

課題 2023/11/1(水)

中心力 $f(r) = mk/r^2 (k > 0)$ の場合の粒子の運動を考える。ただし、 m は粒子の質量である。

1. 運動方程式から $u = 1/r$ と変数変換することにより、

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{k}{h^2}$$

となる。よって、軌道をあらわす方程式が

$$r = \frac{\ell}{\varepsilon \cos \varphi - 1}, \quad \ell = h^2/k$$

と表せることを示せ。

2. r が最小になる時のエネルギー E を考えることにより、

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2h^2 E}{mk^2}$$

となることを示せ。ここで $h = r^2 \dot{\varphi}$ である。

3. 衝突パラメタ p 、十分遠方での速さを v_0 とすると、 h を p, v_0 で表せ。 $(h$ は面積速度の 2 倍と考えても良い)

4. 図のように角度 Φ と散乱角 Θ を定義する。問 1、図より十分遠方において $\cos \varphi = \cos \Phi = \frac{1}{\varepsilon}$ となる。問 2 の結果を用い、次を示せ。

$$\tan \Phi = \sqrt{\frac{2h^2 E}{mk^2}}$$

5. 十分遠方において、 $E = \frac{1}{2}mv_0^2$, 問 3 の結果を問 4 に代入することにより、以下を示せ。

$$\cot \frac{\Theta}{2} = \cot \frac{\pi - 2\Phi}{2} = \tan \Phi = \frac{v_0^2 p}{k}$$

