

2024/10/16(水)

### 参考問題

1.  $v_r = \dot{r}$ ,  $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ であることを図を書いて説明せよ。
2.  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  と極座標表示を行う。ここで  $r, \varphi$  は時間の関数であることに注意し、 $x, y$  を時間で微分することにより、 $v_x, v_y$  を  $r, \varphi$  などを用いて表せ
3. 運動エネルギー  $K$  が  $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$  であることを示せ。
- 4.

$$a_r = a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi, a_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi$$

であることを説明せよ。

5.  $a_r, a_\varphi$  を  $r, \varphi$  などを用いて表せ。
6. 中心力の場合、 $\varphi$  方向には力をうけないため、 $m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0$  となる。 $h = r^2\dot{\varphi}$  は一定であることを示せ。(ヒント  $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$  を計算せよ。)
7. 面積速度は  $\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}$  となることを説明せよ。
8. 質量  $M$  の太陽からの万有引力を受けて質量  $m$  の天体が運動している。万有引力定数を  $G$  とし、 $h = r^2\dot{\varphi}$  とする。ポテンシャルエネルギー  $U$  は  $-\frac{GMm}{r}$  であり、天体のエネルギー  $E$  は運動エネルギー  $K$  とポテンシャルエネルギー  $U$  の和である。 $E$  を  $m, r, \dot{r}, h$  などを用いて表わせ。
9.  $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + W(r)$  と書き直す。ある  $h(h > 0)$  に対し、有効ポテンシャル  $W(r)$  を縦軸に  $r$  を横軸にとり概形をプロットせよ。惑星のエネルギーを  $E < 0$  としたとき、 $r$  が取りうる範囲を図示せよ。
10.  $W(r)$  の極小値を与える  $r_0$  を求めよ。このとき、惑星の軌道はどのようなになるか？

### 課題

1.  $v_x, v_y$  を  $r, \varphi$  が時間の関数として時間で微分することにより  $\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}$  を  $r, \varphi$  などを用いて表せ。
2.  $mk/r^2 (k > 0)$  の中心力を受けて運動している場合の粒子が存在する。ただし、 $m$  は粒子の質量である。運動に対する有効ポテンシャルを求め、横軸  $r$  に対して概形を示せ。粒子が最も原点に近づく時の距離を  $r_{\min}$  とする。この粒子のエネルギーを  $m, r_{\min}, h, k$  などを用いて表せ。