Résolution numérique des équations non-linéaires

Enoncés et corrections de la série

Exercice 1

Exercice 1

On se propose de résoudre numériquement l'équation $(E) : f(x) = 0$ dans l'intervalle $I = [1, 2]$, avec $f(x) = e^x - 2x - 2$.

1. Montrer que (E) admet une unique solution $x^* \in]1, 2[$.
2. Déterminer le nombre des itérations nécessaires par la méthode de dichotomie pour avoir une valeur approchée de x^* avec une précision de 10^{-2}.
3. Calculer c_0, c_1 et c_2 les premiers itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $]1, 2[$.
4. Montrer qu'on peut trouver deux fonctions g_1 et g_2 telles que
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g_1(x) = x \Leftrightarrow g_2(x) = x.$$
5. Pour approcher x^*, on définit la suite suivante:
$$\begin{cases} x_0 \in [1, 2] \quad , \\ x_{n+1} = g_i(x_n) \quad i = 1, 2 \end{cases}$$
Vérifier la convergence de la méthode du point fixe pour les deux fonctions.
6. Ecrire le schéma itératif de la méthode de Newton pour la résolution de (E).
7. Donner un choix convenable de x_0 pour assurer la convergence de la méthode Newton.
8. Déterminer les deux premiers itérés par la méthode de Newton.

Exercice 1

Correction

1. **Existence:** L'application $f: x \to e^x - 2x - 2$ est continue sur $[1, 2]$ (somme de deux fonctions continues :$x \to -2x - 2$ et $x \to e^x$).
   D'autre part $f(1) = e - 4 \approx -1.2817 < 0$ et $f(2) = e^2 - 6 \approx 1.3890 > 0$ alors $f(1).f(2) < 0$, il existe au moins un réel $x^* \in]1, 2[$ tel que $f(x^*) = 0$ (Théorème des valeurs intermédiaires).

   Unicité: L'application $f: x \to e^x - 2x - 2$ est dérivable sur $[1, 2]$ et on a $f'(x) = e^x - 2$.
   Comme $x \in [1, 2]$ alors $e^x - 2 \geq e - 2$. Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [1, 2]$.
   f est strictement croissante sur $[1, 2]$.

   Conclusion: l'équation (E) admet une unique solution $x^* \in]1, 2[$.
2. On a $d = |2 - 1| = 1$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et n le nombre minimal pour estimer x^* à ε prés.
   n doit vérifier: $n \geq log_2(\frac{d}{\varepsilon}) = log_2(10^2) \approx 6.643$ alors $n \geq 6.643$ donc $n = 7$.

Exercice 1

Correction

3. **1ère itération**

$]a_0, b_0[=]1, 2[, c_0 = \dfrac{1+2}{2} = 1.5.$

Or $f(a_0)f(c_0) = f(1)f(1.5) = (-1.2817)(-0.5183) > 0$**, alors**

$$x^* \in \,]a_1, b_1[=]c_0, b_0[=]1.5, 2[.$$

2ème itération

$]a_1, b_1[=]1.5, 2[, c_1 = \dfrac{1.5+2}{2} = 1.75$

Or $f(c_1)f(b_1) = f(1.75)f(2) = 0.2546 \times 1.3890 > 0$**, alors**

$$x^* \in]a_2, b_2[=]c_0, c_1[=]1.5, 1.75[.$$

Par conséquent,

$$c_2 = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625.$$

Exercice 1

Correction

4. $(E) : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^x - 2}{2}$ ou bien $x = ln(2x+2)$

5. Soit $g_1(x) = \dfrac{e^x - 2}{2}$

   g_1 est dérivable sur $[1,2]$.

   $g_1([1,2]) = [\dfrac{e-2}{2}, \dfrac{e^2-2}{2}] \not\subset [1,2]$

   Donc la convergence pour g_1 n'est pas assurée.

   Soit $g_2(x) = ln(2x+2)$

   g_2 est dérivable sur $[1,2]$.

   $g_2([1,2]) = [ln(4), ln(6)] \subset [1,2]$ $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2} \quad \forall x \in [1,2]$

   D'où g_2 converge bien vers x^*.

Exercice 1

Correction

6. Schéma de Newton associé à (E):

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - 2x_n - 2}{e^{x_n} - 2} \\ x_0 \in [1, 2]. \end{cases}$$

7. ▶ Convergence de la méthode de Newton:
   (H_1) : f est de classe C^2 sur $[1, 2]$
   (H_2) : $f(1).f(2) < 0$
   (H_3) : $\forall x \in]1, 2[,\ f'(x) = e^x - 2 \neq 0$.
   (H_4) : $\forall x \in]1, 2[,\ f''(x) = e^x > 0$.

   ▶ Choix de x_0:
   Comme $f(2).f''(2) = e(e^2 - 6) > 0$ alors $x_0 = 2$ assure la convergence de la méthode.

8. On a : $x_0 = 2$, donc $x_1 = x_0 - \dfrac{e^{x_0} - 2x_0 - 2}{e^{x_0} - 2} \approx 1.7422$ et $x_2 = x_1 - \dfrac{e^{x_1} - 2x_1 - 2}{e^{x_1} - 2} \approx 1.6814$