Théorie des langages et des automates

Ch4: Automates à pile

Ecole Supérieure Privée d'Ingénierie et de Technologies

Année universitaire 2013 / 2014

PLAN

- Généralités.
- Définition.
- Exemple introductif
- Transitions dans un PDA
- Configurations
- Langage reconnu par un PDA

Automate à pile

- L'approche pour *analyser la syntaxe du code source d'un programme* est de scanner le programme *de gauche à droite*, en cherchant une dérivation qui génère ce programme.

- Le modèle de base d'un programme qui fait une telle analyse est un *automate à pile*.

- C'est une généralisation de la notion d'*automate fini* à des grammaires hors-contexte.

- Comme expliqué auparavant, les automates finis peuvent analyser seulement la syntaxe d'une grammaire régulière.

- Pour analyser la syntaxe d'une grammaire hors-contexte, nous ajoutons une pile à un automate fini pour obtenir un modèle de programmes plus puissant connu sous le nom de "*automate à pile*".

Limite des automates finis

- Nous avons vu qu'un automate fini est un modèle de programme avec un nombre fini d'états.
- Par conséquent, il a nombre fini d'actions ou transitions qu'il peut effectuer.
- Comme il a un nombre fini d'états et de transitions, il est très simple à programmer et même à visualiser graphiquement.

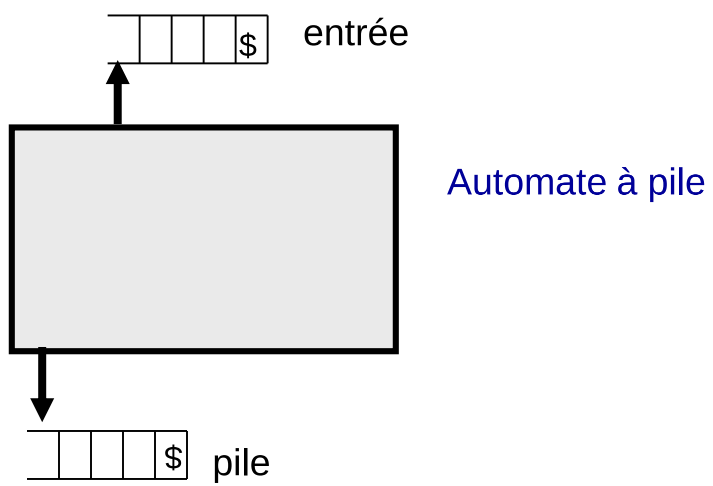
Automate à pile

- Un automate à pile ressemble à un automate fini. Il a :
  - Une mémoire de lecture et un pointeur vers le prochain symbole à lire;
  - un nombre fini d'états, y compris un état initial et des états accepteurs;
  - une relation de transition.
- La différence est qu'un automate à pile a en plus une pile, initialement vide, mais pouvant croître arbitrairement.
- Le contenu de la pile fait partie de l'état d'un automate.
- Donc un automate à pile a potentiellement un nombre infini d'états.

esprit

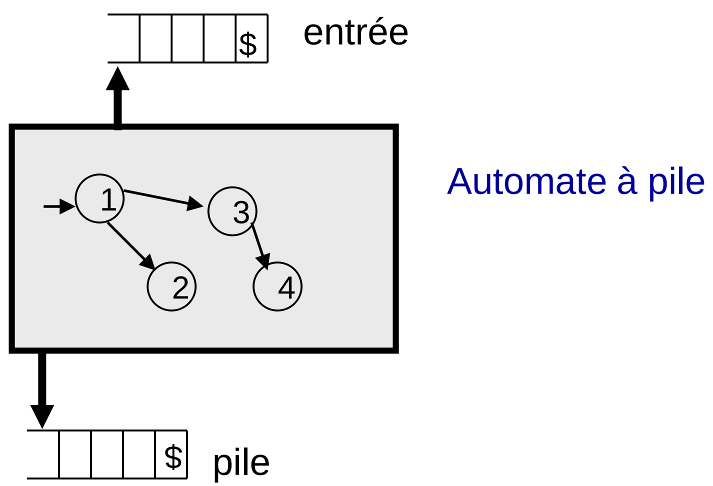
Automate à pile

- Un automate à pile a :
  - Une entrée et une tête de lecture.
  - Un nombre fini d'états dont un état initial et des états accepteurs.
  - Une relation de transition.
  - Une pile pouvant croître arbitrairement.



Automate à pile

- L'entrée est une chaîne de *tokens* scanné à partir du code source du programme à analyser.
- La pile contient une chaîne de symbole de la grammaire (terminaux et non-terminaux)
- Les transitions indiquent comment mettre à jour le contenu de la pile en fonction du *token* courant.



