esprit — Se former autrement — HONORIS UNITED UNIVERSITIES	**EXAMEN** Semestre : 1 ☐ 2 ☒ Session : Principale ☒ Rattrapage ☐

Unité d'enseignement : Equipe AN

Module(s) : Analyse Numérique

Classe(s) : 3A 2 $\rightarrow$ 28 — Nombre de pages : 2

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐ — Documents autorisés : OUI ☐ NON ☒

Date : 30 mai 2023 — Heure : 13h00 — Durée : 1h30 min

NB : Vous êtes appelés **à écrire que trois chiffres après la virgule pour tous résultats trouvés.

Exercice 1 (8 points)

Cet exercice porte sur l'approximation de l'intégrale $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ où f est une fonction continue sur l'intervalle $[-1, 1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

On définit la formule de quadrature suivante approchant l'intégrale $I(f)$

$$J_\alpha(f) = \lambda_0 f(-\alpha) + \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f(\alpha), \text{ où } \alpha \in [-1, 1].$$

1) a) **(1.5 pts)** Sachant que la méthode $J_\alpha(f)$ est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, montrer que $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ vérifie le système linéaire suivant : $(S_\alpha)\ \ A\Lambda = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b) **(1 pt)** Pour quelles valeurs du paramètre rèel α, le système (S_α) admet une unique solution ?

c) **(1 pt)** Pour $\alpha = 1$, résoudre (S_1) par la méthode du pivot de Gauss.

2) **(0.5 pt)** Déduire à quelle méthode d'intégration $J_1(f)$ correspond-elle ?.

Pour la suite on prend la fonction f défine par

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}, \ \forall x \in [-1, 1].$$

3) a) **(0.5 pt)** Justifier l'existence d'un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ qui interpole f en $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

b) **(1 pt)** Déterminer l'expression du polynôme P_2 par une méthode d'interpolation vue en cours.

c) **(0.5 pt)** Calculer $I_p(P_2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_2(x)dx$.

4) a) **(0.5 pt)** Calculer la valeur exacte de $I(f)$.

b) **(1 pt)** Calculer l'erreur d'intégration E_J^1 commise par J_1 et l'erreur E_P commise par $I_p(P_2)$.

c) **(0.5 pt)** Comparer les méthodes $J_1(f)$ et $I_p(P_2)$ en terme de précision en justifiant votre réponse.

Exercice 2 (7 points)

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E) : $f(x) = 0$ dans $I = [0, \pi]$ où la fonction f est donnée par :

$$f(x) = x - \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{1}{2}, \qquad x \in I.$$

Il est à noter que la variable x est exprimée en radian.

1) **(1 pt)** Montrer que **(E)** admet une unique solution x^* dans $]0, \pi[$.
2) a) **(0.5 pt)** Trouver le nombre d'itérations suffisant pour estimer x^* par la méthode de dichotomie avec une tolérance $\epsilon = 10^{-3}$.

   b) **(1.5 pts)** Calculer c_0, c_1 et c_2 les premiers itérés de la méthode de dichotomie dans $]0, \pi[$.
3) Pour approcher x^* par la méthode du point fixe on définit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \pi], \\ x_{n+1} = g(x_n) \qquad \forall\, n \geq 0 \end{cases}$$

avec $\quad g(x) = \dfrac{1}{5}\sin(x) + \dfrac{1}{2}$.

   a) **(1.5 pts)** Montrer que cette suite converge vers l'unique solution x^*.

   b) **(1 pt)** Estimer le nombre d'itérations suffisant pour déterminer une valeur approchée par la méthode du point fixe à $\epsilon = 10^{-3}$ près de la racine x^*.

   c) **(1.5 pts)** Pour $x_0 = 0$, calculer les trois premières itérations.

Exercice 3 (5 points)

Un réservoir contient 1000 litres d'eau pure. A la suite d'un incident, l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à un débit de 10 litres par minute. On note $x(t)$ le taux de sel dans l'eau (exprimé en $g.L^{-1}$) à l'instant t (exprimé en minutes). On suppose que l'évolution de x est décrite par le problème de Cauchy suivant :

$$(PC) \begin{cases} x'(t) + 0.01\, x(t) = 0.39 \quad \forall t \in [0,\, 30] \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Dans la suite, x_n désigne l'approximation de la solution exacte $x(t)$ du problème (PC) au point de discrétisation t_n où $n \in \mathbb{N}$.

1) **(1 pt)** Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy (PC) est donnée par

$$x(t) = 39 - 39\, e^{-0.01\, t} \;\; \forall\, t \,\in [0,\, 30].$$

2) a) **(1 pt)** Donner le schéma d'Euler implicite pour la résolution du problème (PC) avec un pas de discrétisation constant $h > 0$.

   b) **(0.5 pt)** Pour $h = 5$, montrer que la solution numérique x_n, donnée par la question précédente, satisfait la relation suivante

$$x_{n+1} = \frac{1.95 + x_n}{1.05}, \;\text{ pour } n = 0,\, 1, \ldots, 5.$$

   c) **(1.5 pts)** Déterminer une valeur approchée du taux de sel dans l'eau au bout de 15 minutes.
3) a) **(0.5 pt)** Le taux de sel dans l'eau doit être inférieur à 3.9 $g.L^{-1}$. Trouver à quel instant maximal t_n, la solution x_n ne dépasse pas 3.9 $g.L^{-1}$.

   b) **(0.5 pt)** Déduire l'erreur commise par la méthode d'Euler implicite à l'instant t_n trouvé dans la question précedente.