(iii) নং হতে, x^4, x^3, x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0 \ldots\ldots (iv)$

$B + C = 0 \ldots\ldots (v)$

$2A + B + C + D = 0 \ldots\ldots (vi)$

$B + C + D + E = 2 \ldots\ldots (vii)$

(iv) নং হতে পাই,

$B = -A$

বা, $B = -\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore B = \frac{1}{2}$

(v) নং হতে পাই,

$C = -B$

$\therefore C = -\frac{1}{2}$

(vi) নং হতে পাই,

$D = -2A - B - C$

বা, $D = -2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)$

বা, $D = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\therefore D = 1$

(vii) নং হতে পাই,

$E = 2 - B - C - D$

বা, $E = 2 - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1$

বা, $E = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$

$\therefore E = 1$

$\therefore A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = 1$

এবং $E = 1$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$
$$= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। [*Ans.*]

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণসমূহ

পাঠ্যবইয়ের ১ [ঢা.বো.'১৬,চ.বো.'১৫ রা.বো.চ.বো.'২০], ৪, ৫, ৭ [য.বো.'১৫], ৮ [কু.বো.'১৭], ৯ [দি.বো.'২০ ১৬; কু.বো.'২০,রা.বো.'১৬,য.বো.'১৭,চ.বো.'১৬,'১৫; সি.বো.'১৬] ১০, ১১, ১২, ১৩, ১৪, ২০, ২১, ২২, ২৩ [দি.বো.'১৬], ২৬ [ব.বো.'১৬] [সৃজনশীল] ও ২৮নং উদাহরণগুলো খুবই গুরুত্বপূর্ণ। অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ Concept এর উপর ভিত্তি করেই উদাহরণগুলো তৈরি করা হয়। এগুলো অনুশীলনীর প্রশ্নোত্তর বুঝতে অত্যন্ত সহায়ক; এছাড়া গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ থেকে বোর্ড পরীক্ষায় সরাসরি সৃজনশীল প্রশ্নও হয়ে থাকে।

অনুশীলনী-২ এর প্রশ্ন ও সমাধান

১। নিচের কোন রাশিটি প্রতিসম?

(ক) $a + b + c$ (খ) $xy - yz + zx$

(গ) $x^2 - y^2 + z^2$ (ঘ) $2a^2 - 5bc - c^2$

উত্তর: (ক) $a + b + c$ [*Ref:* পাঠ্যবই: পৃষ্ঠা-৪৮]

ব্যাখ্যা: একাধিক চলকধারী কোন বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময় করলে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে তবে তাকে প্রতিসম রাশি বলে। এক্ষেত্রে, $a + b + c$ তিনটি চলকের যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। তাই রাশিটি প্রতিসম।

<u>অতএব, প্রশ্নটির সঠিক উত্তর (ক)।</u>

বিশেষভাবে লক্ষণীয়:

- $xy - yz + zx$ রাশিটি প্রতিসম নয়; কারণ এ রাশিতে x, y, z এর মধ্যে যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে না। উল্লেখ্য, এটি y, z এ দু'টি চলকের সাপেক্ষেই শুধুমাত্র প্রতিসম। কিন্তু অন্য যেকোনো দু'টি (যেমন: x, z ও x, y) এর সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।
- $x^2 - y^2 + z^2$ রাশিটি শুধুমাত্র x ও z এর সাপেক্ষেই প্রতিসম। কিন্তু অন্য যেকোনো দু'টি (যেমন: y, z ও x, y) এর সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।
- $2a^2 - 5bc - c^2$ রাশিটি প্রতিসম নয়; কারণ a, b, c এর মধ্যে যেকোনো দুইটি চলকের স্থান পরিবর্তন করলে রাশিটির মান পরিবর্তন হয়ে যায়। সুতরাং খ, গ ও ঘ নং অপশনে প্রদত্ত রাশিত্রয় প্রতিসম নয়।

২। $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ হলে,

i. $P(x, y, z)$ চক্রক্রমিক রাশি

ii. $P(x, y, z)$ প্রতিসম রাশি

iii. $P(1, -2, 1) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ) i, ii ও iii [*Ref:* পাঠ্যবই: পৃষ্ঠা-৪৮]

ব্যাখ্যা:

- $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কারণ এতে চক্রাকারে x এর পরিবর্তে y, y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসালে, $y^3 + z^3 + x^3 - 3yzx$ পাওয়া যায়; যা $(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ এর সমান। সুতরাং, **(i)** নং সঠিক।
- $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি। কারণ, x, y, z চলক তিনটির যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। যেমন: রাশিতে x, y এর পারস্পরিক স্থান বিনিময়ে $(y^3 + x^3 + z^3 - 3yxz)$ পাওয়া যায়; যা $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ এর সমান। সুতরাং, **(ii)** নং সঠিক।
- দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$\therefore P(1, -2, 1) = (1)^3 + (-2)^3 + (1)^3 - 3.1.(-2).1$

$= 1 - 8 + 1 + 6$

$= 0$; সুতরাং, **(iii)** নং সঠিক।

<u>অতএব, প্রশ্নটির সঠিক উত্তর (ঘ) i, ii ও iii।</u>

নিচের তথ্যের আলোকে ৩ ও ৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
বহুপদী $x^3 + px^2 - x - 7$ এর একটি উৎপাদক $x + 7$।

৩। P এর মান কত?

(ক) -7 (খ) 7

(গ) $\frac{54}{7}$ (ঘ) 477

[*Ref:* পাঠ্যবই: পৃষ্ঠা-৪৪]

উত্তর : (খ) 7

ব্যাখ্যা ধরি, $Q(x) = x^3 + px^2 - x - 7$

যেহেতু, $(x + 7)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক

$\therefore Q(-7) = 0$

বা, $(-7)^3 + p(-7)^2 - (-7) - 7 = 0$

বা, $-343 + 49p + 7 - 7 = 0$

বা, $49P = 343$

বা, $P = \frac{343}{49}$

$\therefore P = 7$

অতএব, প্রশ্নটির সঠিক উত্তর (খ)।

৪। বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল কত?

(ক) $(x-1)(x-1)$ (খ) $(x+1)(x-2)$

(গ) $(x-1)(x+3)$ (ঘ) $(x+1)(x-1)$

[Ref: পাঠ্যবই: পৃষ্ঠা-৪৪]

উত্তর: (ঘ) $(x+1)(x-1)$

ব্যাখ্যা ধরি, $Q(x) = x^3 + px^2 - x - 7$

যেহেতু, $(x + 7)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক সেহেতু,

$x^3 + px^2 - x - 7$

$= x^3 + 7x^2 - x - 7$ $[\because p = 7]$

$= x^2(x + 7) - 1(x + 7)$

$= (x + 7)(x^2 - 1)$

$= (x + 7)(x + 1)(x - 1)$

$\therefore$ অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল $= (x + 1)(x - 1)$

অতএব, প্রশ্নটির সঠিক উত্তর (ঘ)।

৫) $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 2$ হলে, দেখাও যে, $a = 4$

সমাধান:

ধরি, $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$

$(x - 2)$ যদি, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে $P(2) = 0$ হয়।

$\therefore P(2) = 0$

বা, $(2)^4 - 5(2)^3 + 7(2)^2 - a = 0$

বা, $16 - 5.8 + 7.4 - a = 0$

বা, $16 - 40 + 28 - a = 0$

বা, $44 - 40 - a = 0$

বা, $4 - a = 0$

$\therefore a = 4$ [দেখানো হলো]

৬) মনে কর, $P(x) \equiv ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$ যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$। দেখাও যে, $(x - r)$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $P(x)$ এর আরেকটি উৎপাদক $(rx - 1)$।

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a \dots\dots (i)$

[যেখানে, a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$]

যেহেতু $(x - r)$, $P(x)$-এর একটি উৎপাদক, সেহেতু $P(r) = 0$.

এখন, $P(r) = ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a$

$\therefore ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a = 0 \dots\dots (ii)$

ধরি, $rx - 1 = 0$

বা, $rx = 1$

$\therefore x = \frac{1}{r}$

এখন, (i) নং বহুপদীটিতে $x = \frac{1}{r}$ বসালে যদি উক্ত বহুপদীর মান শূন্য হয়, তবে $(rx - 1)$ উক্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে।

$\therefore P\left(\frac{1}{r}\right) = a\left(\frac{1}{r}\right)^5 + b\left(\frac{1}{r}\right)^4 + c\left(\frac{1}{r}\right)^3 + c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right) + a$

$= \frac{a}{r^5} + \frac{b}{r^4} + \frac{c}{r^3} + \frac{c}{r^2} + \frac{b}{r} + a$

$= \frac{a + br + cr^2 + cr^3 + br^4 + ar^5}{r^5}$

$= \frac{ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a}{r^5}$

$= \frac{0}{r^5}$ [(ii) নং থেকে মান বসিয়ে]

$= 0$

যেহেতু (i) নং বহুপদীতে $x = \frac{1}{r}$ বসালে প্রদত্ত বহুপদীর মান শূন্য হয়, সেহেতু $(rx - 1)$ উক্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক।

$\therefore$ **$(rx - 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।** [দেখানো হলো]

৭) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

(ক) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$.

(খ) $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$. [ব.বো.'১৯]

(গ) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

(ঘ) $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$

(ঙ) $(x + 1)^2(y - z) + (y + 1)^2(z - x) + (z + 1)^2(x - y)$.

(চ) $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$.

(ছ) $15x^2 + 2xy - 24y^2 - x + 24y - 6$.

(জ) $15x^2 - 24y^2 - 6z^2 + 2xy - xz + 24yz$

৭) (ক) এর সমাধান:

মনে করি, $P(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$P(x)$ এর ধ্রুবপদ 6 এর উৎপাদকসমূহের সেট,

$F_1 = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$

$P(x)$ এর মুখ্যপদ 1 এর উৎপাদকসমূহের সেট,

$F_2 = \{1, -1\}$

এখন, $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে, $a = \frac{r}{s}$ এবং $r \in F_1$, $s \in F_2$

$a = 1$ হলে, $P(1) = 1 + 7 + 17 + 17 + 6 \neq 0$

$a = -1$ হলে, $P(-1) = (-1)^4 + 7(-1)^3 + 17(-1)^2 + 17(-1) + 6$

$= 1 - 7 + 17 - 17 + 6$

$= 7 - 7 = 0$

সুতরাং, $x = -1$ অর্থাৎ, $(x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$= x^4 + x^3 + 6x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 11x + 6x + 6$

$= x^3(x + 1) + 6x^2(x + 1) + 11x(x + 1) + 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$

আবার, মনে করি, $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

এখন, $x = 1$ হলে $Q(1) = 1 + 6 + 11 + 6 \neq 0$.

$x = -1$ হলে $Q(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6$

$= -1 + 6 - 11 + 6 = 0$

সুতরাং, $x = -1$ অর্থাৎ, $(x + 1)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$= x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$

$= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x + 1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$

$= (x + 1)\{x(x + 3) + 2(x + 3)\}$

$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$\therefore Q(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$= (x+1)(x+1)(x+2)(x+3)$
$= (x+1)^2 (x+2)(x+3)$ [*Ans.*]

দৃষ্টি আকর্ষণ: P(x) এর উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে P(r) এবং পরে $P\left(\frac{r}{s}\right)$ বিবেচনা করবে যেখানে r বহুপদীর ধ্রুব পদের উৎপাদক এবং s বহুপদীর মুখ্য সহগের উৎপাদক। যেমন– $4x^3-6x^2+11x-6$
বহুপদীর ধ্রুবপদ –6 এর উৎপাদক 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6, –6।
আবার, মুখ্য সহগ 4 এর উৎপাদক 1, –1, 2, –2, 4, –4।
বিঃদ্রঃ ধ্রুব পদ হলো বহুপদীর চলকবিহীন পদ আর মুখ্য সহগ হলো x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ।

৭) (খ) এর সমাধান:

