

20240918

1

a

$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \\ \vec{F}_{12} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \end{cases}$$

b

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

c

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= \text{一定} \\ \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) &= 0 \\ m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= 0 \\ \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

d

显然我们有重心速度

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

由上述问题注意到分子为定值，因此其只能为静止或匀速直线运动其一

2

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \int \vec{F} dt &= \Delta m \vec{v} \end{aligned}$$

显然等号左边是力积而右边是动量的变化量

3

$$\begin{cases} v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 1} = 4.43 m/s \\ J = m \cdot v = 2 \cdot 4.43 = 8.86 kg \cdot m/s \\ F = \frac{J}{t} = \frac{8.86}{1} = 8.86 N \end{cases}$$

4

(a)

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - gt \\ y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(b)

$$-mg + bv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

注意到在终端速度时，其加速度可近似看作 0

因此运动方程可看作  $-mg + bv_\infty^2 = 0$ ，于是易得  $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{b}}$

(c)

注意到空气阻力和重力同向，因此有

$$-mg - bv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

課題

$$\begin{aligned} -mg - bv &= m \frac{dv}{dt} \\ dt &= -\frac{m}{mg + bv} dv \\ \int dt &= -\int \frac{m}{mg + bv} dv \\ \int dt &= -\int \frac{1}{g + \frac{b}{m}v} dv \end{aligned}$$

在这里令  $\frac{b}{m}v = u$

$$\begin{aligned} \int dt &= -\frac{m}{b} \int \frac{1}{g + u} du \\ t + C &= -\frac{m}{b} \log(g + u) \\ t + C &= -\frac{m}{b} \log\left(g + \frac{b}{m}v\right) \end{aligned}$$

我们代入初值  $v(0) = v_0$

$$0 + C = -\frac{m}{b} \log\left(g + \frac{b}{m}v_0\right)$$

将  $C = -\frac{m}{b} \log \left( g + \frac{b}{m} v_0 \right)$  代入到原方程我们可以得到

$$\begin{aligned}
 t - \frac{m}{b} \log \left( g + \frac{b}{m} v_0 \right) &= -\frac{m}{b} \log \left( g + \frac{b}{m} v \right) \\
 \frac{bt}{m} - \log \left( g + \frac{b}{m} v_0 \right) &= -\log \left( g + \frac{b}{m} v \right) \\
 \exp \left( \frac{bt}{m} \right) &= \frac{g + \frac{b}{m} v_0}{g + \frac{b}{m} v} \\
 \exp \left( \frac{bt}{m} \right) g + \exp \left( \frac{bt}{m} \right) \frac{b}{m} v &= g + \frac{b}{m} v_0 \\
 \frac{b}{m} \exp \left( \frac{bt}{m} \right) v &= \left( 1 - \exp \left( \frac{bt}{m} \right) \right) g + \frac{b}{m} v_0 \\
 \exp \left( \frac{bt}{m} \right) v &= \frac{m}{b} \left( 1 - \exp \left( \frac{bt}{m} \right) \right) g + v_0 \\
 v &= \frac{m}{b} \left( \frac{1}{\exp \left( \frac{bt}{m} \right)} - 1 \right) g + \frac{1}{\exp \left( \frac{bt}{m} \right)} v_0
 \end{aligned}$$

而我们注意到

$$\begin{aligned}
 v_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{b} \left( \frac{1}{\exp \left( \frac{bt}{m} \right)} - 1 \right) g + \frac{1}{\exp \left( \frac{bt}{m} \right)} v_0 \right) \\
 &= -\frac{mg}{b}
 \end{aligned}$$

20240923

1

(a)

首先我们考虑垂直抗力为  $N = mg \cos \theta$ ，因此摩擦力为  $\mu' mg \cos \theta$

接着是沿斜坡向下（即  $x$  轴正方向）的受力为  $mg \sin \theta$

因此我们可以得到运动方程为  $mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta = m \frac{d^2 x}{dt^2}$

(b)

由于题目并未涉及到斜坡长度问题，因此我们可以简单认为加速度为负即可

根据运动方程我们可以得到， $g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) < 0$

这等价于  $\mu' > \tan \theta$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= g \sin \theta - \mu' g \cos \theta \\ dt &= \frac{1}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} dv \\ \int dt &= \int \frac{1}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} dv \\ t + C &= \frac{v}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta}\end{aligned}$$

考虑初值  $v(0) = v_0$ ，有

$$C = \frac{v_0}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta}$$

再代回原方程，得到

$$\begin{aligned}t + \frac{v_0}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} &= \frac{v}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} \\ v &= v_0 + gt(\sin \theta - \mu' \cos \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \int v dt \\ &= \int v_0 + gt(\sin \theta - \mu' \cos \theta) dt \\ &= v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) t^2 + C\end{aligned}$$

由于  $x(0) = 0$ ，因此  $C = 0$

于是， $x = v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) t^2$

## 2

$$\begin{aligned} -kx &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ -ke^{\lambda t} &= m\lambda^2 e^{\lambda t} \\ \lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\ \lambda &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

于是  $x = \exp\left(\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ , 因此角振动数  $\omega$  就是中间的  $\sqrt{\frac{k}{m}}$

其实是找  $i\omega t$  的  $\omega$

因此

$$\begin{cases} x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$$

代入  $x(t) = x_0, v(0) = 0$

$$\begin{cases} x_0 = A \\ 0 = B\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

综上

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v(t) &= -x_0\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{aligned}$$

## 3

(a)

$$\begin{aligned} v_x &= -r\omega \sin \omega t \\ v_y &= r\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

显然我们可以注意到,  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = r^2\omega^2$ , 因此  $v = r\omega$

(b)

$$\begin{aligned} a_x &= -r\omega^2 \cos \omega t \\ a_y &= -r\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

注意到, 加速度方向与位置方向差别仅为负号, 因此如果考虑从原点出发到位置的方向的话, 加速度方向就是位置方向出发到原点. 而大小则显然是  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$

(c)

$$f_x = -mr\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$f_y = -mr\omega^2 \sin(\omega t)$$

同样的，受力的方向与位置坐标的方向差别仅为负号，因此其受力指向原点

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = m\omega^2 r$$

(d)

$$\begin{cases} v = r\omega \\ a = \omega^2 r \end{cases} \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

## 課題

### 1

注意到在微小角度位移的情况下，复原力为  $-mg \sin \theta$

另一方面，其切向加速度可以看作弧长  $l\theta$  对时间的二阶微分，这即  $l \frac{d^2\theta}{dt^2}$

因此运动方程为  $ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -g \sin(e^{\lambda t})$$

显然这样是无法直接进行求解的，因此我们考虑小角度下的近似： $\sin \theta = \theta$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$$

$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -ge^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 = -\frac{g}{l}$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

于是我们得到了  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

因此周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

### 2

由于张力  $S$  的竖直方向分力等于重力，因此  $S \cos \theta = mg$ ，即  $S = \frac{mg}{\cos \theta}$

另一方面这是圆锥摆，因此其向心力  $f$  为张力  $S$  的水平分力，因此  $f = S \sin \theta = mg \tan \theta$

$$mg = m\omega^2 l \cos \theta$$

$$mg = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 l \cos \theta$$

$$\frac{g}{l \cos \theta} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l \cos \theta}{g}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$$

## 20240925

1

(a)

在水平方向上，由于没有受力因此可以简单认为

$$x(t) = v_{x0}t$$

在铅直方向上由于仅受到重力作用因此

$$\begin{aligned} y(t) &= v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= v_{y0} \cdot \frac{x(t)}{v_{x0}} - \frac{1}{2}g \left( \frac{x(t)}{v_{x0}} \right)^2 \\ &= -\frac{g}{2v_{x0}^2}x^2(t) + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x(t) \end{aligned}$$

显然，这是一条抛物线

(b)

$y$  达到最大的时候，其向上的速度是 0. 因此我们有  $t = \frac{v_{y0}}{g}$   
此时

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{x0}v_{y0}}{g} \\ y &= \frac{v_{y0}^2}{2g} \end{aligned}$$

(c)

我们用  $v_0$  来重新表示其水平方向上和铅直方向上的运动

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \theta_0 \\ y &= v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

影响水平飞行距离的是飞行时间，而时间与竖直方向速度减到 0 的时间有关

$$t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

于是水平方向能达到的最远距离为

$$\begin{aligned} x_{max} &= 2v_0 \cdot \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \cdot \cos \theta_0 \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \end{aligned}$$

因此我们可以知道，若  $x_{max}$  取最大，则  $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ，即  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$



## 課題

在水平方向上

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv_x}{dt} &= -\beta m v_x \\
 \frac{dv_x}{dt} &= -\beta v_x \\
 -\frac{1}{\beta v_x} dv_x &= dt \\
 -\frac{1}{\beta} \int \frac{1}{v_x} dv_x &= \int dt \\
 -\frac{1}{\beta} \log v_x &= t + C
 \end{aligned}$$

考虑到初始时刻  $v_x = v_{x0}$

$$C = -\frac{1}{\beta} \log v_{x0}$$

代回原方程

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\beta} \log v_x &= t - \frac{1}{\beta} \log v_{x0} \\
 \log \left( \frac{v_x}{v_{x0}} \right) &= -\beta t \\
 \frac{v_x}{v_{x0}} &= e^{-\beta t} \\
 v_x &= v_{x0} e^{-\beta t}
 \end{aligned}$$

因此当经过足够长时间后，水平方向上速度趋近于 0  
接着我们考虑铅直方向

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv_y}{dt} &= -mg - \beta m v_y \\
 \frac{dv_y}{dt} &= -g - \beta v_y \\
 -\frac{1}{g + \beta v_y} dv_y &= dt \\
 -\int \frac{1}{g + \beta v_y} dv_y &= \int dt \\
 -\log (g + \beta v_y) &= t + C
 \end{aligned}$$

