Série d'exercices : Résolution d'équations différentielles ordinaires

Exercice 1

Préparé par :
Unité Pédagogique de Mathématiques

Exercice 1

Enoncé

On considère le problème de Cauchy suivante

$$(PC) : \begin{cases} x'(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}x(t) \\ x(0) = 5 \end{cases}$$

(1) Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy (PC) est donnée par:

$$x(t) = 5\exp(-\arctan(t)) \text{ pour } t \geq 0$$

(2) Donner le schéma d'Euler implicite (régressif) avec un pas de temps h constant.

(3) En déduire que pour $h = \frac{1}{2}$, la solution numérique x_{n+1} (approchant la solution exacte x au point de discrétisation t_{n+1} , $n \geq 0$) du problème de Cauchy (PC) trouvée par la méthode d'Euler implicite vérifie la relation suivante :

$$x_{n+1} = \frac{4+(n+1)^2}{6+(n+1)^2}x_n, \qquad \forall n \geq 0$$

(4) Appliquer le schéma itératif de la question (3) pour résoudre numériquement (PC) sur l'intervalle $[0, 2]$.

(5) Calculer l'erreur commise par la méthode d'Euler implicite au point $t = 2$.

Exercice 1
Solution

Question 1 : Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy (PC) est donnée par : $x(t) = 5\exp(-\arctan(t))$ pour $t \geq 0$.

Pour que $x(t) = 5\exp(-\arctan(t))$ soit la solution analytique de (PC) pour $t \geq 0$ il faut vérifier que $t \mapsto x(t)$ de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $t \mapsto x(t)$ vérifie le système (PC).

- Il est évident que $t \mapsto 5\exp(-\arctan(t))$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
- On a

$$x'(t) = -5(\arctan(t))' \exp(-\arctan(t)) = -5\frac{1}{1+t^2}\exp(-\arctan(t))$$
$$= -\frac{1}{1+t^2}x(t).$$

- De plus pour $t = 0$ on a

$$x(0) = 5\exp(-\arctan(0)) = 5\exp(0) = 5.$$

Donc $x(t)$ vérifie les deux équations du système (PC). Ainsi $x(t) = 5\exp(-\arctan(t))$ est la solution analytique de (PC) pour $t \geq 0$.

Question 2 : Donner le schéma d'Euler implicite (régressif) avec un pas de temps h constant.

On commence d'abord par la discrétisation de l'intervalle de temps avec un pas de temps h.
On pose: $t_0 = 0$, $t_1 = t_0 + h = h, \ldots, t_n = t_0 + nh = nh, \ldots$. et on note $x(t_n) = x_n$.
Le schéma d'Euler implicite (régressif) avec un pas de temps h pour le système (PC) est donnée par

$$x'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, x_{n+1}) \text{ avec } f(t,x) = -\frac{1}{1+t^2}x$$

$x'(t)$ est donnée par la méthode de dérivation numérique en $t = t_{n+1}$ par :

$$x'(t_{n+1}) = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}$$

Par suite le schéma d'Euler implicite pour tout $n \geq 0$ s'écrit:

$$\begin{aligned}
\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} = f(t_{n+1}, x_{n+1}) &\Leftrightarrow \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} = -\frac{1}{1+t_{n+1}^2}x(t_{n+1}) \\
&\Leftrightarrow x(t_{n+1}) = x(t_n) - h\frac{1}{1+t_{n+1}^2}x(t_{n+1}) \\
&\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - h\frac{1}{1+t_{n+1}^2}x_{n+1}
\end{aligned}$$

Donc, le schéma d'Euler implicite pour (PC)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - h\dfrac{1}{1+t_{n+1}^2}x_{n+1}, & \forall n \geq 0 \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

Question 3 : En déduire que pour $h = \frac{1}{2}$, la solution numérique x_{n+1} vérifie $x_{n+1} = \dfrac{4+(n+1)^2}{6+(n+1)^2}x_n$, $\forall n \geq 0$

Pour $h = \dfrac{1}{2}$ alors on a $t_0 = 0$, $t_1 = t_0 + h = \dfrac{1}{2}, \ldots, t_n = t_0 + nh = \dfrac{n}{2}$ ainsi $t_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}$. Si on remplace t_{n+1} par $\frac{n+1}{2}$ dans le schéma d'Euler implicite pour (PC) alors on a : $\forall n \geq 0$

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - h\frac{1}{1+t_{n+1}^2}x_{n+1} &\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2(1+t_{n+1}^2)}x_{n+1} \\ &\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2(1+(\frac{n+1}{2})^2)}x_{n+1} \\ &\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2(1+\frac{(n+1)^2}{4})}x_{n+1} \\ &\Leftrightarrow x_{n+1}(1+\frac{1}{2(1+\frac{(n+1)^2}{4})}) = x_n \\ &\Leftrightarrow x_{n+1}(1+\frac{1}{2+\frac{n^2}{2}}) = x_n \end{aligned}$$

Le schéma d'Euler implicite pour (PC) est :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n\left(\dfrac{4+(n+1)^2}{6+(n+1)^2}\right), & \forall n \geq 0 \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

Question 4 **Appliquer le schéma itératif de la question** (3) **pour résoudre numériquement** (PC) **sur** $[0,2]$**.**

On cherche la solution du problème (PC) au point $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = 1$, $t_3 = \dfrac{3}{2}$ et $t_4 = 2$

- Pour $t_0 = 0$,$x_0 = 5$.
- Pour $n = 0$, $t_{n+1} = t_1 = \frac{1}{2}$ on a $x_1 = x_0\left(\frac{4+(0+1)^2}{6+(0+1)^2}\right) = 5\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{25}{7} = 3.5714$
- Pour $n = 1$ $t_{n+1} = t_2 = 1$ on a $x_2 = x_1\left(\frac{4+(1+1)^2}{6+(1+1)^2}\right) = \frac{25}{7}\frac{8}{10} = \frac{20}{7} = 2.8571$
- Pour $n = 2$ $t_{n+1} = t_3 = \frac{3}{2}$ on a $x_3 = x_2\left(\frac{4+(2+1)^2}{6+(2+1)^2}\right) = \frac{20}{7}\frac{13}{15} = \frac{52}{21} = 2.4761$
- Pour $n = 3$ $t_{n+1} = t_4 = 2$ on a $x_4 = x_3\left(\frac{4+(3+1)^2}{6+(3+1)^2}\right) = \frac{52}{21}\frac{10}{11} = \frac{520}{231} = 2.2510$

La solution du problème (PC) au point $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = 1$, $t_3 = \dfrac{3}{2}$ et $t_4 = 2$ est donnée par le tableau suivant:

t_i	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
x_i	5	3.571428571	2.857142857	2.476190476	2.251082251

Table : Valeur de x_i à l'instant t_i.

Question 5 **Calculer l'erreur commise par la méthode d'Euler implicite au point $t = 2$.**
L'erreur commise par la méthode d'Euler implicite au point $t = 2$ est donnée par:

$$E(t = 2) = |x(t = 2) - x_4|$$

avec $x(2) = 5\exp(-\arctan(2)) = 1.652499838$ par suite

$$E(t = 2) = |1.652499838 - 2.251082251| = 0.598582413$$