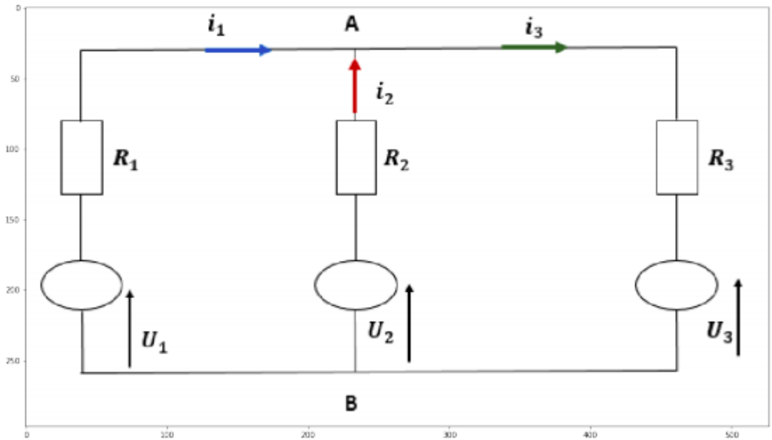
Résolution numérique de systèmes d'équations linéaires

Introduction

Activité introductive

On considère le circuit, donné ci-dessous, pour lequel on donne :
$U_1 = 110V,\ U_2 = 105V,\ U_3 = 90V,\ R_1 = 0.5\Omega,\ R_2 = 0.25\Omega,$ et $R_3 = 0.5\Omega$, où V et Ω désignent respectivement Volt et Ohm.



3

3

Question : Calculer les intensités du courant (en Ampères A) i_1, i_2 et i_3 ?

Question : Calculer les intensités du courant (en Ampères A) i_1, i_2 et i_3 ?

En appliquant la loi des nœuds en A, on a

Question : Calculer les intensités du courant (en Ampères A) i_1, i_2 et i_3 ?

En appliquant la loi des nœuds en A, on a

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \tag{1}$$

Question : Calculer les intensités du courant (en Ampères A) i_1, i_2 et i_3 ?

En applaquant la loi des nœuds en A, on a

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \tag{1}$$

En appliquant la loi des mailles, on obtient

Question : Calculer les intensités du courant (en Ampères A) i_1, i_2 et i_3 ?

En appliquant la loi des nœuds en A, on a

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \tag{1}$$

En appliquant la loi des mailles, on obtient
Maille 1 : $A, R_1, U_1, B, U_2, R_2, A,$ avec le sens de parcours indiqué :

$$R_1 \cdot i_1 - U_1 + U_2 - R_2 \cdot i_2 = 0.$$

En remplaçant R_1, R_2, U_1 et U_2 par ses valeurs, on obtient

$$0.5 \cdot i_1 - 0.25 \cdot i_2 + 0 \cdot i_3 = 5 \tag{2}$$

Maille 2 : $A, R_2, U_2, B, U_3, R_3, A$ avec le sens de parcours indiqué, l'application de la loi des mailles donne :

$$R_2 \cdot i_2 - U_2 + U_3 + R_3 \cdot i_3 = 0.$$

En remplaçant R_2, R_3, U_2 et U_3 par ses valeurs, on obtient

$$0 \cdot i_1 + 0.25 \cdot i_2 + 0.5 \cdot i_3 = 15 \tag{3}$$

On obtient un système d'équation linéaires, en effet

Maille 2 : $A, R_2, U_2, B, U_3, R_3, A$ avec le sens de parcours indiqué, l'application de la loi des mailles donne :

$$R_2 \cdot i_2 - U_2 + U_3 + R_3 \cdot i_3 = 0.$$

En remplaçant R_2, R_3, U_2 et U_3 par ses valeurs, on obtient

$$0 \cdot i_1 + 0.25 \cdot i_2 + 0.5 \cdot i_3 = 15 \tag{3}$$

On obtient un système d'équation linéaires, en effet
(1), (2) et (3) $\Rightarrow$

$$(S) \begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 & = 0 \\ 0.5 \cdot i_1 - 0.25 \cdot i_2 + 0 \cdot i_3 & = 5 \\ 0 \cdot i_1 + 0.25 \cdot i_2 + 0.5 \cdot i_3 & = 15 \end{cases} \Leftrightarrow RI = U$$

où i_1 i_2 et i_3 sont les inconnues, $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$.

