Se former autrement

Méthodes numériques pour l'ingénieur

Examens corrigés

Préparé par

Equipe Méthodes numériques pour l'ingénieur

A. U : 2018/2019-2019/2020

TABLE DES MATIÈRES

esprit — Se former autrement	**EXAMEN** Semestre : 1 ☐ 2 ■ Session : Principale ■ Rattrapage ☐

Module : Méthodes Numériques pour l'Ingénieur
Enseignant(s) : UP-Maths
Classes : 3A14->3A25 & 3B1->3B6
Documents autorisés : OUI ☐ NON ■ Nombre de pages : 2
Calculatrice autorisée : OUI ■ NON ☐ Internet autorisé : OUI ☐ NON ■
Date : 18/05/2019 Heure : 10h30 Durée : 1h30

Exercice 1: .... 5 points

On considère le systéme d'équations linéaire (S_α) : $AX = b$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) (1 point) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles A est inversible.

(b) (1 point) Déterminer une condition suffisante sur α assurant la convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système (S_α).

(c) (3 points) Pour $\alpha = 2$,

1. Résoudre (S_2) par la méthode du pivot de Gauss.
2. Donner le schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel.
3. Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donner les résultats des deux premières itérations de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de (S_2) .

Exercice 2: .... 5 points

Partie I : Interpolation polynomiale

(a) (0.5 points) Justifier l'existence d'un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ interpolant les points $(-2, 16)$, $(0, -4)$ et $(2, 8)$.

(b) (1.5 points) Déterminer l'expression du polynôme P_2 par une méthode (vue en cours) de votre choix.

Partie II : Approximation au sens des moindres carrées

Dans l'objectif d'étudier le chemin de freinage d'un véhicule, correspondant à la distance parcourue en mêtres (m) du début du freinage jusqu'à l'arrêt total du véhicule, en fonction de la vitesse en Kilomêtres par heure (Km/h) de ce dernier, 12 expériences indépendantes ont été réalisées. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous. On note par $X = (x_i)_{1\le i\le 12}$ et $Y = (y_i)_{1\le i\le 12}$, où x_i, et y_i, désignent, respectivement, la vitesse du véhicule et le chemin de freinage associés à l'éxpérience i.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
y_i	9	11	20	27	39	45	58	78	79	93	108	124

(a) (2 points) Déterminer les cœfficients $\Lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de la droite $f(t;\Lambda) = a + bt$, qui ajuste au mieux les points $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq 12}$ au sens des moindres carrées.

On donne les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 1140, \quad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 122600, \quad \sum_{i=1}^{12} y_i = 691, \quad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 80840$$

(b) (1 point) Rouler à une vitesse de 105 Km/h, le conducteur de ce véhicule pourrait-il éviter un obstacle survenant à une distance de 60 m? Justifier votre réponse.

Exercice 3: .... 5 points

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E): $f(x) = 0$ dans $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, où la fonction f est donnée par:

$$f(x) = cos(x) - xe^x, x \in I.$$

(a) (1 point) Montrer que l'équation (E) a une est une seule racine $x^* \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Application de la métohde de dichotomie :

(b) (0.5 points) En utilisant la méthode de dichotomie sur I, estimer le nombre minimal d'itérations pour calculer x^* avec une précision de $\epsilon = 2^{-4}$.

Application de la méthode de Newton :

(c) (0.5 points) Écrire le schéma itératif de la méthode de Newton associé à (E).

(d) (1 point) Étudier la convergence de la méthode.

(e) (0.5 points) Choisir une condition initiale x_0 assurant la convergence de la méthode.

(f) (1.5 points) Déterminer x^* avec une précision de $\epsilon = 2^{-4}$.

Exercice 4: .... 5 points

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = \dfrac{-1}{1+t^2}x(t), \quad t \geq 0 \\ \hfill x(0) = 5. \end{cases}$$

(a) (1 point) Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy (PC) est donnée par : $x(t) = 5e^{-arctan(t)}$, $\forall t \geq 0$.

(b) (1 point) Donner le schéma d'Euler implicite (régressif) avec un pas de temps h constant.

(c) (1 point) En déduire que pour $h = \dfrac{1}{2}$, la solution numérique x_{n+1} (approchant la solution exacte x au point de discrétisation t_{n+1}, $n \geq 0$) du problème de Cauchy (PC) trouvée par la méthode d'Euler implicite vérifie la relation suivante :

$$x_{n+1} = \frac{4+(n+1)^2}{6+(n+1)^2}x_n, \quad \forall n \geq 0,$$

(d) (1.5 points) Appliquer le schéma itératif de la question (c) pour résoudre numériquement (PC) sur l'intervalle $[0, 2]$.

(e) (0.5 points) Calculer l'erreur commise par la méthode d'Euler implicite au point $t = 2$.

Bon travail.

Corrigé de l'examen MNI

Exercice 1 *Le système est défini par* $S_\alpha : AX = b, \alpha \in \mathbb{R}$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) *A est inversible ssi* $det(A) \neq 0$.