ধরি, $P(a) = 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
মনে করি, $P(a) = 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
$P(a)$ এর ধ্রুবপদ – 2 এর উৎপাদকসমূহের সেট, $F_1 = \{1, -1, 2, -2\}$
$P(a)$ এর মুখ্যপদ 4 এর উৎপাদকসমূহের সেট, $F_2 = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$
এখন, $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে, $a = \frac{r}{s}$ এবং $r \in F_1, s \in F_2$.
$a = 1$ হলে, $P(1) = 4 + 12 + 7 - 3 - 2 = 23 - 5 = 18 \neq 0$
$a = -1$ হলে, $P(-1) = 4 - 12 + 7 + 3 - 2 = 14 - 14 = 0$
সুতরাং, $a = -1$ অর্থাৎ, $(a + 1)$, $P(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
$= 4a^4 + 4a^3 + 8a^3 + 8a^2 - a^2 - a - 2a - 2$
$= 4a^3(a+1) + 8a^2(a+1) - a(a+1) - 2(a+1)$
$= (a+1)(4a^3 + 8a^2 - a - 2)$
আবার, ধরি, $Q(a) = 4a^3 + 8a^2 - a - 2$
$a = 1$ হলে $Q(1) = 4 + 8 - 1 - 2 \neq 0$
$a = -1$ হলে $Q(-1) = -4 + 8 + 1 - 2 \neq 0$
$a = 2$ হলে $Q(2) = 4.2^3 + 8.2^2 - 2 - 2$
$= 4.8 + 8.4 - 4$
$= 32 + 32 - 4 \neq 0$
$a = -2$ হলে $Q(-2) = -32 + 32 + 2 - 2 = 0$
সুতরাং, $a = -2$ অর্থাৎ $(a + 2)$, $Q(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $4a^3 + 8a^2 - a - 2$
$= 4a^2(a+2) - 1(a+2)$
$= (a+2)(4a^2 - 1)$
$= (a+2)\{(2a)^2 - (1)^2\}$
$= (a+2)(2a+1)(2a-1)$
$\therefore Q(a) = (a+2)(2a+1)(2a-1)$
সুতরাং, $P(a) = (a+1)Q(a)$
$= \mathbf{(a+1)(a+2)(2a+1)(2a-1)}$ [*Ans.*]

৭) (গ) এর সমাধান:

মনে করি, $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
$P(x)$ এর ধ্রুবপদ 1 এর উৎপাদকসমূহের সেট, $F_1 = \{1, -1\}$
$P(x)$ এর মুখ্যপদ 1 এর উৎপাদকসমূহের সেট, $F_2 = \{1, -1\}$
এখন, $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে, $a = \frac{r}{s}$ এবং $r \in F_1$, $s \in F_2$.
$a = 1$ হলে, $P(1) = 1 + 2 + 2 + 1 \neq 0$
$a = -1$ হলে, $P(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + 1$
$= -1 + 2 - 2 + 1 = 0$
সুতরাং, $x = -1$ অর্থাৎ, $(x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
$= x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1$
$= x^2(x+1) + x(x+1) + 1(x+1)$
$= (x+1)(x^2+x+1)$
$\therefore P(x) = \mathbf{(x+1)(x^2+x+1)}$ [*Ans.*]

৭) (ঘ) এর সমাধান:

$x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2) + 3xyz$
$= xy^2 + z^2x + yz^2 + x^2y + zx^2 + y^2z + 3xyz$
$= x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + zx^2 + xyz + z^2x$
$= xy(x+y+z) + yz(x+y+z) + zx(x+y+z)$
$= (x+y+z)(xy+yz+zx)$
$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= \mathbf{(x+y+z)(xy+yz+zx)}$ [*Ans.*]

৭) (ঙ) এর সমাধান:

প্রদত্ত রাশি,
$(x+1)^2(y-z) + (y+1)^2(z-x) + (z+1)^2(x-y)$
$= (x^2+2x+1)(y-z) + (y^2+2y+1)(z-x) + (z^2+2z+1)(x-y)$
$= x^2(y-z) + 2x(y-z) + y - z + y^2(z-x) + 2y(z-x) +$
$z - x + z^2(x-y) + 2z(x-y) + x - y$
$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2x(y-z) + 2y(z-x) + 2z(x-y) + 0$
$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2(xy - zx + yz - xy + zx - yz)$
$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2 \times 0$
$= x^2(y-z) + y^2z - xy^2 + z^2x - yz^2$
$= x^2(y-z) + y^2z - yz^2 - xy^2 + z^2x$
$= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y^2-z^2)$
$= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y+z)(y-z)$
$= (y-z)\{x^2 + yz - x(y+z)\}$
$= (y-z)(x^2 + yz - xy - zx)$
$= (y-z)(x^2 - xy - zx + yz)$
$= (y-z)\{x(x-y) - z(x-y)\}$
$= (y-z)(x-y)(x-z)$
$= (y-z)(x-y)\{-(z-x)\}$
$= \mathbf{-(x-y)(y-z)(z-x)}$ [*Ans.*]

৭) (চ) এর সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $= b^2c^2(b^2-c^2) + c^2a^2(c^2-a^2) + a^2b^2(a^2-b^2)$
$= b^2c^2(b^2-c^2) + c^4a^2 - c^2a^4 + a^4b^2 - a^2b^4$
$= b^2c^2(b^2-c^2) + a^4b^2 - c^2a^4 - a^2b^4 + c^4a^2$
$= b^2c^2(b^2-c^2) + a^4(b^2-c^2) - a^2(b^4-c^4)$
$= b^2c^2(b^2-c^2) + a^4(b^2-c^2) - a^2\{(b^2+c^2)(b^2-c^2)\}$
$= (b^2-c^2)\{b^2c^2 + a^4 - a^2(b^2+c^2)\}$
$= (b^2-c^2)(b^2c^2 + a^4 - c^2a^2 - a^2b^2)$
$= (b^2-c^2)(a^4 - a^2b^2 - c^2a^2 + b^2c^2)$
$= (b^2-c^2)\{a^2(a^2-b^2) - c^2(a^2-b^2)\}$
$= (b^2-c^2)(a^2-b^2)(a^2-c^2)$
$= (b^2-c^2)(a^2-b^2)\{-(c^2-a^2)\}$
$= -(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$
$= -(a+b)(a-b)(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)$
$= \mathbf{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)}$ [*Ans.*]

৭) (ছ) এর সমাধান:

$15x^2 + 2xy - 24y^2 - x + 24y - 6$
কেবল x সম্বলিত পদসমূহ ও ধ্রুবক নিয়ে পাওয়া যায়,
$15x^2 - x - 6 = 15x^2 - 10x + 9x - 6$
$= 5x(3x-2) + 3(3x-2)$
$= (3x-2)(5x+3)$ ....(i)
আবার, কেবল y সম্বলিত পদসমূহ ও ধ্রুবক নিয়ে পাওয়া যায়,
$-24y^2 + 24y - 6 = -24y^2 + 12y + 12y - 6$
$= -6y(4y-2) + 3(4y-2)$
$= (4y-2)(-6y+3)$ ....(ii)
উপরের (i) ও (ii) এর উৎপাদকগুলোকে সমন্বয় করে প্রদত্ত রাশির উৎপাদক পাওয়া যাবে, তবে ধ্রুবকগুলো $(-2, +3)$ উভয় সমীকরণে অবশ্যই একই হতে হবে ঠিক যেমনটি x ও y এর সহগ।

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $(3x + 4y - 2)(5x - 6y + 3)$

নির্ণীত উৎপাদক যে সঠিক সেটা যাচাই করার জন্য আমরা xy এর সহগ $3.(-6) + 5.4 = -18 + 20 = 2$ মিলিয়ে দেখতে পারি।

বিকল্প সমাধান:

$15x^2 + 2xy - 24y^2 - x + 24y - 6$
$= 15x^2 + 20xy - 10x - 18xy - 24y^2 + 12y + 9x + 12y - 6$
$= 5x(3x + 4y - 2) - 6y(3x + 4y - 2) + 3(3x + 4y - 2)$
$= (3x + 4y - 2)(5x - 6y + 3)$

$\therefore$ **নির্ণেয় উৎপাদক: $(3x + 4y - 2)(5x - 6y + 3)$ [*Ans.*]**

৭) (জ) এর সমাধান:

$15x^2 - 24y^2 - 6z^2 + 2xy - xz + 24yz$

প্রদত্ত রাশিটিতে তিনটি চলক x, y, z রয়েছে। কিন্তু কোনো ধ্রুবপদ নেই। তা চলকদ্বয়ের যেকোনো একটিকে ধ্রুবক বিবেচনা করি।

ধরি, প্রদত্ত রাশিটিতে z ধ্রুবক।

কেবল, x সম্বলিত পদগুলো ও ধ্রুবক নিয়ে পাই, $15x^2 - xz - 6z^2$।

$15x^2 - xz - 6z^2 = 15x^2 - 10xz + 9xz - 6z^2$
$= 5x(3x - 2z) + 3z(3x - 2z)$
$= (3x - 2z)(5x + 3z)$ ....(i)

আবার, কেবল y সম্বলিত পদগুলো ও ধ্রুবক নিয়ে পাই, $-24y^2 + 24yz - 6z^2$।

$-24y^2 + 24yz - 6z^2 = -6(4y^2 - 4yz + z^2)$
$= -6\{(2y)^2 - 2.2y.z + z^2\}$
$= -6(2y - z)^2$
$= -6(2y - z)(2y - z)$
$= 2(2y - z) \times \{-3(2y - z)\}$
$= (4y - 2z)(-6y + 3z)$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং এর উৎপাদকগুলোকে (ধ্রুবক $-2z$, $+3z$ অনুসারে) সমন্বয় করে প্রদত্ত রাশির সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহ পাওয়া যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদকসমূহ হলো: $(3x + 4y - 2z)(5x - 6y + 3z)$. [*Ans.*]

বিকল্প সমাধান:

$15x^2 - 24y^2 - 6z^2 + 2xy - xz + 24yz$
$= 15x^2 - 18xy + 9xz + 20xy - 24y^2 + 12yz - 10xz + 12yz - 6z^2$
$= 3x(5x - 6y + 3z) + 4y(5x - 6y + 3z) - 2z(5x - 6y + 3z)$
$= (5x - 6y + 3z)(3x + 4y - 2z)$

$\therefore$ **নির্ণেয় উৎপাদক: $(5x - 6y + 3z)(3x + 4y - 2z)$ [*Ans.*]**

৮) যদি $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখাও যে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা $a = b = c$. [রা.বো, চ.বো.ব.বো.'২০]

সমাধান:

দেওয়া আছে, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

[$\because a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$]

বা, $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

অতএব, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

বা, $bc + ca + ab = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$

যেহেতু তিনটি বর্গের সমষ্টির মান শূন্য। সুতরাং এদের প্রত্যেকের মান শূন্য।

অর্থাৎ $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

$\therefore a = b$

আবার, $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

$\therefore b = c$

আবার, $\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{c} - \frac{1}{a} = 0$ [বর্গমূল করে]

$\therefore c = a$

অতএব, $a = b = c$

সুতরাং, $bc + ca + ab = 0$ অথবা $a = b = c$ [দেখানো হলো]

৯) যদি $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.

সমাধান:

এখানে, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= \frac{1}{2}(b + c - a + c + a - b + a + b - c)\{(b + c - a - c - a + b)^2 + (c + a - b - a - b + c)^2 + (a + b - c - b - c + a)^2\}$ [x, y, z এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)[\{-2(a - b)\}^2 + \{-2(b - c)\}^2 + \{-2(c - a)\}^2]$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$

$= 4.\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

[$\because \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$]

$\therefore x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$. [দেখানো হলো]

১০) সরল কর:

(ক) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

(খ) $\dfrac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)}+\dfrac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)}+\dfrac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

(গ) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

(ঘ) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}+\dfrac{16}{x^{16}-1}$.

১০ (ক) এর সমাধান:

$\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{a^2}{-(a-b)(c-a)}+\dfrac{b^2}{-(b-c)(a-b)}+\dfrac{c^2}{-(c-a)(b-c)}$

$=\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

কিন্তু $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=1$ [Ans.]

১০ (খ) এর সমাধান:

প্রদত্ত রাশি,

$\dfrac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)}+\dfrac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)}+\dfrac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

$=\dfrac{(a+b)^2-ab}{-(b-c)(c-a)}+\dfrac{(b+c)^2-bc}{-(c-a)(a-b)}+\dfrac{(c+a)^2-ca}{-(a-b)(b-c)}$

$=\dfrac{a^2+2ab+b^2-ab}{-(b-c)(c-a)}+\dfrac{b^2+2bc+c^2-bc}{-(c-a)(a-b)}+\dfrac{c^2+2ca+a^2-ca}{-(a-b)(b-c)}$

$=\dfrac{a^2+ab+b^2}{-(b-c)(c-a)}+\dfrac{b^2+bc+c^2}{-(c-a)(a-b)}+\dfrac{c^2+ca+a^2}{-(a-b)(b-c)}$

$=\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)+(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=0$ [Ans.]

১০ (গ) এর সমাধান:

$\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

$=\dfrac{a}{-(a-b)(c-a)(x-a)}+\dfrac{b}{-(a-b)(b-c)(x-b)}+\dfrac{c}{-(c-a)(b-c)(x-c)}$

$=\dfrac{a(x-b)(x-c)(b-c)+b(x-c)(x-a)(c-a)+c(x-a)(x-b)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$=\dfrac{a(b-c)\{x^2-(b+c)x+bc\}+b(c-a)\{x^2-(c+a)x+ca\}+c(a-b)\{x^2-(a+b)x+ab\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$=\dfrac{x^2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}-x\{a(b-c)(b+c)+b(c-a)(c+a)+c(a-b)(a+b)\}+abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

কিন্তু $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$

আবার, $a(b-c)(b+c)+b(c+a)(c-a)+c(a+b)(a-b)$

$=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

এবং $abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}=abc(0)=0$

অতএব, প্রদত্ত রাশি,

$=\dfrac{x(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$=\dfrac{x}{-(x-a)(x-b)(x-c)}$ [Ans.]

