20240918

1

a

$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = m_1 \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} \\ \vec{F}_{12} = m_2 \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

b

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

c

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= \text{一定} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) &= 0 \\ m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

d

显然我们有重心速度

$$\vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

由上述问题注意到分子为定值，因此其只能为静止或匀速直线运动其一

2

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ \int \vec{F}\mathrm{d}t &= \Delta m\vec{v} \end{aligned}$$

显然等号左边是力积而右边是动量的变化量

3

$$\begin{cases} v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9.8\cdot 1} = 4.43m/s \\ J = m\cdot v = 2\cdot 4.43 = 8.86kg\cdot m/s \\ F = \dfrac{J}{t} = \dfrac{8.86}{1} = 8.86N \end{cases}$$

4

(a)

$$\begin{cases} v\left(t\right) = v_0 - gt \\ y\left(t\right) = y_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(b)

$$-mg+bv^2=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

注意到在终端速度时，其加速度可近似看作 0

因此运动方程可看作 $-mg+bv_\infty^2=0$，于是易得 $v_\infty=\sqrt{\frac{mg}{b}}$

(c)

注意到空气阻力和重力同向，因此有

$$-mg-bv^2=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

課題

$$\begin{aligned}
-mg-bv&=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\
\mathrm{d}t&=-\frac{m}{mg+bv}\mathrm{d}v\\
\int\mathrm{d}t&=-\int\frac{m}{mg+bv}\mathrm{d}v\\
\int\mathrm{d}t&=-\int\frac{1}{g+\frac{b}{m}v}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

在这里令 $\frac{b}{m}v=u$

$$\begin{aligned}
\int\mathrm{d}t&=-\frac{m}{b}\int\frac{1}{g+u}\mathrm{d}u\\
t+C&=-\frac{m}{b}\log\left(g+u\right)\\
t+C&=-\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)
\end{aligned}$$

我们代入初值 $v\left(0\right)=v_0$

$$0+C=-\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right)$$

将 $C=-\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right)$ 代入到原方程我们可以得到

$$
\begin{aligned}
t-\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right)&=-\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)\\
\frac{bt}{m}-\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right)&=-\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)&=\frac{g+\frac{b}{m}v_0}{g+\frac{b}{m}v}\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)g+\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\frac{b}{m}v&=g+\frac{b}{m}v_0\\
\frac{b}{m}\exp\left(\frac{bt}{m}\right)v&=\left(1-\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\right)g+\frac{b}{m}v_0\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)v&=\frac{m}{b}\left(1-\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\right)g+v_0\\
v&=\frac{m}{b}\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}-1\right)g+\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}v_0
\end{aligned}
$$

而我们注意到

$$
\begin{aligned}
v_\infty&=\lim_{t\to\infty}v\left(t\right)\\
&=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{m}{b}\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}-1\right)g+\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}v_0\right)\\
&=-\frac{mg}{b}
\end{aligned}
$$

20240923

1

(a)

首先我们考虑垂直抗力为 $N = mg\cos\theta$，因此摩擦力为 $\mu' mg\cos\theta$
接着是沿斜坡向下（即 x 轴正方向）的受力为 $mg\sin\theta$
因此我们可以得到运动方程为 $mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

(b)

由于题目并未涉及到斜坡长度问题，因此我们可以简单认为加速度为负即可
根据运动方程我们可以得到，$g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right) < 0$
这等价于 $\mu' > \tan\theta$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g\sin\theta - \mu' g\cos\theta \\
\mathrm{d}t &= \frac{1}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= \int \frac{1}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}\mathrm{d}v \\
t + C &= \frac{v}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}
\end{aligned}$$

考虑初值 $v\left(0\right) = v_0$，有

$$C = \frac{v_0}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}$$

再代回原方程，得到

$$\begin{aligned}
t + \frac{v_0}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta} &= \frac{v}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta} \\
v &= v_0 + gt\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \int v\mathrm{d}t \\
&= \int v_0 + gt\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)\mathrm{d}t \\
&= v_0 t + \frac{1}{2}g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)t^2 + C
\end{aligned}$$

由于 $x\left(0\right) = 0$，因此 $C = 0$
于是，$x = v_0 t + \dfrac{1}{2}g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)t^2$

2

$$
\begin{aligned}
-kx &= m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\
-ke^{\lambda t} &= m\lambda^2 e^{\lambda t} \\
\lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\
\lambda &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}
$$

于是 $x = \exp\left(\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$，因此角振动数 ω 就是中间的 $\sqrt{\frac{k}{m}}$
其实是找 $i\omega t$ 的 ω
因此
$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$
代入 $x(t) = x_0, v(0) = 0$
$\begin{cases} x_0 = A \\ 0 = B\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow B = 0 \end{cases}$
综上

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
v(t) &= -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)
\end{aligned}
$$

3

(a)

$$
\begin{aligned}
v_x &= -r\omega\sin\omega t \\
v_y &= r\omega\cos\omega t
\end{aligned}
$$

显然我们可以注意到，$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = r^2\omega^2$，因此 $v = r\omega$

(b)

$$
\begin{aligned}
a_x &= -r\omega^2\cos\omega t \\
a_y &= -r\omega^2\sin\omega t
\end{aligned}
$$

注意到，加速度方向与位置方向差别仅为负号，因此如果考虑从原点出发到位置的方向的话，加速度方向就是位置方向出发到原点. 而大小则显然是 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$

(c)

$$f_x = -mr\omega^2 \cos(\omega t)$$
$$f_y = -mr\omega^2 \sin(\omega t)$$

同样的，受力的方向与位置坐标的方向差别仅为负号，因此其受力指向原点
$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = m\omega^2 r$

(d)

$\begin{cases} v = r\omega \\ a = \omega^2 r \end{cases} \quad \Rightarrow a = \dfrac{v^2}{r}$

課題

1

注意到在微小角度位移的情况下，复原力为 $-mg\sin\theta$
另一方面，其切向加速度可以看作弧长 $l\theta$ 对时间的二阶微分，这即 $l\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
因此运动方程为 $ml\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta$

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta$$
$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\theta$$
$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -g\sin\left(e^{\lambda t}\right)$$

显然这样是无法直接进行求解的，因此我们考虑小角度下的近似：$\sin\theta = \theta$

$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta$$
$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -ge^{\lambda t}$$
$$\lambda^2 = -\frac{g}{l}$$
$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

于是我们得到了 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$
因此周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

2

由于张力 S 的竖直方向分力等于重力，因此 $S\cos\theta = mg$，即 $S = \dfrac{mg}{\cos\theta}$
另一方面这是圆锥摆，因此其向心力 f 为张力 S 的水平分力，因此 $f = S\sin\theta = mg\tan\theta$

$$
\begin{aligned}
mg &= m\omega^2 l\cos\theta \\
mg &= m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l\cos\theta \\
\frac{g}{l\cos\theta} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \\
T^2 &= 4\pi^2\frac{l\cos\theta}{g} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}
\end{aligned}
$$

20240925

20240930

20241002

20241007

20241009

20241014

20241016

20241021

20241023

20241028

20241104

20241106

20241111

20241113

20241118

20241120

20241127

20241202

20241204

20241209

20241211

20241216

2022

参考文献