初始时刻  $v_y = v_{y0}$  代入原方程得到

$$C = -\log (g + \beta v_{y0})$$

因此

$$\begin{aligned}
 -\log (g + \beta v_y) &= t - \log (g + \beta v_{y0}) \\
 \log \left( \frac{g + \beta v_{y0}}{g + \beta v_y} \right) &= t \\
 \frac{g + \beta v_{y0}}{g + \beta v_y} &= e^t \\
 g + \beta v_{y0} &= g e^t + \beta e^t v_y \\
 v_y &= \frac{g}{\beta} \left( \frac{1}{e^t} - 1 \right) + \frac{1}{e^t} v_{y0}
 \end{aligned}$$

因此，经过足够长时间后，铅直方向上的速度趋近于  $-\frac{g}{\beta}$   
至于其  $x, y$  坐标，我们只需要对这两个求得的速度进行关于  $t$  的积分

$$\begin{aligned}x &= \int v_{x0} e^{-\beta t} dt \\&= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + C \\&= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} v_{x0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \int \left( \frac{g}{\beta} \left( \frac{1}{e^t} - 1 \right) + \frac{1}{e^t} v_{y0} \right) dt \\&= \frac{g}{\beta} (-e^{-t} - t) - v_{y0} e^{-t} + C \\&= \frac{g}{\beta} (-e^{-t} - t) - v_{y0} e^{-t} + \frac{g}{\beta} + v_{y0}\end{aligned}$$

## 20240930

1

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F \\
m \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} &= F \cdot \frac{dx}{dt} \\
m \frac{dv}{dt} \cdot v &= F \cdot v \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) &= \frac{d}{dt} W \\
\frac{1}{2} m v^2 &= W
\end{aligned}$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力所做的功

2

$$\begin{aligned}
W_1 &= -f \cdot p \\
W_2 &= -f \cdot q - f \cdot (q - p) \\
&= -f \cdot (2q - p) \\
W_2 - W_1 &= 2f(p - q) \neq 0
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} dx + m \frac{d^2 y}{dt^2} dy &= F dx + F dy \\
m \frac{dv_x}{dt} dx + m \frac{dv_y}{dt} dy &= F dx + F dy \\
m(v_x dv_x + v_y dv_y) &= F dx + F dy \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 \right) &= F dx + F dy \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 \right) &= \frac{d}{dt} W \\
\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) &= W
\end{aligned}$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力做的功

4

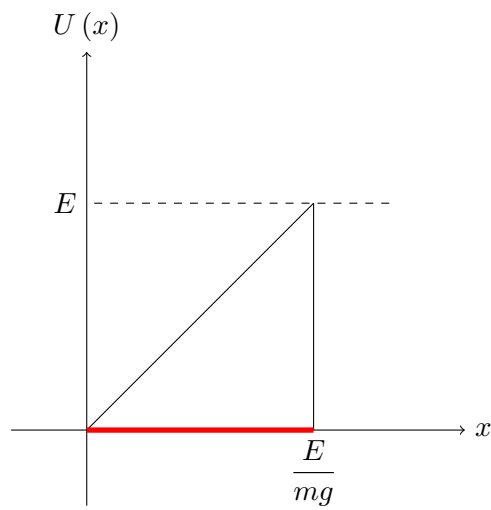
$$\begin{aligned}
\Delta E_k &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\
E_{k2} - E_{k1} &= \int_{x_1}^{x_2} -\frac{dU}{dx} dx \\
E_{k2} - E_{k1} &= U(x_1) - U(x_2)
\end{aligned}$$

5

(a)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -mg \\
 U(x) &= -\int f(x) dx \\
 &= mgx + C = mgx \\
 \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + mgx &= \text{const}
 \end{aligned}$$

(b)



于是我们可以得到，运动范围是红线所覆盖的  $0 \leq x \leq \frac{E}{mg}$

6

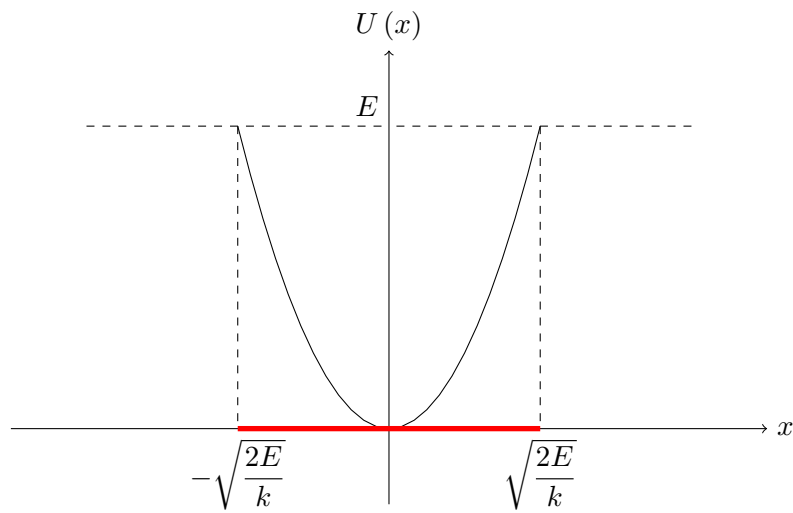
(a)

$$\begin{aligned}
 U(x) &= -\int f(x) dx \\
 &= -\int -kx dx \\
 &= \frac{1}{2}kx^2 + C \\
 &= \frac{1}{2}kx^2
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx \\
m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} &= -kx \frac{dx}{dt} \\
m \frac{dv}{dt} v &= -kxv \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} kx^2 \right) \\
\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 &= 0
\end{aligned}$$

(c)



由图可知，运动范围是  $-\sqrt{\frac{2E}{k}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2E}{k}}$

(d)

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \\
\frac{1}{2} mv^2 &= E - \frac{1}{2} kx^2 \\
v^2 &= \frac{1}{m} (2E - kx^2) \\
v &= \pm \sqrt{\frac{1}{m} (2E - kx^2)}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{dt}x \\ &= \frac{d}{dt}(a \cos(\omega t)) \\ &= -a\omega \sin(\omega t) \\ &= -a\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}tx\right) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m \cdot (a\omega \sin \omega t)^2 \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\omega t) \end{aligned}$$

由于  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 我们可以得到  $k = m\omega^2$

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}k(a \cos(\omega t))^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2a^2 \cos^2(\omega t) \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} K(t) + U(t) &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \end{aligned}$$

課題

1

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} K(t) dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t)) dt \end{aligned}$$

对于这个积分，我们按照如下方式来积

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt &= \int_0^{4\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos s \right) \cdot \frac{1}{2\omega} ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_0^{4\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos s \right) ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} \sin s \right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\langle K \rangle &= \frac{1}{4\pi} ma^2 \omega^3 \cdot \frac{\pi}{\omega} \\ &= \frac{1}{4} ma^2 \omega^2\end{aligned}$$

类似的， $\langle U \rangle$  由于与  $\langle K \rangle$  只有相位差，因此只需要后面的相位进行积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t) dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} (\cos(2\omega t) + 1) dt \\ &= \int_0^{4\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos s \right) \cdot \frac{1}{2\omega} ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_0^{4\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos s \right) ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \sin s \right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega}\end{aligned}$$

因此  $\langle K \rangle = \langle U \rangle$

## 2a

由于受力为其势能的负梯度，因此可以注意到， $x_a$  处梯度为负，受力方向是正； $x_d$  处梯度是正，受力方向是负； $x_c, x_e$  两处梯度为零，因此合力为 0

## 2b

$$\begin{cases} x_a \leq x & E = E_2 \\ x_b \leq x \leq x_d, x_f \leq x & E = E_1 \\ x_c = x & E = E_0 \end{cases} \begin{cases} v_a = 0 \\ v_b = v_d = v_f = 0 \\ v_c = 0 \end{cases} \begin{cases} E = E_2 \\ E = E_1 \\ E = E_0 \end{cases}$$
 因此， $x = x_c$  的情况可能是简谐振子速度为 0 的振幅处（若  $E = E_0$ ）或处于合力为 0 的情况（若  $E = E_1$  或  $E = E_2$ ）

## 2c

由 (b) 的推导可以知道，动能最大的点在  $x_c$

## 20241002

## 1

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\Gamma \frac{dx}{dt} - kx \\
m \frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \\
mp^2 e^{pt} + \Gamma p e^{pt} + k e^{pt} &= 0 \\
(mp^2 + \Gamma p + k) e^{pt} &= 0 \\
mp^2 + \Gamma p + k &= 0 \\
mp^2 + 2m\gamma p + m\omega_0^2 &= 0 \\
p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 &= 0 \\
p &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}$$

## 2

由上一问我们可以得到

$$x(t) = A e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + B e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

由初期条件  $x(0) = 0$ , 我们得到  $A + B = 0$ . 接着

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{d}{dt} x(t) \\
&= -A \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) - B \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) \\
&= (B - A) \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}$$

初期条件  $v(0) = v_0$  可得  $B - A = \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

因此,  $A = -\frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, B = \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

综上, 我们有

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\
&= \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left( e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right)
\end{aligned}$$

## 3

(a)

这里我们只需要将其代入运动方程验证即可

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \\
m\gamma(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + \Gamma(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + kte^{-\gamma t} &= 0 \\
m\gamma(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + 2m\gamma(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + m\gamma^2 te^{-\gamma t} &= 0 \\
(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + 2(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + \gamma te^{-\gamma t} &= 0
\end{aligned}$$

显然, 将  $e^{-\gamma t}$  提出来之后系数项总和为 0, 因此等号两边相等



(b)

