20240918

1

a

$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = m_1 \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} \\ \vec{F}_{12} = m_2 \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

b

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

c

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= \text{一定} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) &= 0 \\ m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

d

显然我们有重心速度

$$\vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

由上述问题注意到分子为定值，因此其只能为静止或匀速直线运动其一

2

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ \int \vec{F}\mathrm{d}t &= \Delta m\vec{v} \end{aligned}$$

显然等号左边是力积而右边是动量的变化量

3

$$\begin{cases} v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 1} = 4.43m/s \\ J = m \cdot v = 2 \cdot 4.43 = 8.86kg \cdot m/s \\ F = \dfrac{J}{t} = \dfrac{8.86}{1} = 8.86N \end{cases}$$

4

(a)

$$\begin{cases} v\left(t\right) = v_0 - gt \\ y\left(t\right) = y_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(b)

$$-mg + bv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

注意到在终端速度时，其加速度可近似看作 0

因此运动方程可看作 $-mg + bv_\infty^2 = 0$，于是易得 $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{b}}$

(c)

注意到空气阻力和重力同向，因此有

$$-mg - bv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

課題

$$\begin{aligned}
-mg - bv &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
\mathrm{d}t &= -\frac{m}{mg + bv}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= -\int \frac{m}{mg + bv}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= -\int \frac{1}{g + \frac{b}{m}v}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

在这里令 $\frac{b}{m}v = u$

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}t &= -\frac{m}{b}\int \frac{1}{g + u}\mathrm{d}u \\
t + C &= -\frac{m}{b}\log\left(g + u\right) \\
t + C &= -\frac{m}{b}\log\left(g + \frac{b}{m}v\right)
\end{aligned}$$

我们代入初值 $v\left(0\right) = v_0$

$$0 + C = -\frac{m}{b}\log\left(g + \frac{b}{m}v_0\right)$$

将 $C=-\dfrac{m}{b}\log\left(g+\dfrac{b}{m}v_0\right)$ 代入到原方程我们可以得到

$$\begin{aligned}
t-\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right) &= -\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)\\
\frac{bt}{m}-\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right) &= -\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right) &= \frac{g+\frac{b}{m}v_0}{g+\frac{b}{m}v}\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)g+\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\frac{b}{m}v &= g+\frac{b}{m}v_0\\
\frac{b}{m}\exp\left(\frac{bt}{m}\right)v &= \left(1-\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\right)g+\frac{b}{m}v_0\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)v &= \frac{m}{b}\left(1-\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\right)g+v_0\\
v &= \frac{m}{b}\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}-1\right)g+\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}v_0
\end{aligned}$$

而我们注意到

$$\begin{aligned}
v_\infty &= \lim_{t\to\infty} v\left(t\right)\\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{m}{b}\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}-1\right)g+\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}v_0\right)\\
&= -\frac{mg}{b}
\end{aligned}$$

20240923

1

(a)

首先我们考虑垂直抗力为 $N = mg\cos\theta$，因此摩擦力为 $\mu' mg\cos\theta$
接着是沿斜坡向下（即 x 轴正方向）的受力为 $mg\sin\theta$
因此我们可以得到运动方程为 $mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

(b)

由于题目并未涉及到斜坡长度问题，因此我们可以简单认为加速度为负即可
根据运动方程我们可以得到，$g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right) < 0$
这等价于 $\mu' > \tan\theta$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g\sin\theta - \mu' g\cos\theta \\
\mathrm{d}t &= \frac{1}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= \int \frac{1}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}\mathrm{d}v \\
t + C &= \frac{v}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}
\end{aligned}$$

考虑初值 $v(0) = v_0$，有

$$C = \frac{v_0}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}$$

再代回原方程，得到

$$\begin{aligned}
t + \frac{v_0}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta} &= \frac{v}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta} \\
v &= v_0 + gt\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \int v\mathrm{d}t \\
&= \int v_0 + gt\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)\mathrm{d}t \\
&= v_0 t + \frac{1}{2}g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)t^2 + C
\end{aligned}$$

由于 $x(0) = 0$，因此 $C = 0$
于是，$x = v_0 t + \dfrac{1}{2}g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)t^2$

2

$$
\begin{aligned}
-kx &= m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\
-ke^{\lambda t} &= m\lambda^2 e^{\lambda t} \\
\lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\
\lambda &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}
$$

于是 $x=\exp\left(\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$，因此角振动数 ω 就是中间的 $\sqrt{\frac{k}{m}}$
其实是找 $i\omega t$ 的 ω
因此
$\begin{cases} x\left(t\right)=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v\left(t\right)=-A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$
代入 $x\left(t\right)=x_0, v\left(0\right)=0$
$\begin{cases} x_0=A \\ 0=B\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow B=0 \end{cases}$
综上

$$
\begin{aligned}
x\left(t\right) &= x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
v\left(t\right) &= -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)
\end{aligned}
$$

3

(a)

$$
\begin{aligned}
v_x &= -r\omega\sin\omega t \\
v_y &= r\omega\cos\omega t
\end{aligned}
$$

显然我们可以注意到，$v^2=v_x^2+v_y^2=r^2\omega^2$，因此 $v=r\omega$

(b)

$$
\begin{aligned}
a_x &= -r\omega^2\cos\omega t \\
a_y &= -r\omega^2\sin\omega t
\end{aligned}
$$

注意到，加速度方向与位置方向差别仅为负号，因此如果考虑从原点出发到位置的方向的话，加速度方向就是位置方向出发到原点. 而大小则显然是 $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=r\omega^2$

(c)

$$f_x = -mr\omega^2\cos(\omega t)$$
$$f_y = -mr\omega^2\sin(\omega t)$$

同样的，受力的方向与位置坐标的方向差别仅为负号，因此其受力指向原点
$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = m\omega^2 r$

(d)

$\begin{cases} v = r\omega \\ a = \omega^2 r \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{v^2}{r}$

課題

1

注意到在微小角度位移的情况下，复原力为 $-mg\sin\theta$
另一方面，其切向加速度可以看作弧长 $l\theta$ 对时间的二阶微分，这即 $l\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
因此运动方程为 $ml\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta$

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta$$
$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\theta$$
$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -g\sin\left(e^{\lambda t}\right)$$

显然这样是无法直接进行求解的，因此我们考虑小角度下的近似：$\sin\theta = \theta$

$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta$$
$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -ge^{\lambda t}$$
$$\lambda^2 = -\frac{g}{l}$$
$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

于是我们得到了 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$
因此周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

2

由于张力 S 的竖直方向分力等于重力，因此 $S\cos\theta = mg$，即 $S = \dfrac{mg}{\cos\theta}$
另一方面这是圆锥摆，因此其向心力 f 为张力 S 的水平分力，因此 $f = S\sin\theta = mg\tan\theta$

$$
\begin{aligned}
mg &= m\omega^2 l\cos\theta \\
mg &= m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l\cos\theta \\
\frac{g}{l\cos\theta} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \\
T^2 &= 4\pi^2\frac{l\cos\theta}{g} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}
\end{aligned}
$$

20240925

1

(a)

在水平方向上，由于没有受力因此可以简单认为

$$x(t) = v_{x0}t$$

在铅直方向上由于仅受到重力作用因此

$$\begin{aligned}y(t) &= v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= v_{y0} \cdot \frac{x(t)}{v_{x0}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x(t)}{v_{x0}}\right)^2 \\ &= -\frac{g}{2v_{x0}^2}x^2(t) + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x(t)\end{aligned}$$

显然，这是一条抛物线

(b)

y 达到最大的时候，其向上的速度是 0. 因此我们有 $t = \dfrac{v_{y0}}{g}$
此时

$$\begin{aligned}x &= \frac{v_{x0}v_{y0}}{g} \\ y &= \frac{v_{y0}^2}{2g}\end{aligned}$$

(c)

我们用 v_0 来重新表示其水平方向上和铅直方向上的运动

$$\begin{aligned}x &= v_0 t\cos\theta_0 \\ y &= v_0 t\sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

影响水平飞行距离的是飞行时间，而时间与竖直方向速度减到 0 的时间有关

$$t = \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

于是水平方向能达到的最远距离为

$$\begin{aligned}x_{max} &= 2v_0 \cdot \frac{v_0\sin\theta_0}{g} \cdot \cos\theta_0 \\ &= \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 \\ &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0\end{aligned}$$

因此我们可以知道，若 x_{max} 取最大，则 $2\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}$

課題

在水平方向上

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -\beta m v_x \\ \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -\beta v_x \\ -\frac{1}{\beta v_x}\mathrm{d}v_x &= \mathrm{d}t \\ -\frac{1}{\beta}\int\frac{1}{v_x}\mathrm{d}v_x &= \int\mathrm{d}t \\ -\frac{1}{\beta}\log v_x &= t + C \end{aligned}$$

考虑到初始时刻 $v_x = v_{x0}$

$$C = -\frac{1}{\beta}\log v_{x0}$$

代回原方程

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\beta}\log v_x &= t - \frac{1}{\beta}\log v_{x0} \\ \log\left(\frac{v_x}{v_{x0}}\right) &= -\beta t \\ \frac{v_x}{v_{x0}} &= e^{-\beta t} \\ v_x &= v_{x0}e^{-\beta t} \end{aligned}$$

因此当经过足够长时间后，水平方向上速度趋近于 0
接着我们考虑铅直方向

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -mg - \beta m v_y \\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -g - \beta v_y \\ -\frac{1}{g+\beta v_y}\mathrm{d}v_y &= \mathrm{d}t \\ -\int\frac{1}{g+\beta v_y}\mathrm{d}v_y &= \int\mathrm{d}t \\ -\log\left(g+\beta v_y\right) &= t + C \end{aligned}$$

初始时刻 $v_y = v_{y0}$ 代入原方程得到

$$C = -\log\left(g+\beta v_{y0}\right)$$

因此

$$\begin{aligned} -\log\left(g+\beta v_y\right) &= t - \log\left(g+\beta v_{y0}\right) \\ \log\left(\frac{g+\beta v_{y0}}{g+\beta v_y}\right) &= t \\ \frac{g+\beta v_{y0}}{g+\beta v_y} &= e^t \\ g+\beta v_{y0} &= ge^t + \beta e^t v_y \\ v_y &= \frac{g}{\beta}\left(\frac{1}{e^t} - 1\right) + \frac{1}{e^t}v_{y0} \end{aligned}$$

因此，经过足够长时间后，铅直方向上的速度趋近于 $-\dfrac{g}{\beta}$
至于其 x, y 坐标，我们只需要对这两个求得的速度进行关于 t 的积分

$$\begin{aligned}
x &= \int v_{x0} e^{-\beta t} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + C \\
&= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} v_{x0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \int \left(\frac{g}{\beta} \left(\frac{1}{e^t} - 1 \right) + \frac{1}{e^t} v_{y0} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{g}{\beta} \left(-e^{-t} - t \right) - v_{y0} e^{-t} + C \\
&= \frac{g}{\beta} \left(-e^{-t} - t \right) - v_{y0} e^{-t} + \frac{g}{\beta} + v_{y0}
\end{aligned}$$

20240930

1

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t} &= F \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= F\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot v &= F\cdot v \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W \\
\frac{1}{2}mv^2 &= W
\end{aligned}
$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力所做的功

2

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -f\cdot p \\
W_2 &= -f\cdot q - f\cdot(q-p) \\
&= -f\cdot(2q-p) \\
W_2 - W_1 &= 2f\left(p-q\right) \neq 0
\end{aligned}
$$

3

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}x + m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}y &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x + m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
m\left(v_x\mathrm{d}v_x + v_y\mathrm{d}x_y\right) &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2\right) &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W \\
\frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) &= W
\end{aligned}
$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力做的功

4

$$
\begin{aligned}
\Delta E_k &= \int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)\mathrm{d}x \\
E_{k2} - E_{k1} &= \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
E_{k2} - E_{k1} &= U\left(x_1\right) - U\left(x_2\right)
\end{aligned}
$$

