Module : Analyse numériques

Chapitre 3 : Intégration Numérique

Partie 1 : Introduction

Objectif du chapitre

Le but de ce chapitre est d'abordrer le calcul numérique de l'intégrale d'une fonction $f(x)$ sur un domaine fini délimité par des bornes finies a et b tel que $a < b$.

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Définition

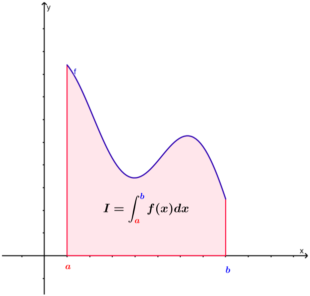
Objectif du chapitre

Le but de ce chapitre est d'abordrer le calcul numérique de l'intégrale d'une fonction $f(x)$ sur un domaine fini délimité par des bornes finies a et b tel que $a < b$.

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Définition

Graphiquement : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(x)dx$ l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f.



Motivations

Dans certains cas limités, une telle intǵrale peut être calculée analytiquement.

- Primitive usuelle:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

- Changement de variable:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x^2)dx = ?$$

On pose: $u = x^2$ donc $du = 2xdx$ et on obtient:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x^2)dx = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(u)du.$$

$$= \sin(\frac{\pi^2}{4}).$$

- Intégration par partie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = ?$$

On pose

$$u(x) = x \to u'(x) = 1,$$

$$v'(x) = \cos x \to v(x) = \sin(x).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx,$$

$$= \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1.$$

Le plus souvent un des cas suivants se présente:

- Le calcul analytique de l'intégrale est long et compliqué.
- Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée .
- L'intégrale n'a pas d'expression analytique, par expemle la fonction $Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

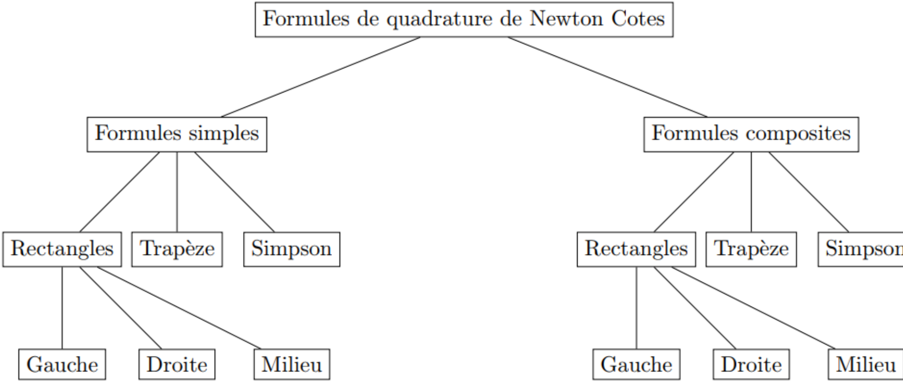
Le plus souvent un des cas suivants se présente:

- Le calcul analytique de l'intégrale est long et compliqué.
- Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée .
- L'intégrale n'a pas d'expression analytique, par expemle la fonction $Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Pour surmonter ces problèmes, on préfèrera calculer numériquement la valeur de l'intégrale I. Cependant il existe une vaste familles de méthodes dont le but est d'estimer la valeur exacte de l'intégrale.
$\Rightarrow$ les méthodes d'intégrations numériques.

On utilisera, dans ce chapitre, quelques méthodes de quadrature de type Newton-Cotes qui seront définies dans ce diagramme.

Diagramme


Formules de quadrature de Newton Cotes
Formules simples
Formules composites
Rectangles
Trapèze
Simpson
Rectangles
Trapèze
Simpson
Gauche
Droite
Milieu
Gauche
Droite
Milieu