Compte Rendu : Résolution numérique d'équations différentielles

Module : Calcul Scientifique (3A/B) Année universitaire : 2023-2024

1 Présentation du problème

Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux équations différentielles que l'on peut mettre sous la forme :

$$x' = f(x(t), t)$$

où f est une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Une solution de cette équation différentielle est une fonction x de classe C^1 définie sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
(i) $\forall t \in I\,;\ (x(t), t) \in U\,;$
(ii) $\forall t \in I\,;\ x' = f(x(t), t).$
Nous allons adjoindre à cette équation différentielle *une condition initiale* sous la forme d'un couple $(x_0, t_0) \in U$ et chercher à résoudre **le problème de Cauchy** suivant :

$$\begin{cases} x' = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Sous certaines conditions sur f que nous ne détaillerons pas, ce problème admet une unique solution, que nous allons chercher à déterminer numériquement.

1.1 Méthode d'Euler explicite

Les méthodes que nous allons étudier consistent à subdiviser l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$ en $n+1$ points $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + T$ puis à approcher la relation :

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} x' dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t), t) dt$$

La méthode *d'Euler explicite* consiste à approcher cette intégrale par la *méthode du rectangle gauche*, autrement dit à approcher $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t), t) dt$ par $(t_{k+1} - t_k) f(x(t), t)$.
En posant $h_k = t_{k+1} - t_k$, ceci conduit à définir une suite de valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$ à partir de la condition initiale x_0 et de *la relation de récurrence* :

$$\forall k \in [0, n-1], \quad x_{k+1} = x_k + h_k f(x_k, t_k)$$

On observera qu'en général, seul le premier point x_0 de cette méthode est une valeur exacte ; les autres points sont calculés à partir de l'approximation précédente, ce qui peut conduire la valeur calculée x_k à s'écarter de plus en plus de la valeur exacte $x(t_k)$.

1.2 Méthode d'Euler implicite

La méthode *d'Euler implicite* consiste à approcher l'intégrale $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t),t)dt$ par la méthode *du rectangle droit*, ce qui conduit à définir la suite $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ par les relations :

$$\forall k \in [0, n-1], \quad x_{k+1} = x_k + h_k f(x_{k+1}, t_{k+1})$$

On observe que cette relation *ne procure pas une relation explicite* de x_{k+1} puisque ce terme est aussi présent dans le second membre. Pour calculer ce terme il est souvent nécessaire de coupler cette méthode à une méthode de résolution numérique des équations telle la méthode de Newton-Raphson (voir le cours d'analyse numérique). Pour cette raison, elle se révèle plus coûteuse à mettre en œuvre. Dans la pratique, la méthode d'Euler implicite se révèle souvent plus stable que la méthode explicite : elle est moins précise à court terme, mais diverge moins rapidement de la solution exacte que la méthode explicite.

2 Exercice : Comparaison des schémas d'Euler explicite et implicite

On vous demande d'importer les bibliothèques suivant :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

On considère le problème de Cauchy :

$$z' = 1 - \frac{z(t)}{\mu},\ t \in \mathbb{R},\ z(0) = z_0 \tag{1}$$

On rappelle que la solution exacte de ce problème est donnée par :

$$z(t) = \mu - (\mu - z_0)e^{-\frac{t}{\mu}} \tag{2}$$

Q1. Définir une fonction `sol_exacte(t, mu, z0)` qui renvoie la solution exacte donnée par l'équation (2). Tracer sur un même graphique pour $\mu = 1$ et $z_0 \in \{0, 1, 2\}$ ces solutions. Soit $t \in [0, 2]$ et pour un pas de $\Delta t = 0.1$ s.

Q2. Même questions pour $\mu = 0.05$ et $z_0 \in \{0, 1, 2\}$.

On suppose dans les questions qui suivent que $\mu = 0.05$ et que $z_0 = 2$.

Q3. Quelle est la fonction $f(z_n)$ correspondant à cette équation différentielle ? Définir en python la fonction `f(z,t)` associée.

Q4. L'expression de la méthode *d'Euler explicite* s'écrit :

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} = f(z_n)$$

d'où le schémas explicite d'Euler :

$$z_{n+1} = z_n + \Delta t\ f(z_n), \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1.$$

Définir une fonction python `euler_exp(f,t0,z0,tmax,dt)` prenant en arguments :

— la fonction `f`,

— les conditions initiales `t0` et `z0`,

— la valeur maximale `tmax` du temps pour lequel on souhaite calculer la solution $z(t)$,

— le pas `dt`

et retournant deux tableaux contenant les valeurs de t_n et z_n pour $t_0 \leq t_n \leq t_{max}$.

Q5. Montrer que l'expression de la méthode *d'Euler implicite* est :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + \Delta t}{1 + \frac{\Delta t}{\mu}},\ n = 0,1,2,\ldots,N-1.$$

Définir une fonction python `euler_imp(t0,z0,tmax,dt)` prenant en arguments :

— les conditions initiales `t0` et `z0`,

— la valeur maximale `tmax` du temps pour lequel on souhaite calculer la solution $z(t)$,

— le pas `dt`

et retournant deux tableaux contenant les valeurs de t_n et z_n pour $t_0 \leq t_n \leq t_{max}$.

Q6. Tracer dans un même graphique pour $t \in [0,2]$ et pour un pas de $\Delta t = 0.02$ s :

- La solution exacte : `sol_exacte(t, 0.05, 2)`
- $z(t)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.
- $z(t)$ calculée par la méthode d'Euler implicite.

Que remarquez-vous pour les résultats trouvés ?

Q7. Essayer de faire tourner votre programme avec la valeur $\Delta t = 0.1$ s . Que se passe-t-il ?