Résolution numérique des équations non-linéaires

Méthode de Newton

Analyse numérique - $3^{\text{ème}}$ année -

Principe de la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $C^1([a,b])$, telle que $f' \neq 0$ sur $[a,b]$, et admet une unique racine $x^* \in]a,b[$: $f(x^*) = 0$.
Pour trouver une valeur approchée de x^*, la méthode de Newton, sous certaines conditions sur f, consiste à générer une suite récurrente $(x_n)_{n\geq 0}$ convergente vers x^*.

Basée sur une approximation de f par son développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de x_n, $n \geq 0$, x_{n+1} est déterminé par le point d'intersection de T_{x_n}, la tangente à C_f, la courbe représentative de f, au point $(x_n, f(x_n))$ et l'axe des abscisses:

$$\{(x_{n+1}, y_{n+1})\} = T_{x_n} \cap \{y = 0\},$$

avec

$$T_{x_n} : y = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n), x \in \mathbb{R}.$$

Principe de la méthode de Newton

La relation de récurrence de la méthode de Newton est donnée par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \quad , \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad . \end{cases}$$

Cette relation de récurrence peut être exprimée comme suit:

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \quad , \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad , \end{cases}$$

avec $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ et $f'(x) \neq 0, \ \forall x \in [a, b]$. La racine x^* de f correspond à l'unique point fixe de g ($g(x^*) = x^*$).
En effet,

$$g(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Illustration graphique : Méthode de Newton

On considère l'exemple d'une fonction f continue et strictement décroissante sur $[a,b]$ et ayant une unique racine $x^* \in]a,b[$ comme illustré ci-dessous:

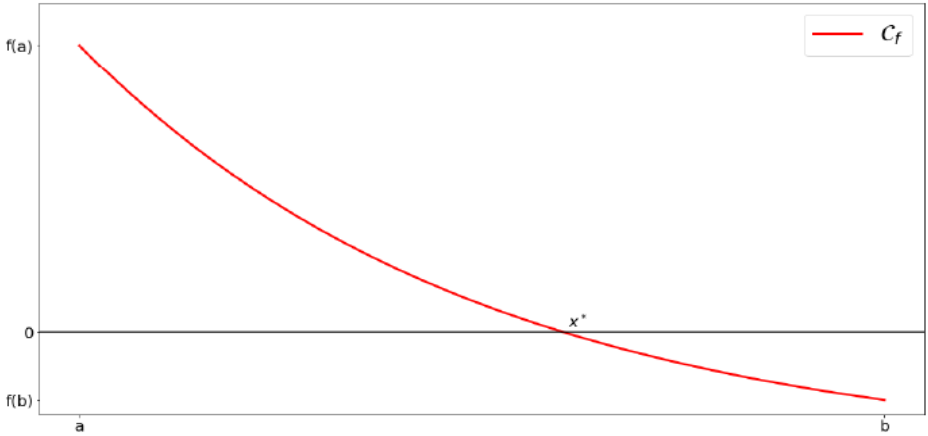


Illustration graphique : Méthode de Newton

On commence par un choix de $x_0 = a$. On obtient $\{(x_1, y_1)\} = T_{x_0} \cap \{y = 0\}$.

