Module: Calcul Scientifique **Classes :** $3^{\text{ème}}$ année **AU: 2023 / 2024**

TP 4: Résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$

Objectif de ce TP :

Le but de ce TP est d'implémenter deux méthodes pour la résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$ et de comparer ces deux méthodes.

1 Méthode itérative 1: méthode de Dichotomie

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

1. Écrire une fonction iterativemethod1(f,a,b,epsilon,Nmax) qui renvoie la valeur approchée du zéro x^* d'une fonction f continue, strictement monotone sur $[a, b]$, selon la méthode de dichotomie , et renvoie aussi le nombre d'itérations.
   • Les arguments de la fonction dichotomie devront être: la fonction f, des réels a et b, avec $a < b$, un réel $\varepsilon > 0$ et $Nmax$ le nombre maximal d'itérations.
   • Le résultat renvoyé doit être composé d'une valeur approchée de x^* à ε près et le nombre d'itérations.
   • On testera au préalable si $f(a)f(b) > 0$, et dans ce cas, on renverra $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe.
   • On utilise le test d'arrêt $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$. (voir le cours de l'analyse numérique pour avoir plus de détails).

2. On considère la fonction f continue sur $[1, 2]$

$$f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin(x).$$

   NB: La fonction logarithme s'écrit sous python comme suit : np.log() ou sp.log().

   (a) Justifier graphiquement que $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1, 2]$.

   (b) Tester la fonction iterativemethod1(f,a,b,epsilon,Nmax) pour : $\varepsilon = 10^{-5}$ et $Nmax = 20$.

2 Méthode itérative 2

On considère une fonction f continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \neq f(b)$.
On souhaite approcher numériquement la racine d'une équation $(E) : f(x) = 0$ en utilisant le schéma itératif suivant:

$$(MI)_n : \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_n), \\ x_0 \in \; [a, b], \end{cases}$$

avec (x_n) est une suite convergente vers la solution exacte x^* de (E) ($\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x^*$).

1. (a) Écrire une fonction `iterativemethod2(a,b,x0,f,epsilon)` qui prend les paramètres suivants: a et b les deux extrémités de $[a, b]$, la fonction `f`, la valeur initiale `x0` et la tolérance `epsilon`. Cette fonction doit retourner **deux listes** dont la première contient tous les itérés $x = [x_0, x_1, x_2, \cdots]$ et la deuxième contient $y = [f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots]$. Dans cette fonction, on utilise le test d'arrêt $|\mathtt{f}(x_n)| \leq$ `epsilon`,;$\forall \; n \geq 0$.

   (b) Donner l'instruction nécessaire pour déterminer l'expression de la dérivée de f, notée df.

   (c) Représenter graphiquement df, la fonction dérivée de f sur [1,2].

   (d) Déduire que (E) admet une unique solution sur $[1, 2]$.

2. Prenant dans la suite $x_0 = 2$ et `epsilon` $= 10^{-2}$.

   (a) Donner l'instruction qui permet d'afficher la solution approchée de $x^\star$ à `epsilon` près en utilisant la fonction "iterativemethod2".

   (b) Trouver le nombre d'itération N pour approcher la solution $x^\star$ à espsilon près.

   (c) Remplir le tableau ci-dessous qui contient les trois premiers itérés (deux chiffres seulement après la virgule) du schéma $(MI)_n$.

X	$x_0 = 2$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$
Y	$f(x_0) =$	$f(x_1) =$	$f(x_2) =$	$f(x_3) =$

3 Comparaison des deux méthodes

Comparer les deux méthodes de résolution de $f(x) = 0$: "iterativemethod1" et "iterativemethod2", en terme de nombre d'itérations effectuées, pour approcher la solution x^* de la fonction $f(x) = cos(2x) - x^2$ sur l'intervalle $[0, \dfrac{\pi}{4}]$ pour $Nmax = 10^3$, et $\varepsilon \in \{10^{-n}, \; 2 \leq n \leq 8\}$. Que peut-on conclure?