§5
Cheng Kexin
🐈‍⬛

K5

(1)

(a)

$$\begin{aligned}\widetilde{\kappa}(t) &= \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}\ddot{\mathbf{c}})}{|\dot{\mathbf{c}}|^3} \\ &= \frac{-a\sin t\cdot(-b\sin t)-b\cos t\cdot(-a\cos t)}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \kappa(t)\end{aligned}$$

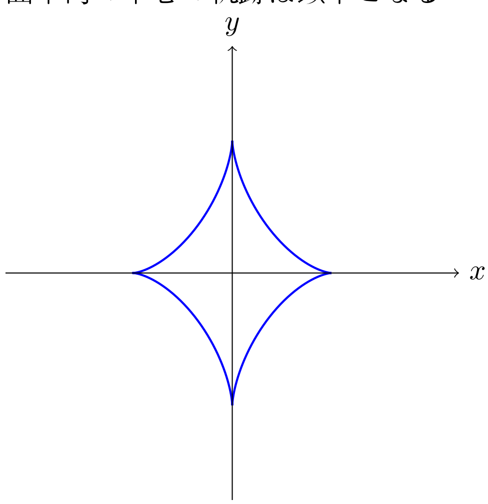
$\kappa(t)=\dfrac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\left(1-\sin^2 t\right)\right)^{\frac{3}{2}}}$から
$t=0,\pi$のとき、分母が一番小さくて、曲率が最大値をとり、$t=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$のとき、曲率が最小値をとる
実際、ここで最大値と最小値はこうなる理由は$a>b>0$である、長軸が変化すると曲率の最大値も変化する

(b)

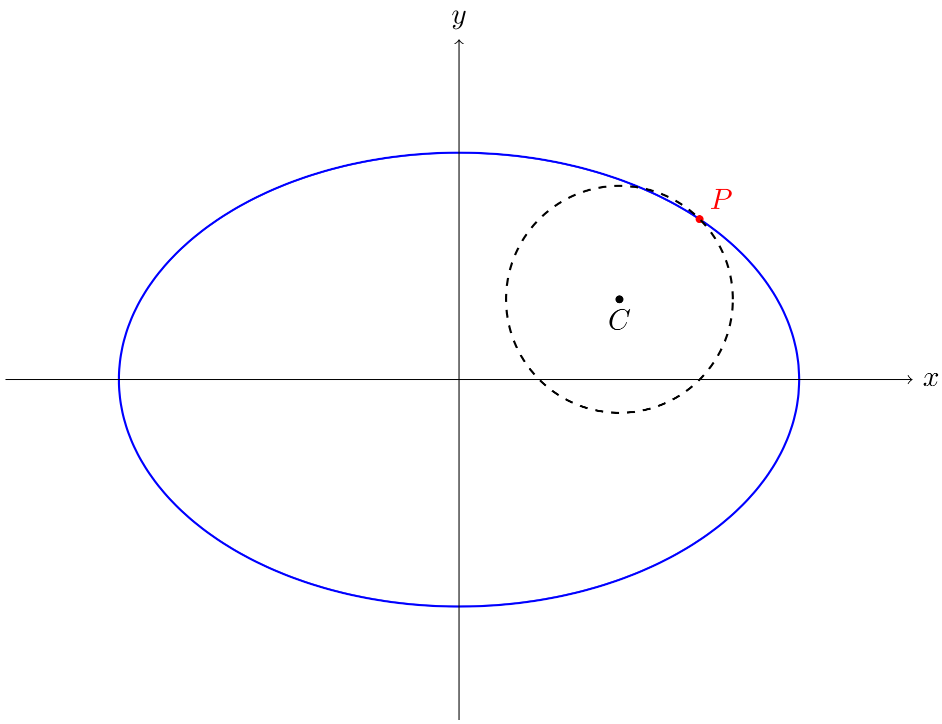
$\rho=\dfrac{1}{\kappa(t)}=\dfrac{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}$
$\mathbf{c}'=(-a\sin t,b\cos t),|\mathbf{c}'|=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$
$T(t)=\dfrac{\mathbf{c}'}{|\mathbf{c}'|}$
$\mathbf{n}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\cdot\begin{pmatrix}-a\sin t\\b\cos t\end{pmatrix}$
$=-\dfrac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\begin{pmatrix}b\cos t\\a\sin t\end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
o(t) &= c(t) + \rho \cdot \mathbf{n} \\
&= \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} + \frac{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} \begin{pmatrix} -b\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} + \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} \begin{pmatrix} -b\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\left(a^2 - b^2\right)}{a}\cos^3 t \\ -\dfrac{\left(a^2 - b^2\right)}{b}\sin^3 t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

