20240918

1

a

$$\begin{cases}\vec{F}_{21}=m_1\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t}\\\vec{F}_{12}=m_2\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$

b

$\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$

c

$$\begin{aligned}m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2&=\text{一定}\\\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2\right)&=0\\m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t}+m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}&=0\\\vec{F}_{21}+\vec{F}_{12}&=0\end{aligned}$$

d

显然我们有重心速度

$$\vec{v}_G=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

由上述问题注意到分子为定值，因此其只能为静止或匀速直线运动其一

2

$$\begin{aligned}\vec{F}&=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\\\int\vec{F}\mathrm{d}t&=\Delta m\vec{v}\end{aligned}$$

显然等号左边是力积而右边是动量的变化量

3

$$\begin{cases}v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9.8\cdot 1}=4.43m/s\\J=m\cdot v=2\cdot 4.43=8.86kg\cdot m/s\\F=\dfrac{J}{t}=\dfrac{8.86}{1}=8.86N\end{cases}$$

4

(a)

$$\begin{cases}v\left(t\right)=v_0-gt\\y\left(t\right)=y_0+v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

(b)

$$-mg + bv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

注意到在终端速度时，其加速度可近似看作 0
因此运动方程可看作 $-mg + bv_\infty^2 = 0$，于是易得 $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{b}}$

(c)

注意到空气阻力和重力同向，因此有

$$-mg - bv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

課題

$$\begin{aligned}
-mg - bv &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
\mathrm{d}t &= -\frac{m}{mg+bv}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= -\int \frac{m}{mg+bv}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= -\int \frac{1}{g+\frac{b}{m}v}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

在这里令 $\frac{b}{m}v = u$

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}t &= -\frac{m}{b}\int \frac{1}{g+u}\mathrm{d}u \\
t + C &= -\frac{m}{b}\log(g+u) \\
t + C &= -\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)
\end{aligned}$$

我们代入初值 $v(0) = v_0$

$$0 + C = -\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right)$$

将 $C=-\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right)$ 代入到原方程我们可以得到

$$
\begin{aligned}
t-\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right) &= -\frac{m}{b}\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)\\
\frac{bt}{m}-\log\left(g+\frac{b}{m}v_0\right) &= -\log\left(g+\frac{b}{m}v\right)\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right) &= \frac{g+\frac{b}{m}v_0}{g+\frac{b}{m}v}\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)g+\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\frac{b}{m}v &= g+\frac{b}{m}v_0\\
\frac{b}{m}\exp\left(\frac{bt}{m}\right)v &= \left(1-\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\right)g+\frac{b}{m}v_0\\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)v &= \frac{m}{b}\left(1-\exp\left(\frac{bt}{m}\right)\right)g+v_0\\
v &= \frac{m}{b}\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}-1\right)g+\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}v_0
\end{aligned}
$$

而我们注意到

$$
\begin{aligned}
v_\infty &= \lim_{t\to\infty} v\left(t\right)\\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{m}{b}\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}-1\right)g+\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}v_0\right)\\
&= -\frac{mg}{b}
\end{aligned}
$$

20240923

1

(a)

首先我们考虑垂直抗力为 $N = mg\cos\theta$，因此摩擦力为 $\mu' mg\cos\theta$
接着是沿斜坡向下（即 x 轴正方向）的受力为 $mg\sin\theta$
因此我们可以得到运动方程为 $mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

(b)

由于题目并未涉及到斜坡长度问题，因此我们可以简单认为加速度为负即可
根据运动方程我们可以得到，$g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right) < 0$
这等价于 $\mu' > \tan\theta$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g\sin\theta - \mu' g\cos\theta \\
\mathrm{d}t &= \frac{1}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= \int \frac{1}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}\mathrm{d}v \\
t + C &= \frac{v}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}
\end{aligned}$$

考虑初值 $v(0) = v_0$，有

$$C = \frac{v_0}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}$$

再代回原方程，得到

$$\begin{aligned}
t + \frac{v_0}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta} &= \frac{v}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta} \\
v &= v_0 + gt\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \int v\mathrm{d}t \\
&= \int v_0 + gt\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)\mathrm{d}t \\
&= v_0t + \frac{1}{2}g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)t^2 + C
\end{aligned}$$

由于 $x(0) = 0$，因此 $C = 0$
于是，$x = v_0t + \dfrac{1}{2}g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)t^2$

2

$$
\begin{aligned}
-kx &= m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\
-ke^{\lambda t} &= m\lambda^2 e^{\lambda t}\\
\lambda^2 &= -\frac{k}{m}\\
\lambda &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}
$$

于是 $x=\exp\left(\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$，因此角振动数 ω 就是中间的 $\sqrt{\frac{k}{m}}$
其实是找 $i\omega t$ 的 ω
因此
$\begin{cases} x\left(t\right)=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\\ v\left(t\right)=-A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\end{cases}$
代入 $x\left(t\right)=x_0, v\left(0\right)=0$
$\begin{cases} x_0=A\\ 0=B\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow B=0\end{cases}$
综上

$$
\begin{aligned}
x\left(t\right) &= x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\\
v\left(t\right) &= -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)
\end{aligned}
$$

3

(a)

$$
\begin{aligned}
v_x &= -r\omega\sin\omega t\\
v_y &= r\omega\cos\omega t
\end{aligned}
$$

显然我们可以注意到，$v^2=v_x^2+v_y^2=r^2\omega^2$，因此 $v=r\omega$

(b)

$$
\begin{aligned}
a_x &= -r\omega^2\cos\omega t\\
a_y &= -r\omega^2\sin\omega t
\end{aligned}
$$

注意到，加速度方向与位置方向差别仅为负号，因此如果考虑从原点出发到位置的方向的话，加速度方向就是位置方向出发到原点. 而大小则显然是 $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=r\omega^2$

(c)

$$f_x = -mr\omega^2 \cos(\omega t)$$
$$f_y = -mr\omega^2 \sin(\omega t)$$

同样的，受力的方向与位置坐标的方向差别仅为负号，因此其受力指向原点
$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = m\omega^2 r$

(d)

$\begin{cases} v = r\omega \\ a = \omega^2 r \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{v^2}{r}$

課題

1

注意到在微小角度位移的情况下，复原力为 $-mg\sin\theta$
另一方面，其切向加速度可以看作弧长 $l\theta$ 对时间的二阶微分，这即 $l\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
因此运动方程为 $ml\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta$

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta$$
$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\theta$$
$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -g\sin\left(e^{\lambda t}\right)$$

显然这样是无法直接进行求解的，因此我们考虑小角度下的近似：$\sin\theta = \theta$

$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta$$
$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -ge^{\lambda t}$$
$$\lambda^2 = -\frac{g}{l}$$
$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

于是我们得到了 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$
因此周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

2

由于张力 S 的竖直方向分力等于重力，因此 $S\cos\theta = mg$，即 $S = \dfrac{mg}{\cos\theta}$
另一方面这是圆锥摆，因此其向心力 f 为张力 S 的水平分力，因此 $f = S\sin\theta = mg\tan\theta$

$$
\begin{aligned}
mg &= m\omega^2 l\cos\theta \\
mg &= m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l\cos\theta \\
\frac{g}{l\cos\theta} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \\
T^2 &= 4\pi^2\frac{l\cos\theta}{g} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}
\end{aligned}
$$

20240925

1

(a)

在水平方向上，由于没有受力因此可以简单认为

$$x\left(t\right)=v_{x0}t$$

在铅直方向上由于仅受到重力作用因此

$$\begin{aligned}y\left(t\right)&=v_{y0}t-\frac{1}{2}gt^2\\&=v_{y0}\cdot\frac{x\left(t\right)}{v_{x0}}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x\left(t\right)}{v_{x0}}\right)^2\\&=-\frac{g}{2v_{x0}^2}x^2\left(t\right)+\frac{v_{y0}}{v_{x0}}x\left(t\right)\end{aligned}$$

