Résolution numérique de systèmes d'équations linéaires

Normes vectorielles et matricielles

Normes

Pour quantifier les erreurs et analyser la convergence des méthodes d'approximation utilisées dans la résolution des systèmes linéaires, il est nécessaire de se munir des outils adéquats pour mesurer la grandeur des matrices et des vecteurs. Il s'agit, en somme, de choisir l'outil qui prendra le rôle que tient la valeur absolue dans l'analyse des fonctions d'une variable. Cet outil prend le nom de norme. On l'appliquera en particulier à la construction de ce que l'on appelle des méthodes itératives de résolution d'un système linéaire.

Rappels sur les normes vectorielles

On travaille avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition d'une norme vectorielle

Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, satisfaisant les propriétés suivantes:

1. **(Définie positivité):** pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = 0_{\mathbb{R}}$ implique $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. **(Homogénéité):** pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$.
3. **(Inégalité triangulaire):** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Rappels sur les normes vectorielles

On travaille avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition d'une norme vectorielle

Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, satisfaisant les propriétés suivantes:

1. **(Définie positivité):** pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = 0_{\mathbb{R}}$ implique $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. **(Homogénéité):** pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$.
3. **(Inégalité triangulaire):** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Les normes vectorielles usuelles que l'on utilisera le plus souvent sont:

1. **La norme 1:** $||x||_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.

Rappels sur les normes vectorielles

On travaille avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition d'une norme vectorielle

Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, satisfaisant les propriétés suivantes:

1. **(Définie positivité):** pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = 0_{\mathbb{R}}$ implique $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. **(Homogénéité):** pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$.
3. **(Inégalité triangulaire):** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Les normes vectorielles usuelles que l'on utilisera le plus souvent sont:

1. **La norme 1:** $||x||_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.
2. **La norme euclidienne:** $||x||_2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.

Rappels sur les normes vectorielles

On travaille avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition d'une norme vectorielle

Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, satisfaisant les propriétés suivantes:

1. **(Définie positivité):** pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = 0_{\mathbb{R}}$ implique $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. **(Homogénéité):** pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$.
3. **(Inégalité triangulaire):** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Les normes vectorielles usuelles que l'on utilisera le plus souvent sont:

1. **La norme 1:** $||x||_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.
2. **La norme euclidienne:** $||x||_2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.
3. **La norme infinie (appelée également norme du sup):**
$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\right\}, \qquad \forall x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice

Exercice:

Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on pose l'application

$$\begin{array}{rccl} ||\ ||: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 + x_2| + |x_1| \end{array}$$

Montrer que $||x||$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice

Exercice:

Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on pose l'application

$$\begin{array}{llll} || \; || : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 + x_2| + |x_1| \end{array}$$

Montrer que $||x||$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Solution:

- **Définie positivité:** Pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $||x|| \geq 0$, et

$$||x|| = 0 \Leftrightarrow |x_1 + x_2| = |x_1| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Exercice

- **Homogénéité:** Pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ||\lambda x|| = ||(\lambda x_1, \lambda x_2)|| &= |\lambda x_1 + \lambda x_2| + |\lambda x_1| \\ &= |\lambda|\big(|x_1 + x_2| + |x_1|\big) \\ &= |\lambda| \, ||x|| \end{aligned}$$

Exercice

- **Homogénéité:** Pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ||\lambda x|| = ||(\lambda x_1, \lambda x_2)|| &= |\lambda x_1 + \lambda x_2| + |\lambda x_1| \\ &= |\lambda|\big(|x_1 + x_2| + |x_1|\big) \\ &= |\lambda|\,||x|| \end{aligned}$$

- **Inégalité triangulaire:** Pour tous $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} ||x + y|| = ||(x_1 + y_1, x_2 + y_2)|| &= |x_1 + y_1 + x_2 + y_2| + |x_1 + y_1| \\ &\leq |x_1 + x_2| + |x_1| + |y_1 + y_2| + |y_1| \\ &= ||x|| + ||y||. \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

Normes matricielles subordonnées

Dans la suite, on note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Définition d'une norme matricielle

On appelle norme matricielle sur $\mathbb{R}^n$ toute application $||.||$ définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $||A|| = 0$ implique $A = O_n$, où O_n est la matrice nulle d'ordre n.
2. $||\lambda A|| = |\lambda| \, ||A||$.
3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.
4. $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$.

