École **S**upérieure **Pri**vée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

Analyse numérique

Série d'exercices : Résolution d'équations différentielles ordinaires

Niveau : $3^{\text{ème}}$ année — Année universitaire : 2023-2024

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy suivante

$$(PC) : \begin{cases} x^{'}(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}x(t) \\ x(0) = 5 \end{cases}$$

1. *Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy* (PC) *est donnée par :*

$$x(t) = 5\exp(-\arctan(t)) \text{ pour } t \geq 0.$$

2. *Donner le schéma d'Euler implicite (régressif) avec un pas de temps* h *constant.*
3. *En déduire que pour* $h = \frac{1}{2}$ *, la solution numérique* x_{n+1} *(approchant la solution exacte* x *au point de discrétisation* t_{n+1} *,* $n \geq 0$*) du problème de Cauchy* (PC) *trouvée par la méthode d'Euler implicite vérifie la relation suivante :*

$$x_{n+1} = \frac{4+(n+1)^2}{6+(n+1)^2}x_n, \; \forall n \geq 0.$$

4. *Appliquer le schéma itératif de la question* (3) *pour résoudre numériquement* (PC) *sur l'intervalle* $[0,2]$.
5. *Calculer l'erreur commise par la méthode d'Euler implicite au point* $t = 2$.

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy défini par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x' = -\lambda x, \quad \lambda, t \geq 0 \\ \qquad\qquad x(0) = x_0. \end{cases}$$

1. *Donner la solution analytique* $x(t)$ *de* (PC).
2. *Calculer* $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$.
3. *Montrer que les solutions numériques du problème de Cauchy* (PC) *trouvées par la méthode d'Euler explicite* x_n^E *et par la méthode d'Euler implicite* x_n^I*, sont données respectivement par :*

$$x_n^E = x_0(1-\lambda h)^n,$$

$$x_n^I = x_0(1+\lambda h)^{-n},$$

où h *désigne le pas de discrétisation et* $n > 0$.

4. *Calculer les limites* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^E$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^I$.

Exercice 3

Le problème de Cauchy défini par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x' = x + e^{2t}, \quad t \geq 0 \\ x(0) = 2. \end{cases} \tag{1}$$

possède la solution analytique suivante $x(t) = e^{t} + e^{2t}$.

1. *Donner le schéma d'Euler explicite (progressif) avec un pas de temps* h *constant.*
2. *En prenant* $h = 0.1$ *:*
   - *a) Faire* 3 *itérations de la méthode d'Euler explicite.*
   - *b) Calculer l'erreur commise sur* x_3*, la valeur approchée de* $x(0.3)$.
3. *En prenant* $h = 0.05$ *:*
   (a) *Faire* 6 *itérations de la méthode d'Euler explicite et*
   (b) *Calculer l'erreur commise sur* x_6*, la valeur approchée de* $x(0.3)$.
4. *Interpréter les résultats obtenus.*