Série d'exercices : Résolution d'équations différentielles ordinaires

Exercice 3

Préparé par :

Unité Pédagogique de Mathématiques

Exercice 2

Enoncé

Le problème de Cauchy défini par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x' = x + e^{2t}, & t \geq 0 \\ & x(0) = 2. \end{cases} \tag{1}$$

possède la solution analytique suivante $x(t) = e^{t} + e^{2t}$.

1. Donner le schéma d'Euler explicite (progressif) avec un pas de temps h constant.
2. En prenant $h = 0.1$:
   1. Faire 3 itérations de la méthode d'Euler explicite.
   2. Calculer l'erreur commise sur x_3, la valeur approchée de $x(0.3)$.
3. En prenant $h = 0.05$:
   1. Faire 6 itérations de la méthode d'Euler explicite et
   2. Calculer l'erreur commise sur x_6, la valeur approchée de $x(0.3)$.
4. Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 1

Solution

Question 1 : Donner le schéma d'Euler explicite avec h constant.

On commence d'abord par la discrétisation de l'intervalle de temps avec un pas de temps h.
On pose : $t_0 = 0$, $t_1 = t_0 + h = h, \dots, t_n = t_0 + nh = nh, \dots$ et on note $x(t_n) = x_n$.

Schéma d'Euler explicite (progressif) :

- $x'(t_n) = f(t_n, x_n)$ avec $f(t, x(t)) = x(t) + \exp(2t)$.
- En utilisant la méthode de dérivation numérique pour $x'(t)$ en $t = t_n$ par:

$$x'(t_n) = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}$$

Ainsi, $\forall n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} = f(t_n, x_n) \Leftrightarrow \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} &= x(t_n) + \exp(2t_n) \\
\Leftrightarrow x(t_{n+1}) &= x(t_n) + h(x_n + \exp(2t_n)) \\
\Leftrightarrow x_{n+1} &= (1+h)x_n + h\exp(2t_n)
\end{aligned}$$

Donc le schéma d'Euler explicite pour (PC) est

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1+h)x_n + h\exp(2t_n), & \forall n \geq 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Question 2 : Pour $h = 0.1$, faire 3 itérations de la méthode d'Euler explicite.

En prenant $h = 0.1$: le schéma d'euler explicite s'écrit:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1.1 * x_n + 0.1 \exp(2t_n), & \forall n \geq 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

(a)

- Itération 1: pour $n = 0$ on a $x_0 = 2$ et $t_0 = 0$, donc
$$x_1 = 1.1 * x_0 + 0.1 \exp(2t_0) = 2.3$$
- Itération 2: pour $n = 1$ on a $x_1 = 2.3$ et $t_1 = 0.1$, donc
$$x_2 = 1.1 * x_1 + 0.1 \exp(2t_1) = 2.6521$$
- Itération 3: Pour $n = 2$ on a $x_2 = 2.6521$ et $t_2 = 0.2$, donc
$$x_3 = 1.1 * x_2 + 0.1 \exp(2t_2) = x_3 = 3.0665$$

(b) L'erreur commise sur x_3, la valeur approchée de $x(0.3)$, est donnée par :

$$E_3 = |x_3 - x(0.3)| = |3.0665 - \exp(0.3) - \exp(0.6)| = 0.1055$$

Question 3 : Pour $h = 0.05$, faire 3 itérations de la méthode d'Euler explicite.

En prenant $h = 0.05$, donc le schéma d'Euler explicite s'écrit:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1.05 * x_n + 0.05 \exp(2t_n), & \forall n \geq 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

(a)

- Itération 1: pour $n = 0$ on a $x_0 = 2$ et $t_0 = 0$, donc
$$x_1 = 1.05 * x_0 + 0.05 \exp(2t_0) = 2.15$$
- Itération 2: pour $n = 1$ on a $x_1 = 2.15$ et $t_1 = 0.05$, donc
$$x_2 = 1.05 * x_1 + 0.05 \exp(2t_1) = 2.3128$$
- Itération 3: pour $n = 2$ on a $x_2 = 2.3128$ et $t_2 = 0.1$, donc
$$x_3 = 1.05 * x_2 + 0.05 \exp(2t_2) = 2.4895$$
- Itération 4: pour $n = 3$ on a$x_3 = 2.4895$ et $t_3 = 0.15$, donc
$$x_4 = 1.05 * x_3 + 0.05 \exp(2t_3) = 2.6815$$
- Itération 5: pour $n = 4$ on a $x_4 = 2.6815$ et $t_4 = 0.2$, donc
$$x_5 = 1.05 * x_4 + 0.05 \exp(2t_4) = 2.8902$$
- Itération 6: pour $n = 5$ on a $x_5 = 2.8902$ et $t_5 = 0.25$, donc
$$x_6 = 1.05 * x_5 + 0.05 \exp(2t_5) = 3.1171$$

(b) L'erreur commise sur x_6, la valeur approchée de $x(0.3)$ est donnée par:

$$E_6 = |x_6 - x(0.3)| = |3.1171 - \exp(0.3) - \exp(0.6)| = 0.0549$$

Question 4 : Interpréter les résultats obtenus.

On a $E_6 < E_3$ donc lorsque le nombre de points est augmenté, c'est-à-dire la valeur de h diminue, la solution de schéma explicite converge vers la solution exacte.