Module : Analyse numériques

Chapitre 3 : Intégration Numérique

Partie 3 : Formules simples

Méthodes simples du rectangle

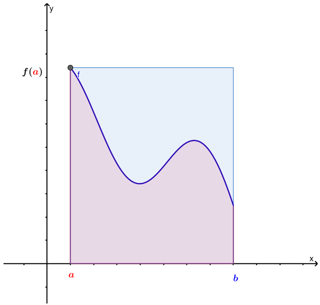
Rectangle à gauche

La méthode simple du rectangle à gauche consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un rectangle dont les deux côtés sont $(b-a)$ et $f(a)$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple du rectangle à gauche est :

$$I^s_{Rg}(f) = (b-a)f(a)$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq I^s_{Rg}(f)$$



Méthodes simples du rectangle

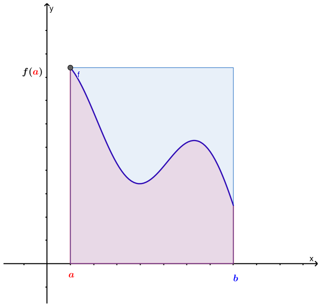
Rectangle à gauche

La méthode simple du rectangle à gauche consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un rectangle dont les deux côtés sont $(b-a)$ et $f(a)$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple du rectangle à gauche est :

$$I_{Rg}^{s}(f) = (b-a)f(a)$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \backsimeq I_{Rg}^{s}(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors l'erreur du rectangle à gauche est majorée par :

$$E_{Rg}^{s}(f) = \left| I(f) - I_{Rg}^{s}(f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{x \in [a,b]} \left| f'(x) \right|$$

Méthodes simples du rectangle

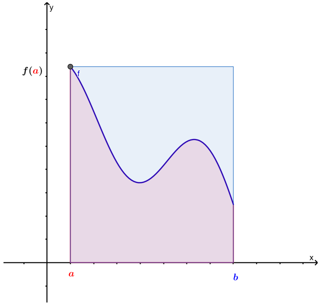
Rectangle à gauche

La méthode simple du rectangle à gauche consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un rectangle dont les deux côtés sont $(b-a)$ et $f(a)$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple du rectangle à gauche est :

$$I_{Rg}^{s}(f) = (b-a)f(a)$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \backsimeq I_{Rg}^{s}(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors l'erreur du rectangle à gauche est majorée par :

$$E_{Rg}^{s}(f) = \left| I(f) - I_{Rg}^{s}(f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Degré de précision : Le degré de précision de la méthode du rectangle à gauche est 0.

Méthodes simples du rectangle à gauche

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Utiliser la méthode simple du rectangle à gauche pour calculer $I(f)$.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

Méthodes simples du rectangle à gauche

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Utiliser la méthode simple du rectangle à gauche pour calculer $I(f)$.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1.

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= [\ln(1+x)]_0^1 \\ &= \ln(2) - \ln(1) \\ &= \ln(2) \simeq 0.693 \end{aligned}$$

Méthodes simples du rectangle à gauche

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

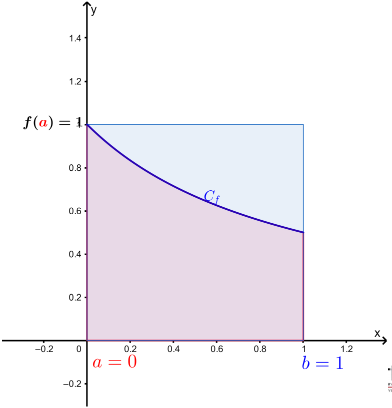
1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Utiliser la méthode simple du rectangle à gauche pour calculer $I(f)$.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1.

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= [\ln(1+x)]_0^1 \\ &= \ln(2) - \ln(1) \\ &= \ln(2) \simeq 0.693 \end{aligned}$$

2. $I^s_{Rg}(f) = (1-0)f(0) = 1$



Méthodes simples du rectangle à gauche

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

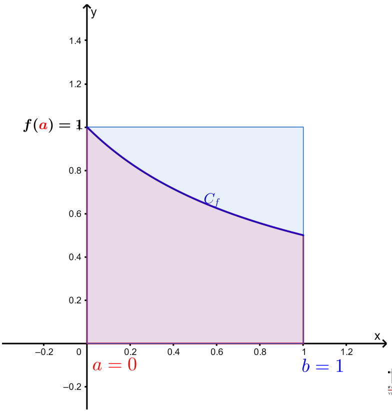
1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Utiliser la méthode simple du rectangle à gauche pour calculer $I(f)$.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1.

