20240918

1

a

$$\begin{cases}\vec{F}_{21} = m_1 \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} \\ \vec{F}_{12} = m_2 \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$

b

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

c

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= \text{一定} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) &= 0 \\ m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

d

显然我们有重心速度

$$\vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

由上述问题注意到分子为定值，因此其只能为静止或匀速直线运动其一

2

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ \int \vec{F}\mathrm{d}t &= \Delta m\vec{v} \end{aligned}$$

显然等号左边是力积而右边是动量的变化量

3

$$\begin{cases} v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9.8\cdot 1} = 4.43m/s \\ J = m\cdot v = 2\cdot 4.43 = 8.86kg\cdot m/s \\ F = \dfrac{J}{t} = \dfrac{8.86}{1} = 8.86N \end{cases}$$

4

(a)

$$\begin{cases} v\left(t\right) = v_0 - gt \\ y\left(t\right) = y_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(b)

$$-mg + bv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

注意到在终端速度时，其加速度可近似看作 0

因此运动方程可看作 $-mg + bv_\infty^2 = 0$，于是易得 $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{b}}$

(c)

注意到空气阻力和重力同向，因此有

$$-mg - bv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

課題

$$\begin{aligned}
-mg - bv &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
\mathrm{d}t &= -\frac{m}{mg+bv}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= -\int \frac{m}{mg+bv}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= -\int \frac{1}{g+\frac{b}{m}v}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

在这里令 $\frac{b}{m}v = u$

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}t &= -\frac{m}{b}\int \frac{1}{g+u}\mathrm{d}u \\
t + C &= -\frac{m}{b}\log\left(g+u\right) \\
t + C &= -\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)
\end{aligned}$$

我们代入初值 $v\left(0\right) = v_0$

$$0 + C = -\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right)$$

将 $C=-\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right)$ 代入到原方程我们可以得到

$$
\begin{aligned}
t-\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right) &= -\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)\\
\frac{bt}{m}-\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right) &= -\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right) &= \frac{g+\frac{b}{m}v_0}{g+\frac{b}{m}v}\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)g+\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\frac{b}{m}v &= g+\frac{b}{m}v_0\\
\frac{b}{m}\exp\left(\frac{bt}{m}\right)v &= \left(1-\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\right)g+\frac{b}{m}v_0\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)v &= \frac{m}{b}\left(1-\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\right)g+v_0\\
v &= \frac{m}{b}\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}-1\right)g+\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}v_0
\end{aligned}
$$

而我们注意到

$$
\begin{aligned}
v_\infty &= \lim_{t\to\infty} v\left(t\right)\\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{m}{b}\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}-1\right)g+\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}v_0\right)\\
&= -\frac{mg}{b}
\end{aligned}
$$

20240923

1

(a)

首先我们考虑垂直抗力为 $N = mg\cos\theta$，因此摩擦力为 $\mu' mg\cos\theta$
接着是沿斜坡向下（即 x 轴正方向）的受力为 $mg\sin\theta$
因此我们可以得到运动方程为 $mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$

(b)

由于题目并未涉及到斜坡长度问题，因此我们可以简单认为加速度为负即可
根据运动方程我们可以得到，$g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right) < 0$
这等价于 $\mu' > \tan\theta$

(c)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g\sin\theta - \mu' g\cos\theta \\
\mathrm{d}t &= \frac{1}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= \int \frac{1}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}\mathrm{d}v \\
t + C &= \frac{v}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}
\end{aligned}
$$

考虑初值 $v(0) = v_0$，有

$$
C = \frac{v_0}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}
$$

再代回原方程，得到

$$
\begin{aligned}
t + \frac{v_0}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta} &= \frac{v}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta} \\
v &= v_0 + gt\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \int v\mathrm{d}t \\
&= \int v_0 + gt\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)\mathrm{d}t \\
&= v_0 t + \frac{1}{2}g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)t^2 + C
\end{aligned}
$$

由于 $x(0) = 0$，因此 $C = 0$
于是，$x = v_0 t + \dfrac{1}{2}g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)t^2$

2

$$
\begin{aligned}
-kx &= m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\
-ke^{\lambda t} &= m\lambda^2 e^{\lambda t} \\
\lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\
\lambda &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}
$$

于是 $x = \exp\left(\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$，因此角振动数 ω 就是中间的 $\sqrt{\frac{k}{m}}$
其实是找 $i\omega t$ 的 ω
因此
$\begin{cases} x\left(t\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v\left(t\right) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$
代入 $x\left(t\right) = x_0, v\left(0\right) = 0$
$\begin{cases} x_0 = A \\ 0 = B\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow B = 0 \end{cases}$
综上

$$
\begin{aligned}
x\left(t\right) &= x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
v\left(t\right) &= -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)
\end{aligned}
$$

