

1 Exercice: Point fixe et Newton

On cherche à calculer $\bar{x} = \sqrt{3}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = x^2 - 3$ et $f(x) = x - g(x)$.

La méthode de résolution de l'équation $g(x) = x$ par la méthode du point fixe utilise le fait que, pour $g(x)$ et x_0 correctement choisis, la suite récurrente $x_{n+1} = g(x_n)$ est convergente.

1. Implémentation de la méthode du point fixe:

- (a) Écrire une fonction `PointFixe(f, x0, epsilon, Nmax)` qui renvoie : la valeur approchée de la solution x^* de f à une tolérance ϵ près et le nombre d'itérations effectué k pour atteindre la convergence. On arrêtera l'algorithme après un nombre maximal d'itérations 'Nmax'.
- (b) *Application*: Tester la fonction `PointFixe(f, x0, epsilon, Nmax)` pour : $x_0 = 1$, $\epsilon = 10^{-7}$ et $Nmax = 1000$.
- (c) La Méthode converge-t-elle avec ce choix de x_0 ?

2. Implémentation de la méthode du point fixe avec relaxation:

La méthode du point fixe avec relaxation consiste à modifier l'itération de base : $x_{n+1} = f(x_n)$ en introduisant un paramètre de relaxation $\omega \in [0, 1]$ par : $x_{n+1} = \omega f(x_n) + (1 - \omega)x_n$.

- (a) Écrire une fonction python `PointFixeRelaxation(f, w, x0, epsilon, Nmax)` implémentant l'algorithme avec paramètre de relaxation ω .
- (b) *Application* : Tester la fonction `PointFixeRelaxation(f, w, x0, epsilon, Nmax)` pour $w = 1/2$, un test d'arrêt sur le résidu avec $\epsilon = 10^{-7}$ et un nombre maximal d'itérations $Nmax = 1000$.
- (c) On choisit $x_0 = 1$ et $\omega = i/10$ avec $i = 1 \cdots 10$, donner selon la valeur de ω , lorsque la méthode converge (c'est à dire avec la méthode s'arrête avec un résidu inférieur à 10^{-7}) le nombre d'itération nécessaires.
- (d) Même question avec $x_0 = 2$, $x_0 = 4$ et $x_0 = 8$.

3. Implémentation de la méthode de Newton

- (a) Écrire la fonction `Newton(g, x0, eps, Nmax)` pour trouver $\sqrt{3}$ comme solution de $g(x) = 0$ avec un test d'arrêt et un nombre maximal d'itérations.
- (b) Tester la fonction de `Newton` pour $x_0 = \{1, 2, 4, 8\}$ et $\epsilon = 10^{-7}$. Donner, dans chaque cas, le nombre d'itérations.