esprit — Se former autrement — HONORIS UNITED UNIVERSITIES	**Examen** Semestre : 1 ☐ 2 ☒ Session : Principale ☒ Rattrapage ☐

Module: Analyse Numérique
Enseignant(s): Equipe AN
Classe(s): 3A 1 & 3 A $28 \to 49$
Documents autorisés: OUI ☐ NON ☒ Nombre de pages: 7
Calculatrice autorisée: OUI ☒ NON ☐ Internet autorisée: OUI ☐ NON ☒
Date: 26 Mai 2022 Heure: 14h30 Durée : 1h30 min

Exercice 1 (4 points)

On considère le problème de Cauchy (PC) suivant :

$$(PC)\begin{cases} x'(t) &= \frac{(1-t^2)}{2}x(t), \quad \forall t \geq 1 \\ x(1) &= -2 \end{cases}$$

1) (1 point) Vérifier que la solution analytique du problème de Cauchy (PC) est donnée par :

$$x(t) = -2\ \exp\big(-\frac{1}{3}+\frac{t}{2}-\frac{t^3}{6}\big), \quad \forall \quad t \geq 1.$$

Pour que la solution $x(t) = -2\exp(-\frac{1}{3}+\frac{t}{2}-\frac{t^3}{6})$ soit la solution analytique de (PC) pout $t \geq 1$, il faut vérifier que :
- $t \mapsto x(t)$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$.
- $t \mapsto x(t)$ vérifie le problème (PC).

On a d'une part, le problème de Cauchy (PC) s'écrit sous la forme :

$$(PC)\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), \quad \forall t \geq 1 \\ x(1) &= -2 \end{cases} \tag{1}$$

avec $f(t, x(t)) = \dfrac{1-t^2}{2}x(t)$.

D'autre part, $t \mapsto -2\exp(-\frac{1}{3}+\frac{t}{2}-\frac{t^3}{6})$ est la composée de deux fonctions continues et dérivables sur $]1, +\infty[$. Donc

$$x'(t) = -2\Big(\frac{1}{2}-\frac{3t^2}{6}\Big)\exp(-\frac{1}{3}+\frac{t}{2}-\frac{t^3}{6}) = \Big(\frac{1-t^2}{2}\Big)x(t) = f(t, x(t)).$$

$\Rightarrow$ EDO vérifiée.
De plus $x(1) = -2\exp(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}) = -2\exp(0) = -2 = x_0$: condition initiale vérifiée.
Ainsi, la solution $y(t) = -2\exp(-\frac{1}{3}+\frac{t}{2}-\frac{t^3}{6})$ est la solution analytique du problème (PC), $\forall t \geq 1$.

2) (1 point) Donner le schéma d'Euler implicite pour la résolution de (PC) avec un pas de discrétisation constant $h > 0$.

Le schéma itératif d'Euler implicite (Sc) pour la résolution de (PC) est donné par :

$$(Sc)\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}), \quad \forall n \geq 0 \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{2}$$

avec $f(t, x(t)) = \dfrac{1-t^2}{2}x(t)$, $t_0 = 1$, $x_0 = -2$ et h le pas de discrétisation.

$$(Sc) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} &= x_n + \dfrac{h}{2}(1 - t_{n+1}^2)x_{n+1}, \quad \forall n \geq 0 \\ x(1) &= -2, \end{cases}$$

3) (1 point) Pour $h = \dfrac{1}{3}$, montrer que la solution numérique x_{n+1} (approximation de la solution exacte $x(t)$ au point de discrétisation t_{n+1}, $n \geq 0$) du problème (PC), donnée par la question précédente, satisfait la relation suivante :

$$x_{n+1} = \frac{54}{(4+n)^2 + 45}x_n, \quad \forall n \geq 0.$$

On a $\forall n \geq 0$, les points de discrétisation t_n sont donnés par $t_n = t_0 + nh = 1 + nh$. Donc pour $h = \dfrac{1}{3}$, on aura $t_{n+1} = \dfrac{4+n}{3}$, $\forall n \geq 0$. D'après le schéma (SC),

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}(1 - t_{n+1}^2)x_{n+1} \\ &= x_n + \frac{1}{6}\left[1 - \left(\frac{4+n}{3}\right)^2\right]x_{n+1} \\ &= x_n + \frac{1}{6}\left(\frac{9-(4+n)^2}{9}\right)x_{n+1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{54}\left(9 - (4+n)^2\right)\right]x_{n+1} &= x_n \\ \frac{45 + (4+n)^2}{54}x_{n+1} &= x_n \end{aligned}$$

Ainsi

$$x_{n+1} = \frac{54}{45 + (4+n)^2}x_n.$$

D'où le résultat demandé.