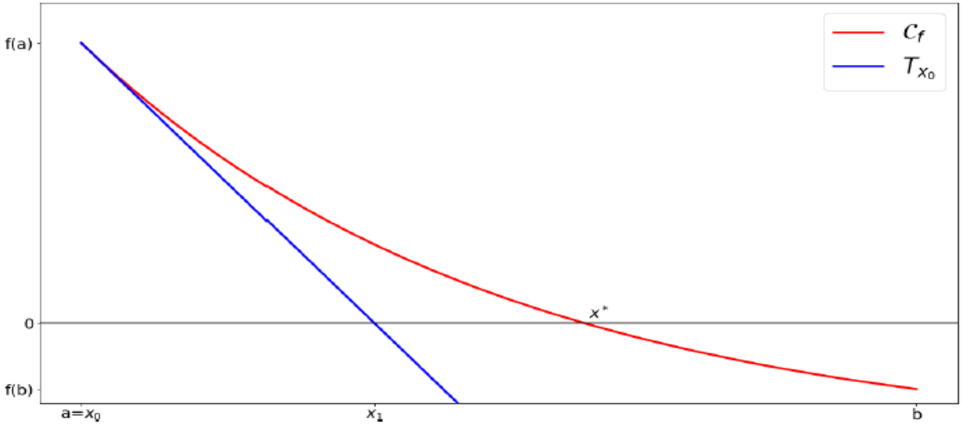


Illustration graphique : Méthode de Newton

$$\{(x_2, y_2)\} = T_{x_1} \cap \{y = 0\}.$$

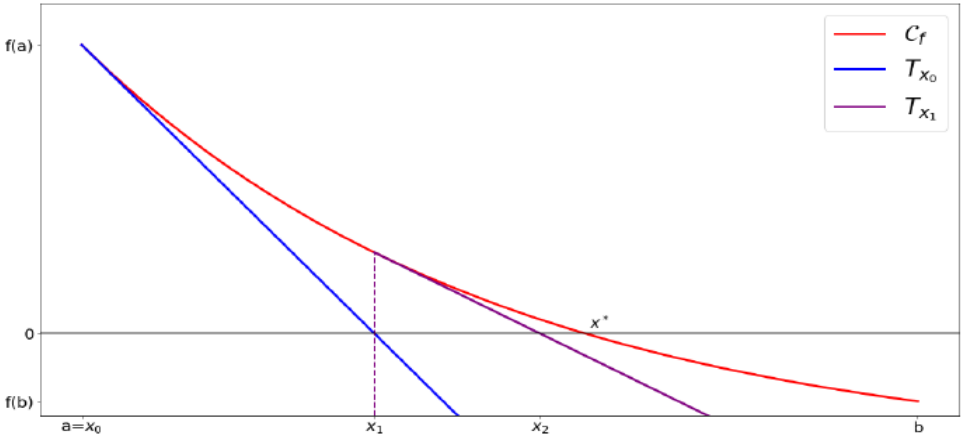
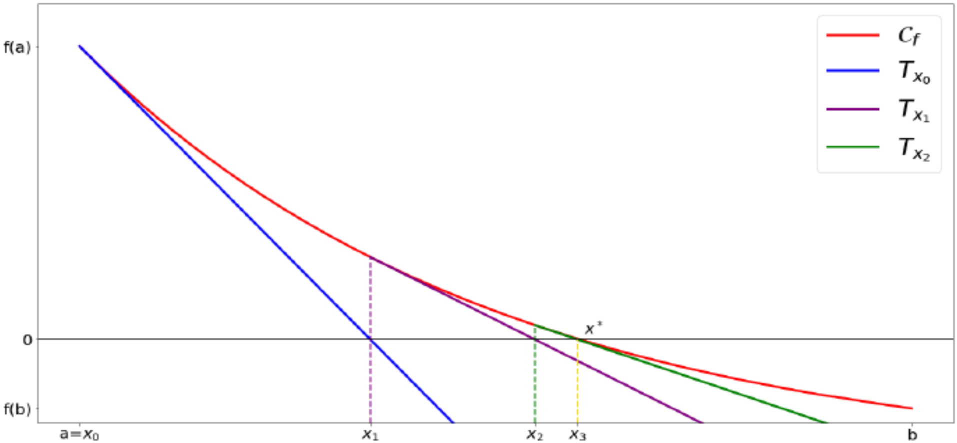


Illustration graphique : Méthode de Newton

$\{(x_3, y_3)\} = T_{x_2} \cap \{y = 0\}$.



Convergence de la méthode de Newton

Remarque

Si la suite récurrente (x_n) est convergente, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x^*$.

En effet, si (x_n) converge vers l, alors l est un point fixe de la fonction g ($g(l) = l$). Par conséquent, $f(l) = 0$. Par unicité de la solution, $l = x^*$.

Questions:

1. La suite récurrente (x_n) est-elle toujours convergente ?
2. Est-ce que le choix de x_0 intervient dans la convergence de la méthode de Newton?

