École **S**upérieure **Pr**ivée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

Analyse Numérique

Correction série d'exercices N^{o}2 Interpolation et approximation polynomiale

Niveau : 3$^{\text{ème}}$ année — Année universitaire : 2023-2024

Exercice 1 *On considére les points* $(-2,4)$ *;* $(0,0)$ *;*$(1,0)$ *et* $(2,4)$*. Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation* P *aux quatre points et justifier votre réponse.*

(1) $P_1(X) = X^4 + \frac{2}{3}X^3 + 3X^2 + \frac{8}{3}X$

(2) $P_2(X) = \frac{4}{3}X^2 - \frac{4}{3}$

(3) $P_3(X) = \frac{1}{3}X^3 + X^2 - \frac{4}{3}X$

(4) $P_4(X) = \frac{1}{6}X^4 + X^3 + \frac{2}{3}X^2 + X$

Correction :
On ne demande pas ici de calculer le polynôme mais de l'identifier, on va donc utiliser la caractérisation du polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points.

$$P \text{ polynôme d'interpolation de Lagrange aoocié à } x_i \Leftrightarrow \deg(P) \leq 3 \text{ et } \begin{cases} \text{P(-2)=4;} \\ \text{P(0)=0;} \\ \text{P(1)=0;} \\ \text{P(2)=4.} \end{cases}$$

Il n'y a qu'à trouver le polynôme qui satisfait toute les propriètés.
Existance et unicité du polynôme :

- Le polynôme P_1 est de degré 4 donc éliminé
- Le polynôme P_2 a un terme constant non nul il ne s'annule pas en 0 donc éliminé
- Le polynôme P_3 on vérifie qu'il convient et P_4 ne vérifie pas $P(1) = 0$

Exercice 2 (Examen Mai 2019)

Partie I : Interpolation polynomial

(a) *Justifier l'existence d'un unique polynôme* $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ *interpolant les points* $(-2,16), (0,-4)$ *et* $(2,8)$*.*

(b) *Déterminer l'expression du polynôme* P_2 *par une méthode (vue en cours) de votre choix*

Partie II : Approximation au sens des moindres carrées

Dans l'objectif d'étudier le chemin de freinage d'un véhicule, correspondant à la distance parcourue en mètres (m) du début du freinage jusqu'à l'arrêt total du véhicule, en fonction de la vitesse en Kilomètres par heure (Km/h) de ce dernier, 12 expériences indépendantes ont été réalisées. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous. On note par $X = (x_i)_{1\leq i\leq 12}$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq 12}$, où x_i, et y_i, désignent, respectivement, la vitesse du véhicule et le chemin de freinage associés à l'éxpérience i.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
y_i	9	11	20	27	39	45	58	78	79	93	108	12

(a) *Déterminer les coefficients* $Z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *de la droite* $f(t, Z) = a + bt$, *qui ajuste au mieux les points* $(x_i; y_i)_{1\leq i\leq 12}$ *au sens des moindres carrées. On donne les valeurs des sommes suivantes :*

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 1140;\ \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 122600;\ \sum_{i=1}^{12} y_i = 691;\ \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 80840$$

(b) *Rouler à une vitesse de* $105Km/h$, *le conducteur de ce véhicule pourrait-il éviter un obstacle survenant à une distance de* $60m$ *? Justifir votre réponse.*

Correction :

Partie I : Interpolation polynomial

(a) Les abscisses des points $(-2, 16); (0, -4)$ et $(2, 8)$ sont deux à deux distincts donc il existe un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ passant par ces points. un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ passant par ces points.

(b) **Méthode de Lagrange :**

On considère les polynôme $(L_i)_{0\leq i\leq 2}$ de Lagrange associés aux $(-2, 16); (0, -4)$ et $(2, 8)$.

$$L_0(x) = \frac{x(x-2)}{8},\ L_1(x) = \frac{x^2-4}{-4},\ L_2(x) = \frac{x(x+2)}{8}$$

Alors $P_2(x) = 16L0(x) - 4L_1(x) + 8L_2(x) = 4x^2 - 2x - 4$

Méthode de Newton :

Le polynôme de Newton est donné par :

$$P_2(x) = \alpha_0 w_0(x) + \alpha_1 w_1(x) + \alpha_2 w_2(x)$$

avec

$$\begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_1(x) = x + 2 \\ w_2(x) = x(x+2) \end{cases}$$

Détermination des coefficients α_0, α_1 et α_2 par la méthode des differences divisées : On a :

$x_0 = -2, y_0 = 16$

$x_1 = 0, y_1 = -4$

$x_2 = 2,\ y_2 = 8$
alors $\alpha_0 = 16 = f[x_0], \alpha_1 = f[x0, x1] = -10, \alpha_2 = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = 4$
Ainsi $\alpha_0 = 16, \alpha_1 = -10$ et $\alpha_2 = 4$ d'où :

$$P_2(x) = 16w_0(x) - 10w_1(x) + 4w_2(x) = 4x^2 - 2x - 4$$

Partie II : Approximation au sens des moindres carrées

(a) Le vecteur $Z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de la droite $f(t, Z) = a + bt$, qui ajuste au mieux les points $(x_i; y_i)_{1\leq i\leq 12}$ au sens des moindres carrées

$$F(Z, X) = \sum_{i=1}^{12} \Big(f(x_i, Z) - y_i\Big)^2$$

Il est donné par la relation suivante : $Z^* = ({}^tAA)^{-1t}AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{12} \end{pmatrix}$ On a :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 12 & \displaystyle\sum_{i=1}^{12} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{12} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{12} x_i^2 \end{pmatrix} = {}^tAA = \begin{pmatrix} 12 & 1140 \\ 1140 & 122600 \end{pmatrix}$$