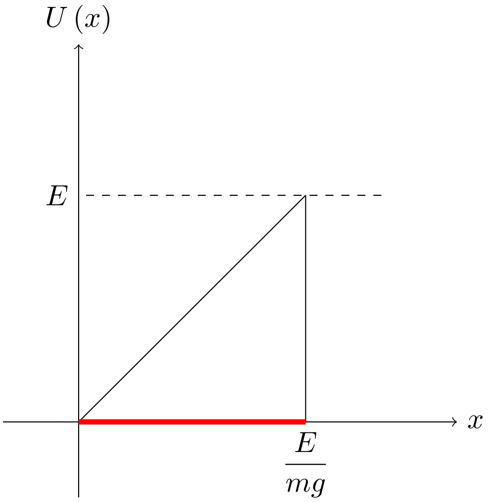
5

(a)

$$
\begin{aligned}
f\left(x\right) &= -mg \\
U\left(x\right) &= -\int f\left(x\right)\mathrm{d}x \\
&= mgx + C = mgx
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgx = const
$$

(b)



于是我们可以得到，运动范围是红线所覆盖的 $0 \le x \le \frac{E}{mg}$

6

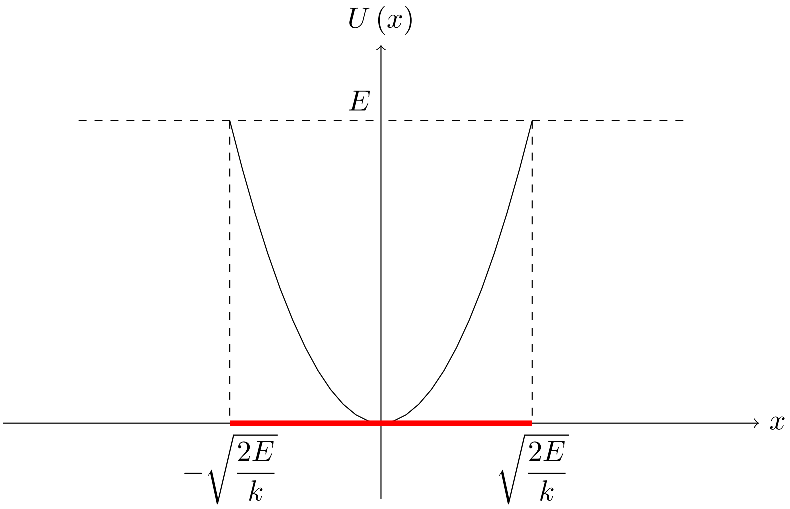
(a)

$$
\begin{aligned}
U\left(x\right) &= -\int f\left(x\right)\mathrm{d}x \\
&= -\int -kx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}kx^2 + C \\
&= \frac{1}{2}kx^2
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -kx \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v &= -kxv \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \\
\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0 &
\end{aligned}
$$

(c)



由图可知，运动范围是 $-\sqrt{\dfrac{2E}{k}} \le x \le \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$

(d)

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
\frac{1}{2}mv^2 &= E - \frac{1}{2}kx^2 \\
v^2 &= \frac{1}{m}\left(2E - kx^2\right) \\
v &= \pm\sqrt{\frac{1}{m}\left(2E - kx^2\right)}
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\cos\left(\omega t\right)\right) \\
&= -a\omega\sin\left(\omega t\right) \\
&= -a\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}tx\right)
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
K\left(t\right) &= \frac{1}{2}mv^2 \\
&= \frac{1}{2}m\cdot\left(a\omega\sin\omega t\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\left(\omega t\right)
\end{aligned}
$$

由于 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，我们可以得到 $k=m\omega^2$

$$
\begin{aligned}
U\left(t\right) &= \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{1}{2}k\left(a\cos\left(\omega t\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2a^2\cos^2\left(\omega t\right)
\end{aligned}
$$

(g)

$$
\begin{aligned}
K\left(t\right)+U\left(t\right) &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\left(\sin^2\left(\omega t\right)+\cos^2\left(\omega t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}ma^2\omega^2
\end{aligned}
$$

課題

1

$$
\begin{aligned}
\left\langle K\right\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}K\left(t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

对于这个积分，我们按照如下方式来积

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos s\right)\cdot\frac{1}{2\omega}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\omega}\int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos s\right)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sin s\right]_0^{4\pi} \\
&= \frac{\pi}{\omega}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\langle K\rangle &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3\cdot\frac{\pi}{\omega} \\
&= \frac{1}{4}ma^2\omega^2
\end{aligned}
$$

类似的，$\langle U\rangle$ 由于与 $\langle K\rangle$ 只有相位差，因此只需要后面的相位进行积分

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\omega t\right)+1\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos s\right)\cdot\frac{1}{2\omega}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\omega}\int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos s\right)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\sin s\right]_0^{4\pi} \\
&= \frac{\pi}{\omega}
\end{aligned}
$$

因此 $\langle K\rangle = \langle U\rangle$

2a

由于受力为其势能的负梯度，因此可以注意到，x_a 处梯度为负，受力方向是正；x_d 处梯度是正，受力方向是负；x_c, x_e 两处梯度为零，因此合力为 0

2b

$\begin{cases} x_a \le x & E=E_2 \\ x_b \le x \le x_d, x_f \le x & E=E_1 \\ x_c = x & E=E_0 \end{cases}$ $\begin{cases} v_a = 0 & E=E_2 \\ v_b = v_d = v_f = 0 & E=E_1 \\ v_c = 0 & E=E_0 \end{cases}$ 因此，$x=x_c$ 的情况可能是简谐振子速度为 0 的振幅处（若 $E=E_0$）或处于合力为 0 的情况（若 $E=E_1$ 或 $E=E_2$）

2c

由（b）的推导可以知道，动能最大的点在 x_c

20241002

1

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx &= 0 \\
mp^2e^{pt} + \Gamma pe^{pt} + ke^{pt} &= 0 \\
\left(mp^2 + \Gamma p + k\right)e^{pt} &= 0 \\
mp^2 + \Gamma p + k &= 0 \\
mp^2 + 2m\gamma p + m\omega_0^2 &= 0 \\
p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 &= 0 \\
p &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}
$$

2

由上一问我们可以得到

$$
x\left(t\right) = Ae^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}
$$

由初期条件 $x\left(0\right) = 0$，我们得到 $A + B = 0$. 接着

$$
\begin{aligned}
v\left(t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\left(t\right) \\
&= -A\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) - B\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) \\
&= \left(B - A\right)\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}
$$

初期条件 $v\left(0\right) = v_0$ 可得 $B - A = \dfrac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

因此，$A = -\dfrac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, B = \dfrac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

综上，我们有

$$
\begin{aligned}
x\left(t\right) &= -\frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} + \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} \\
&= \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\left(e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} - e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}\right)
\end{aligned}
$$

3

(a)

这里我们只需要将其代入运动方程验证即可

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx &= 0 \\
m\gamma\left(-2 + \gamma t\right)e^{-\gamma t} + \Gamma\left(1 - \gamma t\right)e^{-\gamma t} + kte^{-\gamma t} &= 0 \\
m\gamma\left(-2 + \gamma t\right)e^{-\gamma t} + 2m\gamma\left(1 - \gamma t\right)e^{-\gamma t} + m\gamma^2te^{-\gamma t} &= 0 \\
\left(-2 + \gamma t\right)e^{-\gamma t} + 2\left(1 - \gamma t\right)e^{-\gamma t} + \gamma te^{-\gamma t} &= 0
\end{aligned}
$$

显然，将 $e^{-\gamma t}$ 提出来之后系数项总和为 0，因此等号两边相等

(b)

我们不妨设其解为 $x\left(t\right)=Ate^{-\gamma t}$，显然满足 $x\left(0\right)=0$
接着对于 $v\left(0\right)$，由于 $v\left(t\right)=A\left(1-\gamma t\right)e^{-\gamma t}$，因此我们可以注意到，$A=v_0$
综上，$x\left(t\right)=v_0te^{-\gamma t}$

4

(a)

由于 $\omega_0>\gamma$，因此 1 里的解为 $p=-\gamma\pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$
因此我们假设通解是 $x\left(t\right)=e^{-\gamma t}\left(A\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)+B\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right)$
考虑 $x\left(0\right)=0$，我们有 $A=0$，于是我们可以将通解写成 $x\left(t\right)=Be^{-\gamma t}\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)$
然后考虑 $v\left(t\right)=e^{-\gamma t}\left(B\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)-B\gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right)$ 和 $v\left(0\right)=v_0$

$$\begin{aligned}
B\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)-B\gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)&=v_0\\
B\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)-\gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right)&=v_0\\
\frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)-\gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)}&=B\\
\frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}&=B
\end{aligned}$$

因此，$x\left(t\right)=\dfrac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right)$

(b)

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}&=-\Gamma v-kx\\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}&=-\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx\\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=-\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)&=-2m\gamma v\cdot v-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)&=-2m\gamma v\cdot v
\end{aligned}$$

課題

1

首先我们将三种振动的位移时间依赖性 $x\left(t\right)$ 写在一起

$$\begin{cases}
x\left(t\right)=\dfrac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\left(e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}-e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}\right) & \omega_0<\gamma\\
x\left(t\right)=v_0te^{-\gamma t} & \omega_0=\gamma\\
x\left(t\right)=\dfrac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right) & \omega_0>\gamma
\end{cases}$$

显然式子过于繁琐难以判断，因此我们首先记 $\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ 和 $\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ 分别为 $\hat{\omega}$ 和 $\widetilde{\omega}$
于是过衰减振动变成

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}}\left(e^{-\gamma t+\hat{\omega}t}-e^{-\gamma t-\hat{\omega}t}\right)\\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-\gamma t}\left(e^{\hat{\omega}t}-e^{-\hat{\omega}t}\right)\\ &= \frac{v_0}{\hat{\omega}}e^{-\gamma t}\sinh(\hat{\omega}t)\\ &\simeq \frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-\gamma t}\cdot e^{\hat{\omega}t}\\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-(\gamma-\hat{\omega})t}\end{aligned}$$

衰减振动变成

$$x(t)=\frac{v_0}{\widetilde{\omega}}e^{-\gamma t}\sin(\widetilde{\omega}t)$$

因此简化后的三个式子变成

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-(\gamma-\hat{\omega})t} & \omega_0<\gamma \\ x(t)=v_0te^{-\gamma t} & \omega_0=\gamma \\ x(t)=\dfrac{v_0}{\widetilde{\omega}}e^{-\gamma t}\sin(\widetilde{\omega}t) & \omega_0>\gamma \end{cases}$$

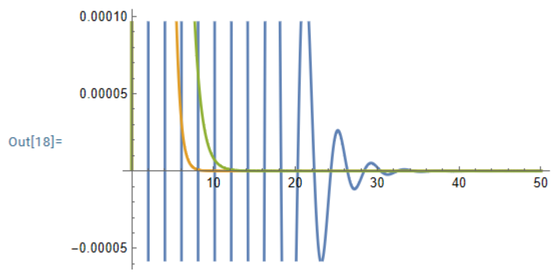
注意到这里公因式是 $v_0e^{-\gamma t}$
因此我们仅需证明 $\left\{\frac{1}{\hat{\omega}}\sinh(\hat{\omega}t), t, \frac{1}{\widetilde{\omega}}\sin(\widetilde{\omega}t)\right\}$ 中，t 的增长速度/斜率/梯度是最快/大的
显然，这里 t 在任何情况下都比第三项含有 sin 的式子梯度要大，因此我们只需要讨论双曲正弦的部分.
显然趋近于无穷时，次方位置为负项的那部分可以忽视掉，也就是最后的 $\frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-(\gamma-\hat{\omega})t}$. 而系数对于衰减速度几乎没有任何影响（因为控制主体增减的是指数函数），因此我们仅需要判断指数位置
由于 $\hat{\omega}>0$，因此 $-(\gamma-\hat{\omega})>-\gamma$. 因此临界衰减振动的衰减速度大于过衰减的衰减速度

