Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

Correction-Exercice 2

1)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2 - 2).$$

Pour que A soit inversible il faut et il suffit que $\det(A) \neq 0$, or $\det(A) = \alpha(\alpha^2 - 2)$, donc A est inversible si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

2) Pour que la méthode de Jacobi soit convergente il suffit que A soit à diagonale strictement dominante c-â-d:

$$\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |\alpha| > 2 \\ |\alpha| > 1 \end{cases}$$

Donc si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, alors la méthode de Jacobi est convergente.

3) Pour $\alpha = 3$, alors $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Étape 1:

$$L_1 \leftarrow L_1$$
$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3$$

.

Alors:

$$(A|b)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{8/3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Étape 2:

$$L_1 \leftarrow L_1,$$
$$L_2 \leftarrow L_2$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{8} L_2,$$

. Alors,

$$(A|b)^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{8} & \frac{63}{8} \end{array}\right)$$

En utilisant la méthode de remontée on obtient:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Décomposition de Jacobi :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1}{3}(5 - x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{1}{3}(10 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)}}{a_{3,3}} = \frac{1}{3}(11 - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

c) Itération de Jacobi: Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

- **Itération 1 :** $X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5-1) \\ \frac{1}{3}(10-1-1) \\ \frac{1}{3}(11-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$
- **Itération 2 :** $X^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5-\frac{8}{3}) \\ \frac{1}{3}(10-\frac{4}{3}-\frac{10}{3}) \\ \frac{1}{3}(11-\frac{8}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{25}{9} \end{pmatrix}$