Chapitre 5: Résolution numérique d'équations différentielles

Dérivation numérique

Motivation

La détermination de l'expression explicite de la dérivée d'une fonction dérivable peut être difficile et pénible.

En analyse numérique, il existe une vaste famille d'algorithmes qui permettent d'approcher la dérivée d'une fonction en un point.

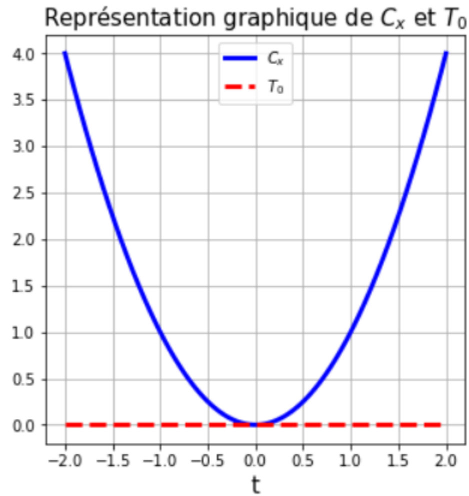
Dans cette section, on se limitera à exposer deux méthodes de dérivation numérique qui nous permettront de trouver une approximation de la dérivée en un point en utilisant seulement ce point et un autre point qui lui est assez proche. On donnera aussi des estimations d'erreur de ces méthodes.

Exemple introductif

On considère la fonction x définie par

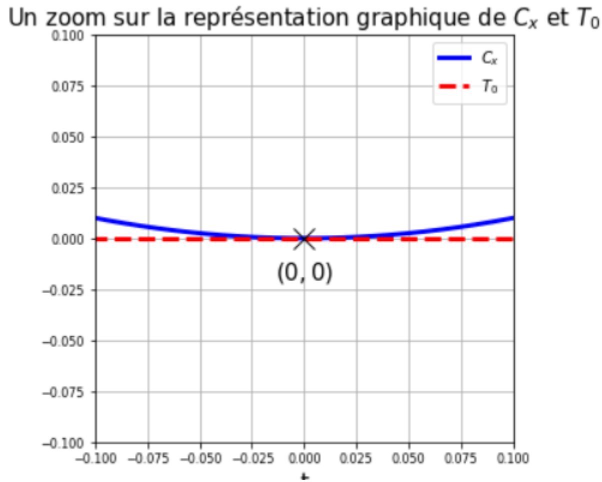
$$x(t) = t^2, \quad \forall t \in [-2, 2].$$

Traçons C_x, la courbe représentative de x ainsi que T_0, la tangente à C_x en 0.



Appliquons un zoom pour $t \in [-0.1, 0.1]$.

Constat: Au voisinage de 0, C_x et T_0 ont le même comportement.



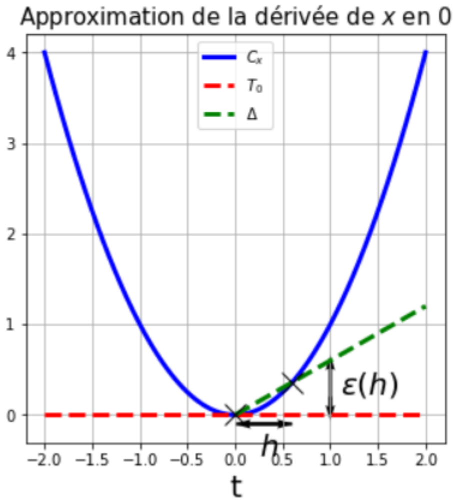
En particulier, pour $h > 0$ assez petit, en notant Δ la droite passant par $(0, x(0))$ et $(h, x(h))$, les coefficients directeurs des droites Δ et T_0 sont à peu près égaux:

$$x'(0) \approx \frac{x(h) - x(0)}{h}.$$

En d'autres termes, en posant $\varepsilon(h) = \frac{x(h)-x(0)}{h} - x'(0)$, on obtient

$$x(h) = x(0) + x'(0)\,h + h\varepsilon(h), \quad \varepsilon(h) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Cette écriture est appelée le développement limité de x au voisinage 0 à l'ordre 1.