Or $det(A) = \alpha^2(\alpha+2)$ *alors A est inversible ssi* $\alpha^2(\alpha+2) \neq 0$ *c'est à dire* $\alpha \neq 0$ *ou* $\alpha \neq -2$.

Conclusion :

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$, *la matrice A est inversible.*

(b) *La conergence de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de* S_α *est assuré par la matrice A qui doit être* ***à diagonale strictement dominante*** *c'est à dire :*

$$\forall i \in 1,2,3 \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{3} |a_{ij}|$$

Or dans notre cas pour avoir A une matrice à diagonale strictement dominante ilfaut que

$$|\alpha+1| > 1, \quad |\alpha| > 0$$

Alors $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

(c) *Pour* $\alpha = 2$.

— *Le système* S_2 *est défini par :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss :

$$A \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3} L_1$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

D'où le système S_2est défini par $A^{(1)}X = b^{(1)}$ où $A^{(1)}$ est une matrice triangulaire supérieure.
De ce système on peut déduire les valeurs de x_3, x_2 et x_1.

$$x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 1$$

— *La méthode de Gauss-Seidel est définie par :* $\begin{cases} X_0 \quad donndans \quad \mathbb{R}^3, \\ X_{k+1} = X_k - P^{-1}AX_k + P^{-1}b. \end{cases}$

avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

— Le calcul de P^{-1} :
Ona $PX = Y$ c'est à dire

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

alors

$$x = \frac{1}{3}x_1, \quad y = \frac{1}{2}y_1, \quad z = \frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{3}z_1$$

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Le calcul de $P^{-1}A$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

Le calcul de $P^{-1}b$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

$$Pour\ X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ on\ a$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \cdots = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ***Partie (1) :***

(a) *Les abscisses des points* $(-2,16),(0-4)$ *et* (2.8) *sont deux à deux distincts donc il existe un unique polynôme* $P_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ *passant par ces points.*

(b) — ***Méthode de Lagrange :***

On considère les polynôme $(L_i)_{0\leq i\leq 2}$ *de Lagrange associés aux points* $(-2,16),(0-4)$ *et* (2.8).

$$L_0(x) = \frac{x(x-2)}{8}, \quad L_1(x) = \frac{x^2-4}{-4}, \quad L_3(x) = \frac{x(x+2)}{8}.$$

$\Rightarrow P_2(x) = 16L_0(x) + (-4)L_1(x) + 8L_2(x) = 4x^2 - 2x - 4.$

— ***Méthode de Newton :***

$P_2(x) = \alpha_0 w_0(x) + \alpha_1 w_1(x) + \alpha_2 w_2(x)$ *avec* $\begin{cases} w_0(x) = 1, \\ w_1(x) = x+2, \\ w_3(x) = x(x+2). \end{cases}$

alors $P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x+2) + \alpha_2 x(x+2)$.

Détermination des coefficients α_0, α_1 *et* α_2 *par la méthode des différences divisées :*

$$\begin{array}{llll} x_0 = -2 & y_0 = 16 = \alpha_0 & & \\ x_1 = 0 & y_1 = -4 & \alpha_1 = f[x_0,x_1] = -10 & \\ x_2 = 2 & y_2 = 8 & f[x_1,x_2] = 6 & \alpha_2 = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = 4 \end{array}$$

Alors $\alpha_0 = 16, \alpha_1 = -10, \alpha_2 = 4$ *et le polynôme*

$$P_2(x) = 16 - 10(x+2) + 4x(x+2) = 4x^2 - 2x - 4$$

Partie (2) : *Le vecteur* $\Lambda^* = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}$ *de* $f(t,\Lambda^*) = a^* + b^*t$ *qui ajuste au mieux les points* $(x_i,y_i)_{1\leq i\leq 12}$ *au sens des moindres carrées est celui qui minimise la fonction*

$$F(\lambda, X) = \sum_{i=1}^{12} (f(x_i,\lambda) - y_i)^2$$

Il est donné par la relation suivante $\lambda^* = (t_A A)^{-1} t_A Y$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \\ 1 & x_6 \\ 1 & x_7 \\ 1 & x_8 \\ 1 & x_9 \\ 1 & x_{10} \\ 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \end{pmatrix}$

Ona $t_A A = \begin{pmatrix} 12 & \sum_{i=1}^{12} x_i \\ \sum_{i=1}^{12} x_i & \sum_{i=1}^{12} x_i^2 \end{pmatrix}$ *alors* $t_A A = \begin{pmatrix} 12 & 1140 \\ 1140 & 122600 \end{pmatrix}$.

Cherchons $(t_A A)^{-1}$:

On sait que $(t_A A)^{-1} = \frac{1}{det(t_A A)} t_{com(t_A A)}$, *avec* $det(t_A A) = 12 \times 122600 - 1140 = 171600$

et $com(t_A A) = \begin{pmatrix} 122600 & -1140 \\ -1140 & 12 \end{pmatrix}$ *alors*

$$(t_A A)^{-1} = \frac{1}{171600} \begin{pmatrix} 122600 & -1140 \\ -1140 & 12 \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$t_A Y = \begin{pmatrix} 691 \\ 80840 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\lambda^* = (t_A A)^{-1} t_A Y = \frac{1}{171600} \begin{pmatrix} 122600 & -1140 \\ -1140 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 691 \\ 80840 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43.36 \\ 1.06 \end{pmatrix}$.

