Résolution numérique des équations non-linéaires

Méthode du point fixe

Analyse numérique - $3^{\text{ème}}$ année -

Méthode du point fixe

Principe de la méthode

Soit g une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, le point x^* qui vérifie $g(x^*) = x^*$, avec $x^* \in [a, b]$, est dit point fixe de la fonction g. La méthode du point fixe permet de passer de la recherche de la racine de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ à la recherche du point fixe de la fonction g, tel que $x = g(x)$. En effet, les deux problèmes sont équivalents

$$(f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)).$$

Par exemple:
L'équation $xcos(x) - sin(x) = 0$ est équivalent à

$$x = \frac{sin(x)}{cos(x)}.$$

Question

Comment montrer l'existence et l'unicité du point fixe ?

Existence des points fixes

Théorème (Existence des points fixes)

Soit $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. I est un intervalle stable par g (c-à-d $g(I) \subset I$).
alors g possède au moins un point fixe $x^* \in I$.

Exercice

Montrer que l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - x^2$ admet au moins un point fixe dans $[0, 1]$.

Existence des points fixes

Théorème (Existence des points fixes)

Soit $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. I est un intervalle stable par g (c-à-d $g(I) \subset I$).
alors g possède au moins un point fixe $x^* \in I$.

Exercice

Montrer que l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - x^2$ admet au moins un point fixe dans $[0, 1]$.

Solution

$g(x)$ est dérivable sur I et on a $g'(x) = 1 - 2x$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
g'		$+$	0	$-$	
g	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

D'après le tableau de variation de g, on a $g(I) = [0, \frac{1}{4}] \subset I$ donc I est stable par g.

Existence et unicité du point fixe

Théorème (Existence et unicité)

Soit $g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie les hypothèses suivantes:

H1) g est dérivable sur I,

H2) $g(I) \subset I$.

H3) $\exists M \in]0, 1[: \forall x \in I \quad |g'(x)| \leq M$. On dit que g est une contraction stricte

Alors il existe une unique racine c de l'équation $g(x) = x$, appelée point fixe de g.

Démonstration

Soit $h(x) = g(x) - x$, qui est strictement décroissante puisque :$h'(x) = g'(x) - 1 < 0$.
Or g prend ses valeurs dans $[a, b]$, ce qui donne $h(a) = g(a) - a \geq 0$ et $h(b) = g(b) - b \leq 0$. D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique point $c \in [a, b]$ telque $h(c) = 0$.

Algorithme et estimation d'erreur

Soit g une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ qui vérifie les trois hypothèses (H1), (H2) et (H3).

Algorithme de la méthode de point fixe

On fixe un point x_0 quelconque de $[a, b]$ et on construit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérés de la manière suivante

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b], \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

Convergence de la suite de la méthode de point fixe

D'après l'hypothèse (H3), il existe $M \in]0, 1[$ un majorant de $|g'(x)|$ sur $[a, b]$, si c est l'unique point fixe de g sur $[a, b]$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie:

$$|x_n - c| \leq M^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l'unique point fixe c.

Démonstration

Si c est le point fixe de g, on a

$$|x_1 - c| = |g(x_0) - g(c)| \leq M|x_0 - c|$$

$$|x_2 - c| = |g(x_1) - g(c)| \leq M|x_1 - c| \leq M^2|x_0 - c|$$

$$\vdots$$

En réitérant, on voit bien qu'on s'approche de plus en plus de la racine : C'est le principe des approximations successives. Plus précisément, on démontre par récurrence la majoration d'erreur

$$\forall n \geq 0 \quad |x_n - c| \leq M^n|x_0 - c| \leq M^n|b - a|$$

Démonstration

En effet, la propriété est évidemment vérifiée pour $n = 0$ et si on la suppose vérifiée à un rang $n-1$ donné, le théorème des accroissements finis implique l'existence d'un $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$
\begin{aligned}
|x_n - c| &= |g(x_{n-1}) - g(c)| \\
&\leq |g'(\xi)(x_{n-1} - c)| \\
&\leq M|x_{n-1} - c| \\
&\leq MM^{n-1}|x_0 - c| \\
&\leq M^n|x_0 - c| \\
&\leq M^n|b - a|
\end{aligned}
$$

Puisque $M \in]0, 1[$, alors $\lim_{n\to\infty} M^n = 0$
Ainsi, la suite x_n converge vers c.