১০ (ঘ) এর সমাধান:

প্রদত্ত রাশি,

$\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}+\dfrac{16}{x^{16}-1}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8+1}+\dfrac{16}{(x^8)^2-(1)^2}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8+1}+\dfrac{16}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8(x^8-1)+16}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8x^8-8+16}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8x^8+8}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8(x^8+1)}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{(x^4)^2-(1)^2}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{(x^4+1)(x^4-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4x^4-4+8}{(x^4+1)(x^4-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4x^4+4}{(x^4+1)(x^4-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4(x^4+1)}{(x^4+1)(x^4-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{(x^2)^2-(1)^2}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x^2-2+4}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x^2+2}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1^2}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x-1}$$ [Ans.]

বিকল্প সমাধান:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}$$

$$= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{-2x^2-2+2x^2-2}{(x^2+1)(x^2-1)} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{-4}{x^4-1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{-4x^4-4+4x^4-4}{(x^4+1)(x^4-1)} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{-8}{x^8-1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{-8x^8-8+8x^8-8}{(x^8+1)(x^8-1)} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{-16}{x^{16}-1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{x-1}$$ [Ans.]

১১) আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

(ক) $\frac{5x+4}{x(x+2)}$

(খ) $\frac{x+2}{(x^2-7x+12)}$ [চ.বো.'১৫]

(গ) $\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$ [চ.বো.'১৬]

(ঘ) $\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$

(ঙ) $\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}$

১১ (ক) এর সমাধান:

ধরি, $\frac{5x+4}{x(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ ……… (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $x(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$5x+4 \equiv A(x+2) + Bx$ ……… (ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য। (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$0 + 4 = 2A + 0$

$\therefore A = 2$

আবার (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$5(-2) + 4 = A(-2+2) + B(-2)$

বা, $-10 + 4 = 0 - 2B$

বা, $-6 = -2B$

$\therefore B = 3$

A ও B এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $\frac{5x+4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}$

∴ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত হলো।

$$\frac{5x+4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}$$ [Ans.]

১১ (খ) এর সমাধান:

এখানে, $x^2 - 7x + 12$

$= x^2 - 3x - 4x + 12$ [এখানে হরকে উৎপাদক আকারে বিভক্ত করি]

$= x(x-3) - 4(x-3)$

$= (x-3)(x-4)$

সুতরাং, $\frac{x+2}{x^2-7x+12} = \frac{x+2}{(x-3)(x-4)}$

ধরি, $\frac{x+2}{(x-3)(x-4)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$ ……… (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x-3)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x + 2 \equiv A(x-4) + B(x-3)$ ……… (ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$3 + 2 = A(3-4) + B(3-3)$

বা, $5 = -A + 0$

$\therefore A = -5$

আবার, (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$4 + 2 = A(4-4) + B(4-3)$,

বা, $6 = 0 + B$

$\therefore B = 6$

A ও B এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x+2}{(x-3)(x-4)} = \frac{-5}{x-3} + \frac{6}{x-4} = \frac{6}{x-4} - \frac{5}{x-3}$$

প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত হলো:

$$\frac{x+2}{(x-3)(x-4)} = \frac{6}{x-4} - \frac{5}{x-3}$$ [Ans.]

১১ (গ) এর সমাধান:

ধরি, $\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$ ……… (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 9x - 6 \equiv A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$ ……… (ii)

(ii) এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$0 - 6 = A(-2)(3) + 0 + 0$

বা, $-6 = -6A$

$\therefore A = 1$

আবার (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$2^2 - 9.2 - 6 = A(2-2)(2+3) + B.2(2+3) + C.2(2-2)$

বা, $4 - 18 - 6 = 0 + B \times 2 \times 5 + 0$

বা, $-20 = 10B$

$\therefore B = -2$

(ii) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 - 9(-3) - 6 = A(-3-2)(-3+3) + B.(-3).(-3+3) + C.(-3).(-3-2)$

বা, $9 + 27 - 6 = 0 + 0 + C(-3)(-5)$

বা, $30 = 15C$

$\therefore C = 2$

A, B ও C এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$$

প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত হলো:

$$\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$$ [*Ans.*]

১১ (ঘ) এর সমাধান:

ধরি, $\dfrac{x^2 - 4x - 7}{(x+1)(x^2+4)} \equiv \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 4}$ ………(i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x^2+4)$ দ্বারা গুন করে পাই;

$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x+1)$ ……… (ii)

বা, $x^2 - 4x - 7 \equiv A.x^2 + 4A + B.x^2 + Cx + Bx + C$

বা, $x^2 - 4x - 7 \equiv (A + B)x^2 + (C + B)x + 4A + C$ ……….(iii)

(ii) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$(-1)^2 - 4(-1) - 7 = A(1+4) + 0$

বা, $1 + 4 - 7 = 5A$

বা, $5A = -2$

$\therefore A = -\dfrac{2}{5}$

(iii) নং সমীকরণের উভয় পক্ষে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 1$

বা, $-\dfrac{2}{5} + B = 1$

বা, $1 + \dfrac{2}{5} = B$

বা, $\dfrac{5+2}{5} = B$

$\therefore B = \dfrac{7}{5}$

(iii) নং সমীকরণের উভয় পক্ষে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

এবং $B + C = -4$

বা, $\dfrac{7}{5} + C = -4$

বা, $C = -4 - \dfrac{7}{5}$

$\therefore C = \dfrac{-20-7}{5} = -\dfrac{27}{5}$

A, B ও C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{-\frac{2}{5}}{x+1} + \frac{\frac{7}{5}x - \frac{27}{5}}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{x+1} + \frac{7x - 27}{x^2+4}\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $= \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{7x - 27}{x^2+4} - \dfrac{2}{x+1}\right)$ [*Ans.*]

১১ (ঙ) এর সমাধান:

ধরি, $\dfrac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} \equiv \dfrac{A}{2x+1} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C}{(x+3)^2}$ ……… (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(2x+1)(x+3)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x+3)^2 + B(2x+1)(x+3) + C(2x+1)$ ……… (ii)

বা, $x^2 \equiv A(x^2 + 6x + 9) + B(2x^2 + x + 6x + 3) + 2Cx + C$

বা, $x^2 = A.x^2 + 6Ax + 9A + 2Bx^2 + Bx + 6Bx + 3B + 2Cx + C$

বা, $x^2 \equiv (A + 2B)x^2 + (6A + 7B + 2C)x + 9A + 3B + C$….(iii)

(ii) এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 = C\{2.(-3) + 1\}$

বা, $9 = C(-6+1)$

বা, $-5C = 9$

$\therefore C = -\dfrac{9}{5}$

(ii) এ $x = -\dfrac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = A\left(-\frac{1}{2} + 3\right)^2 + B\left(2 \cdot -\frac{1}{2} + 1\right)\left(-\frac{1}{2} + 3\right) + C\left(2 \cdot -\frac{1}{2} + 1\right)$$

বা, $\dfrac{1}{4} = A\left(\dfrac{-1+6}{2}\right)^2 + B(-1+1)\left(-\dfrac{1}{2} + 3\right) + C(-1+1)$

বা, $\dfrac{1}{4} = A\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 0 + 0$

বা, $\dfrac{1}{4} = A \cdot \dfrac{25}{4}$

বা, $25A = 1$

$\therefore A = \dfrac{1}{25}$

(iii) নং এ x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + 2B = 1$

বা, $\dfrac{1}{25} + 2B = 1$

বা, $2B = 1 - \dfrac{1}{25}$

বা, $2B = \dfrac{25-1}{25}$

বা, $2B = \dfrac{24}{25}$

বা, $B = \dfrac{24}{25 \times 2}$

$\therefore B = \dfrac{12}{25}$

A, B ও C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} = \frac{\frac{1}{25}}{2x+1} + \frac{\frac{12}{25}}{x+3} + \frac{-\frac{9}{5}}{(x+3)^2}$$

∴ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো:

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} = \frac{1}{25(2x+1)} + \frac{12}{25(x+3)} - \frac{9}{5(x+3)^2}$$ [Ans.]

১২) x, y, z এর একটি বহুপদী $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. [ঢা.বো.'১৫]

(ক) দেখাও যে, $F(x, y, z)$ হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

(খ) $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x, y, z) = 0$, $(x + y + z) \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$.

(গ) যদি $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$.

[Ref: প্রশ্ন নং-১২, পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৬২]

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

প্রদত্ত রাশিটি x, y, z চলকের বহুপদী।

x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$$F(y, z, x) = y^3 + z^3 + x^3 - 3.y.z.x$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

দেখা যায় যে, চলকগুলো স্থান পরিবর্তন করলেও রাশিটি একই থাকে।

অর্থাৎ $F(x, y, z) = F(y, z, x)$

সুতরাং, $F(x, y, z)$ একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। [দেখানো হলো]

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$
$$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \quad [\because x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)]$$
$$= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z)$$
$$= (x+y+z)\{(x+y)^2 - (x+y).z + z^2\} - 3xy(x+y+z)$$
$$= (x+y+z)(x^2 + 2xy + y^2 - zx - yz + z^2) - 3xy(x+y+z)$$
$$= (x+y+z)(x^2 + 2xy + y^2 - zx - yz + z^2 - 3xy)$$
$$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

প্রশ্নমতে,

$$F(x, y, z) = 0$$

বা, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

বা, $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ [$\because x + y + z \neq 0$]

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ [দেখানো হলো]

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $x = b + c - a$

$y = c + a - b$

এবং $z = a + b - c$

'খ' হতে পাই,

$$F(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$$
$$= \frac{1}{2}(x + y + z)(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2)$$
$$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(b + c - a + c + a - b + a + b - c)\{(b + c - a - c - a + b)^2 + (c + a - b - a - b + c)^2 + (a + b - c - b - c + a)^2\}$$

[x, y, z এর মান বসিয়ে]

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(-2)^2(a - b)^2 + (-2)^2(b - c)^2 + (-2)^2(c - a)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$$
$$= 4\left[\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}\right]$$
$$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 4.F(a, b, c)$$

$[\because \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} = a^3+b^3+c^3-3abc]$

বা, $F(x, y, z) = 4\,F(a, b, c)$

বা, $\frac{F(x, y, z)}{F(a, b, c)} = 4$

বা, $\frac{F(a, b, c)}{F(x, y, z)} = \frac{1}{4}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$ [দেখানো হলো]

১৩) $P(a,b,c) = (a + b + c)(ab + bc + ca)$ এবং $Q = a^3 + b^3 + c^3 - 3a^1b^1c^1$

(ক) $P(a,b,c)$ চক্রক্রমিক ও প্রতিসম রাশি কিনা তা কারণসহ উল্লেখ কর।

(খ) $Q = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = b = c$ অথবা $ab + bc + ca = 0$ [ব.বো.'২০]

(গ) $P(a,b,c) = abc$ হলে দেখাও যে; $\frac{1}{(a + b + c)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

[Ref: প্রশ্ন নং-১৩, পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৬২]

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $P(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca)$

এখন, $a = b$, $b = c$ এবং $c = a$ বসিয়ে পাই,

$$P(b, c, a) = (b + c + a)(bc + ca + ab)$$
$$= (a + b + c)(ab + bc + ca)$$
$$= P(a, b, c)$$

রাশিটি a, b, c চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কারণ এতে চক্রাকারে a এর পরিবর্তে b, b এর পরিবর্তে c এবং c এর পরিবর্তে a বসালে রাশিটি একই থাকে।

আবার, $a = b$, $b = a$ বসিয়ে পাই,

$$P(b, a, c) = (b + a + c)(ba + ac + bc)$$
$$= (a + b + c)(ab + bc + ca)$$
$$= P(a, b, c)$$

যেহেতু, রাশিটির a, b, c চলক তিনটি যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময় করলে রাশিটি একই থাকে। সুতরাং, $P(a, b, c)$ প্রতিসম রাশি।

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$Q = 0$$

বা, $a^3 + b^3 + c^3 - 3a^1b^1c^1 = 0$

বা, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} = 0$

$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3+\left(\frac{1}{b}\right)^3+\left(\frac{1}{c}\right)^3-3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}=0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$

[$\because a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$]

বা, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$

অতএব, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

বা, $\frac{bc+ca+ab}{abc}=0$

বা, $bc+ca+ab=0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2=0$

যেহেতু, তিনটি বর্গের সমষ্টির মান শূন্য। সুতরাং এদের প্রত্যেকের মান শূন্য।

অর্থাৎ $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=0$

বা, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

$\therefore a=b$ [বিপরীত করণ করে]

আবার, $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2=0$

বা, $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

$\therefore b=c$ [বিপরীত করণ করে]

আবার, $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2=0$

বা, $\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$

$\therefore c=a$ [বিপরীত করণ করে]