曲率円の中心の軌跡は以下となる



また、曲率円の様子は以下となる



(2)

$\dot{\mathbf{c}} = (1 - \cos t, \sin t, 1)$
$\ddot{\mathbf{c}} = (\sin t, \cos t, 0)$
$\dddot{\mathbf{c}} = (\cos t, -\sin t, 0)$

$$\begin{aligned} \kappa\left(t\right) &= \frac{\left|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\right|}{\left|\ddot{\mathbf{c}}\right|^3} \\ &= \frac{\sqrt{\cos^2 t - 2\cos t + 2}}{\left(3 - 2\cos t\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau\left(t\right) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 - \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & -\sin t \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\cos^2 t - 2\cos t + 2} \\ &= -\frac{1}{\cos^2 t - 2\cos t + 2} \end{aligned}$$

P5.1

(1)

$|\mathbf{c}'(s)| = 1$より、$x'^2(s) + y'^2(s) = 1$
曲率の定義より、両辺を微分すると、$2x'x'' + 2y'y'' = 0$
$i.e. \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 0$
$i.e. \mathbf{c}'$は$\mathbf{c}''$と直交する
$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{c}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$
$\mathbf{c}''(s) = \widetilde{\kappa}(s)\,\mathbf{N}(s)$
$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \widetilde{\kappa} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$
ここで$\widetilde{\kappa} = \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')$を代入すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \widetilde{\kappa} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x'y'y'' + x''y'^2 \\ x'^2y'' - x'x''y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x'^2x'' + x''y'^2 \\ x'^2y'' + y'^2y'' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \mathrm{LHS}
\end{aligned}$$

詳しい説明として、下から一行目は$x'^2 + y'^2 = 1$のためである

(2)

実際、パラメータ変換を考えると
$\mathbf{c}'(s) = \dfrac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{|\dot{\mathbf{c}}(t)|}$で$\mathbf{c}''(s) = \dfrac{1}{|\dot{\mathbf{c}}(t)|^2}\left(\ddot{\mathbf{c}}(t) - \dfrac{\dot{\mathbf{c}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{c}}(t)}{|\dot{\mathbf{c}}(t)|}\dot{\mathbf{c}}(t)\right)$であるから

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\kappa} &= \det\left(\mathbf{c}'(s), \mathbf{c}''(s)\right) \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{c}}|} & \dfrac{1}{|\dot{\mathbf{c}}(t)|^2}\left(\ddot{x} - \dfrac{\dot{x}\cdot\ddot{x}}{|\dot{\mathbf{c}}(t)|}\dot{x}\right) \\ \dfrac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{c}}|} & \dfrac{1}{|\dot{\mathbf{c}}(t)|^2}\left(\ddot{y} - \dfrac{\dot{y}\cdot\ddot{y}}{|\dot{\mathbf{c}}(t)|}\dot{y}\right) \end{vmatrix} \\
&= \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{c}}|^3}\left(\ddot{y} - \frac{\dot{y}\cdot\ddot{y}}{|\dot{\mathbf{c}}|}\dot{y}\right) - \frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{c}}|^3}\left(\ddot{x} - \frac{\dot{x}\cdot\ddot{x}}{|\dot{\mathbf{c}}|}\dot{x}\right) \\
&= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{|\dot{\mathbf{c}}|^3} + \frac{(\dot{x}\cdot\ddot{x})\,\dot{x}\dot{y} - (\dot{y}\cdot\ddot{y})\,\dot{x}\dot{y}}{|\dot{\mathbf{c}}|^4}
\end{aligned}
$$