3

(a)

$$
\begin{aligned}
v_x &= -r\omega\sin\omega t \\
v_y &= r\omega\cos\omega t
\end{aligned}
$$

显然我们可以注意到，$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = r^2\omega^2$，因此 $v = r\omega$

(b)

$$
\begin{aligned}
a_x &= -r\omega^2\cos\omega t \\
a_y &= -r\omega^2\sin\omega t
\end{aligned}
$$

注意到，加速度方向与位置方向差别仅为负号，因此如果考虑从原点出发到位置的方向的话，加速度方向就是位置方向出发到原点. 而大小则显然是 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$

(c)

$$
\begin{aligned}
f_x &= -mr\omega^2 \cos{(\omega t)} \\
f_y &= -mr\omega^2 \sin{(\omega t)}
\end{aligned}
$$

同样的，受力的方向与位置坐标的方向差别仅为负号，因此其受力指向原点
$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = m\omega^2 r$

(d)

$\begin{cases} v = r\omega \\ a = \omega^2 r \end{cases} \quad \Rightarrow a = \dfrac{v^2}{r}$

課題

1

注意到在微小角度位移的情况下，复原力为 $-mg\sin\theta$
另一方面，其切向加速度可以看作弧长 $l\theta$ 对时间的二阶微分，这即 $l\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
因此运动方程为 $ml\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta$

$$
\begin{aligned}
ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -mg\sin\theta \\
l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -g\sin\theta \\
l\lambda^2 e^{\lambda t} &= -g\sin\left(e^{\lambda t}\right)
\end{aligned}
$$

显然这样是无法直接进行求解的，因此我们考虑小角度下的近似：$\sin\theta = \theta$

$$
\begin{aligned}
l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -g\theta \\
l\lambda^2 e^{\lambda t} &= -ge^{\lambda t} \\
\lambda^2 &= -\frac{g}{l} \\
\lambda &= \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}
\end{aligned}
$$

于是我们得到了 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$
因此周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

2

由于张力 S 的竖直方向分力等于重力，因此 $S\cos\theta = mg$，即 $S = \dfrac{mg}{\cos\theta}$
另一方面这是圆锥摆，因此其向心力 f 为张力 S 的水平分力，因此 $f = S\sin\theta = mg\tan\theta$

$$
\begin{aligned}
mg &= m\omega^2 l\cos\theta \\
mg &= m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l\cos\theta \\
\frac{g}{l\cos\theta} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \\
T^2 &= 4\pi^2\frac{l\cos\theta}{g} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}
\end{aligned}
$$

20240925

1

(a)

在水平方向上，由于没有受力因此可以简单认为

$$x(t) = v_{x0}t$$

在铅直方向上由于仅受到重力作用因此

$$\begin{aligned} y(t) &= v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= v_{y0} \cdot \frac{x(t)}{v_{x0}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x(t)}{v_{x0}}\right)^2 \\ &= -\frac{g}{2v_{x0}^2}x^2(t) + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x(t) \end{aligned}$$

显然，这是一条抛物线

(b)

y 达到最大的时候，其向上的速度是 0. 因此我们有 $t = \dfrac{v_{y0}}{g}$
此时

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{x0}v_{y0}}{g} \\ y &= \frac{v_{y0}^2}{2g} \end{aligned}$$

(c)

我们用 v_0 来重新表示其水平方向上和铅直方向上的运动

$$\begin{aligned} x &= v_0 t\cos\theta_0 \\ y &= v_0 t\sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

影响水平飞行距离的是飞行时间，而时间与竖直方向速度减到 0 的时间有关

$$t = \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

于是水平方向能达到的最远距离为

$$\begin{aligned} x_{max} &= 2v_0 \cdot \frac{v_0\sin\theta_0}{g} \cdot \cos\theta_0 \\ &= \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 \\ &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0 \end{aligned}$$

因此我们可以知道，若 x_{max} 取最大，则 $2\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}$

課題

在水平方向上

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -\beta m v_x \\
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -\beta v_x \\
-\frac{1}{\beta v_x}\mathrm{d}v_x &= \mathrm{d}t \\
-\frac{1}{\beta}\int \frac{1}{v_x}\mathrm{d}v_x &= \int \mathrm{d}t \\
-\frac{1}{\beta}\log v_x &= t + C
\end{aligned}
$$