অতএব, $a=b=c$

সুতরাং, $bc+ca+ab=$ অথবা $a=b=c$ **[প্রমাণিত]**

(গ) এর সমাধান:

$P(a,b,c)=abc$

বা, $(a+b+c)(ab+bc+ca)=P(a,b,c)=abc$

বা, $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$

বা, $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$

বা, $a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a=abc$

বা, $a^2b+ab^2+abc+b^2c+ca^2+abc+c^2a+bc^2=abc-abc$

বা, $ab(a+b)+bc(a+b)+ca(a+b)+c^2(a+b)=0$

বা, $(a+b)(ab+bc+ca+c^2)=0$

বা, $(a+b)\{b(c+a)+c(c+a)\}=0$

বা, $(a+b)(b+c)(c+a)=0$

$(a+b)=0$ বা, $(b+c)=0$ বা, $(c+a)=0$

$a=-b,\quad b=-c,\quad c=-a$

যখন, $a+b=0$

বামপক্ষ, $\frac{1}{(a+b+c)^7}=\frac{1}{(0+c)^7}=\frac{1}{c^7}$

ডানপক্ষ, $\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{-b^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{c^7}$ ....(i)

একইভাবে দেখানো যায় যে,

যখন, $b+c=0$

বামপক্ষ, $\frac{1}{(a+b+c)^7}=\frac{1}{(a+0)^7}=\frac{1}{a^7}$

ডানপক্ষ, $\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}+\frac{1}{-c^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}$ ....(ii)

আবার,

যখন, $c+a=0$

বামপক্ষ, $\frac{1}{(a+b+c)^7}=\frac{1}{(0+b)^7}=\frac{1}{b^7}$

ডানপক্ষ, $\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{-a^7}=\frac{1}{b^7}$ ....(iii)

অতএব, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) নং হতে দেখানো যায় যে,

$$\frac{1}{(a+b+c)^7}=\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}$$ [দেখানো হলো]

১৪) $P(x)=18x^3+bx^2-x-2$
এবং $Q(x)=4x^4+12x^3+7x^2-3x-2$
(ক) $\frac{Q(x)}{P(x)}$ এর মাত্রা নির্ণয় কর।
(খ) $3x+2$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে b এর মান নির্ণয় কর। [ব.বো.'১৭]
(গ) $\frac{8x^2-2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [কু.বো.'১৯; য.বো., ব.বো.'১৭]

(ক) এর সমাধান:

আমরা জানি,

$F(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ একটি বহুপদী হলে,

$F(x)$ এর মাত্রা $=Q(x)$ এর মাত্রা $-P(x)$ এর মাত্রা

এখানে, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ এর মাত্রা $=Q(x)$ এর মাত্রা $-P(x)$ এর মাত্রা

$=4-3$ [$\because Q(x)$ এর সর্বোচ্চ ঘাত 4, $P(x)$ এর সর্বোচ্চ ঘাত 3]

$=1$

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $P(x)=18x^3+bx^2-x-2$

$(3x+2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $P\left(\frac{-2}{3}\right)=0$ হবে,

এখন, $P\left(\frac{-2}{3}\right)=0$

বা, $18\left(-\frac{2}{3}\right)^3+b\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\left(-\frac{2}{3}\right)-2=0$

বা, $18.\left(\frac{-8}{27}\right)+b.\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{2}{3}-2=0$

বা, $-\frac{16}{3}+\frac{4b}{9}+\frac{2}{3}-2=0$

বা, $\frac{4b}{9}=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}+2$

বা, $\frac{4b}{9}=\frac{16-2+6}{3}$

বা, $\frac{4b}{9}=\frac{20}{3}$

বা, $12b=20\times 9$

$\therefore b=15$ **[Ans.]**

(গ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে,

$$Q(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$$
$$= 4x^4 + 4x^3 + 8x^3 + 8x^2 - x^2 - x - 2x - 2$$
$$= 4x^3(x+1) + 8x^2(x+1) - x(x+1) - 2(x+1)$$
$$= (x+1)(4x^3 + 8x^2 - x - 2)$$
$$= (x+1)\{4x^2(x+2) - 1(x+2)\}$$
$$= (x+1)(x+2)(4x^2-1)$$
$$= (x+1)(x+2)(4x^2-1)$$

$$\therefore \frac{8x^2-2}{Q(x)} = \frac{8x^2-2}{4x^4+12x^3+7x^2-3x-2}$$
$$= \frac{2(4x^2-1)}{(x+1)(x+2)(4x^2-1)}$$
$$= \frac{2}{(x+1)(x+2)}$$

ধরি, $\frac{2}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$ ....(1)

(1) এর উভয়পক্ষে $(x+1)(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$2 \equiv A(x+2) + B(x+1)$ ....(2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(2) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$2 = A(-1+2) + B(0)$

বা, $A = 2$

আবার, (2) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$2 = A(-2+2) + B(-2+1)$

বা, $B = -2$

এখন, A ও B এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+2}$$

$\therefore \frac{8x^2-2}{Q(x)} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+2}$; নির্ণয়ের আংশিক ভগ্নাংশ। [*Ans.*]

> ১৫) চলক x এর দুইটি বহুপদী $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$ এবং $Q(x) = 6x^3 + x^2 - 9x + 26$
>
> (ক) $P(x)$ কে আদর্শরূপে লিখে এর মুখ্যসহগ নির্ণয় কর। [রা.বো.'১৫]
>
> (খ) $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x+2)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।
>
> (গ) দেখাও যে, $P(x)$ এবং $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক বিদ্যমান।

(ক) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$

x চলকের বহুপদীকে সাধারণত x এর ঘাতের অধঃক্রমে অর্থাৎ মুখ্যপদ থেকে শুরু করে ক্রমে ক্রমে ধ্রুব পদ পর্যন্ত সাজালে বহুপদীর আদর্শরূপ পাওয়া যায়।

সুতরাং, বহুপদীটির আদর্শরূপঃ $P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a$

বহুপদীটিতে গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদ বা মুখ্যপদ হলো $4x^4$ এবং মুখ্যপদের সহগ

অর্থাৎ, মুখ্যসহগ = 4

(খ) এর সমাধানঃ

'ক' থেকে পাই,

$P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a$

$(x+2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $P(-2) = 0$ হবে।

এখন, $P(-2) = 0$

বা, $4(-2)^4 + 12.(-2)^3 + 7(-2)^2 - 3.(-2) - a = 0$

বা, $4(-2)^4 + 12.(-8) + 7.4 + 6 - a = 0$

বা, $4.16 + 12.(-8) + 7.4 + 6 - a = 0$

বা, $64 - 96 + 28 + 6 - a = 0$

বা, $2 - a = 0$

$\therefore a = 2$

সুতরাং, নির্ণেয় মান, $a = 2$

(গ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$

এবং $Q(x) = 6x^3 + x^2 - 9x + 26$

'খ' হতে প্রাপ্ত, $a = 2$

$\therefore P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - 2 + 12x^3$
$= 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

আবার, $(x+2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক

$$\therefore 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$$
$$= 4x^4 + 8x^3 + 4x^3 + 8x^2 - x^2 - 2x - x - 2$$
$$= 4x^3(x+2) + 4x^2(x+2) - x(x+2) - 1(x+2)$$
$$= (x+2)(4x^3 + 4x^2 - x - 1)$$
$$= (x+2)\{4x^2(x+1) - 1(x+1)\}$$
$$= (x+2)(x+1)(4x^2-1)$$
$$= (x+2)(x+1)\{(2x)^2 - (1)^2\}$$
$$= (x+2)(x+1)(2x+1)(2x-1)$$

মনে করি, $(x+2)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক

$$\therefore Q(-2) = 6(-2)^3 + (-2)^2 - 9(-2) + 26$$
$$= -48 + 4 + 18 + 26$$
$$= 0$$

$\therefore (x+2)$, $Q(x)$ একটি উৎপাদক

$$\therefore 6x^3 + x^2 - 9x + 26$$
$$= 6x^3 + 12x^2 - 11x^2 - 22x + 13x + 26$$
$$= 6x^2(x+2) - 11x(x+2) + 13(x+2)$$
$$= (x+2)(6x^2 - 11x + 13)$$

$\therefore P(x)$ এবং $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক $(x+2)$।

সুতরাং, $P(x)$ এবং $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক বিদ্যমান।

[দেখানো

বিকল্প সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $Q(x) = 6x^3 + x^2 - 9x + 26$

বহুপদীর ধ্রুবপদ 26 এর উৎপাদকসমূহ $\pm1, \pm2, \pm13, \pm26$

আবার, মুখ্যসহগ 6 এর উৎপাদকসমূহ $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

$Q(1) = 6(1)^3 + (1)^2 - 9(1) + 26 = 24 \neq 0$

$Q(-1) = 6(-1)^3 + (-1)^2 - 9(-1) + 26 = 30 \neq 0$

$Q(2) = 6(2)^3 + (2)^2 - 9(2) + 26 = 60 \neq 0$

এখন, $x = -2$ হলে পাই,

$$Q(-2) = 6(-2)^3 + (-2)^2 - 9(-2) + 26$$
$$= -48 + 4 + 18 + 26$$
$$= 0$$

$\therefore (x+2)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক

আবার, 'খ' হতে পাই, $a = 2$ শর্তে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক (x

$\therefore (x+2)$, $P(x)$ এবং $Q(x)$ উভয়ের সাধারণ উৎপাদক

সুতরাং, $P(x)$ ও $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক বিদ্যমান।

[দেখানো

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত বছরগুলোর বোর্ড প্রশ্নের উত্তর নতুন পাঠ্যবই অনুসারে দেওয়া হয়েছে।

প্রশ্ন-১ ঢাকা বোর্ড ২০২২

$F(x, y, z) = x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ এবং $a = y + z - x, b = z + x - y, c = x + y - z$

(ক) দেখাও যে, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ রাশিটি a, b, c চলকের চক্রক্রমিক রাশি।

(খ) $F(x, y, z) = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $xy + yz + zx = 0$ অথবা $x = y = z$.

(গ) প্রমাণ কর যে, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 4(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

(ক) এর সমাধান

ধরি, $F(a, b, c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

a এর স্থলে b, b এর স্থলে c এবং c এর স্থলে a বসিয়ে পাই,

$F(b, c, a) = \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}$

$= \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = F(a, b, c)$

যেহেতু, রাশিতে a এর পরিবর্তে b, b এর পরিবর্তে c এবং c এর পরিবর্তে a বসালে রাশিটি একই থাকে।

∴ প্রদত্ত রাশিটি a, b, c চলকের চক্রক্রমিক রাশি। [দেখানো হলো]

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1}$

$F(x, y, z) = 0$ হলে,

$x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1} = 0$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz} = 0$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0.$

$[\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}]$

বা, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 0$

বা, $yz + zx + xy = 0$

∴ $xy + yz + zx = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$

যেহেতু, তিনটি বর্গের সমষ্টির মান শূন্য। সুতরাং এদের প্রত্যেকের মান শূন্য।

অর্থাৎ $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$

∴ $x = y$ [বিপরীত করণ করে]

আবার, $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

∴ $y = z$ [বিপরীত করণ করে]

আবার, $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{z} = \frac{1}{x}$

∴ $z = x$ [বিপরীত করণ করে]

অতএব, $x = y = z$

সুতরাং, $xy + yz + zx = 0$ অথবা $x = y = z$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$a = y + z - x, b = z + x - y, c = x + y - z$

এখানে, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$= \frac{1}{2}(y + z - x + z + x - y + x + y - z)\{(y + z - x - z - x + y)^2$

$+ (z + x - y - x - y + z)^2 + (x + y - z - y - z + x)^2\}$

[a, b, c এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(2y - 2x)^2 + (2z - 2y)^2 + (2x - 2z)^2\}$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)[\{-2(x - y)\}^2 + \{-2(y - z)\}^2 + \{-2(z - x)\}^2]$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{4(x - y)^2 + 4(y - z)^2 + 4(z - x)^2\}$

$= 4 \cdot \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= 4(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

$[\because \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz]$

∴ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 4(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং-৪ । যশোর বোর্ড-২০২২

$M = x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ এবং
$L(x) = (3x - 5)(x^3 - 6x^2 + 9x)^{-1}$.

(ক) $3y^3 - ay^2 + 4y + 3$ এর একটি উৎপাদক $y + 1$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $M = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x = y = z$ অথবা $xy + yz + zx = 0$

(গ) $L(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(ক) এর সমাধান:

ধরি, $f(y) = 3y^3 - ay^2 + 4y + 3$

$y + 1$, $f(y)$ এর একটি উৎপাদক হলে $f(-1) = 0$ হবে।

এখন, $f(-1) = 0$

বা, $3 \times (-1)^3 - a \times (-1)^2 + 4 \times (-1) + 3 = 0$

বা, $-3 - a - 4 + 3 = 0$

বা, $-a - 4 = 0$

বা, $-a = 4$

$\therefore a = -4$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $a = -4$ [Ans.]

