# Module : Analyse numériques

# Chapitre 3 : Intégration Numérique

## Exercice 1

esprit
Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

# Énoncé

On s'intéresse dans cet exercice à approcher l'intégrale

$$I = \int_1^2 cos(x^2)dx$$

1. Donner une approximation de $I$ en appliquant la méthode du rectangle à gauche en considérant 8 intervalles
2. Majorer l'erreur commise. On rappelle que l'erreur d'intégration $E^c_{Rg}(f)$ relative à la méthode composite des rectangles à gauche, pour le calcul approché de l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$, où $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur$[a; b] \subset R$, est majorée par :

$$|E^c_{Rg}(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

3. Quel pas de discrétisation maximal $h^*$ faut-il choisir pour avoir une erreur d'intégration de $I(f)$, par la méthode composite des rectangles à gauche composites, inférieure à $10^{-4}$ ?

# Correction

La formule composite des rectangles à gauche est

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) \qquad \text{où } h = \frac{b-a}{n}$$

# Correction

La formule composite des rectangles à gauche est

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) \qquad \text{où } h = \frac{b-a}{n}$$

1) Pour $a = 1, b = 2$ et $n = 8$ on a $h = \frac{1}{8}$. On obtient donc:

$$\int_1^2 f(x)dx \simeq \frac{1}{8}\Big(f(1) + f(1+\frac{1}{8}) + f(1+\frac{2}{8}) + f(1+\frac{3}{8}) + f(1+\frac{4}{8}) + f(1+\frac{5}{8}) + f(1+\frac{6}{8}) + f(1+\frac{7}{8})\Big)$$

# Correction

La formule composite des rectangles à gauche est

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) \qquad \text{où } h = \frac{b-a}{n}$$

1) Pour $a = 1, b = 2$ et $n = 8$ on a $h = \frac{1}{8}$. On obtient donc:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)dx &\simeq \frac{1}{8}\Big(f(1) + f(1+\frac{1}{8}) + f(1+\frac{2}{8}) + f(1+\frac{3}{8}) + f(1+\frac{4}{8}) \\
&\quad + f(1+\frac{5}{8}) + f(1+\frac{6}{8}) + f(1+\frac{7}{8})\Big) \\
&\simeq \frac{1}{8}\Big(\cos(1) + \cos((\frac{9}{8})^2) + \cos((\frac{5}{4})^2) + \cos((\frac{11}{8})^2) \\
&\quad + \cos((\frac{3}{2})^2) + \cos((\frac{13}{8})^2) + \cos((\frac{7}{4})^2) + \cos((\frac{15}{8})^2)\Big)
\end{aligned}$$

# Correction

La formule composite des rectangles à gauche est

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) \qquad \text{où } h = \frac{b-a}{n}$$

1) Pour $a = 1, b = 2$ et $n = 8$ on a $h = \frac{1}{8}$. On obtient donc:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)dx &\simeq \frac{1}{8}\Big(f(1) + f(1+\frac{1}{8}) + f(1+\frac{2}{8}) + f(1+\frac{3}{8}) + f(1+\frac{4}{8}) \\
&\quad + f(1+\frac{5}{8}) + f(1+\frac{6}{8}) + f(1+\frac{7}{8})\Big) \\
&\simeq \frac{1}{8}\Big(\cos(1) + \cos((\frac{9}{8})^2) + \cos((\frac{5}{4})^2) + \cos((\frac{11}{8})^2) \\
&\quad + \cos((\frac{3}{2})^2) + \cos((\frac{13}{8})^2) + \cos((\frac{7}{4})^2) + \cos((\frac{15}{8})^2)\Big) \\
&\simeq -0.3622
\end{aligned}$$

# Correction (suite)

2. On a $f(x) = \cos(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1, 2]$ donc $f'(x) = -2x\sin(x^2)$.

$$|f'(x)| \leq 2x \leq 4 \qquad \forall x \in [1, 2]$$

# Correction (suite)

2. On a $f(x) = \cos(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1,2]$ donc $f'(x) = -2x\sin(x^2)$.

$$|f'(x)| \leq 2x \leq 4 \qquad \forall x \in [1,2]$$

L'erreur commise est majorée par

$$\begin{aligned} |E^c_{Rg}| &\leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{x\in]1,2[} |f'(x)| = \frac{1}{2\times 8} \max_{x\in]1,2[} |f'(x)| \\ &\leq \frac{1}{2\times 8} 4 = 0.25 \end{aligned}$$

# Correction (suite)

3. On a $a = 1$, $b = 2$, l'erreur est donnée par :

$$E^c_{Rg} \leq \frac{1}{2n} \max_{x \in ]1,2[} |f'(x)|$$

Comme $|f'(x)| \leq 2x \leq 4$, $\forall x \in [1, 2]$. Donc

$$E^c_{Rg} \leq \frac{2}{n}$$

On retrouve $n$ puis on déduire la valeur de $h^*$. D'après l'enoncé $E^c_{Rg} \leq 10^{-4}$, la question sera trouver $n$ tel que

$$\frac{2}{n} \leq 10^{-4}$$

ou encore $n \geq 2 \cdot 10^4$. Finalement,

$$h^* = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} = \frac{10^{-4}}{2}$$