2

我们先分别将三种情况给代入

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{v_0}{\omega_0\sqrt{0.6}}e^{-0.2\omega_0 t}\sin\left(\sqrt{0.6}\omega_0 t\right) & \gamma=0.2\omega_0 \\ x(t)=v_0te^{-\omega_0 t} & \gamma=\omega_0 \\ x(t)=\dfrac{v_0}{2\omega_0\sqrt{0.44}}\left(e^{\left(-1.2+\sqrt{0.44}\right)\omega_0 t}-e^{\left(-1.2-\sqrt{0.44}\right)\omega_0 t}\right) & \gamma=1.2\omega_0 \end{cases}$$

接着代入 mathematica 之后我们可以得到



具体来说，我们可以知道，蓝色波动的那根是衰减运动，稍微靠右上的绿色线是过衰减，剩下的黄线是临界衰减

20241007

1

(a)

$$\begin{aligned}
f_0\cos(\omega t) &= -a_0\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)+2\gamma\cdot(-a_0\omega\sin(\omega t+\phi_0))+a_0\omega_0^2\cos(\omega t+\phi_0)\\
f_0\cos(\omega t) &= -a_0\omega^2(\cos(\omega t)\cos\phi_0-\sin(\omega t)\sin\phi_0)\\
&\quad -2\gamma a_0\omega(\sin(\omega t)\cos\phi_0+\cos(\omega t)\sin\phi_0)\\
&\quad +a_0\omega_0^2(\cos(\omega t)\cos\phi_0-\sin(\omega t)\sin\phi_0)\\
f_0\cos(\omega t) &= \cos(\omega t)\left(-a_0\omega^2\cos\phi_0-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\omega_0^2\cos\phi_0\right)\\
&\quad +\sin(\omega t)\left(a_0\omega^2\sin\phi_0-2\gamma a_0\omega\cos\phi_0-a_0\omega_0^2\sin\phi_0\right)
\end{aligned}$$

通过比较系数可以得到

$$\begin{cases} f_0=-a_0\omega^2\cos\phi_0-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\omega_0^2\cos\phi_0\\ 0=a_0\omega^2\sin\phi_0-2\gamma a_0\omega\cos\phi_0-a_0\omega_0^2\sin\phi_0\end{cases}\implies\begin{cases} f_0=-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi_0\\ 0=-2\gamma a_0\omega\cos\phi_0+a_0\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin\phi_0\end{cases}$$

由下式

$$\begin{aligned}
0&=a_0\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin\phi_0-2\gamma\omega\cos\phi_0\right)\\
0&=\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin\phi_0-2\gamma\omega\cos\phi_0\\
\tan\phi_0&=\frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\sin\phi_0&=\frac{\tan\phi_0}{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}\\
&=\frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\gamma^2\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}}}\\
&=\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}
\end{aligned}$$

这里疑似有个符号问题，由于并没有标明 ω,ω_0 的大小关系因此这里 $\sin\phi_0$ 处可能存在负号

接下来我们看上式

$$\begin{aligned}
f_0&=-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi_0\\
a_0&=\frac{f_0}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi_0-2\gamma\omega\sin\phi_0}\\
&=\frac{f_0}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}-2\gamma\omega\frac{\tan\phi_0}{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}}\\
&=\frac{f_0\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-2\gamma\omega\tan\phi_0}\\
&=-\frac{f_0\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}{\frac{2\gamma\omega}{\tan\phi_0}+2\gamma\omega\tan\phi_0}\\
&=-\frac{f_0}{2\gamma\omega}\frac{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}{\frac{1}{\tan\phi_0}+\tan\phi_0}\\
&=-\frac{f_0}{2\gamma\omega}\cos\phi_0\sqrt{\sec^2\phi_0}\sin\phi_0
\end{aligned}$$

由于这里 a_0 的实际意义是振幅，因此我们只需要考虑绝对值的情况，因此

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \left|-\frac{f_0}{2\gamma\omega}\cos\phi_0\sqrt{\sec^2\phi_0}\sin\phi_0\right| \\
&= \frac{f_0}{2\gamma\omega}\sin\phi_0 \\
&= \frac{f_0}{2\gamma\omega}\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\
&= \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}a_0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\
&= -\frac{1}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4\left(\omega^3-\omega_0^2\omega+2\gamma^2\omega\right) \\
&= \frac{2\omega\left(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2\right)}{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

注意到，上式取极值的情况当且仅当分子 $2\omega\left(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2\right)=0$
因此，$\omega^2=\omega_0^2-2\gamma^2$ 时取到极值

(c)

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_0\cos(\omega t+\phi_0) \\
&= -a_0\omega\sin(\omega t+\phi_0)
\end{aligned}
$$

2

(a)

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -kx+mf_0\cos(\omega t) \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -m\omega_0^2x+mf_0\cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -m\omega_0^2x+mf_0\cos(\omega t) \\
-a_0\omega^2\cos(\omega t+\phi) &= -a_0\omega_0^2\cos(\omega t+\phi)+f_0\cos(\omega t) \\
f_0\cos(\omega t) &= a_0\cos(\omega t+\phi)\left(\omega_0^2-\omega^2\right) \\
f_0\cos(\omega t) &= a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi\cos(\omega t)-a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\phi\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

比较系数可得 $\begin{cases} f_0 = a_0\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\phi \\ 0 = a_0\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\phi \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \phi = 0 \end{cases}$

于是，$x\left(t\right) = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega t\right)$

(c)

注意到上一问求出来的实际上是特解，因此我们只需要讨论齐次解从而推导出通解
对于齐次解，其为 $x\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right)$
因此通解是 $x\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right) + \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega t\right)$

$$\begin{aligned} v\left(t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\left(t\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega t\right)\right) \\ &= -A\omega_0\sin\left(\omega_0 t\right) + B\omega_0\cos\left(\omega_0 t\right) - \frac{\omega f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\left(\omega t\right) \end{aligned}$$

考虑到 $x\left(0\right) = 0, v\left(t\right) = 0$

$\begin{cases} 0 = A + \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ 0 = B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ B = 0 \end{cases}$

综上，解为 $x\left(t\right) = -\dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega t\right)$

(d)

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega t\right) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\left(\omega_0 + \Delta\omega\right)t\right) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\Delta\omega t\right) - \sin\left(\omega_0 t\right)\sin\left(\Delta\omega t\right)\right) \\ &\xrightarrow{\Delta\omega t \to 0} -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos\left(\omega_0 t\right)\cdot 1 - \sin\left(\omega_0 t\right)\cdot 0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

課題

1

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\cdot v\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T mf_0\cos(\omega t)\cdot v\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T mf_0\cos(\omega t)\cdot\left(-a_0\omega\sin(\omega t+\phi_0)\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{T}\left[\frac{1}{2}t\sin\phi_0-\frac{1}{4\omega}\cos(2\omega t+\phi_0)\right]_0^T \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{T}\left(\frac{T}{2}\sin\phi_0+\frac{1}{4\omega}\cos\phi_0-\frac{1}{4\omega}\cos(2\omega T+\phi_0)\right) \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{2}\sin\phi_0-\frac{a_0f_0m}{4T}\cos\phi_0+\frac{a_0f_0m}{4T}\cos(2\omega T+\phi_0) \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{2}\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}-\frac{a_0f_0m}{4T}\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\
&+\frac{a_0f_0m}{4T}\left(\cos(2\omega T)\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}-\sin(2\omega T)\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\right) \\
&= \frac{a_0f_0m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}{4T\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\left(\cos(2\omega T)-1\right)-\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\left(\frac{a_0f_0m\omega}{2}+\sin(2\omega T)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P' &= -\frac{1}{T}\int_0^T 2m\gamma v\cdot v\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2m\gamma}{T}\int_0^T v^2\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{T}\int_0^T\sin^2(\omega t+\phi_0)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{T}\left[\frac{1}{4\omega}\sin\left(2\left(\omega t+\phi_0\right)\right)-\frac{1}{2\omega}\left(\omega t+\phi_0\right)\right]_0^T \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{4\omega T}\left(\sin\left(2\left(\omega T+\phi_0\right)\right)-2\left(\omega T+\phi_0\right)-\sin(2\phi_0)+2\phi_0\right) \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{4\omega T}\left(2\sin(\omega T+\phi_0)\cos(\omega T+\phi_0)-2\omega T-\sin(2\phi_0)\right) \\
&= -\frac{a_0^2m\omega^2\gamma}{\omega T}\left(\sin(\omega T)\cos(\omega T)\left(\cos^2\phi_0-\sin^2\phi_0\right)+\sin\phi_0\cos\phi_0\left(\cos^2(\omega T)-\sin^2(\omega T)-1\right)\right)
\end{aligned}
$$

为了方便，我们先计算一些小细节

$$
\begin{aligned}
\cos^2\phi_0-\sin^2\phi_0 &= \frac{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}-\frac{4\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2} \\
&= 1-\frac{8\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\sin\phi_0\cos\phi_0 &= \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cdot\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\\ &= \frac{2\gamma\omega\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\end{aligned}$$

于是，最后结果是

$$P'=-\frac{a_0^2m\omega\gamma}{T}\left(\left(1-\frac{8\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\right)\sin\left(2\omega T\right)-\frac{4\gamma\omega\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\sin^2\left(\omega T\right)\right)$$

这不是最简但是我懒得化简了，显然这两项里 a_0 都还可以代入，代入再进行化简应该没这么繁琐. 原则上 $P=P'$

2

本题只需要计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}P$ 证明在 $\omega=\omega_0$ 时取到极值即可，而这是参考问题 $1.(b)$ 的结论

20241009

1

这题和上次的相同，不重复写

2

这实际上是一个方向全部朝下大小为 g 的向量场，我们只需要分别通过三条路径进行线积分

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \\
X_1(t) &= \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}\right) \\
X_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2at \end{pmatrix} (0 \le t \le 1) \\
X_{31}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}}t \\ -2at \end{pmatrix} (0 \le t \le 1) \\
X_{32}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}}t \\ 0 \end{pmatrix} (0 \le t \le 1) \\
X_1'(t) &= \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}\right) \\
X_2'(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} (0 \le t \le 1) \\
X_{31}'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -2a \end{pmatrix} (0 \le t \le 1) \\
X_{32}'(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} (0 \le t \le 1)
\end{aligned}
$$

通过上面的计算，我们有

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-ag\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2ag \\
W_2 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= 2ag \\
W_3 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -2a \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= 2ag + 0 \\
&= 2ag
\end{aligned}
$$

3

首先由于我们需要证明存在 $U\left(x,y,z\right)$ 使得

$$\begin{aligned}F_x&=-\frac{\partial U}{\partial x}\\F_y&=-\frac{\partial U}{\partial y}\\F_z&=-\frac{\partial U}{\partial z}\end{aligned}$$

因此我们不妨假设在 A,B 间 $U=-\displaystyle\int_A^B F\cdot\mathrm{d}s$
而这相对于 $U_x\left(B\right)-U_x\left(A\right)=-F_x\cdot\Delta x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U_x\left(B\right)-U_x\left(A\right)}{\Delta x}\\&=-F_x\end{aligned}$$

其余两个方向也可以类似地证明

4

首先我们尝试通过计算这个向量场是否是某个标量场的负梯度来证明

$$\begin{aligned}U_x&=-\int F_x\cdot\mathrm{d}x\\&=-\int\left(-axy\right)\mathrm{d}x\\&=ay\int x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}ax^2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_y&=-\int F_y\cdot\mathrm{d}y\\&=-\int\left(-\frac{1}{2}ax^2-y^2\right)\cdot\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}ax^2y+\frac{1}{3}y^3\end{aligned}$$