考虑到初始时刻 $v_x = v_{x0}$

$$
C = -\frac{1}{\beta}\log v_{x0}
$$

代回原方程

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\beta}\log v_x &= t - \frac{1}{\beta}\log v_{x0} \\
\log\left(\frac{v_x}{v_{x0}}\right) &= -\beta t \\
\frac{v_x}{v_{x0}} &= e^{-\beta t} \\
v_x &= v_{x0}e^{-\beta t}
\end{aligned}
$$

因此当经过足够长时间后，水平方向上速度趋近于 0
接着我们考虑铅直方向

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -mg - \beta m v_y \\
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -g - \beta v_y \\
-\frac{1}{g+\beta v_y}\mathrm{d}v_y &= \mathrm{d}t \\
-\int \frac{1}{g+\beta v_y}\mathrm{d}v_y &= \int \mathrm{d}t \\
-\log(g+\beta v_y) &= t + C
\end{aligned}
$$

初始时刻 $v_y = v_{y0}$ 代入原方程得到

$$
C = -\log(g+\beta v_{y0})
$$

因此

$$
\begin{aligned}
-\log(g+\beta v_y) &= t - \log(g+\beta v_{y0}) \\
\log\left(\frac{g+\beta v_{y0}}{g+\beta v_y}\right) &= t \\
\frac{g+\beta v_{y0}}{g+\beta v_y} &= e^t \\
g+\beta v_{y0} &= ge^t + \beta e^t v_y \\
v_y &= \frac{g}{\beta}\left(\frac{1}{e^t} - 1\right) + \frac{1}{e^t}v_{y0}
\end{aligned}
$$

因此，经过足够长时间后，铅直方向上的速度趋近于 $-\dfrac{g}{\beta}$
至于其 x, y 坐标，我们只需要对这两个求得的速度进行关于 t 的积分

$$\begin{aligned} x &= \int v_{x0} e^{-\beta t} \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + C \\ &= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} v_{x0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{g}{\beta} \left(\frac{1}{e^t} - 1 \right) + \frac{1}{e^t} v_{y0} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{g}{\beta} \left(-e^{-t} - t \right) - v_{y0} e^{-t} + C \\ &= \frac{g}{\beta} \left(-e^{-t} - t \right) - v_{y0} e^{-t} + \frac{g}{\beta} + v_{y0} \end{aligned}$$

20240930

1

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t} &= F \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= F\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot v &= F\cdot v \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W \\
\frac{1}{2}mv^2 &= W
\end{aligned}
$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力所做的功

2

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -f\cdot p \\
W_2 &= -f\cdot q - f\cdot(q-p) \\
&= -f\cdot(2q-p) \\
W_2 - W_1 &= 2f\left(p-q\right) \neq 0
\end{aligned}
$$

3

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}x + m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}y &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x + m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
m\left(v_x\mathrm{d}v_x + v_y\mathrm{d}x_y\right) &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2\right) &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W \\
\frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) &= W
\end{aligned}
$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力做的功

4

$$
\begin{aligned}
\Delta E_k &= \int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)\mathrm{d}x \\
E_{k2} - E_{k1} &= \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
E_{k2} - E_{k1} &= U\left(x_1\right) - U\left(x_2\right)
\end{aligned}
$$

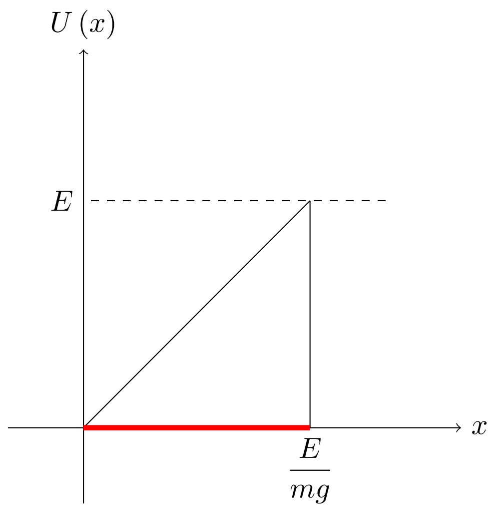
5

(a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -mg \\
U(x) &= -\int f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= mgx + C = mgx
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgx = const
$$

(b)