Conclusion :

$$f(t, \lambda^*) = -43.36 + 1.06t$$

(c) *Une vaeur estimée du chemin de freinage du véhicule à une vitesse de* $105 km/h$ *est donné par* $f(105, \lambda^*) = -43.36 + 1.06 \times 105 \simeq 68.21$.

La réponse est donc NON.

Exercice 3 **(a)** ***Existence :*** *L'application* $x \mapsto cos(x) - xe^x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *(combinaison de 3 fonctions continues* $x, cos(x)$ *et* e^x*).*

D'autre part on a $f(0) = 1$ *et* $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ *c'est à dire* $f(0).f(\frac{\pi}{2}) < 0$ *alors il existe* $x^* \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *tel que* $f(x^*) = 0$.

Unicité : *L'application* $x \mapsto cos(x) - xe^x$ *est dérivabe sur sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *et on a* $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = -sin(x) - e^x(x+1)$.

Comme $x \in [0, \frac{\pi}{2}], 0 \leq sin(x) \leq 1$ *donc* $f'(x) < 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *et on a* f *est décroissante sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Conclusion : $\exists! \quad x^* \in]0, \frac{\pi}{2}[/f(x^*) = 0$.

(b) *On a* $d = |0 - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2}, \epsilon = 2^{-4}$ *et* $n =$*le nombre minimal d'itérations pour calculer* x^* *à* ϵ *près.*

n *doit vérifier* $n > \frac{ln(\frac{d}{\epsilon})}{ln(2)} \Rightarrow n > 4.6517$ *d'où* $n = 5$.

(c)

$$x_{n+1} = x_n + \frac{cos(x_n) - x_n e^{x_n}}{sin(x_n) + e^{x_n}(x_n+1)}$$

(d) (H_1) f *est de classe* C^1 *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(H_2) $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$.

(H_3) f *est dble sur* $]0, \frac{\pi}{2}[$, *ona* $f'(x) = -sin(x) - e^x(x+1)$ *et* $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $-1 - (\frac{\pi}{2}+1)e^{\frac{\pi}{2}} < f'(x) < -1$ *alors* $f'(x) \neq 0 \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(H_4) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, f''(x) = -cos(x) - e^x(x+2)$ *et* $-1 - (\frac{\pi}{2}+2)e^{\frac{\pi}{2}} < f''(x) < -2 \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(e) *on a pour* $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}], f(x_0)f''(x_0) > 0$ *et comme* $f(\frac{\pi}{2})f''(\frac{\pi}{2}) > 0$ *alors on prend* $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

(f) $\epsilon = 6.2510^{-2}$ *alors* $x_1 = 1.0055, |f(x_1)| = 2.2126 > \epsilon$.

$x_2 = 0.6557, |f(x_2)| = .4713 > \epsilon$.

$x_3 = 0.5317, |f(x_3)| = 4.2910^{-2} < \epsilon$ *alors* $x^* \simeq 0.5317$.

Exercice 4 **(a)** *On a* $x(t) = 5e^{-arctan(t)} \quad \forall t \geq 0$ *alors* $x'(t) = -5\frac{e^{-arctan(t)}}{1+t^2} = \frac{-1}{1+t^2}.x(t)$.

(b)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h}{1+t_{n+1}^2} x_{n+1}(t)$$

avec $t_n = t_0 + nh = nh$ *car* $t_0 = 0$.

(c) *en posant* $h = \frac{1}{2}$ *dans l'expression du schémas d'Euler implicite on obtient*

$$x_{n+1} = \frac{4+(n+1)^2}{6+(n+1)^2} x_n$$

(d)

$$\begin{gathered} n = 0, t_n = 0, x_n = 5 \\ n = 1, t_n = 0.5, x_n = \tfrac{25}{7} \simeq 3.57 \\ n = 2, t_n = 1, x_n = \tfrac{40}{14} \simeq 2.86 \\ n = 3, t_n = 1.5, x_n = \tfrac{52}{21} \simeq 2.48 \\ n = 4, t_n = 2, x_n = \tfrac{520}{231} \simeq 2.25 \end{gathered}$$

(e) $x(2) \simeq 1.652499838$ *alors* $|x_4 - x(2)| \simeq 0.597500162$.

esprit — Se former autrement	**EXAMEN** Semestre : 1 ■ 2 ■ Session : Principale ☐ Rattrapage ■

Module : Méthodes Numériques pour l'Ingénieur (MNI)
Enseignant(s) : Équipe MNI
Classe(s) : 3A & 3B
Documents autorisés : OUI ☐ NON ■ Nombre de pages : 2
Calculatrice autorisée : OUI ■ NON ☐ Internet autorisé : OUI ☐ NON ■
Date : 14/01/2019 Heure : 11h00 Durée : 1h30

Exercice 1: .... 7 points

On considère le système d'équations linéaires (S) : $AX = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Question de cours :

(a) (2 points) Pour la résolution d'un système d'équations linéaires :
  1. rappeler la définition des méthodes directes et citer un exemple.
  2. rappeler la définition des méthodes itératives et citer un exemple.

