Chapitre 5 : Résolution d'équations difféentielles ordinaires

Préparé par :
Unité Pédagogique de Mathématiques

esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Plan

Principe général des méthodes numériques pour la résolution des problèmes de Cauchy

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \underset{T>0}{\forall t \in [t_0, t_0+T]} \subset \mathbb{R}$$

- $x : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1([t_0, t_0+T])$
- f une fonction continue sur $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}$.

Principe général des méthodes numériques pour la résolution des problèmes de Cauchy

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall t \in \underset{T>0}{[t_0, t_0+T]} \subset \mathbb{R}$$

- $x : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1([t_0, t_0+T])$
- f une fonction continue sur $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}$.

Le principe général de toutes les méthodes numérique pour la résolution de ce problème de Cauchy est :

Principe général des méthodes numériques pour la résolution des problèmes de Cauchy

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall t \in \underset{T>0}{[t_0, t_0+T]} \subset \mathbb{R}$$

- $x : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1([t_0, t_0+T])$
- f une fonction continue sur $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}$.

Le principe général de toutes les méthodes numérique pour la résolution de ce problème de Cauchy est :

- Discrétiser l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ en le subdivisant en N sous intervalles de longueur $h = \dfrac{T}{N}$, où h désigne le pas de discrétisation.

Principe général des méthodes numériques pour la résolution des problèmes de Cauchy

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall t \in \underset{T>0}{[t_0, t_0+T]} \subset \mathbb{R}$$

- $x : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1([t_0, t_0+T])$
- f une fonction continue sur $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}$.

Le principe général de toutes les méthodes numérique pour la résolution de ce problème de Cauchy est :

- Discrétiser l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ en le subdivisant en N sous intervalles de longueur $h = \dfrac{T}{N}$, où h désigne le pas de discrétisation.

- Trouver une valeur approchée x_n de la solution x en chaque nœud $t_n = t_0 + nh$, $n \in \{1, \cdots, N\}$ (On adoptera une subdivision uniforme) et Approcher $x(t_n)$ (la valeur exacte) par x_n, $n \in \{1, \cdots, N\}$ (une valeur approchée) .

Le principe de la méthode d'Euler explicite

Méthode 1

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \underset{T>0}{\forall t \in [t_0, t_0+T]} \subset \mathbb{R} \quad \xrightarrow[n\in\{1,\cdots,N\}]{\text{pour } t=t_n} \quad \begin{cases} x'(t_n) = f(t_n, x(t_n)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Le principe de la méthode d'Euler explicite

Méthode 1

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall t \in \underset{T>0}{[t_0, t_0 + T]} \subset \mathbb{R} \quad \xrightarrow[n \in \{1, \cdots, N\}]{\text{pour } t = t_n} \quad \begin{cases} x'(t_n) = f(t_n, x(t_n)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Nous approchons

- $f(t_n, x(t_n))$ par $f(t_n, x_n)$
- $x'(t_n)$ par la Formule de différence finie progressive sur $[t_n, t_{n+1}]$

$$\begin{aligned} x'(t_n) &\approx \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \\ &\approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h} \end{aligned}$$

Le principe de la méthode d'Euler explicite

Méthode 1

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall t \in \underset{T>0}{[t_0, t_0+T]} \subset \mathbb{R} \quad \xrightarrow[n\in\{1,\cdots,N\}]{\text{pour } t=t_n} \quad \begin{cases} x'(t_n) = f(t_n, x(t_n)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Nous approchons

- $f(t_n, x(t_n))$ par $f(t_n, x_n)$
- $x'(t_n)$ par la Formule de différence finie progressive sur $[t_n, t_{n+1}]$

$$x'(t_n) \approx \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}$$

définissant le schéma d'Euler progressif ou explicite

$$\begin{cases} \overbrace{\frac{x_{n+1} - x_n}{h}}^{\overset{x'(t_n)}{\approx}} = f(t_n, x_n) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Le principe de la méthode d'Euler explicite