显然，这是一条抛物线

(b)

y 达到最大的时候，其向上的速度是 0. 因此我们有 $t=\dfrac{v_{y0}}{g}$
此时

$$\begin{aligned}x&=\frac{v_{x0}v_{y0}}{g}\\y&=\frac{v_{y0}^2}{2g}\end{aligned}$$

(c)

我们用 v_0 来重新表示其水平方向上和铅直方向上的运动

$$\begin{aligned}x&=v_0t\cos\theta_0\\y&=v_0t\sin\theta_0-\frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

影响水平飞行距离的是飞行时间，而时间与竖直方向速度减到 0 的时间有关

$$t=\frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

于是水平方向能达到的最远距离为

$$\begin{aligned}x_{max}&=2v_0\cdot\frac{v_0\sin\theta_0}{g}\cdot\cos\theta_0\\&=\frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0\\&=\frac{v_0^2}{g}\sin2\theta_0\end{aligned}$$

因此我们可以知道，若 x_{max} 取最大，则 $2\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta_0=\dfrac{\pi}{4}$

課題

在水平方向上

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -\beta m v_x \\
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -\beta v_x \\
-\frac{1}{\beta v_x}\mathrm{d}v_x &= \mathrm{d}t \\
-\frac{1}{\beta}\int \frac{1}{v_x}\mathrm{d}v_x &= \int \mathrm{d}t \\
-\frac{1}{\beta}\log v_x &= t + C
\end{aligned}
$$

考虑到初始时刻 $v_x = v_{x0}$

$$
C = -\frac{1}{\beta}\log v_{x0}
$$

代回原方程

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\beta}\log v_x &= t - \frac{1}{\beta}\log v_{x0} \\
\log\left(\frac{v_x}{v_{x0}}\right) &= -\beta t \\
\frac{v_x}{v_{x0}} &= e^{-\beta t} \\
v_x &= v_{x0}e^{-\beta t}
\end{aligned}
$$

因此当经过足够长时间后，水平方向上速度趋近于 0
接着我们考虑铅直方向

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -mg - \beta m v_y \\
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -g - \beta v_y \\
-\frac{1}{g + \beta v_y}\mathrm{d}v_y &= \mathrm{d}t \\
-\int \frac{1}{g + \beta v_y}\mathrm{d}v_y &= \int \mathrm{d}t \\
-\log(g + \beta v_y) &= t + C
\end{aligned}
$$

初始时刻 $v_y = v_{y0}$ 代入原方程得到

$$
C = -\log(g + \beta v_{y0})
$$

因此

$$
\begin{aligned}
-\log(g + \beta v_y) &= t - \log(g + \beta v_{y0}) \\
\log\left(\frac{g + \beta v_{y0}}{g + \beta v_y}\right) &= t \\
\frac{g + \beta v_{y0}}{g + \beta v_y} &= e^t \\
g + \beta v_{y0} &= ge^t + \beta e^t v_y \\
v_y &= \frac{g}{\beta}\left(\frac{1}{e^t} - 1\right) + \frac{1}{e^t}v_{y0}
\end{aligned}
$$

因此，经过足够长时间后，铅直方向上的速度趋近于 $-\dfrac{g}{\beta}$
至于其 x, y 坐标，我们只需要对这两个求得的速度进行关于 t 的积分

$$\begin{aligned}
x &= \int v_{x0} e^{-\beta t} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + C \\
&= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} v_{x0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \int \left(\frac{g}{\beta} \left(\frac{1}{e^t} - 1 \right) + \frac{1}{e^t} v_{y0} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{g}{\beta} \left(-e^{-t} - t \right) - v_{y0} e^{-t} + C \\
&= \frac{g}{\beta} \left(-e^{-t} - t \right) - v_{y0} e^{-t} + \frac{g}{\beta} + v_{y0}
\end{aligned}$$

20240930

1

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t} &= F \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= F\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot v &= F\cdot v \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W \\
\frac{1}{2}mv^2 &= W
\end{aligned}
$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力所做的功

2

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -f\cdot p \\
W_2 &= -f\cdot q - f\cdot(q-p) \\
&= -f\cdot(2q-p) \\
W_2 - W_1 &= 2f\left(p-q\right) \neq 0
\end{aligned}
$$

3

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}x + m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}y &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x + m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
m\left(v_x\mathrm{d}v_x + v_y\mathrm{d}x_y\right) &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2\right) &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W \\
\frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) &= W
\end{aligned}
$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力做的功

4

$$
\begin{aligned}
\Delta E_k &= \int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)\mathrm{d}x \\
E_{k2} - E_{k1} &= \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
E_{k2} - E_{k1} &= U\left(x_1\right) - U\left(x_2\right)
\end{aligned}
$$

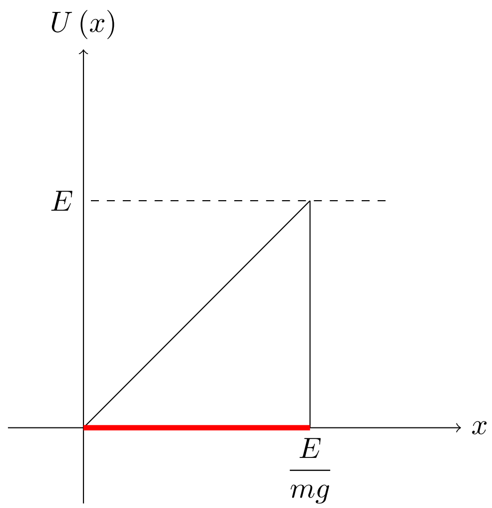
5

(a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -mg \\
U(x) &= -\int f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= mgx + C = mgx
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgx = const
$$

(b)



于是我们可以得到，运动范围是红线所覆盖的 $0 \le x \le \dfrac{E}{mg}$

6

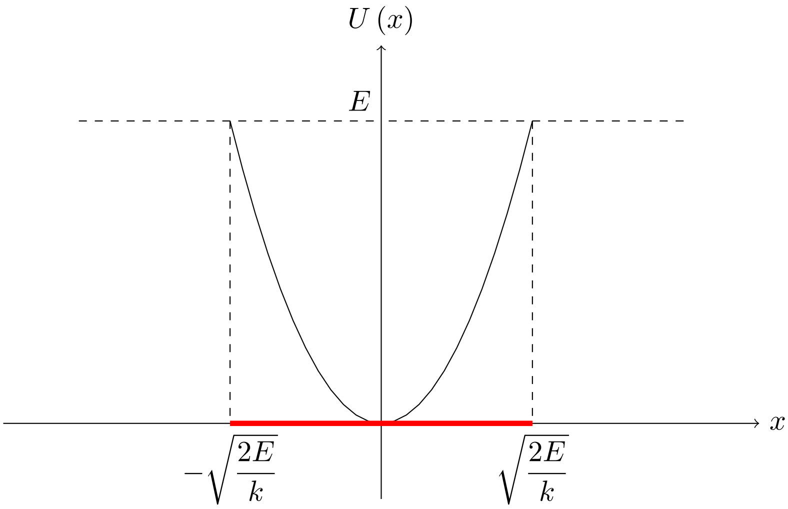
(a)

$$
\begin{aligned}
U(x) &= -\int f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int -kx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}kx^2 + C \\
&= \frac{1}{2}kx^2
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -kx \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v &= -kxv \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \\
\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0
\end{aligned}
$$

(c)



由图可知，运动范围是 $-\sqrt{\dfrac{2E}{k}} \le x \le \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$