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= [\ln(1+x)]_0^1 \\ &= \ln(2) - \ln(1) \\ &= \ln(2) \simeq 0.693 \end{aligned}$$

2. $I^s_{Rg}(f) = (1-0)f(0) = 1$
3. $E^s_{Rg}(f) = |I(f) - I_{Rg}(f)| = |\ln(2) - 1| \simeq 0.307$



Méthodes simples du rectangle

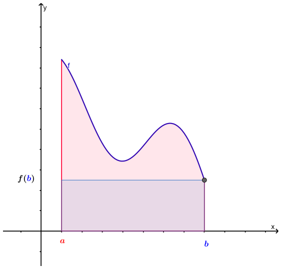
Rectangle à droite

La méthode simple du rectangle à droite consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un rectangle dont les deux côtés sont $(b-a)$ et $f(b)$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple du rectangle à droite est :

$$I_{Rd}^{s}(f) = (b-a)f(b).$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \backsimeq I_{Rd}^{s}(f)$$



Méthodes simples du rectangle

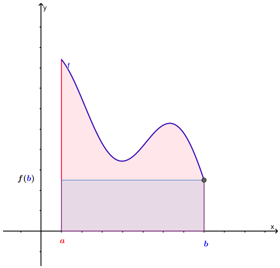
Rectangle à droite

La méthode simple du rectangle à droite consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un rectangle dont les deux côtés sont $(b-a)$ et $f(b)$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple du rectangle à droite est :

$$I^s_{Rd}(f) = (b-a)f(b).$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq I^s_{Rd}(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors l'erreur du rectangle à droite est majorée par

$$E^s_{Rd}(f) = \left|I(f) - I^s_{Rd}(f)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|$$

Méthodes simples du rectangle

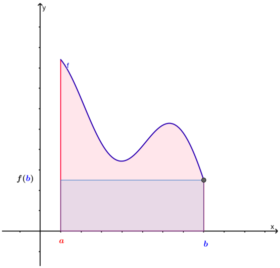
Rectangle à droite

La méthode simple du rectangle à droite consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un rectangle dont les deux côtés sont $(b-a)$ et $f(b)$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple du rectangle à droite est :

$$I^s_{Rd}(f) = (b-a)f(b).$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq I^s_{Rd}(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors l'erreur du rectangle à droite est majorée par

$$E^s_{Rd}(f) = \left|I(f) - I^s_{Rd}(f)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|$$

Degré de précision : Le degré de précision de la méthode du rectangle à droite est 0.

Méthodes simples du rectangle à droite

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Utiliser la méthode simple du rectangle à droite pour calculer $I(f)$.
2. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

Méthodes simples du rectangle à droite

Exercice

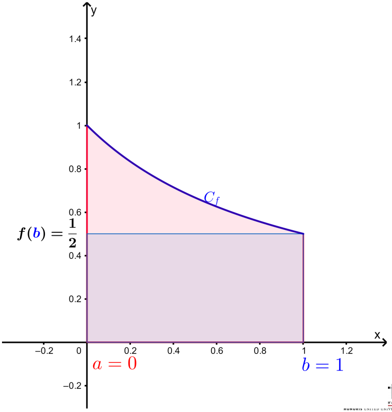
Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Utiliser la méthode simple du rectangle à droite pour calculer $I(f)$.
2. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1. $I^s_{Rd}(f) = (1-0)f(1) = \frac{1}{2}$



Méthodes simples du rectangle à droite

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

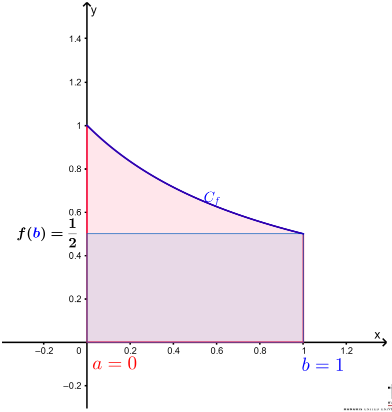
$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Utiliser la méthode simple du rectangle à droite pour calculer $I(f)$.
2. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1. $I^s_{Rd}(f) = (1-0)f(1) = \frac{1}{2}$
2.

$$\begin{aligned} E^s_{Rd}(f) &= |I(f) - I^s_{Rd}(f)| \\ &= \left|\ln(2) - \frac{1}{2}\right| \\ &\simeq 0.193 \end{aligned}$$