由于对这里计算的 U_y 进行关于 x 的求导的话，实际上第二项是不存在的，符合 U_x 的计算（这里其实省略掉了 $+C$）
因此存在 $U\left(x,y\right)=\dfrac{1}{2}ax^2y+\dfrac{1}{3}y^3$ 是力 F 的势能函数
另一方面，由于保守力的旋度为零，因此我们可以尝试计算其旋度来判断是否是 0

$$\begin{aligned}\nabla\times F&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\\dfrac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-axy\\-\dfrac{1}{2}ax^2-y^2\end{pmatrix}\\&=-ax-\left(-ax\right)\\&=0\end{aligned}$$

因此这是保守力，接下来其势能函数的计算同上

課題

1

这就是上一问用的结论，即保守场旋度为零，同时题目描述也说明了其第三个性质，保守力积分不随路径变化而变化
同样的，我们有两个方法来解决这个证明，首先

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \int_A^Q F \cdot \mathrm{d}r + \int_Q^B F \cdot \mathrm{d}r \\
&= F_y \cdot k + F_x \cdot h \\
W_2 &= \int_A^P F \cdot \mathrm{d}r + \int_P^B F \cdot \mathrm{d}r \\
&= F_x \cdot h + F_y \cdot k
\end{aligned}
$$

由于 $W_1 = W_2$ 对 W_1, W_2 分别求 $\Delta h, \Delta k \to 0$ 的极限就得到了需要证明的式子
另一方面，我们也可以通过向量分析的小结论来证明，换言之我们仅需要证明梯度的旋度为零

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla U) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

最后这一步是 Hesse 矩阵的小结论，由于二阶混合偏导是连续的因此相等

2

$$
\begin{aligned}
U_x &= -\int F_x \mathrm{d}x \\
&= -\int 3x^2 y \mathrm{d}x \\
&= -x^3 y + C(y) \\
U_y &= -\int F_y \mathrm{d}y \\
&= -\int x^3 \mathrm{d}y \\
&= -x^3 y + C(x)
\end{aligned}
$$

因此这是保守力，势能函数为 x^3y

20241014

1

上次第三题，不重复写

2

上次第四题，不重复写

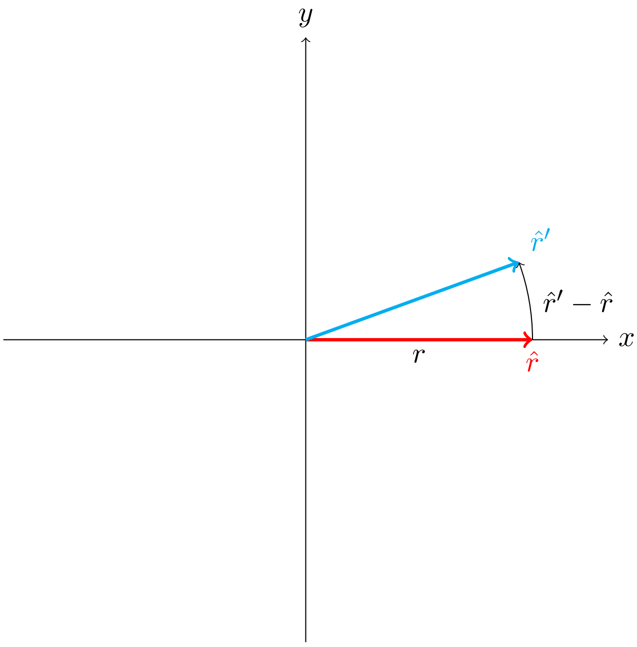
3

$$
\begin{aligned}
F &= -\nabla U \\
&= -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{x\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{y\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{z\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|F| = \sqrt{\left(-\frac{x\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{y\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{z\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2} \\
&= \frac{\mu}{r^3} \cdot r \\
&= \frac{\mu}{r^2}
\end{aligned}
$$

于是其大小是 $\dfrac{\mu}{r^2}$，而方向则是坐标点指向原点

4



由于极坐标下的坐标表示为 $\vec{r} = r\hat{r}$，将其关于 t 进行求导我们可以得到

$$\begin{aligned} v &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \end{aligned}$$

显然，前一项是径向速度及其方向，后一项是切向速度及其方向

5

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\phi) \\ &= \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ v_y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\sin\phi) \\ &= \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \end{aligned}$$

6

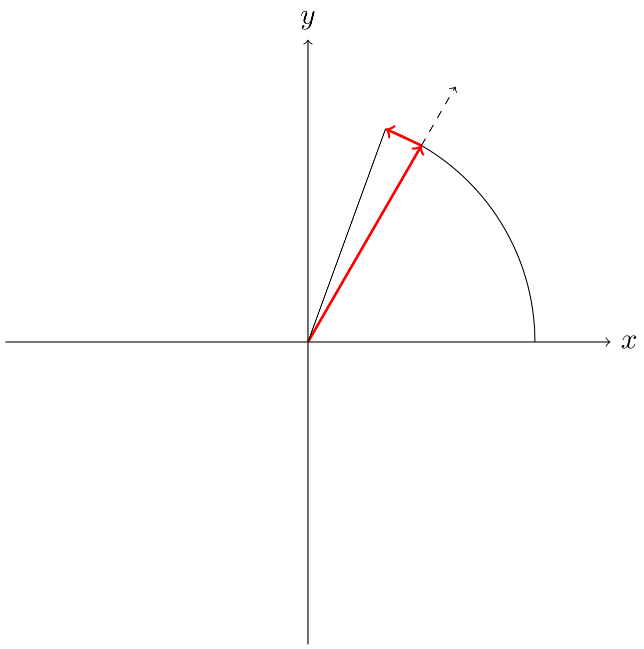
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right)^2 + \left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\cos^2\phi - 2r\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + \dot{r}^2\sin^2\phi + 2r\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi + r^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) + r^2\dot{\phi}^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) \end{aligned}$$

7

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right) \\
&= \ddot{r}\cos\phi - \dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - \left(\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi + r\left(\ddot{\phi}\sin\phi + \dot{\phi}^2\cos\phi\right)\right) \\
&= \ddot{r}\cos\phi - \dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - \dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi \\
&= \ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right) \\
&= \ddot{r}\sin\phi + \dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + \dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\left(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi\right) \\
&= \ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi
\end{aligned}
$$

8



我们只需要进行力的分解就可以简单证明
实际上是懒得画 tikz

9

$$
\begin{aligned}
a_r &= a_x\cos\phi + a_y\sin\phi \\
&= \left(\ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi\right)\cos\phi \\
&+ \left(\ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi\right)\sin\phi \\
&= \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \\
a_\phi &= -a_x\sin\phi + a_y\cos\phi \\
&= -\left(\ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi\right)\sin\phi \\
&+ \left(\ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi\right)\sin\phi \\
&= 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}
\end{aligned}
$$

課題

1

显然，径向单位向量对时间微分等价于径向单位向量旋转的速度，而这就是 $\dot{\phi}e_\phi$，另一方面，切向单位向量可以视作径向向量逆时针旋转 90°，这就带来了负号，其大小则是正常对 ϕ 进行关于 t 的微分

2

这里实际上也有两种做法，一种是如上参考问题的进行笛卡尔系下的计算，另一种则是基于参考问题第四题的进一步求导

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\right) \\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} \\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} - r\dot{\phi}^2\hat{r} \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\hat{\phi}
\end{aligned}$$

20241016

1

上次原题不重复写

2

上次原题不重复写

3

上次原题不重复写

4

上次原题不重复写

5

上次原题不重复写

6

$$\begin{aligned} m\left(2\dot{r}\dot{\phi}+r\ddot{\phi}\right)&=0\\ m\left(2r\dot{r}\dot{\phi}+r^2\ddot{\phi}\right)&=0\\ 2r\dot{r}\dot{\phi}+r^2\ddot{\phi}&=0\\ r^2\dot{\phi}&=C \end{aligned}$$

7

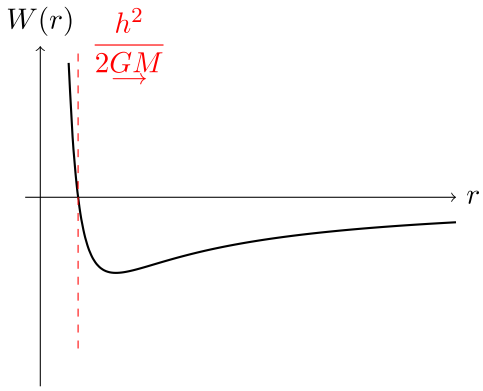
$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\dot{\phi}\\ &=\frac{1}{2}r^2\dot{\phi} \end{aligned}$$

8

$$\begin{aligned} E&=K+U\\ &=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}\\ &=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{GMm}{r} \end{aligned}$$

9

根据上一问，我们有 $W\left(r\right)=\dfrac{1}{2}m\dfrac{h^2}{r^2}-\dfrac{GMm}{r}$



至于 $E<0$ 的情况，$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}-\frac{GMm}{r}<0$ 由于径向动能项包含微分且恒大于 0，因此我们不妨舍去. 于是式子变成了 $\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}<\frac{GMm}{r}$. 而这实际上是 $r>\frac{h^2}{2GM}$

10

$W'(r)=-\frac{mh^2}{r^3}+\frac{GMm}{r^2}=0\Rightarrow r_0=\frac{h^2}{GM}$ 而此时的 r 是最低能状态，因此不存在轨道半径震荡，这就是单纯的圆轨道

課題

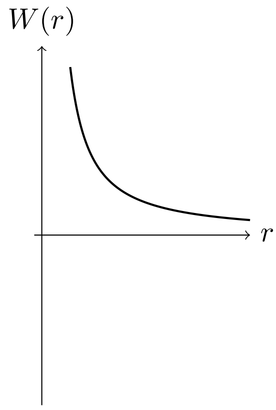
1

$$
\begin{aligned}
x&=r\cos\phi\\
v_x&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\phi)\\
&=\dot{r}\cos\phi-r\dot{\phi}\sin\phi\\
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\cos\phi-r\dot{\phi}\sin\phi\right)\\
&=\ddot{r}\cos\phi-\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi-\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi-r\left(\ddot{\phi}\sin\phi+\dot{\phi}^2\cos\phi\right)\\
&=\ddot{r}\cos\phi-2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi-r\ddot{\phi}\sin\phi-r\dot{\phi}^2\cos\phi\\
y&=r\sin\phi\\
v_y&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\sin\phi)\\
&=\dot{r}\sin\phi+r\dot{\phi}\cos\phi\\
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\sin\phi+r\dot{\phi}\cos\phi\right)\\
&=\ddot{r}\sin\phi+\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi+\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi+r\left(\ddot{\phi}\cos\phi-\dot{\phi}^2\sin\phi\right)\\
&=\ddot{r}\sin\phi+2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi+r\ddot{\phi}\cos\phi-r\dot{\phi}^2\sin\phi
\end{aligned}
$$

2

$$
\begin{aligned}
E&=K+U\\
&=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}+\frac{mk}{r}
\end{aligned}
$$

因此有效势能为 $\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}+\frac{mk}{r}$



由于中心力为斥力因此并不存在一个稳定存在的点，而在 r_{min} 处，径向速度为 0 因此我们可以得到 $E = \frac{mh^2}{2r_{min}^2} + \frac{mk}{r_{min}}$

20241021

1

首先先列出角动量 $L = r \times p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \end{pmatrix} = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)$
其关于时间的变化量是

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\right) \\ &= m\left(x\ddot{y} - y\ddot{x}\right) \\ &= F_y x - F_x y \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} S &= r \cdot v \cdot \sin\theta \\ &= r \times v \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ &= xv_y - yv_x \end{aligned}$$

3

根据上次的第七题可以得到，面积速度是 $\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$，将其乘上 $2m$ 之后变为 $mr^2\dot{\phi}$
而由于 $v = r\dot{\phi}$，因此这就是 rmv（即角动量的大小）

