Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

Correction-Exercice 1

Partie I

1) a) On a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 32 \neq 0.$$

Alors le système (S) admet dans $\mathbb{R}^3$ une unique solution.

b)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Étape 1:

$$L_1 \leftarrow L_1$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1$$

.

Alors,

$$(A|b)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right)$$

Étape 2:

$$L_1 \leftarrow L_1,$$
$$L_2 \leftarrow L_2$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2,$$

. Alors,

$$(A|b)^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Alors, $S \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 & = & 1 \\ 4x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 4x_3 & = & -4 \end{cases}$. En utilisant la méthode de remontée on obtient:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) a) Comme la matrice A est à diagonale strictement dominante, alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes pour la résolution du système (S).

2) b) Schéma itératif de la méthode de Jacobi: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} = 1 \\ 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} = 3 \\ -x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 3x_3^{(k+1)} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1 - x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{3 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{-4 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{3} \end{cases}$$

Schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} = 1 \\ 2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} = 3 \\ -x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 3x_3^{(k+1)} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1 - x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{3 - 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{-4 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{3} \end{cases}$$

2) c) Pour un vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(i) la méthode de Jacobi:

$$X_J^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_J^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

(ii) la méthode de Gauss-Seidel:

$$X_{G-S}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad X_{G-S}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Partie II

3) <u>1ère itération</u>:

$$E_J^{(1)} = \|X_J^{(1)} - X\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{\sqrt{5}}{4} = 0,5590.$$

$$E_{G-S}^{(1)} = \|X_{G-S}^{(1)} - X\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{11}{18}} = 0,7817.$$

2ème itération:

$$E_J^{(2)} = \|X_J^{(2)} - X\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} = 0,3535.$$

$$E_{G-S}^{(2)} = \|X_{G-S}^{(2)} - X\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{11}{162}} = 0,2605.$$

4) Suite à la première itération, la méthode de Jacobi approche mieux la solution et suite à la deuxième itération, la méthode de Gauss-Seidel approche mieux la solution.