(d)

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
\frac{1}{2}mv^2 &= E - \frac{1}{2}kx^2 \\
v^2 &= \frac{1}{m}\left(2E - kx^2\right) \\
v &= \pm\sqrt{\frac{1}{m}\left(2E - kx^2\right)}
\end{aligned}
$$

(e)

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\cos\left(\omega t\right)\right) \\ &= -a\omega\sin\left(\omega t\right) \\ &= -a\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}tx\right) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} K\left(t\right) &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\cdot\left(a\omega\sin\omega t\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\left(\omega t\right) \end{aligned}$$

由于 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$，我们可以得到 $k = m\omega^2$

$$\begin{aligned} U\left(t\right) &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(a\cos\left(\omega t\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2a^2\cos^2\left(\omega t\right) \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} K\left(t\right)+U\left(t\right) &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\left(\sin^2\left(\omega t\right)+\cos^2\left(\omega t\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \end{aligned}$$

課題

1

$$\begin{aligned} \langle K\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} K\left(t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

对于这个积分，我们按照如下方式来积

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos s\right)\cdot\frac{1}{2\omega}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos s\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sin s\right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\langle K\rangle &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3\cdot\frac{\pi}{\omega} \\ &= \frac{1}{4}ma^2\omega^2\end{aligned}$$

类似的，$\langle U\rangle$ 由于与 $\langle K\rangle$ 只有相位差，因此只需要后面的相位进行积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\omega t\right)+1\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos s\right)\cdot\frac{1}{2\omega}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos s\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\sin s\right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega}\end{aligned}$$

因此 $\langle K\rangle=\langle U\rangle$

2a

由于受力为其势能的负梯度，因此可以注意到，x_a 处梯度为负，受力方向是正；x_d 处梯度是正，受力方向是负；x_c, x_e 两处梯度为零，因此合力为 0

2b

$\begin{cases} x_a \le x & E=E_2 \\ x_b\le x\le x_d, x_f\le x & E=E_1 \\ x_c = x & E=E_0\end{cases}$ $\begin{cases} v_a = 0 & E=E_2 \\ v_b=v_d=v_f=0 & E=E_1 \\ v_c=0 & E=E_0\end{cases}$ 因此，$x=x_c$ 的情况可能是简谐振子速度为 0 的振幅处（若 $E=E_0$）或处于合力为 0 的情况（若 $E=E_1$ 或 $E=E_2$）

2c

由（b）的推导可以知道，动能最大的点在 x_c

20241002

1

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \\
mp^2e^{pt} + \Gamma pe^{pt} + ke^{pt} = 0 \\
\left(mp^2 + \Gamma p + k\right)e^{pt} = 0 \\
mp^2 + \Gamma p + k = 0 \\
mp^2 + 2m\gamma p + m\omega_0^2 = 0 \\
p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0 \\
p &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}
$$

2

由上一问我们可以得到

$$
x\left(t\right) = Ae^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}
$$

由初期条件 $x\left(0\right) = 0$，我们得到 $A + B = 0$. 接着

$$
\begin{aligned}
v\left(t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\left(t\right) \\
&= -A\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) - B\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) \\
&= \left(B - A\right)\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}
$$

初期条件 $v\left(0\right) = v_0$ 可得 $B - A = \dfrac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

因此，$A = -\dfrac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, B = \dfrac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

综上，我们有

$$
\begin{aligned}
x\left(t\right) &= -\frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} + \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} \\
&= \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\left(e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} - e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}\right)
\end{aligned}
$$

3

(a)

这里我们只需要将其代入运动方程验证即可

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx &= 0 \\
m\gamma\left(-2 + \gamma t\right)e^{-\gamma t} + \Gamma\left(1 - \gamma t\right)e^{-\gamma t} + kte^{-\gamma t} &= 0 \\
m\gamma\left(-2 + \gamma t\right)e^{-\gamma t} + 2m\gamma\left(1 - \gamma t\right)e^{-\gamma t} + m\gamma^2te^{-\gamma t} &= 0 \\
\left(-2 + \gamma t\right)e^{-\gamma t} + 2\left(1 - \gamma t\right)e^{-\gamma t} + \gamma te^{-\gamma t} &= 0
\end{aligned}
$$

显然，将 $e^{-\gamma t}$ 提出来之后系数项总和为 0，因此等号两边相等

(b)

我们不妨设其解为 $x(t) = Ate^{-\gamma t}$，显然满足 $x(0) = 0$
接着对于 $v(0)$，由于 $v(t) = A(1-\gamma t)e^{-\gamma t}$，因此我们可以注意到，$A = v_0$
综上，$x(t) = v_0 te^{-\gamma t}$

4

(a)

由于 $\omega_0 > \gamma$，因此 1 里的解为 $p = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
因此我们假设通解是 $x(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right)$
考虑 $x(0) = 0$，我们有 $A = 0$，于是我们可以将通解写成 $x(t) = Be^{-\gamma t}\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)$
然后考虑 $v(t) = e^{-\gamma t}\left(B\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) - B\gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right)$ 和 $v(0) = v_0$

$$\begin{aligned}
B\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) - B\gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) &= v_0 \\
B\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) - \gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right) &= v_0 \\
\frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) - \gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)} &= B \\
\frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} &= B
\end{aligned}$$

因此，$x(t) = \dfrac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right)$

(b)

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\Gamma v - kx \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= -2m\gamma v\cdot v - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) &= -2m\gamma v\cdot v
\end{aligned}$$

課題

1

首先我们将三种振动的位移时间依赖性 $x(t)$ 写在一起

$$\begin{cases}
x(t) = \dfrac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\left(e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} - e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}\right) & \omega_0 < \gamma \\
x(t) = v_0 te^{-\gamma t} & \omega_0 = \gamma \\
x(t) = \dfrac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right) & \omega_0 > \gamma
\end{cases}$$

显然式子过于繁琐难以判断，因此我们首先记 $\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ 和 $\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ 分别为 $\hat{\omega}$ 和 $\widetilde{\omega}$
于是过衰减振动变成

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}}\left(e^{-\gamma t+\hat{\omega}t}-e^{-\gamma t-\hat{\omega}t}\right) \\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-\gamma t}\left(e^{\hat{\omega}t}-e^{-\hat{\omega}t}\right) \\ &= \frac{v_0}{\hat{\omega}}e^{-\gamma t}\sinh(\hat{\omega}t) \\ &\simeq \frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-\gamma t}\cdot e^{\hat{\omega}t} \\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-(\gamma-\hat{\omega})t} \end{aligned}$$

衰减振动变成

$$x(t) = \frac{v_0}{\widetilde{\omega}}e^{-\gamma t}\sin(\widetilde{\omega}t)$$

因此简化后的三个式子变成

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-(\gamma-\hat{\omega})t} & \omega_0<\gamma \\ x(t) = v_0te^{-\gamma t} & \omega_0=\gamma \\ x(t) = \dfrac{v_0}{\widetilde{\omega}}e^{-\gamma t}\sin(\widetilde{\omega}t) & \omega_0>\gamma \end{cases}$$