P5.2

$\mathbf{c}'(t) = |\mathbf{c}'(t)|\,\mathbf{T} = \mathbf{T}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

両辺でtに関して微分する

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{c}'(t)\right|\right)\mathbf{T} + \left|\mathbf{c}'(t)\right|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{c}'(t)\right|\right)\mathbf{T} + \left|\mathbf{c}'(t)\right|^2\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{c}'(t)\right|\right)\mathbf{T} + \left|\mathbf{c}'(t)\right|^2\kappa(t)\,\mathbf{N}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{c}'\times\mathbf{c}'' = |\mathbf{c}'(t)|\,\mathbf{T}\times\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{c}'(t)|\right)\mathbf{T} + |\mathbf{c}'(t)|^2\kappa(t)\,\mathbf{N}\right)$

$= \kappa(t)\,|\mathbf{c}'(t)|^3\,\mathbf{T}\times\mathbf{N} = \kappa(t)\,|\mathbf{c}'(t)|^3\,\mathbf{B}$

よって、$\mathbf{B} = \dfrac{\mathbf{c}'\times\mathbf{c}''}{\kappa(t)\,|\mathbf{c}'(t)|^3}$

$1 = |\mathbf{B}| = \dfrac{|\mathbf{c}'\times\mathbf{c}''|}{\kappa(t)\,|\mathbf{c}'(t)|^3}$

よって$\kappa(t) = \dfrac{|\mathbf{c}'\times\mathbf{c}''|}{|\mathbf{c}'|^3}$

$\mathbf{c}''(t) = \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{c}'(t)|\right)\mathbf{T} + |\mathbf{c}'(t)|^2\kappa(t)\,\mathbf{N}$で、両辺を微分すると

$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\mathbf{c}'|(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$を代入すると
$\mathbf{c}'''(t) = \alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{N} + \kappa\tau|\mathbf{c}'|^3\mathbf{B}$（ここの$\alpha, \beta$はそれぞれ$\mathbf{T}, \mathbf{N}$の係数であって、以下の計算と関係ないから省略）
$\mathbf{c}''' \cdot (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') = \kappa^2\tau|\mathbf{c}'|^6$から
$\tau = \frac{\mathbf{c}''' \cdot (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')}{\kappa^2|\mathbf{c}'|^6} = \frac{\mathbf{c}''' \cdot (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')}{|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''|^2}$

P5.3

(1)

$$\begin{aligned}
\tau &= \mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} \\
&= \mathbf{N}' \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \\
&= \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'y'' - y'x'' \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2)

$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$とする
平面上に存在しているので$Ax + By + Cz + D = 0$
$Ax' = -(By' + Cz')$

$$\begin{aligned}
\tau &= \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'z'' - z'y'' \\ z'x'' - x'z'' \\ x'y'' - y'x'' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Hanc marginis exiguitas non caperet.
純粋代数のやり方が面倒だから、ここで幾何的のな方法を考えよう
$\tau = \mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} = \mathbf{N}' \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{N})$から

言い換えればτは$\ddot{\mathbf{c}}$が$\mathbf{T}$と$\mathbf{N}$と張っている表面への射影である
そうすれば、三重積(τ)の幾何的な意味から、平行六面体の体積は0である
（高さが0から）
i.e.$\tau = 0$

P5.4

(1)

(2)

(3)

P5.5

(1)

$\widetilde{\kappa} = \dfrac{1}{\rho}$であるから、曲率半径を計算すればいい
円の性質より
$R\Delta\theta = \Delta l$(ここで$\Delta\theta$は円弧に対する円心角で、Δlは円弧である)
$\rho = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta l}{\Delta\theta}$
$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathbf{r}\mathrm{d}\theta} = \tan\alpha$とする
i.e.$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\tan\alpha$
円弧についての微分は$\mathrm{d}l = \dfrac{\mathbf{r}\mathrm{d}\theta}{\cos\alpha}$
$\ddot{\mathbf{r}}\mathrm{d}\theta = \dot{\mathbf{r}}\tan\alpha\mathrm{d}\theta + \dfrac{\mathbf{r}}{\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$
$\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta} = (\ddot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}\tan\alpha)\dfrac{\cos^2\alpha}{\mathbf{r}} = \dfrac{\ddot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}\tan\alpha}{\mathbf{r}\,(1+\tan^2\alpha)}$