Convergence de la méthode de Newton

Théorème de convergence global de la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $C^2([a,b],\mathbb{R})$, avec $[a,b] \subset \mathbb{R}$, vérifiant :

1. $f(a) \times f(b) < 0$: existence d'une racine.
2. $f'(x) \neq 0$, pour tout $x \in [a,b]$: f est strictement monotone i.e. unicité de la racine x^*
3. $f''(x) \neq 0$, pour tout $x \in [a,b]$: f est concave ou convexe.

Alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \quad , \text{tel que } f(x_0) \times f''(x_0) > 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n) \end{cases}$$

est convergente vers l'unique racine x^* de f.

Convergence de la méthode de Newton

Choix de x_0

La question qui se pose : "Pourquoi ce choix de x_0?"
Pour répondre à cette question, on rappelle l'étude de la monotonie des suites récurrentes:

On considère une suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

avec h une application de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I un intervalle stable par h (c'est à dire $h(I) \subset I$).
Si h est strictement croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.
Dans ce cas :

- si $u_0 < u_1$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
- si $u_0 > u_1$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Convergence de la méthode de Newton

Choix de x_0

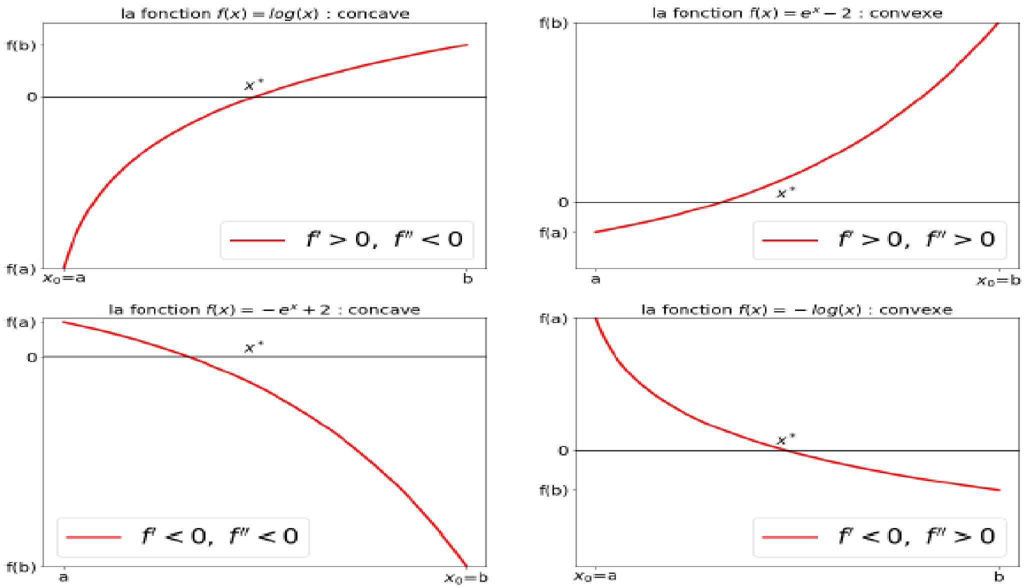
Dans le cas de la méthode de Newton, la fonction g définissant la suite récurrente $(x_n)_{n\geq 0}$, est définie sur $[a, b]$ par:

$$\forall x \in [a, b], g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ et } g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

La fonction g est croissante si et seulement si le produit $f \times f''$ est strictement positif. En fixant x_0 dans $[a, x^*]$ ou dans $[x^*, b]$ qui sont deux intervalles stables par f et en comparant x_0 et x_1 la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ sera, selon l'intervalle considéré, ou bien décroissante et minorée par x^*, ou bien croissante est majorée par x^*. Ceci implique que (x_n) est convergente.