4

我们不妨考虑一个柱坐标系 (r, θ, z), 为了方便讨论设 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} mv_r \\ mv_\theta \\ mv_z \end{pmatrix}$
那么角动量表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_r \\ mv_\theta \\ mv_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ r & 0 & z \\ mv_r & mv_\theta & mv_z \end{vmatrix} \\ &= \left(mv_r z\right)\hat{\theta} + \left(rmv_\theta\right)\hat{z} - \left(rmv_z\right)\hat{\theta} - \left(mv_\theta z\right)\hat{r} \\ &= \left(-mv_\theta z\right)\hat{r} - \left(mv_r z - rmv_z\right)\hat{\theta} + \left(rmv_\theta\right)\hat{z} \end{aligned}$$

由于角动量的方向确定且方向是 $\hat{z}$，因此 $\begin{cases} -mv_\theta z = 0 \\ -\left(mv_r z - rmv_z\right) = 0 \\ rmv_\theta = A \end{cases}$
这里 A 是一个固定的常数 (fixed number) 从第三个式子可以知道 v_θ 并非是 0，因此代回一式可以得到 $z = 0$，而这代回二式就可以得到 $v_z = 0$. 于是 $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ 的 z 坐标都是 0，换言之都在平面 $z = 0$ 内部
至于为什么角动量的方向是 $\hat{z}$，其实只是参考系选取的而已，我们只需要选取一个让角动量方向是 $\hat{z}$ 的参考系就可以了

5

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{p}\right) \\
&= \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}} \\
&= v\times mv+\mathbf{r}\times m\dot{v} \\
&= 0+\mathbf{r}\times\mathbf{F} \\
&= \mathbf{r}\times\left(F\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此角动量不随时间变化，换言之其守恒

6

左侧：$mgl\sin\phi$，方向逆时针
右侧：$mgl\sin\phi$，方向顺时针

課題

1

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \begin{pmatrix} 0 \\ r_p \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} mv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rmv \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

显然 $L=0$ 当且仅当 r_p 为 0
而守恒条件为其不受外力或所受外力指向和位置矢量的指向相同

2

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} r_p \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix} \\
\mathbf{L} &= \begin{pmatrix} r_p \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ -mgt \end{pmatrix} \\
&= -mgr_pt \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} &= -mgr_p
\end{aligned}$$

由于角动量对时间微分等价于力矩，而通过计算可以得到力矩的力就是 mg

20241023

1

上次原题不重复写

2

上次原题不重复写

3

$r^2\dot{\phi} = h \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{h}{r^2} = hu^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) \\
&= -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{\dot{\phi}}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} \\
&= -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} \\
\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right) \\
&= -h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \\
&= -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -G\frac{M}{r^2} \\
-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 &= -GMu^2 \\
\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u &= \frac{GM}{h^2}
\end{aligned}$$

4

由于 $\frac{GM}{h^2}$ 并不包含 ϕ，因此实际上 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} = 0$，因此 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = 0 + u = 0 + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2}$
接着假设其齐次解是 $u = A\cos\phi + B\sin\phi$（由于其特征方程是 $u^2+1=0$）
因此其通解是 $u = A\cos\phi + B\sin\phi + \frac{GM}{h^2}$
而为了方便计算我们不妨将其通解记作 $u = A\cos(\phi - \phi_0) + \frac{GM}{h^2}$，这实际上是等价的

課題

1

上次原题不重复写

2

$$
\begin{aligned}
m\frac{v^2}{r} &= G\frac{Mm}{r^2} \\
v^2 &= \frac{GM}{r} \\
v &= \frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{r}}
\end{aligned}
$$

速度和半径的平方根成反比

$$
\begin{aligned}
m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r &= G\frac{Mm}{r^2} \\
\frac{4\pi^2}{T^2} &= \frac{GM}{r^3} \\
\frac{r^3}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2}
\end{aligned}
$$

显然右边是定值

20241031

1

我们从两个角度证明，首先是通过比耐公式计算得到

由上次所求得的通解可以知道 $u = A\cos(\phi - \phi_0) + \dfrac{GM}{h^2}$

接着为了方便，我们将基准作为长轴，换言之 $\phi_0 = 0$

因此原式为 $u = A\cos\phi + \dfrac{GM}{h^2} = \dfrac{GM}{h^2}\left(\dfrac{Ah^2}{GM}\cos\phi + 1\right)$

接着我们记 $\epsilon = \dfrac{Ah^2}{GM}, l = \dfrac{h^2}{GM}$

于是这就得到了 $u = \dfrac{1}{l}(1 + \epsilon\cos\phi) \Leftrightarrow \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{l}(1 + \epsilon\cos\phi) \Leftrightarrow r = \dfrac{l}{1 + \epsilon\cos\phi}$

接着我们可以得到近日点和远日点分别是 $\phi = 0, \pi$

换言之 $r_{min} = \dfrac{l}{1+\epsilon}, r_{max} = \dfrac{l}{1-\epsilon}$

而半长轴 $a = \dfrac{r_{min} + r_{max}}{2} = \dfrac{l}{1-\epsilon^2}$

而半短轴 $b = a\sqrt{1-\epsilon^2} = \dfrac{l}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$

至于另一种方法，我们建立一个以太阳为左侧焦点的极坐标系 (r,ϕ)，接着对于任意一点 $P(r,\phi)$，我们有 $PF_1 = r, PF_2 = 2a - r, F_2(2c, 0) = (2\epsilon a, 0)$，在三角形 PF_1F_2 中我们由余弦定理可以得到 $PF_2 = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\phi}$. 根据椭圆定义（任意一点到两焦点距离之和为 $2a$），有 $r + \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\phi} = 2a$. 而将其化简后得到 $r = \dfrac{a\left(1-\epsilon^2\right)}{1 - \epsilon\cos\phi}$，仅需令 $l = a\left(1-\epsilon^2\right)$ 便可得到最后结果（由于我们这里将基准极轴选取为了指向另外一个焦点的方向因此分母处出现了负号）

2

在上一问的结果里，我们得到了 $r = \dfrac{l}{1 + \epsilon\cos\phi}$.

显然 $\epsilon = 1$ 意味着抛物线，而这代入回极坐标方程就是 $r = \dfrac{l}{1 + \cos\phi}$

3

由于双曲线的情况下 $\epsilon > 1$，我们重新考虑某点到两焦点距离关系

$\left|r - \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\phi}\right| = 2a$，化简后得到了 $r = \dfrac{a\left(\epsilon^2 - 1\right)}{1 - \epsilon\cos\phi}$（事实上还有另外一个解，但是其无实际物理意义）

令 $l = a\left(\epsilon^2 - 1\right)$ 即可得到最终结果

另一方面 $r_{min} = r_{\phi=0} = \dfrac{l}{1-\epsilon}$，渐近线 $\cos\phi = \dfrac{1}{\epsilon}$

半实轴可以通过两焦点距离关系得出 $a = \dfrac{l}{\epsilon^2 - 1}$

半虚轴结合渐进线可以得到为 $b = \dfrac{l}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$

4

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{l}{1+\epsilon\cos\phi} \\
\frac{1}{r} &= \frac{1+\epsilon\cos\phi}{l} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\epsilon\dot{\phi}\sin\phi}{l} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\epsilon\sin\phi}{l}\cdot\frac{h}{r^2} \\
\dot{r} &= \frac{h}{l}\epsilon\sin\phi \\
\ddot{r} &= \frac{h}{l}\epsilon\dot{\phi}\cos\phi \\
&= \frac{h^2}{r^2 l}\epsilon\cos\phi \\
&= \frac{h^2}{r^2 l}\left(\frac{l}{r}-1\right) \\
&= \frac{h^2}{r^3}-\frac{h^2}{lr^2}
\end{aligned}
$$

5

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{l}{1+\cos\phi} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\dot{\phi}\sin\phi}{l} \\
\dot{r} &= \frac{h\sin\phi}{l} \\
\ddot{r} &= \frac{h^2\cos\phi}{l}\cdot\frac{1}{r^2}
\end{aligned}
$$

显然，径向移动方程是 $m\ddot{r}=F$，而等号左边和 r 的平方成反比

6

由于此时在近日点径向速度为 0，因此

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{r}\right)^2-\frac{GMm}{r} \\
&= \left(\frac{mh^2}{2}-GMmr\right)\frac{1}{r^2} \\
&= \left(\frac{mh^2}{2}-GMm\frac{h^2}{GM\left(1+\epsilon\right)}\right)\frac{G^2M^2\left(1+\epsilon\right)^2}{h^4} \\
&= m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+\epsilon}\right)\frac{G^2M^2\left(1+\epsilon\right)^2}{h^2} \\
&= -\frac{G^2M^2m\left(1-\epsilon^2\right)}{2h^2}
\end{aligned}
$$

課題

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi ab}{h} \\
&= \frac{2\pi}{h} \cdot \frac{l}{1-\epsilon^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{1-e^2}} \\
&= \frac{2\pi l^2}{h\left(1-\epsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
T^2 &= \frac{4\pi^2 l^4}{h^2\left(1-\epsilon^2\right)^3} \\
&= \frac{4\pi^2 l}{h^2} \cdot \frac{l^3}{\left(1-\epsilon^2\right)^3} \\
&= \frac{4\pi^2 l}{h^2} \cdot a^3
\end{aligned}
$$

20241104

1

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \det\left(\nabla\begin{pmatrix} r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix} \\
0- &= r^2\sin\phi
\end{aligned}$$

由于在坐标变换时我们需要用的是绝对值，因此这里实际上是 $r^2\sin\phi$.
另一方面，实际上我们这里使用的是数学定义，即 ϕ 来作为天顶角而非经度角

(b)

考虑在 $\mathrm{d}V$ 的范围内，其质量 $\mathrm{d}M=\rho\mathrm{d}V=\rho R^2\sin\theta\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}U &= -G\frac{m\mathrm{d}M}{s} \\
&= -\frac{1}{s}Gm\rho R^2\sin\theta\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta} \\
s^2 &= r^2+R^2-2Rr\cos\theta \\
2s\mathrm{d}s &= -2Rr\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{d}s &= \frac{1}{s}Rr\sin\theta\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

(d)

$D:=\{(R,\theta,\phi):R\in[0,R_0],\theta\in[0,\pi],\phi\in[0,2\pi]\}$
$E:=\{(R,s,\phi):R\in[0,R_0],s\in[r-R,r+R],\phi\in[0,2\pi]\}$

$$\begin{aligned}
U &= \iiint_D \mathrm{d}U \\
&= \iiint_D \left(-\frac{1}{s}Gm\rho R^2\sin\theta\right)\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{Gm\rho}{r}\iiint_E R\mathrm{d}R\mathrm{d}s\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{Gm\rho}{r}\cdot 4\pi\int_0^{R_0} R^2\mathrm{d}R \\
&= -\frac{Gm}{r}\cdot\frac{4\pi}{3}\rho R_0^3 \\
&= -\frac{GMm}{r}
\end{aligned}$$

2

由上一问可以知道，对于一个这样均匀的球壳来说，其内部所受到的势能仅与距离球心距离有关，因此一整个球壳内部的万有引力所产生的势能实际上只需要考虑不同半径的势能总和（由于其球对称性），而这实际上总和是 0. 另一方面，引力实际上是势能的负梯度，因此引力在任意半径上的总和同样是 0

3

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{Gm}{x^2}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi\rho x^3\right) \\
\ddot{x} &= -\frac{4\pi}{3}G\rho x
\end{aligned}
$$

显然，这是简谐振动

課題

1

$D := \{(\phi,\theta) : \phi\in[0,2\pi], \theta\in[0,\pi]\}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \rho R^2\sin\theta\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \rho_a R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
M &= \int_D \rho_a R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{2\pi\rho_a R}{r}\int_{r-R}^{r+R} s\mathrm{d}s \\
&= \frac{2\pi\rho_a R}{r}\cdot 2Rr \\
&= 4\pi\rho_a R^2
\end{aligned}
$$

2

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}U &= -G\frac{m\mathrm{d}M}{s} \\
&= -\frac{Gm\rho_a R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U &= \int_D \mathrm{d}U \\
&= 2\pi\int_0^{\pi}\left(-\frac{Gm\rho_a R^2\sin\theta}{s}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_{r-R}^{r+R}\left(-\frac{Gm\rho_a R}{r}\right)\mathrm{d}s \\
&= -\frac{4\pi Gm\rho_a R^2}{r} \\
&= -G\frac{Mm}{r}
\end{aligned}
$$

