Module : Analyse numériques

Chapitre 3 : Intégration Numérique

Partie 2 : Formules de Quadratures

Formule de quadrature

Rappel

Interpolation de Lagrange

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et $(x_i, y_i = f(x_i))_{0\leq i\leq n}$ $n+1$ points d'interpolation tel que $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b$, alors f est interpolée par un polynôme d'interpolation de Lagrange $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) = P(x) + E_p(f),$$

avec

- $P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange.
- $E_p(f)$ est l'erreur d'interpolation de Lagrange.

Formule de quadrature

Rappel

Interpolation de Lagrange

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et $(x_i, y_i = f(x_i))_{0 \le i \le n}$ $n+1$ points d'interpolation tel que $a \le x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le b$, alors f est interpolée par un polynôme d'interpolation de Lagrange $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) = P(x) + E_p(f),$$

avec

- $P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange.
- $E_p(f)$ est l'erreur d'interpolation de Lagrange.

L'intégrale $I(f)$ peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} I(f) = \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b P(x)dx + \int_a^b E_p(f)dx, \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)dx + E_q(f), \end{aligned}$$

où $E_q(f) = \int_a^b E_p(f)dx$ est l'erreur d'intégration.

Si on pose $\mathcal{W}_i = \int_a^b L_i(x)dx$, on trouve

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{W}_i f(x_i) + E_q(f).$$

Formule de quadrature

Rappel

Interpolation de Lagrange

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et $(x_i, y_i = f(x_i))_{0\leq i\leq n}$ $n+1$ points d'interpolation tel que $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b$, alors f est interpolée par un polynôme d'interpolation de Lagrange $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) = P(x) + E_p(f),$$

avec

- $P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange.
- $E_p(f)$ est l'erreur d'interpolation de Lagrange.

L'intégrale $I(f)$ peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} I(f) = \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b P(x)dx + \int_a^b E_p(f)dx, \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)dx + E_q(f), \end{aligned}$$

où $E_q(f) = \int_a^b E_p(f)dx$ est l'erreur d'intégration.
Si on pose $\mathcal{W}_i = \int_a^b L_i(x)dx$, on trouve

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{W}_i f(x_i) + E_q(f).$$

Notre objectif est d'approcher $I(f)$ par une somme finie.

Formule de quadrature

On appelle formule de quadrature ou formule d'intégration numérique toute formule permettant de calculer une approximation de $I(f)$.

Définition

On dit qu'une **formule de quadrature de type interpolation** toute formule s'écrie sous la forme suivante :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq I_q(f) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{W}_i f(x_i),$$

où

- $\mathcal{W}_i = \int_a^b L_i(x)dx$: poids de la formule de quadrature.
- x_i : nœuds ou points d'intégration.

Formule de quadrature

On appelle formule de quadrature ou formule d'intégration numérique toute formule permettant de calculer une approximation de $I(f)$.

Définition

On dit qu'une **formule de quadrature de type interpolation** toute formule s'écrie sous la forme suivante :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \simeq I_q(f) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{W}_i f(x_i),$$

où

- $\mathcal{W}_i = \int_a^b L_i(x)dx$: poids de la formule de quadrature.
- x_i : nœuds ou points d'intégration.

Exemple : Soit f une fonction continue.
Les formules suivantes sont des formules de quadrature:

1. $\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq I_q(f) = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$.
2. $\int_0^1 f(x)dx \simeq I_q(f) = 0.5f(0) + 0.4238f(1)$.

Formule de quadrature

Définition

Définitions

- L'**erreur de quadrature** est donnée par

$$E_q(f) = |I(f) - I_q(f)| \,.$$

- La formule de quadrature est **exacte** lorsque l'erreur de quadrature $E_q(f)$ vaut zéro.

Formule de quadrature

Définition

Définitions

- L'**erreur de quadrature** est donnée par

$$E_q(f) = |I(f) - I_q(f)| \, .$$

- La formule de quadrature est **exacte** lorsque l'erreur de quadrature $E_q(f)$ vaut zéro.

Exercice : Parmi les formules de quadrature précédentes, indiquez laquelle est exacte, avec $f(x) = \dfrac{1}{1.2626 + x}$.

Formule de quadrature

Définition

Définitions

- L'**erreur de quadrature** est donnée par

$$E_q(f) = |I(f) - I_q(f)| \, .$$

- La formule de quadrature est **exacte** lorsque l'erreur de quadrature $E_q(f)$ vaut zéro.

Exercice : Parmi les formules de quadrature précédentes, indiquez laquelle est exacte, avec $f(x) = \dfrac{1}{1.2626 + x}$.

Solution :

Formule de quadrature

Définition

Définitions

- L'**erreur de quadrature** est donnée par

$$E_q(f) = |I(f) - I_q(f)| .$$

- La formule de quadrature est **exacte** lorsque l'erreur de quadrature $E_q(f)$ vaut zéro.

Exercice : Parmi les formules de quadrature précédentes, indiquez laquelle est exacte, avec $f(x) = \dfrac{1}{1.2626 + x}$.

