Contents

1 復習

Def 1. X, Y を集合とする.

$$\begin{aligned} A\cup B &:= \{x\in X | x\in A \vee x\in B\} \\ A\cap B &:= \{x\in X | x\in A \wedge x\in B\} \\ A\backslash B &:= \{x\in X | x\in A \wedge x\notin B\} \\ A^c &:= X\backslash A = \{x\in X | x\notin A\} \end{aligned}$$

Def 2. 直積

$$X\times Y := \{(x,y) | x\in X \wedge y\in Y\}$$

ここで、(x,y) は x, y の順序対、言い換えれば $(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\}$

Def 3. 像・逆像
$f: X\to Y$ に対し

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{y\in Y | \exists x\in A, y=f(x)\} = \{f(x) | x\in A\} \\ f^{-1}(B) &:= \{x\in X | f(x)\in B\} \end{aligned}$$

Def 4. 同値関係・商集合
以下すべての条件を満たす二項関係 $\sim$ は同値関係である:

- （反射律）$(\forall x\in X)[x\sim x]$
- （対称律）$(\forall x,y\in X)[x\sim y \Rightarrow y\sim x]$
- （推移律）$(\forall x,y,z\in X)[x\sim y \wedge y\sim z \Rightarrow x\sim z]$

X に同値関係 $\sim$ が与えられたとき、$x\in X$ に対し

$$C(x) := \{y\in X | x\sim y\}$$

を x の**同値類**という. また、同値類全体の集合

$$X/\sim := \{C\subset X \big| C \text{ は } \sim \text{ による同値類}\}$$

を X の $\sim$ による**商集合**という. なお、全射

$$\begin{aligned} \pi: X &\to X/\sim \\ x &\mapsto C\,(=C(x)) \end{aligned}$$

を**自然な射影**という.

Def 5. $S\subset \mathbb{R}$ とする.

- S が上（下）に有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists a\in\mathbb{R})[S\subset[a,\infty)]$ または $(\exists b\in\mathbb{R})[S\subset(-\infty,b]]$
- S が有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ S が上に有界 $\wedge$ 下に有界
- $\inf S := \max\{a\in\mathbb{R} | S\subset[a,\infty)\}, \sup S := \min\{b\in\mathbb{R} | S\subset(-\infty,b]\}$

Def 6. $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し、x,y の Euclid **距離**は

$$|x-y|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2}$$
$$\left(=d^{(n)}(x,y)\right)$$

Def 7. $\epsilon-$ 近傍 $B_n(x,\epsilon)$
$\epsilon>0$ とする. $x\in\mathbb{R}^n$ の $\epsilon-$ **近傍** $B_n(x,\epsilon)\subset\mathbb{R}^n$ を

$$B_n(x,\epsilon):=\{y\in\mathbb{R}^n||y-x|<\epsilon\}$$

で定める

Def 8. $A\subset\mathbb{R}^n,x\in\mathbb{R}^n$

- x が A の**内点** $\iff\exists\epsilon_0>0,s.t.B_n(x,\epsilon_0)\subset A$
- x が A の**外点** $\iff x$ が A^c の内点である
- x が A の**触点** $\iff\forall\epsilon>0,B_n(x,\epsilon)\cap A\neq\emptyset$
- x が A の**境界点** $\iff x$ が A の触点、かつ A^c の触点である
- A の内部 $A^i:=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|x\text{ は }A\text{ の内点}\right\}$
- A の閉包 $\overline{A}:=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|x\text{ は }A\text{ の触点}\right\}$

Def 9. 開集合・閉集合

- A が $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\iff A=A^i$、言い換えれば、A に属するすべての点が A の内点でもある
- A が $\mathbb{R}^n$ の閉集合 $\iff A=\overline{A}$、言い換えれば、A のすべての触点が A に属することである

2 距離空間

ユークリッド距離空間: 慣れているユークリッド距離
$\longrightarrow$ 距離空間: より一般的な距離
$\longrightarrow$ 距離空間での写像の連続性について:
全く同じ写像でも距離の入れ方によって連続になったり不連続になったりする
同じ集合上に異なる距離を入れたときどの距離で考えても写像の連続性が全く同じになったりする
定理: 距離空間の開集合系のもつ三つの性質
$\longrightarrow$ 位相空間: 集合に位相構造を入れたもの

Def 10. A, B: 位相空間
A と B が同相 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists f : A \to B$ 全単射で f と f^{-1} が連続

e.g. 1. 直線 $\mathbb{R} \not\simeq$ 平面 $\mathbb{R}$
$\because$ 直線は（弧状）連結でないが平面は連結である

