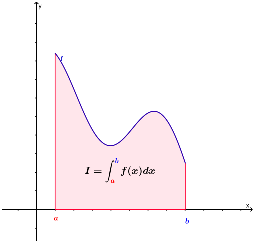
Module : Analyse numériques

Chapitre 3 : Intégration Numérique

Partie 4 : Formules composites

Méthodes composites d'intégration

Positionnement du problème

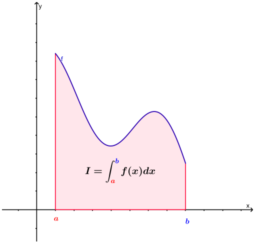


Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Objectif : Approcher la valeur de l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Méthodes composites d'intégration

Positionnement du problème

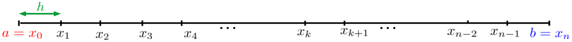


Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Objectif : Approcher la valeur de l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Les méthodes composites sont obtenues lorsqu'on décompose (subdivise) l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$, de largeur uniforme

$$h = \frac{b-a}{n} = x_{k+1} - x_k,$$

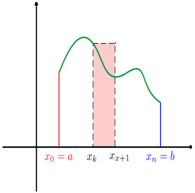


- $x_k = a + kh$, pour tout $0 \leq k \leq n$: nœuds d'intégration.
- h : pas de subdivision.
- n le nombre de sous-intervalles.
- $n+1$: nombre de points d'intégration.
- $[a, b] = \cup_{k=0}^{n} [x_k, x_{k+1}]$.

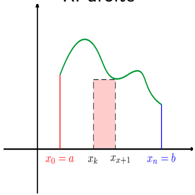
$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx, \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

Sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq n-1)$, on calcule une approximation de l'intégrale exacte $I(f)$ par les méthodes simples précédentes.

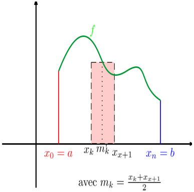
R. gauche



R. droite



R. milieu

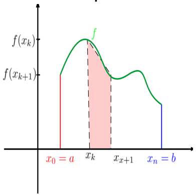


$$I^s_{Rg}(f) = (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$$

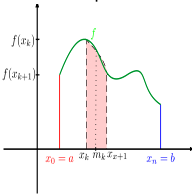
$$I^s_{Rd}(f) = (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1})$$

$$I^s_{Rm}(f) = (x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

Trapèze



Simpson



$$I^s_T(f) = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} \left(f(x_k) + f(x_{k+1})\right)$$

$$I^s_S(f) = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{6} \left(f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right)$$

Méthodes composites du rectangle

Rectangle à gauche

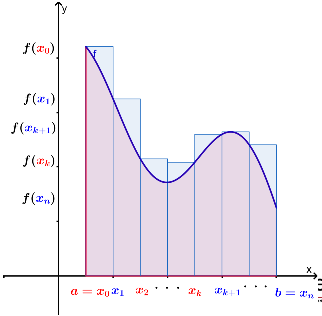
La méthode composite du rectangle à gauche consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par la somme de l'aire de tous les rectangles dont les côtés sont $(x_{k+1} - x_k)$ et $f(x_k)$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule composite du rectangle à gauche est :

$$I^c_{Rg}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh),$$

avec $x_k = a + kh$, $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$.

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \backsimeq I^c_{Rg}(f)$$



Méthodes composites du rectangle

Rectangle à gauche

La méthode composite du rectangle à gauche consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par la somme de l'aire de tous les rectangles dont les côtés sont $(x_{k+1} - x_k)$ et $f(x_k)$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule composite du rectangle à gauche est :

$$I^c_{Rg}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh),$$

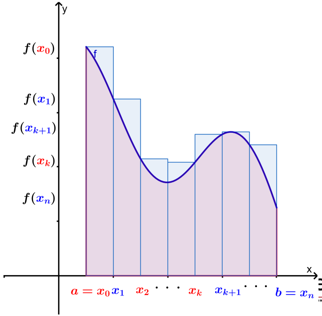
avec $x_k = a + kh$, $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$.