Méthodes simples du rectangle

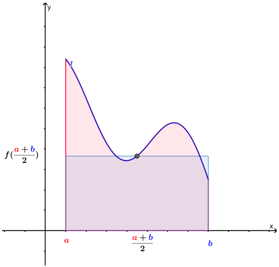
Rectangle au milieu

La méthode simple du rectangle au milieu consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un rectangle dont les deux côtés sont $(b-a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple du rectangle au milieu est :

$$I^s_{Rm}(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \backsimeq I^s_{Rm}(f)$$



Méthodes simples du rectangle

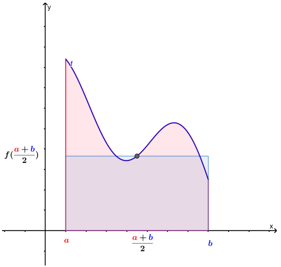
Rectangle au milieu

La méthode simple du rectangle au milieu consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un rectangle dont les deux côtés sont $(b-a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, alors la formule simple du rectangle au milieu est :

$$I^s_{Rm}(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \backsimeq I^s_{Rm}(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, alors l'erreur du rectangle au milieu est majorée par

$$E^s_{Rm}(f) = |I(f) - I^s_{Rm}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Méthodes simples du rectangle

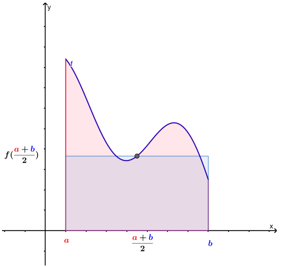
Rectangle au milieu

La méthode simple du rectangle au milieu consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un rectangle dont les deux côtés sont $(b-a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple du rectangle au milieu est :

$$I^s_{Rm}(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \backsimeq I^s_{Rm}(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, alors l'erreur du rectangle au milieu est majorée par

$$E^s_{Rm}(f) = |I(f) - I^s_{Rm}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Degré de précision : Le degré de précision de la méthode du rectangle au milieu est 1.

Méthodes simples du rectangle au milieu

Exemple :

Soit l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

La valeur exacte de $I(f)$ vaut $\ln(2) = 0.693$.

Méthodes simples du rectangle au milieu

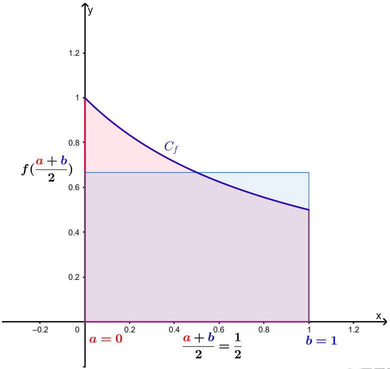
Exemple :

Soit l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

La valeur exacte de $I(f)$ vaut $\ln(2) = 0.693$.

La méthode du rectangle au milieu est :

$$\begin{aligned} I^s_{Rm}(f) &= (1-0)f(\frac{0+1}{2}) \\ &= f(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{3} \\ &\simeq 0.66\overline{6} \end{aligned}$$



Méthodes simples du rectangle au milieu

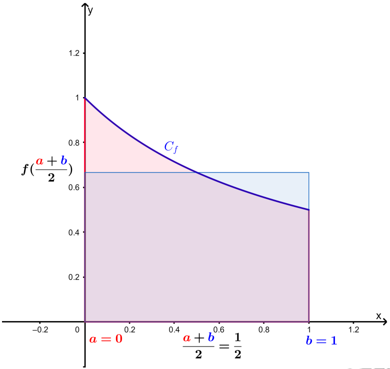
Exemple :

Soit l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

La valeur exacte de $I(f)$ vaut $\ln(2) = 0.693$.

La méthode du rectangle au milieu est :

$$\begin{aligned} I_{Rm}^s(f) &= (1-0)f(\frac{0+1}{2}) \\ &= f(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{3} \\ &\simeq 0.66\overline{6} \end{aligned}$$



L'erreur est : $E_{Rm}^s(f) = |I(f) - I_{Rm}^s(f)| = |\ln(2) - \frac{2}{3}| \simeq 0.026$

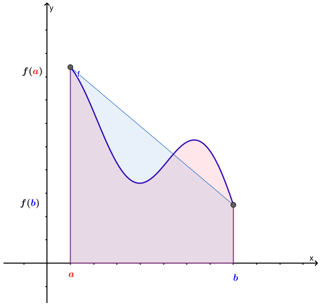
Méthode simple du trapèze

La méthode simple de trapèse consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un trapèze dont ces deux bases sont $f(a)$ et $f(b)$ et son hauteur est $(b-a)$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple de trapèze est :

$$I_T^s(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \backsimeq I_T^s(f)$$



