Module : Analyse numériques

Chapitre 3 : Intégration Numérique

Exercice 2

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Énoncé

Soit g une fonction continue sur $[-1;1]$. On choisit deux points d'intégration $x_1 = -1, x_2 = \alpha$ où $\alpha \in]0;1[$. Pour approcher l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} g(t)dt$, la formule de quadrature suivante est considérée:

$$I_q(g) = \sum_{j=1}^{2} \omega_j g(x_j) = \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha)$$

1. Trouver les poids d'intégration ω_1 et ω_2 en fonction de α tels que la formule de quadrature soit de degré de précision supérieur ou égal à 1.
2. a) Trouver ensuite α tel que $I_q(g) = I = \int_{-1}^{1} g(t)dt$ pour tout polynôme g de degré 2.

   b) Vérifier que le degré de précision de la formule de quadrature $I_q(g)$ est 2.

Correction

1) On cherche une formule de quadrature approchée sous la forme :

$$I_q(g) = \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha).$$

Afin de déterminer les coefficients ω_1 et ω_2 en fonction de α, on écrit que la formule est exacte pour les polynômes de degré 0 et 1

Correction

1) On cherche une formule de quadrature approchée sous la forme :

$$I_q(g) = \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha).$$

Afin de déterminer les coefficients ω_1 et ω_2 en fonction de α, on écrit que la formule est exacte pour les polynômes de degré 0 et 1

- Si $g(x) = P_0(x) = 1$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

$$I = \int_{-1}^{1} g(t)dt = \int_{-1}^{1} 1dt = 2$$

tandis que la formule de quadrature approchée donne

$$I_q(g) = \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha).$$

Puisque la formule est exacte pour les polynômes de degré 0, on a donc:

$$I = I_q(g)$$

par suite

$$\omega_1 + \omega_2 = 2 \tag{1}$$

Correction (suite)

- Si $g(x) = P_1(x) = x$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

$$I = \int_{-1}^{1} x dx = 0$$

tandis que la formule de quadrature approchée donne

$$\begin{aligned} I_q(g) &= \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha) \\ &= -\omega_1 + \alpha\omega_2 \end{aligned}$$

Puisque la formule est exact pour les polynômes de degré 1, on a donc $I = I_q(g)$ par suite

$$-\omega_1 + \alpha\omega_2 = 0 \tag{2}$$

Correction (suite)

- Si $g(x) = P_1(x) = x$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

$$I = \int_{-1}^{1} x dx = 0$$

tandis que la formule de quadrature approchée donne

$$\begin{aligned} I_q(g) &= \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha) \\ &= -\omega_1 + \alpha\omega_2 \end{aligned}$$

Puisque la formule est exact pour les polynômes de degré 1, on a donc $I = I_q(g)$ par suite

$$-\omega_1 + \alpha\omega_2 = 0 \qquad (2)$$

On obtient le système suivant

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 2 \\ -\omega_1 + \alpha\omega_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{2\alpha}{1+\alpha} \\ \omega_2 = \frac{2}{1+\alpha} \end{cases}$$

2) a) Si $g(x) = P_2(x) = x^2$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

$$I = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

2) a) Si $g(x) = P_2(x) = x^2$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

$$I = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

D'autre part, la formule de quadrature approchée donne

$$\begin{aligned} I_q(g) &= \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha) \\ &= \omega_1 + \omega_2 \alpha^2 \end{aligned}$$

- Puisque $I = I_(g)$ alors

$$\omega_1 + \omega_2 \alpha^2 = \frac{2}{3}, \tag{3}$$

par suite $\frac{2\alpha}{1+\alpha} + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha} = \frac{2}{3}$, ce qui implique

$$3\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

donc $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ sont les solutions de cette equation. Comme $\alpha \in]0, 1[$, on prend $\alpha = \frac{1}{3}$. On obtient

$$\omega_1 = \frac{1}{2}, \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \frac{3}{2}.$$

2) a) Si $g(x) = P_2(x) = x^2$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

$$I = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

D'autre part, la formule de quadrature approchée donne

$$\begin{aligned} I_q(g) &= \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha) \\ &= \omega_1 + \omega_2 \alpha^2 \end{aligned}$$

- Puisque $I = I_(g)$ alors

$$\omega_1 + \omega_2 \alpha^2 = \frac{2}{3}, \qquad (3)$$

par suite $\frac{2\alpha}{1+\alpha} + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha} = \frac{2}{3}$, ce qui implique

$$3\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

donc $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ sont les solutions de cette equation. Comme $\alpha \in]0, 1[$, on prend $\alpha = \frac{1}{3}$. On obtient

$$\omega_1 = \frac{1}{2}, \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \frac{3}{2}.$$

Finalement, la formule de quadrature est :

$$I_q(g) = \frac{1}{2} g(-1) + \frac{3}{2} g(\frac{1}{3})$$

b) Pour vérifier que le degré d'exactitude de la formule $I_q(g)$ est 2, il suffit de vérifier que la formule n'est pas exacte pour tous polynômes de degré 3.

b) Pour vérifier que le degré d'exactitude de la formule $I_q(g)$ est 2, il suffit de vérifier que la formule n'est pas exacte pour tous polynômes de degré 3.
Posons $g(x) = P_3(x) = x^3$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

$$I = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

D'autre part, la formule de quadrature approchée donne

$$\begin{aligned} I_q(g) &= \frac{1}{2}g(-1) + \frac{3}{2}g(\frac{1}{3}) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

b) Pour vérifier que le degré d'exactitude de la formule $I_q(g)$ est 2, il suffit de vérifier que la formule n'est pas exacte pour tous polynômes de degré 3.
Posons $g(x) = P_3(x) = x^3$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

$$I = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

D'autre part, la formule de quadrature approchée donne

$$\begin{aligned} I_q(g) &= \frac{1}{2}g(-1) + \frac{3}{2}g(\frac{1}{3}) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

On conclut que $I_q(g) \neq I$. Alors la formule n'est pas exacte pour un polynôme de degré 3, par suite le degré de précision de cette formule est 2.