Développement limité (Développements de Taylor)

- **Développement de Taylor-Young à l'ordre** 1

  Soient $t \in \mathbb{R}$ et x une fonction de classe C^1 au voisinage de t. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h|$ est assez petit,

$$x(t+|h|) = x(t) + x'(t)\,|h| + |h|\,\varepsilon(h), \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

- **Développement de Taylor-Lagrange à l'ordre** 1

  Si de plus x est deux fois dérivable, alors $\exists c \in]t-|h|, t+|h|[$ tel que

$$x(t+|h|) = x(t) + x'(t)\,|h| + \frac{h^2}{2}x''(c).$$

Conséquences

1 Formules de différence finie

Soient $t \in \mathbb{R}$ et x une fonction de classe C^1 au voisinage de t. Pour tout $h > 0$ assez petit

- **Formule de différence finie progressive (différence décentrée à droite):**

$$x'(t) \approx \tilde{x}'(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

- **Formule de différence finie rétrograde (différence décentrée à gauche):**

$$x'(t) \approx \tilde{x}'(t) = \frac{x(t) - x(t-h)}{h}.$$

Exemple:

On considère la fonction x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = \arctan(\sin t).$$

1. Calculer $x'(0)$.
2. Donner une approximation à $x'(0)$ en utilisant la formule de différence finie progressive avec un pas $h = 0.1$
3. Donner une approximation à $x'(0)$ en utilisant la formule de différence finie rétrograde avec un pas $h = 0.2$

Exemple:

On considère la fonction x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = \arctan(\sin t).$$

1. Calculer $x'(0)$.
2. Donner une approximation à $x'(0)$ en utilisant la formule de différence finie progressive avec un pas $h = 0.1$
3. Donner une approximation à $x'(0)$ en utilisant la formule de différence finie rétrograde avec un pas $h = 0.2$

Réponse:

1. La fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, on a

$$x'(t) = \frac{\cos(t)}{1 + \sin^2(t)}.$$

En particulier $x'(0) = 1$.

Exemple:

On considère la fonction x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = \arctan(\sin t).$$

1. Calculer $x'(0)$.
2. Donner une approximation à $x'(0)$ en utilisant la formule de différence finie progressive avec un pas $h = 0.1$
3. Donner une approximation à $x'(0)$ en utilisant la formule de différence finie rétrograde avec un pas $h = 0.2$

Réponse:

1. La fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, on a

   $$x'(t) = \frac{\cos(t)}{1 + \sin^2(t)}.$$

   En particulier $x'(0) = 1$.
2. $x'(0) \approx \frac{x(0.1) - x(0)}{0.1} = 0.99503715$.

Exemple:

On considère la fonction x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = \arctan(\sin t).$$

1. Calculer $x'(0)$.
2. Donner une approximation à $x'(0)$ en utilisant la formule de différence finie progressive avec un pas $h = 0.1$
3. Donner une approximation à $x'(0)$ en utilisant la formule de différence finie rétrograde avec un pas $h = 0.2$

Réponse:

1. La fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, on a

$$x'(t) = \frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)}.$$

   En particulier $x'(0) = 1$.
2. $x'(0) \approx \frac{x(0.1)-x(0)}{0.1} = 0.99503715.$
3. $x'(0) \approx \frac{x(0)-x(-0.2)}{0.2} = 0.98057871.$

2 Estimation de l'erreur de troncature

Soient $t \in \mathbb{R}$ et x une fonction de classe C^2 au voisinage de t.
Pour tout $h > 0$ assez petit, l'erreur de troncature pour les formules de différence finie progressive et rétrograde $E(h) = |x'(t) - \tilde{x}'(t)|$ vérifie

$$E(h) \leq \frac{h}{2} \sup_{s \in I} |x''(s)|,$$

avec $I = [t, t+h]$ pour la formule de différence finie progressive et $I = [t-h, t]$ pour la formule de différence finie rétrograde.

➜ Les erreurs des formules de différence finie progressive et rétrograde sont de l'ordre 1 en h.