Solution :

1. On a $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = \Big[\log(1.2626 + x)\Big]_{-1}^{1} = \log(\frac{2.2626}{0.2626}) = 2.1536.$
   Or $I_q(f) = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) = \frac{1}{3}\frac{1}{0.2626} + \frac{4}{3}\frac{1}{1.2626} + \frac{1}{3}\frac{1}{2.2626} = 2.4727.$
   Alors
   $$E_q(f) = \Big|I(f) - I_q(f)\Big| = \Big|2.1536 - 2.4727\Big| = 0.3191$$
   D'où, cette formule n'est pas exacte.

Définitions

- L'**erreur de quadrature** est donnée par

$$E_q(f) = |I(f) - I_q(f)| .$$

- La formule de quadrature est **exacte** lorsque l'erreur de quadrature $E_q(f)$ vaut zéro.

Exercice : Parmi les formules de quadrature précédentes, indiquez laquelle est exacte, avec $f(x) = \dfrac{1}{1.2626 + x}$.

Solution :

1. On a $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = \Big[\log(1.2626 + x)\Big]_{-1}^{1} = \log(\frac{2.2626}{0.2626}) = 2.1536.$
   Or $I_q(f) = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) = \frac{1}{3}\frac{1}{0.2626} + \frac{4}{3}\frac{1}{1.2626} + \frac{1}{3}\frac{1}{2.2626} = 2.4727.$
   Alors
   $$E_q(f) = \big|I(f) - I_q(f)\big| = \big|2.1536 - 2.4727\big| = 0.3191$$
   D'où, cette formule n'est pas exacte.

2. On a $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)dx = \Big[\log(1.2626 + x)\Big]_{0}^{1} = \log(\frac{2.2626}{1.2626}) = 0.5833.$
   Or $I_q(f) = 0.5f(0) + 0.4238f(1) = 0.5\frac{1}{1.2626} + 0.4238\frac{1}{2.2626} = 0.5833$
   Alors
   $$E_q(f) = \big|I(f) - I_q(f)\big| = \big|0.5833 - 0.5833\big| = 0$$
   D'où, cette formule est exacte.

Formule de quadrature

Degré de précision

Formule de quadrature

Degré de précision

Définition

Une formule de quadrature est dite de **degré de précision** (degré d'exactitude) n, s'il elle est exacte pour tout polynôme $P_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \cdots, n$ et non exacte pour $P_{n+1}(x) = x^{n+1}$.

Formule de quadrature

Degré de précision

Définition

Une formule de quadrature est dite de **degré de précision** (degré d'exactitude) n, s'il elle est exacte pour tout polynôme $P_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \cdots, n$ et non exacte pour $P_{n+1}(x) = x^{n+1}$.

Proposition

Une formule de quadrature a un degré de précision au moins égale n si et seulement si c'est une formule de quadrature interpolatoire à $n + 1$ points.

Formule de quadrature

Degré de précision

Définition

Une formule de quadrature est dite de **degré de précision** (degré d'exactitude) n, s'il elle est exacte pour tout polynôme $P_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \cdots, n$ et non exacte pour $P_{n+1}(x) = x^{n+1}$.

Proposition

Une formule de quadrature a un degré de précision au moins égale n si et seulement si c'est une formule de quadrature interpolatoire à $n+1$ points.

Exemple : Soit f une fonction continue.
La formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq I_q(f) = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$$

est de type interpolation à 3 points, donc elle est exacte pour tout polynôme de degré ≤ 2.

Formule de quadrature

Exercice

Soient f une fonction continue sur $[-1, 1]$ et $I(f)$ l'intégrale suivante

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

On considère la formule de quadrature $I_q(f)$ suivante approchant la valeur de $I(f)$:

$$I_q(f) = \alpha f(-1) + \beta f(1),$$

avec α et β deux réels.

1. Trouver α et β.
2. Montrer que cette formule est de degré de précision 1.

Formule de quadrature

solution

1. D'après la proposition, on remarque que cette formule de quadrature est de type interpolation à 2 points, donc elle est exacte pour tout polynôme de degré ≤ 1.

Trouvons α et β : Soit $P_k(x) = x^k$ avec $k = 0, 1$.

- Pour $k = 0$, on a $f(x) = P_0(x) = 1$, d'une part

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2.$$

D'autre part, $I_q(f) = \alpha f(-1) + \beta f(1) = \alpha \times 1 + \beta \times 1 = \alpha + \beta$.
Puisque la formule de quadrature est exacte pour un polynôme de degré 0, alors on a $I(f) = I_q(f)$, par suite

$$\alpha + \beta = 2 \tag{1}$$

- Pour $k = 1$, on a $f(x) = P_1(x) = x$, d'une part

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

D'autre part, $I_q(f) = \alpha f(-1) + \beta f(1) = \alpha \times (-1) + \beta \times 1 = -\alpha + \beta$.
Puisque la formule de quadrature est exacte pour un polynôme de degré 1, alors on a $I(f) = I_q(f)$, par suite

$$-\alpha + \beta = 0. \tag{2}$$

Les deux équations (1) et (2) donnent le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 0 = -\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$$

Formule de quadrature

solution

Donc la formule de quadrature est :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq f(-1) + f(1).$$

2. Montrons que le degré de précision de cette formule est 1 i.e. on montre que la formule n'est pas exacte pour un polynôme de degré 2.

Posons $P_2(x) = x^2$:

on a $I_q(P_2) = P_2(-1) + P_2(1) = 2.$

$$\int_{-1}^{1} P_2(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \neq I_q(P_2).$$

Alors le degré de précision est 1.