$\det R = \begin{vmatrix} -0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.5 \end{vmatrix} - 0.5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0.25 & 0.5 \end{vmatrix} = -0.5 \neq 0, \Rightarrow$ le système (S) est de Cramer et admet une solution unique, donnée par

- $i_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & -0.25 & 0 \\ 15 & 0.25 & 0.5 \end{vmatrix}}{\det R} \simeq 15\ A$

- $i_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & -0.25 & 0 \\ 15 & 0.25 & 0.5 \end{vmatrix}}{\det R} \simeq 15\ A$
- $i_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.5 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 0.5 \end{vmatrix}}{\det R} \simeq 10\ A$

- $i_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & -0.25 & 0 \\ 15 & 0.25 & 0.5 \end{vmatrix}}{\det R} \simeq 15\ A$
- $i_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0.5 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 0.5 \end{vmatrix}}{\det R} \simeq 10\ A$
- $i_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.25 & 5 \\ 0 & 0.25 & 15 \end{vmatrix}}{\det R} \simeq 25\ A$

Pourquoi le problème de la résolution d'un tel système se pose alors que la formule de Cramer permet de le résoudre?

Supposons qu'on a un circuit complexe qui contient plus de 100 mailles et on souhaite calculer les valeurs de l'intensité $i_k, 1 \leq k \leq 100$.

Supposons qu'on a un circuit complexe qui contient plus de 100 mailles et on souhaite calculer les valeurs de l'intensité $i_k, 1 \leq k \leq 100$.
Nous devons calculer:

- un déterminant d'une matrice de taille $n \Rightarrow n! - 1$ additions et $n!(n-1)$ multiplications $\Rightarrow n! - 1 + n!(n-1) = nn! - 1$ opérations.
- $n + 1$ déterminants de taille $n \Rightarrow (n+1)(nn! - 1)$ opérations.

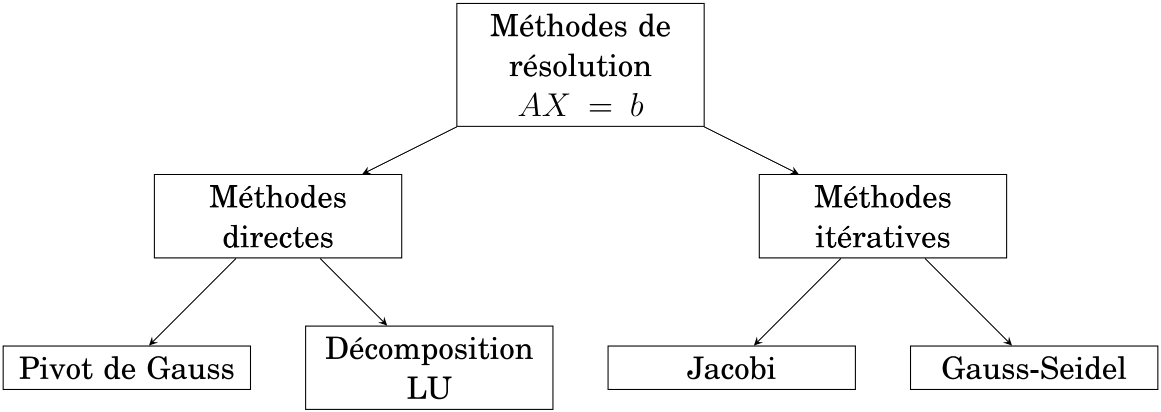
$\Rightarrow$ Pour $n = 100$ on trouve $9,4 \cdot 10^{161}$ opérations.
Avec un ordinateur fonctionnant à 100 mégaflops (flops = opérations à virgule flottante par secondes), il faudrait environ $3 \cdot 10^{146}$ années pour résoudre notre système !

En pratique, Il existe deux grandes familles de méthodes de résolution pour des systèmes d'équations linéaires:

- **Méthodes directes** qui permettent d'obtenir la solution en un nombre fini d'opérations soit par triangularisation ou soit par décomposition de la matrice A. Les méthodes directes que nous allons étudier sont: `Pivot de Gauss et La méthode de décomposition LU`

En pratique, Il existe deux grandes familles de méthodes de résolution pour des systèmes d'équations linéaires:

- **Méthodes directes** qui permettent d'obtenir la solution en un nombre fini d'opérations soit par triangularisation ou soit par décomposition de la matrice A. Les méthodes directes que nous allons étudier sont: `Pivot de Gauss et La méthode de décomposition LU`
- **Méthodes itératives** qui consistent à construire une suite $(x_n)_n$ qui converge vers la solution. Les méthodes itératives que nous allons étudier sont : `La méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel`


Méthodes de résolution $AX = b$
Méthodes directes
Méthodes itératives
Pivot de Gauss
Décomposition LU
Jacobi
Gauss-Seidel

Système d'équations linéaires

Définition

Un système de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$, à coefficients $a_{i\,j}$, et seconds membres $b_1, b_2, \cdots, b_n$, est de la forme:

$$(S_n)\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \cdots + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 + \cdots + a_{2\,n}x_n & = b_2 \\ \quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots & \\ \quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots & \\ \quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots & \\ a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \cdots + a_{n\,n}x_n & = b_n \end{cases}$$

12

Forme matricielle d'un système linéaire

Un système d'équations linéaires peut aussi s'écrire sous la forme matricielle:

$$AX = b,$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice dont les coefficients sont les $a_{i\,j}$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur inconnu et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur second membre:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Résultat fondamental :
Un système d'équations linéaires (S_n) admet dans $\mathbb{R}^n$ une solution ou une infinité de solutions ou il n'admet aucune solution.