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \backsimeq I^c_{Rg}(f)$$

Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors l'erreur du rectangle à gauche est majorée par

$$E^c_{Rg}(f) = \left| I(f) - I^c_{Rg}(f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$



Méthodes composites du rectangle à gauche

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du rectangle à gauche en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

Méthodes composites du rectangle à gauche

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du rectangle à gauche en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1.

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) = 0.693$$

Méthodes composites du rectangle à gauche

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

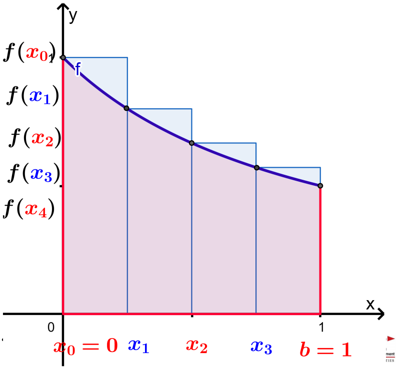
1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du rectangle à gauche en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1.
$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) = 0.693$$

2. Ici $a = 0$, $b = 1$, $n = 4$ et $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\begin{aligned} I_{Rg}^{c} &= 0.25 \sum_{k=0}^{4-1} f(x_k) \\ &= 0.25(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) \\ &= 0.25(f(0) + f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)) = 0.759 \end{aligned}$$



Méthodes composites du rectangle à gauche

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

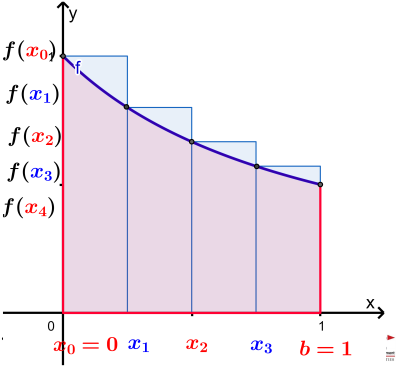
1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du rectangle à gauche en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1.
$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) = 0.693$$

2. Ici $a = 0$, $b = 1$, $n = 4$ et $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\begin{aligned} I_{Rg}^c &= 0.25 \sum_{k=0}^{4-1} f(x_k) \\ &= 0.25(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) \\ &= 0.25(f(0) + f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)) = 0.759 \end{aligned}$$



3. $E_{Rg}^s(f) = \left| I(f) - I_{Rg}^c \right| = |\ln(2) - 0.759| \simeq 0.065$

Méthodes composites du rectangle

Rectangle à droite

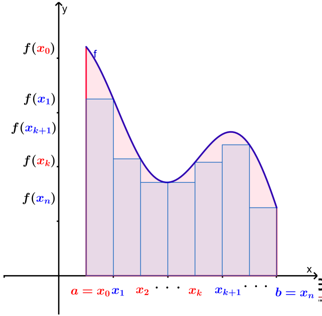
La méthode composite du rectangle à droite consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par la somme de l'aire de tous les rectangles dont les côtés sont $(x_{k+1} - x_k)$ et $f(x_{k+1})$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule composite du rectangle à droite est :

$$I_{Rd}^{c}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1)h),$$

avec $x_{k+1} = a + (k+1)h$.

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \backsimeq I_{Rd}^{c}(f)$$



Méthodes composites du rectangle

Rectangle à droite

La méthode composite du rectangle à droite consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par la somme de l'aire de tous les rectangles dont les côtés sont $(x_{k+1} - x_k)$ et $f(x_{k+1})$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule composite du rectangle à droite est :

$$I^c_{Rd}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1)h),$$

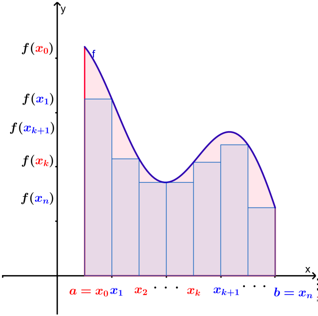
avec $x_{k+1} = a + (k+1)h$.