Méthode 1

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall t \in \underset{T>0}{[t_0, t_0+T]} \subset \mathbb{R} \quad \xrightarrow[n\in\{1,\cdots,N\}]{\text{pour } t=t_n} \quad \begin{cases} x'(t_n) = f(t_n,x(t_n)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Nous approchons

- $f(t_n,x(t_n))$ par $f(t_n,x_n)$
- $x'(t_n)$ par la Formule de différence finie progressive sur $[t_n,t_{n+1}]$

$$x'(t_n) \approx \frac{x(t_{n+1})-x(t_n)}{t_{n+1}-t_n} \approx \frac{x_{n+1}-x_n}{h}$$

Schéma d'Euler explicite (méthode 1)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n,x_n) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \qquad \forall n \in \{0,\cdots,N-1\}$$

Le principe de la méthode d'Euler explicite

Méthode 2

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall t \in [t0, t0 + T] \subset \mathbb{R}$$

$$T > 0$$

Le principe de la méthode d'Euler explicite

Méthode 2

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall t \in \underset{T>0}{[t0, t0+T]} \subset \mathbb{R} \longrightarrow$$

Lien avec l'intégration numérique

Le principe de la méthode d'Euler explicite

Méthode 2

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \underset{T>0}{\forall t \in [t0, t0+T] \subset \mathbb{R}} \longrightarrow$$

Lien avec l'intégration numérique

D'une part ➥ $\displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s)ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))ds$

D'autre part ➦ $\displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s)ds = x(t_{n+1}) - x(t_n)$

Le principe de la méthode d'Euler explicite

Méthode 2

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall t \in \underset{T>0}{[t0, t0+T]} \subset \mathbb{R} \longrightarrow$$

Lien avec l'intégration numérique

$$\left.\begin{array}{l} \text{D'une part} \quad \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s)ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))ds \\ \text{D'autre part} \quad \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s)ds = x(t_{n+1}) - x(t_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{x(t_{n+1}) - x(t_n)}_{\underset{x_{n+1}-x_n}{\approx}} = \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))ds}_{I}$$

Le principe de la méthode d'Euler explicite

Méthode 2

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall t \in \underset{T>0}{[t0, t0+T]} \subset \mathbb{R}$$ ⟶ Lien avec l'intégration numérique

D'une part ➥ $$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s)ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))ds$$

➦ D'autre part $$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s)ds = x(t_{n+1}) - x(t_n)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{x(t_{n+1}) - x(t_n)}_{\underset{x_{n+1}-x_n}{\approx}} = \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))ds}_{I}$$

Basées sur l'approximer de *I* par l'une des méthodes numériques simples, différents schémas numériques ont été développés :

- Rg : Méthode d'Euler explicite
- Rd : Méthode d'Euler implicite
- Rm : Méthode point milieu
- Trapèze : Méthode de Heun ou de Runge Kutta d'ordre 2
- Simpson : Méthode de Runge Kutta d'ordre 4

Schéma d'Euler explicite

L'intégrale I peut s'approcher par la méthode du rectangle à gauche :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))ds \approx (t_{n+1} - t_n).f(t_n, x(t_n))$$

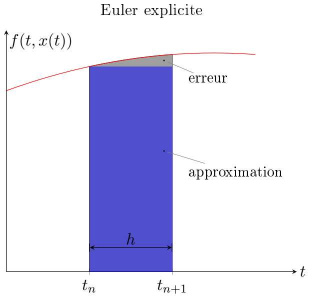
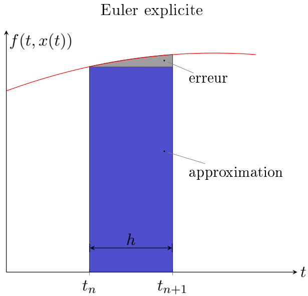


Schéma d'Euler explicite

L'intégrale I peut s'approcher par la méthode du rectangle à gauche :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s,x(s))ds \approx (t_{n+1}-t_n).f(t_n,x(t_n))$$



D'où le schéma itératif suivant:

Schéma d'Euler explicite (méthode 2)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n,x_n) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \qquad \forall n \in \{0,\cdots,N-1\}$$

Application de la méthode d'Euler explicite

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle $x'(t) = -\frac{1}{1+t^2}x(t)$.
Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $x(0) = 5$, déterminer la concentration à $t = 2$ à l'aide de la méthode d'Euler explicite avec un pas $h = 0.5$.

