Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

Méthode de décomposition LU

La décomposition LU

Soit S un système d'équations linéaires défini par

$$(S) : AX = b$$

où A est une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls.

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le mineur principal $M_{p,p}$ de A est le déterminant de la sous-matrice de A formée des p premières lignes et p premières colonnes

Exemple :

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$M_{1,1} = \begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix}, \quad M_{2,2} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad M_{3,3} = \det(A)$$

sont les mineurs principaux de la matrice A.

Remarque

Si A est d'ordre n alors elle admet n mineurs principaux.

- **Le principe de la méthode est de se ramener à deux systèmes triangulaires en appliquant les étapes suivantes:**

1. **Décomposition de A :** Trouver les matrices L et U vérifiant $A = LU$ où :

   L est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients

   de la diagonale sont égaux à 1.

   et

   U est une matrice triangulaire supérieure.

1. **Résolution du système triangulaire inférieur $LY = b$.(Descente)**

2. **Résolution du système triangulaire supérieur $UX = Y$.**

$$AX = b \xrightarrow{\textbf{Décomposition LU}} AX = L\underbrace{UX}_{Y} = b \rightarrow \begin{cases} LY & = b \\ UX & = Y \end{cases}$$

▷ **L'existence de la décomposition LU est assurée par le théorème suivant :**

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls alors il existe un unique couple de matrices (L, U), avec U triangulaire supérieure, et L triangulaire inférieure dont les coefficients de la diagonale sont égaux à 1. (i.e. $l_{i,i} = 1$), vérifiant $A = LU$.

Si A **une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls**

$$\Rightarrow \exists \quad \text{deux matrices} \quad \begin{cases} L & \text{triangulaire inférieure dont les coefficients} \\ & \text{de la diagonale sont égaux à } 1. \\ U & \text{triangulaire supérieure.} \end{cases}$$

vérifiant A=LU

Étude dun exemple

Soit le système (S) suivant:

$$(S):\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-3x_2+x_3=-3 \\ x_1+x_2-3x_3=1 \end{cases} \Leftrightarrow AX=b$$

où $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système admet une solution unique (syst‘eme de Cramer).
2. Montrer que la décomposition LU existe.
3. Résoudre (S) par la méthode de la d ´ecomposition LU.

Solution

1. $\det A = 32 \neq 0$ donc le système admet une solution unique(système de Cramer).
2. A est une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls. En effet,

$$\begin{cases} \det(3) = 3 \neq 0 \\ \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - 8 \neq 0 \\ \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \det A = 32 \neq 0 \end{cases}$$

   Donc la décomposition LU existe.

3. **Etape 1:**

$$A = LU \text{ alors } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1ère méthode: Calcul des matrices L et U en utilisant la méthode d'identification

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times u_{1,1} = 3 \Rightarrow u_{1,1} = 3 \\ 1 \times u_{1,2} = 1 \Rightarrow u_{1,2} = 1 \\ 1 \times u_{1,3} = 1 \Rightarrow u_{1,3} = 1 \\ l_{2,1} \times 3 = 1 \Rightarrow l_{2,1} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \times 1 + 1 \times u_{2,2} = -3 \Rightarrow u_{2,2} = -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \times 1 + 1 \times u_{2,3} = 1 \Rightarrow u_{2,3} = \frac{2}{3} \\ 3 \times l_{3,1} = 1 \Rightarrow l_{3,1} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \times 1 + l_{3,2} \times -\frac{10}{3} = 1 \Rightarrow l_{3,2} = -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} + 1 \times u_{3,3} = -3 \Rightarrow u_{3,3} = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

Donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -10/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -16/5 \end{pmatrix}$$

2ème méthode: Calcul des matrices L et U en utilisant la méthode de pivot de Gauss.

On applique la méthode de pivot de Gauss à la matrice A.

Etape 0:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 1:

Le pivot est $3 \neq 0$, on applique les opérations suivantes:

$L_1 \leftarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1$, on a

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Etape 2:

Le pivot est $-\frac{10}{3} \neq 0$, on applique les opérations suivantes:
$L_1 \leftarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{5}L_2$ à $A^{(1)}$, on a

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} \end{pmatrix}$$

$U = A^{(n)}$ où $A^{(n)}$ est la matrice triangulaire supérieure de la dernière étape n de la méthode de pivot de Gauss donc $U = A^{(2)}$

Les coefficients de la matrice L sont $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{\alpha_k}$ où $a_{ik}^{(k-1)}$ sont les coefficients de $A^{(k-1)}$ à l'étape $k-1$ et α_k est le pivot à l'étape $k-1$.

$l_{21} = \frac{1}{3}$, $l_{31} = \frac{1}{3}$ et $l_{32} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{10}{3}} = -\frac{1}{5} \Rightarrow$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/5 & 1 \end{pmatrix},$$

Résolution $AX = b$

Résoudre $AX = b \Leftrightarrow$ Résoudre

$$\begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Etape 2: la solution du système linéaire $LY = b$.

$$L\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3: la solution du système linéaire

$$UX = Y \Rightarrow U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -10/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -48/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Autre critère d'existence de la décomposition LU:

Matrice à diagonale strictement dominante

Définition

Une matrice A est à **diagonale strictement dominante** si la valeur absolue de chaque coefficient diagonal $a_{i,i}$ $(i \in \{1, \cdots, n\})$ de A est strictement supérieure à la somme des valeurs absolues des autres coefficients de A situés à la i ème ligne. En d'autre terme,

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Exemple: Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On a:

$$\begin{cases} |a_{1,1}| > |a_{1,2}| + |a_{1,3}| & (\textbf{car } |5| > |2| + |-1|) \\ |a_{2,2}| > |a_{2,1}| + |a_{2,3}| & (\textbf{car } |6| > |1| + |-3|) \\ |a_{3,3}| > |a_{3,1}| + |a_{3,2}| & (\textbf{car } |4| > |2| + |1|) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A **est une matrice à diagonale strictement dominante.**

Proposition

Si A est une matrice à diagonale strictement dominante alors elle admet une décomposition LU.