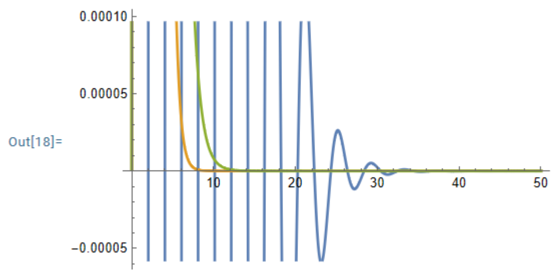
注意到这里公因式是 $v_0e^{-\gamma t}$
因此我们仅需证明 $\left\{\frac{1}{\hat{\omega}}\sinh(\hat{\omega}t), t, \frac{1}{\widetilde{\omega}}\sin(\widetilde{\omega}t)\right\}$ 中，t 的增长速度/斜率/梯度是最快/大的
显然，这里 t 在任何情况下都比第三项含有 sin 的式子梯度要大，因此我们只需要讨论双曲正弦的部分.
显然趋近于无穷时，次方位置为负项的那部分可以忽视掉，也就是最后的 $\frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-(\gamma-\hat{\omega})t}$. 而系数对于衰减速度几乎没有任何影响（因为控制主体增减的是指数函数），因此我们仅需要判断指数位置
由于 $\hat{\omega}>0$，因此 $-(\gamma-\hat{\omega})>-\gamma$. 因此临界衰减振动的衰减速度大于过衰减的衰减速度

2

我们先分别将三种情况给代入

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0\sqrt{0.6}}e^{-0.2\omega_0t}\sin\left(\sqrt{0.6}\omega_0t\right) & \gamma=0.2\omega_0 \\ x(t) = v_0te^{-\omega_0t} & \gamma=\omega_0 \\ x(t) = \dfrac{v_0}{2\omega_0\sqrt{0.44}}\left(e^{\left(-1.2+\sqrt{0.44}\right)\omega_0t}-e^{\left(-1.2-\sqrt{0.44}\right)\omega_0t}\right) & \gamma=1.2\omega_0 \end{cases}$$

接着代入 mathematica 之后我们可以得到



具体来说，我们可以知道，蓝色波动的那根是衰减运动，稍微靠右上的绿色线是过衰减，剩下的黄线是临界衰减

20241007

1

(a)

$$
\begin{aligned}
f_0\cos(\omega t) &= -a_0\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)+2\gamma\cdot\left(-a_0\omega\sin(\omega t+\phi_0)\right)+a_0\omega_0^2\cos(\omega t+\phi_0)\\
f_0\cos(\omega t) &= -a_0\omega^2\left(\cos(\omega t)\cos\phi_0-\sin(\omega t)\sin\phi_0\right)\\
&\quad -2\gamma a_0\omega\left(\sin(\omega t)\cos\phi_0+\cos(\omega t)\sin\phi_0\right)\\
&\quad +a_0\omega_0^2\left(\cos(\omega t)\cos\phi_0-\sin(\omega t)\sin\phi_0\right)\\
f_0\cos(\omega t) &= \cos(\omega t)\left(-a_0\omega^2\cos\phi_0-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\omega_0^2\cos\phi_0\right)\\
&\quad +\sin(\omega t)\left(a_0\omega^2\sin\phi_0-2\gamma a_0\omega\cos\phi_0-a_0\omega_0^2\sin\phi_0\right)
\end{aligned}
$$

通过比较系数可以得到

$$
\begin{cases}
f_0=-a_0\omega^2\cos\phi_0-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\omega_0^2\cos\phi_0\\
0=a_0\omega^2\sin\phi_0-2\gamma a_0\omega\cos\phi_0-a_0\omega_0^2\sin\phi_0
\end{cases}
\implies
\begin{cases}
f_0=-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi_0\\
0=-2\gamma a_0\omega\cos\phi_0+a_0\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin\phi_0
\end{cases}
$$

由下式

$$
\begin{aligned}
0 &= a_0\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin\phi_0-2\gamma\omega\cos\phi_0\right)\\
0 &= \left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin\phi_0-2\gamma\omega\cos\phi_0\\
\tan\phi_0 &= \frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\sin\phi_0 &= \frac{\tan\phi_0}{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}\\
&= \frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\gamma^2\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}}}\\
&= \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}
\end{aligned}
$$

这里疑似有个符号问题，由于并没有标明 ω,ω_0 的大小关系因此这里 $\sin\phi_0$ 处可能存在负号

接下来我们看上式

$$
\begin{aligned}
f_0 &= -2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi_0\\
a_0 &= \frac{f_0}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi_0-2\gamma\omega\sin\phi_0}\\
&= \frac{f_0}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}-2\gamma\omega\frac{\tan\phi_0}{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}}\\
&= \frac{f_0\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-2\gamma\omega\tan\phi_0}\\
&= -\frac{f_0\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}{\frac{2\gamma\omega}{\tan\phi_0}+2\gamma\omega\tan\phi_0}\\
&= -\frac{f_0}{2\gamma\omega}\frac{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}{\frac{1}{\tan\phi_0}+\tan\phi_0}\\
&= -\frac{f_0}{2\gamma\omega}\cos\phi_0\sqrt{\sec^2\phi_0}\sin\phi_0
\end{aligned}
$$

由于这里 a_0 的实际意义是振幅，因此我们只需要考虑绝对值的情况，因此

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left|-\frac{f_0}{2\gamma\omega}\cos\phi_0\sqrt{\sec^2\phi_0}\sin\phi_0\right| \\
&= \frac{f_0}{2\gamma\omega}\sin\phi_0 \\
&= \frac{f_0}{2\gamma\omega}\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\
&= \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}a_0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\
&= -\frac{1}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4\left(\omega^3-\omega_0^2\omega+2\gamma^2\omega\right) \\
&= \frac{2\omega\left(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2\right)}{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

注意到，上式取极值的情况当且仅当分子 $2\omega\left(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2\right)=0$
因此，$\omega^2=\omega_0^2-2\gamma^2$ 时取到极值

(c)

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_0\cos(\omega t+\phi_0) \\
&= -a_0\omega\sin(\omega t+\phi_0)
\end{aligned}$$

2

(a)

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -kx+mf_0\cos(\omega t) \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -m\omega_0^2x+mf_0\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -m\omega_0^2x+mf_0\cos(\omega t) \\
-a_0\omega^2\cos(\omega t+\phi) &= -a_0\omega_0^2\cos(\omega t+\phi)+f_0\cos(\omega t) \\
f_0\cos(\omega t) &= a_0\cos(\omega t+\phi)\left(\omega_0^2-\omega^2\right) \\
f_0\cos(\omega t) &= a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi\cos(\omega t)-a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\phi\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

比较系数可得 $\begin{cases} f_0 = a_0\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\phi \\ 0 = a_0\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\phi \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \phi = 0 \end{cases}$

于是，$x\left(t\right) = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega t\right)$

(c)

注意到上一问求出来的实际上是特解，因此我们只需要讨论齐次解从而推导出通解
对于齐次解，其为 $x\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right)$
因此通解是 $x\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right) + \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega t\right)$

$$\begin{aligned} v\left(t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\left(t\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega t\right)\right) \\ &= -A\omega_0\sin\left(\omega_0 t\right) + B\omega_0\cos\left(\omega_0 t\right) - \frac{\omega f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\left(\omega t\right) \end{aligned}$$

考虑到 $x\left(0\right) = 0, v\left(t\right) = 0$
$\begin{cases} 0 = A + \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ 0 = B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ B = 0 \end{cases}$
综上，解为 $x\left(t\right) = -\dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega t\right)$

(d)

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega t\right) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\left(\omega_0 + \Delta\omega\right)t\right) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\Delta\omega t\right) - \sin\left(\omega_0 t\right)\sin\left(\Delta\omega t\right)\right) \\ &\xrightarrow{\Delta\omega t \to 0} -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos\left(\omega_0 t\right)\cdot 1 - \sin\left(\omega_0 t\right)\cdot 0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