13

Existence des solutions

Les systèmes suivants ont-ils dans $\mathbb{R}^2$ une solution unique, une infinité de solution ou aucune solution?

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ -x_1 + x_2 & = 1 \end{cases}, \quad (S')\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + x_2 & = 3 \end{cases}, \quad (S'')\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 & = 2 \end{cases}$$

Existence des solutions

Les systèmes suivants ont-ils dans $\mathbb{R}^2$ une solution unique, une infinité de solution ou aucune solution?

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ -x_1 + x_2 & = 1 \end{cases}, \quad (S')\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + x_2 & = 3 \end{cases}, \quad (S'')\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 & = 2 \end{cases}$$

Correction :

- (S) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(S) admet une solution unique $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de la matrice vaut $2 \neq 0$ et dans ce cas on dit que (S) est un système de Cramer.

14

- (S') s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(S') n'admet pas des solutions. Le déterminant de la matrice vaut 0.

- (S') s'écrit sous la forme matricielle suivante :

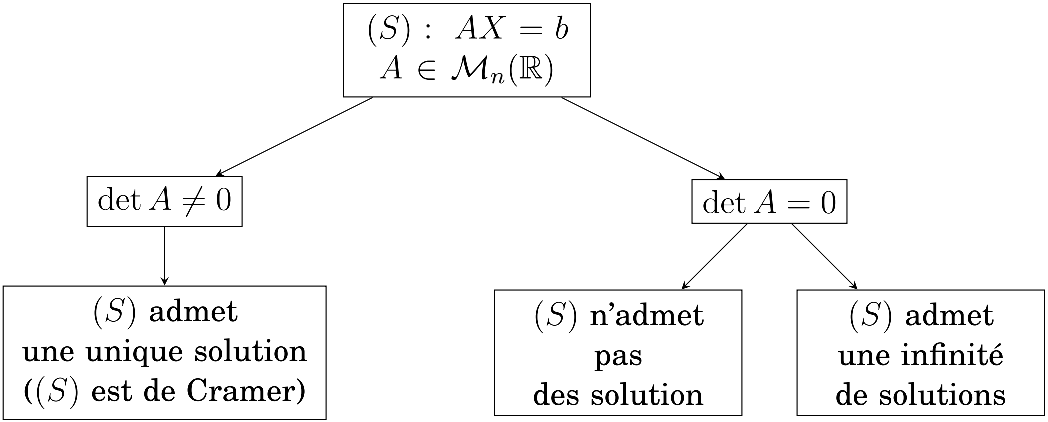
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

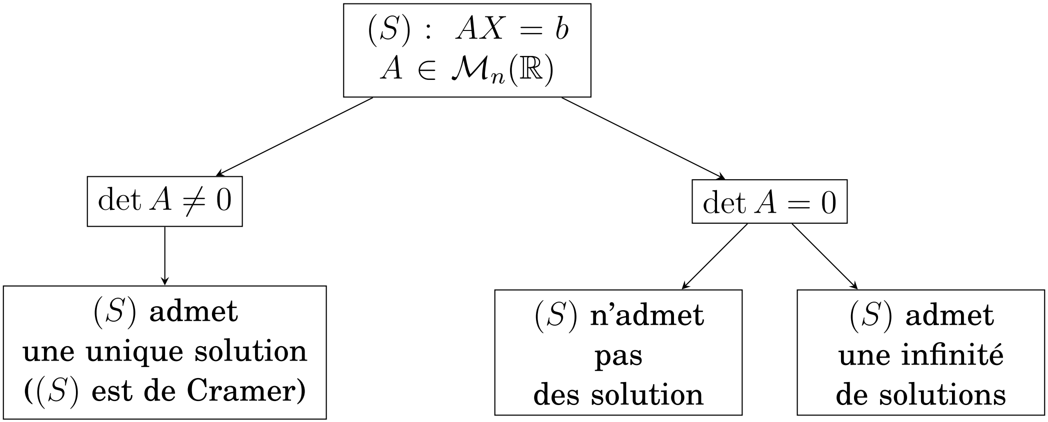
  (S') n'admet pas des solutions. Le déterminant de la matrice vaut 0.

- (S'') s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  (S'') admet une infinité de solutions $X = \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_2 est l'inconnue auxiliaire qui peut prendre une valeur arbitraire. Le déterminant de la matrice vaut 0 .


$(S): \ AX = b$
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$\det A \neq 0$
$\det A = 0$
(S) admet
une unique solution
((S) est de Cramer)
(S) n'admet
pas
des solution
(S) admet
une infinité
de solutions



L'objectif de ce cours est de résoudre **des systèmes de Cramer** en utilisant **des méthodes numériques** (à travers des algorithmes).