因此其收到一个有源向心力，在全方向上总受力为 0

20241106

課題

1

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{r} \\
&= \frac{\epsilon\cos\phi - 1}{l} \\
\dot{u} &= -\frac{\epsilon\sin\phi}{l}\dot{\phi} \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\cdot\dot{\phi} &= -\frac{\epsilon\sin\phi}{l}\dot{\phi} \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} &= -\frac{\epsilon\sin\phi}{l} \\
\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} &= -\frac{\epsilon\cos\phi}{l}
\end{aligned}$$

因此我们令 $l = \dfrac{h^2}{k}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} = -\dfrac{\epsilon\cos\phi}{l}$，并代入原微分方程，就有

$$\begin{aligned}
-\frac{\epsilon\cos\phi}{l} + u &= -\frac{1}{l} \\
u &= \frac{\epsilon\cos\phi - 1}{l} \\
\frac{1}{r} &= \frac{\epsilon\cos\phi - 1}{l} \\
r &= \frac{l}{\epsilon\cos\phi - 1}
\end{aligned}$$

2

首先注意到，$r_{min} = \dfrac{l}{\epsilon - 1}$
其次在 r_{min} 处径向速度为零，因此

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + \frac{mk}{r} \\
&= \frac{mh^2\left(\epsilon-1\right)^2}{2l^2} + \frac{mk\left(\epsilon-1\right)}{l} \\
&= \frac{m\left(\epsilon-1\right)}{l}\left(\frac{h^2\left(\epsilon-1\right)}{2l} + k\right) \\
&= \frac{mk^2\left(\epsilon-1\right)}{h^2}\left(\frac{\epsilon-1}{2} + 1\right) \\
&= \frac{mk^2\left(\epsilon-1\right)}{h^2}\cdot\frac{\epsilon+1}{2} \\
&= \frac{mk^2}{2h^2}\left(\epsilon^2 - 1\right) \\
\epsilon^2 - 1 &= \frac{2Eh^2}{mk^2} \\
\epsilon^2 &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2}
\end{aligned}$$

3

[1]

$$
\begin{aligned}
mr^2\dot{\phi} &= pmv_0 \\
r^2\dot{\phi} &= pv_0 \\
h &= pv_0
\end{aligned}
$$

4

$$
\begin{aligned}
\epsilon^2 &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2} \\
\frac{1}{\cos^2\Phi} &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2} \\
1 + \tan^2\Phi &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2} \\
\tan\Phi &= \sqrt{\frac{2h^2E}{mk^2}}
\end{aligned}
$$

5

事实上前两个等号只是单纯的三角恒等式的变换，不涉及具体证明，因此我们只需要证明最后一个等号 $\tan\Phi = \dfrac{v_0^2 p}{k}$

首先将 $E = \dfrac{1}{2}mv_0^2$ 和 $h = pv_0$ 代入进 $\tan\Phi = \sqrt{\dfrac{2h^2E}{mk^2}}$，有 $\tan\Phi = \sqrt{\dfrac{2p^2v_0^2 \cdot \frac{1}{2}mv_0^2}{mk^2}} = \sqrt{\dfrac{p^2v_0^4}{k^2}}$

而这实际上就是 $\tan\Phi = \dfrac{pv_0^2}{k}$

[1] https://eman-physics.net/elementary/rutherford.html

20241111

1

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} &= f\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \\
m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} &= f\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = -f\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2\right) &= f\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) - f\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\left(m_1 + m_2\right) \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) &= 0 \\
\left(m_1 + m_2\right) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) &= 0 \\
m_G \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_G}{\mathrm{d}t^2} &= 0 \\
m_G \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_G}{\mathrm{d}t^2} &= 0
\end{aligned}
$$

这题似乎存在一点小歧义，如果将这个中心力理解为某个第三方的力分别作用到两个质点上的话合外力不是 0，而是 $f\left(\vec{r}_1\right) + f\left(\vec{r}_2\right)$，这样一来使得两物体的重心并非按照匀速运动，而是按照合外力进行匀加速运动. 然而我们如果仅仅考虑两质点间的万有引力或是相互吸引的其他什么力（而非是原题中直接说的中心力）的话，我们确实可以按照上面所给出的方式来导出两质点的重心确实是受合外力 0 进行匀速运动

2

$$
\begin{aligned}
\mu \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \\
&= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1\right) \\
&= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{f(r)}{m_2} \frac{\vec{r}}{r} + \frac{f(r)}{m_1} \frac{\vec{r}}{r}\right) \\
&= f(r) \frac{\vec{r}}{r}
\end{aligned}
$$

这一问采取考虑添加单位方向 $\frac{\vec{r}}{r}$ 的原因一方面是因为这一问计算过程并未明确给出力的指向，另一方面是懒得改上一问，实际上上一问也需要添加方向项

3

$$
\begin{aligned}
\mu \frac{4\pi^2}{T^2} r &= \frac{G m_1 m_2}{r^2} \\
T^2 &= \frac{4\pi^2 r^3}{G\left(m_1 + m_2\right)} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G\left(m_1 + m_2\right)}}
\end{aligned}
$$

4

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{Gm_1m_2}{r^2} \\
&= Gm_1m_2 \cdot \frac{m_1^2}{\left(m_1+m_2\right)^2 r_2^2} \\
&= \frac{Gm_1^3m_2}{\left(m_1+m_2\right)^2 r_2^2}
\end{aligned}
$$

課題

1

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= k\left(x_2-x_1-l\right) \\
m_2\ddot{x}_2 &= -k\left(x_2-x_1-l\right)
\end{aligned}
$$

2

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \ddot{x}_2-\ddot{x}_1 \\
&= -\frac{k}{m_2}\left(x-l\right)-\frac{k}{m_1}\left(x-l\right) \\
&= -k\left(x-l\right)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) \\
&= -\frac{k}{\mu}\left(x-l\right)
\end{aligned}
$$

显然特解是 $x=l$，而齐次解方面，特征方程 $\alpha^2+\dfrac{k}{\mu}=0$ 的解是 $\alpha=\pm i\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$
那么其次解就是 $x=C_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}t\right)$
因此，通解为 $x=C_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}t\right)+l$ 而重心初始位置是 $\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$，因此两质点的位置分别是

$$
\begin{aligned}
x_p &= \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}-\frac{m_2}{m_1+m_2}x \\
&= \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right)+l\right) \\
&= \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(C\cos\left(\omega t+\phi\right)+l\right) \\
x_Q &= \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+\frac{m_1}{m_1+m_2}x \\
&= \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(C\cos\left(\omega t+\phi\right)+l\right)
\end{aligned}
$$

这里 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}, C=\sqrt{C_1^2+C_2^2}, \phi=\arctan\left(-\dfrac{C_2}{C_1}\right)$

3

$$
\begin{aligned}
LHS &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_G - \frac{m_2}{m_1+m_2}x\right)\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_G + \frac{m_1}{m_1+m_2}x\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_G - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_G + \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{x}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{x}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 \\
&= RHS
\end{aligned}
$$

20241113

1

(a)

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_1 \\
&= F_1 + \sum_{k=1}^{N-1} F_{k1}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
F_{kj} = -F_{jk}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{N} p_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(F_j + \sum_{k \neq j} F_{kj} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} F_j + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j} F_{kj} \\
&= \sum_{j=1}^{N} F_j
\end{aligned}
$$

最后一个等号这里实际上是一点小小的数学技巧. 第二问我们得到了交换顺序后的受力和交换前的受力相抵消，而对于每个质点，我们在计算其本身作为受力指向的时候得到了 $N-1$ 个指向该质点的力，而在计算剩下的 $N-1$ 个质点的时候，每一个指向这 $N-1$ 个质点的力都与刚才所得到的力所抵消，换言之后面的二重求和实际上全部抵消变为 0

(d)

$$
\begin{aligned}
r_G &= \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j r_j}{M} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j r_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j}
\end{aligned}
$$

(e)

$$\begin{aligned} P &= m_G \dot{r}_G \\ &= \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{r}_j \\ &= \sum_{j=1}^{N} m_j v_j \\ &= \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j v_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j} \\ &= M v_G \end{aligned}$$

(f)

由 c 可知，总动量对时间微分等价于总外力，而由 e 可以知道，总动量等价于总质量与重心速度的乘积，换言之体系的整体运动相对于令所有质量的总和位于重心，所有速度的加权平均作用在重心上. 综上，系统整体的运动可以看作总受力作用在质量为总质量的重心所引起的重心运动

(g)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\mathrm{d} r'_G}{\mathrm{d} t} &= \sum_{j=1}^{N} m_j \left(v_j - v_G\right) \\ &= P - \sum_{j=1}^{N} m_j v_G \\ &= P - M v_G \\ &= 0 \end{aligned}$$

(h)

首先显然根据分解我们可以知道，总能量实际上是相当于重心动能和各质点相对重心的运动的动能的总和（也就是 f 证明的结果），而根据 g 我们可以知道，各质点相对重心的动量实际上是 0，而显然质量项没有 0 出现，换言之相对质心运动的动能项为 0

課題

1

$$\begin{aligned} mv &= (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + (-\mathrm{d}m)\left[v + \mathrm{d}v - u\right] \\ mv &= mv + m\mathrm{d}v + v\mathrm{d}m + \mathrm{d}m\mathrm{d}v - v\mathrm{d}m - \mathrm{d}m\mathrm{d}v + u\mathrm{d}m \\ 0 &= m\mathrm{d}v + u\mathrm{d}m \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}v}{u} + \frac{\mathrm{d}m}{m} \end{aligned}$$

2

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}v}{u} &= \frac{\mathrm{d}m}{m} \\
-\frac{1}{u}\int \mathrm{d}v &= \int \frac{1}{m}\mathrm{d}m \\
-\frac{v}{u} &= \log m + C
\end{aligned}
$$

代入初值我们有 $C = -\log m_0$

$$
\begin{aligned}
-\frac{v}{u} &= \log m - \log m_0 \\
v &= u\left(\log m_0 - \log m\right) \\
&= u \log\left(\frac{m_0}{m}\right)
\end{aligned}
$$

3

$$
\begin{aligned}
\left(m_0 - \alpha t\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}m - \left(m_0 - \alpha t\right)g \\
\left(m_0 - \alpha t\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= u\alpha - \left(m_0 - \alpha t\right)g \\
\left(m_0 - \alpha t\right)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + g\right) &= u\alpha \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{u\alpha}{m_0 - \alpha t} - g \\
\int \mathrm{d}v &= \int \left(\frac{u\alpha}{m_0 - \alpha t} - g\right)\mathrm{d}t \\
v &= -u\log\left(m_0 - \alpha t\right) - gt + C
\end{aligned}
$$

代入初值可以得到，$C = u\log m_0$

$$
\begin{aligned}
v &= -u\log\left(m_0 - \alpha t\right) - gt + u\log m_0 \\
&= u\log\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right) - gt
\end{aligned}
$$

20241118

1

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{3}\pi r_0^3\rho v &= \frac{4}{3}\pi r^3\rho v \\
r_0^3 v_0 &= r^3 v \\
v &= \frac{r_0^3}{r^3} v_0
\end{aligned}
$$

2

由于板子和人构成的系统并未收到外力，因此整体质心并未发生移动
接着我们不妨假设板子移动距离为 d，同时将一开始人站的位置作为原点

$$
\begin{aligned}
r_G &= \frac{M\cdot\frac{l}{2}+m\cdot 0}{M+m} \\
&= \frac{Ml}{2\left(M+m\right)} \\
&= r'_G \\
&= \frac{M\cdot\left(d+\frac{l}{2}\right)+m\cdot\left(d+l\right)}{M+m}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\frac{Ml}{2\left(M+m\right)} &= \frac{M\left(d+\frac{l}{2}\right)+m\left(d+l\right)}{M+m} \\
Ml &= 2Md+Ml+2md+2ml \\
0 &= Md+md+ml \\
d &= -\frac{ml}{M+m}
\end{aligned}
$$

