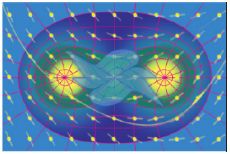
INTERPOLATION POLYNOMIALE

Correction-Exercice 3



Enoncé

(1) Construire le polynôme P d'interpolation de Lagrange aux points $(-1, e); (0, 1)$ et $(1, e)$.

(2) Sans faire de calcul, donner l'expression du polyn$\hat{o}$me de Lagrange Q qui interpole les trois points $(-1, -1); (0, 0)$ et $(1, -1)$.

(3) Trouver le polynôme de l'espace vectoriel Vect$(1, X, X^2)$ qui interpole les trois points $(-1, -1); (0, 0)$ et $(1, -1)$.

Corrigé

1) Le polynôme P d'interpolation de Lagrange de degré n qui interpole $(n+1)$ points $\{(x_i, y_i); i = 0, \ldots, n\}$ s'écrit:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

ici $n = 2$ donc on a:

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= \frac{ex(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + \frac{e(x+1)x}{2} = (e-1)x^2 + 1 \end{aligned}$$

2) Il suffit de changer les coefficients y_i dans l'expression précedente:

$$Q(x) = -\frac{x(x-1)}{2} - \frac{(x+1)x}{2} = -x^2$$

3) Il s'agit de trouver un polynôme $P(x)$ qui soit combinaison linèaire de deux polyn$\hat{o}$mes assigès (ie: $P(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$) et qui interpole les 3 points $(-1,-1)$; $(0,0)$ et $(1,-1)$.

$$\begin{cases} \text{P(-1)=1;} \\ \text{P(0)=0;} \\ \text{P(1)=-1;} \end{cases}$$

ce qui donne $\alpha = 0$; $\beta = 0$ et $\gamma = -1$
le polyn$\hat{o}$me cherché est donc $P(x) = -x^2$