Application de la méthode d'Euler explicite

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle $x'(t) = -\frac{1}{1+t^2}x(t)$.
Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $x(0) = 5$, déterminer la concentration à $t = 2$ à l'aide de la méthode d'Euler explicite avec un pas $h = 0.5$.
Réponse:

- $t_1 = t_0 + h = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h.f(t_0, x_0) \\ &= 5 - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+t_0^2}.x_0 \\ &= 5 - \frac{1}{2}.5 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Application de la méthode d'Euler explicite

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle $x'(t) = -\frac{1}{1+t^2}x(t)$.
Sachant qu'à l'instant $t=0$ la concentration est $x(0)=5$, déterminer la concentration à $t=2$ à l'aide de la méthode d'Euler explicite avec un pas $h=0.5$.
Réponse:

- $t_1 = t_0 + h = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h.f(t_0, x_0) \\ &= 5 - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+t_0^2}.x_0 \\ &= 5 - \frac{1}{2}.5 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

- $t_2 = t_1 + h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h.f(t_1, x_1) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+t_1^2}.x_1 \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}.\frac{4}{5}.\frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Application de la méthode d'Euler explicite

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle $x'(t) = -\frac{1}{1+t^2}x(t)$.
Sachant qu'à l'instant $t=0$ la concentration est $x(0)=5$, déterminer la concentration à $t=2$ à l'aide de la méthode d'Euler explicite avec un pas $h=0.5$.
Réponse:

- $t_1 = t_0 + h = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h.f(t_0, x_0) \\ &= 5 - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+t_0^2}.x_0 \\ &= 5 - \frac{1}{2}.5 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

- $t_2 = t_1 + h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h.f(t_1, x_1) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+t_1^2}.x_1 \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}.\frac{4}{5}.\frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- $t_3 = t_2 + h = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + h.f(t_2, x_2) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+1^2}.\frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{8} \\ &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Application de la méthode d'Euler explicite

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle $x'(t) = -\frac{1}{1+t^2}x(t)$.
Sachant qu'à l'instant $t=0$ la concentration est $x(0)=5$, déterminer la concentration à $t=2$ à l'aide de la méthode d'Euler explicite avec un pas $h=0.5$.
Réponse:

- $t_1 = t_0 + h = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h.f(t_0, x_0) \\ &= 5 - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+t_0^2}.x_0 \\ &= 5 - \frac{1}{2}.5 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

- $t_2 = t_1 + h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h.f(t_1, x_1) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+t_1^2}.x_1 \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}.\frac{4}{5}.\frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- $t_3 = t_2 + h = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + h.f(t_2, x_2) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+1^2}.\frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{8} \\ &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

- $t_4 = t_3 + h = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 + h.f(t_3, x_3) \\ &= \frac{9}{8} - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+(\frac{3}{2})^2}.\frac{9}{8} \\ &= \frac{9}{8} - \frac{9}{52} \\ &= \frac{396}{416} \end{aligned}$$

Application de la méthode d'Euler explicite

Étant donné que la solution analytique de ce problème est donnée par:

$$x(t) = 5\exp(-\arctan(t)), \qquad \text{pour } t \geq 0$$

Calculer l'erreur commise par la méthode d'Euler explicute au point 2.

Application de la méthode d'Euler explicite

Étant donné que la solution analytique de ce problème est donnée par:

$$x(t) = 5\exp(-\arctan(t)), \qquad \text{pour } t \geq 0$$

Calculer l'erreur commise par la méthode d'Euler explicute au point 2.