(b) (1 point) Montrer que (S) admet une unique solution.

(c) (2 points) Résoudre (S) en utilisant une méthode directe (vue en cours) de votre choix.

(d) (2 points) Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donner les résultats des deux premières itérations, en utilisant une méthode itérative (vue en cours) de votre choix tout en justifiant la convergence de la méthode choisie.

Exercice 2: .... 6 points

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E) : $f(x) = 0$ dans $I = [1, 2]$, où la fonction f est donnée par:

$$f(x) = e^x - 2x - 2, \; x \in I.$$

(a) (1 point) Montrer que l'équation (E) a une est une seule racine $x^* \in]1, 2[$.

Application de la métohde de dichotomie :

(b) (0.5 points) Estimer le nombre minimal d'itérations pour calculer x^*, par la méthode de dichotomie, avec une précision de $\epsilon = 0.3$.

(c) (1 point) En appliquant la méthode de dichotomie sur I, approcher la valeur de x^* avec la même précision de $\epsilon = 0.3$.

Application de la méthode de Newton :

(d) (0.5 points) Écrire le schéma itératif de la méthode de Newton pour la résolution de (E).

(e) (1 point) Étudier la convergence de la méthode.

(f) (0.5 points) Choisir une condition initiale x_0 assurant la convergence de la méthode.

(g) (1.5 points) Déterminer x^* avec une précision de $\epsilon = 0.3$.

Exercice 3: .... 7 points

Le but de cet exercice est de déterminer une approximation de la valeur $\ln(2)$.

On considère la fonction $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie aux points d'abscisses $-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ et 1 par :

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$

Table 1: Valeurs de f aux points d'abscisses $(x_i)_{0\leq i\leq 4}$.

Partie I : Interpolation polynomiale

(a) (1.5 points) Déterminer les expressions de L_0, L_1 et L_2 les polynômes de Lagrange associés respectivement aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

(b) (1 point) En déduire l'expression du polynôme P interpolant f aux points d'abscisses -1, 0 et 1.

Partie II : Intégration numérique

On désigne par $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$

(a) (1 point) Déterminer $I_T^c(f)$ la valeur approchée de $I(f)$ par la formule composite des trapèzes, avec 4 sous intervalles de $[-1, 1]$.

(b) (1 point) Déterminer $I_S^c(f)$ la valeur approchée de $I(f)$ par la formule composite de Simpson, avec 2 sous intervalles de $[-1, 1]$.

(c) (1 point) En approchant f par son polynôme d'iterpolation P, donner une approximation de l'intégrale $I(f)$. On notera cette approximation par $I_P(f)$.

(d) (0.5 points) Sachant que $f(x) = \frac{1}{3+x}$ calculer la valeur exacte de $I(f)$.

(e) (1 point) Calculer l'erreur d'intégration pour les trois approximations $I_T^c(f)$, $I_S^c(f)$ et $I_P(f)$ de l'intégrale $I(f)$. En déduire laquelle des trois méthodes qui approche le mieux la valeur de $\ln(2)$.

Bon travail.

esprit — Se former autrement	**EXAMEN** Semestre : 1 ■ 2 ■ Session : Principale ☐ Rattrapage ■

Module : Méthodes Numériques pour l'Ingénieur (MNI)
Enseignant(s) : Équipe MNI
Classe(s) : 3A & 3B
Documents autorisés : OUI ☐ NON ■ Nombre de pages : 2
Calculatrice autorisée : OUI ■ NON ☐ Internet autorisé : OUI ☐ NON ■
Date : 14/06/2019 Heure : 11h00 Durée : 1h30

Exercice 1: .... 7 points

On considère le système d'équations linéaires (S) : $AX = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Question de cours :

(a) (2 points) Pour la résolution d'un système d'équations linéaires :
1. rappeler la définition des méthodes directes et citer un exemple.
2. rappeler la définition des méthodes itératives et citer un exemple.

(b) (1 point) Montrer que (S) admet une unique solution.

(c) (2 points) Résoudre (S) en utilisant une méthode directe (vue en cours) de votre choix.

(d) (2 points) Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donner les résultats des deux premières itérations, en utilisant une méthode itérative (vue en cours) de votre choix tout en justifiant la convergence de la méthode choisie.

Corrigé:

(a)
- Les méthodes directes sont des méthodes qui déterminent explicitement la solution exacte après un nombre fini d'opérations.
  Exemple: métode de pivot de Gauss, méthode LU.
- Les méthodes itératives sont des méthodes qui consistent à donner une suite qui converge vers la solution exacte (solution approchée).
  Exemple: méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel.

(b) On a $\det(A) = 3 \neq 0$. Donc A est inversible. Par conséquent, (S) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^3$.

(c)
- Méthode de pivot de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right).$$

Par conséquent,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 = -2 \\ x_2 = 1 \\ \frac{3}{2}x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

D'où $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

- Méthode LU:
  - Détermination de U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = E^{(1)}.$$

    La matrice triangulaire supérieure est donnée par $U = E^{(1)}.A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

  - Détermination de L: La matrice triangulaire inférieure L est donnée par

$$L = (E^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  - Résolution du système: $(S) \Leftrightarrow L.Y = B$, avec $Y = U.X$.