課題

1

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\cdot v\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T mf_0\cos(\omega t)\cdot v\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T mf_0\cos(\omega t)\cdot\left(-a_0\omega\sin(\omega t+\phi_0)\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{T}\left[\frac{1}{2}t\sin\phi_0-\frac{1}{4\omega}\cos(2\omega t+\phi_0)\right]_0^T \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{T}\left(\frac{T}{2}\sin\phi_0+\frac{1}{4\omega}\cos\phi_0-\frac{1}{4\omega}\cos(2\omega T+\phi_0)\right) \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{2}\sin\phi_0-\frac{a_0f_0m}{4T}\cos\phi_0+\frac{a_0f_0m}{4T}\cos(2\omega T+\phi_0) \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{2}\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}-\frac{a_0f_0m}{4T}\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\
&+\frac{a_0f_0m}{4T}\left(\cos(2\omega T)\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}-\sin(2\omega T)\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\right) \\
&= \frac{a_0f_0m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}{4T\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\left(\cos(2\omega T)-1\right)-\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\left(\frac{a_0f_0m\omega}{2}+\sin(2\omega T)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P' &= -\frac{1}{T}\int_0^T 2m\gamma v\cdot v\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2m\gamma}{T}\int_0^T v^2\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\phi_0)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{T}\left[\frac{1}{4\omega}\sin\left(2\left(\omega t+\phi_0\right)\right)-\frac{1}{2\omega}\left(\omega t+\phi_0\right)\right]_0^T \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{4\omega T}\left(\sin\left(2\left(\omega T+\phi_0\right)\right)-2\left(\omega T+\phi_0\right)-\sin(2\phi_0)+2\phi_0\right) \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{4\omega T}\left(2\sin(\omega T+\phi_0)\cos(\omega T+\phi_0)-2\omega T-\sin(2\phi_0)\right) \\
&= -\frac{a_0^2m\omega^2\gamma}{\omega T}\left(\sin(\omega T)\cos(\omega T)\left(\cos^2\phi_0-\sin^2\phi_0\right)+\sin\phi_0\cos\phi_0\left(\cos^2(\omega T)-\sin^2(\omega T)-1\right)\right)
\end{aligned}
$$

为了方便，我们先计算一些小细节

$$
\begin{aligned}
\cos^2\phi_0-\sin^2\phi_0 &= \frac{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}-\frac{4\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2} \\
&= 1-\frac{8\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\phi_0\cos\phi_0 &= \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cdot\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\\
&= \frac{2\gamma\omega\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}
\end{aligned}
$$

于是，最后结果是

$$
P' = -\frac{a_0^2 m\omega\gamma}{T}\left(\left(1-\frac{8\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\right)\sin\left(2\omega T\right)-\frac{4\gamma\omega\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\sin^2\left(\omega T\right)\right)
$$

这不是最简但是我懒得化简了，显然这两项里 a_0 都还可以代入，代入再进行化简应该没这么繁琐. 原则上 $P=P'$

2

本题只需要计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}P$ 证明在 $\omega=\omega_0$ 时取到极值即可，而这是参考问题 1.(b) 的结论

20241009

1

这题和上次的相同，不重复写

2

这实际上是一个方向全部朝下大小为 g 的向量场，我们只需要分别通过三条路径进行线积分

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \\
X_1(t) &= \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}\right) \\
X_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2at \end{pmatrix} (0 \le t \le 1) \\
X_{31}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}}t \\ -2at \end{pmatrix} (0 \le t \le 1) \\
X_{32}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}}t \\ 0 \end{pmatrix} (0 \le t \le 1) \\
X_1'(t) &= \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}\right) \\
X_2'(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} (0 \le t \le 1) \\
X_{31}'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -2a \end{pmatrix} (0 \le t \le 1) \\
X_{32}'(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} (0 \le t \le 1)
\end{aligned}
$$

通过上面的计算，我们有

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-ag\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2ag \\
W_2 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= 2ag \\
W_3 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -2a \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= 2ag + 0 \\
&= 2ag
\end{aligned}
$$

3

首先由于我们需要证明存在 $U(x,y,z)$ 使得

$$\begin{aligned}F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}\\F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}\\F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}\end{aligned}$$

因此我们不妨假设在 A,B 间 $U=-\int_A^B F\cdot\mathrm{d}s$
而这相对于 $U_x(B)-U_x(A)=-F_x\cdot\Delta x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{U_x(B)-U_x(A)}{\Delta x}\\&= -F_x\end{aligned}$$

其余两个方向也可以类似地证明

4

首先我们尝试通过计算这个向量场是否是某个标量场的负梯度来证明

$$\begin{aligned}U_x &= -\int F_x\cdot\mathrm{d}x\\&= -\int(-axy)\,\mathrm{d}x\\&= ay\int x\mathrm{d}x\\&= \frac{1}{2}ax^2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_y &= -\int F_y\cdot\mathrm{d}y\\&= -\int\left(-\frac{1}{2}ax^2-y^2\right)\cdot\mathrm{d}y\\&= \frac{1}{2}ax^2y+\frac{1}{3}y^3\end{aligned}$$

由于对这里计算的 U_y 进行关于 x 的求导的话，实际上第二项是不存在的，符合 U_x 的计算（这里其实省略掉了 $+C$）
因此存在 $U(x,y)=\frac{1}{2}ax^2y+\frac{1}{3}y^3$ 是力 F 的势能函数
另一方面，由于保守力的旋度为零，因此我们可以尝试计算其旋度来判断是否是 0

$$\begin{aligned}\nabla\times F &= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-axy\\-\frac{1}{2}ax^2-y^2\end{pmatrix}\\&= -ax-(-ax)\\&= 0\end{aligned}$$

因此这是保守力，接下来其势能函数的计算同上

課題

1

这就是上一问用的结论，即保守场旋度为零，同时题目描述也说明了其第三个性质，保守力积分不随路径变化而变化
同样的，我们有两个方法来解决这个证明，首先

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_A^Q F \cdot \mathrm{d}r + \int_Q^B F \cdot \mathrm{d}r \\ &= F_y \cdot k + F_x \cdot h \\ W_2 &= \int_A^P F \cdot \mathrm{d}r + \int_P^B F \cdot \mathrm{d}r \\ &= F_x \cdot h + F_y \cdot k \end{aligned}$$

由于 $W_1 = W_2$ 对 W_1, W_2 分别求 $\Delta h, \Delta k \to 0$ 的极限就得到了需要证明的式子
另一方面，我们也可以通过向量分析的小结论来证明，换言之我们仅需要证明梯度的旋度为零

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla U) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

最后这一步是 Hesse 矩阵的小结论，由于二阶混合偏导是连续的因此相等

2

$$\begin{aligned} U_x &= -\int F_x \mathrm{d}x \\ &= -\int 3x^2 y \mathrm{d}x \\ &= -x^3 y + C(y) \\ U_y &= -\int F_y \mathrm{d}y \\ &= -\int x^3 \mathrm{d}y \\ &= -x^3 y + C(x) \end{aligned}$$

因此这是保守力，势能函数为 $x^3 y$

20241014

1

上次第三题，不重复写

2

上次第四题，不重复写

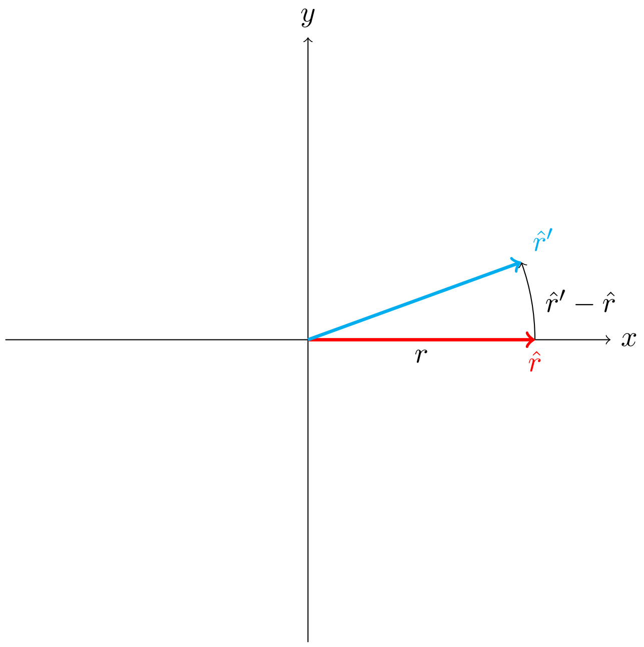
3

$$
\begin{aligned}
F &= -\nabla U \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{x\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{y\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{z\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|F| &= \sqrt{\left(-\frac{x\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{y\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{z\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2} \\
&= \frac{\mu}{r^3} \cdot r \\
&= \frac{\mu}{r^2}
\end{aligned}
$$