Normes matricielles subordonnées

Définition d'une norme matricielle subordonnées

Toute norme vectorielle de $\mathbb{R}^n$ définit une norme matricielle de la façon suivante:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad ||A|| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||Ax||,$$

est **dite norme matricielle subordonnée (ou induite à une norme vectorielle).**
On notera $||.||_p$ la norme matricielle subordonnée associée à la norme vectorielle d'indice p, avec $p = 1, 2, \infty$.

Normes matricielles subordonnées

Exemple:

Calculer la norme matricielle induite à la norme vectorielle $||.||_\infty$ pour la matrice diagonale suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Normes matricielles subordonnées

Exemple:

Calculer la norme matricielle induite à la norme vectorielle $||.||_\infty$ pour la matrice diagonale suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution:

On a pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, avec $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$,

$$||A||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^3, x\neq 0_{\mathbb{R}^3}} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{\max\left\{|-x_1|, |x_2|, |-x_3|\right\}}{\max\left\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\right\}}$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{\max\left\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\right\}}{\max\left\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\right\}} = 1$$

Normes matricielles subordonnées

Afin de présenter les normes matricielles subordonnées respectivement aux normes vectorielles $||.||_1$, $||.||_\infty$ et $||.||_2$ de $\mathbb{R}^n$, on introduit les définitions suivantes:

Normes matricielles subordonnées

Afin de présenter les normes matricielles subordonnées respectivement aux normes vectorielles $||.||_1$, $||.||_\infty$ et $||.||_2$ de $\mathbb{R}^n$, on introduit les définitions suivantes:

Définition: Valeur propre d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée d'ordre n, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ une valeur propre de A, s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, telle que $Av = \lambda v$.

Normes matricielles subordonnées

Afin de présenter les normes matricielles subordonnées respectivement aux normes vectorielles $||.||_1$, $||.||_\infty$ et $||.||_2$ de $\mathbb{R}^n$, on introduit les définitions suivantes:

Définition: Valeur propre d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée d'ordre n, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ une valeur propre de A, s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, telle que $Av = \lambda v$.

Proposition

λ est la solution de l'équation $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Normes matricielles subordonnées

Définition: rayon spectral

Le rayon spectral noté $\rho(A)$ d'une matrice carrée est le maximum des valeurs absolues des valeurs propres de A, définie par:

$$\rho(A) = \max\left\{|\lambda|, \textbf{tel que } \lambda \in \mathbb{R} \textbf{ valeur propre de A } \right\}.$$

Exemple:

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, On a

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5).$$

Comme $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ n'admet pas de solutions réelles, Alors $\rho(A) = \max\left\{|-1|\right\} = 1.$

Normes matricielles subordonnées

Propriétés

Les normes matricielles subordonnées respectivement aux normes vectorielles $||.||_1$, $||.||_\infty$ et $||.||_2$ de $\mathbb{R}^n$ sont données par: $\forall A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

1. $||A||_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max\limits_{1\leq j\leq n} \{|a_{1j}| + |a_{2j}| + \cdots + |a_{nj}|\}$.
   (C'est la valeur maximale des sommes sur les colonnes de A en valeurs absolues).
2. $||A||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \{|a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{in}|\}$.
   (C'est la valeur maximale des sommes sur les lignes de A en valeurs absolues).
3. $||A||_2 = \sqrt{\rho(AA^t)} = \sqrt{\rho(A^tA)} = ||A^t||_2$,
   où $A^t = (a_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice transposée de A.

Exercice

Calculer $||A||_1$, $||A||_\infty$ **et** $||A||_2$ **pour** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Correction

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

1. $||A||_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq 3} \sum\limits_{i=1}^{3} |a_{ij}| = \max\limits_{1 \leq j \leq 3} \{2, 5, 1\} = 5$
2. $||A||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq 3} \sum\limits_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\limits_{1 \leq i \leq 3} \{3, 4, 1\} = 4$
3. $||A||_2 = \sqrt{\rho(AA^t)} = ?$

Correction

On a

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\det(AA^t - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 & 0 \\ 5 & 10-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 25).$

Alors $\det(AA^t - \lambda I_3) = (1-\lambda)(\lambda - \frac{15-5\sqrt{5}}{2})(\lambda - \frac{15+5\sqrt{5}}{2})$

Par suite, $\rho(AA^t) = \max\{|1|, |\frac{15-5\sqrt{5}}{2}|, |\frac{15+5\sqrt{5}}{2}|\} = \frac{15+5\sqrt{5}}{2}.$

Conclusion: $||A||_2 = \sqrt{\rho(AA^t)} = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{2}}.$