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $M = x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1}$

$M = 0$ হলে, $x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1} = 0$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

$\left[\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}\right]$

বা, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 0$

$\therefore xy + yz + zx = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$

আমরা জানি, দুই বা ততোধিক রাশির বর্গের যোগফল শূন্য হলে, তাদের প্রত্যেকের মান আলাদা আলাদাভাবে শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$

$\therefore x = y$

আবার, $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\therefore y = z$

আবার, $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{z} = \frac{1}{x}$

$\therefore z = x$

$\therefore x = y = z$

সুতরাং, $x = y = z$ অথবা $xy + yz + zx = 0$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $L(x) = (3x - 5)(x^3 - 6x^2 + 9x)^{-1}$

$= \frac{3x - 5}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

এখন, $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9)$

$= x(x^2 - 3x - 3x + 9)$

$= x\{x(x - 3) - 3(x - 3)\}$

$= x(x - 3)(x - 3)$

$= x(x - 3)^2$

$\therefore L(x) = \frac{3x - 5}{x(x - 3)^2}$

ধরি, $\frac{3x - 5}{x(x - 3)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 3)^2} + \frac{C}{x - 3}$ ……… (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x - 3)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x - 5 \equiv A(x - 3)^2 + Bx + Cx(x - 3)$ ……… (ii)

বা, $3x - 5 \equiv A(x^2 - 6x + 9) + Bx + C(x^2 - 3x)$

বা, $3x - 5 \equiv Ax^2 - 6Ax + 9A + Bx + Cx^2 - 3Cx$

বা, $3x - 5 \equiv (A + C)x^2 + (B - 6A - 3C)x + 9A$ ……(iii)

এখন, (ii) নং সমীকরণে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$3 \times 3 - 5 = A(3 - 3)^2 + B \times 3 + C \times 3 \times (3 - 3)$

বা, $9 - 5 = A \times 0 + 3B + 3C \times 0$

বা, $4 = 3B$

$\therefore B = \frac{4}{3}$

আবার, (iii) নং এর উভয়পক্ষ হতে ধ্রুবপদের সমতা করে পাই,

$9A = -5$

$\therefore A = -\frac{5}{9}$

আবার, (iii) নং এর উভয়পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + C = 0$

বা, $-\frac{5}{9} + C = 0$ $\left[\because A = -\frac{5}{9}\right]$

$\therefore C = \frac{5}{9}$

(i) নং সমীকরণে A, B ও C এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{3x - 5}{x(x - 3)^2} = \frac{-\frac{5}{9}}{x} + \frac{\frac{4}{3}}{(x - 3)^2} + \frac{\frac{5}{9}}{x - 3}$

$= -\frac{5}{9x} + \frac{4}{3(x - 3)^2} + \frac{5}{9(x - 3)}$

$= \frac{4}{3(x - 3)^2} + \frac{5}{9(x - 3)} - \frac{5}{9x}$

$\therefore L(x) = \frac{4}{3(x - 3)^2} + \frac{5}{9(x - 3)} - \frac{5}{9x}$;

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। [Ans.]

প্রশ্ন নং-৫ । চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২২

$P(x) = 4x^3 - 4Cx^2 - \frac{C}{3}x + C$, x এর একটি বহুপদী ফাংশন এবং C একটি ধ্রুবক।

(ক) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$ ফাংশনের জন্য $f(-1)$ এবং $f(2)$ কত?

(খ) C এর মান কত হলে $P(x)$, $(2x - 1)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে? $P(x)$ এর অন্যান্য উৎপাদকগুলো বের কর।

(গ) $C = 3$ এর ক্ষেত্রে $\frac{P(1)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(ক) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$

$\therefore f(-1) = 4 \times (-1)^3 - 4 \times (-1)^2 - 9 \times (-1) + 9$
$= -4 - 4 + 9 + 9$
$= 10$ [Ans.]

এবং $f(2) = 4 \times (2)^3 - 4 \times (2)^2 - 9 \times 2 + 9$
$= 4 \times 8 - 4 \times 4 - 18 + 9$
$= 32 - 16 - 18 + 9$
$= 7$ [Ans.]

(খ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $P(x) = 4x^3 - 4Cx^2 - \frac{C}{3}x + C$

$P(x)$, $(2x - 1)$ দ্বারা বিভাজ্য হলে $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হবে।

এখন, $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

বা, $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4C \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{C}{3} \times \frac{1}{2} + C = 0$

বা, $4 \times \frac{1}{8} - 4C \times \frac{1}{4} - \frac{C}{6} + C = 0$

বা, $\frac{1}{2} - C - \frac{C}{6} + C = 0$

বা, $\frac{1}{2} - \frac{C}{6} = 0$

বা, $\frac{C}{6} = \frac{1}{2}$

বা, $C = \frac{6}{2}$

$\therefore C = 3$ [Ans.]

$C = 3$ হলে, $P(x) = 4x^3 - 4 \times 3x^2 - \frac{3}{3}x + 3$

$\therefore P(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$

এখন, $4x^3 - 12x^2 - x + 3$
$= 4x^3 - 2x^2 - 10x^2 + 5x - 6x + 3$
$= 2x^2(2x - 1) - 5x(2x - 1) - 3(2x - 1)$
$= (2x - 1)(2x^2 - 5x - 3)$
$= (2x - 1)(2x^2 - 6x + x - 3)$
$= (2x - 1)\{2x(x - 3) + 1(x - 3)\}$
$= (2x - 1)(2x + 1)(x - 3)$

$\therefore P(x)$ এর অন্যান্য উৎপাদকগুলো হলো $(2x + 1)$ ও $(x - 3)$ [Ans.]

(গ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $P(x) = 4x^3 - 4Cx^2 - \frac{C}{3}x + C$

$C = 3$ হলে, $P(x) = 4x^3 - 4 \times 3x^2 - \frac{3}{3}x + 3$

$\therefore P(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$

$\therefore P(1) = 4 \times (1)^3 - 12(1)^2 - 1 + 3$
$= 4 - 12 - 1 + 3 = -6$

এখন, $\frac{P(1)}{P(x)} = \frac{-6}{4x^3 - 12x^2 - x + 3}$

এখন, 'খ' হতে প্রাপ্ত

$4x^3 - 12x^2 - x + 3 = (2x - 1)(2x + 1)(x - 3)$

$\therefore \frac{-6}{4x^3 - 12x^2 - x + 3} = \frac{-6}{(2x - 1)(2x + 1)(x - 3)}$

ধরি, $\frac{-6}{(2x - 1)(2x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{2x + 1} + \frac{C}{x - 3}$ .... (i)

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $(2x - 1)(2x + 1)(x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$-6 = A(2x + 1)(x - 3) + B(2x - 1)(x - 3) + C(2x + 1)(2x - 1)$ .... (ii)

এখন, (ii) নং এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$-6 = A(2 \times 3 + 1)(3 - 3) + B(2 \times 3 - 1)(3 - 3) + C(2 \times 3 + 1)(2 \times 3 - 1)$

বা, $-6 = A \times 7 \times 0 + B \times 5 \times 0 + C \times 7 \times 5$

বা, $-6 = 0 + 0 + 35C$

বা, $35C = -6$

$\therefore C = -\frac{6}{35}$

আবার, (ii) নং এ $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$-6 = A\left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} - 3\right) + B\left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 3\right) + C\left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)\left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)$

বা, $-6 = A \times 2 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + B \times 0 + C \times 0$

বা, $-6 = -5A$

বা, $5A = 6 \qquad \therefore A = \frac{6}{5}$

আবার, (ii) নং এ $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$-6 = A\left\{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right\}\left(-\frac{1}{2} - 3\right) + B\left\{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right\}\left(-\frac{1}{2} - 3\right) + C\left\{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right\}\left\{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right\}$

বা, $-6 = A(-1 + 1)\left(-\frac{7}{2}\right) + B(-1 - 1)\left(-\frac{7}{2}\right) + C(-1 + 1)(-1 - 1)$

বা, $-6 = A \times 0 + B \times (-2) \times \left(-\frac{7}{2}\right) + C \times 0$

বা, $-6 = 7B \qquad \therefore B = -\frac{6}{7}$

(i) নং এ A, B ও C এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{-6}{(2x - 1)(2x + 1)(x - 3)} = \frac{\frac{6}{5}}{2x - 1} + \frac{-\frac{6}{7}}{2x + 1} + \frac{-\frac{6}{35}}{x - 3}$
$= \frac{6}{5(2x - 1)} - \frac{6}{7(2x + 1)} - \frac{6}{35(x - 3)}$

$\therefore \frac{P(1)}{P(x)} = \frac{6}{5(2x - 1)} - \frac{6}{7(2x + 1)} - \frac{6}{35(x - 3)}$; যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। [Ans.]

প্রশ্ন নং-৬ । বরিশাল বোর্ড-২০২২

(i) $f(x) = 14x - 7 + ax^3 + 28x^2 - a$
(ii) $A = P^{-3} + Q^{-3} + R^{-3}$

(ক) $f(x)$ কে বহুপদীর আদর্শ রূপে লিখে ধ্রুব পদের মান নির্ণয় কর।
(খ) যদি $(2x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে a এর মান নির্ণয় কর।
(গ) $A = \frac{3}{PQR}$ হলে, দেখাও যে, $PQ + QR + RP = 0$ এবং $P = Q = R$. (সংশোধিত)

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $f(x) = 14x - 7 + ax^3 + 28x^2 - a$
$\therefore f(x) = ax^3 + 28x^2 + 14x - 7 - a$
ইহাই $f(x)$ বহুপদীর আদর্শ রূপ।
এখন, ধ্রুবপদ $= -7 - a$ [Ans.]

(খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $f(x) = 14x - 7 + ax^3 + 28x^2 - a$
$(2x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হবে।
এখন, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
বা, $14 \times \frac{1}{2} - 7 + a \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - a = 0$
বা, $7 - 7 + a \times \frac{1}{8} + 28 \times \frac{1}{4} - a = 0$
বা, $\frac{a}{8} + 7 - a = 0$
বা, $\frac{a}{8} - a = -7$
বা, $\frac{a - 8a}{8} = -7$
বা, $-7a = -56$
বা, $a = \frac{-56}{-7}$
$\therefore a = 8$
$\therefore$ নির্ণেয় মান **a = 8** [Ans.]

(গ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $A = P^{-3} + Q^{-3} + R^{-3}$ এবং $A = \frac{3}{PQR}$
$\therefore P^{-3} + Q^{-3} + R^{-3} = \frac{3}{PQR}$
বা, $\frac{1}{P^3} + \frac{1}{Q^3} + \frac{1}{R^3} = 3 \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{1}{R}$
বা, $\left(\frac{1}{P}\right)^3 + \left(\frac{1}{Q}\right)^3 + \left(\frac{1}{R}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{1}{R} = 0$
বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R}\right)\left\{\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{P}\right)^2\right\} = 0$
$\left[\because a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}\right]$
বা, $\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R}\right)\left\{\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{P}\right)^2\right\} = 0$
হয়, $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} = 0$
বা, $\frac{QR + PR + PQ}{PQR} = 0$
$\therefore PQ + QR + RP = 0$

অথবা,
$$\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{P}\right)^2 = 0$$
আমরা জানি, দুই বা ততোধিক রাশির বর্গের যোগফল শূন্য হলে, তাদের প্রত্যেকের মান আলাদা আলাদাভাবে শূন্য হয়।
অর্থাৎ, $\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)^2 = 0$
বা, $\frac{1}{P} - \frac{1}{Q} = 0$ [বর্গমূল করে]
বা, $\frac{1}{P} = \frac{1}{Q}$
$\therefore P = Q$
এবং $\left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{R}\right)^2 = 0$
বা, $\frac{1}{Q} - \frac{1}{R} = 0$ [বর্গমূল করে]
বা, $\frac{1}{Q} = \frac{1}{R}$
$\therefore Q = R$
এবং $\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{P}\right)^2 = 0$
বা, $\frac{1}{R} - \frac{1}{P} = 0$ [বর্গমূল করে]
বা, $\frac{1}{R} = \frac{1}{P}$
$\therefore R = P$
অর্থাৎ $P = Q = R$
$\therefore$ **PQ + QR + RP = 0** এবং **P = Q = R** [প্রমাণিত]

দৃষ্টি আকর্ষণ:
বোর্ডের মূল প্রশ্ন অনুযায়ী $PQ + QR + RS = 0$ প্রমাণ সম্ভব নয়। কারণ $A = P^{-3} + Q^{-3} + R^{-3}$ এর মধ্যে S সম্বলিত কোনো পদ নেই।

প্রশ্ন নং-৭ । সিলেট বোর্ড-২০২২

$P(x) = 2x^3 + x^2 - 18x + 10a$
$Q(y) = y^3 + 1$

(ক) $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
(খ) $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(2x + 1)$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর।
(গ) $\frac{2y}{Q(y)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(ক) এর সমাধান:
ধরি, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$
$\therefore f(2) = 2 \times (2)^3 + 3 \times (2)^2 - 11 \times 2 - 6$
$= 2 \times 8 + 3 \times 4 - 22 - 6$
$= 16 + 12 - 28$
$= 0$
তাহলে, $(x - 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন,
$2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$
$= 2x^3 - 4x^2 + 7x^2 - 14x + 3x - 6$
$= 2x^2(x - 2) + 7x(x - 2) + 3(x - 2)$
$= (x - 2)(2x^2 + 7x + 3)$
$= (x - 2)(2x^2 + 6x + x + 3)$
$= (x - 2)\{2x(x + 3) + 1(x + 3)\}$
$= \mathbf{(x - 2)(x + 3)(2x + 1)}$ [Ans.]

