Chapitre 2: Interpolation polynomiale et approximation

Approximation au sens des moindres carrés

Introduction

Historique:

- 1804: Carl Friedrich Gauss
- 1805: Adrien-Marie Legendre
- 1808: Robert Adrain

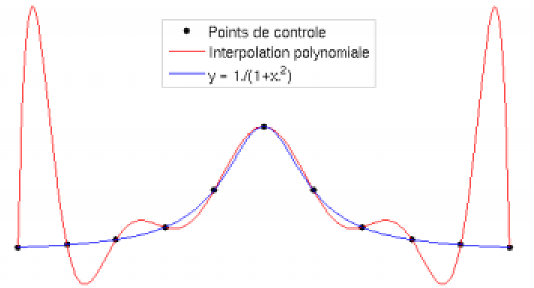
Introduction

Historique:

- 1804: Carl Friedrich Gauss
- 1805: Adrien-Marie Legendre
- 1808: Robert Adrain

Problématique: L'interpolation polynomiale

- n'est pas toujours stable en dehors des points de contrôle → Phénomène de Runge.
- coûteuse en terme de temps de calcul lorsque le nombre de points de contrôle est élevé (nuage de points).



➽ AA2: Approximation (ou régression) polynomiale

objectif: Comparer des données expérimentales à un modèle polynomial censé décrire ces données.
Le modèle polynomial est une famille de polynômes:

$$P(x, \Lambda)$$

Variable réelle

un ou plusieurs paramètres inconnus "les coefficients du polynôme"

Approximation (ou régression) linéaire

Soient $(n+1)$ points $(x_i, y_i), i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, d'abscisses deux à deux distinctes. On note

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Approximation (ou régression) linéaire

Soient $(n+1)$ points $(x_i, y_i), i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, d'abscisses deux à deux distinctes. On note

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Objectif: Trouver la droite d'équation

$$y = \underbrace{\lambda_0 + \lambda_1 x}_{P(x)}, \quad \lambda_0,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

la plus proche des points (x_i, y_i) <u>au sens des moindres carrés</u>? ?

Illustration de la méthode

$$(S_1)\begin{cases} e_0 &= P(x_0) - y_0 = \lambda_0 + \lambda_1 x_0 - y_0 \\ \vdots & \\ e_i &= P(x_i) - y_i = \lambda_0 + \lambda_1 x_i - y_i \\ \vdots & \\ e_n &= P(x_n) - y_n = \lambda_0 + \lambda_1 x_n - y_n \end{cases}$$

résidu
(ou perturbation)
en (x_i, y_i)

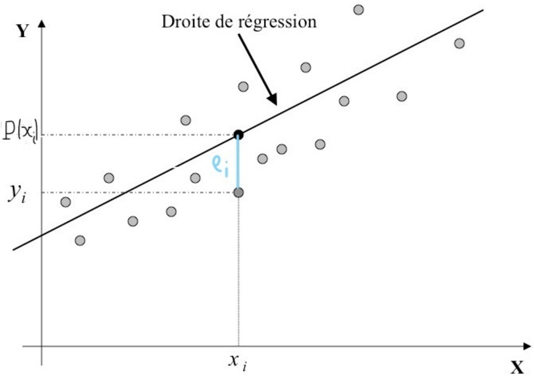
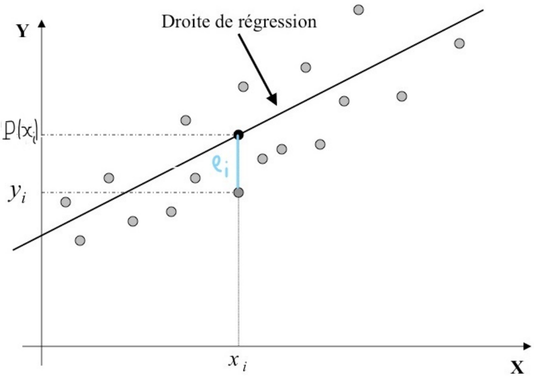


Illustration de la méthode

$$(S_1)\begin{cases} e_0 &= P(x_0) - y_0 = \lambda_0 + \lambda_1 x_0 - y_0 \\ \vdots & \\ e_i &= P(x_i) - y_i = \lambda_0 + \lambda_1 x_i - y_i \\ \vdots & \\ e_n &= P(x_n) - y_n = \lambda_0 + \lambda_1 x_n - y_n \end{cases}$$

résidu (ou perturbation) en (x_i, y_i)



Le problème consiste à minimiser une fonction des résidus e_i.