    Déterminons d'abord Y.

$$L.Y = B \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

    Déterminons maintenant X.

$$Y = U.X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

    D'où $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) - <u>Méthode de Jacobi:</u>
  Le schéma itératif de la méthode de Jacobi est le suivant:

$$\begin{cases} 2x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} = -2 \\ x_2^{(k+1)} = 1 \\ -x_1^{(k)} + 2x_3^{(k+1)} = 4 \end{cases}$$

Pour $k=0$,

$$\begin{cases} 2x_1^{(1)} = -2 \\ x_2^{(1)} = 1 \\ 2x_3^{(1)} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = -1 \\ x_2^{(1)} = 1 \\ x_3^{(1)} = 2 \end{cases}$$

D'où $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour $k=1$,

$$\begin{cases} 2x_1^{(2)} = 0 \\ x_2^{(2)} = 1 \\ 2x_3^{(2)} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = 0 \\ x_2^{(2)} = 1 \\ x_3^{(2)} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

D'où $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

- Méthode de Gauss-Seidel:
  Le schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel est le suivant:

$$\begin{cases} 2x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} = -2 \\ x_2^{(k+1)} = 1 \\ -x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k+1)} = 4 \end{cases}$$

Pour $k=0$,

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -1 \\ x_2^{(1)} = 1 \\ x_3^{(1)} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

D'où $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Pour $k=1$,

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -\frac{1}{4} \\ x_2^{(2)} = 1 \\ x_3^{(2)} = \frac{15}{8} \end{cases}$$

D'où $X^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix}$.

- Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent puisque A est une matrice à diagonale strictement dominante.

Exercice 2: .... 6 points

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E) : $f(x) = 0$ dans $I = [1,2]$, où la fonction f est donnée par:

$$f(x) = e^x - 2x - 2, \; x \in I.$$

(a) (1 point) Montrer que l'équation (E) a une est une seule racine $x^* \in]1,2[$.

Application de la métohde de dichotomie :

(b) (0.5 points) Estimer le nombre minimal d'itérations pour calculer x^*, par la méthode de dichotomie, avec une précision de $\varepsilon = 0.3$.

(c) (1 point) En appliquant la méthode de dichotomie sur I, approcher la valeur de x^* avec la même précision de $\varepsilon = 0.3$.

Application de la méthode de Newton :

(d) (0.5 points) Écrire le schéma itératif de la méthode de Newton pour la résolution de (E).

(e) (1 point) Étudier la convergence de la méthode.

(f) (0.5 points) Choisir une condition initiale x_0 assurant la convergence de la méthode.

(g) (1.5 points) Déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 0.3$.

Corrigé:

(a) On a f est continue sur $]1,2[$ et $f(1).f(2) = (-1.28) \times 1.39 < 0$. Donc (E) admet au moins une solution dans $]1,2[$. De plus, f est dérivable sur $]1,2[$ et $\forall x \in]1,2[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2 > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]1,2[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, (E) admet une solution unique dans $]1,2[$.

(b) Soit n le nombre d'itérations en appliquant la méthode de dichotomie.
On a $n > \frac{-\ln(0.3)}{\ln(2)} = 1.73$. Donc le nombre minimal d'itérations pour calculer x^* est 2.

(c) itération 1: On a $f(1.5) = -0.52 < 0$. Alors $x^* \in]1.5, 2[$.
itération 2: On a $f(1.75) = -3.38 < 0$. Alors $x^* \in]1.75, 2[$.
Comme $2 - 1.75 = 0.25 < 0.3$, alors on arrête le procédé. Par conséquent, $x^* \simeq 1.875$.

(d) $x_0 \in [1,2], \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 2x_n - 2}{\mathrm{e}^{x_n} - 2}$.

(e) On a
- f est de classe C^2 sur $[1,2]$.
- $f(1).f(2) < 0$.
- $\forall x \in [1,2]$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2 \neq 0$.
- $\forall x \in [1,2]$, $f''(x) = \mathrm{e}^x \neq 0$.

D'après le théorème global de la convergence de la méthode de Newton, pour $x_0 \in [1,2]$ vérifiant $f(x_0).f''(x_0) > 0$, la méthode de Newton converge.

(f) On a, par exemple $f(2).f''(2) > 0$. Donc on peut choisir $x_0 = 2$.

(g) Pour $x_0 = 2$, $x_1 = 1.74$ et $|x_1 - x_0| = 0.26 < 0.3$. Donc $x^* \simeq 1.74$.

Exercice 3: .... 7 points

Le but de cet exercice est de déterminer une approximation de la valeur $\ln(2)$.

On considère la fonction $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie aux points d'abscisses $-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ et 1 par :

Partie I : Interpolation polynomiale

(a) (1.5 points) Déterminer les expressions de L_0, L_1 et L_2 les polynômes de Lagrange associés respectivement aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$

Table 1: Valeurs de f aux points d'abscisses $(x_i)_{0\leq i\leq 4}$.

