RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES

Enoncés et corrections de la série

Exercice 3

Exercice 3

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E) : $f(x) = 0$ dans $I = [0, \frac{\pi}{3}]$, où la fonction f est donnée par:

$$f(x) = \cos(x) - 3x \qquad \forall x \in I.$$

Il est à noter que la variable x est exprimée en radian.

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution unique $x^* \in]0, \frac{\pi}{3}[$.
   En utilisant la méthode de dichotomie :
2. Estimer le nombre d'itérations nécessaire pour déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.
3. déterminer x^* avec une tolérance de $\varepsilon = 10^{-3}$.
   En utilisant la méthode du point fixe :
   Pour approcher $x*$, on définit la suite suivante:

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \frac{\pi}{3}] & , \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

   avec $g(x) = \dfrac{cos(x)}{3}$
4. Montrer que cette suite converge bien vers $x*$.
5. Pour $x_0 = 0$, calculer les quatre premières itérations.

Exercice 3

Application de la méthode de Newton :

6. Ecrire le schéma itératif de la méthode de Newton.
7. Choisir une valeur intitiale x_0 assurant la convergence de la méthode.
8. Déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.

Exercice 3

Correction

1. **Existence:** L'application $x \to cos(x) - 3x$ est continue sur tout $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ (Somme de deux fonctions continues sur tout $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, \frac{\pi}{3}]$.)
   D'autre part $f(0) = 1 > 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \pi < 0$. Donc $f(0).f(\frac{\pi}{3}) < 0$, il existe alors $x^* \in]0, \frac{\pi}{3}[$ tel que $f(x^*) = 0$.
   Unicité: L'application $x \to cos(x) - 3x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et on a pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $f'(x) = -sin(x) - 3 < 0$. Alors f est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$.
   Conclusion: l'équation (E) admet une unique solution $x^* \in]0, \frac{\pi}{3}[$.
2. on a $d = |\frac{\pi}{3} - 0| = \frac{\pi}{3}$, $\varepsilon = 10^{-3}$ et n le nombre minimal pour estimer x^* à ε prés.
   n doit vérifier: $n \geq log_2(\frac{d}{\varepsilon})$ alors $n \geq 10.0323$ donc $n = 11$.

Exercice 3

Correction

3. Les itérations sont décrites dans le tableau suivant:

n	a_n	x_n	b_n	Précison
0	0 $f(a_0) > 0$	$\frac{\pi}{6}$ $f(x_0) < 0$	$\frac{\pi}{3}$ $f(b_0) < 0$	$\lvert b_0 - a_0 \rvert \leq \frac{\pi}{3} = 1.046$
1	0 $f(a_1) > 0$	$\frac{\pi}{12}$ $f(x_1) > 0$	$\frac{\pi}{6}$ $f(b_1) < 0$	$\lvert b_1 - a_1 \rvert \leq \frac{\pi}{6} = 0.523$
2	$\frac{\pi}{12}$ $f(a_2) > 0$	$\frac{\pi}{8}$ $f(x_2) < 0$	$\frac{\pi}{6}$ $f(b_2) < 0$	$\lvert b_2 - a_2 \rvert \leq \frac{\pi}{12} = 0.261$
3	$\frac{\pi}{12}$ $f(a_3) > 0$	$\frac{5\pi}{48}$ $f(x_3) < 0$	$\frac{\pi}{8}$ $f(b_3) < 0$	$\lvert b_3 - a_3 \rvert \leq \frac{\pi}{24} = 0.13$
4	$\frac{\pi}{12}$ $f(a_4) > 0$	$\frac{3\pi}{32}$ $f(x_4) > 0$	$\frac{5\pi}{48}$ $f(b_4) < 0$	$\lvert b_4 - a_4 \rvert \leq \frac{\pi}{48} = 0.065$
5	$\frac{3\pi}{32}$ $f(a_5) > 0$	$\frac{19\pi}{192}$ $f(x_5) > 0$	$\frac{5\pi}{48}$ $f(b_5) < 0$	$\lvert b_5 - a_5 \rvert \leq \frac{\pi}{96} = 0.032$

