

CHAPITRE 2: INTERPOLATION POLYNOMIALE ET APPROXIMATION

Méthode d'interpolation de Lagrange

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $n + 1$ points de coordonnées $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $x_i \neq x_j$, pour tout $0 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$.

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $n + 1$ points de coordonnées $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $x_i \neq x_j$, pour tout $0 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$.

- Il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $n + 1$ points de coordonnées $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $x_i \neq x_j$, pour tout $0 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$.

- Il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

- Le polynôme P_n s'exprime comme suit:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{où } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $n + 1$ points de coordonnées $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $x_i \neq x_j$, pour tout $0 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$.

- Il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

- Le polynôme P_n s'exprime comme suit:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{où } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

- La famille de polynômes de Lagrange $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ associés aux points $(x_i, y_i), i \in \{0, \dots, n\}$, est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice

Soit f une fonction qui vérifie le tableau suivant:

x_i	$x_0 = -1$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$f(x_i)$	$f(x_0) = 2$	$f(x_1) = 1$	$f(x_2) = -1$

- 1 Justifier l'existence d'un unique polynôme d'interpolation des points d'abscisses x_0, x_1 et x_2 .
- 2 Déterminer la base de Lagrange pour l'interpolation des points d'abscisses x_0, x_1 et x_2 .
- 3 Déterminer le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points d'abscisses x_0, x_1 et x_2 .
- 4 En déduire une approximation de $f(0.5)$.

Solution:

- ① On a $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq x_2$ et $x_0 \neq x_2$, alors il existe un unique polynôme d'interpolation.

Solution:

- ① On a $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq x_2$ et $x_0 \neq x_2$, alors il existe un unique polynôme d'interpolation.
- ② Les éléments de la base de Lagrange L_0 , L_1 et L_2 associés respectivement à x_0 , x_1 et x_2 sont définies comme suit:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x - 1)}{(-1)(-1 - 1)} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

Solution:

- ① On a $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq x_2$ et $x_0 \neq x_2$, alors il existe un unique polynôme d'interpolation.
- ② Les éléments de la base de Lagrange L_0 , L_1 et L_2 associés respectivement à x_0 , x_1 et x_2 sont définies comme suit:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x - 1)}{(-1)(-1 - 1)} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - (-1))(x - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{-1}$$

Solution:

- ① On a $x_0 \neq x_1$, $x_1 \neq x_2$ et $x_0 \neq x_2$, alors il existe un unique polynôme d'interpolation.
- ② Les éléments de la base de Lagrange L_0 , L_1 et L_2 associés respectivement à x_0 , x_1 et x_2 sont définies comme suit:

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x - 1)}{(-1)(-1 - 1)} = \frac{x(x - 1)}{2} \\L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - (-1))(x - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{-1} \\L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)x}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \frac{(x + 1)x}{2}.\end{aligned}$$

- ③ Le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points d'abscisses x_0, x_1 et x_2 est donné par:

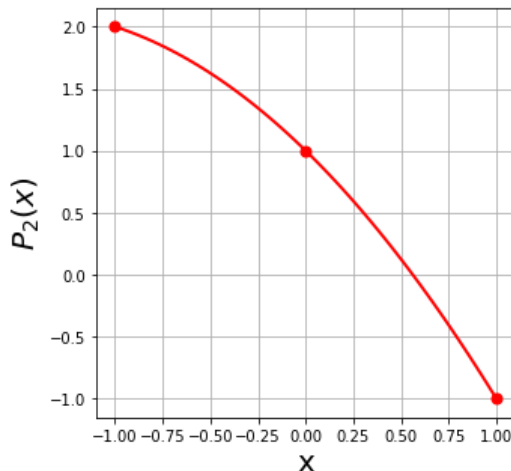
$$\begin{aligned}P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\&= \frac{x(x-1)}{2}f(x_0) + \frac{(x+1)(x-1)}{-1}f(x_1) + \frac{(x+1)x}{2}f(x_2) \\&= 2\frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) - \frac{(x+1)x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1.\end{aligned}$$

- ③ Le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points d'abscisses x_0, x_1 et x_2 est donné par:

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\
 &= \frac{x(x-1)}{2}f(x_0) + \frac{(x+1)(x-1)}{-1}f(x_1) + \frac{(x+1)x}{2}f(x_2) \\
 &= 2\frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) - \frac{(x+1)x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1.
 \end{aligned}$$

- ③ D'après ce qui précède,

$$f(0.5) \approx P_2(0.5) = 0.125.$$



Exercice

Répondre aux questions de l'exemple introductif en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange.

Inconvénient majeur de la méthode d'interpolation de Lagrange

- Un inconvénient majeur de la méthode d'interpolation par les polynômes de Lagrange réside en l'ajout d'un point (x_{n+1}, y_{n+1}) à l'ensemble de n points d'interpolation. Dans ce cas, il n'est numériquement pas évident de déduire P_{n+1} de P_n . **Tous les calculs seront refaits de zéro.**

Inconvénient majeur de la méthode d'interpolation de Lagrange

- Un inconvénient majeur de la méthode d'interpolation par les polynômes de Lagrange réside en l'ajout d'un point (x_{n+1}, y_{n+1}) à l'ensemble de n points d'interpolation. Dans ce cas, il n'est numériquement pas évident de déduire P_{n+1} de P_n . **Tous les calculs seront refaits de zéro.**
- Pour combler cette lacune, on pourra appliquer la **méthode d'interpolation de Newton** qui sera introduite ci-dessous.