一般の $\mathbb{R}^n$ の 2 点 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ に対するユークリッド距離は

$$d_2^{(n)}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Def 11. X を空でない空間とする. 写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が以下の性質を満たすとき、d は X 上の距離（または距離関数）であるという

(1)（正定性）$\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$ であり、$d(x, y) = 0 \iff x = y$

(2)（対称性）$\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$

(3)（三角不等式）$\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

このとき、(X, d) を距離空間という. また、これらの性質は距離の公理という

e.g. 2. $\mathbb{R}^n$ 上の代表的な距離:

· ユークリッド距離 $d_2^{(n)}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

· マンハッタン距離 $d_1^{(n)}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

· チェビシェフ距離 $d_\infty^{(n)}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$

· 離散距離

3 距離空間の用語

Def 12. (X,d): 距離空間
$a \in X, \epsilon > 0$ に対して、$N(a,\epsilon) = \{x \in X | d(a,x) < \epsilon\}$ を点 a の $\epsilon-$ 近傍という

e. g. 3. 離散距離空間 (X,d)

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Def 13. (X,d): 距離空間、$A \subset X, A^c = X \backslash A$

- $a \in X$ が A の内点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \epsilon > 0, s.t. N(a,\epsilon) \subset A$ or $N(a,\epsilon) \cap A^c = \emptyset$
  A の内部全体の集合を A の内部といい、A^i で表す
- $a \in X$ が A の外点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \epsilon > 0, s.t. N(a,\epsilon) \cap A = \emptyset$ or $N(a,\epsilon) \subset A^c$
  A の外部全体の集合を A の外部といい、A^e で表す $A^e = \left(A^i\right)^i$
- $a \in X$ が A の境界点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \epsilon > 0, N(a,\epsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge N(a,\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ or $a \notin A^i \wedge a \notin A^e$
  A の境界点全体の集合を A の境界といい、A^f または ∂A で表す　$A^f = (A^c)^f$

$\longrightarrow X = A^i \bigsqcup A^e \bigsqcup A^f$

- $a \in X$ が A の触点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \epsilon > 0, N(a,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$
  A の触点全体の集合を A の閉包といい、$\overline{A}$ で表す

$\overline{A} = A^i \bigsqcup A^f, A^i \subset A \subset \overline{A}$

Def 14. (X,d): 距離空間, $A \subset X$

- A が (X,d) の開集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} A^i = A$
- A が (X,d) の閉集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \overline{A} = A$

Prop 1. (X,d): 距離空間、$A \subset X, B \subset X$

- $\left(A^i\right)^i = A^i$
- $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$
- $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$
- $(A \cup B)^i \supset A^i \cup A^i$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Prop 2. ・ A^i は A に含まれる最大の開集合

- $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合
- 開集合の補集合は閉集合
- 閉集合の補集合は開集合

Def 15. (X,d) の開集合全体の集合 $\mathfrak{O}=\left\{O\subset X\middle|O\text{は}\,(X,d)\,\text{の開集合}\right\}$ を (X,d) の開集合系という
(X,d) の閉集合全体の集合 $\mathfrak{F}=\left\{F\subset X\middle|F\text{は}\,(X,d)\,\text{の閉集合}\right\}$ を (X,d) の閉集合系という

e.g. 4. 距離空間 $(X,d)\,,a\in X,\epsilon>0$ に対し、$N(a,\epsilon)=\{x\in X|d(a,X)<\epsilon\}$ は (X,d) の開集合

Proof. $x\in N(a,\epsilon)$ に対して、$\exists\delta>0,s.t.N(x,\delta)\subset N(a,\epsilon)$ を示せばいい
$d(a,x)<\epsilon,\delta=\epsilon-d(a,x)>0$ とおく
$\forall y\in N(x,\delta)\,,d(a,y)\leq d(a,x)+d(x,y)<d(a,x)+\delta=\epsilon$
よって、$y\in N(a,\epsilon)$ より $N(x,\delta)\subset N(a,\epsilon)$ □

e.g. 5. (X,d) 距離空間、$\forall a\in X$ に対して $X\backslash\{a\}$ は (X,d) の開集合

Proof. $\forall x\in X\backslash\{a\}\,,\exists\epsilon>0,s.t.N(x,\epsilon)\subset X\backslash\{a\}$ を示す
$\forall x\in X\backslash\{a\}\,,\epsilon=d(a,x)>0$ とすると $N(x,\epsilon)\cap\{a\}=\emptyset$
つまり $N(x,\epsilon)\subset X\backslash\{a\}$.
よって $X\backslash\{a\}$ は (X,d) の開集合 □

e.g. 6. (X,d) 距離空間、$\forall a\in X$ に対して、一点集合 $\{a\}$ は (X,d) の閉集合

Proof. 上の例より、補集合 $\{a\}^c=X\backslash\{a\}$ は (X,d) の開集合 □

Prop 3. 距離空間 (X,d) の開集合系 $\mathcal{O}_d=\left\{O\subset X\middle|O\text{は}\,(X,d)\,\text{の開集合}\right\}$ は次の性質を満たす