我们不妨设其解为  $x(t) = Ate^{-\gamma t}$ , 显然满足  $x(0) = 0$

接着对于  $v(0)$ , 由于  $v(t) = A(1 - \gamma t)e^{-\gamma t}$ , 因此我们可以注意到,  $A = v_0$

综上,  $x(t) = v_0 te^{-\gamma t}$

4

(a)

由于  $\omega_0 > \gamma$ , 因此 1 里的解为  $p = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

因此我们假设通解是  $x(t) = e^{-\gamma t} \left( A \cos \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) + B \sin \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) \right)$

考虑  $x(0) = 0$ , 我们有  $A = 0$ , 于是我们可以将通解写成  $x(t) = Be^{-\gamma t} \sin \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right)$

然后考虑  $v(t) = e^{-\gamma t} \left( B\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - B\gamma \sin \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) \right)$  和  $v(0) = v_0$

$$\begin{aligned} B\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - B\gamma \sin \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) &= v_0 \\ B \left( \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - \gamma \sin \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) \right) &= v_0 \\ \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - \gamma \sin \left( t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right)} &= B \\ \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} &= B \end{aligned}$$

因此,  $x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin \left( \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right)$

(b)

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\Gamma v - kx \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\Gamma \frac{dx}{dt} - kx \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} &= -\Gamma \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} - kx \frac{dx}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) &= -2m\gamma v \cdot v - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} k x^2 \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) &= -2m\gamma v \cdot v \end{aligned}$$

## 課題

1

首先我们将三种振动的位移时间依赖性  $x(t)$  写在一起

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left( e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right) & \omega_0 < \gamma \\ x(t) = v_0 te^{-\gamma t} & \omega_0 = \gamma \\ x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin \left( \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right) & \omega_0 > \gamma \end{cases}$$

显然式子过于繁琐难以判断，因此我们首先记  $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  和  $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  分别为  $\hat{\omega}$  和  $\tilde{\omega}$  于是过衰减振动变成

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}} \left( e^{-\gamma t + \hat{\omega} t} - e^{-\gamma t - \hat{\omega} t} \right) \\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-\gamma t} \left( e^{\hat{\omega} t} - e^{-\hat{\omega} t} \right) \\ &= \frac{v_0}{\hat{\omega}} e^{-\gamma t} \sinh(\hat{\omega} t) \\ &\simeq \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-\gamma t} \cdot e^{\hat{\omega} t} \\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-(\gamma - \hat{\omega})t} \end{aligned}$$

衰减振动变成

$$x(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t)$$

因此简化后的三个式子变成

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-(\gamma - \hat{\omega})t} & \omega_0 < \gamma \\ x(t) = v_0 t e^{-\gamma t} & \omega_0 = \gamma \\ x(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t) & \omega_0 > \gamma \end{cases}$$

注意到这里公因式是  $v_0 e^{-\gamma t}$

因此我们仅需证明  $\left\{ \frac{1}{\hat{\omega}} \sinh(\hat{\omega} t), t, \frac{1}{\tilde{\omega}} \sin(\tilde{\omega} t) \right\}$  中， $t$  的增长速度/斜率/梯度是最快/大的

显然，这里  $t$  在任何情况下都比第三项含有  $\sin$  的式子梯度要大，因此我们只需要讨论双曲正弦的部分。

显然趋近于无穷时，次方位置为负项的那部分可以忽视掉，也就是最后的  $\frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-(\gamma - \hat{\omega})t}$ 。而系数对于衰减速度几乎没有任何影响（因为控制主体增减的是指数函数），因此我们仅需要判断指数位置

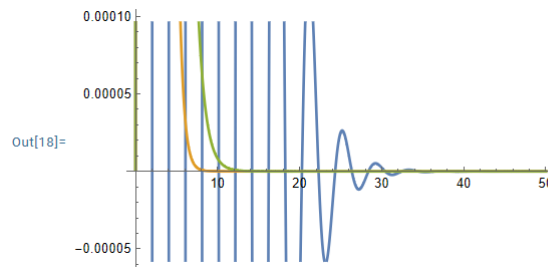
由于  $\hat{\omega} > 0$ ，因此  $-(\gamma - \hat{\omega}) > -\gamma$ 。因此临界衰减振动的衰减速度大于过衰减的衰减速度

## 2

我们先分别将三种情况给代入

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_0 \sqrt{0.6}} e^{-0.2\omega_0 t} \sin(\sqrt{0.6}\omega_0 t) & \gamma = 0.2\omega_0 \\ x(t) = v_0 t e^{-\omega_0 t} & \gamma = \omega_0 \\ x(t) = \frac{v_0}{2\omega_0 \sqrt{0.44}} \left( e^{(-1.2 + \sqrt{0.44})\omega_0 t} - e^{(-1.2 - \sqrt{0.44})\omega_0 t} \right) & \gamma = 1.2\omega_0 \end{cases}$$

接着代入 mathematica 之后我们可以得到



具体来说，我们可以知道，蓝色波动的那根是衰减运动，稍微靠右上的绿色线是过衰减，剩下的黄线是临界衰减

20241007

1

(a)

$$\begin{aligned}
 f_0 \cos(\omega t) &= -a_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) + 2\gamma \cdot (-a_0 \omega \sin(\omega t + \phi_0)) + a_0 \omega_0^2 \cos(\omega t + \phi_0) \\
 f_0 \cos(\omega t) &= -a_0 \omega^2 (\cos(\omega t) \cos \phi_0 - \sin(\omega t) \sin \phi_0) \\
 &\quad - 2\gamma a_0 \omega (\sin(\omega t) \cos \phi_0 + \cos(\omega t) \sin \phi_0) \\
 &\quad + a_0 \omega_0^2 (\cos(\omega t) \cos \phi_0 - \sin(\omega t) \sin \phi_0) \\
 f_0 \cos(\omega t) &= \cos(\omega t) (-a_0 \omega^2 \cos \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 \omega_0^2 \cos \phi_0) \\
 &\quad + \sin(\omega t) (a_0 \omega^2 \sin \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \cos \phi_0 - a_0 \omega_0^2 \sin \phi_0)
 \end{aligned}$$

通过比较系数可以得到

$$\begin{cases} f_0 = -a_0 \omega^2 \cos \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 \omega_0^2 \cos \phi_0 \\ 0 = a_0 \omega^2 \sin \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \cos \phi_0 - a_0 \omega_0^2 \sin \phi_0 \end{cases} \implies \begin{cases} f_0 = -2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi_0 \\ 0 = -2\gamma a_0 \omega \cos \phi_0 + a_0 (\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi_0 \end{cases}$$

由下式

$$\begin{aligned}
 0 &= a_0 ((\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi_0 - 2\gamma \omega \cos \phi_0) \\
 0 &= (\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi_0 - 2\gamma \omega \cos \phi_0 \\
 \tan \phi_0 &= \frac{2\gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \sin \phi_0 &= \frac{\tan \phi_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}} \\
 &= \frac{2\gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}} \\
 &= \frac{2\gamma \omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}
 \end{aligned}$$

这里疑似有个符号问题，由于并没有标明  $\omega, \omega_0$  的大小关系因此这里  $\sin \phi_0$  处可能存在负号  
接下来我们看上式

$$\begin{aligned}
 f_0 &= -2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi_0 \\
 a_0 &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi_0 - 2\gamma \omega \sin \phi_0} \\
 &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}} - 2\gamma \omega \frac{\tan \phi_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}} \\
 &= \frac{f_0 \sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\gamma \omega \tan \phi_0} \\
 &= -\frac{f_0 \sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}{\frac{2\gamma \omega}{\tan \phi_0} + 2\gamma \omega \tan \phi_0} \\
 &= -\frac{f_0}{2\gamma \omega} \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}{\frac{1}{\tan \phi_0} + \tan \phi_0} \\
 &= -\frac{f_0}{2\gamma \omega} \cos \phi_0 \sqrt{\sec^2 \phi_0} \sin \phi_0
 \end{aligned}$$

由于这里  $a_0$  的实际意义是振幅，因此我们只需要考虑绝对值的情况，因此

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \left| -\frac{f_0}{2\gamma\omega} \cos \phi_0 \sqrt{\sec^2 \phi_0} \sin \phi_0 \right| \\
 &= \frac{f_0}{2\gamma\omega} \sin \phi_0 \\
 &= \frac{f_0}{2\gamma\omega} \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\
 &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\omega} a_0 &= \frac{d}{d\omega} \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\
 &= -\frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cdot \frac{1}{2} \left( (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4(\omega^3 - \omega_0^2\omega + 2\gamma^2\omega) \\
 &= \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)}{\left( (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

注意到，上式取极值的情况当且仅当分子  $2\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2) = 0$   
因此， $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$  时取到极值

(c)

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{d}{dt} x(t) \\
 &= \frac{d}{dt} a_0 \cos(\omega t + \phi_0) \\
 &= -a_0\omega \sin(\omega t + \phi_0)
 \end{aligned}$$

2

(a)

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx + mf_0 \cos(\omega t) \\
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -m\omega_0^2 x + mf_0 \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -m\omega_0^2 x + mf_0 \cos(\omega t) \\
 -a_0\omega^2 \cos(\omega t + \phi) &= -a_0\omega_0^2 \cos(\omega t + \phi) + f_0 \cos(\omega t) \\
 f_0 \cos(\omega t) &= a_0 \cos(\omega t + \phi) (\omega_0^2 - \omega^2) \\
 f_0 \cos(\omega t) &= a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi \cos(\omega t) - a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi \sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

比较系数可得  $\begin{cases} f_0 = a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi \\ 0 = a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \phi = 0 \end{cases}$

于是,  $x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$

(c)

注意到上一问求出来的实际上是特解, 因此我们只需要讨论齐次解从而推导出通解  
对于齐次解, 其为  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