3

线密度是 ρ，因此在提起长度为 x 时，被提起部分的重力为 ρxg
由于动量对时间微分是力，因此为了保持整体速度为 v，我们需要考虑增加一项“增加动量”的力，大小是 $\dot{p}=\rho\dot{x}\cdot v=\rho v^2$. 因此总受力就是 $\rho\left(gx+v^2\right)$
而如果是在非匀速的情况下，我们需要考虑进惯性力，即 ρxa，于是总力就是 $\rho\left(gx+v^2+xa\right)$

4

首先我们考虑铅直方向上的运动，在 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 期间

$$
\begin{aligned}
&\left(m+\mathrm{d}m\right)\cdot\left(v+\mathrm{d}v\right)-mv \\
&=\left(\rho x+\rho v\mathrm{d}t\right)\cdot\left(v+a\mathrm{d}t\right)-\rho xv \\
&=\left(\rho xg-T\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

至于水平方向，我们同样有

$$
\begin{aligned}
&\left(m-\mathrm{d}m\right)\cdot\left(v+\mathrm{d}v\right)-mv \\
&=\left(\rho\left(l-x\right)-\rho v\mathrm{d}t\right)\cdot\left(v+a\mathrm{d}t\right)-\rho\left(l-x\right)v \\
&=T\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

由于这两个张力 T 是相等的，因此我们分别表示出来，对于上式的垂直方向

$$\begin{aligned}
(\rho x+\rho v\mathrm{dt})\cdot(v+a\mathrm{dt})-\rho xv&=(\rho xg-T)\,\mathrm{dt}\\
\rho xv+\rho v^2\mathrm{dt}+\rho xa\mathrm{dt}+\rho va\mathrm{dt}\mathrm{dt}-\rho xv&=(\rho xg-T)\,\mathrm{dt}\\
\rho v^2\mathrm{dt}+\rho xa\mathrm{dt}+\rho va\mathrm{dt}\mathrm{dt}&=(\rho xg-T)\,\mathrm{dt}\\
\rho\mathrm{dt}\left(v^2+xa\right)&=(\rho xg-T)\,\mathrm{dt}\\
T&=\rho\left(xg-v^2-xa\right)
\end{aligned}$$

在水平方向

$$\begin{aligned}
(\rho\,(l-x)-\rho v\mathrm{dt})\cdot(v+a\mathrm{dt})-\rho\,(l-x)\,v&=T\mathrm{dt}\\
\rho\,(l-x)\,v-\rho v^2\mathrm{dt}+\rho\,(l-x)\,a\mathrm{dt}-\rho va\mathrm{dt}\mathrm{dt}-\rho\,(l-x)\,v&=T\mathrm{dt}\\
\rho\mathrm{dt}\left((l-x)\,a-v^2\right)&=T\mathrm{dt}\\
T&=\rho\left((l-x)\,a-v^2\right)
\end{aligned}$$

联立上面两个式子我们可以得到

$$\begin{aligned}
a&=\frac{xg}{l}\\
\ddot{x}&=\frac{xg}{l}
\end{aligned}$$

考虑特征方程我们有通解 $x=C_1\exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)+C_2\exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$

由于 $x\,(0)=x_0$，我们得到 $C_1+C_2=x_0$

由于 $v\,(0)=0$，我们有 $C_1\sqrt{\frac{g}{l}}-C_2\sqrt{\frac{g}{l}}=0$

由上面的式子我们可以知道，$C_1=C_2=\frac{x_0}{2}$

综上我们得到

$$x\,(t)=\frac{x_0}{2}\exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)+\frac{x_0}{2}\exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

課題

我们假设线密度为 ρ，于是分别考虑棒两端（为了方便，令右边垂下的长度为 x）

$$\begin{aligned}
m_R&=\rho x\\
m_R\ddot{x}&=\rho xg-T\\
\rho x\ddot{x}&=\rho xg-T\\
m_L&=\rho\,(l-x)\\
-m_L\ddot{x}&=\rho\,(l-x)\,g-T\\
-\rho\,(l-x)\,\ddot{x}&=\rho\,(l-x)\,g-T
\end{aligned}$$

将左右两边合并后

$$\begin{aligned}
x\ddot{x}+(l-x)\,\ddot{x}&=xg-(l-x)\,g\\
l\ddot{x}&=(2x-l)\,g\\
\ddot{x}&=\frac{g}{l}\,(2x-l)\\
\ddot{x}-\frac{2g}{l}x+g=0&
\end{aligned}$$

显然特解是 $x=\dfrac{l}{2}$，而齐次解是 $x=C_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{2g}{l}}t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\dfrac{2g}{l}}t\right)$
这题似乎缺少条件，因为对于这一步而言缺少了一个初始值无法完整求解，因此我们假设初始速度为 0
代入初值可得 $C_1=x_0-\dfrac{l}{2},C_2=0$
因此，$x=\dfrac{l}{2}+\left(x_0-\dfrac{l}{2}\right)\cos\left(\sqrt{\dfrac{2g}{l}}t\right)$

20241120

1

$$
\begin{aligned}
m_j \ddot{x}_j &= F_j \\
r_j \times m_j \ddot{x}_j &= r_j \times F_j \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_j &= N_j \\
\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}L_j}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{n} N_j \\
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= N
\end{aligned}
$$

2

根据上次问题可以知道整体角动量为各角动量总和，即 $L = \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j)$

对于位置向量 $\mathbf{r}_j$，我们注意到其等价于 $\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j$

另一方面，动量项 $\mathbf{p}_j = m_j v_j = m_j \dot{r}_j = m_j \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r_G + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r'_j \right)$

于是总角动量等价于 $\sum_{j=1}^{N} m_j \left(r_G + r'_j \right) \times \left(\frac{\mathrm{d}r_G}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r'_j}{\mathrm{d}t} \right)$

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{j=1}^{N} m_j \left(r_G + r'_j \right) \times \left(\frac{\mathrm{d}r_G}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r'_j}{\mathrm{d}t} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\left(r_G + r'_j \right) \times \frac{\mathrm{d}r_G}{\mathrm{d}t} + \left(r_G + r'_j \right) \times \frac{\mathrm{d}r'_j}{\mathrm{d}t} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} m_j \left(r_G \times \dot{r}_G + r'_j \times \dot{r}_G + r_G \times \dot{r}'_j + r'_j \times \dot{r}'_j \right) \\
&= r_G \times P + \sum_{j=1}^{N} m_j r'_j \times \dot{r}'_j \\
&= r_G \times P + \sum_{j=1}^{N} r'_j \times p'_j
\end{aligned}
$$

3

本题公式完全复制上一问的，略过

4

我们同样利用 $r_j = r_G + r'_j$ 来处理

$$\begin{aligned} N &= \sum_{j=1}^{N} r_j \times F_j \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left(r_G + r'_j\right) \times F_j \\ &= \sum_{j=1}^{N} r_G \times F_j + \sum_{j=1}^{N} r'_j \times F_j \\ &= N_G + N' \end{aligned}$$

5

显然

課題

1

$$\begin{aligned} L &= L_P + L_Q \\ &= 2l \times m\omega 2l \\ &= 4m\omega l^2 \end{aligned}$$

2

$r_G = \dfrac{m \cdot 0 + m \cdot 2l}{m + m} = l$

$$\begin{aligned} L_G &= l \cdot 2m\omega l \\ &= 2m\omega l^2 \end{aligned}$$

3

我们考虑相对位置，P, Q 分别距离重心 $-l, l$，线速度分别是 $-\omega l, \omega l$
于是我们可以知道 $L' = 2m\omega l^2$
综上，$L = L_G + L' = 4m\omega l^2$

20241127

1

$$
\begin{aligned}
r &= r_0 + r' \\
\ddot{r} &= \ddot{r}_0 + \ddot{r}' \\
a_S &= a_0 + a_{S'} \\
F_S &= m\left(a_0 + a_{S'}\right) \\
F_S + F &= m a_{S'} \\
F &= -m a_0
\end{aligned}
$$

2

考虑两个惯性系 S, S'，关系为 $r' = r - vt, t' = t$
考虑速度关系，我们有 $u' = \dot{r}' = \dot{r} - v = u - v$
而加速度方面，$a' = \dot{u}' = \dot{u} = a$
由于在伽利略变换下（都为惯性系）受力相等，而其加速度也相等，因此我们可以知道运动方程没有区别

3

考虑运动方程为 $mg - N = ma$，因此地面对物体支持力是 $N = m\left(g - a\right)$
另一方面，根据牛三，物体对地面所造成的力为大小相同方向相反的 $m\left(a - g\right)$

4

由于水平方向上并未收到外力因此我们可以立刻知道 $x'\left(t\right) = u_0 t$
至于竖直方向，我们有加速度 $-\left(g + a\right)$，因此 $y'\left(t\right) = h_0 - \dfrac{1}{2}\left(g + a\right)t^2$

5

我们首先考虑一个单纯弹簧的例子，显然弹簧是个简谐振动，我们可以得到其运动为

$$
x' = \frac{ma}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)
$$

接着我们需要考虑其在基础弹簧运动的基础上额外运动的部分，即 $\dfrac{m\left(g - a\right)}{k}$
综上，运动为 $x\left(t\right) = \dfrac{m\left(g - a\right)}{k} + \dfrac{ma}{k}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$

6

$\tan\theta = \dfrac{\alpha}{g} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\dfrac{\alpha}{g}\right)$

課題

1

显然我们可以得到 $x = a\cos\left(\omega t + \phi\right)$，因此其加速度是 $-a\omega^2\cos\left(\omega t + \phi\right)$
显然其离开表面的要求是 $\left|-a\omega^2\right| > g$
因此留在表面的要求是 $a\omega^2 \le g$

2

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \frac{2v_0}{g} \\
T &= \frac{2v_0}{g-a} \\
T &= \frac{g}{g-a}T_0
\end{aligned}
$$

20241202

1

(a)

$$v_G = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}$$

(b)

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 - v_G \\ &= -\frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \\ V_2 &= v_0 - v_G \\ &= \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{gathered} m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2' \\ \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2 \end{gathered}$$

对于下面的式子，我们有 $m_1 \left(V_1 + V_1'\right)\left(V_1 - V_1'\right) = m_2 \left(V_2' + V_2\right)\left(V_2' - V_2\right)$
而上面的式子可以得到 $m_1 \left(V_1 - V_1'\right) = m_2 \left(V_2' - V_2\right)$，代入之后可以得到 $V_1 + V_1' = V_2 + V_2'$
由上一问可以知道 $m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0$，于是 $V_2 = -\frac{m_1}{m_2} V_1$，解得 $V_2' = V_1 + V_1' + \frac{m_1}{m_2} V_1$
将这两个代入动量守恒可以得到 $V_1 = V_1'$ 接着得到 $V_2 = V_2'$

(d)

$$\begin{aligned} v_x &= V_2 \cos\phi + V_G \\ &= \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \cos\phi + \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \\ v_y &= V_2 \sin\phi \\ &= \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \sin\phi \\ \tan\Phi &= \frac{v_y}{v_x} \\ &= \frac{\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \sin\phi}{\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \cos\phi + \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}} \\ &= \frac{m_1 \sin\phi}{m_1 \cos\phi + m_2} \\ &= \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \frac{m_2}{m_1}} \end{aligned}$$