(b) (1 point) En déduire l'expression du polynôme P interpolant f aux points d'abscisses -1, 0 et 1.

Partie II : Intégration numérique

On désigne par $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$

(a) (1 point) Déterminer $I_T^c(f)$ la valeur approchée de $I(f)$ par la formule composite des trapèzes, avec 4 sous intervalles de $[-1, 1]$.

(b) (1 point) Déterminer $I_S^c(f)$ la valeur approchée de $I(f)$ par la formule composite de Simpson, avec 2 sous intervalles de $[-1, 1]$.

(c) (1 point) En approchant f par son polynôme d'iterpolation P, donner une approximation de l'intégrale $I(f)$. On notera cette approximation par $I_P(f)$.

(d) (0.5 points) Sachant que $f(x) = \dfrac{1}{3+x}$ calculer la valeur exacte de $I(f)$.

(e) (1 point) Calculer l'erreur d'intégration pour les trois approximations $I_T^c(f)$, $I_S^c(f)$ et $I_P(f)$ de l'intégrale $I(f)$. En déduire laquelle des trois méthodes qui approche le mieux la valeur de $\ln(2)$.

Corrigé:

Partie I

(a) On a

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\ L_1(x) &= -x^2 + 1 \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

(b) D'après ce qui précède,

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) = \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{3}.$$

Partie II

(a) $I_T^c = \frac{0.5}{2}\big(f(-1) + 2(f(-0.5) + f(0) + f(0.5)) + f(1)\big) = 0.697.$

(b) $I_S^c = \frac{1}{6}\big(f(-1) + 2f(0) + 4(f(-0.5) + f(0.5)) + f(1)\big) = 0.6932.$

(c) $I_P = \frac{1}{12}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \frac{2}{3}[x]_0^1 = 0.694.$

(d) $I = \big[\ln(3+x)\big]_{-1}^1 = \ln(2).$

(e) On a $|I - I_T^c| = 0.004$, $|I - I_S^c| = 0.0001$ et $|I - I_P| = 0.001$. Donc parmi les méthodes proposées, la méthode de Simpson approche le mieux la valeur de $ln(2)$.

esprit — Se former autrement	**EXAMEN** Semestre : 1 ■ 2 ☐ Session : Principale ■ Rattrapage ☐

Module : Méthodes Numériques pour l'Ingénieur (MNI)
Enseignant(s) : Équipe MNI de l'UP-Maths
Classe(s) : 3A1->3A14
Documents autorisés : OUI ☐ NON ■ Nombre de pages : 2
Calculatrice autorisée : OUI ■ NON ☐ Internet autorisé : OUI ☐ NON ■
Date : 04/01/2020 Heure : 09h00 Durée : 1h30

NB : Pour les trois exercices de l'examen, les nombres décimaux seront donnés avec 4 chiffres après la virgule.

Exercice 1: .... *8 points*

On considère le systéme d'équations linéaires (S_α) : $A_\alpha X = b$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad et\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) *(1 point) Pour quelles valeurs du paramètre réel* α*, le système* (S_α) *est de Cramer : il admet une unique solution?*

(b) *(1 point) Pour quelles valeurs du paramètre réel* α*, la matrice* A_α *est à diagonale strictement dominante?*

Dans la suite, on considère $\alpha = 3$.

(c) *(1 point) Justifier l'existence d'une unique décomposition LU de la matrice* A_3.

(d) *(2 points) Réaliser la factorisation LU de la matrice* A_3.

(e) *(1 point) Résoudre le système* (S_3) *avec une méthode directe de votre choix, vue en cours.*

(f) *(1 point) Établir le schéma itératif de la méthode de Jacobi pour la résolution de* (S_3) *tout en justifiant sa convergence.*

(g) *(1 point) En partant du vecteur initial,* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*, donner les résultats des deux premières itérations de la méthode de Jacobi pour la résolution de* (S_3).

Exercice 2: .... *6 points*

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E): $f(x) = 0$ *dans* $I = [0, \frac{\pi}{3}]$*, où la fonction* f *est donnée par :*

$$f(x) = cos(x) - 3x, x \in I.$$

Il est à noter que la variable x *est exprimée en* ***radian****.*

(a) *(1 point) Montrer que l'équation* (E) *admet une unique solution* $x^* \in]0, \frac{\pi}{3}[$.

Application de la métohde de dichotomie :

(b) *(0.5 points) En utilisant la méthode de dichotomie sur* I, *estimer le nombre minimal d'itérations pour calculer* x^* *avec une tolérence de* $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$.

Application de la méthode de Newton :

(c) *(0.5 points) Écrire le schéma itératif de la méthode de Newton associé à* (E).

(d) *(1 point) Étudier la convergence de la méthode.*

(e) *(0.5 points) Choisir une condition initiale* x_0 *assurant la convergence de la méthode.*

(f) *(2 points) Déterminer* x^* *avec une précision de* $\varepsilon = 10^{-3}$.