Quelle est l'expression de cette fonction ? Quelle est la norme à considérer ?

Notons $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = \begin{pmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ et considérons la fonction

$$F(\Lambda) = ||\varepsilon||_2^2 = e_0^2 + \cdots + e_n^2,$$

où $||\,.\,||_2$ désigne la norme euclidienne.

Ajuster les points (x_i, y_i) par une droite au sens des moindres carrés revient à minimiser la fonction F.

$\downarrow$

Trouver le vecteur Λ pour que F soit minimale

Résolution: "Méthode matricielle"

Le système (S_1) peut s'écrire matriciellement comme suit:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}}_{\varepsilon} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_i \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} - \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y}$$

Le vecteur Λ minimisant F vérifie

$$\nabla F(\Lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \lambda_0}(\Lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(\Lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(λ_0, λ_1) est un point critique de F

En calculant ∇F, on trouvera que

$$\nabla F(\Lambda) = 2\,{}^tA(A\,\Lambda - Y)$$

$$\Rightarrow\ {}^tA(A\,\Lambda - Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow\ {}^tA\,A\,\Lambda = {}^tA\,Y.$$

D'où

$$\boxed{\Lambda = ({}^tA\,A)^{-1}\,{}^tA\,Y}$$

On peut prouver aussi que

$$\boxed{\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Y} - \lambda_1 \overline{X} \\ \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \end{pmatrix},}$$

avec $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n+1}$, $\overline{Y} = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} y_i}{n+1}$, $\overline{XY} = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} x_i y_i}{n+1}$ et $\overline{X^2} = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}{n+1}$.

Exercice

Considérons le tableau de l'exercice donné dans la section Interpolation polynomiale.

x_i	$x_0 = -1$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
y_i	$y_0 = 2$	$y_1 = 1$	$y_2 = -1$

Trouver l'équation de la droite qui ajuste au mieux les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) au sens des moindres carrés.

Solution

Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$ défini par $P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x$ dont la courbe représentative ajuste au mieux les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) au sens des moindres carrés et A la matrice donné par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution

Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$ défini par $P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x$ dont la courbe représentative ajuste au mieux les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) au sens des moindres carrés et A la matrice donné par

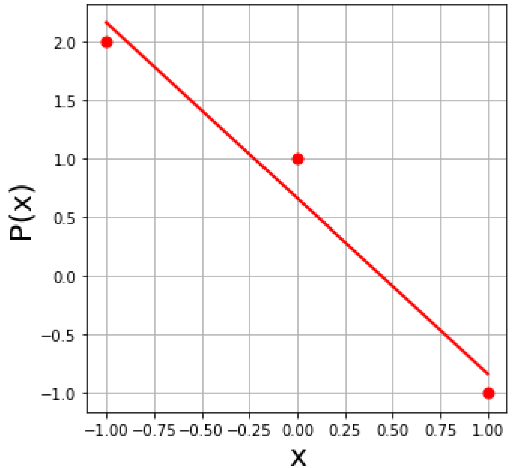
$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$${}^tA\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $({}^tA\,A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, **alors**

$$\begin{aligned}
\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} &= ({}^tA\,A)^{-1}\,{}^tA\,Y \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$



Par conséquent,

$$P(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x.$$

Retrouvons le résultat en utilisant la formule des moyennes arithmétiques.
Comme $\overline{X} = 0$, $\overline{Y} = \frac{2}{3}$, $\overline{XY} = -1$ et $\overline{X^2} = \frac{2}{3}$, alors

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Y} - \lambda_1 \overline{X} \\ \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat.