因此通解是  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt} x(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left( A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \right) \\ &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{\omega f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

考虑到  $x(0) = 0, v(t) = 0$

$$\begin{cases} 0 = A + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ 0 = B\omega_0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ B = 0 \end{cases}$$

综上, 解为  $x(t) = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$

(d)

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega_0 t) \cos(\Delta\omega t) - \sin(\omega_0 t) \sin(\Delta\omega t)) \\ &\xrightarrow{\Delta\omega t \rightarrow 0} -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega_0 t) \cdot 1 - \sin(\omega_0 t) \cdot 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 課題

1

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \cdot v dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T m f_0 \cos(\omega t) \cdot v dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T m f_0 \cos(\omega t) \cdot (-a_0 \omega \sin(\omega t + \phi_0)) dt \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{T} \left[ \frac{1}{2} t \sin \phi_0 - \frac{1}{4\omega} \cos(2\omega t + \phi_0) \right]_0^T \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{T} \left( \frac{T}{2} \sin \phi_0 + \frac{1}{4\omega} \cos \phi_0 - \frac{1}{4\omega} \cos(2\omega T + \phi_0) \right) \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{2} \sin \phi_0 - \frac{a_0 f_0 m}{4T} \cos \phi_0 + \frac{a_0 f_0 m}{4T} \cos(2\omega T + \phi_0) \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{2} \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} - \frac{a_0 f_0 m}{4T} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\
&\quad + \frac{a_0 f_0 m}{4T} \left( \cos(2\omega T) \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} - \sin(2\omega T) \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \right) \\
&= \frac{a_0 f_0 m (\omega^2 - \omega_0^2)}{4T \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} (\cos(2\omega T) - 1) - \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \left( \frac{a_0 f_0 m \omega}{2} + \sin(2\omega T) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P' &= -\frac{1}{T} \int_0^T 2m\gamma v \cdot v dt \\
&= -\frac{2m\gamma}{T} \int_0^T v^2 dt \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \phi_0) dt \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{T} \left[ \frac{1}{4\omega} \sin(2(\omega t + \phi_0)) - \frac{1}{2\omega} (\omega t + \phi_0) \right]_0^T \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{4\omega T} (\sin(2(\omega T + \phi_0)) - 2(\omega T + \phi_0) - \sin(2\phi_0) + 2\phi_0) \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{4\omega T} (2 \sin(\omega T + \phi_0) \cos(\omega T + \phi_0) - 2\omega T - \sin(2\phi_0)) \\
&= -\frac{a_0^2 m \omega^2 \gamma}{\omega T} (\sin(\omega T) \cos(\omega T) (\cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0) + \sin \phi_0 \cos \phi_0 (\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T) - 1))
\end{aligned}$$

为了方便，我们先计算一些小细节

$$\begin{aligned}
\cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0 &= \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} - \frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\
&= 1 - \frac{8\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \phi_0 \cos \phi_0 &= \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\ &= \frac{2\gamma\omega (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\end{aligned}$$

于是，最后结果是

$$P' = -\frac{a_0^2 m \omega \gamma}{T} \left( \left( 1 - \frac{8\gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right) \sin(2\omega T) - \frac{4\gamma\omega (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \sin^2(\omega T) \right)$$

这不是最简但是我懒得化简了，显然这两项里  $a_0$  都还可以代入，代入再进行化简应该没这么繁琐. 原则上  $P = P'$

## 2

本题只需要计算  $\frac{d}{d\omega} P$  证明在  $\omega = \omega_0$  时取到极值即可，而这是参考问题 1.(b) 的结论

## 20241009

## 1

这题和上次的相同，不重复写

## 2

这实际上是一个方向全部朝下大小为  $g$  的向量场，我们只需要分别通过三条路径进行线积分

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \\
 X_1(t) &= \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix} \left( \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \right) \\
 X_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2at \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X_{31}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}}t \\ -2at \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X_{32}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}}t \\ 0 \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X'_1(t) &= \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} \left( \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \right) \\
 X'_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X'_{31}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -2a \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X'_{32}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1)
 \end{aligned}$$

通过上面的计算，我们有

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-ag \cos t) dt \\
 &= 2ag \\
 W_2 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} dt \\
 &= 2ag \\
 W_3 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -2a \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
 &= 2ag + 0 \\
 &= 2ag
 \end{aligned}$$



## 3

首先由于我们需要证明存在  $U(x, y, z)$  使得

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}$$

因此我们不妨假设在  $A, B$  间  $U = -\int_A^B F \cdot ds$   
而这相对于  $U_x(B) - U_x(A) = -F_x \cdot \Delta x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U_x(B) - U_x(A)}{\Delta x} \\ &= -F_x \end{aligned}$$

其余两个方向也可以类似地证明

## 4

首先我们尝试通过计算这个向量场是否是某个标量场的负梯度来证明

$$\begin{aligned} U_x &= -\int F_x \cdot dx \\ &= -\int (-axy) dx \\ &= ay \int x dx \\ &= \frac{1}{2} ax^2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_y &= -\int F_y \cdot dy \\ &= -\int \left( -\frac{1}{2} ax^2 - y^2 \right) \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} ax^2 y + \frac{1}{3} y^3 \end{aligned}$$

由于对这里计算的  $U_y$  进行关于  $x$  的求导的话，实际上第二项是不存在的，符合  $U_x$  的计算（这里其实省略掉了  $+C$ ）

因此存在  $U(x, y) = \frac{1}{2} ax^2 y + \frac{1}{3} y^3$  是力  $F$  的势能函数

另一方面，由于保守力的旋度为零，因此我们可以尝试计算其旋度来判断是否是 0

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -axy \\ -\frac{1}{2} ax^2 - y^2 \end{pmatrix} \\ &= -ax - (-ax) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此这是保守力，接下来其势能函数的计算同上

## 課題

## 1

这就是上一问用的结论，即保守场旋度为零，同时题目描述也说明了其第三个性质，保守力积分不随路径变化而变化

同样的，我们有两个方法来解决这个证明，首先

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_A^Q F \cdot dr + \int_Q^B F \cdot dr \\ &= F_y \cdot k + F_x \cdot h \\ W_2 &= \int_A^P F \cdot dr + \int_P^B F \cdot dr \\ &= F_x \cdot h + F_y \cdot k \end{aligned}$$

由于  $W_1 = W_2$  对  $W_1, W_2$  分别求  $\Delta h, \Delta k \rightarrow 0$  的极限就得到了需要证明的式子

另一方面，我们也可以通过向量分析的小结论来证明，换言之我们仅需要证明梯度的旋度为零

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla U) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

最后这一步是 Hesse 矩阵的小结论，由于二阶混合偏导是连续的因此相等

## 2

$$\begin{aligned} U_x &= - \int F_x dx \\ &= - \int 3x^2 y dx \\ &= -x^3 y + C(y) \\ U_y &= - \int F_y dy \\ &= - \int x^3 dy \\ &= -x^3 y + C(x) \end{aligned}$$

因此这是保守力，势能函数为  $x^3 y$

20241014

1

上次第三题，不重复写

2

上次第四题，不重复写

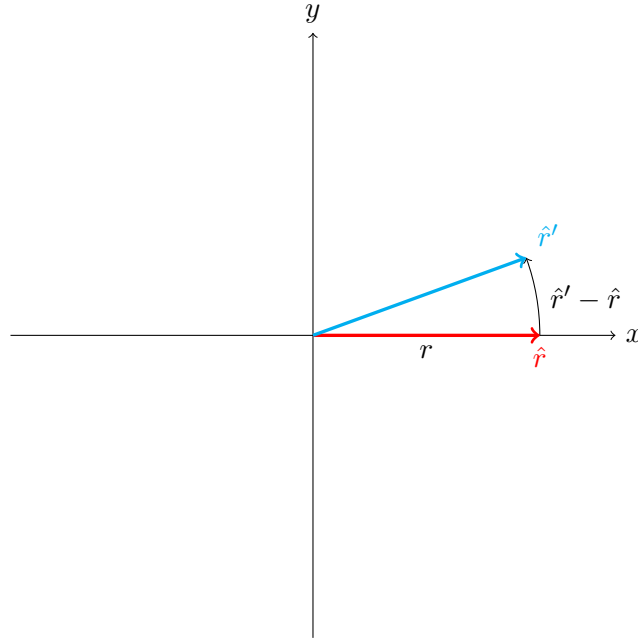
3

$$\begin{aligned}
 F &= -\nabla U \\
 &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{x\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{y\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{z\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |F| &= \sqrt{\left(-\frac{x\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{y\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{z\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2} \\
 &= \frac{\mu}{r^3} \cdot r \\
 &= \frac{\mu}{r^2}
 \end{aligned}$$

于是其大小是  $\frac{\mu}{r^2}$ ，而方向则是坐标点指向原点

4



由于极坐标下的坐标表示为  $\vec{r} = r\hat{r}$ ，将其关于  $t$  进行求导我们可以得到

$$\begin{aligned} v &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{d\phi}\dot{\phi} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \end{aligned}$$

显然，前一项是径向速度及其方向，后一项是切向速度及其方向

5

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d}{dt}(r \cos \phi) \\ &= \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi \\ v_y &= \frac{d}{dt}(r \sin \phi) \\ &= \dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi \end{aligned}$$