(g) *(0.5 points) Comparer les résultats obtenus par les deux méthodes en terme de nombre minimal d'itérations.*

Exercice 3: .... *6 points*

On considère le problème de Cauchy (PC) suivant :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = t - tx(t), \quad t \in [0,1] \\ \hfill x(0) = 2. \end{cases}$$

(a) *(0.5 points) Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy* (PC) *est donnée par :* $x(t) = 1 + e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\forall t \in [0,1]$.

Pour la suite, nous notons par h *le pas de discrétisation de* $[0,1]$, t_n, $n \geq 0$, *les points de discrétisation de* $[0,1]$, x_n^E, *l'approximation de* x *au point* t_n, $n \geq 0$, *par la méthode d'Euler Explicite et* x_n^I, *l'approximation de* $x(t_n)$, $n \geq 0$, *par la méthode d'Euler Implicite.*

(b) *(1 point) Donner, en fonction de* h, *le schéma d'Euler Explicite (EE), associé au problème* (PC).

(c) *(1 point) Pour* $h = 0.25$, *approcher* $x(1)$ *par la méthode EE.*

(d) *(1 point) Donner, en fonction de* h, *le schéma d'Euler Implicite (EI), associé au problème* (PC).

(e) *(1 point) En déduire que pour* $\forall n \geq 0$ *:*

$$x_{n+1}^I = \frac{x_n^I + (n+1)h^2}{1 + (n+1)h^2}, \quad \forall n \geq 0,$$

(f) *(1 point) Pour* $h = 0.25$, *approcher* $x(1)$ *par la méthode EI.*

(g) *(0.5 points) Calculer l'erreur absolue commise par les deux méthodes, EE et EI, au point* $t = 1$. *Comparer les résutats.*

esprit — Se former autrement	**EXAMEN** Semestre : 1 ■ 2 □ Session : Principale ■ Rattrapage □

Module : Méthodes Numériques pour l'Ingénieur (MNI)
Enseignant(s) : Équipe MNI de l'UP-Maths
Classe(s) : 3A1->3A14
Documents autorisés : OUI □ NON ■ Nombre de pages : 2

Calculatrice autorisée : OUI ■ NON □ Internet autorisé : OUI □ NON ■
Date : 04/01/2020 Heure : 09h00 Durée : 1h30

NB : Pour les trois exercices de l'examen, les nombres décimaux seront donnés avec 4 chiffres après la virgule.

Exercice 1: .... *8 points*

On considère le systéme d'équations linéaires (S_α) : $A_\alpha X = b$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad et \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) *(1 point) Pour quelles valeurs du paramètre réel* α, *le système* (S_α) *est de Cramer : il admet une unique solution?*
$\det(A) = 3\alpha^2 + 5 > 0$. *Donc* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) *(1 point) Pour quelles valeurs du paramètre réel* α, *la matrice* A_α *est à diagonale strictement dominante?*
$\alpha \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

Dans la suite, on considére $\alpha = 3$.

(c) *(1 point) Justifier l'existence d'une unique décomposition LU de la matrice* A_3.

$3 \neq 0$, $\det(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}) = -10 \neq 0$, $\det(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}) = 32 \neq 0$, *par suite A admet une décomposition LU.*

(d) *(2 points) Réaliser la factorisation LU de la matrice* A_3.

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{96}{30} \end{pmatrix} \ et \ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

(e) *(1 point) Résoudre le système (S_3) avec une méthode directe de votre choix, vue en cours.*

***Méthode de décomposition** LU*

On a $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \iff LUx = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. *On pose* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Ux = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{96}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *et* $L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le calcul donne que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. *Ce qui implique que* $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) *(1 point) Établir le schéma itératif de la méthode de Jacobi pour la résolution de (S_3) tout en justifiant sa convergence.*

$\alpha = 3 \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ *donc d'aprés la question (b) la méthode de Jacobi est convergente*

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}(1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{3}(-3 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{3}(1 - x_1^{(k)} - x_2^{(k))} \end{cases}$$

(g) *(1 point) En partant du vecteur initial,* $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *donner les résultats des deux premières itérations de la méthode de Jacobi pour la résolution de (S_3).*

$X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $X^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ 1 \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Exercice 2: . . . . *6 points*

On se propose de résoudre numériquement l'équation (E): $f(x) = 0$ dans $I = [0, \frac{\pi}{3}]$, où la fonction f est donnée par :

$$f(x) = cos(x) - 3x, x \in I.$$

*Il est à noter que la variable x est exprimée en **radian**.*

(a) *(1 point) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution $x^* \in]0, \frac{\pi}{3}[$.*

Existence: *L'application $x \mapsto cos(x) - 3x$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ (combinaison de deux fonctions continues : x et $cos(x)$)*

D'autre part $f(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \pi$ c'est-ire $f(0).f(\frac{\pi}{3}) < 0$ alors il existe $x^* \in]0, \frac{\pi}{3}[$ tel que $f(x^*) = 0$

Unicité: *L'application $x \mapsto cos(x) - 3x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et on a $f'(x) = -sin(x) - 3$, comme $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ alors $0 \leq sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq -sin(x) \leq 0$ donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ on a $-\frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \leq -sin(x) - 3 \leq -3$, alors f est strictement doissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$*

