a + bt$, qui ajuste au mieux les points $(x_i; y_i)_{1\leq i\leq 12}$ au sens des moindres carrées

$$F(Z, X) = \sum_{i=1}^{12} \Big(f(x_i, Z) - y_i \Big)^2$$

Il est donné par la relation suivante: $Z^* = ({}^tAA)^{-1} \, {}^tAY$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{12} \end{pmatrix}$

On a :

$$ {}^tAA = \begin{pmatrix} 12 & \sum_{i=1}^{12} x_i \\ \sum_{i=1}^{12} x_i & \sum_{i=1}^{12} x_i^2 \end{pmatrix} = {}^tAA = \begin{pmatrix} 12 & 1140 \\ 1140 & 122600 \end{pmatrix} $$

Cherchons $({}^tAA)^{-1}$?

On sait que $({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{det({}^tAA)} {}^tcom({}^tAA)$ avec

$det({}^tAA) = 12 \times 122600 - (1140)^2 = 171600$ et $com({}^tAA) = \begin{pmatrix} 122600 & -1140 \\ -1140 & 12 \end{pmatrix}$ alors

$({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{171600} \begin{pmatrix} 122600 & -1140 \\ -1140 & 12 \end{pmatrix}$ D'autre part ${}^tAY = \begin{pmatrix} 691 \\ 80840 \end{pmatrix}$ Ainsi

$$ Z^* = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAY = \begin{pmatrix} -43,36 \\ 1,06 \end{pmatrix} \quad Donc \quad f(t, Z) = -43,36 + 1.06t $$

Corrigé

Partie II : Approximation au sens des moindres carrées

(*b*) Une valeur estimée du chemin de freinage du véhicule à une vitesse de $105km/h$ est donné par $f(10.5; Z^*) = -43.36 + 1.06 \times 10.5 = 68.21$. Le conducteur du véhicule ne pourra pas éviter l'obstacle.