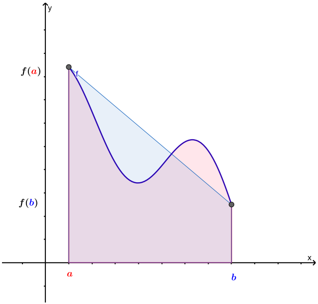
Méthode simple du trapèze

La méthode simple de trapèse consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un trapèze dont ces deux bases sont $f(a)$ et $f(b)$ et son hauteur est $(b-a)$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple de trapèze est :

$$I_T^s(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq I_T^s(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, alors l'erreur de trapèze est majorée par

$$E_T^s(f) = |I(f) - I_T^s(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

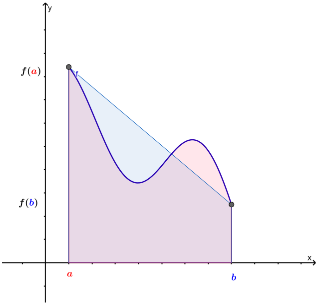
Méthode simple du trapèze

La méthode simple de trapèse consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par l'aire d'un trapèze dont ces deux bases sont $f(a)$ et $f(b)$ et son hauteur est $(b-a)$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple de trapèze est :

$$I_T^s(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \backsimeq I_T^s(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, alors l'erreur de trapèze est majorée par

$$E_T^s(f) = |I(f) - I_T^s(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Degré de précision : Le degré de précision de la méthode de trapèze est 1.

Méthode simple du trapèze

Exemple :

Soit l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

La valeur exacte de $I(f)$ vaut $\ln(2) = 0.693$.

Méthode simple du trapèze

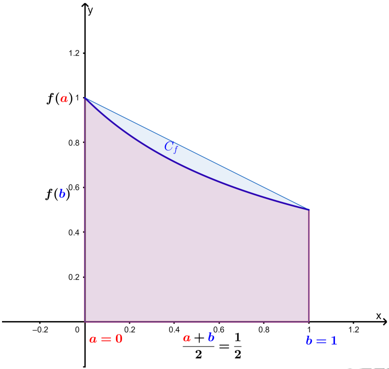
Exemple :

Soit l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

La valeur exacte de $I(f)$ vaut $\ln(2) = 0.693$.

La méthode du trapèze est :

$$
\begin{aligned}
I_T^s(f) &= \frac{1-0}{2}\left(f(0)+f(1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{4} \\
&= 0.75
\end{aligned}
$$



Méthode simple du trapèze

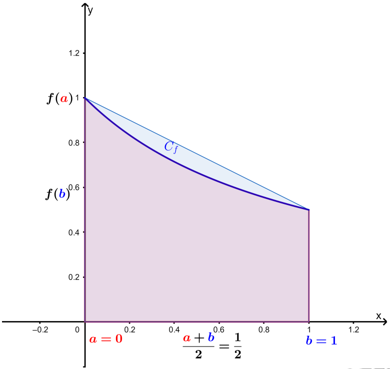
Exemple :

Soit l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

La valeur exacte de $I(f)$ vaut $\ln(2) = 0.693$.

La méthode du trapèze est :

$$
\begin{aligned}
I_T^s(f) &= \frac{1-0}{2}(f(0)+f(1)) \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) \\
&= \frac{3}{4} \\
&= 0.75
\end{aligned}
$$



L'erreur est : $E_T^s(f) = |I(f) - I_T^s(f)| = |\ln(2) - 0.75| \simeq 0.056$

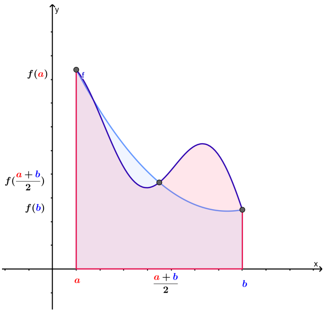
Méthode simple de Simpson

La méthode simple de Simpson est obtenue en interpolant f par un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ aux points d'abscisse a, $\frac{a+b}{2}$ et b, puis en intégrant P sur $[a, b]$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple de Simpson est :