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \backsimeq I^c_{Rd}(f)$$

Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors l'erreur du rectangle à droite est majorée par

$$E^c_{Rd}(f) = \left|I(f) - I^c_{Rd}(f)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|$$



Méthodes composites du rectangle à droite

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du rectangle à droite en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
2. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

Méthodes composites du rectangle à droite

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

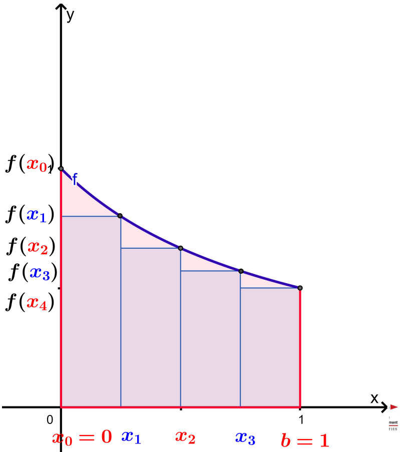
$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du rectangle à droite en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
2. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1. Ici $a = 0$, $b = 1$, $n = 4$ et $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\begin{aligned} I_{Rd}^{c} &= 0.25 \sum_{k=0}^{4-1} f(x_{k+1}) \\ &= 0.25(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) \\ &= 0.25(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75) + f(1)) = 0.634 \end{aligned}$$



Méthodes composites du rectangle à droite

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du rectangle à droite en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
2. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

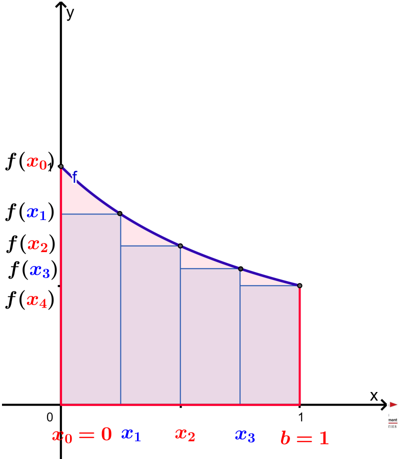
Solution :

1. Ici $a = 0$, $b = 1$, $n = 4$ et $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\begin{aligned} I_{Rd}^c &= 0.25 \sum_{k=0}^{4-1} f(x_{k+1}) \\ &= 0.25(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) \\ &= 0.25(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75) + f(1)) = 0.634 \end{aligned}$$

2.

$$E_{Rd}^c(f) = |I(f) - I_{Rd}^c(f)| = |\ln(2) - 0.634| \simeq 0.059$$



Méthodes composites du rectangle

Rectangle au milieu

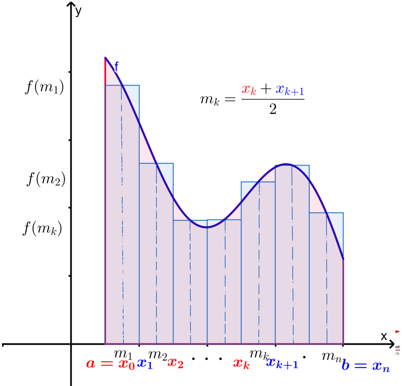
La méthode composite du rectangle du milieu consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par la somme de l'aire de tous les rectangle dont les cotés sont $(x_{k+1} - x_k)$ et $f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2})$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule composite du rectangle au milieu est :

$$I_{Rm}^c(f) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k + \tfrac{1}{2})h),$$

avec $m_k = (x_k + x_{k+1})/2 = a + (k + \frac{1}{2})h$.

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \simeq I_{Rm}^c(f)$$



Méthodes composites du rectangle

Rectangle au milieu

La méthode composite du rectangle du milieu consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par la somme de l'aire de tous les rectangle dont les cotés sont $(x_{k+1} - x_k)$ et $f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2})$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule composite du rectangle au milieu est :

$$I^c_{Rm}(f) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k + \tfrac{1}{2})h),$$

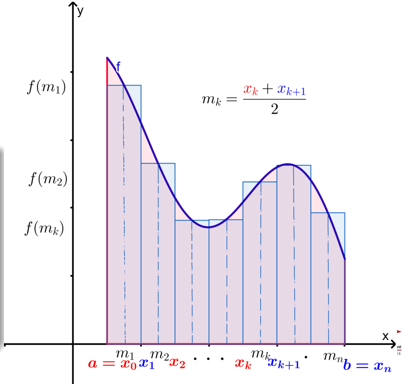
avec $m_k = (x_k + x_{k+1})/2 = a + (k + \frac{1}{2})h$.

