

TP1: Résolution numérique de systèmes d'équations linéaires

Objectif du TP:

L'objectif de ce TP est l'implémentation des méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution d'un système d'équations linéaires (SEL).

On aura besoin des modules numpy et matplotlib. Il faudra charger ces modules, en tapant les commandes suivantes

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

1 Rappels de Cours

1.1 Méthodes itératives pour la résolution d'un SEL

Les méthodes itératives consistent à avoir une suite récurrente de vecteurs, qui converge vers la solution du SEL. Cette solution est donnée une fois qu'une condition d'arrêt imposée à l'algorithme, est satisfaite.

1.1.1 Principe

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère un système linéaire (S): $AX = b$ avec

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Les méthodes itératives pour résoudre (S) se basent sur une décomposition de A sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice inversible. Une suite récurrente de solutions $X^{(k)}$, $k \geq 0$, est ensuite générée comme suit :

$$\begin{cases} X^{(0)} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ donné} \\ X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b. \end{cases}$$

avec $X^{(0)}$ un vecteur initial.

Cette suite converge, sous certaines conditions, vers la solution exacte X du système (S).

Exemples : Jacobi, Gauss-Seidel...

1.1.2 Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel

Les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel pour résoudre (S) : $AX = b$, consistent en premier lieu à décomposer A sous la forme :

$$A = D - E - F$$

avec:

D : matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de la matrice A .

E : matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont nuls.

F : matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont nuls.

Plus précisément, étant donnée une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}}_D - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{2,1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}}_E - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_F$$

- Méthode de Jacobi: $M = D$ et $N = E - F$.
- Méthode de Gauss-Seidel: $M = D - E$ et $N = F$.

1.1.3 Convergence

Si la matrice A est à diagonale strictement dominante, alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent quel que soit le choix du vecteur initial $X^{(0)}$.

1.1.4 Critère d'arrêt

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et soit ε une tolérance donnée. Parmi les critères d'arrêt pour les méthodes itératives de Jacobi et Gauss-Seidel, on cite

$$\|AX^{(k)} - b\| \leq \varepsilon.$$

2 Applications numériques

Soient $n \geq 4$ et $a_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, 3$.

On s'intéresse à la résolution numérique d'un système linéaire de n équations écrit sous la forme (S_n) : $AX = b$ avec

$$A = A(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_3 & a_1 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_3 & a_1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Écrire une fonction `tridiag(a1,a2,a3,n)` qui renvoie la matrice tridiagonale $A = A(a_1, a_2, a_3)$ de taille n et le second membre b du système linéaire (S_n) .
 (b) Tester la fonction `tridiag(a1,a2,a3,n)` pour $a_1 = 4, a_2 = a_3 = 1$ et $n = 10$.
2. (a) Écrire une fonction `matrice_diag_dominante(B)` prenant en entrée une matrice carrée B d'ordre n , qui vérifie si cette matrice est à diagonale strictement dominante ou non.
 (b) Tester la fonction `matrice_diag_dominante(B)` sur les matrices $B_1 = A(4, 1, 1)$ et $B_2 = A(1, 1, 1)$ pour $n = 10$.
3. (a) Écrire une fonction `jacobi(B, b1, X0, epsilon)` prenant en entrée une matrice carrée B d'ordre n , un second membre $b1$, une condition initiale $X0$ et une tolérance ϵ , qui renvoie une solution approchée du SEL $BX = b1$ par la méthode de Jacobi et le nombre d'itérations effectuées.
 La tolérance ϵ est utilisée pour le critère d'arrêt: $\|BX^{(k)} - b1\| \leq \epsilon$.
 On testera, à l'aide de la fonction `matrice_diag_dominante(B)`, si B est à diagonale strictement dominante, dans le cas contraire, on renverra B n'est pas à diagonale strictement dominante.

- (b) Utiliser la fonction `tridiag(a1,a2,a3,n)` pour tester la fonction de Jacobi avec les paramètres suivants

$$n = 10, B = B_1, b_1 = b, X^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^t \in \mathcal{M}_{10,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \epsilon = 10^{-6}.$$

- (c) En utilisant la fonction `np.linalg.solve(B1,b)`, résoudre (S_{10}) et trouver l'erreur commise par la méthode de Jacobi en norme euclidienne.
4. (a) Écrire une fonction `gauss_seidel(B, b1, X0, epsilon)` qui renvoie une solution approchée du SEL $BX = b_1$ par la méthode de Gauss-Seidel et le nombre d'itérations effectuées en testant si B est à diagonale strictement dominante.
- (b) Tester la fonction de Gauss-Seidel pour le même exemple considéré dans 3.b). Trouver, ensuite, l'erreur commise en norme euclidienne.
5. Comparer les résultats obtenus par les deux méthodes.
6. Représenter sur un même graphe, le nombre d'itérations par les deux méthodes itératives : Jacobi et Gauss-Seidel, en fonction de la précision ϵ . On considère $\epsilon \in \{10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}\}$ et $n = 10$. Interpréter les résultats obtenus.
7. Soit la fonction `Niter(epsilon)` définie comme suit

```
def Niter(epsilon):
    N=np.arange(5,31,5)
    Niter_J=[]
    Niter_GS=[]
    for n in N:
        Ab=tridiag(4,1,1,n)
        X0=np.ones((n,1))
        J=jacobi(Ab[0],Ab[1],X0,epsilon)
        GS=gauss_seidel(Ab[0],Ab[1],X0,epsilon)
        Niter_J.append(J[1])
        Niter_GS.append(GS[1])
    return Niter_J, Niter_GS
```

Tester cette fonction pour $\epsilon=10^{-6}$. Expliquer les résultats obtenus.