Série d'exercices : Résolution d'équations différentielles ordinaires

Exercice 2

Préparé par :
Unité Pédagogique de Mathématiques

Exercice 2

Enoncé

On considère le problème de Cauchy défini par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x' = -\lambda x, & \lambda, t \geq 0 \\ & x(0) = x_0. \end{cases}$$

1. Donner la solution analytique $x(t)$ de (PC).
2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$.
3. Montrer que les solutions numériques du problème de Cauchy (PC) trouvées par la méthode d'Euler explicite x_n^E et par la méthode d'Euler implicite x_n^I, sont données respectivement par :

$$x_n^E = x_0(1 - \lambda h)^n, \text{ et } x_n^I = x_0(1 + \lambda h)^{-n},$$

   où h désigne le pas de discrétisation et $n > 0$.
4. Calculer les limites $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^E$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^I$.

Exercice 1

Solution

Question 1 : Donner la solution analytique $x(t)$ de (PC).

La solution analytique de (PC) est donnée par

$$x(t) = K\exp(A(t))$$

avec $A(t) = \int -\lambda dt = -\lambda t$ et K constante. Par suite $x(t) = K\exp(-\lambda t)$

- D'une part pour $t = 0$ on a $x(0) = x_0$.
- D'autre part $x(0) = K\exp(-\lambda * 0) = K\exp(0) = K$.

Ainsi $K = x_0$, d'ou la solution analytique de (PC) est

$$x(t) = x_0\exp(-\lambda t)$$

Question 2 : Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$.

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} x_0\exp(-\lambda t) = 0$

Question 3 : Trouver les solutions numériques du problème de Cauchy (PC) trouvées par les méthodes d'Euler explicite x_n^E et implicite x_n^I

On commence d'abord par la discrétisation de l'intervalle de temps avec un pas de temps h.
On pose : $t_0 = 0,\ t_1 = t_0 + h = h, \dots, t_n = t_0 + nh = nh, \dots.$
La méthode d'Euler explicite :

- On note $x(t_n) = x_n^E$.
- En intégrant l'équation différentielle $x^{'}(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t, x(t)) = -\lambda x(t)$ entre t_n et t_{n+1}, on obtient :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x^{'}(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt$$

- On approcher $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt$ par la **méthode des rectangles à gauche** : on a $\forall n \geq 0$

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) - x(t_n) = (t_{n+1} - t_n) f(t_n, x(t_n)) &\Leftrightarrow x(t_{n+1}) - x(t_n) = -h\lambda x(t_n) \\ &\Leftrightarrow x_{n+1}^E - x_n^E = -h\lambda x_n^E \\ &\Leftrightarrow x_{n+1}^E = (1 - h\lambda) x_n^E \end{aligned}$$

Finalement, on a $\forall n \geq 0$, $x_{n+1}^E = (1 - h\lambda)x_n^E$.
Montrer par récurrence que: $\forall n \geq 0$ on a $x_n^E = (1 - h\lambda)^n x_0^E$.
Principe de récurrence :

- Pour $n = 0$ on a $(1 - h\lambda)^0 x_0^E = x_0^E$ donc vrai pour $n = 0$.
- Supposons pour n fixée on a $x_n^E = (1 - h\lambda)^n x_0^E$.
- Montrons que $x_{n+1}^E = (1 - h\lambda)^{n+1} x_0^E$:
  On a $x_{n+1}^E = (1 - h\lambda)x_n^E$ or d'après la supposition on $x_n^E = (1 - h\lambda)^n x_0^E$.
  Ainsi
  $$x_{n+1}^E = (1 - h\lambda)(1 - h\lambda)^n x_0^E = (1 - h\lambda)^{n+1} x_0^E$$
  D'où on a montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$
  $$x_n^E = (1 - h\lambda)^n x_0^E.$$

La méthode d'Euler implicite:

- On note $x(t_n) = x_n^I$.
- En intégrant l'équation différentielle $x^{'}(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t, x(t)) = -\lambda x(t)$ entre t_n et t_{n+1} on obtient:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x^{'}(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt.$$

- On approcher $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt$ par la **méthode des rectangles à droite** : $\forall n \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) - x(t_n) = (t_{n+1} - t_n)f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) &\Leftrightarrow x(t_{n+1}) - x(t_n) = -h\lambda x(t_{n+1}) \\ &\Leftrightarrow x_{n+1}^I - x_n^I = -h\lambda x_{n+1}^I \\ &\Leftrightarrow x_{n+1}^I(1 + h\lambda) = x_n^I \\ &\Leftrightarrow x_{n+1}^I = \frac{1}{(1 + h\lambda)} x_n^I \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \geq 0$ on a $x_{n+1}^I = \frac{1}{(1 + h\lambda)} x_n^I$.

Montrer par récurrence que: $\forall n \geq 0$on a $x_n^l = \frac{1}{(1+h\lambda)^n} x_0^l$.

- Pour $n = 0$ on a $\frac{1}{(1+h\lambda)^0} x_0^l = x_0^l$ donc vrai pour $n = 0$.
- Supposons pour n fixée on a $x_n^l = \frac{1}{(1+h\lambda)^n} x_0^l$.
- Montrons que $x_{n+1}^l = \frac{1}{(1+h\lambda)^{n+1}} x_0^l$:

  On a $x_{n+1}^l = \frac{1}{(1+h\lambda)} x_n^l$ or d'après la supposition on $x_n^l = \frac{1}{(1+h\lambda)^n} x_0^l$.

  Ainsi
  $$x_{n+1}^l = \frac{1}{(1+h\lambda)} \frac{1}{(1+h\lambda)^n} x_0^l = \frac{1}{(1+h\lambda)^{n+1}} x_0^l$$

  D'où on a montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$
  $$x_n^l = \frac{1}{(1+h\lambda)^n} x_0^l$$

Question 4 : Calculer les limites $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^E$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^I$.

- On a $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^I = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{(1+h\lambda)^n} x_0^I = ?$.
  On a $h > 0$ et $\lambda > 0$ donc $1 + h\lambda > 1$ par suite
  $$\lim_{n \to +\infty} (1+h\lambda)^n = +\infty$$
  Ainsi
  $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(1+h\lambda)^n} = 0$$
  Il en result $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^I = 0$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^E = \lim\limits_{n \to +\infty} (1-h\lambda)^n x_0^E = ?$
  - Si $|1 - h\lambda| < 1$ alors
    $$-1 < 1 - h\lambda < 1 \Leftrightarrow -2 < -h\lambda < 0 \Leftrightarrow 0 < h\lambda < 2$$
    $$\Leftrightarrow 0 < h < \frac{2}{\lambda}$$
    Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-h\lambda)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^E = 0$.
  - Si $|1 - h\lambda| > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-h\lambda)^n = \infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^E = \infty$.
  - Si $|1 - h\lambda| = 1$ alors $h\lambda = 0$ par suite $h = 0$ ou $\lambda = 0$ imposible car $h > 0$ et $\lambda > 0$.