4) (1 point) Calculer l'erreur commise par la méthode d'Euler implicite au point $t = \dfrac{5}{3}$.

Le point $t = \dfrac{5}{3}$ correspond à t_2. Pour calculer l'erreur commise par le schéma d'Euler implicite en ce point qu'on la note par $E(t = \dfrac{5}{3})$, on cherche tout d'abord l'estimation x_2 de $x(t_2)$.

D'après le schéma (SC),

- on a $x_0 = -2$.
- Pour $n = 0$, on a

$$x_1 = \frac{54}{45 + (4+0)^2}x_0 \approx -1.770491$$

- Pour $n = 1$, on a

$$x_2 = \frac{54}{45 + (4+1)^2} x_1 \approx -1.365807$$

Ainsi, l'erreur commise par la méthode d'Euler implicite au point $t = \frac{5}{3}$ pour le schéma (Sc) est donnée par :

$$\begin{aligned} E(t = \frac{5}{3}) &= |x(t = \frac{5}{3}) - x_2| \\ &= |-2\exp(-\frac{1}{3} + \frac{\frac{5}{3}}{2} - \frac{(\frac{5}{3})^3}{6}) - x_2| \\ &= |-1.524310 - (-1.365807)| \\ &\simeq 0.158502. \end{aligned}$$

Exercice 2 (7,5 points)

On considère le système d'équations linéaires (S) : $AX = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(1) (a) (0.5 point) Montrer que (S) admet dans $\mathbb{R}^3$ une unique solution.

Réponse :
On a $\det(A) = 32 \neq 0$. Alors (S) admet dans ^{3} une unique solution.

(b) (1 point) Résoudre (S) en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Réponse :

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1]{} A_1|b_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2]{} A_2|b_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Alors, $S \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_3 &=& 1 \\ 4x_2 - 2x_3 &=& 2 \\ 4x_3 &=& -4 \end{array} \right.$. Par conséquent

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) (2 points) Ecrire les schémas itératifs des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système (S).

Réponse :

Schéma itératif de la méthode de Jacobi : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1^{(k+1)} + \quad x_3^{(k)} & = & 1 \\ 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} & = & 3 \\ -x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 3x_3^{(k+1)} & = & -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{1 - x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{3 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{-4 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{3} \end{array}\right.$$

Schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1^{(k+1)} + \quad x_3^{(k)} & = & 1 \\ 2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} & = & 3 \\ -x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 3x_3^{(k+1)} & = & -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{1 - x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{3 - 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{-4 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{3} \end{array}\right.$$

(b) (0.5 point) Justifier la convergence de la méthode de Jacobi et de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système (S).

Réponse :
Comme la matrice A est à diagonale strictement dominante, alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes pour la résolution du système (S).

(c) (2 points) Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donner les résultats des deux premières itérations en utilisant

(i) la méthode de Jacobi.

Réponse :

$$X_J^{(1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_J^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{5}{4} \end{pmatrix}$$

(ii) la méthode de Gauss-Seidel.

Réponse :

$$X_{G-S}^{(1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad X_{G-S}^{(2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{6} \\ -\dfrac{1}{6} \\ -\dfrac{8}{9} \end{pmatrix}$$

(d) (1 point) En considérant l'erreur $E = ||X - X^{(k)}||_2$, avec X la solution exacte, $X^{(k)}$ $(k \in \{1,\ 2\})$

une solution approchée par l'une des deux méthodes et $||\,.\,||$ la norme euclidienne définie par

$$||X||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in^3,$$

calculer les erreurs commises par les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux premières itérations.

Réponse :
$1^{\text{ère}}$ itération :

$$E_J^{(1)} = ||X_J^{(1)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{\sqrt{5}}{4} = 0,5590.$$

$$E_{G-S}^{(1)} = ||X_{G-S}^{(1)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{11}{18}} = 0,7817.$$

$2^{\text{ème}}$ itération :

$$E_J^{(2)} = ||X_J^{(2)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} = 0,3535.$$

$$E_{G-S}^{(2)} = ||X_{G-S}^{(2)} - X||_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{11}{162}} = 0,2605.$$

(e) (0.5 point) Comparer alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel en terme de précision pour les deux premières itérations pour la résolution du système (S).

