Résolution numérique des équations non-linéaires

Exercice 2

Exercice 2

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E) : $f(x) = 0$ dans $I = [0, 1]$ où la fonction f est donnée par:

$$f(x) = x^3 + 3x - 3,\ x \in I.$$

1. Montrer que (E) admet une unique solution x^* dans $]0, 1[$.
2. Montrer que la fonction $g(x) = \dfrac{3}{x^2+3}$ vérifie la relation suivante:

$$f(x) = 0 \iff g(x) = x.$$

3. Pour approcher x^* par la méthode du point fixe on définit la suite suivante:

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 1], \\ x_{n+1} = g(x_n). \end{cases}$$

   a) Par comparaison, vérifier que $\forall x \in [0, 1], |g'(x)| \leq M_0,$ avec $M_0 = \frac{2}{3}$.
   b) Montrer que cette suite converge vers l'unique solution x^*.
   c) Estimer dans ce cas n_0 : le nombre d'itérations nécessaire pour déterminer x^* avec une précision de $\epsilon = 10^{-3}$.
   d) Pour $x_0 = 0, 5$ calculer les trois premières itérations.

1. a) Déterminer n_1 le nombre des itérations nécessaires par la méthode de Dichotomie pour avoir une valeur approchée avec la même précision de $\epsilon = 10^{-3}$.
   b) Expliquer la différence entre n_0 et n_1.
   c) Calculer c_0, c_1 et c_2 les premiers itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $]0, 1[$.

Dans la suite, on s'intéresse à savoir l'importence de bien trouver le bon majorant de la fonction $|g'(x)|$ pour déterminer ensuite le nombre minimal d'itérations pour estimer l'unique solution dans la méthode du point fixe en donnant une valeur de précision ϵ.

2. a) Démontrer que $M_1 = \dfrac{3}{8}$ est un maximum de la fonction $|g'(x)|$ sur l'intervalle I.
   b) Déduire qu'on peut approcher x^* avec la même précision $\epsilon = 10^{-3}$ par un nombre des itérations n_2 plus petit que n_0?
   c) n_2 est le nombre minimal d'itérations pour estimer x^* avec la tolérance $\epsilon = 10^{-3}$? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Correction

1. **Existence:** L'application $f: \ x \to x^3 + 3x - 3$ est continue sur $[0, 1]$ (un polynôme). D'autre part $f(0) = -3 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ alors $f(0).f(1) < 0$, il existe au moins un réel $x^* \in]0, 1[$ tel que $f(x^*) = 0$ (Théorème des valeurs intermédiaires).

   Unicité: L'application $f: \ x \to x^3 + 3x - 3$ est dérivable sur $[0, 1]$ et on a $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in [0, 1]$. Donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

   Conclusion: l'équation (E) admet une unique solution $x^* \in]0, 1[$.

2. Pour la fonction $g(x) = \frac{3}{x^2+3}$, on'a

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3+3x-3 = 0 \Leftrightarrow x^3+3x = 3 \Leftrightarrow x(x^2+3) = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{x^2+3} \Leftrightarrow x = g(x).$$

Exercice 2

Correction

3 a) la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, 1]$ et on'a $g'(x) = \frac{-6x}{(x^2+3)^2}$. Donc,

$$|g'(x)| = \left|\frac{-6x}{(x^2+3)^2}\right| = \frac{6x}{(x^2+3)^2},\ x \in [0, 1].$$

Alors, pour tout $x \in [0, 1]$

$$|g'(x)| \leq \frac{6}{(x^2+3)^2} \leq \frac{6}{3^2} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 2

Correction

b) Schéma du point fixe associé à (E):

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) = \dfrac{3}{x_n^2+3} \\ x_0 \in [0,1]. \end{cases}$$

Convergence de la méthode du point fixe:

(H_1) : g est dérivable sur $[0,1]$.

(H_2) : $g'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+3)^2} < 0$, alors g est décroissante sur $[0,1]$ et $g([0,1]) = [g(1), g(0)] = [\frac{3}{4}, 1] \subset [0,1]$.

(H_3) : D'après qeustion précédente, $|g'(x)| \leq \dfrac{2}{3} < 1, \quad \forall x \in [0,1]$.

Comme les trois hypothèses sont bien vérifiées, g converge bien vers $x*$.

Exercice 2

Correction

c) Le nombre n_0 de termes à calcuer pour obtenir une précision de 10^{-3} est

$$n_0 = E\left(\frac{\log(10^{-3}) - \log|1|}{\log(\frac{2}{3})}\right) + 1 = 18.$$

d) Pour $x_0 = 0,5$,
$x_1 = g(0,5) = 0,9230.$
$x_2 = g(0.923) = 0.7788.$
$x_3 = g(0.7788) = 0.8318.$

Exercice 2

Correction

4 a) on a $d = |1 - 0| = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$ et n_1 le nombre minimal pour estimer x^* à ε prés. n_1 doit vérifier: $n_1 \geq log_2(\frac{d}{\varepsilon})$, alors $n_1 \geq 9.9657$ donc $n_1 = 10$.

b) On'a $n_0 > n_1$ car $M_0 > \frac{1}{2}$.

c) Les itérations sont décrites dans le tableau suivant:

n	a_n	c_n	b_n	Précison
0	0 $f(a_0) < 0$	$\frac{1}{2}$ $f(c_0) < 0$	1 $f(b_0) > 0$	$\|b_0 - a_0\| = 1$
1	$\frac{1}{2}$ $f(a_1) < 0$	$\frac{3}{4}$ $f(c_1) < 0$	1 $f(b_1) > 0$	$\|b_1 - a_1\| = 0.5$
2	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{16}$	1	$\|b_2 - a_2\| = 0.25$

Exercice 2

Correction

5 a) $|g'(x)| = \dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$ est croissante sur $[0,1]$ (on peut passer par la dérivée seconde qu'est donnée par $(|g'(x)|)' = \dfrac{6(9-x^4)}{(x^2+3)^4} > 0, \ sur \ [0,1]$) et par la suite $|g'(x)|$ atteint son maximum en 1, ce qui donne

$$|g'(x)| \leq \frac{3}{8} < 1 \qquad \forall x \in [0,1].$$

b) Le nombre n_2 de termes à calcuer pour obtenir une précision de 10^{-3} dans ce cas (avec $M_1 = \dfrac{3}{8}$ commme majorant de $|g'(x)|$) est

$$n_2 = E\left(\frac{\log(10^{-3}) - \log|1|}{\log(\frac{3}{8})}\right) + 1 = 8.$$

c) Théoriquement n_2 est le nombre minimal d'itérations pour estimer x^* avec la tolérance $\epsilon = 10^{-3}$ car M_1 est le maximum de la fonction $|g'(x)|$ sur $[0,1]$ donc c'est le plus petit majorant de $|g'(x)|$ sur $[0,1]$.