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \backsimeq I^c_{Rm}(f)$$

Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, alors l'erreur du rectangle au milieu est majorée par

$$E^c_{Rm}(f) = |I(f) - I^c_{Rm}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$



Méthode composite du trapèze

La méthode composite de trapèze consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par la somme de l'aire de tous les trapèzes dont les bases sont $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$ et la hauteur est $(x_{k+1} - x_k)$

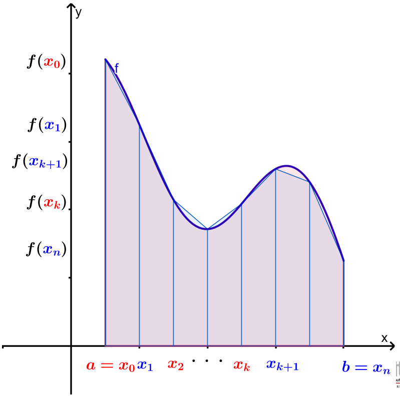
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule composite de trapèze est :

$$I_T^c(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{2} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

$$= \frac{h}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) \right),$$

avec $x_k = a + kh$.

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \backsimeq I_T^c(f)$$



Méthode composite du trapèze

La méthode composite de trapèze consiste à approximer l'intégrale $I(f)$ par la somme de l'aire de tous les trapèzes dont les bases sont $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$ et la hauteur est $(x_{k+1} - x_k)$

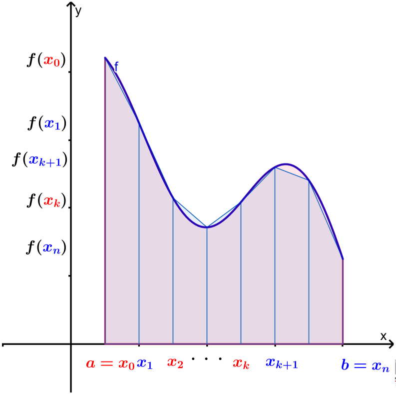
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule composite de trapèze est :

$$I_T^c(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{2} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) \right),$$

avec $x_k = a + kh$.

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \backsimeq I_T^c(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, alors l'erreur de trapèze est majorée par

$$E_T^c(f) = |I(f) - I_T^c(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Méthode composite du trapèze

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du trapèze en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

Méthode composite du trapèze

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du trapèze en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1.

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) = 0.693$$

Méthode composite du trapèze

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$$

1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du trapèze en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

1.

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) = 0.693$$

2. Ici $a = 0$, $b = 1$, $n = 4$ et $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\begin{aligned} I_T^c &= \frac{0.25}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{4-1} f(x_k) + f(x_4)\right) \\ &= \frac{0.25}{2}\left(f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + f(x_4)\right) \\ &= \frac{0.25}{2}\left(f(0) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)) + f(1)\right) = 0.697 \end{aligned}$$

Méthode composite du trapèze

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite du trapèze en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

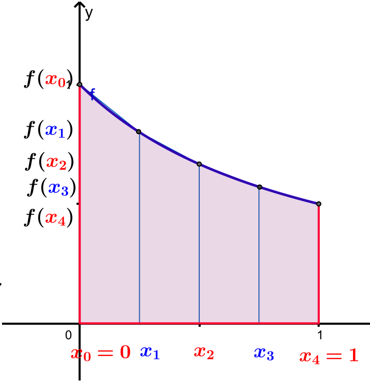
Solution :

1.