আছে, P(x) ... 18x + 10a

P(x) এর একটি উৎপাদক (2x + 1) হলে, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

এখন, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

বা, $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 18 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 10a = 0$

বা, $2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} + 9 + 10a = 0$

বা, $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 9 + 10a = 0$

বা, $10a = -9$

$\therefore a = -\frac{9}{10}$

$\therefore$ **নির্ণেয় মান $a = -\frac{9}{10}$ [Ans.]**

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $Q(y) = y^3 + 1$

$= (y + 1)(y^2 - y + 1)$

$\therefore \frac{2y}{Q(y)} = \frac{2y}{(y + 1)(y^2 - y + 1)}$

ধরি, $\frac{2y}{(y + 1)(y^2 - y + 1)} \equiv \frac{A}{y + 1} + \frac{By + C}{y^2 - y + 1}$ .... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(y + 1)(y^2 - y + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$2y \equiv A(y^2 - y + 1) + (By + C)(y + 1)$ .... (ii)

বা, $2y \equiv Ay^2 - Ay + A + By^2 + By + Cy + C$

বা, $2y \equiv (A + B)y^2 + (B + C - A)y + A + C$ .... (iii)

এখন, (ii) নং এ $y = -1$ বসিয়ে পাই,

$2 \times (-1) = A\{(-1)^2 - (-1) + 1\} + \{B \times (-1) + C\}(-1 + 1)$

বা, $-2 = A(1 + 1 + 1) + (-B + C) \times 0$

বা, $-2 = 3A + 0$

বা, $3A = -2$

$\therefore A = -\frac{2}{3}$

আবার, (iii) নং এর উভয় পক্ষ হতে ধ্রুবপদের সমতা করে পাই,

$A + C = 0$

বা, $-\frac{2}{3} + C = 0 \quad \left[\because A = -\frac{2}{3}\right]$

$\therefore C = \frac{2}{3}$

আবার, (iii) নং এর উভয়পক্ষ হতে y^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0$

বা, $-\frac{2}{3} + B = 0 \quad \left[\because A = -\frac{2}{3}\right]$

$\therefore B = \frac{2}{3}$

(i) নং এ A, B ও C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{2y}{(y + 1)(y^2 - y + 1)} = \frac{-\frac{2}{3}}{y + 1} + \frac{\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}}{y^2 - y + 1}$$

$$= -\frac{2}{3(y + 1)} + \frac{\frac{2}{3}(y + 1)}{y^2 - y + 1}$$

$$= -\frac{2}{3(y + 1)} + \frac{2(y + 1)}{3(y^2 - y + 1)}$$

$\therefore \frac{2y}{Q(y)} = -\frac{2}{3(y + 1)} + \frac{2(y + 1)}{3(y^2 - y + 1)}$; যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **[Ans.]**

প্রশ্ন নং-৮ । দিনাজপুর বোর্ড-২০২২

$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

(ক) দেখাও যে, (x + 2), P(x) বহুপদীর একটি উৎপাদক।

(খ) (x − m) ও (x − n) উভয়ই P(x) এর উৎপাদক হলে প্রমাণ করো যে, $m^2 + mn + n^2 + 4m + 4n + 1 = 0$, যেখানে $m \neq n$.

(গ) $\frac{x^3}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করো।

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

(x + 2), P(x) এর একটি উৎপাদক হলে, $P(-2) = 0$ হবে।

এখন, $P(-2) = (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 + (-2) - 6$

$= -8 + 4 \times 4 - 2 - 6$

$= -8 + 16 - 2 - 6 = 0$

$\therefore$ **(x + 2), P(x) বহুপদীর একটি উৎপাদক।** [দেখানো হলো]

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

এখন, (x − m), P(x) এর উৎপাদক হলে, $P(m) = 0$ হবে।

$\because P(m) = 0$

$\therefore m^3 + 4m^2 + m - 6 = 0$ .... (i)

আবার, (x − n), P(x) এর উৎপাদক হলে, $P(n) = 0$ হবে।

$\because P(n) = 0$

$\therefore n^3 + 4n^2 + n - 6 = 0$ .... (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$m^3 + 4m^2 + m - 6 = n^3 + 4n^2 + n - 6$

বা, $m^3 + 4m^2 + m - 6 - n^3 - 4n^2 - n + 6 = 0$

বা, $m^3 - n^3 + 4(m^2 - n^2) + m - n = 0$

বা, $(m - n)(m^2 + mn + n^2) + 4(m + n)(m - n) + (m - n) = 0$

বা, $(m - n)\{m^2 + mn + n^2 + 4(m + n) + 1\} = 0$

বা, $(m - n)(m^2 + mn + n^2 + 4m + 4n + 1) = 0$

হয়, $m - n = 0$

$\therefore m = n$

কিন্তু ইহা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $m \neq n$

অথবা, $m^2 + mn + n^2 + 4m + 4n + 1 = 0$

$\therefore$ **$m^2 + mn + n^2 + 4m + 4n + 1 = 0$** [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

'ক' হতে প্রাপ্ত (x + 2), P(x) এর একটি উৎপাদক

এখন,

$x^3 + 4x^2 + x - 6$

$= x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 4x - 3x - 6$

$= x^2(x + 2) + 2x(x + 2) - 3(x + 2)$

$= (x + 2)(x^2 + 2x - 3)$

$= (x + 2)(x^2 + 3x - x - 3)$

$= (x + 2)\{x(x + 3) - 1(x + 3)\}$

$= (x + 2)(x + 3)(x - 1)$

$\therefore \frac{x^3}{P(x)} = \frac{x^3}{(x + 2)(x + 3)(x - 1)}$ .... (i)

(i) নং এর ডানপক্ষে লবকে হর দ্বারা ভাগ করলে 1 হয়।

ধরি, $\frac{x^3}{(x + 2)(x + 3)(x - 1)} \equiv 1 + \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1}$ ..... (ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষকে (x + 2)(x + 3)(x − 1) দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^3 \equiv (x + 2)(x + 3)(x - 1) + A(x + 3)(x - 1) + B(x + 2)(x - 1)$
$+ C(x + 2)(x + 3)$ .... (iii)

(iii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,
$(-2)^3 = (-2+2)(-2+3)(-2-1) + A(-2+3)(-2-1) + B(-2+2)(-2-1) + C(-2+2)(-2+3)$
বা, $-8 = 0 \times 1 \times (-3) + A \times 1 \times (-3) + B \times 0 \times (-3) + C \times 0 \times 1$
বা, $-8 = 0 - 3A + 0 + 0$
বা, $3A = 8$
$\therefore A = \frac{8}{3}$

(iii) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,
$(-3)^3 = (-3+2)(-3+3)(-3-1) + A(-3+3)(-3-1) + B(-3+2)(-3-1) + C(-3+2)(-3+3)$
বা, $-27 = (-1) \times 0 \times (-4) + A \times 0 \times (-4) + B \times (-1) \times (-4) + C \times (-1) \times 0$
বা, $-27 = 0 + 0 + 4B + 0$
বা, $4B = -27$
$\therefore B = -\frac{27}{4}$,

(iii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,
$(1)^3 = (1+2)(1+3)(1-1) + A(1+3)(1-1) + B(1+2)(1-1) + C(1+2)(1+3)$
বা, $1 = 3 \times 4 \times 0 + A \times 4 \times 0 + B \times 3 \times 0 + C \times 3 \times 4$
বা, $1 = 0 + 0 + 0 + 12C$
বা, $12C = 1$
$\therefore C = \frac{1}{12}$

(ii) নং এ A, B ও C এর মান বসিয়ে পাই,
$$\frac{x^3}{(x+2)(x+3)(x-1)} = 1 + \frac{\frac{8}{3}}{x+2} + \frac{-\frac{27}{4}}{x+3} + \frac{\frac{1}{12}}{x-1}$$
$$= 1 + \frac{8}{3(x+2)} - \frac{27}{4(x+3)} + \frac{1}{12(x-1)}$$
$$\therefore \frac{x^3}{P(x)} = 1 + \frac{8}{3(x+2)} - \frac{27}{4(x+3)} + \frac{1}{12(x-1)},$$
যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ [Ans.]

প্রশ্ন নং-৯ | ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২২

$P(x) = 2x^3 + x^2 - 18x - 9K$ এবং $Q(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$

(ক) $\log_{\sqrt{2}}4 - \log_9 3$ এর মান নির্ণয় কর।
(খ) $2x + 1$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে প্রমাণ কর যে, $K = 1$.
(গ) $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

✍ (ক) এর সমাধান:
$\log_{\sqrt{2}}4 - \log_9 3$
$= \log_{\sqrt{2}}2^2 - \log_9\sqrt{9}$
$= \log_{\sqrt{2}}\{(\sqrt{2})^2\}^2 - \log_9 9^{\frac{1}{2}}$ [$\because (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$]
$= \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^4 - \log_9 9^{\frac{1}{2}}$
$= 4\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log_9 9$
$= 4.1 - \frac{1}{2}.1$ [$\because \log_a a = 1$]
$= 4 - \frac{1}{2} = \frac{8-1}{2} = \frac{7}{2}$ [Ans.]

✍ (খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $P(x) = 2x^3 + x^2 - 18x - 9K$
$2x + 1$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ হবে।
এখন, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
বা, $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 18 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 9K = 0$
বা, $2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} + 9 - 9K = 0$
বা, $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 9 - 9K = 0$
বা, $9 - 9K = 0$
বা, $-9K = -9$
বা, $9K = 9$
$\therefore K = 1$ [প্রমাণিত]

✍ (গ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $Q(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$
এখন,
$x^3 - x^2 - 2x$
$= x(x^2 - x - 2)$
$= x(x^2 - 2x + x - 2)$
$= x\{x(x-2) + 1(x-2)\}$
$= x(x+1)(x-2)$
$\therefore Q(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x(x+1)(x-2)}$
ধরি, $\frac{x^2 - 3x - 2}{x(x+1)(x-2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$ ....(i)
(i) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x+1)(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$x^2 - 3x - 2 \equiv A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$ ...(ii)
(ii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,
$0^2 - 3 \times 0 - 2 = A(0+1)(0-2) + B \times 0 \times (0-2) + C \times 0 \times (0+1)$
বা, $-2 = A \times 1 \times (-2) + 0 + 0$
বা, $-2 = -2A$
বা, $2A = 2$
$\therefore A = 1$
(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,
$(-1)^2 - 3 \times (-1) - 2 = A(-1+1)(-1-2) + B \times (-1)(-1-2) + C \times (-1) \times (-1+1)$
বা, $1 + 3 - 2 = A \times 0 \times (-3) + B \times (-1) \times (-3) + C \times (-1) \times 0$
বা, $2 = 0 + 3B + 0$
বা, $3B = 2$
$\therefore B = \frac{2}{3}$

(i) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$(2)^2 - 3 \times 2 - 2 = A(2+1)(2-2) + B \times 2 \times (2-2) + C \times 2 \times (2+1)$

বা, $4 - 6 - 2 = A \times 3 \times 0 + B \times 2 \times 0 + C \times 2 \times 3$

বা, $-4 = 0 + 0 + 6C$

বা, $6C = -4$

বা, $C = -\frac{4}{6}$

$\therefore C = -\frac{2}{3}$

(i) নং এ A, B ও C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 3x - 2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{2}{3}}{x-2}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{2}{3(x+1)} - \frac{2}{3(x-2)}$$

$$\therefore Q(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{3(x+1)} - \frac{2}{3(x-2)};$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **[Ans.]**

প্রশ্ন নং-১০ ঢাকা বোর্ড-২০২০

$F(x) = \frac{4x-6}{x-2}$, $x \neq 2$ এবং $G(x) = x^2 + 2x - 3$.