Réponse:

L'erreur commise par la méthode d'Euler explicite au point $t = 2$ est donnée par:

$$E(t = 2) = |x(2) - x_4|$$

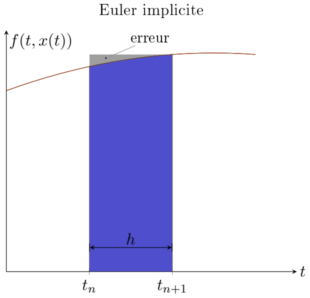
or $x(2) = 5\exp(-\arctan(2)) = 1.652499838$ donc

$$\begin{aligned} E(2) &= |1.652499838 - 0.951923| \\ &= 0.70057 \end{aligned}$$

Le principe de la méthode d'Euler implicite

On aurait également pu approcher l'intégrale I par la méthode du rectangle à droite :

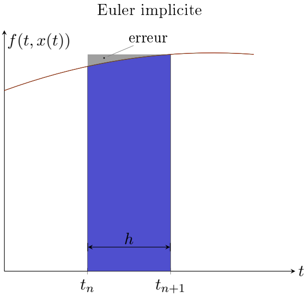
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s,x(s))ds \approx (t_{n+1}-t_n).f(t_{n+1},x(t_{n+1}))$$



Le principe de la méthode d'Euler implicite

On aurait également pu approcher l'intégrale I par la méthode du rectangle à droite :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s,x(s))ds \approx (t_{n+1}-t_n).f(t_{n+1},x(t_{n+1}))$$



D'où le schéma itératif suivant:

Schéma d'Euler implicite

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \forall n \in \{0,\cdots,N-1\}$$

Application

On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(P.C): \begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{1+t^2} x(t), & t \geq 0 \\ x(0) = 5 \end{cases}$$

1. pour $h = \frac{1}{2}$, montrer que la solution numérique x_{n+1} du problème de Cauchy $(P.C)$ trouvée par la méthode d'Euler implicite vérifie la relation suivante :

$$x_{n+1} = x_n . \frac{4 + (2t_n + 1)^2}{6 + (2t_n + 1)^2}, \qquad n \geq 0$$

Application

On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(P.C): \begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{1+t^2}x(t), & t \geq 0 \\ x(0) = 5 \end{cases}$$

1. pour $h = \frac{1}{2}$, montrer que la solution numérique x_{n+1} du problème de Cauchy $(P.C)$ trouvée par la méthode d'Euler implicite vérifie la relation suivante :

$$x_{n+1} = x_n.\frac{4+(2t_n+1)^2}{6+(2t_n+1)^2}, \qquad n \geq 0$$

pour $h = \frac{1}{2}$, on a $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}.f(t_{n+1}, x_{n+1})$ avec $f(t, x(t)) = -\frac{1}{1+t^2}x(t)$.

Application

On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(P.C): \begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{1+t^2}x(t), & t \geq 0 \\ x(0) = 5 \end{cases}$$

1. pour $h = \frac{1}{2}$, montrer que la solution numérique x_{n+1} du problème de Cauchy $(P.C)$ trouvée par la méthode d'Euler implicite vérifie la relation suivante :

$$x_{n+1} = x_n.\frac{4+(2t_n+1)^2}{6+(2t_n+1)^2}, \qquad n \geq 0$$

pour $h = \frac{1}{2}$, on a $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}.f(t_{n+1}, x_{n+1})$ avec $f(t, x(t)) = -\frac{1}{1+t^2}x(t)$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+t_{n+1}^2}.x_{n+1} \\ &= x_n - \frac{1}{2(1+(t_n+\frac{1}{2})^2)}.x_{n+1} \\ &= x_n - \frac{1}{2\frac{(4+(2t_n+1)^2)}{4}}.x_{n+1} \\ &= x_n - \frac{2}{4+(2t_n+1)^2}.x_{n+1} \end{aligned}$$