Approximation (ou régression) polynomiale

Soient $(n+1)$ points $(x_i, y_i), i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, d'abscisses deux à deux distinctes. On note

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Approximation (ou régression) polynomiale

Soient $(n+1)$ points $(x_i, y_i), i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, d'abscisses deux à deux distinctes. On note

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Objectif: Déterminer l'expression du polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$, défini par

$$P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p,$$

dont la courbe représentative est la plus proche des points (x_i, y_i)

<u>au sens des moindres carrés</u> ? ?

$$(S_p)\left\{\begin{array}{lcl} e_0 & = & P(x_0) - y_0 = \lambda_0 + \lambda_1 x_0 + \cdots + \lambda_p x_0^p - y_0 \\ \vdots & & \\ e_i & = & P(x_i) - y_i = \lambda_0 + \lambda_1 x_i + \cdots + \lambda_p x_I^p - y_i \\ \vdots & & \\ e_n & = & P(x_n) - y_n = \lambda_0 + \lambda_1 x_n + \cdots + \lambda_p x_n^p - y_n \end{array}\right.$$

$$(S_p)\begin{cases} e_0 &= P(x_0)-y_0 = \lambda_0+\lambda_1 x_0+\cdots+\lambda_p x_0^p - y_0\\ \vdots & \\ e_i &= P(x_i)-y_i = \lambda_0+\lambda_1 x_i+\cdots+\lambda_p x_I^p - y_i\\ \vdots & \\ e_n &= P(x_n)-y_n = \lambda_0+\lambda_1 x_n+\cdots+\lambda_p x_n^p - y_n \end{cases}$$

Le système (S_p) peut s'écrire matriciellement comme suit:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_0\\ \vdots\\ e_i\\ \vdots\\ e_n \end{pmatrix}}_{\varepsilon} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^p\\ \vdots & & & & \vdots\\ 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^p\\ \vdots & & & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^p \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0\\ \vdots\\ \lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_p \end{pmatrix}}_{\Lambda} - \underbrace{\begin{pmatrix} y_0\\ \vdots\\ y_i\\ \vdots\\ y_n \end{pmatrix}}_{Y}$$

En appliquant le même raisonnement de l'approximation linéaire, on aura

$$\boxed{\Lambda = ({}^tA\,A)^{-1}\,{}^tA\,Y}$$

Exercice

Dans l'exercice précédent,

1. Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ qui ajuste au mieux les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2).
2. Que peut-on constater?

Solution

1. Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$ défini par $P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p$ dont la courbe représentative ajuste au mieux les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) au sens des moindres carrés et A la matrice donné par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution

1. Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$ défini par $P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p$ dont la courbe représentative ajuste au mieux les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) au sens des moindres carrés et A la matrice donné par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

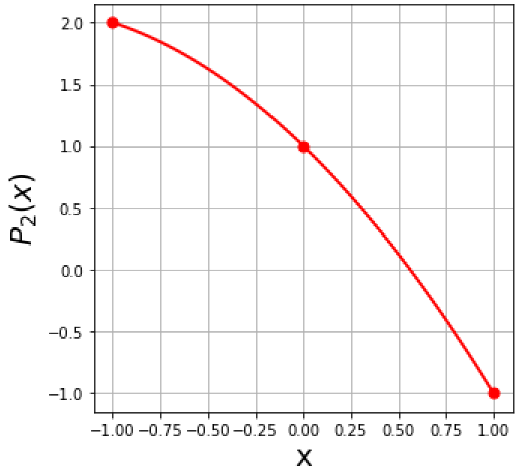
$$^tA\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $({}^tA\,A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$**, alors**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = ({}^tA\,A)^{-1}\,{}^tA\,Y$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



Par conséquent,

$$P(x) = 1 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2.$$

2. Le polynôme d'approximation P trouvé est le polynôme qui interpole les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2).