6

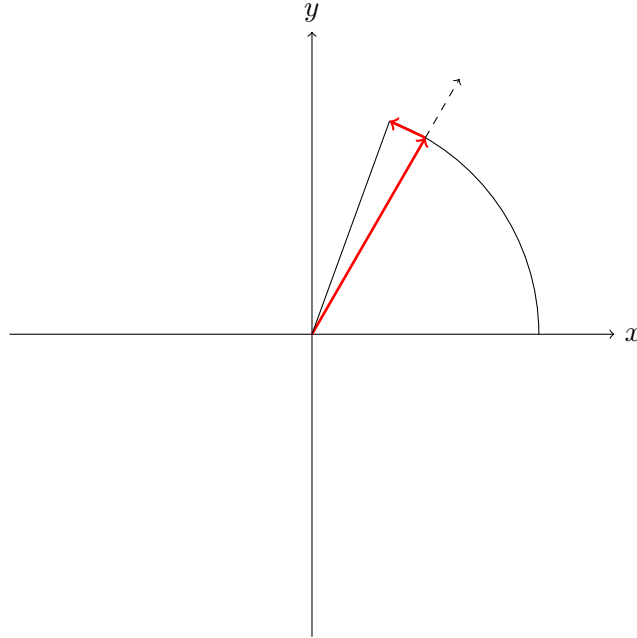
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \\ &= \frac{1}{2}m\left((\dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi)^2 + (\dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 \cos^2 \phi - 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + \dot{r}^2 \sin^2 \phi + 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + r^2\dot{\phi}^2 \cos^2 \phi\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + r^2\dot{\phi}^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) \end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \\
&= \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - \left( \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi + r (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \right) \\
&= \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \\
&= \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \\
&= \ddot{r} \sin \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) \\
&= \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi
\end{aligned}$$

8



我们只需要进行力的分解就可以简单证明  
 实际上是懒得画 tikz

9

$$\begin{aligned}
a_r &= a_x \cos \phi + a_y \sin \phi \\
&= \left( \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \right) \cos \phi \\
&\quad + \left( \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi \right) \sin \phi \\
&= \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \\
a_\phi &= -a_x \sin \phi + a_y \cos \phi \\
&= -\left( \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \right) \sin \phi \\
&\quad + \left( \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi \right) \cos \phi \\
&= 2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}
\end{aligned}$$

## 課題

## 1

显然，径向单位向量对时间微分等价于径向单位向量旋转的速度，而这就是  $\dot{\phi}e_\phi$ ，另一方面，切向单位向量可以视作径向向量逆时针旋转  $90^\circ$ ，这就带来了负号，其大小则是正常对  $\phi$  进行关于  $t$  的微分

## 2

这里实际上也有两种做法，一种是如上参考问题的进行笛卡尔系下的计算，另一种则是基于参考问题第四题的进一步求导

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \right) \\
 &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\frac{d\hat{\phi}}{dt} \\
 &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} - r\dot{\phi}^2\hat{r} \\
 &= \left( \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \right) \hat{r} + \left( 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} \right) \hat{\phi}
 \end{aligned}$$

**20241016****1**

上次原题不重复写

**2**

上次原题不重复写

**3**

上次原题不重复写

**4**

上次原题不重复写

**5**

上次原题不重复写

**6**

$$\begin{aligned}
 m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) &= 0 \\
 m(2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi}) &= 0 \\
 2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} &= 0 \\
 r^2\dot{\phi} &= C
 \end{aligned}$$

**7**

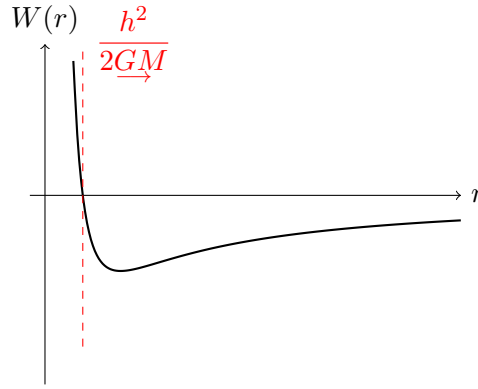
$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot r\dot{\phi} \\
 &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}
 \end{aligned}$$

**8**

$$\begin{aligned}
 E &= K + U \\
 &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \\
 &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{GMm}{r}
 \end{aligned}$$

**9**

根据上一问，我们有  $W(r) = \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$



至于  $E < 0$  的情况,  $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} < 0$  由于径向动能项包含微分且恒大于 0, 因此我们不妨舍去. 于是式子变成了  $\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} < \frac{GMm}{r}$ . 而这实际上是  $r > \frac{h^2}{2GM}$

## 10

$W'(r) = -\frac{mh^2}{r^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{h^2}{GM}$  而此时的  $r$  是最低能状态, 因此不存在轨道半径震荡, 这就是单纯的圆轨道

## 課題

### 1

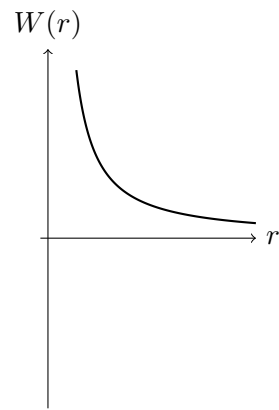
$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \phi \\
 v_x &= \frac{d}{dt}(r \cos \phi) \\
 &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\
 \frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \\
 &= \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \\
 &= \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \\
 y &= r \sin \phi \\
 v_y &= \frac{d}{dt}(r \sin \phi) \\
 &= \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\
 \frac{dv_y}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \\
 &= \ddot{r} \sin \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) \\
 &= \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi
 \end{aligned}$$

### 2

$$\begin{aligned}
 E &= K + U \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + \frac{mk}{r}
 \end{aligned}$$

因此有效势能为  $\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + \frac{mk}{r}$





由于中心力为斥力因此并不存在一个稳定存在的点，而在  $r_{min}$  处，径向速度为 0 因此我们可以得到  $E = \frac{mh^2}{2r_{min}^2} + \frac{mk}{r_{min}}$

## 20241021

## 1

首先先列出角动量  $L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \end{pmatrix} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$   
其关于时间的变化量是

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt}(m(x\dot{y} - y\dot{x})) \\ &= m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) \\ &= F_y x - F_x y \end{aligned}$$

## 2

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \cdot \sin \theta \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ &= xv_y - yv_x \end{aligned}$$

## 3

根据上次的第七题可以得到，面积速度是  $\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$ ，将其乘上  $2m$  之后变为  $mr^2\dot{\phi}$   
而由于  $v = r\dot{\phi}$ ，因此这就是  $rmv$ （即角动量的大小）

## 4

我们不妨考虑一个柱坐标系  $(r, \theta, z)$ ，为了方便讨论设  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} mv_r \\ mv_\theta \\ mv_z \end{pmatrix}$   
那么角动量表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_r \\ mv_\theta \\ mv_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ r & 0 & z \\ mv_r & mv_\theta & mv_z \end{vmatrix} \\ &= (mv_r z) \hat{\theta} + (rmv_\theta) \hat{z} - (rmv_z) \hat{\theta} - (mv_\theta z) \hat{r} \\ &= (-mv_\theta z) \hat{r} - (mv_r z - rmv_z) \hat{\theta} + (rmv_\theta) \hat{z} \end{aligned}$$

由于角动量的方向确定且方向是  $\hat{z}$ ，因此  $\begin{cases} -mv_\theta z = 0 \\ -(mv_r z - rmv_z) = 0 \\ rmv_\theta = A \end{cases}$

这里  $A$  是一个固定的常数 (fixed number) 从第三个式子可以知道  $v_\theta$  并非是 0，因此代回一式可以得到  $z = 0$ ，而这代回二式就可以得到  $v_z = 0$ 。于是  $\mathbf{r}, \mathbf{p}$  的  $z$  坐标都是 0，换言之都在平面  $z = 0$  内部

至于为什么角动量的方向是  $\hat{z}$ ，其实只是参考系选取的而已，我们只需要选取一个让角动量方向是  $\hat{z}$  的参考系就可以了

## 5

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{L} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\
&= \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \\
&= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{r} \times \left( F \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

因此角动量不随时间变化，换言之其守恒

## 6

左侧：  $mgl \sin \phi$ ，方向逆时针

右侧：  $mgl \sin \phi$ ，方向顺时针

## 課題

## 1

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \begin{pmatrix} 0 \\ r_p \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rmv \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

显然  $L = 0$  当且仅当  $r_p$  为 0

而守恒条件为其不受外力或所受外力指向和位置矢量的指向相同

## 2

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} r_p \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix} \\
\mathbf{L} &= \begin{pmatrix} r_p \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mgt \end{pmatrix} \\
&= -mgr_p t \\
\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= -mgr_p
\end{aligned}$$

由于角动量对时间微分等价于力矩，而通过计算可以得到力矩的力就是  $mg$

## 20241023

1

上次原题不重复写

2

上次原题不重复写

3

$$r^2 \dot{\phi} = h \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{h}{r^2} = hu^2$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u} \right) \\ &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} \\ &= -\frac{\dot{\phi}}{u^2} \frac{du}{d\phi} \\ &= -h \frac{du}{d\phi} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( -h \frac{du}{d\phi} \right) \\ &= -h \frac{d}{d\phi} \left( \frac{du}{d\phi} \right) \cdot \frac{d\phi}{dt} \\ &= -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -G \frac{M}{r^2} \\ -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} - \frac{1}{u} h^2 u^4 &= -GM u^2 \\ \frac{d^2u}{d\phi^2} + u &= \frac{GM}{h^2} \end{aligned}$$

4

由于  $\frac{GM}{h^2}$  并不包含  $\phi$ ，因此实际上  $\frac{d^2u}{d\phi^2} = 0$ ，因此  $\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 + u = 0 + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2}$   
 接着假设其齐次解是  $u = A \cos \phi + B \sin \phi$ （由于其特征方程是  $u^2 + 1 = 0$ ）  
 因此其通解是  $u = A \cos \phi + B \sin \phi + \frac{GM}{h^2}$

而为了方便计算我们不妨将其通解记作  $u = A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{GM}{h^2}$ ，这实际上是等价的

