esprit — Se former autrement — HONORIS UNITED UNIVERSITIES	**EXAMEN** Semestre : 1 ☐ 2 ☒ Session : Principale ☒ Rattrapage ☐

Unité d'enseignement : Equipe AN

Module(s) : Analyse Numérique

Classe(s) : 3A 2 $\rightarrow$ 28 — Nombre de pages : 5

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐ — Documents autorisés : OUI ☐ NON ☒

Date : Mai 2023 — Heure : 11 h — Durée : 1h30 min

NB : Vous êtes appelés **à écrire que trois chiffres après la virgule pour tous résultats trouvés.

Exercice 1 (8 points)

Cet exercice porte sur l'approximation de l'intégrale $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ où f est une fonction continue sur l'intervalle $[-1, 1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
On définit la formule de quadrature suivante approchant lintégrale $I(f)$

$$J_\alpha(f) = \lambda_0 f(-\alpha) + \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f(\alpha), \text{ où } \alpha \in [-1, 1].$$

1) a) **(1.5 pts)** Sachant que la méthode $J_\alpha(f)$ est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, montrer que $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ vérifie le système linéaire suivant : $(S_\alpha)\ \ A\Lambda = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- pour $P(x) = 1$, on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1} 1dx = \lambda_0 \times 1 + \lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 1$ donc $\boxed{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2}$
- pour $P(x) = x$, on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1} xdx = \lambda_0 \times (-\alpha) + \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times \alpha$ donc $\boxed{-\alpha\lambda_0 + \alpha\lambda_2 = 0}$
- pour $P(x) = x^2$, on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2dx = \lambda_0 \times (-\alpha)^2 + \lambda_1 \times (0)^2 + \lambda_2 \times (\alpha)^2$ donc $\boxed{\alpha^2\lambda_0 + \alpha^2\lambda_2 = \frac{2}{3}}$

Alors on obtient le système linéaire suivant : $\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ -\alpha\lambda_0 + \alpha\lambda_2 = 0 \\ \alpha^2\lambda_0 + \alpha^2\lambda_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow A\Lambda = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b) **(1 pt)** Pour quelles valeurs du paramètre rèel α, le système (S_α) admet une unique solution ?
(S_α) admet une unique solution ssi $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = -(-\alpha^3 - \alpha^3) = 2\alpha^3.$$

Donc $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

c) **(1 pt)** Pour $\alpha = 1$, résoudre (S_1) par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{-4}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{-4}{3} \end{array}\right) \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

alors $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \\ 2\lambda_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \frac{1}{3} \\ \lambda_1 = \frac{4}{3} \\ \lambda_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

2) **(0.5 pt)** Déduire à quelle méthode dintégration $J_1(f)$ correspond-elle ?.

$J_1 f = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) = \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(0) + f(1)\right)$, c'est la méthode simple de Simpson.

Pour la suite on prend la fonction f défine par

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

3) a) **(0.5 pt)** Justifier lexistence dun unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ qui interpole f en $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

On a $x_0 \neq x_1,\ x_1 \neq x_2,\ x_0 \neq x_2$, alors il existe un unique polynôme dinterpolation.

b) **(1 pt)** Déterminer lexpression du polynôme P_2 par une méthode dinterpolation vue en cours.

Pour déterminer le polynôme P_2 qui interpole la fonction f aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, nous pouvons utiliser la méthode d'interpolation de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{2},$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -(x^2-1),$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= \frac{x(x-1)}{2} - \frac{1}{4}(x^2-1) + \frac{1}{9}\frac{x(x+1)}{2} \\ &= \frac{11}{36}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

c) **(0.5 pt)** Calculer $I_p(P_2) = \int_{-1}^{1} P_2(x)dx$.

$$\begin{aligned} I_p(P_2) &= \int_{-1}^{1} P_2(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{11}{36}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{1}{4}dx \\ &= \left[\frac{11}{108}x^3 - \frac{4}{18}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{19}{27} = 0.703 \end{aligned}$$

4) a) **(0.5 pt)** Calculer la valeur exacte de $I(f)$.

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+2)^2} dx = \left[\frac{-1}{x+2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = 0.666$$

b) **(1 pt)** Calculer l'erreur dintégration E_J^1 commise par J_1 et l'erreur E_P commise par $I_p(P_2)$.