$(O1)$ $\emptyset\in\mathcal{O}_d,X\in\mathcal{O}_d$

$(O2)$ $O_1,O_2\in\mathcal{O}_d$ ならば $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}_d$

$(O3)$ $O_\lambda\in\mathcal{O}_d\,(\lambda\in\Lambda)\Longrightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\in\mathcal{O}_d$

Prop 4. 距離空間 (X,d) の閉集合系 $\mathcal{F}_d=\left\{F\subset X\middle|F\text{は}\,(X,d)\,\text{の閉集合}\right\}$ は次の性質を満たす

$(F1)$ $\emptyset\in\mathcal{F}_d,X\in\mathcal{F}_d$

$(F2)$ $F_1,F_2\in\mathcal{F}_d$ ならば $F_1\cup F_2\in\mathcal{F}_d$

$(F3)$ $F_\lambda\in\mathcal{F}_d\,(\lambda\in\Lambda)\Longrightarrow\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\in\mathcal{F}_d$

$(O1)$ と $(F1)$ より、$\emptyset,X$ は開集合であり、かつ閉集合でもある.

e.g. 7. $(\mathbb{R},d_2)$ において、$n\in\mathbb{Z}_+$ に対して、$F_n=\left[\frac{1}{n},1\right]$ とすると、F_n は閉集合.

が、$\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=(0,1]$ は閉集合でない

4 距離空間の近傍系と連続写像

Def 16. (X,d) 距離空間、$U \subset X$、U が $a \in X$ の近傍である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ a が U の内点である

$$\Longleftrightarrow \exists \epsilon > 0, s.t. N(a,\epsilon) \subset U$$

点 a の近傍全体の集合を a の近傍系とよび、$\mathcal{N}(a)$(or $\mathcal{N}_X(a)$) で表す

Prop 5. (X,d) 距離空間、$U \subset X$
U は (X,d) の開集合 $\Longleftrightarrow$ $\forall a \in U, U$ は a の近傍

Proof. U は X の開集合

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow U = U^i \\ &\Longleftrightarrow U \subset U^i \\ &\Longleftrightarrow \left(\forall x \in U \longrightarrow x \in U^i\right) \\ &\Longleftrightarrow U \text{ の全ての点 } a \text{ に対し、} U \text{ は } a \text{ の近傍} \end{aligned}$$

□

Def 17. $(X,d_X),(Y,d_Y)$: 距離空間. $f: X \to Y$ を写像とする

(1) f が X の点 a で連続 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. x \in X, d_X(a,x) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(a),f(x)) < \epsilon$

(2) f が連続である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f が X の各点で連続である

5 開基と基本近傍系

$S \subset P(X)$ に対して、$\mathcal{O}(S)$ は具体的に何
$S' = \left\{ \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \middle| A_\lambda \in S, \Lambda\text{は有限} \right\}$. $\Lambda = \emptyset$ のときも考え、$X \in S'$である. 明らかに $S \subset S'$
$S'' = \left\{ \bigcup_{\mu\in M} B_\mu \middle| B_\mu \in S', M\text{の濃度は任意} \right\}$
$M = \emptyset$ のときも考え、$\emptyset \in S'$ である. また、明らかに $S' \subset S''$
以上より、$S \subset S' \subset S''$ 必ず位相になり、それぞれ $\mathcal{O}(S)$ の準開基、開基、$\mathcal{O}(S)$
よって、S'' は S を含む位相. また、S を含む任意の位相を $\mathcal{O}$ とすれば $S' \subset \mathcal{O}, S'' \subset \mathcal{O}$
よって、S'' は S を含む位相のうち最小のもの.