Exercice 3

Correction

n	a_n	x_n	b_n	Précison
6	$\frac{19\pi}{192}$ $f(a_6) > 0$	$\frac{13\pi}{128}$ $f(x_6) < 0$	$\frac{5\pi}{48}$ $f(b_6) < 0$	$\lvert b_6 - a_6 \rvert \leq \frac{\pi}{192} = 0.016$
7	$\frac{19\pi}{192}$ $f(a_7) > 0$	$\frac{77\pi}{768}$ $f(x_7) > 0$	$\frac{13\pi}{128}$ $f(b_7) < 0$	$\lvert b_7 - a_7 \rvert \leq \frac{\pi}{384} = 0.0081$
8	$\frac{77\pi}{768}$ $f(a_8) > 0$	$\frac{155\pi}{1536}$ $f(x_8) < 0$	$\frac{13\pi}{128}$ $f(b_8) < 0$	$\lvert b_8 - a_8 \rvert \leq \frac{\pi}{768} = 0.0041$
9	$\frac{77\pi}{768}$ $f(a_9) > 0$	$\frac{309\pi}{3072}$ $f(x_9) > 0$	$\frac{155\pi}{1536}$ $f(b_9) < 0$	$\lvert b_9 - a_9 \rvert \leq \frac{\pi}{1536} = 0.002$
10	$\frac{309\pi}{3072}$ $f(a_{10}) > 0$	$\frac{619\pi}{6144}$ $f(x_{10}) > 0$	$\frac{155\pi}{1536}$ $f(b_{10}) < 0$	$\lvert b_{10} - a_{10} \rvert \leq \frac{\pi}{3072} = 0.00102$
11	$\frac{619\pi}{6144}$ $f(a_{11}) > 0$	$\frac{413\pi}{4096}$ $f(x_{11}) > 0$	$\frac{155\pi}{1536}$ $f(b_{11}) < 0$	$\lvert b_{11} - a_{11} \rvert \leq \frac{\pi}{6144} = 5.1 * 10^{-4}$

Exercice 3

Correction

D'après le tableau précédent, on a : $x^* \simeq x_{11} = \frac{413\pi}{4096} = 0.3167$ à 10^{-3} près.

4. Schéma du point fixe associé à (E):

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{cos(x_n)}{3} \\ x_0 \in [0, \dfrac{\pi}{3}]. \end{cases}$$

Convergence de la méthode du point fixe:

(H_1) : g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{3}]$

(H_2) : $g'(x) = \frac{-sin(x)}{3}$<0 alors g est décroissante et $g([0, \frac{\pi}{3}] = [g(\frac{\pi}{3}), g(0)] = [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}] \subset [0, \frac{\pi}{3}]$

(H_3) : $|g'(x)| = \frac{sin(x)}{3}$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ (on peut passer par la dérivée seconde) et par la suite $|g'(x)|$ atteint son maximum au point $\frac{\pi}{3}$, ce qui donne

$$|g'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{6} < 1 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{3}].$$

Comme les trois hypothèses sont bien vérifiées, g converge bien vers $x*$.

Exercice 3

Correction

5. Pour $x_0 = 0$,
$x_1 = g(0) = \frac{1}{3} = 0.33333$
$x_2 = g(\frac{1}{3}) = \frac{cos(\frac{1}{3})}{3} = 0.31498$
$x_3 = g(0.31498) = 0.31693$
$x_4 = g(0.31693) = 0.31673$

6. <u>Schéma de Newton associé à (E):</u>

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{cos(x_n) - 3x_n}{sin(x_n) + 3} \\ x_0 \in [0, \dfrac{\pi}{3}]. \end{cases}$$

<u>Convergence de la méthode de Newton:</u>

(H_1) : f est de classe C^2 sur $[0, \frac{\pi}{3}]$

(H_2) : $f(0).f(\frac{\pi}{3}) < 0$

(H_3) : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}[,\ f'(x) = -sin(x) - 3 \neq 0$.

(H_4) : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}[,\ f''(x) = -cos(x) < 0.$

Exercice 3

Correction

7. **Choix de x_0:**

   Comme $f(\frac{\pi}{3}).f''(\frac{\pi}{3}) > 0$ **alors** $x_0 = \frac{\pi}{3}$ **assure la convergence de la méthode.**

8. $\varepsilon = 10^{-3} = 0.001$. **Comme** $x_0 = \frac{\pi}{3}$ **et** $x_1 = f(x_0)$, **alors** $x_1 = 0.3639$. **Donc** $|f(x_1)| = 0.1571 > \varepsilon$.
   $x_2 = 0.3170$, **alors** $|f(x_2)| = 0.0009 < \varepsilon$. **Donc**

$$x^* \approx 0.3170.$$