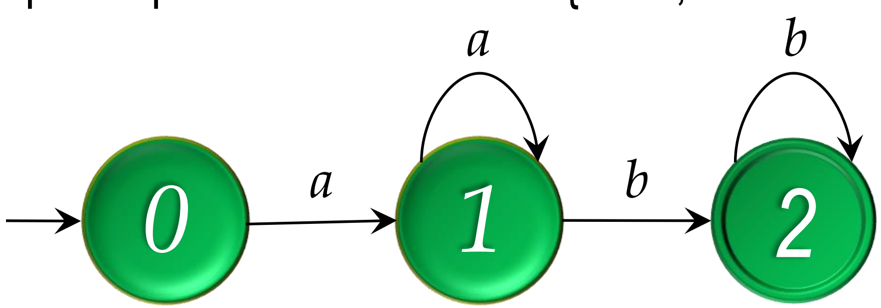
Automate à pile : définition formelle

Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle E, \Sigma, \Pi, \delta, e_0, z_0, F \rangle$

- E : un ensemble fini d'états.
- Σ un ensemble de symboles (l'alphabet des symboles d'entrée).
- Π est un alphabet fini dit l'alphabet de la pile.
- $\delta : \Pi^* \times E \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(\Pi^* \times E)$, une fonction finie.
- Un état $e_0 \in E$: état de départ ou état initial.
- z_0 est le symbole initial de la pile.
- Un ensemble d'états $F \subseteq E$ connus comme états d'acceptation

EXEMPLE INTRODUCTIF

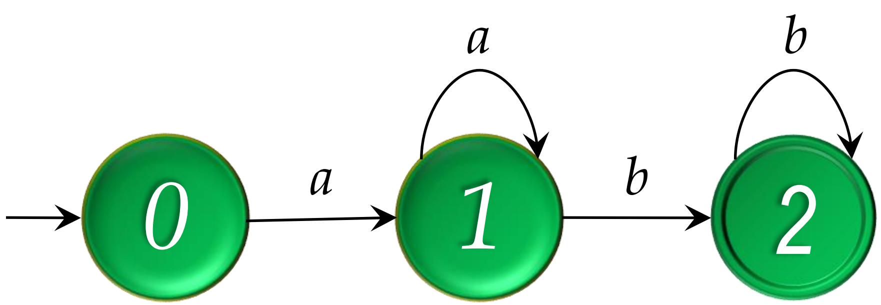
considérons l'automate fini $\mathcal{A}$ de la Figure suivante, qui reconnaît le langage $\{a^n b^m$, avec $n > 0$ et $m > 0\}$ et essayons d'étendre ce modèle pour en dériver un automate à pile capable de reconnaître $\{a^n b^m, m = n > 0\}$.



L'automate $\mathcal{A}$ est incapable de "compter" le nombre de a déjà vus, ce qui interdit d'imposer la contrainte $n = m$.

Confions alors cette tâche au mécanisme de pile, en empilant un symbole Z lors de chaque passage dans la boucle de l'état 1 et en dépilant un symbole lors de chaque passage dans la boucle de l'état 2. Si l'on impose, de plus, qu'un calcul réussi dans $\mathcal{A}$ doit correspondre à une pile intégralement vide, alors il apparaît que chaque mot reconnu par l'automate fini A augmenté de la pile est bien tel que le nombre de a est exactement égal au nombre de b.

Exemple introductif

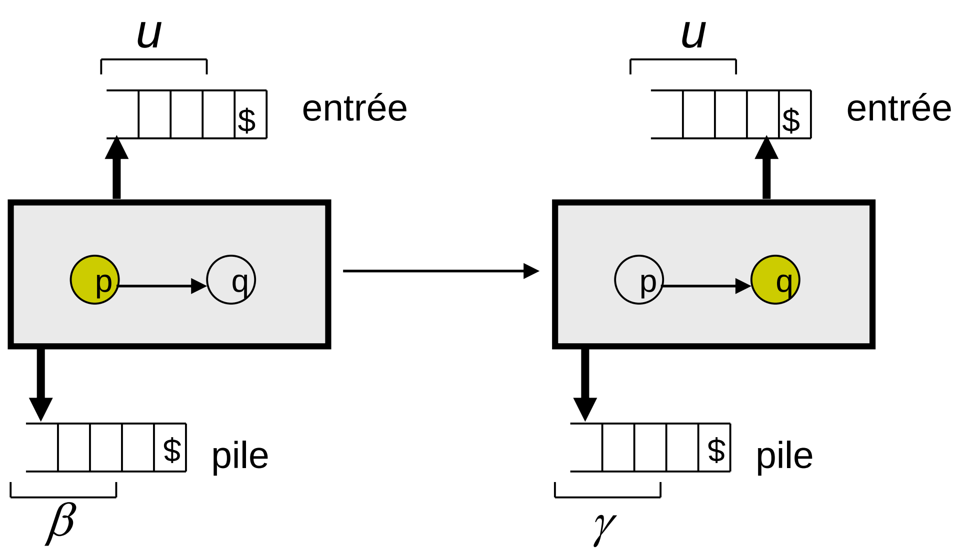


input	*state*	*stack*
aaabbb	*0*	ε
aabbb	*1*	ε
abbb	*1*	Z
bb	*2*	ZZ
b	*2*	Z
	2	ε

TRANSITIONS

– Une *transition* de la forme $(p, u, \beta) \rightarrow (q, \gamma)$ signifie que l'automate peut passer de l'état p à l'état q, pourvu que la chaîne d'entrée commence par le préfixe u et la chaîne β est au sommet de la pile.