2

考虑入射和出射的 x 方向分解，$u_i=(u_0\cos\alpha,u_0\sin\alpha)$,$u_f=(-u_0\cos\alpha,u_0\sin\alpha)$
接着加入行星系的速度,$u_i'=(-V+u_0\cos\alpha,u_0\sin\alpha)$,$u_f'=(-V-u_0\cos\alpha,u_0\sin\alpha)$
另一方面，有 $\alpha=\dfrac{\pi-\theta}{2}$

$$\begin{aligned}\Delta K&=\frac{1}{2}m\left(u_f'^2-u_i'^2\right)\\&=\frac{1}{2}m\left((V+u_0\cos\alpha)^2+u_0^2\sin^2\alpha-(V-u_0\cos\alpha)^2-u_0^2\sin^2\alpha\right)\\&=\frac{1}{2}m\cdot 4Vu_0\cos\alpha\\&=2mu_0V\cos\alpha\\&=\sqrt{2}mu_0V\sqrt{1-\cos\theta}\end{aligned}$$

課題

逐步进行计算
首先重心速度为 $v_G=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$
于是重心系下 $\begin{cases}V_1=v_1-v_G=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)\\V_2=v_2-v_G=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_2-v_1)\end{cases}$
接着碰撞后仅发生了方向变化，于是我们有 $\begin{cases}V_1'=-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)\\V_2'=-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_2-v_1)\end{cases}$
然后再将重心系转为正常实验室惯性系 $\begin{cases}v_1'=V_1'+v_G=\dfrac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2}\\v_2'=V_2'+v_G=\dfrac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2}\end{cases}$

20241204

1

事实上这题只需要画出来图进行向量分解就能证明，但是这里不采用这种方法

事实上，在二维平面我们仅需要考虑基底向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的变化，换言之，我们需要做的仅仅是计算出其表现矩阵

对于第一个基，旋转 ϕ_0 后显然为 $\begin{pmatrix} \cos\phi_0 \\ \sin\phi_0 \end{pmatrix}$

而第二个旋转后利用诱导公式实际上就是 $\begin{pmatrix} -\sin\phi_0 \\ \cos\phi_0 \end{pmatrix}$

于是我们自然得到了表现矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{pmatrix}$，这便是旋转矩阵

这里也存在一个小歧义，事实上如果我们理解成将坐标系进行旋转而非旋转坐标系内元素的话确实是其所给出来的 $\begin{pmatrix} \cos\phi_0 & \sin\phi_0 \\ -\sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{pmatrix}$，因为这实际上相对于坐标系内点的顺时针旋转

2

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{x}'\cos\omega t - \omega x'\sin\omega t - \dot{y}'\sin\omega t - \omega y'\cos\omega t \\
&= \left(\dot{x}' - \omega y'\right)\cos\omega t - \left(\dot{y}' + \omega x'\right)\sin\omega t \\
\ddot{x} &= \left(\ddot{x}' - \omega\dot{y}'\right)\cos\omega t - \left(\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\sin\omega t - \left(\ddot{y}' + \omega\dot{x}'\right)\sin\omega t - \left(\omega\dot{y}' + \omega^2 x'\right)\cos\omega t \\
&= \left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' + \omega^2 x'\right)\cos\omega t - \left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\sin\omega t
\end{aligned}$$

省略掉 $\ddot{y}$ 部分的计算

3

根据第二问我们可以得到

$$\begin{aligned}
F_x &= m\left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)\cos\omega t - m\left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\sin\omega t \\
F_y &= m\left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)\sin\omega t + m\left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\cos\omega t
\end{aligned}$$

接着

$$\begin{aligned}
F_{x'} &= F_x\cos\omega t + F_y\sin\omega t \\
&= m\left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)\cos^2\omega t - m\left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\sin\omega t\cos\omega t \\
&+ m\left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)\sin^2\omega t + m\left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\sin\omega t\cos\omega t \\
&= m\left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)
\end{aligned}$$

因此 $m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x'$

$F_{y'}$ 同理可得

4

由上一问可以得到，y 方向的科里奥利力为 $-2m\omega\dot{x}$，而 $\dot{x}$ 由题设可得为 v

5

由第一问可以得到，对于坐标系的旋转有旋转矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\phi_0 & \sin\phi_0 \\ -\sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{pmatrix}$
因此 $\begin{cases} \mathbf{i}' = \cos\phi_0 \mathbf{i} + \sin\phi_0 \mathbf{j} \\ \mathbf{j}' = -\sin\phi_0 \mathbf{i} + \cos\phi_0 \mathbf{j} \end{cases}$
对两边进行求导 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{i}'}{\mathrm{d}t} = -\omega\sin(\omega t)\mathbf{i} + \omega\cos(\omega t)\mathbf{j} = \omega\mathbf{j}' \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{j}'}{\mathrm{d}t} = -\omega\cos(\omega t)\mathbf{i} - \omega\sin(\omega t)\mathbf{j} = -\omega\mathbf{i}' \end{cases}$

6

显然上式由第五问可以直接得到，因此只需要考虑下式
接着从第三问可以知道 $\begin{cases} m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x' \\ m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y' \end{cases}$
显然这里的 x', y' 以及其导数都是向量而非标量，因此我们只需要将其相加就可以，而只有科里奥利力项无法直接相加，因此我们只需要证明 $2m\omega\dot{y}' - 2m\omega\dot{x}' = -2m\omega \times v'$
而这对于二维叉乘是显然的

課題

考虑旋转坐标系下的运动方程 $m\ddot{x}' = m\omega^2 x'$
显然这个微分方程的解是 $x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$
代入初值可得 $A = B = \dfrac{a}{2}$
因此 $x = \dfrac{a}{2}e^{\omega t} + \dfrac{a}{2}e^{-\omega t} = a\cosh(\omega t)$
那么 $S = 2m\omega\dot{x}' = 2m\omega^2 a\sinh(\omega t)$

20241209

1

上次原题，不重复作答

2

这题似乎不是个问题，不知道要证明什么，显然这个正交性是基底的性质

3

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i}'\right) &= 2\mathbf{i}'\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}' \\
&= 0 \\
\mathbf{i}'\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}' &= 0 \\
\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}' &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}'\right) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{i}'}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{j}' + \mathbf{i}'\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{j}'}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}'}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{j}' + \mathbf{i}'\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{j}'}{\mathrm{d}t} &= 0
\end{aligned}
$$

4

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} &= x'\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}'}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\mathbf{j}'}{\mathrm{d}t} + z'\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}'}{\mathrm{d}t} \\
&= x'\left(\omega_{11}\mathbf{i}' + \omega_{12}\mathbf{j}' + \omega_{13}\mathbf{k}'\right) + y'\left(\omega_{21}\mathbf{i}' + \omega_{22}\mathbf{j}' + \omega_{23}\mathbf{k}'\right) + z'\left(\omega_{31}\mathbf{i}' + \omega_{32}\mathbf{j}' + \omega_{33}\mathbf{k}'\right) \\
&= \left(x'\omega_{11} + y'\omega_{21} + z'\omega_{31}\right)\mathbf{i}' + \left(x'\omega_{12} + y'\omega_{22} + z'\omega_{32}\right)\mathbf{j}' + \left(x'\omega_{13} + y'\omega_{23} + z'\omega_{33}\right)\mathbf{k}'
\end{aligned}
$$

到这一步实际上已经可以证明了，为了方便解释这里不写在上面，我们采取逐步分析的方式来解释. 对于这堆 ω，我们由第三问可以知 ω_{ij} 是个反对称矩阵

$$
\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}
$$

将其代入上面的表达式，显然这就是 $\omega\times\mathbf{r}$

5

图略

課題

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_{x'}\mathbf{i}' + A_{y'}\mathbf{j}' + A_{z'}\mathbf{k}'\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_{x'}\mathbf{i}' + A_{x'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_{y'}\mathbf{j}' + A_{y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_{z'}\mathbf{k}' + A_{z'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}' \\
&= \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\mathbf{A} + A_{x'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}' + A_{y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}' + A_{z'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}' \\
&= \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\mathbf{A} + \omega\times\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

显然最后一个等号由上面的第四问已经证明了

20241211

1

首先考虑速度，我们有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_0 + \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}r' + \omega \times r'$
接着我们计算加速度

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r_0 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r' \\ &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r_0 + 2\omega \times \frac{\mathrm{d}^* r'}{\mathrm{d}t} + \dot{\omega} \times r' + \omega \times \left(\omega \times r'\right)\end{aligned}$$

代入运动方程即可得

2

$T = 86400 \cdot 365.24 \cdot \frac{1}{366.24} \simeq 86164.09s$

$$\begin{aligned}a &= \omega^2 R \cos\theta \\ &= \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos\theta \\ &= \frac{4\pi^2}{86164.09^2} \cdot 6400000 \cdot \cos\frac{36}{180}\pi \\ &= 2.75 \times 10^{-2} m/s^2\end{aligned}$$

3

我们先在该坐标系内表示出角速度:

$$\omega = \begin{pmatrix} -\omega\cos\lambda \\ 0 \\ \omega\sin\lambda \end{pmatrix}$$

那么科里奥利力应当是 $F = -2m\omega \times v$

$$\begin{aligned}\omega \times v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \\ &= -\dot{y}\omega\sin\lambda\mathbf{i} + \left(\dot{x}\omega\sin\lambda + \dot{z}\omega\cos\lambda\right)\mathbf{j} - \dot{y}\omega\cos\lambda\mathbf{k}\end{aligned}$$

接着代入上面的科里奥利力表达式考虑 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 方向的分力显然就是所给出的运动方程

4

显然，竖直方向上 $z = h - \frac{1}{2}gt^2$
接着我们考虑科里奥利力

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= 2\omega\cos\lambda\dot{z} \\ &= -2\omega g t\cos\lambda \\ &= -2\omega g\cos\lambda\sqrt{\frac{2\left(h-z\right)}{g}}\end{aligned}$$

这里如果继续用 $t=\sqrt{\dfrac{2\left(h-z\right)}{g}}$ 进行积分的话过于繁琐，因此先按照 t 进行积分

$$\begin{aligned}\dot{y}&=\int\left(-2\omega g\cos\lambda\right)t\mathrm{d}t\\&=-\omega g\cos\lambda t^2+C_1\end{aligned}$$

代入初值 $\dot{y}\left(0\right)=0$ 有 $C_1=0$，因此 $\dot{y}=-\omega g\cos\lambda t^2$
接着再次积分

$$\begin{aligned}y&=\int\left(-\omega g\cos\lambda t^2\right)\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{3}\omega g\cos\lambda t^3+C_2\end{aligned}$$

代入初值 $y\left(0\right)=0$ 得到 $C_2=0$，因此 $y=-\dfrac{1}{3}\omega g\cos\lambda t^3=\dfrac{1}{3}\omega g\cos\lambda\left(\dfrac{2\left(h-z\right)}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$
最后这个等号选择省略掉符号是因为坐标系选取导致的负号，因此省略掉也无妨

5

直接代入上一问的公式

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{3}\omega g\cos\lambda\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\pi}{86164.09}\cdot 9.8\cdot\cos\left(\frac{36}{180}\pi\right)\cdot\left(\frac{2\cdot 630}{9.8}\right)^{\frac{3}{2}}\\&=2.81\times 10^{-1}m\end{aligned}$$

考虑自转方向，向东偏移 0.281m

6

由于仅需要定性分析，注意到速度方向一个向上一个向下，我们按照计算过程可以知道 y 方向的偏移也是相反的

課題

按照第四问的思路从头推导

$$
\begin{aligned}
\omega &= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\lambda \\ \omega\sin\lambda \end{pmatrix} \\
z\left(t\right) &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\
\ddot{y} &= -2\omega\cos\lambda \dot{z} \\
&= -2\omega\cos\lambda\left(v_0 - gt\right) \\
\dot{y} &= -2\omega\cos\lambda\left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right) + C_1 \\
&= -2\omega\cos\lambda\left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right) + v_0 \\
y &= \int\left(-2\omega\cos\lambda\left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right) + v_0\right)\mathrm{d}t \\
&= -2\omega\cos\lambda\left(\frac{1}{2} v_0 t^2 - \frac{1}{6} g t^3\right) + v_0 t + C_2 \\
&= -2\omega\cos\lambda\left(\frac{1}{2} v_0 t^2 - \frac{1}{6} g t^3\right) + v_0 t
\end{aligned}
$$

20241216

1

2

3

課題

1

2

参考文献