

参考問題 2024/9/30 (月)

1. 一次元の質点の運動方程式に  $dx/dt$  をかけることにより、運動エネルギーの増加量は力のした仕事に等しいことを示せ。
2. 摩擦のある水平面上で質量  $m$  の物体を原点  $O(x=0)$  から点  $P(x=p (p>0))$  まで動かす場合を考える。  
物体を点  $O$  から点  $P$  まで直接動かすときの動摩擦力のする仕事と点  $O$  から点  $Q(x=q (q>p))$  まで動かし、その後点  $P$  まで動かすときの動摩擦力のする仕事は異なることを示せ。ただし、動摩擦力の大きさは常に  $f$ (一定) とする。
3. 2次元の運動の場合、 $x$  方向の運動方程式に  $dx$  をかけ、 $y$  方向の運動方程式に  $dy$  をかけて加えることにより運動エネルギーの増加が力のした仕事であることを示せ。
4. 力  $f$  が位置  $x$  の関数であるときに、 $f(x) = -dU/dx$  となるポテンシャル  $U(x)$  を用いて、エネルギー積分(エネルギー保存則)を表記せよ。
5. 鉛直方向の質点の運動を考える。地表を  $x=0$  として鉛直上方へ  $x$  軸をとる。重力加速度の大きさを  $g$ 、質点の質量を  $m$  とする。
  - (a)  $f(x), U(x)$ 、エネルギー保存の法則を記述せよ。ただし、 $x=0$  において  $U(0)=0$  とする。
  - (b) 横軸  $x$ 、縦軸エネルギーの図に  $U(x)$  の概形をプロットし、エネルギー  $E$  の物体の運動範囲を示せ。
6. 質量  $m$  の質点が一端を固定したバネに水平につながれている。質点の平衡位置からの変位を  $x$ 、バネ定数を  $k$  とする。
  - (a) 力  $f(x)$  を積分することによりポテンシャル  $U(x)$  を求めよ。ただし、 $x=0$  において  $U(0)=0$  とする。
  - (b) 運動方程式の両辺に  $dx/dt$  をかけることにより、エネルギー保存則を求めよ。
  - (c) 横軸  $x$ 、縦軸エネルギーの図に  $U(x)$  の概形をプロットし、エネルギーが  $E$  の時の運動の範囲を示せ。
  - (d) エネルギー保存則(エネルギー積分)より質点の位置が  $x$  のときの速度  $v$  を  $k, m, E, x$  などを用いてあらわせ。
  - (e) 以下では、この質点の位置が  $x = a \cos(\omega t)$  の場合を考える。ただし、 $\omega = \sqrt{k/m}$  である。時間で微分することにより、速度  $v$  を求めよ。
  - (f) 時刻  $t$  における運動エネルギー  $K(t)$  と  $U(t)$  を求め、 $m, \omega, a, t$  などを用いてあらわせ。
  - (g)  $K(t) + U(t)$  が一定であることを示せ。

課題 (LETUS より提出)

1. 参考問題 6.(f) について運動エネルギー  $K(t)$ 、ポテンシャルエネルギー  $U(t)$  を周期  $T = 2\pi/\omega$  の間について積分することにより、 $K(t)$  の平均値  $\langle K \rangle$ 、 $U(t)$  の平均値  $\langle U \rangle$  が以下になることを示せ。

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} K(t) dt = \langle U \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} U(t) dt = \frac{ma^2\omega^2}{4}$$

2. 図のような位置エネルギーのもとでの質点の運動を考える。

- (a)  $x = x_a, x_c, x_d, x_e$  において、受ける力の向きは？
- (b) エネルギー  $E$  が  $E_0, E_1, E_2$  のときに、運動の範囲を  $x_a, x_b \dots$  などを用いて示せ。ただし、質点が  $x = x_c$  に存在することがある場合を考えよ。それぞれの場合について速さが 0 になる  $x$  座標は？
- (c)  $E = E_1$  のとき、運動エネルギー  $K$  が最大になる  $x$  座標は？