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) = 0.693$$

2. Ici $a = 0$, $b = 1$, $n = 4$ et $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\begin{aligned} I_T^c &= \frac{0.25}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{4-1} f(x_k) + f(x_4)\right) \\ &= \frac{0.25}{2}\left(f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + f(x_4)\right) \\ &= \frac{0.25}{2}\left(f(0) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)) + f(1)\right) = 0.697 \end{aligned}$$



3. $E_T^C(f) = |I(f) - I_T^c| = |\ln(2) - 0.697| \simeq 0.003$

Méthode composite de Simpson

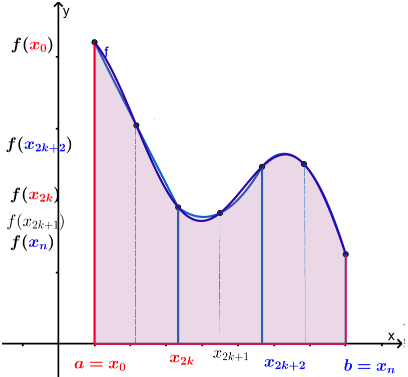
On décompose l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles avec $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$, En introduisant les nœuds $x_k = a + kh$ pour $k = 0, 1, \cdots, n = 2p$ (i.e. on applique la méthode de Simpson simple sur des intervalles $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ de largeur $2h$ et le point milieu est x_{2x+1}.

La fonction f est tabulée, et les x_k sont équidistants

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule composite de Simpson est :

$$\begin{aligned} I_S^c(f) &= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{p-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{p-1} f(x_{2k+1})\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{p-1} f(a + 2kh) + 4\sum_{k=0}^{p-1} f(a + (2k+1)h)\right) \end{aligned}$$

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \backsimeq I_S^c(f)$$



Méthode composite de Simpson

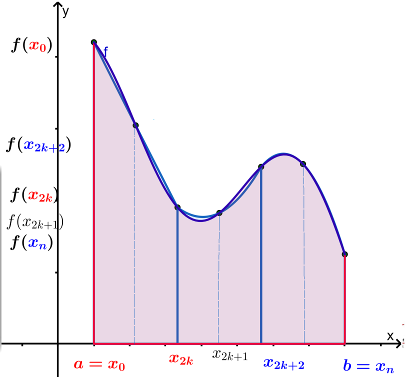
On décompose l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles avec $n = 2p, \ p \in \mathbb{N}^*$, En introduisant les nœuds $x_k = a + kh$ pour $k = 0, 1, \cdots, n = 2p$ (i.e. on applique la méthode de Simpson simple sur des intervalles $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ de largeur $2h$ et le point milieu est x_{2x+1}.

La fonction f est tabulée, et les x_k sont équidistants

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la formule composite de Simpson est :

$$\begin{aligned} I_S^c(f) &= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{p-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{p-1} f(x_{2k+1})\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{p-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{p-1} f(a+(2k+1)h)\right) \end{aligned}$$

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \backsimeq I_S^c(f)$$



Proposition

Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, alors l'erreur de Simpson est majorée par

$$E_S^C(f) = |I(f) - I_S^c(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Méthode composite de Simpson

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite de Simpson en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

Méthode composite de Simpson

Exercice

Soit l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

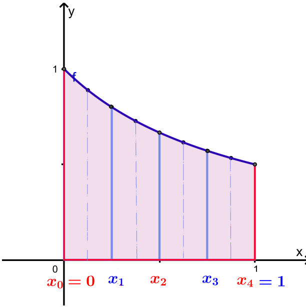
1. Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
2. Approcher la valeur de $I(f)$ par la méthode composite de Simpson en décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties.
3. Quelle est l'erreur d'intégration pour cette méthode.

Solution :

2. Ici $a = 0$, $b = 1$, $n = 2p$, $p = 2$, et $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$I_S^c = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{2-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{2-1} f(a+(2k+1)h) \right)$$
$$= 0.693$$

3. $E_S^c(f) = |I(f) - I_S^c| = |\ln(2) - 0.693| \simeq 0.0001$



Exercice

Travail en asynchrone

Soit la fonction $I(f) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

1. En décomposant l'intervalle d'intégration en 4 parties, approcher la valeur de $I(f)$ par les méthodes composites du
   - a) rectangle du milieu.
   - b) trapèze.
   - c) Simpson.
2. En utilisant les inégalités de l'estimation de l'erreur d'intégration, quel est le nombre de sous-intervalles n à considérer garantissant une erreur inférieure à 10^{-5} pour chacune de ces méthodes ?