## 課題

1

上次原题不重复写

**2**

$$\begin{aligned}m \frac{v^2}{r} &= G \frac{Mm}{r^2} \\v^2 &= \frac{GM}{r} \\v &= \frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{r}}\end{aligned}$$

速度和半径的平方根成反比

$$\begin{aligned}m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r &= G \frac{Mm}{r^2} \\ \frac{4\pi^2}{T^2} &= \frac{GM}{r^3} \\ \frac{r^3}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2}\end{aligned}$$

显然右边是定值

## 20241031

## 1

我们从两个角度证明，首先是通过比耐公式计算得到

由上次所求得通解可以知道  $u = A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{GM}{h^2}$

接着为了方便，我们将基准作为长轴，换言之  $\phi_0 = 0$

因此原式为  $u = A \cos \phi + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2} \left( \frac{Ah^2}{GM} \cos \phi + 1 \right)$

接着我们记  $\epsilon = \frac{Ah^2}{GM}, l = \frac{h^2}{GM}$

于是这就得到了  $u = \frac{1}{l} (1 + \epsilon \cos \phi) \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{l} (1 + \epsilon \cos \phi) \Leftrightarrow r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \phi}$

接着我们可以得到近日点和远日点分别是  $\phi = 0, \pi$

换言之  $r_{min} = \frac{l}{1 + \epsilon}, r_{max} = \frac{l}{1 - \epsilon}$

而半长轴  $a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{l}{1 - \epsilon^2}$

而半短轴  $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{l}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$

至于另一种方法，我们建立一个以太阳为左侧焦点的极坐标系  $(r, \phi)$ ，接着对于任意一点  $P(r, \phi)$ ，我们有  $PF_1 = r, PF_2 = 2a - r, F_2(2c, 0) = (2\epsilon a, 0)$ ，在三角形  $PF_1F_2$  中我们由余弦定理可以得到  $PF_2 = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \phi}$ 。根据椭圆定义（任意一点到两焦点距离之和为  $2a$ ），有

$r + \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \phi} = 2a$ 。而将其化简后得到  $r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \phi}$ ，仅需令  $l = a(1 - \epsilon^2)$  便可得到最后结果（由于我们这里将基准极轴选取为了指向另外一个焦点的方向因此分母处出现了负号）

## 2

在上一问的结果里，我们得到了  $r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \phi}$ 。

显然  $\epsilon = 1$  意味着抛物线，而这代入回极坐标方程就是  $r = \frac{l}{1 + \cos \phi}$

## 3

由于双曲线的情况下  $\epsilon > 1$ ，我们重新考虑某点到两焦点距离关系

$\left| r - \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \phi} \right| = 2a$ ，化简后得到了  $r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 - \epsilon \cos \phi}$ （事实上还有另外一个解，但是其无实际物理意义）

令  $l = a(\epsilon^2 - 1)$  即可得到最终结果

另一方面  $r_{min} = r_{\phi=0} = \frac{l}{1 - \epsilon}$ ，渐近线  $\cos \phi = \frac{1}{\epsilon}$

半实轴可以通过两焦点距离关系得出  $a = \frac{l}{\epsilon^2 - 1}$

半虚轴结合渐近线可以得到为  $b = \frac{l}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$

4

$$\begin{aligned}
r &= \frac{l}{1 + \epsilon \cos \phi} \\
\frac{1}{r} &= \frac{1 + \epsilon \cos \phi}{l} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\epsilon \dot{\phi} \sin \phi}{l} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\epsilon \sin \phi}{l} \cdot \frac{h}{r^2} \\
\dot{r} &= \frac{h}{l} \epsilon \sin \phi \\
\ddot{r} &= \frac{h}{l} \epsilon \dot{\phi} \cos \phi \\
&= \frac{h^2}{r^2 l} \epsilon \cos \phi \\
&= \frac{h^2}{r^2 l} \left( \frac{l}{r} - 1 \right) \\
&= \frac{h^2}{r^3} - \frac{h^2}{l r^2}
\end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}
r &= \frac{l}{1 + \cos \phi} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\dot{\phi} \sin \phi}{l} \\
\dot{r} &= \frac{h \sin \phi}{l} \\
\ddot{r} &= \frac{h^2 \cos \phi}{l} \cdot \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

显然，径向移动方程是  $m\ddot{r} = F$ ，而等号左边和  $r$  的平方成反比

6

由于此时在近日点径向速度为 0，因此

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} m \left( \frac{h}{r} \right)^2 - \frac{GMm}{r} \\
&= \left( \frac{mh^2}{2} - GMmr \right) \frac{1}{r^2} \\
&= \left( \frac{mh^2}{2} - GMm \frac{h^2}{GM(1+\epsilon)} \right) \frac{G^2 M^2 (1+\epsilon)^2}{h^4} \\
&= m \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\epsilon} \right) \frac{G^2 M^2 (1+\epsilon)^2}{h^2} \\
&= - \frac{G^2 M^2 m (1-\epsilon^2)}{2h^2}
\end{aligned}$$

## 課題

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi ab}{h} \\ &= \frac{2\pi}{h} \cdot \frac{l}{1-\epsilon^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \\ &= \frac{2\pi l^2}{h(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 l^4}{h^2(1-\epsilon^2)^3} \\ &= \frac{4\pi^2 l}{h^2} \cdot \frac{l^3}{(1-\epsilon^2)^3} \\ &= \frac{4\pi^2 l}{h^2} \cdot a^3 \end{aligned}$$



20241104

1

(a)

$$\begin{aligned}
dV &= \det \left( \nabla \begin{pmatrix} r \sin \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{vmatrix} \\
0- &= r^2 \sin \phi
\end{aligned}$$

由于在坐标变换时我们需要用的是绝对值，因此这里实际上是  $r^2 \sin \phi$ .  
 另一方面，实际上我们这里使用的是数学定义，即  $\phi$  来作为天顶角而非经度角

(b)

考虑在  $dV$  的范围内，其质量  $dM = \rho dV = \rho R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$

$$\begin{aligned}
dU &= -G \frac{mdM}{s} \\
&= -\frac{1}{s} Gm\rho R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta} \\
s^2 &= r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta \\
2s ds &= -2Rr \sin \theta d\theta \\
ds &= \frac{1}{s} Rr \sin \theta d\theta
\end{aligned}$$

(d)

$D := \{(R, \theta, \phi) : R \in [0, R_0], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]\}$   
 $E := \{(R, s, \phi) : R \in [0, R_0], s \in [r - R, r + R], \phi \in [0, 2\pi]\}$

$$\begin{aligned}
U &= \iiint_D dU \\
&= \iiint_D \left( -\frac{1}{s} Gm\rho R^2 \sin \theta \right) dR d\theta d\phi \\
&= -\frac{Gm\rho}{r} \iiint_E R dR ds d\phi \\
&= -\frac{Gm\rho}{r} \cdot 4\pi \int_0^{R_0} R^2 dR \\
&= -\frac{Gm}{r} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho R_0^3 \\
&= -\frac{GMm}{r}
\end{aligned}$$

## 2

由上一问可以知道，对于一个这样均匀的球壳来说，其内部所受到的势能仅与距离球心距离有关，因此一整个球壳内部的万有引力所产生的势能实际上只需要考虑不同半径的势能总和（由于其球对称性），而这实际上总和是 0. 另一方面，引力实际上是势能的负梯度，因此引力在任意半径上的总和同样是 0

## 3

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{Gm}{x^2} \cdot \left( \frac{4}{3} \pi \rho x^3 \right) \\ \ddot{x} &= -\frac{4\pi}{3} G \rho x \end{aligned}$$

显然，这是简谐振动

## 課題

### 1

$$D := \{(\phi, \theta) : \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$$

$$\begin{aligned} dM &= \rho R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi \\ &= \rho_a R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ M &= \int_D \rho_a R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{2\pi \rho_a R}{r} \int_{r-R}^{r+R} s ds \\ &= \frac{2\pi \rho_a R}{r} \cdot 2Rr \\ &= 4\pi \rho_a R^2 \end{aligned}$$

### 2

$$\begin{aligned} dU &= -G \frac{m dM}{s} \\ &= -\frac{Gm \rho_a R^2 \sin \theta d\theta d\phi}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \int_D dU \\ &= 2\pi \int_0^\pi \left( -\frac{Gm \rho_a R^2 \sin \theta}{s} \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_{r-R}^{r+R} \left( -\frac{Gm \rho_a R}{r} \right) ds \\ &= -\frac{4\pi Gm \rho_a R^2}{r} \\ &= -G \frac{Mm}{r} \end{aligned}$$

因此其收到一个有源向心力，在全方向上总受力为 0

20241106

課題

1

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{r} \\
&= \frac{\epsilon \cos \phi - 1}{l} \\
\dot{u} &= -\frac{\epsilon \sin \phi}{l} \dot{\phi} \\
\frac{du}{d\phi} \cdot \dot{\phi} &= -\frac{\epsilon \sin \phi}{l} \dot{\phi} \\
\frac{du}{d\phi} &= -\frac{\epsilon \sin \phi}{l} \\
\frac{d^2 u}{d\phi^2} &= -\frac{\epsilon \cos \phi}{l}
\end{aligned}$$

因此我们令  $l = \frac{h^2}{k}$  和  $\frac{d^2 u}{d\phi^2} = -\frac{\epsilon \cos \phi}{l}$ ，并代入原微分方程，就有

$$\begin{aligned}
-\frac{\epsilon \cos \phi}{l} + u &= -\frac{1}{l} \\
u &= \frac{\epsilon \cos \phi - 1}{l} \\
\frac{1}{r} &= \frac{\epsilon \cos \phi - 1}{l} \\
r &= \frac{l}{\epsilon \cos \phi - 1}
\end{aligned}$$