(ক) $a^3 + 4a^2 + a - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

(খ) $F^{-1}(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর।

(গ) $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{G(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(ক) এর সমাধান:

মনে করি, $P(a) = a^3 + 4a^2 + a - 6$

$\therefore P(1) = (1)^3 + 4(1)^2 + 1 - 6$
$= 1 + 4 + 1 - 6 = 0$

তাহলে, $(a-1)$, $P(a)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক।

এখন, $P(a) = a^3 + 4a^2 + a - 6$
$= a^3 - a^2 + 5a^2 - 5a + 6a - 6$
$= a^2(a-1) + 5a(a-1) + 6(a-1)$
$= (a-1)(a^2 + 5a + 6)$
$= (a-1)(a^2 + 2a + 3a + 6)$
$= (a-1)\{a(a+2) + 3(a+2)\}$
$= (a-1)(a+2)(a+3)$ **[Ans.]**

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{4x-6}{x-2}$; $x \neq 2$

ধরি, $F(x) = y$

$\therefore x = F^{-1}(y)$

এখন, $F(x) = \frac{4x-6}{x-2}$

বা, $y = \frac{4x-6}{x-2}$

বা, $xy - 2y = 4x - 6$

বা, $xy - 4x = 2y - 6$

বা, $x(y-4) = 2y - 6$

বা, $x = \frac{2y-6}{y-4}$

বা, $F^{-1}(y) = \frac{2y-6}{y-4}$ $[\because x = F^{-1}(y)]$

$\therefore F^{-1}(x) = \frac{2x-6}{x-4}$ [চলক পরিবর্তন করে]

এখন, $F^{-1}(x)$ এক-এক ফাংশন হবে যদি ও কেবল যদি যেকোনো $a, b \in$ ডোম F^{-1} এর জন্য $F^{-1}(a) = F^{-1}(b)$ হলে, $a = b$ হয়।

এখন, $F^{-1}(a) = F^{-1}(b)$

বা, $\frac{2a-6}{a-4} = \frac{2b-6}{b-4}$

বা, $2ab - 8a - 6b + 24 = 2ab - 8b - 6a + 24$

বা, $2ab - 8a - 6b + 24 - 2ab + 8b + 6a - 24 = 0$

বা, $2b - 2a = 0$

বা, $2a = 2b$

$\therefore a = b$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

যেহেতু, $F^{-1}(a) = F^{-1}(b)$ হলে $a = b$ হয়।

সুতরাং, $F^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$G(x) = x^2 + 2x - 3$
$= x^2 - x + 3x - 3$
$= x(x-1) + 3(x-1)$
$= (x-1)(x+3)$

এখন, $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{G(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$

$= \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

$= \frac{x(x^2 + 2x - 3)}{x^2 + 2x - 3} + \frac{3x+1}{x^2 + 2x - 3}$

$\therefore \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{G(x)} = x + \frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}$ ……… (i)

প্রদত্ত মূলদ ভগ্নাংশ $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{G(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$ একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ, তবে $\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$ ……… (ii)

(ii)নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $(x-1)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x + 1 \equiv A(x+3) + B(x-1)$ ……… (iii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (iii) এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$3 \times 1 + 1 = A(1+3) + B(1-1)$

বা, $3 + 1 = 4A + 0$

বা, $4 = 4A$

বা, $A = \frac{4}{4}$

$\therefore A = 1$

আবার, (iii)নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$3(-3) + 1 = A(-3+3) + B(-3-1)$

বা, $-9 + 1 = 0 - 4B$

বা, $-8 = -4B$

বা, $4B = 8$ [উভয়পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $B = \frac{8}{4}$

$\therefore B = 2$

এখন, $A = 1$ এবং $B = 2$ এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)} \equiv \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+3}$ ……… (iv)

আবার, সমীকরণ (i)নং ও (iv)নং থেকে পাই,

$\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{G(x)} \equiv x + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+3}$; যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন নং-১১ । রাজশাহী বোর্ড-২০২০

$M(r, s, t) = r^3 + s^3 + t^3$ এবং $N(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.
(ক) $N(-2)$ নির্ণয় কর।
(খ) $M(r, s, t) = 3rst$ হলে, প্রমাণ কর যে, $r + s + t = 0$
অথবা, $r = s = t$.
(গ) $\frac{x^3+5}{N(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $N(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
$\therefore N(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2$
$= -8 + 2.4 + 2 - 2$
$= -8 + 8 + 2 - 2$
$= 10 - 10 = 0$
$\therefore$ নির্ণেয় মান : 0 [Ans.]

(খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $M(r, s, t) = r^3 + s^3 + t^3$
এবং $M(r, s, t) = 3rst$
$\therefore r^3 + s^3 + t^3 = 3rst$
বা, $r^3 + s^3 + t^3 - 3rst = 0$
বা, $\frac{1}{2}(r + s + t)\{(r - s)^2 + (s - t)^2 + (t - r)^2\} = 0$
$\left[\because a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}\right]$
বা, $(r + s + t)\{(r - s)^2 + (s - t)^2 + (t - r)^2\} = 0$
$\therefore r + s + t = 0$
অথবা, $(r - s)^2 + (s - t)^2 + (t - r)^2 = 0$
আমরা জানি, দুই বা ততোধিক রাশির বর্গের যোগফল শূন্য হলে, তাদের প্রত্যেকের মান আলাদা আলাদাভাবে শূন্য হয়।
অর্থাৎ, $(r - s)^2 = 0$
বা, $r - s = 0$ [বর্গমূল করে]
$\therefore r = s$
এবং $(s - t)^2 = 0$
বা, $s - t = 0$ [বর্গমূল করে]
$\therefore s = t$
এবং $(t - r)^2 = 0$
বা, $t - r = 0$ [বর্গমূল করে]
$\therefore t = r$
অর্থাৎ, $r = s = t$
সুতরাং, $r + s + t = 0$ অথবা, $r = s = t$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $N(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
প্রদত্ত রাশি $= \frac{x^3+5}{N(x)}$
$= \frac{x^3+5}{x^3+2x^2-x-2}$
$= \frac{x^3+2x^2-x-2-2x^2+x+2+5}{x^3+2x^2-x-2}$
$= \frac{(x^3+2x^2-x-2)-(2x^2-x-7)}{x^3+2x^2-x-2}$
$= 1 - \frac{2x^2-x-7}{x^3+2x^2-x-2}$
$= 1 - \frac{2x^2-x-7}{x^2(x+2)-1(x+2)}$
$= 1 - \frac{2x^2-x-7}{(x^2-1)(x+2)}$
$= 1 - \frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-1)(x+2)}$
ধরি, $\frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$ ......(i)

সমীকরণ (i)নং এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x-1)(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$2x^2 - x - 7 = A(x-1)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-1)$ ......(ii)
যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।
এখন, (ii) নং সমীকরণে $x = -1$ বসিয়ে পাই,
$2(-1)^2 - (-1) - 7 = A(-1-1)(-1+2) + B(-1+1)(-1+2) + C(-1+1)(-1-1)$
বা, $2.1 + 1 - 7 = A(-2 \times 1) + 0 + 0$
বা, $2 + 1 - 7 = -2A$
বা, $-4 = -2A$
বা, $2A = 4$ [উভয়পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]
বা, $A = \frac{4}{2}$
$\therefore A = 2$
আবার, (ii) নং সমীকরণে $x = 1$ বসিয়ে পাই,
$2(1)^2 - 1 - 7 = A(1-1)(1+2) + B(1+1)(1+2) + C(1+1)(1-1)$
বা, $2.1 - 1 - 7 = 0 + B(2 \times 3) + 0$
বা, $2 - 1 - 7 = 6B$
বা, $-6 = 6B$
বা, $B = \frac{-6}{6}$ $\therefore B = -1$
আবার, (ii) নং সমীকরণে $x = -2$ বসিয়ে পাই,
$2(-2)^2 - (-2) - 7 = A(-2-1)(-2+2) + B(-2+1)(-2+2) + C(-2+1)(-2-1)$
বা, $2.4 + 2 - 7 = 0 + 0 + C(-1) \times (-3)$
বা, $8 + 2 - 7 = 3C$
বা, $3 = 3C$
বা, $C = \frac{3}{3}$ $\therefore C = 1$
A, B, C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$\frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-1)(x+2)} \equiv \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$
$= \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$
$\therefore \frac{x^3+5}{N(x)} \equiv 1 - \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right) = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$
যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। [Ans.]

প্রশ্ন নং-১২ । কুমিল্লা বোর্ড-২০২০

$p(y) = (y^2 + 3)(y^2 - 1)$
(ক) দেখাও যে, $p(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$ এর একটি উৎপাদক $(2x+1)$.
(খ) $p(y)$ কে $(y - a)$ এবং $(y - b)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 + 2a + 2b = 0$.
(গ) $\frac{y^3}{p(y)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $p(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$
উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুযায়ী যদি $(2x + 1)$, $p(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে, $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ হবে।

$2x + 1 = 0$
বা, $2x = -1$
$\therefore x = -\frac{1}{2}$

এখন, $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(-\frac{1}{2}\right) - 3$
$= 2\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} + \frac{6}{2} - 3$
$= -\frac{2}{8} + \frac{1}{4} + 3 - 3$
$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 3 - 3 = 0$
অতএব, $(2x + 1)$, $p(x)$ এর একটি উৎপাদক। [দেখানো হলো]

✍ (খ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে,

$p(y) = (y^2 + 3)(y^2 - 1) = y^4 - y^2 + 3y^2 - 3 = y^4 + 2y^2 - 3$

এখন, $p(y)$ কে $(y - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $p(a)$।

$\therefore p(a) = a^4 + 2a^2 - 3$

আবার, $p(y)$ কে $(y - b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $p(b)$।

$\therefore p(b) = b^4 + 2b^2 - 3$

শর্তানুসারে, $p(a) = p(b)$

বা, $a^4 + 2a^2 - 3 = b^4 + 2b^2 - 3$

বা, $a^4 + 2a^2 - 3 - b^4 - 2b^2 + 3 = 0$

বা, $a^4 - b^4 + 2a^2 - 2b^2 = 0$

বা, $(a^2)^2 - (b^2)^2 + 2(a^2 - b^2) = 0$

বা, $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) + 2(a^2 - b^2) = 0$

বা, $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + 2) = 0$

বা, $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2 + 2) = 0$

বা, $(a - b)\{(a + b)(a^2 + b^2 + 2)\} = 0$

হয়, $a - b = 0 \quad \therefore a = b$

কিন্তু এটা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $a \neq b$

অথবা, $(a + b)(a^2 + b^2 + 2) = 0$

বা, $a^3 + ab^2 + 2a + a^2b + b^3 + 2b = 0$

$\therefore \boldsymbol{a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 + 2a + 2b = 0}$ [দেখানো হলো]

✍ (গ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $p(y) = (y^2 + 3)(y^2 - 1) = (y + 1)(y - 1)(y^2 + 3)$

$\therefore \frac{y^3}{p(y)} = \frac{y^3}{(y + 1)(y - 1)(y^2 + 3)}$

ধরি, $\frac{y^3}{(y + 1)(y - 1)(y^2 + 3)} \equiv \frac{A}{y + 1} + \frac{B}{y - 1} + \frac{Cy + D}{y^2 + 3}$ ......(1)

সমীকরণ (1) নং এর উভয়পক্ষকে $(y + 1)(y - 1)(y^2 + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$y^3 \equiv A(y-1)(y^2+3) + B(y+1)(y^2+3) + (Cy+D)(y+1)(y-1)$ ......(2)

বা, $y^3 \equiv A(y^3 + 3y - y^2 - 3) + B(y^3 + 3y + y^2 + 3) + (Cy + D)(y^2 - 1)$

বা, $y^3 \equiv Ay^3 + 3Ay - Ay^2 - 3A + By^3 + 3By + By^2 + 3B + Cy^3 - Cy + Dy^2 - D$

বা, $y^3 \equiv (A + B + C)y^3 + (-A + B + D)y^2 + (3A + 3B - C)y + (-3A + 3B - D)$ ....(3)

এখন, (2) নং সমীকরণে $y = -1$ বসিয়ে পাই,

বা, $(-1)^3 = A(-1 - 1)\{(-1)^2 + 3\} + B(-1 + 1)\{(-1)^2 + 3\} + \{C.(-1) + D\}(-1 + 1)(-1 - 1)$

বা, $-1 = A \times (-2) \times 4 + 0 + 0$

বা, $-1 = -8A$

বা, $8A = 1$ [উভয়পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore A = \frac{1}{8}$

আবার, (2) নং সমীকরণে $y = 1$ বসিয়ে পাই,

$(1)^3 = A(1 - 1)(1^2 + 3) + B(1 + 1)(1^2 + 3) + (C.1 + D)(1 + 1)(1 - 1)$

বা, $1 = 0 + B(2 \times 4) + 0$

বা, $1 = 8B \quad \therefore B = \frac{1}{8}$

আবার, (3) নং সমীকরণের উভয়পক্ষে y^3 ও y^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B + C = 1$

বা, $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + C = 1$

বা, $C = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}$

বা, $C = \frac{8 - 1 - 1}{8}$

বা, $C = \frac{6}{8}$

$\therefore C = \frac{3}{4}$

এবং $-A + B + D = 0$

বা, $D = A - B$

বা, $D = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \quad \therefore D = 0$