$E_J^1 = |I(f) - J_1(f)| = |\frac{2}{3} - \frac{19}{27}| = 0.037$

$E_P = |I(f) - I_P(P_2)| = |\frac{2}{3} - \frac{19}{27}| = 0.037$

c) **(0.5 pt)** Comparer les méthodes $J_1(f)$ et $I_p(P_2)$ en terme de précision en justifiant votre réponse.

$E_P = E_J^1$

Exercice 2 (7 points)

On se propose de résoudre numériquement l'équation : **(E) f(x)=0** dans $I = [0, \pi]$ où la fonction f est donnée par :

$$f(x) = x - \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{1}{2}, \qquad x \in I.$$

Il est à noter que la variable x est exprimée en radian.

1) **(1 pt)** Montrer que **(E)** admet une unique solution x^* dans $]0, \pi[$.

Existence : L'application $f : x \longrightarrow x - \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{1}{2}$ est continue sur $[0, \pi]$ (Somme de deux fonctions continues). D'autre part $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$ et $f(\pi) = \pi - \frac{1}{2} > 0$, doù $f(0).f(\pi) < 0$.
D'aprés le théorème des valeurs intermédiaires (E) admet admet au moins une solution x^* dans $]0, \pi[$.

Unicité : L'application $f : x \longrightarrow x - \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{1}{2}$. est dérivable sur $[0, \pi]$ et on'a : $f'(x) = 1 - \frac{1}{5}\cos(x) > 0, \ \forall x \in [0, \pi]$. Donc f est strictement croissante sur $[0, \pi]$.

Conclusion : L'équation (E) admet une unique solution $x^* \in]0, \pi[$.

2) a) **(0.5 pt)** Trouver le nombre minimal ditérations pour estimer x^* avec la tolérance $\epsilon = 10^{-3}$.

Soit $d = |\pi - 0| = \pi$ et $\epsilon = 10^{-3}$ alors n le nombre minimal pour estimer x^* à ϵ prés doit vérifier : $n \geq \log_2(\frac{d}{\epsilon})$ alors $n \geq 11,617$. Donc $n = 12$.

b) **(1.5 pts)** Calculer c_0, c_1 et c_2 les premiers itérés de la méthode de dichotomie dans lintervalle $]0, \pi[$.

1ère itération :
$]a_0, b_0[=]0, \pi[, \ c_0 = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
Or $f(a_0)f(c_0) = f(0)f(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{1}{2}) \times 0.870 < 0$, alors

$$x^* \in]a_1, b_1[=]a_0, c_0[=]0, \frac{\pi}{2}[.$$

2ème itération :
$]a_1, b_1[=]0, \frac{\pi}{2}[, \ c_1 = \frac{0+\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.
Or $f(a_1)f(c_1) = f(0)f(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{1}{2}) \times 0.143 < 0$, alors

$$x^* \in]a_2, b_2[=]a_1, c_1[=]0, \frac{\pi}{4}[.$$

3ème itération :
$]a_2, b_2[=]0, \frac{\pi}{4}[, \ c_2 = \frac{0+\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$.

3) Pour approcher x^* par la méthode du point fixe on définit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \pi], \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

avec $\quad g(x) = \dfrac{1}{5}\sin(x) + \dfrac{1}{2}.$

a) **(1.5 pts)** Montrer que cette suite converge vers l'unique solution x^*.

(H_1) : g est dérivable sur $[0, \pi]$.

(H_2) : $g'(x) = \frac{1}{5}\cos(x)$. Donc pour $x \in [0, \pi]$ on'a :

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Le tableau de variations est donnés par :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{7}{10}$	↘ $\frac{1}{2}$

Donc

$$g([0, \pi]) = [\frac{1}{2}, \frac{7}{10}] \subset [0, \pi].$$

(H_3) : $|g'(x)| = |\frac{1}{5}\cos(x)| \leq \frac{1}{5} < 1, \ \ \forall x \in [0, \pi]$.

Comme les trois hypothèses sont bien vérifiées, g converge bien vers x^* .

b) **(1 pt)** Estimer le nombre ditérations suffisant pour déterminer une valeur approchée à $\epsilon = 10^{-3}$ près de la racine x^*.