2

首先注意到， $r_{min} = \frac{l}{\epsilon - 1}$

其次在  $r_{min}$  处径向速度为零，因此

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} m \frac{h^2}{r^2} + \frac{mk}{r} \\
&= \frac{mh^2(\epsilon - 1)^2}{2l^2} + \frac{mk(\epsilon - 1)}{l} \\
&= \frac{m(\epsilon - 1)}{l} \left( \frac{h^2(\epsilon - 1)}{2l} + k \right) \\
&= \frac{mk^2(\epsilon - 1)}{h^2} \left( \frac{\epsilon - 1}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{mk^2(\epsilon - 1)}{h^2} \cdot \frac{\epsilon + 1}{2} \\
&= \frac{mk^2}{2h^2} (\epsilon^2 - 1) \\
\epsilon^2 - 1 &= \frac{2Eh^2}{mk^2} \\
\epsilon^2 &= 1 + \frac{2h^2 E}{mk^2}
\end{aligned}$$

### 3

1

$$\begin{aligned}mr^2\dot{\phi} &= pmv_0 \\ r^2\dot{\phi} &= pv_0 \\ h &= pv_0\end{aligned}$$

### 4

$$\begin{aligned}\epsilon^2 &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2} \\ \frac{1}{\cos^2\Phi} &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2} \\ 1 + \tan^2\Phi &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2} \\ \tan\Phi &= \sqrt{\frac{2h^2E}{mk^2}}\end{aligned}$$

### 5

事实上前两个等号只是单纯的三角恒等式的变换，不涉及具体证明，因此我们只需要证明最后一个等号  $\tan\Phi = \frac{v_0^2 p}{k}$

首先将  $E = \frac{1}{2}mv_0^2$  和  $h = pv_0$  代入进  $\tan\Phi = \sqrt{\frac{2h^2E}{mk^2}}$ ，有  $\tan\Phi = \sqrt{\frac{2p^2v_0^2 \cdot \frac{1}{2}mv_0^2}{mk^2}} = \sqrt{\frac{p^2v_0^4}{k^2}}$   
而这实际上就是  $\tan\Phi = \frac{pv_0^2}{k}$

---

<sup>1</sup><https://eman-physics.net/elementary/rutherford.html>

## 20241111

## 1

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= f(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) &= f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
\frac{d^2}{dt^2} \left( (m_1 + m_2) \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) &= 0 \\
(m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) &= 0 \\
m_G \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} &= 0 \\
m_G \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} &= 0
\end{aligned}$$

这题似乎存在一点小歧义，如果将这个中心力理解为某个第三方的力分别作用到两个质点上的话合外力不是 0，而是  $f(\vec{r}_1) + f(\vec{r}_2)$ ，这样一来使得两物体的重心并非按照匀速运动，而是按照合外力进行匀加速运动。然而我们如果仅仅考虑两质点间的万有引力或是相互吸引的其他什么力（而非是原题中直接说的中心力）的话，我们确实可以按照上面所给出的方式来导出两质点的重心确实是受合外力 0 进行匀速运动

## 2

$$\begin{aligned}
\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
&= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) \\
&= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{f(r)}{m_2} \frac{\vec{r}}{r} + \frac{f(r)}{m_1} \frac{\vec{r}}{r} \right) \\
&= f(r) \frac{\vec{r}}{r}
\end{aligned}$$

这一问采取考虑添加单位方向  $\frac{\vec{r}}{r}$  的原因一方面是因为这一问计算过程并未明确给出力的指向，另一方面是懒得改上一问，实际上上一问也需要添加方向项

## 3

$$\begin{aligned}
\mu \frac{4\pi^2}{T^2} r &= \frac{G m_1 m_2}{r^2} \\
T^2 &= \frac{4\pi^2 r^3}{G(m_1 + m_2)} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(m_1 + m_2)}}
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} f &= \frac{Gm_1m_2}{r^2} \\ &= Gm_1m_2 \cdot \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2 r_2^2} \\ &= \frac{Gm_1^3m_2}{(m_1+m_2)^2 r_2^2} \end{aligned}$$

課題

1

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - l) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - l) \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \\ &= -\frac{k}{m_2}(x-l) - \frac{k}{m_1}(x-l) \\ &= -k(x-l)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \\ &= -\frac{k}{\mu}(x-l) \end{aligned}$$

显然特解是  $x = l$ ，而齐次解方面，特征方程  $\alpha^2 + \frac{k}{\mu} = 0$  的解是  $\alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{\mu}}$

那么其次解就是  $x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right)$

因此，通解为  $x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right) + l$  而重心初始位置是  $\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ ，因此两质点的位置分别是

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}x \\ &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right) + l \right) \\ &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (C \cos(\omega t + \phi) + l) \\ x_Q &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}x \\ &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (C \cos(\omega t + \phi) + l) \end{aligned}$$

这里  $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ ,  $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,  $\phi = \arctan\left(-\frac{C_2}{C_1}\right)$

3

$$\begin{aligned}
LHS &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1 \left( \frac{d}{dt} \left( x_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2}x \right) \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( \frac{d}{dt} \left( x_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2}x \right) \right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1 \left( \dot{x}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{x} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( \dot{x}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{x} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{x}^2 \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 \\
&= RHS
\end{aligned}$$

20241113

1

(a)

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} &= \frac{d}{dt} p_1 \\
 &= F_1 + \sum_{k=1}^{N-1} F_{k1}
 \end{aligned}$$

(b)

$$F_{kj} = -F_{jk}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} P &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^N p_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{d}{dt} p_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^N \left( F_j + \sum_{k \neq j} F_{kj} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^N F_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} F_{kj} \\
 &= \sum_{j=1}^N F_j
 \end{aligned}$$

最后一个等号这里实际上是一点小小的数学技巧. 第二问我们得到了交换顺序后的受力和交换前的受力相抵消, 而对于每个质点, 我们在计算其本身作为受力指向的时候得到了  $N - 1$  个指向该质点的力, 而在计算剩下的  $N - 1$  个质点的时候, 每一个指向这  $N - 1$  个质点的力都与刚才所得到的力所抵消, 换言之后面的二重求和实际上全部抵消变为 0

(d)

$$\begin{aligned}
 r_G &= \sum_{j=1}^N \frac{m_j r_j}{M} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^N m_j r_j}{\sum_{j=1}^N m_j}
 \end{aligned}$$



(e)

$$\begin{aligned}
P &= m_G \dot{r}_G \\
&= \sum_{j=1}^N m_j \dot{r}_j \\
&= \sum_{j=1}^N m_j v_j \\
&= \sum_{j=1}^N m_j \cdot \frac{\sum_{j=1}^N m_j v_j}{\sum_{j=1}^N m_j} \\
&= M v_G
\end{aligned}$$

(f)

由 c 可知，总动量对时间微分等价于总外力，而由 e 可以知道，总动量等价于总质量与重心速度的乘积，换言之体系的整体运动相对于令所有质量的总和位于重心，所有速度的加权平均作用在重心上。综上，系统整体的运动可以看作总受力作用在质量为总质量的重心所引起的重心运动

(g)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N m_j \frac{dr'_G}{dt} &= \sum_{j=1}^N m_j (v_j - v_G) \\
&= P - \sum_{j=1}^N m_j v_G \\
&= P - M v_G \\
&= 0
\end{aligned}$$

(h)

首先显然根据分解我们可以知道，总能量实际上是相当于重心动能和各质点相对重心的运动的动能的总和（也就是 f 证明的结果），而根据 g 我们可以知道，各质点相对重心的动量实际上是 0，而显然质量项没有 0 出现，换言之相对质心运动的动能项为 0

## 課題

1

$$\begin{aligned}
mv &= (m + dm)(v + dv) + (-dm)[v + dv - u] \\
mv &= mv + mdv + vdm + dmdv - vdm - dmdv + udm \\
0 &= mdv + udm \\
0 &= \frac{dv}{u} + \frac{dm}{m}
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
-\frac{dv}{u} &= \frac{dm}{m} \\
-\frac{1}{u} \int dv &= \int \frac{1}{m} dm \\
-\frac{v}{u} &= \log m + C
\end{aligned}$$

代入初值我们有  $C = -\log m_0$

$$\begin{aligned}
-\frac{v}{u} &= \log m - \log m_0 \\
v &= u (\log m_0 - \log m) \\
&= u \log \left( \frac{m_0}{m} \right)
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
(m_0 - \alpha t) \frac{dv}{dt} &= \frac{u}{dt} dm - (m_0 - \alpha t) g \\
(m_0 - \alpha t) \frac{dv}{dt} &= u\alpha - (m_0 - \alpha t) g \\
(m_0 - \alpha t) \left( \frac{dv}{dt} + g \right) &= u\alpha \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{u\alpha}{m_0 - \alpha t} - g \\
\int dv &= \int \left( \frac{u\alpha}{m_0 - \alpha t} - g \right) dt \\
v &= -u \log (m_0 - \alpha t) - gt + C
\end{aligned}$$

代入初值可以得到,  $C = u \log m_0$

$$\begin{aligned}
v &= -u \log (m_0 - \alpha t) - gt + u \log m_0 \\
&= u \log \left( \frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \right) - gt
\end{aligned}$$

20241118

1

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho v &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho v \\ r_0^3 v_0 &= r^3 v \\ v &= \frac{r_0^3}{r^3} v_0\end{aligned}$$

