Module : Analyse numériques

Chapitre 3 : Intégration Numérique

Exercice 5

Exercice

Cet exercice porte sur l'approximation de l'intégrale $I(g) = \int_{-1}^{1} g(x)dx$ où g est une fonction continue sur l'intervalle $[-1, 1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
On fixe $\omega \in]0, 1]$ et on considère la méthode d'intégration numérique sur $[-1, 1]$ donnée par :

$$J_\omega(g) = \frac{4}{3} g\left(-\frac{\omega}{2}\right) + \frac{2}{3} g(\omega)$$

1. a. Montrer que la méthode numérique est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 quel que soit ω.
   b. Déterminer ω pour que la méthode d'intégration numérique est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
   c. Quel est alors son degré d'exactitude?

   Pour la suite on prend la fonction g défine par

$$g(x) = xe^{x^2}, \ \forall x \in [-1, 1].$$

2. a. Justifier l'existence d'un unique polynôme $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ qui interpole g en $x_0 = -1$, $x_1 = 1$,
   b. Déterminer l'expression du polynôme P_1 par une méthode d'interpolation vue en cours.
   c. Calculer $I_p(P_1) = \int_{-1}^{1} P_1(x)dx$. Conclure.
3. Approcher l'intégrale $I(g)$ par la méthode simple des trapèzes I_T.
4. Calculer l'erreur d'intégration E_J commise par J_ω

Exercice

Correction

1.a.

- pour $P(x) = 1$, on a:

  $$\int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

  $$J_\omega(1) = \frac{4}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 1 = 2$$

  donc $\boxed{\int_{-1}^{1} 1dx = J_\omega(1)}$

- pour $P(x) = x$, on a:

  $$\int_{-1}^{1} xdx = 0$$

  $$J_\omega(x) = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{\omega}{2}\right) + \frac{2}{3} \times \omega = 0$$

  donc $\boxed{\int_{-1}^{1} xdx = J_\omega(x)}$

Exercice

Correction

1.b. pour $P(x) = x^2$, on a: $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \omega^2 = \frac{2}{3}$ donc

$$\boxed{\omega = \sqrt{\tfrac{2}{3}}}$$

1.c. pour $P(x) = x^3$, on a:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

$$J_{\sqrt{\frac{2}{3}}}(x^3) = \tfrac{4}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2}\right)^3 + \tfrac{2}{3} \times \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 dx \neq J_{\sqrt{\frac{2}{3}}}(x^3)}$

La méthode est donc de degré d'exactitude 2.

2.a On a $x_0 \neq x_1$ alors il existe un unique polynôme d'interpolation.

2.b

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{1 - x}{2},$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{x + 1}{2}.$$

Donc $P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) = xe.$

Exercice

Correction

2.c. $I_p(P_1) = \int_{-1}^{1} P_1(x)dx = \int_{-1}^{1} xedx = e[\frac{1}{2}x^2]_{-1}^{1} = 0$

3. $I_T = g(1) + g(-1) = 0$. $I_T = I_P$

4. $I(g) = \int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xe^{x^2}dx = [\frac{1}{2}e^{x^2}]_{-1}^{1} = 0.$
$E_J = |I(g) - J_\omega| = 0.3.$