esprit — Se former autrement — HONORIS UNITED UNIVERSITIES	**Examen** Semestre : 1 ☐ 2 ☒ Session : Principale ☒ Rattrapage ☐

Module: Analyse Numérique

Enseignant(s): Equipe AN

Classe(s): 3A 1 & 3 A $28 \to 49$

Documents autorisés: OUI ☐ NON ☒ Nombre de pages: **??**

Calculatrice autorisée: OUI ☒ NON ☐ Internet autorisée: OUI ☐ NON ☒

Date: 26 Mai 2022 Heure: 14h30 Durée : 1h30 min

Exercice 1 (4 points)

On considère le problème de Cauchy (PC) suivant :

$$(PC)\begin{cases} x'(t) &= \frac{(1-t^2)}{2}x(t), \quad \forall t \geq 1 \\ \\ x(1) &= -2 \end{cases}$$

1) (1 point) Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy (PC) est donnée par :

$$x(t) = -2\,\exp\Big(-\frac{1}{3}+\frac{t}{2}-\frac{t^3}{6}\Big), \quad \forall \quad t \geq 1.$$

2) (1 point) Donner le schéma d'Euler implicite pour la résolution de (PC) avec un pas de discrétisation constant $h > 0$.
3) (1 point) Pour $h = \dfrac{1}{3}$, montrer que la solution numérique x_{n+1} (approximation de la solution exacte $x(t)$ au point de discrétisation t_{n+1}, $n \geq 0$) du problème (PC), donnée par la question précédente, satisfait la relation suivante :

$$x_{n+1} = \frac{54}{(4+n)^2+45}x_n, \quad \forall n \geq 0.$$

4) (1 point) Calculer l'erreur commise par la méthode d'Euler implicite au point $t = \dfrac{5}{3}$.

Exercice 2 (7,5 points)

On considère le système d'équations linéaires (S) : $AX = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1) a) (0.5 point) Montrer que (S) admet dans $\mathbb{R}^3$ une unique solution.
   b) (1 point) Résoudre (S) en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
2) a) (2 points) Ecrire les schémas itératifs des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système (S).
   b) (0.5 point) Justifier la convergence de la méthode de Jacobi et de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système (S).

c) (2 points) Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donner les résultats des deux premières itérations en utilisant

i. la méthode de Jacobi.

ii. la méthode de Gauss-Seidel.

d) (1 point) En considérant l'erreur $E = ||X - X^{(k)}||_2$, avec X la solution exacte, $X^{(k)}$ ($k \in \{1, 2\}$) une solution approchée par l'une des deux méthodes et $||\,.\,||_2$ la norme euclidienne définie par

$$||X||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

calculer les erreurs commises par les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux premières itérations.

e) (0.5 point) Comparer alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel en terme de précision pour les deux premières itérations pour la résolution du système (S).

Exercice 3 (8.5 points)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(1) a) (0.5 point) Justifier l'existence d'un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ qui interpole f en $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

b) (1.5 points) Déterminer l'expression du polynôme P_2 par la méhode d'interpolation de Lagrange.

c) (1 point) Donner la valeur approximative de $f(1/2)$, puis déduire l'erreur d'interpolation en ce point.

Dans la suite on s'intéresse à approcher l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

(2) a) (0.5 point) Calculer la valeur exacte de $I(f)$.

b) (1 point) Calculer $I_p = \displaystyle\int_0^1 P_2(x)dx$, où P_2 est le polynôme trouvé dans la première question, puis déduire l'erreur d'intégration E_p pour cette méhode.

(3) Soient g une fonction continue sur $[0, 1]$ et $Q(g)$ la formule de quadrature suivante approchant l'intégrale $I(g)$:

$$Q(g) = \alpha g(0) + (1 - \alpha)g(1)$$

a) (0.5 point) Quelle méhode d'intégration numérique retrouve-t-on lorsque $\alpha = 1$ puis lorsque $\alpha = 0$.

b) (1 point) Sachant que la formule $Q(g)$ est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 1, trouver la valeur de α.

(4) (1 point) Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, donner la valeur de $Q(f)$ et déduire l'erreur d'intégration E_q pour cette méhode.

(5) (1 point) Approcher l'intégrale $I(f)$ par la méhode composite des trapèzes I_T en considérant un pas de discrétisation $h = \dfrac{1}{2}$, puis déduire l'erreur d'intégration E_T pour cette méthode.

(6) (0.5 point) Comparer les trois méthodes $Q(f)$, I_p et I_T en terme de précision. Justifier votre réponse.