$$I_S^s(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

$$I(f) \backsimeq \int_a^b P(x)dx = I_S^s(f)$$



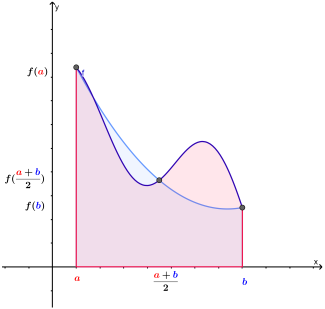
Méthode simple de Simpson

La méthode simple de Simpson est obtenue en interpolant f par un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ aux points d'abscisse a, $\frac{a+b}{2}$ et b, puis en intégrant P sur $[a, b]$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple de Simpson est :

$$I_S^s(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

$$I(f) \backsimeq \int_a^b P(x)dx = I_S^s(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, alors l'erreur de Simpson est majorée par

$$E_S^s(f) = |I(f) - I_S^s(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Méthode simple de Simpson

La méthode simple de Simpson est obtenue en interpolant f par un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ aux points d'abscisse a, $\frac{a+b}{2}$ et b, puis en intégrant P sur $[a, b]$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule simple de Simpson est :

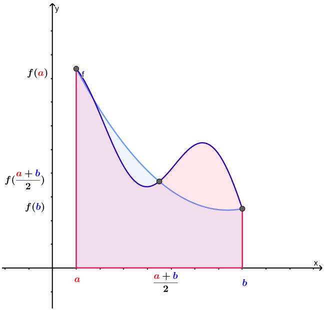
$$I_S^s(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

$$I(f) \simeq \int_a^b P(x)dx = I_S^s(f)$$

Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, alors l'erreur de Simpson est majorée par

$$E_S^s(f) = |I(f) - I_S^s(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$



Degré de précision : Le degré de précision de la méthode de Simpson est 3.

Méthode simple de Simpson

Exemple :

Soit l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

La valeur exacte de $I(f)$ vaut $\ln(2) = 0.693$.

Méthode simple de Simpson

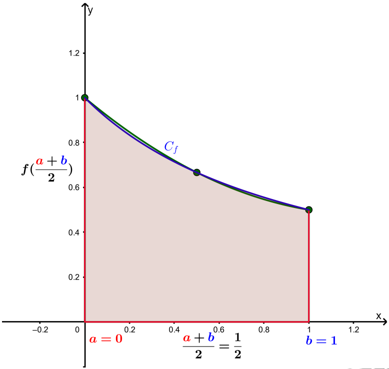
Exemple :

Soit l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

La valeur exacte de $I(f)$ vaut $\ln(2) = 0.693$.

La méthode de Simpson est :

$$
\begin{aligned}
I_S^s(f) &= \frac{1-0}{6}\left(f(0) + 4f(\frac{0+1}{2}) + f(1)\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + 4.\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{25}{36} \simeq 0.694
\end{aligned}
$$



Méthode simple de Simpson

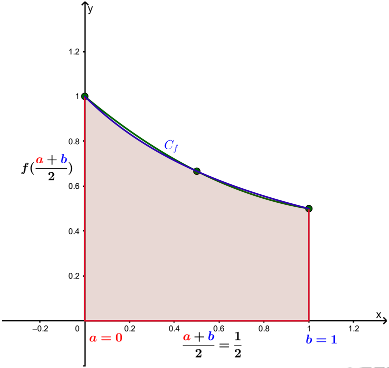
Exemple :

Soit l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

La valeur exacte de $I(f)$ vaut $\ln(2) = 0.693$.

La méthode de Simpson est :

$$\begin{aligned} I_S^s(f) &= \frac{1-0}{6}\left(f(0) + 4f(\frac{0+1}{2}) + f(1)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + 4.\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{25}{36} \simeq 0.694 \end{aligned}$$



L'erreur est :
$E_S^s(f) = |I(f) - I_S^s(f)| = |\ln(2) - 0.694| \simeq 0.001$

Récapitulation

Nom de la Méthode	Degré du polynôme	Nombre de points	Degré d'exactitude
Rectangle à gauche	0	1	0
Rectangle à droite	0	1	0
Rectangle au milieu	0	1	1
Trapèze	1	2	1
Simpson	2	3	3

Exercice

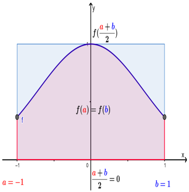
Soit la fonction $f(t) = e^{-t^2}$. Donner une valeur approchée de $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$ par la méthode du

- rectangle du milieu.
- trapèze.
- Simpson.

Solution

Rectangle du milieu.