Le nombre de termes à calcuer pour obtenir une précision de 10^{-3} est donné par :

$$E\left(\frac{\log(10^{-3}) - \log(\pi)}{\log(\frac{1}{5})}\right) + 1 = 6.$$

c) **(1.5 pts)** Pour $x_0 = 0$, calculer les trois premières itérations.

$x_0 = 0,$

$x_1 = g(x_0) = g(0) = \frac{1}{2} = 0.5,$

$x_2 = g(x_1) = g(\frac{1}{2}) = 0.595,$

$x_3 = g(x_2) = g(0.595) = 0.612.$

Exercice 3 (5 points)

Un réservoir contient 1000 litres d'eau pure. A la suite d'un incident, l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à un débit de 10 litres par minute. On note $x(t)$ le taux de sel dans l'eau (exprimé en $g.L^{-1}$) à l'instant t (exprimé en minutes). On suppose que l'évolution de x est décrite par le problème de Cauchy suivant :

$$(PC) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) + 0.01\,x(t) = 0.39 \quad \forall t \in [0,\ 30] \\ x(0) = 0. \end{array} \right.$$

Dans la suite, x_n désigne l'approximation de la solution exacte $x(t)$ du problème (PC) au point de discrétisation t_n où $n \in \mathbb{N}$.

1) **(1 pt)** Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy (PC) est donnée par

$$x(t) = 39 - 39\,e^{-0.01\,t} \ \ \forall\, t\ \in [0,\ 30].$$

On a :

- x est de classe $\mathcal{C}^1([0,\ 30])$.
- $x'(t) + 0.01\,x(t) = 0.39\,e^{-0.01} + 0.39 - 0.39\,e^{-0.01} = 0.39.$
- $x(0) = 39 - 39 = 0.$

Alors x est la solution analytique du problème (PC).

2) a) **(1 pt)** Donner le schéma d'Euler implicite pour la résolution du problème (PC) avec un pas de discrétisation constant $h > 0$.

Le schéma d'Euler implicite pour la résolution de (PC) est donné par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})\,\forall n \geq 0, \\ x(0) & = & 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n + h(0.39 - 0.01x_{n+1})\,\forall n \geq 0, \\ x(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

b) **(0.5 pts)** Pour $h = 5$, montrer que la solution numérique x_n, donnée par la question précédente, satisfait la relation suivante

$$x_{n+1} = \frac{1.95 + x_n}{1.05}, \text{ pour } n = 0,\, 1, \ldots, 5.$$

Pour $h = 5$, le nombre de subdivisons est donnée par $N = \dfrac{30}{h} = 6$.

On a alors pour $n = 0,\, 1, \ldots, 5$:

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + (5 \times 0.39) - (5 \times 0.01x_{n+1}) \\ & = & x_n + 1.95 - 0.05x_{n+1}. \end{array}$$

On obtient ainsi

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1.95}{1.05} \text{ pour } n = 0,\, 1, \ldots, 5.$$

c) **(1.5 pts)** Déterminer une valeur approchée du taux de sel dans l'eau au bout de 15 minutes.

Pour $n = 0$, $t_1 = 5$ et $x_1 \simeq 1.857$.

Pour $n = 1$, $t_2 = 10$ et $x_2 = \dfrac{x_1 + 1.95}{1.05} \simeq 3.625$.

Pour $n = 2$, $t_3 = 15$ et $x_3 = \dfrac{x_2 + 1.95}{1.05} \simeq 5.309$.

La valeur approchée du taux de sel dans l'eau au bout de 15 minutes est alors égale à $5.309\ g.L^{-1}$.

3) a) **(0.5 pts)** Le taux de sel dans l'eau doit être inférieur à $3.9\ g.L^{-1}$. Trouver à quel l'instant maximal t_n, la solution x_n ne dépasse pas $3.9\ g.L^{-1}$.

L'instant maximal est $t_2 = 10$ minutes vu que la valeur approchée du taux de sel dans l'eau à l'instant $t_3 = 15$ minutes dépasse le $3.9\ g.L^{-1}$ ($x_3 = 5.309 > 3.9$).

b) **(0.5 pts)** Déduire l'erreur commise par la méthode dEuler implicite à l'instant t_n trouvé dans la question précedente.

L'erreur commise par la méthode dEuler implicite à l'instant $t_2 = 10$ est donnée par

$$E = |x(10) - x_2| = |3.711 - 3.625| = 0.086.$$