Résolution numérique de systèmes d'équations linéaires

Méthode de Gauss-Seidel

La Méthode de Gauss-Seidel

Comme pour la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution d'un système d'équations linéaires $(S) : AX = b$, consiste en premier lieu à décomposer A sous la forme:

$$A = D - E - F,$$

où D est une matrice diagonale, E est une matrice triangulaire inférieure et F est une matrice triangulaire supérieure.

La Méthode de Gauss-Seidel

Comme pour la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution d'un système d'équations linéaires $(S) : AX = b$, consiste en premier lieu à décomposer A sous la forme:

$$A = D - E - F,$$

où D est une matrice diagonale, E est une matrice triangulaire inférieure et F est une matrice triangulaire supérieure.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{2,1} & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}}_{E} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{F}$$

Considérons, par exemple, le cas où $n = 3$. On a

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{2,1} & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & 0 \end{pmatrix}}_{E} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ 0 & 0 & -a_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{F} \end{aligned}$$

- Le système $(S) : AX = b$ est équivalent alors à

$$\begin{aligned} & (D - E)X - FX = b \\ \Longleftrightarrow\ & (D - E)X = FX + b \end{aligned}$$

- Soit $(X^{(k)})_{k\geq 0}$ la suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ définie par $X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}$, vérifiant

$$\underbrace{(D-E)}_{M} X^{(k+1)} = \underbrace{F}_{N} X^{(k)} + b$$

Si A est à diagonale strictement dominante, alors les coefficients diagonaux de A sont non nuls. Par conséquent, M est inversible. Dans ce cas

$$X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b$$

- Soit $(X^{(k)})_{k\geq 0}$ la suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ définie par $X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}$, vérifiant

$$\underbrace{(D-E)}_{M} X^{(k+1)} = \underbrace{F}_{N} X^{(k)} + b$$

Si A est à diagonale strictement dominante, alors les coefficients diagonaux de A sont non nuls. Par conséquent, M est inversible. Dans ce cas

$$X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b$$

Remarque

Si la suite $(X_k)_{k\geq 0}$ est convergente, alors

$$\lim_{k\to+\infty} X^{(k)} = X,$$

avec X l'unique solution du système (S).

- Les composantes du vecteur $X^{(k+1)}$ s'écrivent en fonction des composantes du vecteur $X^{(k)}$ comme suit:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ 0 & 0 & -a_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1^{(k+1)} + a_{1,2}x_2^{(k)} + a_{1,3}x_3^{(k)} = b_1 \\ a_{2,1}x_1^{(k+1)} + a_{2,2}x_2^{(k+1)} + a_{2,3}x_3^{(k)} = b_2 \\ a_{3,1}x_1^{(k+1)} + a_{3,2}x_2^{(k+1)} + a_{3,3}x_3^{(k+1)} = b_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}}{a_{1,1}} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1^{(k+1)} - a_{2,3}x_3^{(k)}}{a_{2,2}} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1^{(k+1)} - a_{3,2}x_2^{(k+1)}}{a_{3,3}} \end{cases}$$

6

6

- Dans $\mathbb{R}^n$, les composantes $x_i^{(k+1)}$ $(i \in \{0, 1, \cdots, n\})$ du vecteur $X^{(k+1)}$ s'écrivent en fonction des composantes $x_i^{(k)}$ du vecteur $X^{(k)}$ comme suit:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

Convergence de la méthode de Gauss-Seidel

Question: Existe-il une condition sur la matrice A assurant la convergence de la suite $(X^{(k)})_{k\geq 0}$ est convergente?

Convergence de la méthode de Gauss-Seidel

Question: Existe-il une condition sur la matrice A assurant la convergence de la suite $(X^{(k)})_{k\geq 0}$ est convergente?

Théorème

Soit A une matrice à diagonale strictement dominante alors la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système $(S) : AX = b$ est convergente vers la solution de (S) pour tout $X^{(0)} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Convergence de la méthode de Gauss-Seidel

Question: Existe-il une condition sur la matrice A assurant la convergence de la suite $(X^{(k)})_{k\geq 0}$ est convergente?

Théorème

Soit A une matrice à diagonale strictement dominante alors la méthode de Gauss-Seidel appliquée au système $(S) : AX = b$ est convergente vers la solution de (S) pour tout $X^{(0)} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

Comme pour la méthode de Jacobi, on peut considérer le critère d'arrêt suivant pour la méthode de Gauss-Seidel:

$$||AX^{(k)} - b|| \leq \varepsilon, \text{ avec la tolérence } \varepsilon \text{ assez petite.}$$

Étude d'un exemple

On considère un système d'équations linéaires (S), telle que;

$$(S) \Leftrightarrow AX = b$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution de (S) dans $\mathbb{R}^3$.
2. Etudier la convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de (S).
3. Donner le schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel associé à (S).
4. Calculer les trois premiers itérés par la méthode de Gauss-Seidel.

- **Existence d'une unique solution de (S) dans $\mathbb{R}^3$:**

On a $\det(A) = 126 \neq 0 \Rightarrow \exists!\, X \in \mathbb{R}^3 /\ AX = b$.

- Etude de la convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de (S):

On a:

$$\begin{cases} |a_{1,1}| > |a_{1,2}| + |a_{1,3}| & (\textbf{car } |5| > |2| + |-1|) \\ |a_{2,2}| > |a_{2,1}| + |a_{2,3}| & (\textbf{car } |6| > |1| + |-3|) \\ |a_{3,3}| > |a_{3,1}| + |a_{3,2}| & (\textbf{car } |4| > |2| + |1|) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A est une matrice à diagonale strictement dominante

$\Rightarrow$ La méthode de Gauss-Seidel est convergente.

- **Schéma itératif associé à (S) avec la méthode de Gauss-Seidel:**

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- **Schéma itératif associé à (S) avec la méthode de Gauss-Seidel:**

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{6-2x_2^{(k)}+x_3^{(k)}}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1^{(k+1)} - a_{2,3}x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{4-x_1^{(k+1)}+3x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1^{(k+1)} - a_{3,2}x_2^{(k+1)}}{a_{3,3}} = \frac{7-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}}{4} \end{cases}$$

12

- Application de la méthode de Gauss-Seidel avec 3 itérations:

  Considérons par exemple un vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Application de la méthode de Gauss-Seidel avec 3 itérations:

Considérons par exemple un vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Itération 1 : $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 7/15 \\ 31/30 \end{pmatrix}$

12

- Application de la méthode de Gauss-Seidel avec 3 itérations:

  Considérons par exemple un vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  - Itération 1 : $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 7/15 \\ 31/30 \end{pmatrix}$
  - Itération 2 : $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,22 \\ 0.98 \\ 0,895 \end{pmatrix}$

12

- Application de la méthode de Gauss-Seidel avec 3 itérations:

  Considérons par exemple un vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  - Itération 1 : $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 7/15 \\ 31/30 \end{pmatrix}$
  - Itération 2 : $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,22 \\ 0.98 \\ 0,895 \end{pmatrix}$
  - Itération 3 : $X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,014 \\ 1.014 \\ 0.989 \end{pmatrix}$