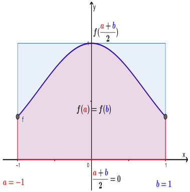
$$I^{s}_{Rm}(f) = (1-(-1))f(\frac{-1+1}{2}) = 2f(0)$$
$$= 2$$



Solution

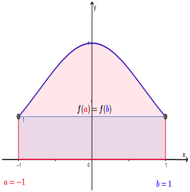
Rectangle du milieu.

$$I_{Rm}^{s}(f) = (1-(-1))f(\frac{-1+1}{2}) = 2f(0)$$
$$= 2$$



Trapèze.

$$I_{T}^{s}(f) = \frac{1-(-1)}{2}(f(-1)+f(1)) = f(-1)+f(1)$$
$$= 2e^{-1} \simeq 0.735$$



Solution

Rectangle du milieu.

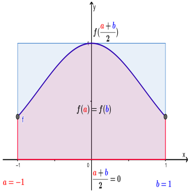
$$I^s_{Rm}(f) = (1-(-1))f(\frac{-1+1}{2}) = 2f(0)$$
$$= 2$$

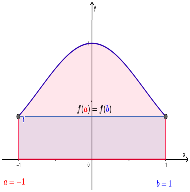
Trapèze.

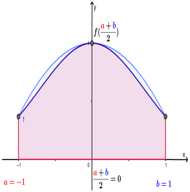
$$I^s_T(f) = \frac{1-(-1)}{2}(f(-1)+f(1)) = f(-1)+f(1)$$
$$= 2e^{-1} \simeq 0.735$$

Simpson.

$$I^s_S(f) = \frac{1-(-1)}{6}(f(-1)+4f(\frac{-1+1}{2})+f(1))$$
$$= \frac{1}{3}(f(-1)+4f(0)+f(1))$$
$$= \frac{1}{3}(e^{-1}+4+e^{-1}) = \frac{1}{3}(4+2e^{-1}) \simeq 1.578$$

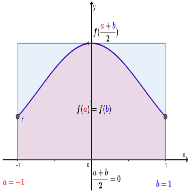






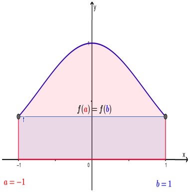
Solution

Rectangle du milieu.



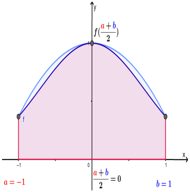
$$I^s_{Rm}(f) = (1-(-1))f(\frac{-1+1}{2}) = 2f(0)$$
$$= 2$$

Trapèze.



$$I^s_T(f) = \frac{1-(-1)}{2}(f(-1)+f(1)) = f(-1)+f(1)$$
$$= 2e^{-1} \simeq 0.735$$

Simpson.



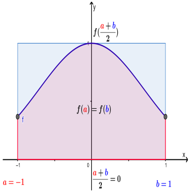
$$I^s_S(f) = \frac{1-(-1)}{6}(f(-1)+4f(\frac{-1+1}{2})+f(1))$$
$$= \frac{1}{3}(f(-1)+4f(0)+f(1))$$
$$= \frac{1}{3}(e^{-1}+4+e^{-1}) = \frac{1}{3}(4+2e^{-1}) \simeq 1.578$$

Est-il possible d'améliorer ces résultats en utilisant d'autres méthodes ?

Solution

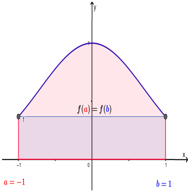
Rectangle du milieu.

$$I^s_{Rm}(f) = (1-(-1))f(\frac{-1+1}{2}) = 2f(0)$$
$$= 2$$



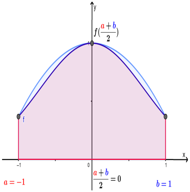
Trapèze.

$$I^s_T(f) = \frac{1-(-1)}{2}(f(-1)+f(1)) = f(-1)+f(1)$$
$$= 2e^{-1} \simeq 0.735$$



Simpson.

$$I^s_S(f) = \frac{1-(-1)}{6}(f(-1)+4f(\frac{-1+1}{2})+f(1))$$
$$= \frac{1}{3}(f(-1)+4f(0)+f(1))$$
$$= \frac{1}{3}(e^{-1}+4+e^{-1}) = \frac{1}{3}(4+2e^{-1}) \simeq 1.578$$



Est-il possible d'améliorer ces résultats en utilisant d'autres méthodes ? $\longrightarrow$ **Méthodes composites d'intégration**