Test d'arrêt

Fixons $\epsilon > 0$. Pour que x_n soit une valeur approché de c à ϵ près, il suffit que

$$M^n|b-a| \leq \epsilon$$

c-à-d

$$n \geq \frac{\ln \epsilon - \ln|b-a|}{\ln M}.$$

Donc on va prendre $n_0 = E(\dfrac{\ln \epsilon - \ln|b-a|}{\ln M}) + 1.$
Une valeur approchée à ϵ près de la racine c est x_{n_0}

Remarque:

En pratique, il est très intéressant de bien déterminer la constante M qui est le minimum possible des majorants de $|g'(x)|$. Il s'agit donc de prendre $M = \max\limits_{[a,b]} |g'(x)|$.

Exemple

Pour calculer la solution de l'équation $x = \frac{9}{10}e^{-x}$ dans l'intervalle $[0,1]$ à 10^{-2} près par la méthode du point fixe, on procède comme suit :

- On définit la fonction g telle que
$$g(x) = \frac{9}{10}e^{-x}$$
Cette fonction est continue et dérivable sur $[0,1]$.
- Pour vérifier la deuxième hypothèse, on étudie les variations de g en calculant g':
$$g'(x) = \frac{-9}{10}e^{-x} < 0$$
D'où g prend ses valeurs dans
$$[g(1), g(0)] = [0.3311, 0.9] \subset [0,1].$$
- Pour chercher le maximum de g', on doit claculer g". Mais dans cet exemple, on a $|g'(x)| = \frac{9}{10}e^{-x} \leq \frac{9}{10} \forall x \in [0,1]$, d'où $M = 0,9$.
- Le nombre n_0 de termes à calcuer pour obtenir une précision de 10^{-2} est
$$n_0 = E\left(\frac{\log(10^{-2}) - \log|1|}{\log(0,9)}\right) + 1 = 44.$$

Exemple

On retrouve la valeur approchée 0.52 à 10^{-2} près en utilisant un code PYTHON.

```
In [19]: def point_fixe(f,a,b,x0,epsilon,M):
             val=M*(b-a)
             k=1
             while val>epsilon:
                 x0=f(x0)
                 val=M*val
                 k+=1

             return k,x0
```

```
In [21]: f=lambda x:9*np.exp(-x)/10
         a=0
         b=1
         x0=1
         epsilon=10**(-2)
         M=0.9
         point_fixe(f,a,b,x0,epsilon,M)

Out[21]: (44, 0.529832965632886)
```

Figure: Point fixe

Exemple

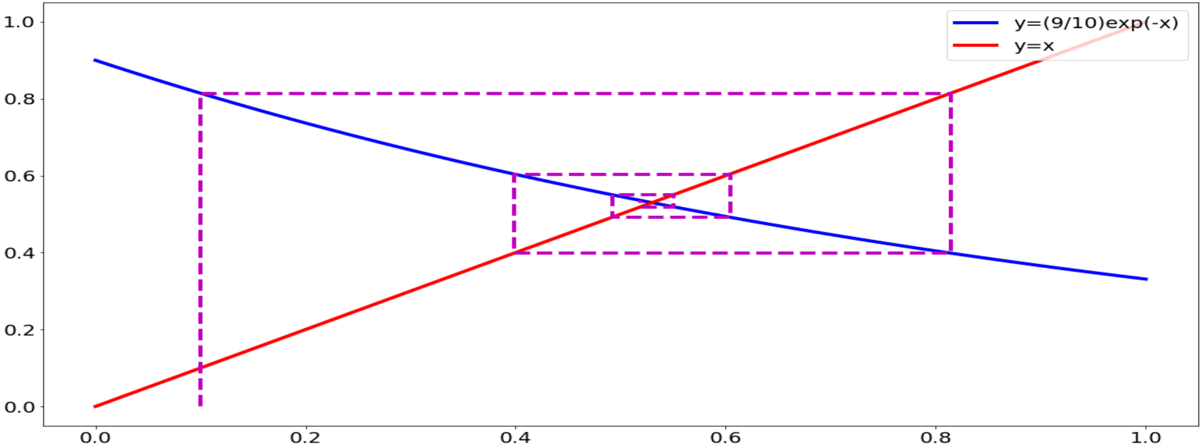

Figure: Point fixe

Vitesse de convergence

Elle dépend de la valeur de M.

- Si M est proche de 1, la convergence est lente. On a vu dans l'exemple précédent, où $M = 0.9$ qu'il fallait 44 termes pour obtenir une précision de 10^{-2}.
- Si $M = 0.5$, on retrouve la vitesse de convergence de la méthode de dichotomie.
- Si M est proche de 0, on a une convergence rapide.