于是其大小是 $\frac{\mu}{r^2}$，而方向则是坐标点指向原点

4



由于极坐标下的坐标表示为 $\vec{r} = r\hat{r}$，将其关于 t 进行求导我们可以得到

$$\begin{aligned} v &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \end{aligned}$$

显然，前一项是径向速度及其方向，后一项是切向速度及其方向

5

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\phi) \\ &= \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ v_y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\sin\phi) \\ &= \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \end{aligned}$$

6

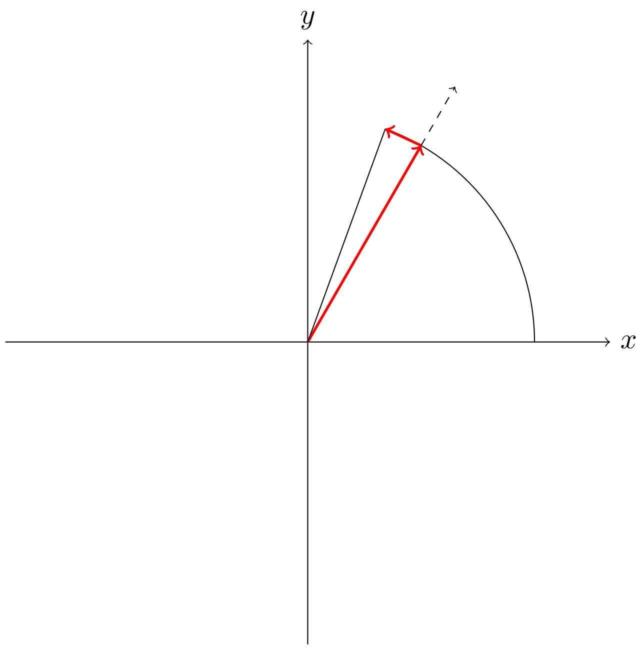
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right)^2 + \left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\cos^2\phi - 2r\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + \dot{r}^2\sin^2\phi + 2r\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi + r^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) + r^2\dot{\phi}^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) \end{aligned}$$

7

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right) \\
&= \ddot{r}\cos\phi - \dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - \left(\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi + r\left(\ddot{\phi}\sin\phi + \dot{\phi}^2\cos\phi\right)\right) \\
&= \ddot{r}\cos\phi - \dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - \dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi \\
&= \ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right) \\
&= \ddot{r}\sin\phi + \dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + \dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\left(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi\right) \\
&= \ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi
\end{aligned}
$$

8



我们只需要进行力的分解就可以简单证明
实际上是懒得画 tikz

9

$$
\begin{aligned}
a_r &= a_x\cos\phi + a_y\sin\phi \\
&= \left(\ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi\right)\cos\phi \\
&+ \left(\ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi\right)\sin\phi \\
&= \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \\
a_\phi &= -a_x\sin\phi + a_y\cos\phi \\
&= -\left(\ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi\right)\sin\phi \\
&+ \left(\ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi\right)\sin\phi \\
&= 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}
\end{aligned}
$$

課題

1

显然，径向单位向量对时间微分等价于径向单位向量旋转的速度，而这就是 $\dot{\phi}e_\phi$，另一方面，切向单位向量可以视作径向向量逆时针旋转 90°，这就带来了负号，其大小则是正常对 ϕ 进行关于 t 的微分

2

这里实际上也有两种做法，一种是如上参考问题的进行笛卡尔系下的计算，另一种则是基于参考问题第四题的进一步求导

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\right) \\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} \\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} - r\dot{\phi}^2\hat{r} \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\hat{\phi}
\end{aligned}$$

20241016

1

上次原题不重复写

2

上次原题不重复写

3

上次原题不重复写

4

上次原题不重复写

5

上次原题不重复写

6

$$\begin{aligned} m\left(2\dot{r}\dot{\phi}+r\ddot{\phi}\right)&=0\\ m\left(2r\dot{r}\dot{\phi}+r^2\ddot{\phi}\right)&=0\\ 2r\dot{r}\dot{\phi}+r^2\ddot{\phi}&=0\\ r^2\dot{\phi}&=C \end{aligned}$$

7

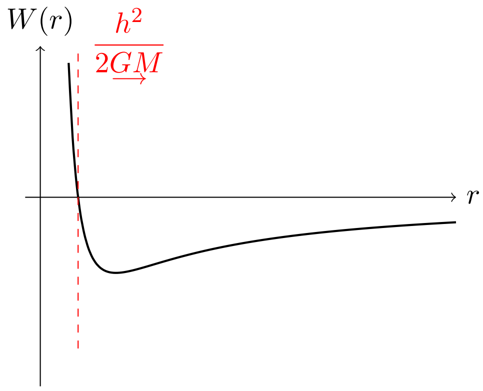
$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\dot{\phi}\\ &=\frac{1}{2}r^2\dot{\phi} \end{aligned}$$

8

$$\begin{aligned} E&=K+U\\ &=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}\\ &=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{GMm}{r} \end{aligned}$$

9

根据上一问，我们有 $W\left(r\right)=\dfrac{1}{2}m\dfrac{h^2}{r^2}-\dfrac{GMm}{r}$



至于 $E<0$ 的情况，$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}-\frac{GMm}{r}<0$ 由于径向动能项包含微分且恒大于 0，因此我们不妨舍去. 于是式子变成了 $\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}<\frac{GMm}{r}$. 而这实际上是 $r>\frac{h^2}{2GM}$

10

$W'(r)=-\frac{mh^2}{r^3}+\frac{GMm}{r^2}=0\Rightarrow r_0=\frac{h^2}{GM}$ 而此时的 r 是最低能状态，因此不存在轨道半径震荡，这就是单纯的圆轨道

課題

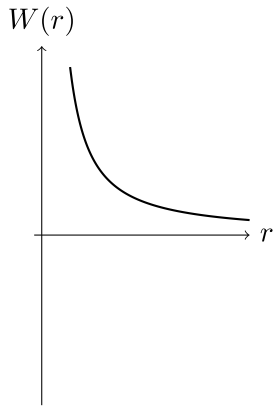
1

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\phi \\
v_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\phi) \\
&= \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right) \\
&= \ddot{r}\cos\phi - \dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - \dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\left(\ddot{\phi}\sin\phi + \dot{\phi}^2\cos\phi\right) \\
&= \ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi \\
y &= r\sin\phi \\
v_y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\sin\phi) \\
&= \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right) \\
&= \ddot{r}\sin\phi + \dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + \dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\left(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi\right) \\
&= \ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi
\end{aligned}
$$

2

$$
\begin{aligned}
E &= K+U \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}+\frac{mk}{r}
\end{aligned}
$$

因此有效势能为 $\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2}+\frac{mk}{r}$



由于中心力为斥力因此并不存在一个稳定存在的点，而在 r_{min} 处，径向速度为 0 因此我们可以得到 $E = \dfrac{mh^2}{2r_{min}^2} + \dfrac{mk}{r_{min}}$