Rem 1. S が位相のときは $\mathcal{O}(S) = S$

e.g. 8. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{d_2})$ において、$S_1 = \{(-\infty, a), (a, \infty) | a \in \mathbb{R}\}$ は準開基であり、開基ではない
$S_2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ は開基である

Prop 6. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$: 位相空間
$S : \mathcal{O}_Y$ の準開基、$f : X \to Y$ 写像

$$
\begin{aligned}
f \text{が連続} &\overset{def}{\iff} \forall O \in \mathcal{O}_Y, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X \\
&\iff \forall U \in S, f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X
\end{aligned}
$$

Proof. $(\Longrightarrow)$
$S \subset \mathcal{O}_Y = O(S)$ より明らか
$(\Longleftarrow)$
$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ となるような $U \in P(Y)$ 全体を $S' = \left\{ U \middle| f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \right\}$ とすると、仮定より $S \subset S'$
よって、S' が Y の位相であることを示せばいい

(O1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_X, f^{-1}(Y) = x \in \mathcal{O}_X$ より $\emptyset, Y \in S'$

(O2) $U_1, U_2 \in S$ とすると、$f^{-1}(U_1) \in \mathcal{O}_X, f^{-1}(U_2) \in \mathcal{O}_X$ であり、$f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \in \mathcal{O}_X$

(O3) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset S'$ とすると $\forall \lambda \in \Lambda, f^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{O}_X$ であり、$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{O}_X$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in S'$

□

Def 18. $(X, \mathcal{O})$: 位相空間、$x \in X$
$\mathcal{N}(x)$: x の近傍系、$\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x)$

$$
\mathcal{B}(x) \text{ が } x \text{ の基本近傍系} \overset{def}{\iff} \forall N \in \mathcal{N}(x), \exists B \in \mathcal{B}(x), s.t. B \subset N
$$

e.g. 9. (X, d): 距離空間、$x \in X$

(1) $\{M(x, r) | r > 0\}$ は x の基本近傍系

(2) $\left\{ N\left(x, \frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$ も x の基本近傍系

Proof. (1) x の近傍 N を任意にとる. このとき定義より、$x \in N^i$ から $N(x, r_0) \subset N$ をみたす $r_0 > 0$ が存在する. よって、$\mathcal{B}(x) = \{N(x, r) | r > 0\}$ は x の基本近傍系

(2) (1) より、$N(x, r_0) \subset N$ をみたす $r_0 > 0$ が存在する．このとき $m > \dfrac{1}{r_0}$ をみたす $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ をとると $N\left(x, \dfrac{1}{m}\right) \subset N(x, r_0) \subset N$ より、$B_2(x) = \left\{ N\left(x, \dfrac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$ も x の基本近傍系

□

6 可算公理と可分性

Prop 7. 第 2 可算公理とみたす位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は可分である

Proof. 第 2 可算公理をみたすので、高々可算個の開集合からなる開基 $\mathcal{B} = \{B_n | n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ が存在する. 空でない各 B_n に対して、一点 $x_n \in B_n$ を選ぶと、$A = \{x_n \in B_n | B_n \in \mathcal{B}, B_n \neq \emptyset\}$ は高々可算
示したいのは高々可算かつ稠密な部分集合をもつこと. $\forall \emptyset \neq U \in \mathcal{O}$ に対し、$\mathcal{B}$ は開基により、ある $B_k \in \mathcal{B}\,(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ が存在して、$B_k \subset U$.
このとき、$A \ni x_k \in B_k \subset U$ より $x_k \in A \cap U$ から $U \cap A \neq \emptyset$. よって $\overline{A} = X$（A は稠密） □

Rem 2. 一般に逆は成り立たないが距離空間なら成り立つ

Prop 8. 可分距離空間は第 2 可算公理をみたす

Proof. (X, d): 距離空間
距離 d から定まる位相 $\mathcal{O}_d$ に関して可分とする. $(X, \mathcal{O}_d)$ は可分なので、$\overline{A} = X$ をみたす高々可算な部分集合 $A = \{x_n | n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ が存在する. ここで $\mathcal{B} = \left\{ N\left(x_n, \dfrac{1}{m}\right) \middle| x_n \in A, m \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$ と定まると、$\mathcal{B}$ は高々可算である. この $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}_d$ の開基であることを示せばいい. $\forall U \in \mathcal{O}_d, \forall x \in U$ に対して、x は開集合 U の点より $N(x, r) \subset U$ をみたす実数 $r > 0$ が存在し、$m_0 \geq \dfrac{2}{r}$ をみたす $m_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ も存在する. $\overline{A} = X$ より $N\left(x, \dfrac{1}{m_0}\right) \cap A \neq \emptyset$. よって $x \in N\left(x_{n_0}, \dfrac{1}{m_0}\right)$.
また $\forall y \in N\left(x_{n_0}, \dfrac{1}{m_0}\right)$ に対し、$d(x, y) \leq d(x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y) < \dfrac{1}{m_0} + \dfrac{1}{m_0} = \dfrac{2}{m_0}$ より $y \in N\left(x, \dfrac{2}{m_0}\right)$. よって、$N\left(x_{n_0}, \dfrac{1}{m_0}\right) \subset N\left(x, \dfrac{2}{m_0}\right)$ であり、$N\left(x_{n_0}, \dfrac{1}{m_0}\right) \subset U$ が言える. 以上より $\forall U \in \mathcal{O}, \forall x \in U, x \in N\left(x_{n_0}, \dfrac{1}{m_0}\right)$ かつ $N\left(x_{n_0}, \dfrac{1}{m_0}\right) \subset U$ をみたす $N\left(x_{n_0}, \dfrac{1}{m_0}\right) \in \mathcal{B}$ が存在するので、$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}_d$ の開基である □