Convergence de la méthode de Newton

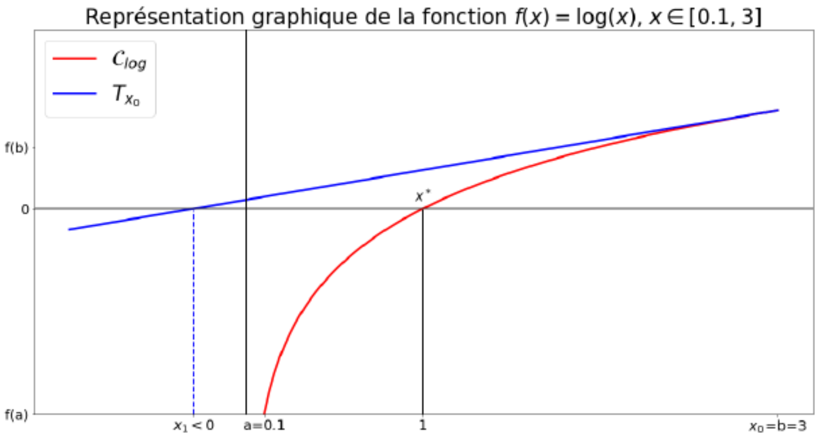
Choix de x_0



Convergence de la méthode de Newton

Choix de x_0

Le choix de x_0 est important pour assurer la convergence de la méthode de Newton, ci-dessous nous représentons un contre exemple avec un x_0 non adéquat.



La méthode de Newton n'est pas convergente car x_1 n'appartient pas à l'intervalle $[a, b]$. Donc la condition sur x_0 est fondamentale pour assurer la convergence de la suite récurrente (x_n).

Test d'arrêt

Supposons que la suite (x_n) est convergente vers x^*. Comment trouver une valeur approchée de x^* à une tolérance ε ?
Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on peut arrêter le procédé lorsque la condition suivante est vérifiée:

$$|f(x_n)| < \varepsilon.$$

Remarque

On peut imposer un nombre maximal N_{max} d'itérations pour arrêter le procédé.

Algorithme de la méthode de Newton

Soit f une fonction vérifiant les hypothèse du TVI sur $[a, b]$ avec $f'(x) \neq 0$, pour tout $x \in]a, b[$.

- Initialiser $x_0 \in [a, b]$, la précision ϵ et le nombre d'itérations maximal N_{max}.
- n=0
- tant que $\left(|f(x_n)| \geq \epsilon \;\&\; n < N_{max} \right)$ faire
  - $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
  - $n = n + 1$
- fin
- $x^* \approx x_{n+1}$ à ϵ près.

Exercice

On se propose de résoudre numériquement l'équation $(E) : f(x) = 0$ dans $[0, 1]$, où la fonctions f est donnée par :

$$f(x) = x^3 + x - 1, \ \forall x \in [0, 1].$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution unique $x^* \in [0, 1]$.
2. Application de la méthode de dichotomie : estimer le nombre d'itérations nécessaire n_ε pour déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.
3. Application de la méthode de Newton : Vérifier les hypothèses de la méthode de Newton pour la détermination de x^* et déterminer x_0, une valeur initiale assurant la convergence de cette méthode. Déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.

Correction

1. - f est continue sur $[0,1]$.
   - $f(0).f(1) < 0$: existence d'au moins une solution de (E) via le TVI.
   - $f^{'}(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $[0,1]$, f est strictement croissante : unicité de la solution de (E).
2. $n_\varepsilon > \log_2(10^3) = 9.9658 \Rightarrow n_\varepsilon = 10$
3. - f est de classe $C^2([0,1])$.
   - f satisfait le TVI.
   - $f^{'}(x) > 0$ sur $]0,1[$.
   - $f^{''}(x) = 6x > 0$ sur $]0,1[$.
   - x_0 donné,
   - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
   - Pour $x_0 = 1$, $f(1).f^{''}(1) = 6 > 0$: ce choix de $x_0 = 1$ satisfait le théorème de convergence de la méthode de Newton. Nous l'adoptons pour les calculs ci-dessous:

$x_1 = 0.75$	$x_2 = 0.6860$	$x_3 = 0.6823$
$f(x_1) = 0.171$	$f(x_2) = 0.009$	$f(x_3) = -6.663.10^{-5}$

Donc $x_3 = 0.6823$ est une approximation de x^* avec une précision inférieure à 10^{-3}.