(1) নং সমীকরণে A, B, C ও D এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{y^3}{(y + 1)(y - 1)(y^2 + 3)} \equiv \frac{\frac{1}{8}}{y + 1} + \frac{\frac{1}{8}}{y - 1} + \frac{\frac{3}{4}y + 0}{y^2 + 3}$$

$$\equiv \frac{1}{8(y + 1)} + \frac{1}{8(y - 1)} + \frac{3y}{4(y^2 + 3)}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন নং-১৩। চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২০

$P(r, s, t) = r^3 + s^3 + t^3$ এবং $Q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

(ক) $Q(-1)$ নির্ণয় কর।

(খ) $P(r, s, t) = 3rst$ হলে, প্রমাণ কর যে, $r + s + t = 0$ অথবা $r = s = t$

(গ) $\frac{x^3 + 5}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

✍ (ক) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\therefore Q(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2$

$= -1 + 2.1 + 1 - 2$

$= -1 + 2 + 1 - 2$

$= 3 - 3$

$= 0$ **[Ans.]**

✍ (খ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $P(r, s, t) = r^3 + s^3 + t^3$

এবং $P(r, s, t) = 3rst$

$\therefore r^3 + s^3 + t^3 = 3rst$

বা, $r^3 + s^3 + t^3 - 3rst = 0$

বা, $\frac{1}{2}(r + s + t)\{(r - s)^2 + (s - t)^2 + (t - r)^2\} = 0$

$\left[\because a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}\right]$

বা, $(r + s + t)\{(r - s)^2 + (s - t)^2 + (t - r)^2\} = 0$

হয়, $r + s + t = 0$ অথবা, $(r - s)^2 + (s - t)^2 + (t - r)^2 = 0$

আমরা জানি, দুই বা ততোধিক রাশির বর্গের যোগফল শূন্য হলে, তাদের প্রত্যেকের মান আলাদা আলাদাভাবে শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $(r - s)^2 = 0$

বা, $r - s = 0$ [বর্গমূল করে]

$\therefore r = s$

অথবা, $(s - t)^2 = 0$

বা, $s - t = 0$ [বর্গমূল করে]

$\therefore s = t$

এবং $(t - r)^2 = 0$

বা, $t - r = 0$ [বর্গমূল করে]

$\therefore t = r$

$\therefore r = s = t$

সুতরাং $\boldsymbol{r + s + t = 0}$ অথবা, $\boldsymbol{r = s = t}$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{x^3+5}{Q(x)}$

$$= \frac{x^3+5}{x^3+2x^2-x-2}$$
$$= \frac{x^3+2x^2-x-2-2x^2+x+2+5}{x^3+2x^2-x-2}$$
$$= \frac{(x^3+2x^2-x-2)-(2x^2-x-7)}{x^3+2x^2-x-2}$$
$$= 1 - \frac{2x^2-x-7}{x^3+2x^2-x-2}$$
$$= 1 - \frac{2x^2-x-7}{x^2(x+2)-1(x+2)}$$
$$= 1 - \frac{2x^2-x-7}{(x^2-1)(x+2)}$$
$$= 1 - \frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

ধরি, $\dfrac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-1)(x+2)} \equiv \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$ ......(i)

সমীকরণ (i)নং এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x-1)(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$2x^2 - x - 7 = A(x-1)(x+2) + B(x+1)(x+2)$
$+ C(x+1)(x-1)$ ......(ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।
এখন, (ii) নং সমীকরণে $x = -1$ বসিয়ে পাই,
$2(-1)^2 - (-1) - 7 = A(-1-1)(-1+2) + B(-1+1)(-1+2)$
$+ C(-1+1)(-1-1)$
বা, $2.1 + 1 - 7 = A(-2 \times 1) + 0 + 0$
বা, $2 + 1 - 7 = -2A$
বা, $-4 = -2A$
বা, $2A = 4$ [উভয়পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]
বা, $A = \dfrac{4}{2}$ $\therefore A = 2$

আবার, (ii) নং সমীকরণে $x = 1$ বসিয়ে পাই,
$2(1)^2 - 1 - 7 = A(1-1)(1+2) + B(1+1)(1+2) + C(1+1)(1-1)$
বা, $2 - 1 - 7 = 0 + B(2 \times 3) + 0$
বা, $-6 = 6B$
বা, $B = \dfrac{-6}{6}$
$\therefore B = -1$

আবার, (ii) নং সমীকরণে $x = -2$ বসিয়ে পাই,
$2(-2)^2 - (-2) - 7 = A(-2-1)(-2+2) + B(-2+1)(-2+2)$
$+ C(-2+1)(-2-1)$
বা, $2.4 + 2 - 7 = 0 + 0 + C(-1) \times (-3)$
বা, $8 + 2 - 7 = 3C$
বা, $3 = 3C$
বা, $C = \dfrac{3}{3}$
$\therefore C = 1$

A, B, C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$$\frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$
$$= \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$
$$\therefore \frac{x^3+5}{Q(x)} = 1 - \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right) = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$
যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **[Ans.]**

প্রশ্ন নং-১৪ । বরিশাল বোর্ড-২০২০

(i) $p^{-3} + q^{-3} + r^{-3} = 3p^{-1}q^{-1}r^{-1}$
(ii) $G(x) = \dfrac{2x+3}{5x-4}$

(ক) $f(x) = \sqrt{5x-1}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, $pq + qr + rp = 0$ এবং $p = q = r$.
(গ) $G^{-1}(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর।

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{5x-1}$
x এর যেসব বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায় সেগুলোই $f(x)$ এর ডোমেন।
$f(x) = \sqrt{5x-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $5x - 1 \geq 0$ হয়।
বা, $5x \geq 1$
অর্থাৎ $x \geq \dfrac{1}{5}$ হয়।

$\therefore f(x)$ এর ডোমেন $f = \left\{x : x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x \geq \dfrac{1}{5}\right\}$ **[Ans.]**

(খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $p^{-3} + q^{-3} + r^{-3} = 3p^{-1}q^{-1}r^{-1}$

বা, $\dfrac{1}{p^3} + \dfrac{1}{q^3} + \dfrac{1}{r^3} = 3 \cdot \dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{1}{q} \cdot \dfrac{1}{r}$

বা, $\left(\dfrac{1}{p}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{q}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{r}\right)^3 - 3 \cdot \dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{1}{q} \cdot \dfrac{1}{r} = 0$

বা, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r}\right)\left\{\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}\right)^2\right\} = 0$

$\left[\because a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}\right]$

বা, $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r}\right)\left\{\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 0$

বা, $\dfrac{qr + pr + pq}{pqr} = 0$ $\therefore pq + qr + rp = 0$

অথবা, $\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}\right)^2 = 0$

আমরা জানি, দুই বা ততোধিক রাশির বর্গের যোগফল শূন্য হলে, তাদের প্রত্যেকের মান আলাদা আলাদাভাবে শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)^2 = 0$

বা, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$ $\therefore p = q$

এবং $\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r}\right)^2 = 0$

বা, $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$ $\therefore q = r$

এবং $\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}\right)^2 = 0$

বা, $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p}$ $\therefore r = p$

অর্থাৎ $p = q = r$

অতএব, $pq + qr + rp = 0$ এবং $p = q = r$ [প্রমাণিত]

১৪ (গ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $G(x) = \frac{2x+3}{5x-4}$

ধরি, $y = G(x)$

$\therefore x = G^{-1}(y)$

এখন, $G(x) = \frac{2x+3}{5x-4}$

বা, $y = \frac{2x+3}{5x-4}$

বা, $5xy - 4y = 2x + 3$

বা, $5xy - 2x = 4y + 3$

বা, $x(5y-2) = 4y + 3$

বা, $x = \frac{4y+3}{5y-2}$

$\therefore G^{-1}(y) = \frac{4y+3}{5y-2}$

y এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$G^{-1}(x) = \frac{4x+3}{5x-2}$

ধরি, $x_1 \in$ ডোম G^{-1} এবং $x_2 \in$ ডোম G^{-1}

এখন, G^{-1} এক-এক ফাংশন হবে যদি ও কেবল যদি $G^{-1}(x_1) = G^{-1}(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

ধরি, $G^{-1}(x_1) = G^{-1}(x_2)$

$\therefore \frac{4x_1+3}{5x_1-2} = \frac{4x_2+3}{5x_2-2}$

বা, $(4x_1+3)(5x_2-2) = (4x_2+3)(5x_1-2)$

বা, $20x_1x_2 - 8x_1 + 15x_2 - 6 = 20x_1x_2 - 8x_2 + 15x_1 - 6$

বা, $-8x_1 + 15x_2 = -8x_2 + 15x_1$

বা, $15x_2 + 8x_2 = 15x_1 + 8x_1$

বা, $23x_2 = 23x_1$

বা, $x_2 = x_1$

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore G^{-1}(x)$ এক-এক ফাংশন।

প্রশ্ন নং-১৫ দিনাজপুর বোর্ড-২০২০

(i) $Q(x) = \frac{4x^3}{x^3-8}$

(ii) $P(y) = y^3 + 2y^2 - 5y - 6$

(ক) $4 - x^2 = 0$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় কর।

(খ) $P(y)$ কে $3y + m$ এবং $3y + n$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে, $m \neq n$ তবে দেখাও যে, $m^2 + mn + n^2 - 6m - 6n - 45 = 0$.

(গ) $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

১৫ (ক) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $4 - x^2 = 0$

সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = -1, b = 0, c = 4$

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$

$= 0^2 - 4.(-1).4$

$= 0 + 16 = 16$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটির নিশ্চায়ক 16. **[Ans.]**

১৫ (খ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $P(y) = y^3 + 2y^2 - 5y - 6$

এখন, $P(y)$ কে $(3y+m)$ বা, $3\left(y+\frac{m}{3}\right)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P\left(-\frac{m}{3}\right)$ হবে।

$\therefore P\left(-\frac{m}{3}\right) = \left(-\frac{m}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{m}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{m}{3}\right) - 6$

$= -\frac{m^3}{27} + \frac{2m^2}{9} + \frac{5m}{3} - 6$

$= \frac{-m^3 + 6m^2 + 45m - 162}{27}$

আবার, $P(y)$ কে $(3y+n)$ বা, $3\left(y+\frac{n}{3}\right)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P\left(-\frac{n}{3}\right)$ হবে।

$\therefore P\left(-\frac{n}{3}\right) = \left(-\frac{n}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{n}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{n}{3}\right) - 6$

$= -\frac{n^3}{27} + \frac{2n^2}{9} + \frac{5n}{3} - 6$

$= \frac{-n^3 + 6n^2 + 45n - 162}{27}$

শর্তমতে, $P\left(-\frac{m}{3}\right) = P\left(-\frac{n}{3}\right)$

বা, $\frac{-m^3 + 6m^2 + 45m - 162}{27} = \frac{-n^3 + 6n^2 + 45n - 162}{27}$

বা, $-m^3 + 6m^2 + 45m - 162 = -n^3 + 6n^2 + 45n - 162$

বা, $-m^3 + 6m^2 + 45m = -n^3 + 6n^2 + 45n$

বা, $-(m^3 - 6m^2 - 45m) = -(n^3 - 6n^2 - 45n)$

বা, $m^3 - 6m^2 - 45m = n^3 - 6n^2 - 45n$

বা, $m^3 - n^3 - 6m^2 + 6n^2 - 45m + 45n = 0$

বা, $m^3 - n^3 - 6(m^2 - n^2) - 45(m-n) = 0$

বা, $(m-n)(m^2 + mn + n^2) - 6(m^2 - n^2) - 45(m-n) = 0$

বা, $(m-n)(m^2 + mn + n^2) - 6(m+n)(m-n) - 45(m-n) = 0$

বা, $(m-n)\{(m^2 + mn + n^2) - 6(m+n) - 45\} = 0$

বা, $(m-n)(m^2 + mn + n^2 - 6m - 6n - 45) = 0$

হয়, $m - n = 0$

বা, $m = n$

যা গ্রহণযোগ্য নয় কারণ, $m \neq n$

অথবা, $\mathbf{m^2 + mn + n^2 - 6m - 6n - 45 = 0}$ **[দেখানো হলো]**

১৫ (গ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $Q(x) = \frac{4x^3}{x^3-8}$

$= \frac{4(x^3-8)+32}{x^3-8}$

$= 4 + \frac{32}{x^3-2^3}$

$= 4 + \frac{32}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

ধরি, $\frac{32}{(x-2)(x^2+2x+4)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$ ......(i)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $(x-2)(x^2+2x+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$32 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$ ......(ii)

বা, $32 \equiv Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$

বা, $32 \equiv (A+B)x^2 + (2A - 2B + C)x + (4A - 2C)$ ......(iii)

এখন, (ii)নং এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$32 = A(2^2 + 2.2 + 4) + (B.2 + C)(2-2)$

বা, $32 = A(4+4+4) + 0$

বা, $32 = 12A$

বা, $A = \frac{32}{12}$ $\therefore A = \frac{8}{3}$