7 積位相と積空間

Def 19. $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$: 位相空間
$X_1 \times X_2$ の部分集合族 $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 | U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2\}$ により生成される位相を $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ の積位相といい、$\mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$ で表す.
位相空間 $(X_1 \times X_2, \mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2)$ を $(X_1, \mathcal{O}_1)$ と $(X_2, \mathcal{O}_2)$ の積空間といい、$(X_1, \mathcal{O}_1) \times (X_2, \mathcal{O}_2)$ で表す

$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 | U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2\}$ より $U_1 \times U_2 \in \mathcal{B}$ は $X_1 \times X_2$ の開集合. また、$U_1 \times U_2, U_1' \times U_2' \in \mathcal{B}$ ならば $(U_1 \times U_2) \cap (U_1' \times U_2') = (U_1 \cap U_1') \times (U_2 \cap U_2') \in \mathcal{B}$
よって、$\mathcal{B}$ で生成される位相とは $\mathcal{B}$ の要素の和集合として表されるものたち

Prop 9. $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$: 位相空間
射影 $p_1 : X_1 \times X_2$

Proof. (1)
$\mathcal{B}$ は開基より、$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$
$\forall U_1 \in \mathcal{O}_1, p_1^{-1}(U_1) \in \mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$ を示せばいい.
$\forall U_1 \in \mathcal{O}_1$

$$\begin{aligned} p_1^{-1}(U_1) &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 | p_1(x_1, x_2) \in U_1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 | x_1 \in U_1\} \\ &= U_1 \times X_2 \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

より、$p_1^{-1}(U_1) \in \mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$. よって p_1 は $(X_1 \times X_2, \mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2)$ から $(X_1, \mathcal{O}_1)$ への連続写像. p_2 も同じ
(2)
$\mathcal{O}$ を $X_1 \times X_2$ の位相とし、$i = 1, 2$ に対して p_i は $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ から $(X_1, \mathcal{O}_i)$ への連続写像とする. $\forall U \in \mathcal{B}, U = U_1 \times U_2$ をみたす $U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2$ が存在する
(2)

□

Def 20. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$: 位相空間、$f : X \to Y$ 写像
$\forall U \in \mathcal{O}_X$、$f(U) \in \mathcal{O}_Y$ となるとき f を $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への開写像という

Prop 10. $\mathcal{B} : \mathcal{O}_X$ の開基
$\forall U \in \mathcal{B}, f(U) \in \mathcal{O}_Y$ となるとき、f は $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への開写像

Proof. $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}_X$ の開基なので、$\forall U \in \mathcal{O}_X, U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となるような $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{B}$ が存在する.
このとき $f(U) = f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(U_\lambda)$
ここで、$U_\lambda \in \mathcal{B}$ であり、仮定より $f(U_\lambda) \in \mathcal{O}_Y$
開集合の和集合より、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(U_\lambda) \in \mathcal{O}_Y$ なので $f(U) \in \mathcal{O}_Y$
$\forall U \in \mathcal{O}_X, f(U) \in \mathcal{O}_Y$ がいえたので f は開写像 □

Prop 11. $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$: 位相空間, $(X_1 \times X_2, \mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2)$: 積空間
このとき、射影 $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ は開写像である

Proof. $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 | U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2\}$ は $\mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$ の開基なので、$\forall U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2$

$$\begin{aligned} p_1(U_1 \times U_2) &= \{x_1 \in X_1 | (x_1, x_2) \in U_1 \times U_2\} \\ &= U_1 \in \mathcal{O}_2 \end{aligned}$$

p_2 も同様なので □

8 商位相と商空間

Def 21. $(X, \mathcal{O})$: 位相空間、$Y \neq \emptyset$、$f : X \to Y$: 写像
$\mathcal{O}(f) : \left\{A \in \mathcal{P}(Y) \middle| f^{-1}(A) \in \mathcal{O}\right\}$ は Y の位相であり、f による $\mathcal{O}$ の像位相である

参考文献