Cherchons $({}^tAA)^{-1}$?
On sait que $({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{det({}^tAA)} {}^t com({}^tAA)$ avec $det({}^tAA) = 12 \times 122600 - (1140)^2 = 171600$
et $com({}^tAA) = \begin{pmatrix} 122600 & -1140 \\ -1140 & 12 \end{pmatrix}$ alors $({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{171600} \begin{pmatrix} 122600 & -1140 \\ -1140 & 12 \end{pmatrix}$ D'autre part ${}^tAY = \begin{pmatrix} 691 \\ 80840 \end{pmatrix}$ Ainsi

$$Z^* = ({}^tAA)^{-1t}AY = \begin{pmatrix} -43,36 \\ 1,06 \end{pmatrix} \quad \textit{Donc} \quad f(t, Z) = -43,36 + 1.06t$$

(b) Une valeur estimée du chemin de freinage du véhicule à une vitesse de $105km/h$ est donné par $f(10.5; Z^*) = -43.36 + 1.06 \times 10.5 = 68.21$. Le conducteur du véhicule ne pourra pas éviter l'obstacle.

Exercice 3 **(1)** *Construire le polynôme P d'interpolation de Lagrange aux points $(-1, e); (0, 1)$ et $(1, e)$.*

(2) *Sans faire de calcul, donner l'expression du polynôme de Lagrange Q qui interpole les trois points $(-1, -1); (0, 0)$ et $(1, -1)$.*

(3) *Trouver le polynôme de l'espace vectoriel Vect$(1, X, X^2)$ qui interpole les trois points $(-1, -1); (0, 0)$ et $(1, -1)$.*

Correction :

1) Le polynôme P d'interpolation de Lagrange de degré n qui interpole $(n+1)$ points $\{(x_i, y_i); i = 0, ..., n\}$ s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

ici $n = 2$ donc on a :

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= \frac{ex(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + \frac{e(x+1)x}{2} = (e-1)x^2 + 1 \end{aligned}$$

2) Il suffit de changer les coefficients y_i dans l'expression précedente :

$$Q(x) = -\frac{x(x-1)}{2} - \frac{(x+1)x}{2} = -x^2$$

3) Il s'agit de trouver un polynôme $P(x)$ qui soit combinaison linèaire de deux polynômes assigès (ie : $P(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$) et qui interpole les 3 points $(-1, -1); (0, 0)$ et $(1, -1)$.

$$\begin{cases} \text{P(-1)=1 ;} \\ \text{P(0)=0 ;} \\ \text{P(1)=-1 ;} \end{cases}$$

ce qui donne $\alpha = 0; \beta = 0$ et $\gamma = -1$
le polynôme cherché est donc $P(x) = -x^2$

Exercice 4 *:*

Soit la fontion définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

1. *Déterminer l'expression du polynôme de Newton interpolant les points M_0 $(0, f(0))$, M_1 $(1, f(1))$ et M_2 $(2, f(2))$.*
2. *Calculer la valeur approchée de f au point $x = \frac{1}{2}$, puis déterminer l'erreur d'interpolation en ce point.*
3. *Donner une majoration de l'erreur d'interpolation sur [0,2]. Conclure.*
4. *En ajoutant un point supplémentaire $M_3(3, f(3))$, déduire l'expression du nouveau polynôme qui interpole les points M_0, M_1, M_2 et M_3.*

Correction :

Soit la fontion définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

1. Déterminer l'expression du polynôme de Newton interpolant les points $M_0\ (0,1), M_1\ (1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $M_2\ (2,0)$.

$$P_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x(x-1).$$

$$\beta_0 = [y_0] = y_0 = 1$$

$$\beta_1 = [y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{1 - 0} = -0.292$$

$$\beta_2 = [y_0, y_1, y_2] = \frac{[y_1, y_2] - [y_0, y_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + 0.292}{x_2 - x_0} = -0.207$$

2)Calculer la valeur approchée de f au point $x = \frac{1}{2}$, puis déterminer l'erreur d'interpolation en ce point.

$$P_2(0.5) = 0.905.$$

$$E = |0.905 - 0.923| = 0.018$$

3) Donner une majoration de l'erreur d'interpolation sur $[0,2]$. Conclure. On sait que f est de classe C^3 sur $[0,2]$ et

$$f'(x) = -\big(\frac{\pi}{4}\big)\sin\big(\frac{\pi}{4}x\big).$$

$$f''(x) = -\big(\frac{\pi^2}{4^2}\big)\cos\big(\frac{\pi}{4}x\big).$$

$$f^{(3)}(x) = \big(\frac{\pi^3}{4^3}\big)\sin\big(\frac{\pi}{4}x\big).$$

d'où

$$|f^{(3)}(x)| \leq \big(\frac{\pi^3}{4^3}\big)$$

et par la suite

$$E(x) \leq \big(\frac{\pi^3}{4^3 * 6}\big)|x||x-1||x-2|$$

En remplaçant x par $\frac{1}{2}$, on obtient

$$E(1/2) \leq \big(\frac{\pi^3}{4^3 * 2^4}\big) = 0.03$$

4) En ajoutant un point supplémentaire $M_3(3, f(3))$, déduire l'expression du nouveau polynôme qui interpole les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

$$P_3(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x(x-1) + \beta_3 x(x-1)(x-2).$$

avec,

$$\beta_3 = [y_0, y_1, y_2, y_3] = \frac{[y_1, y_2, y_3] - [y_0, y_1, y_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0.207}{3} = 0.069$$

$$[y_1, y_2, y_3] = \frac{[y_2, y_3] - [y_1, y_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - [y_1, y_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = 0.$$