20241021

1

首先先列出角动量 $L = r \times p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \end{pmatrix} = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)$

其关于时间的变化量是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\right) \\ &= m\left(x\ddot{y} - y\ddot{x}\right) \\ &= F_y x - F_x y\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}S &= r \cdot v \cdot \sin\theta \\ &= r \times v \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ &= xv_y - yv_x\end{aligned}$$

3

根据上次的第七题可以得到，面积速度是 $\dfrac{1}{2}r^2\dot{\phi}$，将其乘上 $2m$ 之后变为 $mr^2\dot{\phi}$

而由于 $v = r\dot{\phi}$，因此这就是 rmv（即角动量的大小）

4

我们不妨考虑一个柱坐标系 (r, θ, z), 为了方便讨论设 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} mv_r \\ mv_\theta \\ mv_z \end{pmatrix}$

那么角动量表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_r \\ mv_\theta \\ mv_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ r & 0 & z \\ mv_r & mv_\theta & mv_z \end{vmatrix} \\ &= \left(mv_r z\right)\hat{\theta} + \left(rmv_\theta\right)\hat{z} - \left(rmv_z\right)\hat{\theta} - \left(mv_\theta z\right)\hat{r} \\ &= \left(-mv_\theta z\right)\hat{r} - \left(mv_r z - rmv_z\right)\hat{\theta} + \left(rmv_\theta\right)\hat{z}\end{aligned}$$

由于角动量的方向确定且方向是 $\hat{z}$，因此 $\begin{cases} -mv_\theta z = 0 \\ -\left(mv_r z - rmv_z\right) = 0 \\ rmv_\theta = A \end{cases}$

这里 A 是一个固定的常数 (fixed number) 从第三个式子可以知道 v_θ 并非是 0，因此代回一式可以得到 $z = 0$，而这代回二式就可以得到 $v_z = 0$. 于是 $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ 的 z 坐标都是 0，换言之都在平面 $z = 0$ 内部

至于为什么角动量的方向是 $\hat{z}$，其实只是参考系选取的而已，我们只需要选取一个让角动量方向是 $\hat{z}$ 的参考系就可以了

5

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{p}\right)\\ &= \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}\\ &= v\times mv+\mathbf{r}\times m\dot{v}\\ &= 0+\mathbf{r}\times\mathbf{F}\\ &= \mathbf{r}\times\left(F\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

因此角动量不随时间变化，换言之其守恒

6

左侧：$mgl\sin\phi$，方向逆时针
右侧：$mgl\sin\phi$，方向顺时针

課題

1

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \begin{pmatrix}0\\ r_p\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}mv\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\ 0\\ rmv\end{pmatrix}\end{aligned}$$

显然 $L=0$ 当且仅当 r_p 为 0
而守恒条件为其不受外力或所受外力指向和位置矢量的指向相同

2

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \begin{pmatrix}r_p\\ -\frac{1}{2}gt^2\end{pmatrix}\\ \mathbf{v} &= \begin{pmatrix}0\\ -gt\end{pmatrix}\\ \mathbf{L} &= \begin{pmatrix}r_p\\ -\frac{1}{2}gt^2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ -mgt\end{pmatrix}\\ &= -mgr_pt\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} &= -mgr_p\end{aligned}$$

由于角动量对时间微分等价于力矩，而通过计算可以得到力矩的力就是 mg

20241023

1

上次原题不重复写

2

上次原题不重复写

3

$r^2\dot{\phi} = h \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{h}{r^2} = hu^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) \\
&= -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{\dot{\phi}}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} \\
&= -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} \\
\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right) \\
&= -h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \\
&= -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -G\frac{M}{r^2} \\
-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 &= -GMu^2 \\
\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u &= \frac{GM}{h^2}
\end{aligned}$$

4

由于 $\frac{GM}{h^2}$ 并不包含 ϕ，因此实际上 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} = 0$，因此 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = 0 + u = 0 + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2}$
接着假设其齐次解是 $u = A\cos\phi + B\sin\phi$（由于其特征方程是 $u^2 + 1 = 0$）
因此其通解是 $u = A\cos\phi + B\sin\phi + \frac{GM}{h^2}$
而为了方便计算我们不妨将其通解记作 $u = A\cos(\phi - \phi_0) + \frac{GM}{h^2}$，这实际上是等价的

課題

1

上次原题不重复写

2

$$
\begin{aligned}
m\frac{v^2}{r} &= G\frac{Mm}{r^2} \\
v^2 &= \frac{GM}{r} \\
v &= \frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{r}}
\end{aligned}
$$

速度和半径的平方根成反比

$$
\begin{aligned}
m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r &= G\frac{Mm}{r^2} \\
\frac{4\pi^2}{T^2} &= \frac{GM}{r^3} \\
\frac{r^3}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2}
\end{aligned}
$$

显然右边是定值

20241031

1

我们从两个角度证明，首先是通过比耐公式计算得到

由上次所求得的通解可以知道 $u = A\cos(\phi - \phi_0) + \frac{GM}{h^2}$

接着为了方便，我们将基准作为长轴，换言之 $\phi_0 = 0$

因此原式为 $u = A\cos\phi + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2}\left(\frac{Ah^2}{GM}\cos\phi + 1\right)$

接着我们记 $\epsilon = \frac{Ah^2}{GM}, l = \frac{h^2}{GM}$

于是这就得到了 $u = \frac{1}{l}(1 + \epsilon\cos\phi) \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{l}(1 + \epsilon\cos\phi) \Leftrightarrow r = \frac{l}{1 + \epsilon\cos\phi}$

接着我们可以得到近日点和远日点分别是 $\phi = 0, \pi$

换言之 $r_{min} = \frac{l}{1+\epsilon}, r_{max} = \frac{l}{1-\epsilon}$

而半长轴 $a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{l}{1-\epsilon^2}$

而半短轴 $b = a\sqrt{1-\epsilon^2} = \frac{l}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$

至于另一种方法，我们建立一个以太阳为左侧焦点的极坐标系 (r, ϕ)，接着对于任意一点 $P(r, \phi)$，我们有 $PF_1 = r, PF_2 = 2a - r, F_2(2c, 0) = (2\epsilon a, 0)$，在三角形 PF_1F_2 中我们由余弦定理可以得到 $PF_2 = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\phi}$. 根据椭圆定义（任意一点到两焦点距离之和为 $2a$），有 $r + \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\phi} = 2a$. 而将其化简后得到 $r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1 - \epsilon\cos\phi}$，仅需令 $l = a(1-\epsilon^2)$ 便可得到最后结果（由于我们这里将基准极轴选取为了指向另外一个焦点的方向因此分母处出现了负号）

2

在上一问的结果里，我们得到了 $r = \frac{l}{1 + \epsilon\cos\phi}$.

