École **S**upérieure **Pr**ivée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

Analyse Numérique

Série d'exercices N^{o}2 Interpolation et approximation polynomiale

Niveau : 3$^{\text{ème}}$ année — Année universitaire : 2023-2024

Exercice 1 *On considère les points* $(-2,4)$ *;* $(0,0)$ *;*$(1,0)$ *et* $(2,4)$*. Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation* P *aux quatre points donnés précédement et justifier votre réponse.*

(1) $P_1(X) = X^4 + \frac{2}{3}X^3 + 3X^2 + \frac{8}{3}X$

(2) $P_2(X) = \frac{4}{3}X^2 - \frac{4}{3}$

(3) $P_3(X) = \frac{1}{3}X^3 + X^2 - \frac{4}{3}X$

(4) $P_4(X) = \frac{1}{6}X^4 + X^3 + \frac{2}{3}X^2 + X$

Exercice 2 (Examen Mai 2019)

Partie I : Interpolation polynomial

(a) *Justifier l'existence d'un unique polynôme* $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ *interpolant les points* $(-2,16), (0,-4)$ *et* $(2,8)$*.*

(b) *Déterminer l'expression du polynôme* P_2 *par une méthode (vue en cours) de votre choix*

Partie II : Approximation au sens des moindres carrées

Dans l'objectif d'étudier le chemin de freinage d'un véhicule, correspondant à la distance parcourue en mètres (m) *du début du freinage jusqu'à l'arrêt total du véhicule, en fonction de la vitesse en Kilomètres par heure* (Km/h) *de ce dernier, 12 expériences indépendantes ont été réalisées. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous. On note par* $X = (x_i)_{1\leq i\leq 12}$ *et* $Y = (y_i)_{1\leq i\leq 12}$*, où* x_i*, et* y_i*, désignent, respectivement, la vitesse du véhicule et le chemin de freinage associés à l'expérience* i*.*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
y_i	9	11	20	27	39	45	58	78	79	93	108	12

(a) *Déterminer les coefficients* $Z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *de la droite* $f(t,Z) = a + bt$*, qui ajuste au mieux les points* $(x_i; y_i)_{1\leq i\leq 12}$ *au sens des moindres carrées. On donne les valeurs des sommes* *suivantes :*

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 1140;\ \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 122600;\ \sum_{i=1}^{12} y_i = 691;\ \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 80840$$

(b) *Rouler à une vitesse de* $105Km/h$, *le conducteur de ce véhicule pourrait-il éviter un obstacle survenant à une distance de* $60m$ *? Justifir votre réponse.*

Exercice 3

(1) *Construire le polynôme P d'interpolation de Lagrange aux points* $(-1, e); (0, 1)$ *et* $(1, e)$.

(2) *Sans faire de calcul, donner l'expression du polynôme de Lagrange Q qui interpole les trois points* $(-1, -1); (0, 0)$ *et* $(1, -1)$.

(3) *Trouver le polynôme de l'espace vectoriel Vect*$(1, X, X^2)$ *qui interpole les trois points* $(-1, -1); (0, 0)$ *et* $(1, -1)$.

Exercice 4 *:*

Soit la fontion définie sur $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

1. *Déterminer l'expression du polynôme de Newton interpolant les points* $M_0\ (0, f(0)), M_1\ (1, f(1))$ *et* $M_2\ (2, f(2))$.
2. *Calculer la valeur approchée de f au point* $x = \dfrac{1}{2}$, *puis déterminer l'erreur d'interpolation en ce point.*
3. *Donner une majoration de l'erreur d'interpolation sur [0,2]. Conclure.*
4. *En ajoutant un point supplémentaire* $M_3(3, f(3))$, *déduire l'expression du nouveau polynôme qui interpole les points* M_0, M_1, M_2 *et* M_3.