- Après la transition, u est lu et consommé du mot d'entrée, β est enlevé de la pile et remplacé par γ, et le nouvel état devient q.
- La chaîne β est lue de gauche à droite : son premier caractère doit donc être au sommet de la pile.
- La chaîne γ est écrite de telle façon que son premier caractère soit au sommet de la pile.



Configurations

- La *configuration* d'un automate est défini comme suit: *(u,q,x, γ)*
  u: mot lu,
  q: état courant,
  x: le reste à lire,
  γ: contenu de la pile.

- *L'exécution d'un automate sur une entrée* est la séquence de configurations qu'il produit en lisant son entrée et en suivant ses transitions.

.

Automates à pile et automates traditionnels

De manière sous-jacente, un automate à pile est essentiellement un automate fini non-déterministe, à la différence près que la fonction de transition comporte trois arguments : l'état courant, le symbole d'entrée courant et le symbole courant en haut de la pile.

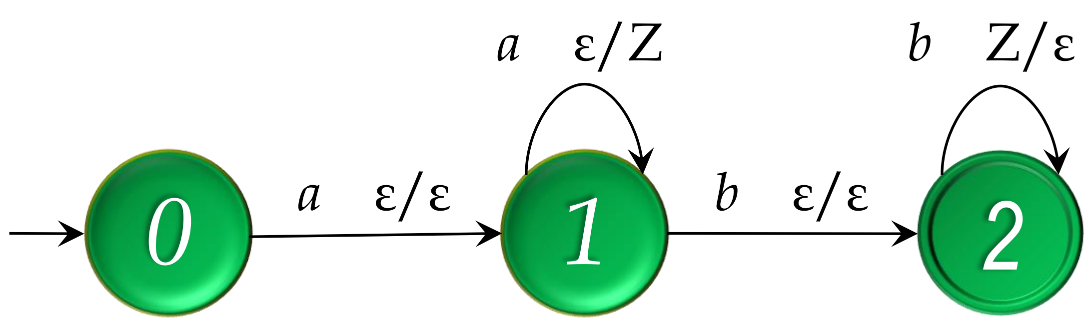
Si (Z, e) est un élément de (Y, q, a), alors l'utilisation de cette transition conduira à :

- Dépiler Y ; si $Y = \varepsilon$ la transition a lieu indépendamment du symbole en haut de pile, qui reste inchangée.
- Transiter dans l'état r.
- Empiler Z; si $Z = \varepsilon$, aucun symbole n'est empilé.

Automates à pile et automates traditionnels

Compte-tenu de cette définition, un automate fini “traditionnel” est un automate à pile particulier, défini sur un alphabet de pile vide (Π = ∅) et dont toutes les transitions laissent la pile inchangée.

Un automate à pile admet une représentation graphique sur laquelle les modifications de la pile sont représentées sous la forme Y/Z. La Figure suivante représente ainsi un automate à pile reconnaissant le langage $\{a^n b^n\}$.



LANGAGE RECONNU PAR UN PDA

- Le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma^*$ reconnu par $\mathcal{A}$, par **état final** est défini par : $u \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ si et seulement si il existe $\pi \in \Pi^*$ et $s \in F$ tels que :

  $(\varepsilon, q_0, w, Z_0) \vdash^{*}_{\mathcal{A}} (w, q_f, \varepsilon, Z_0)$

- Le langage $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma^*$ reconnu par $\mathcal{A}$, par **pile vide** est défini par : $u \in \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{A})$ si et seulement si il existe $q \in E$:

  $(\varepsilon, q_0, w, Z_0) \vdash^{*}_{\mathcal{A}} (w, q, \varepsilon, \varepsilon)$

- Pour tout PDA $\mathcal{A}$, il existe un PDA $\mathcal{A}'$ tel que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{A}')$

Au delà des langages hors-contexte

- Bien qu'un automate à pile peut avoir un nombre infini d'états (configurations), il existe des langages qui ne sont pas acceptés par un automate à pile, c-à-d., des langages qui ne sont pas hors-contextes.

- Exemple:

$$L(M) = \{a^n\, b^n\, c^n \mid n \geq 0\}$$

n'est pas hors-contexte.

- Toutefois, il existe des modèles théoriques de programmes qui accepte un tel langage. En particulier, les *machines de Turing* sont des généralisations des automates à pile, pouvant accepter n'importe quel langage.