显然 $\epsilon = 1$ 意味着抛物线，而这代入回极坐标方程就是 $r = \frac{l}{1 + \cos\phi}$

3

由于双曲线的情况下 $\epsilon > 1$，我们重新考虑某点到两焦点距离关系

$\left|r - \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\phi}\right| = 2a$，化简后得到了 $r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 - \epsilon\cos\phi}$（事实上还有另外一个解，但是其无实际物理意义）

令 $l = a(\epsilon^2 - 1)$ 即可得到最终结果

另一方面 $r_{min} = r_{\phi=0} = \frac{l}{1-\epsilon}$，渐近线 $\cos\phi = \frac{1}{\epsilon}$

半实轴可以通过两焦点距离关系得出 $a = \frac{l}{\epsilon^2 - 1}$

半虚轴结合渐进线可以得到为 $b = \frac{l}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$

4

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{l}{1+\epsilon\cos\phi} \\
\frac{1}{r} &= \frac{1+\epsilon\cos\phi}{l} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\epsilon\dot{\phi}\sin\phi}{l} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\epsilon\sin\phi}{l}\cdot\frac{h}{r^2} \\
\dot{r} &= \frac{h}{l}\epsilon\sin\phi \\
\ddot{r} &= \frac{h}{l}\epsilon\dot{\phi}\cos\phi \\
&= \frac{h^2}{r^2 l}\epsilon\cos\phi \\
&= \frac{h^2}{r^2 l}\left(\frac{l}{r}-1\right) \\
&= \frac{h^2}{r^3}-\frac{h^2}{lr^2}
\end{aligned}
$$

5

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{l}{1+\cos\phi} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\dot{\phi}\sin\phi}{l} \\
\dot{r} &= \frac{h\sin\phi}{l} \\
\ddot{r} &= \frac{h^2\cos\phi}{l}\cdot\frac{1}{r^2}
\end{aligned}
$$

显然，径向移动方程是 $m\ddot{r}=F$，而等号左边和 r 的平方成反比

6

由于此时在近日点径向速度为 0，因此

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{r}\right)^2-\frac{GMm}{r} \\
&= \left(\frac{mh^2}{2}-GMmr\right)\frac{1}{r^2} \\
&= \left(\frac{mh^2}{2}-GMm\frac{h^2}{GM\left(1+\epsilon\right)}\right)\frac{G^2M^2\left(1+\epsilon\right)^2}{h^4} \\
&= m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+\epsilon}\right)\frac{G^2M^2\left(1+\epsilon\right)^2}{h^2} \\
&= -\frac{G^2M^2m\left(1-\epsilon^2\right)}{2h^2}
\end{aligned}
$$

課題

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi ab}{h} \\
&= \frac{2\pi}{h} \cdot \frac{l}{1-\epsilon^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{1-e^2}} \\
&= \frac{2\pi l^2}{h\left(1-\epsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
T^2 &= \frac{4\pi^2 l^4}{h^2\left(1-\epsilon^2\right)^3} \\
&= \frac{4\pi^2 l}{h^2} \cdot \frac{l^3}{\left(1-\epsilon^2\right)^3} \\
&= \frac{4\pi^2 l}{h^2} \cdot a^3
\end{aligned}
$$

20241104

1

(a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \det\left(\nabla\begin{pmatrix} r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix} \\
0- &= r^2\sin\phi
\end{aligned}
$$

由于在坐标变换时我们需要用的是绝对值，因此这里实际上是 $r^2\sin\phi$.
另一方面，实际上我们这里使用的是数学定义，即 ϕ 来作为天顶角而非经度角

(b)

考虑在 $\mathrm{d}V$ 的范围内，其质量 $\mathrm{d}M = \rho\mathrm{d}V = \rho R^2\sin\theta\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}U &= -G\frac{m\mathrm{d}M}{s} \\
&= -\frac{1}{s}Gm\rho R^2\sin\theta\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
s &= \sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta} \\
s^2 &= r^2+R^2-2Rr\cos\theta \\
2s\mathrm{d}s &= -2Rr\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{d}s &= \frac{1}{s}Rr\sin\theta\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

(d)

$D := \{(R, \theta, \phi) : R \in [0, R_0], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]\}$
$E := \{(R, s, \phi) : R \in [0, R_0], s \in [r - R, r + R], \phi \in [0, 2\pi]\}$

$$\begin{aligned}
U &= \iiint_D \mathrm{d}U \\
&= \iiint_D \left(-\frac{1}{s} Gm\rho R^2 \sin\theta\right) \mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{Gm\rho}{r} \iiint_E R\mathrm{d}R\mathrm{d}s\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{Gm\rho}{r} \cdot 4\pi \int_0^{R_0} R^2 \mathrm{d}R \\
&= -\frac{Gm}{r} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho R_0^3 \\
&= -\frac{GMm}{r}
\end{aligned}$$

2

由上一问可以知道，对于一个这样均匀的球壳来说，其内部所受到的势能仅与距离球心距离有关，因此一整个球壳内部的万有引力所产生的势能实际上只需要考虑不同半径的势能总和（由于其球对称性），而这实际上总和是 0. 另一方面，引力实际上是势能的负梯度，因此引力在任意半径上的总和同样是 0

3

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{Gm}{x^2} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi\rho x^3\right) \\
\ddot{x} &= -\frac{4\pi}{3} G\rho x
\end{aligned}$$

显然，这是简谐振动

課題

1

$D := \{(\phi, \theta) : \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \rho R^2 \sin\theta \mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \rho_a R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
M &= \int_D \rho_a R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{2\pi\rho_a R}{r} \int_{r-R}^{r+R} s\mathrm{d}s \\
&= \frac{2\pi\rho_a R}{r} \cdot 2Rr \\
&= 4\pi\rho_a R^2
\end{aligned}$$

2

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}U &= -G\frac{m\mathrm{d}M}{s} \\
&= -\frac{Gm\rho_a R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U &= \int_D \mathrm{d}U \\
&= 2\pi \int_0^\pi \left(-\frac{Gm\rho_a R^2 \sin\theta}{s} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_{r-R}^{r+R} \left(-\frac{Gm\rho_a R}{r} \right) \mathrm{d}s \\
&= -\frac{4\pi Gm\rho_a R^2}{r} \\
&= -G\frac{Mm}{r}
\end{aligned}
$$

因此其收到一个有源向心力，在全方向上总受力为 0

20241106

課題

1

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{r} \\
&= \frac{\epsilon\cos\phi - 1}{l} \\
\dot{u} &= -\frac{\epsilon\sin\phi}{l}\dot{\phi} \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\cdot\dot{\phi} &= -\frac{\epsilon\sin\phi}{l}\dot{\phi} \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} &= -\frac{\epsilon\sin\phi}{l} \\
\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} &= -\frac{\epsilon\cos\phi}{l}
\end{aligned}
$$

因此我们令 $l = \dfrac{h^2}{k}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} = -\dfrac{\epsilon\cos\phi}{l}$，并代入原微分方程，就有

$$
\begin{aligned}
-\frac{\epsilon\cos\phi}{l} + u &= -\frac{1}{l} \\
u &= \frac{\epsilon\cos\phi - 1}{l} \\
\frac{1}{r} &= \frac{\epsilon\cos\phi - 1}{l} \\
r &= \frac{l}{\epsilon\cos\phi - 1}
\end{aligned}
$$

2

首先注意到，$r_{min} = \dfrac{l}{\epsilon - 1}$
其次在 r_{min} 处径向速度为零，因此

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + \frac{mk}{r} \\
&= \frac{mh^2\left(\epsilon-1\right)^2}{2l^2} + \frac{mk\left(\epsilon-1\right)}{l} \\
&= \frac{m\left(\epsilon-1\right)}{l}\left(\frac{h^2\left(\epsilon-1\right)}{2l} + k\right) \\
&= \frac{mk^2\left(\epsilon-1\right)}{h^2}\left(\frac{\epsilon-1}{2} + 1\right) \\
&= \frac{mk^2\left(\epsilon-1\right)}{h^2} \cdot \frac{\epsilon+1}{2} \\
&= \frac{mk^2}{2h^2}\left(\epsilon^2-1\right) \\
\epsilon^2 - 1 &= \frac{2Eh^2}{mk^2} \\
\epsilon^2 &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2}
\end{aligned}$$

3

$$h = r^2\dot{\phi}$$

4

5

20241111

20241113

20241118

20241120

20241127

20241202

20241204

20241209

20241211

20241216

2022

参考文献