Application

On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(P.C):\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{1+t^2}x(t), & t \geq 0 \\ x(0) = 5 \end{cases}$$

1. pour $h = \frac{1}{2}$, montrer que la solution numérique x_{n+1} du problème de Cauchy $(P.C)$ trouvée par la méthode d'Euler implicite vérifie la relation suivante :

$$x_{n+1} = x_n.\frac{4+(2t_n+1)^2}{6+(2t_n+1)^2}, \qquad n \geq 0$$

pour $h = \frac{1}{2}$, on a $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}.f(t_{n+1}, x_{n+1})$ avec $f(t, x(t)) = -\frac{1}{1+t^2}x(t)$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+t_{n+1}^2}.x_{n+1} \\ &= x_n - \frac{1}{2(1+(t_n+\frac{1}{2})^2)}.x_{n+1} \\ &= x_n - \frac{1}{2\frac{(4+(2t_n+1)^2)}{4}}.x_{n+1} \\ &= x_n - \frac{2}{4+(2t_n+1)^2}.x_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}.(1+\frac{2}{4+(2t_n+1)^2}) &= x_n \\ x_{n+1}.(\frac{6+(2t_n+1)^2}{4+(2t_n+1)^2}) &= x_n \end{aligned}$$

d'où

$$x_{n+1} = x_n.\frac{4+(2t_n+1)^2}{6+(2t_n+1)^2}$$

2. Appliquer ce schéma itératif pour résoudre numériquement $(P.C)$ sur l'intervalle $[0, 2]$.

2. Appliquer ce schéma itératif pour résoudre numériquement $(P.C)$ sur l'intervalle $[0,2]$.

Réponse:

- $t_1 = t_0 + h = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 . \frac{4+(2t_0+1)^2}{6+(2t_0+1)^2} \\ &= \frac{25}{7} \end{aligned}$$

2. Appliquer ce schéma itératif pour résoudre numériquement $(P.C)$ sur l'intervalle $[0,2]$.

Réponse:

- $t_1 = t_0 + h = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 . \frac{4+(2t_0+1)^2}{6+(2t_0+1)^2} \\ &= \frac{25}{7} \end{aligned}$$

- $t_2 = t_1 + h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 . \frac{4+(2t_1+1)^2}{6+(2t_1+1)^2} \\ &= \frac{20}{7} \end{aligned}$$

2. Appliquer ce schéma itératif pour résoudre numériquement $(P.C)$ sur l'intervalle $[0,2]$.

Réponse:

- $t_1 = t_0 + h = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 . \frac{4+(2t_0+1)^2}{6+(2t_0+1)^2} \\ &= \frac{25}{7} \end{aligned}$$

- $t_2 = t_1 + h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 . \frac{4+(2t_1+1)^2}{6+(2t_1+1)^2} \\ &= \frac{20}{7} \end{aligned}$$

- $t_3 = t_2 + h = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 . \frac{4+(2t_2+1)^2}{6+(2t_2+1)^2} \\ &= \frac{52}{7} \end{aligned}$$

2. Appliquer ce schéma itératif pour résoudre numériquement $(P.C)$ sur l'intervalle $[0,2]$.

Réponse:

- $t_1 = t_0 + h = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 . \frac{4+(2t_0+1)^2}{6+(2t_0+1)^2} \\ &= \frac{25}{7} \end{aligned}$$

- $t_2 = t_1 + h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 . \frac{4+(2t_1+1)^2}{6+(2t_1+1)^2} \\ &= \frac{20}{7} \end{aligned}$$

- $t_3 = t_2 + h = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 . \frac{4+(2t_2+1)^2}{6+(2t_2+1)^2} \\ &= \frac{52}{7} \end{aligned}$$

- $t_4 = t_3 + h = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 . \frac{4+(2t_3+1)^2}{6+(2t_3+1)^2} \\ &= \frac{520}{231} \end{aligned}$$