Objectif

Dans ce travail, l'objectif est d'interpoler un nuage de points donné par un polynôme en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange.

Afin d'implémenter les méthodes d'interpolation, on aura besoin de `numpy`. Sachant que les polynômes dans `numpy` peuvent être créés, manipulés et même ajustés à l'aide de la classe `Polynomial` du package `numpy.polynomial`. Il faudra charger ces modules, en tapant les commandes suivantes:

[ ]:
```
import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial
```

Déclaration d'un Polynôme

Un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à une indéterminée X s'écrit sous la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i,$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$.

Le polynôme P est caractérisé par ses coefficients a_0, a_1,...,a_n.

Pour déclarer le polynôme P, On utilise la classe `Polynomial` comme suit :

`P=Polynomial([a0,a1,...,an])`

Il faut écrire les coefficients par ordre de degré croissant.

Exemple:

Soient P et Q deux polynômes définies par $P(x) = 1 + 2x + 3x^3$, et $Q(x) = P(x) * P(x)$.

Le script ci-dessous renvoie correctement l'expression du polynôme P, du polynôme Q ainsi que l'image de 2 par P et Q.

[ ]:
```
P=Polynomial([1,2,0,3])
print(P)
Q=P*P
print(Q)
print("P(2)=",P(2))
print("Q(2)=",Q(2))
```

Dans ce qui suit, on s'intéresse à coder la méthode d'interpolation de Lagrange.

Question 1 :

Écrire une fonction nommée `base_lagrange(X,i)` prenant en entrée $X = \left(x_0, x_1, \cdots, x_n\right)^T$, un vecteur colonne contenant les abscisses x_i des points d'interpolation, i un indice tel que $0 \leq i \leq n$, et retourne le polynôme de la base de Lagrange $L_i(x)$ donné ci-dessus en utilisant la classe `Polynomial`.

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \qquad \forall i \in \{0, ..., n\}$$

Question 2 :

Écrire une fonction nommée `polynome_lagrange(X,Y)` prenant en entrée $X = \left(x_0, x_1, \cdots, x_n\right)^T$ un vecteur colonne contenant les abscisses, $Y = \left(y_0, y_1, \cdots, y_n\right)^T$ un vecteur colonne contenant les ordonnées, et retourne le polynôme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x).$$

Question 3 :

Déterminer l'expression du polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}_2[X]$ qui relie les points de coordonnées $(-1, 2)$, $(0, 1)$ et $(1, -1)$ en utilisant la fonction `polynome_lagrange`.