Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

Correction-Exercice 3

Partie I: $\theta = 1$

1) La matrice associée à (S_α^1) est $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$.

(S_α^1) admet une unique solution ssi $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} \qquad = 3 \begin{vmatrix} 2/3 & 5/3 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 3(\frac{2}{3}\alpha - \frac{10}{3}) = 2\alpha - 10.$$

$$\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq 5.$$

Conclusion : pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$, le système (S_α^1) admet une unique solution.

$$\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq 5.$$

Conclusion : pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$, le système (S_α^1) admet une unique solution.

2) On pose $\alpha = 6$, Dans ce cas $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

D'abord on peut vérifier facilement que A admet une unique décomposition LU, en effet :

$A^{(1)} = (3); \quad \det(A^{(1)}) = |3| \neq 0,$

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \det(A^{(2)}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0,$

$A^{(3)} = A; \quad \det(A^{(3)}) = \det(A) = 2 \times 6 - 10 = 2 \neq 0,$

Ainsi, tous les mineurs principaux de A sont inversibles et par suite A admet une unique décomposition LU.

Première méthode: Calcul des matrices L et U en utilisant la méthode de pivot de Gauss.

$$A = LU \text{ alors } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice A pour déterminer la matrice U.

Etape 0:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Etape 1:

Le pivot est $3 \neq 0$, on applique les opérations suivantes:

$$L_1 \leftarrow L_1, L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1, ona\ A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{2/3} & 5/3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Etape 2:

Le pivot est $\frac{2}{3} \neq 0$, on applique les opérations suivantes:
$L_1 \leftarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ à $A^{(1)}$, on a

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

On calcule L (pour la première colonne de L, on a $l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \forall 1 \leq i \leq 3$, pour la deuxième colonne de L on a $l_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \forall 1 \leq i \leq 3$
Ainsi,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Deuxième méthode: par identification

$A = LU$ avec L matrice triangulaire inférieure de diagonale unité et U matrice triangulaire supérieure :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix}$$

Alors par identification :

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times u_{1,1} = 3 \Rightarrow u_{1,1} = 3 \\ 1 \times u_{1,2} = 4 \Rightarrow u_{1,2} = 4 \\ 1 \times u_{1,3} = -2 \Rightarrow u_{1,3} = -2 \\ l_{2,1} \times 3 = 1 \Rightarrow l_{2,1} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \times 4 + 1 \times u_{2,2} = 2 \Rightarrow u_{2,2} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \times -2 + 1 \times u_{2,3} = 1 \Rightarrow u_{2,3} = \frac{5}{3} \\ 3 \times l_{3,1} = 0 \Rightarrow l_{3,1} = 0 \\ l_{3,2} \times \frac{2}{3} = 2 \Rightarrow l_{3,2} = 3 \\ 3 \times \frac{5}{3} + 1 \times u_{3,3} = 6 \Rightarrow u_{3,3} = 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution

$$AX = b \Longleftrightarrow LUX = b$$

Cherchons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ la solution du système linéaire $LY = b$.

$$L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après avoir calculer le vecteur Y il reste à trouver la solution du système linéaire

$$UX = Y$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode de remontée on obtient: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'unique solution de (S_1^6).

3) $A^2X = b \Longleftrightarrow A(AX) = b \Longleftrightarrow \begin{cases} AY = b \\ AX = Y \end{cases}$

Exemple: Pour $\theta = 1$ et $\alpha = 6$ résoudre $A^2X = b$

$AY = b \Longleftrightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d'après question 2 partie I)

$AX = Y \leftrightarrow LUX = Y \leftrightarrow \begin{cases} LZ = Y \\ UX = Z \end{cases}$

Cherchons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, la solution du système linéaire $LZ = Y$.

$$LZ = Y \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 4/3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Après avoir calculer le vecteur Z il reste à trouver la solution du système linéaire $UX = Z$

Alors,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4/3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode de remontée on obtient: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57/3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

Partie II : $\theta \in \mathbb{R}$

1) Pour que la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel soient convergentes il suffit que A soit à diagonale strictement dominante c-à-d:

$$\begin{cases} |3\theta| > 6 \\ |2\theta| > 2 \\ |\alpha| > 2 \end{cases}$$

Donc si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ et $\theta \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ alors la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes.

2) Pour $\alpha = 6$ et $\theta = 3$, $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

A est une matrice à diagonale strictement dominante, ainsi, la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss Seidel sont convergentes.

Méthode de Jacobi

Décomposition de Jacobi: On pose $A = D - E - F$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2} x_2^{(k)} - a_{1,3} x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1 - 4x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}}{9} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1} x_1^{(k)} - a_{2,3} x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{1 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1} x_1^{(k)} - a_{3,2} x_2^{(k)}}{a_{3,3}} = \frac{2 - 2x_2^{(k)}}{6} \end{cases}$$

Itération de Jacobi: Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

- **Itération 1 :** $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **Itération 2 :** $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1851 \\ 0.1851 \\ 0,3888 \end{pmatrix}$

Méthode de Gauss Seidel

Décomposition de Gauss-Seidel : On pose $A = D - E - F$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2} x_2^{(k)} - a_{1,3} x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1 - 4x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}}{9} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1} x_1^{(k)} - a_{2,3} x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{1 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1} x_1^{(k)} - a_{3,2} x_2^{(k)}}{a_{3,3}} = \frac{2 - 2x_2^{(k+1)}}{6} \end{cases}$$

Itération de Gauss-Seidel : Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

- **Itération 1 :** $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 1/52 \\ 52/162 \end{pmatrix}$
- **Itération 2 :** $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1742 \\ -0,0290 \\ 0,3430 \end{pmatrix}$