2

由于板子和人构成的系统并未收到外力，因此整体质心并未发生移动  
接着我们不妨假设板子移动距离为  $d$ ，同时将一开始人站的位置作为原点

$$\begin{aligned}r_G &= \frac{M \cdot \frac{l}{2} + m \cdot 0}{M + m} \\ &= \frac{Ml}{2(M + m)} \\ &= r'_G \\ &= \frac{M \cdot (d + \frac{l}{2}) + m \cdot (d + l)}{M + m}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{Ml}{2(M + m)} &= \frac{M(d + \frac{l}{2}) + m(d + l)}{M + m} \\ Ml &= 2Md + Ml + 2md + 2ml \\ 0 &= Md + md + ml \\ d &= -\frac{ml}{M + m}\end{aligned}$$

3

线密度是  $\rho$ ，因此在提起长度为  $x$  时，被提起部分的重力为  $\rho xg$   
由于动量对时间微分是力，因此为了保持整体速度为  $v$ ，我们需要考虑增加一项“增加动量”的力，大小是  $\dot{p} = \rho \dot{x} \cdot v = \rho v^2$ 。因此总受力就是  $\rho(gx + v^2)$   
而如果是在非匀速的情况下，我们需要考虑进惯性力，即  $\rho xa$ ，于是总力就是  $\rho(gx + v^2 + xa)$

4

首先我们考虑铅直方向上的运动，在  $t$  到  $t + dt$  期间

$$\begin{aligned}(m + dm) \cdot (v + dv) - mv \\ &= (\rho x + \rho v dt) \cdot (v + a dt) - \rho x v \\ &= (\rho xg - T) dt\end{aligned}$$

至于水平方向，我们同样有

$$\begin{aligned}(m - dm) \cdot (v + dv) - mv \\ &= (\rho(l - x) - \rho v dt) \cdot (v + a dt) - \rho(l - x)v \\ &= T dt\end{aligned}$$

由于这两个张力  $T$  是相等的，因此我们分别表示出来，对于上式的垂直方向

$$\begin{aligned}(\rho x + \rho v dt) \cdot (v + a dt) - \rho x v &= (\rho x g - T) dt \\ \rho x v + \rho v^2 dt + \rho x a dt + \rho v a dt dt - \rho x v &= (\rho x g - T) dt \\ \rho v^2 dt + \rho x a dt + \rho v a dt dt &= (\rho x g - T) dt \\ \rho dt (v^2 + x a) &= (\rho x g - T) dt \\ T &= \rho (x g - v^2 - x a)\end{aligned}$$

在水平方向

$$\begin{aligned}(\rho(l-x) - \rho v dt) \cdot (v + a dt) - \rho(l-x)v &= T dt \\ \rho(l-x)v - \rho v^2 dt + \rho(l-x)a dt - \rho v a dt dt - \rho(l-x)v &= T dt \\ \rho dt ((l-x)a - v^2) &= T dt \\ T &= \rho ((l-x)a - v^2)\end{aligned}$$

联立上面两个式子我们可以得到

$$\begin{aligned}a &= \frac{xg}{l} \\ \ddot{x} &= \frac{xg}{l}\end{aligned}$$

考虑特征方程我们有通解  $x = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$

由于  $x(0) = x_0$ ，我们得到  $C_1 + C_2 = x_0$

由于  $v(0) = 0$ ，我们有  $C_1 \sqrt{\frac{g}{l}} - C_2 \sqrt{\frac{g}{l}} = 0$

由上面的式子我们可以知道， $C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$

综上我们得到

$$x(t) = \frac{x_0}{2} \exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + \frac{x_0}{2} \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

## 課題

我们假设线密度为  $\rho$ ，于是分别考虑棒两端（为了方便，令右边垂下的长度为  $x$ ）

$$\begin{aligned}m_R &= \rho x \\ m_R \ddot{x} &= \rho x g - T \\ \rho x \ddot{x} &= \rho x g - T \\ m_L &= \rho(l-x) \\ -m_L \ddot{x} &= \rho(l-x)g - T \\ -\rho(l-x)\ddot{x} &= \rho(l-x)g - T\end{aligned}$$

将左右两边合并后

$$\begin{aligned}x\ddot{x} + (l-x)\ddot{x} &= xg - (l-x)g \\ l\ddot{x} &= (2x-l)g \\ \ddot{x} &= \frac{g}{l}(2x-l) \\ \ddot{x} - \frac{2g}{l}x + g &= 0\end{aligned}$$

显然特解是  $x = \frac{l}{2}$ ，而齐次解是  $x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right)$

这题似乎缺少条件，因为对于这一步而言缺少了一个初始值无法完整求解，因此我们假设初始速度为 0

代入初值可得  $C_1 = x_0 - \frac{l}{2}, C_2 = 0$

因此， $x = \frac{l}{2} + \left(x_0 - \frac{l}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right)$

20241120

1

$$\begin{aligned}
m_j \ddot{x}_j &= F_j \\
r_j \times m_j \ddot{x}_j &= r_j \times F_j \\
\frac{d}{dt} L_j &= N_j \\
\sum_{j=1}^n \frac{dL_j}{dt} &= \sum_{j=1}^n N_j \\
\frac{dL}{dt} &= N
\end{aligned}$$

2

根据上次问题可以知道整体角动量为各角动量总和，即  $L = \sum_{j=1}^N (\mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j)$

对于位置向量  $\mathbf{r}_j$ ，我们注意到其等价于  $\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j$

另一方面，动量项  $\mathbf{p}_j = m_j v_j = m_j \dot{r}_j = m_j \cdot \left( \frac{d}{dt} r_G + \frac{d}{dt} r'_j \right)$

于是总角动量等价于  $\sum_{j=1}^N m_j (r_G + r'_j) \times \left( \frac{dr_G}{dt} + \frac{dr'_j}{dt} \right)$

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{j=1}^N m_j (r_G + r'_j) \times \left( \frac{dr_G}{dt} + \frac{dr'_j}{dt} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N m_j \left( (r_G + r'_j) \times \frac{dr_G}{dt} + (r_G + r'_j) \times \frac{dr'_j}{dt} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N m_j (r_G \times \dot{r}_G + r'_j \times \dot{r}_G + r_G \times \dot{r}'_j + r'_j \times \dot{r}'_j) \\
&= r_G \times P + \sum_{j=1}^N m_j r'_j \times \dot{r}'_j \\
&= r_G \times P + \sum_{j=1}^N r'_j \times p'_j
\end{aligned}$$

3

本题公式完全复制上一问的，略过

## 4

我们同样利用  $r_j = r_G + r'_j$  来处理

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{j=1}^N r_j \times F_j \\
 &= \sum_{j=1}^N (r_G + r'_j) \times F_j \\
 &= \sum_{j=1}^N r_G \times F_j + \sum_{j=1}^N r'_j \times F_j \\
 &= N_G + N'
 \end{aligned}$$

## 5

显然

## 課題

## 1

$$\begin{aligned}
 L &= L_P + L_Q \\
 &= 2l \times m\omega 2l \\
 &= 4m\omega l^2
 \end{aligned}$$

## 2

$$r_G = \frac{m \cdot 0 + m \cdot 2l}{m + m} = l$$

$$\begin{aligned}
 L_G &= l \cdot 2m\omega l \\
 &= 2m\omega l^2
 \end{aligned}$$

## 3

我们考虑相对位置,  $P, Q$  分别距离重心  $-l, l$ , 线速度分别是  $-\omega l, \omega l$   
 于是我们可以知道  $L' = 2m\omega l^2$   
 综上,  $L = L_G + L' = 4m\omega l^2$

## 20241127

## 1

$$\begin{aligned}
 r &= r_0 + r' \\
 \ddot{r} &= \ddot{r}_0 + \ddot{r}' \\
 a_S &= a_0 + a_{S'} \\
 F_S &= m(a_0 + a_{S'}) \\
 F_S + F &= ma_{S'} \\
 F &= -ma_0
 \end{aligned}$$

## 2

考虑两个惯性系  $S, S'$ ，关系为  $r' = r - vt, t' = t$

考虑速度关系，我们有  $u' = \dot{r}' = \dot{r} - v = u - v$

而加速度方面， $a' = \dot{u}' = \dot{u} = a$

由于在伽利略变换下（都为惯性系）受力相等，而其加速度也相等，因此我们可以知道运动方程没有区别

## 3

考虑运动方程为  $mg - N = ma$ ，因此地面对物体支持力是  $N = m(g - a)$

另一方面，根据牛三，物体对地面所造成的力为大小相同方向相反的  $m(a - g)$

## 4

由于水平方向上并未收到外力因此我们可以立刻知道  $x'(t) = u_0 t$

至于竖直方向，我们有加速度  $-(g + a)$ ，因此  $y'(t) = h_0 - \frac{1}{2}(g + a)t^2$

## 5

我们首先考虑一个单纯弹簧的例子，显然弹簧是个简谐振动，我们可以得到其运动为

$$x' = \frac{ma}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

接着我们需要考虑其在基础弹簧运动的基础上额外运动的部分，即  $\frac{m(g - a)}{k}$

综上，运动为  $x(t) = \frac{m(g - a)}{k} + \frac{ma}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

## 6

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{g} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{\alpha}{g}\right)$$

## 課題

## 1

显然我们可以得到  $x = a \cos(\omega t + \phi)$ ，因此其加速度是  $-a\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

显然其离开表面的要求是  $|-a\omega^2| > g$

因此留在表面的要求是  $a\omega^2 \leq g$



**2**

$$T_0 = \frac{2v_0}{g}$$
$$T = \frac{2v_0}{g - a}$$
$$T = \frac{g}{g - a} T_0$$

**20241202**

**1**

**2**

**課題**

**20241204**

**1**

**2**

**3**

**4**

**5**

**6**

**課題**

**20241209**

**1**

**2**

**3**

**4**

**5**

**課題**

**20241211**

**1**

**2**

**3**

**4**

**5**

**6**

**課題**

**20241216**

**1**

**2**

**3**

**課題**

**1**

**2**

## 参考文献