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\theta - \mathrm{d}\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\theta}}{1 - \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}} \\
&= \frac{\dfrac{\mathbf{r}}{\cos\alpha}}{1 - \dfrac{\ddot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}\tan\alpha}{\mathbf{r}\left(1 + \tan^2\alpha\right)}}
\end{aligned}
$$

$\tan\alpha = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}}$と$\dfrac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + \tan^2\alpha} = \dfrac{1}{\mathbf{r}}\sqrt{\mathbf{r}^2 + \dot{\mathbf{r}}^2}$を代入すると

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{\dfrac{\mathbf{r}}{\cos\alpha}}{1 - \dfrac{\ddot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}\tan\alpha}{\mathbf{r}\left(1 + \tan^2\alpha\right)}} \\
&= \frac{\sqrt{\mathbf{r}^2 + \dot{\mathbf{r}}^2}}{1 - \dfrac{\ddot{\mathbf{r}} - \dfrac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\mathbf{r}}}{\mathbf{r} + \dfrac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\mathbf{r}}}} \\
&= \frac{\left(\mathbf{r}^2 + \dot{\mathbf{r}}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\mathbf{r}^2 + 2\dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}}}
\end{aligned}
$$

よって
$\widetilde{\kappa} = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\mathbf{r}^2 + 2\dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}}}{\left(\mathbf{r}^2 + \dot{\mathbf{r}}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

(2)

(a)

$$\begin{cases} r = a\theta \\ \dot{r} = a \\ \ddot{r} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\kappa} &= \frac{a^2\theta^2 + 2a^2}{(a^2\theta^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\theta^2 + 2}{a\left(\theta^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{cases} r = a^\theta \\ \dot{r} = a^\theta \log a \\ \ddot{r} = a^\theta \left(\log a\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\kappa} &= \frac{a^{2\theta} + 2a^{2\theta}\left(\log a\right)^2 - a^{2\theta}\left(\log a\right)^2}{\left(a^{2\theta} + a^{2\theta}\left(\log a\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{a^{2\theta} + a^{2\theta}\left(\log a\right)^2}{\left(a^{2\theta} + a^{2\theta}\left(\log a\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^{2\theta} + a^{2\theta}\left(\log a\right)^2}} \end{aligned}$$

(3)

$$r = \begin{pmatrix} a^\theta \cos\theta \\ a^\theta \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$r' = \begin{pmatrix} a^\theta \log a \cos\theta - a^\theta \sin\theta \\ a^\theta \log a \sin\theta + a^\theta \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$s = \int_0^\theta \left|r'\right| \mathrm{d}\theta = \frac{\left(a^\theta - 1\right)\sqrt{1 + \log^2 a}}{\log a}$$

$$\theta = \log_a\left(\frac{s \log a}{\sqrt{1 + \log^2 a}} + 1\right)$$

$$r = \begin{pmatrix} \left(\frac{s\log a}{\sqrt{1+\log^2 a}}+1\right)\cos\left(\log_a\left(\frac{s\log a}{\sqrt{1+\log^2 a}}+1\right)\right) \\ \left(\frac{s\log a}{\sqrt{1+\log^2 a}}+1\right)\sin\left(\log_a\left(\frac{s\log a}{\sqrt{1+\log^2 a}}+1\right)\right) \end{pmatrix}$$

(2)より

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\log_a\left(\frac{s\log a}{\sqrt{1+\log^2 a}}+1\right)^2 + \log_a\left(\frac{s\log a}{\sqrt{1+\log^2 a}}+1\right)^2 \log^2 a} \\ &= \sqrt{2\log_a\left(\frac{s\log a}{\sqrt{1+\log^2 a}}+1\right)\left(1+\log^2 a\right)} \end{aligned}$$

以下はrを微分して$\mathbf{T}$を得て、$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$をかけて$\mathbf{N}$を得て

そして$o = r + \rho\mathbf{N}$Hanc marginis exiguitas non caperet.

結果として、最後の縮閉線は$r = ae^{m\theta}$の形式になる