Réponse :
Suite à la première itération, la méthode de Jacobi approche mieux la solution et suite à la deuxième itération, la méthode de Gauss-Seidel approche mieux la solution.

Exercice 3 (8.5 points)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(1) a) ustifier l'existence d'un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ qui interpole f en $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.
Les abscisses sont deux à deux distances, alors il existe un unique polynôme d'interpolation P_2. Comme le nombre des points est 3 alors $P_2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

b) Déterminer l'expression du polynôme P_2 par la méthode d'interpolation de Lagrange.

Les éléments de la base de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés respectivement à $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{x^2-x}{2} \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -(x+1)(x-1) = 1-x^2 \\ L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{2}x(x+1) = \frac{x^2+x}{2} \end{aligned}$$

Le polynôme de Lagrange P_2 qui interpole f aux points d'abscisses $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ est

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\ &= \frac{1}{2}x(x-1)f(-1) - (x+1)(x-1)f(0) + \frac{1}{2}x(x+1)f(1) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{2}}x(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}x(x+1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}x \end{aligned}$$

c) Donner la valeur approximative de $f(1/2)$, puis déduire l'erreur d'interpolation en ce point.
Valeur approximative :

$$P_2(1/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.3535.$$

Erreur d'interpolation :

$$E(1/2) = |f(1/2) - P_2(1/2)| = \left|\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right| \approx 0.0936$$

Dans la suite, On s'intéresse à approcher l'intégrale suivante

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

(2) a) Calculer la valeur exacte de $I(f)$.
$I(f) = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = -1+\sqrt{2} \approx 0.4142$

b) Calculer $I_p = \int_0^1 P_2(x)dx$, où P_2 est le polynôme trouvé dans la première question, puis déduire l'erreur d'intégration E_p pour cette méthode.
L'intégrale :

$$I_p = \int_0^1 P_2(x)dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'erreur :

$$E_p = |I(f) - I_p| = \left|-1+\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right| \approx 0.0606$$

(3) Soient g une fonction continue sur $[0,1]$ et $Q(g)$ la formule de quadrature suivante approchant l'intégrale $I(g)$:

$$Q(g) = \alpha g(0) + (1-\alpha)g(1)$$

a) Quelle méthode d'intégration numérique retrouve-t-on lorsque $\alpha = 1$ puis lorsque $\alpha = 0$.
Pour $\alpha = 1$, on a $Q(f) = f(0) = (1-0)f(0)$, c'est la méthode d'intégration de rectangle simple à gauche.
Pour $\alpha = 0$, on a $Q(f) = f(1) = (1-0)f(1)$, c'est la méthode d'intégration de rectangle simple à droite.

b) Sachant que la formule $Q(g)$ est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 1, trouver la valeur de α.
Soit $P(x) = x \in \mathbb{R}_1[x]$, la formule est exacte pour tous polynôme de degré 1, alors

$$\int_0^1 P(x)dx = Q(P)$$

D'une part, on a $\int_0^1 P(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$
D'autre part, $Q(P) = \alpha P(0) + (1-\alpha)P(1) = 1-\alpha$
Par identification, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}$

(4) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, donner la valeur de $Q(f)$ et déduire l'erreur d'intégration E_q pour cette méthode.
La valeur de $Q(f)$:

$$Q(f) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'erreur E_q :

$$E_q = |I(f) - I_p| = \left|-1 + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right| \approx 0.0606$$

(5) Approcher l'intégrale $I(f)$ par la méthode composite des trapèzes I_T en considérant un pas de discrétisation $h = \frac{1}{2}$, puis déduire l'erreur d'intégration E_T pour cette méthode.
Le nombre de sous-intervalles n est donné par $n = (1-0)/h = 2$, La formule d'intégration des trapèzes composites est donnée par :

$$I_T = (h/2)(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2))$$

avec $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h = 1/2$ et $x_2 = x_0 + 2h = 1$. On obtient

$$I_T = \frac{1}{4}(f(0) + 2f(1/2) + f(1)) = \frac{1}{4}(\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 0.4003$$

L'erreur E_T est

$$E_T = |I(f) - I_T| = |-1 + \sqrt{2} - 0.4003| \approx 0.0139.$$

(6) En déduire laquelle des deux méthodes $Q(f)$ et I_T qui approche le mieux la valeur de $I(f)$. Justifier la réponse.
La méthode composite des trapèzes I_T approche le mieux la valeur de $I(f)$ car $E_T < E_q = E_p$