于是我们可以得到，运动范围是红线所覆盖的 $0 \leq x \leq \dfrac{E}{mg}$

6

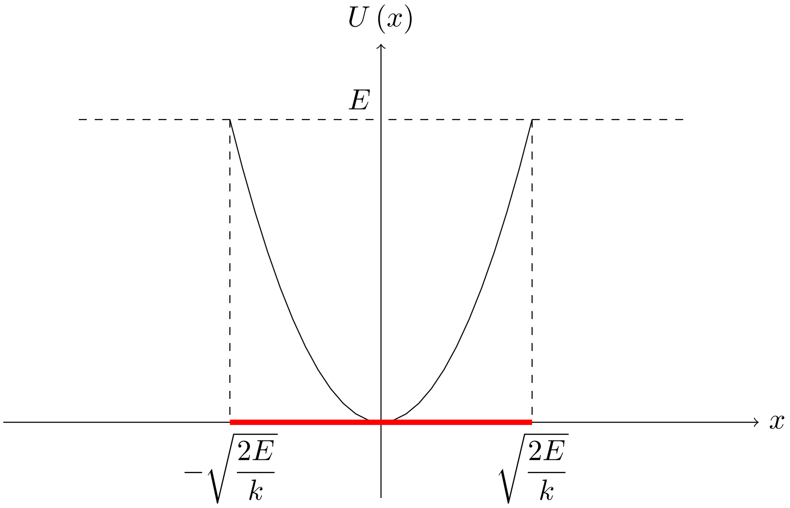
(a)

$$
\begin{aligned}
U(x) &= -\int f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int -kx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}kx^2 + C \\
&= \frac{1}{2}kx^2
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -kx \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v &= -kxv \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \\
\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 = 0 &
\end{aligned}
$$

(c)



由图可知，运动范围是 $-\sqrt{\dfrac{2E}{k}} \leq x \leq \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$

(d)

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 \\
\frac{1}{2}mv^2 &= E-\frac{1}{2}kx^2 \\
v^2 &= \frac{1}{m}\left(2E-kx^2\right) \\
v &= \pm\sqrt{\frac{1}{m}\left(2E-kx^2\right)}
\end{aligned}
$$

(e)

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\cos\left(\omega t\right)\right) \\ &= -a\omega\sin\left(\omega t\right) \\ &= -a\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}tx\right) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} K\left(t\right) &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\cdot\left(a\omega\sin\omega t\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\left(\omega t\right) \end{aligned}$$

由于 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$，我们可以得到 $k = m\omega^2$

$$\begin{aligned} U\left(t\right) &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(a\cos\left(\omega t\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2a^2\cos^2\left(\omega t\right) \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} K\left(t\right)+U\left(t\right) &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\left(\sin^2\left(\omega t\right)+\cos^2\left(\omega t\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \end{aligned}$$

課題

1

$$\begin{aligned} \langle K\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} K\left(t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

对于这个积分，我们按照如下方式来积

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos s\right)\cdot\frac{1}{2\omega}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\omega}\int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos s\right)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sin s\right]_0^{4\pi} \\
&= \frac{\pi}{\omega}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\langle K\rangle &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3\cdot\frac{\pi}{\omega} \\
&= \frac{1}{4}ma^2\omega^2
\end{aligned}
$$

类似的，$\langle U\rangle$ 由于与 $\langle K\rangle$ 只有相位差，因此只需要后面的相位进行积分

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\omega t\right)+1\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos s\right)\cdot\frac{1}{2\omega}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\omega}\int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos s\right)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\sin s\right]_0^{4\pi} \\
&= \frac{\pi}{\omega}
\end{aligned}
$$

因此 $\langle K\rangle = \langle U\rangle$

2a

由于受力为其势能的负梯度，因此可以注意到，x_a 处梯度为负，受力方向是正；x_d 处梯度是正，受力方向是负；x_c, x_e 两处梯度为零，因此合力为 0

2b

$\begin{cases} x_a \le x & E = E_2 \\ x_b \le x \le x_d, x_f \le x & E = E_1 \\ x_c = x & E = E_0 \end{cases}$ $\begin{cases} v_a = 0 & E = E_2 \\ v_b = v_d = v_f = 0 & E = E_1 \\ v_c = 0 & E = E_0 \end{cases}$ 因此，$x = x_c$ 的情况可能是简谐振子速度为 0 的振幅处（若 $E = E_0$）或处于合力为 0 的情况（若 $E = E_1$ 或 $E = E_2$）

2c

由（b）的推导可以知道，动能最大的点在 x_c

20241002

20241007

20241009

20241014

20241016

20241021

20241023

20241028

20241104

20241106

20241111

20241113

20241118

20241120

20241127

20241202

20241204

20241209

20241211

20241216

2022

参考文献