Conclusion: l'équation (E) admet une unique solution $x^* \in]0, \frac{\pi}{3}[$

Application de la métohde de dichotomie :

(b) *(0.5 points) En utilisant la méthode de dichotomie sur I, estimer le nombre minimal d'itérations pour calculer x^* avec une tolérence de $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$.*
on a $d = \mid \frac{\pi}{3} - 0 \mid = \frac{\pi}{3}$, $\epsilon = 10^{-3}$ et n le nombre minimal pour estimer x^* à ϵ prés.
n doit vérifier: $n > \frac{ln(\frac{d}{\epsilon})}{ln(2)}$ alors $n > 10.0323$ donc $n = 11$

Application de la méthode de Newton :

(c) *(0.5 points) Écrire le schéma itératif de la méthode de Newton associé à (E).*

$$x_{n+1} = x_n + \frac{cos(x_n) - 3x_n}{sin(x_n) + 3}$$

(d) *(1 point) Étudier la convergence de la méthode.*
(H_1) *: f est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{3}]$*
(H_2) *: $f(0).f(\frac{\pi}{3}) < 0$*
(H_3) *:$f^{'}(x) = -sin(x) - 3 < 0$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}[$, donc $f^{'}(x) \neq 0$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}[$*
(H_4) *:$f^{''}(x) = -cos(x) < 0$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}[$, donc $f^{''}(x) \neq 0$, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{3}[$*

(e) *(0.5 points) Choisir une condition initiale x_0 assurant la convergence de la méthode.*
Comme $f(\frac{\pi}{3}).f^{''}(\frac{\pi}{3}) > 0$ alors $x_0 = \frac{\pi}{3}$ assure la convergence de la méthode.

(f) *(2 points) Déterminer x^* avec une précision de $\varepsilon = 10^{-3}$.*
$\epsilon = 10^{-3}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$ donne $x_1 = 0.3639$ donc $\mid f(x_1) \mid = 0.1571 > \epsilon$
$x_2 = 0.3170$ donc $\mid f(x_2) \mid = 0.0008 \leq \epsilon$
alors $x^* \approx 0.3170$

(g) *(0.5 points) Comparer les résultats obtenus par les deux méthodes en terme de nombre minimal d'itérations. Pour la m précision $\epsilon = 10^{-3}$ la méthode de newton nécessite deux itérations pour estimer x^* alors que la méthode de dichotomie nécessite 11 itérations,Par conséquent, la méthode de Newton est la plus rapide en terme de nombre minimal d'itérations*

Exercice 3: .... *6 points*

On considère le problème de Cauchy (PC) suivant :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = t - tx(t), & t \in [0,1] \\ & x(0) = 2. \end{cases}$$

(a) *(0.5 points) Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy (PC) est donnée par : $x(t) = 1 + e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\forall t \in [0,1]$.*
- $x(0) = 2$
- x est dérivable sur $[0,1]$.
-$x^{'}(t) = -te^{\frac{-t^2}{2}} = t - t - te^{\frac{-t^2}{2}} = t - t(1 + e^{-\frac{t^2}{2}}) = t + tx(t)$

Pour la suite, nous notons par h le pas de discrétisation de $[0,1]$, t_n, $n \geq 0$, les points de discrétisation de $[0,1]$, x_n^E, l'approximation de x au point t_n, $n \geq 0$, par la méthode d'Euler Explicite et x_n^I, l'approximation de $x(t_n)$, $n \geq 0$, par la méthode d'Euler Implicite.

(b) *(1 point) Donner, en fonction de h, le schéma d'Euler Explicite (EE), associé au problème (PC).*

$$x_{n+1}^E = x_n^E + ht_n(1 - x_n^E)$$

(c) *(1 point) Pour $h = 0.25$, approcher $x(1)$ par la méthode EE.*

$$x_1^E = 2$$

$$x_2^E = 1,9380$$

$$x_3^E = 1,8210$$

$$x_4^E = 1,7500$$

Donc $x(1) \approx x_4^E = 1,7500$

(d) *(1 point) Donner, en fonction de h, le schéma d'Euler Implicite (EI), associé au problème (PC).*

$$x_{n+1}^I = x_n^I + ht_{n+1}(1 - x_{n+1}^I)$$

(e) *(1 point) En déduire que pour $\forall n \geq 0$:*

$$x_{n+1}^I = \frac{x_n^I + (n+1)h^2}{1 + (n+1)h^2}, \quad \forall n \geq 0,$$

(f) *(1 point) Pour $h = 0.25$, approcher $x(1)$ par la méthode EI.*

$$x_1^I = 1,9420$$

$$x_2^I = 1,8370$$

$$x_3^I = 1,7040$$

$$x_4^I = 1,5630$$

Donc $x(1) \approx x_4^I = 1,5630$

(g) *(0.5 points) Calculer l'erreur absolue commise par les deux méthodes, EE et EI, au point $t = 1$. Comparer les résutats.*

$$\mid x(1) - x_4^E \mid = 0,1440$$

$$\mid x(1) - x_4^I \mid = 0,0430$$

L'erreur commise par (EI) est plus petite que celle commise par (EE)