20240918

1

a

$$\begin{cases}\vec{F}_{21}=m_1\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t}\\ \vec{F}_{12}=m_2\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$

b

$\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$

c

$$\begin{aligned}m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2&=\text{一定}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2\right)&=0\\ m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t}+m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}&=0\\ \vec{F}_{21}+\vec{F}_{12}&=0\end{aligned}$$

d

显然我们有重心速度

$$\vec{v}_G=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

由上述问题注意到分子为定值，因此其只能为静止或匀速直线运动其一

2

$$\begin{aligned}\vec{F}&=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\\ \int\vec{F}\mathrm{d}t&=\Delta m\vec{v}\end{aligned}$$

显然等号左边是力积而右边是动量的变化量

3

$$\begin{cases}v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9.8\cdot 1}=4.43m/s\\ J=m\cdot v=2\cdot 4.43=8.86kg\cdot m/s\\ F=\dfrac{J}{t}=\dfrac{8.86}{1}=8.86N\end{cases}$$

4

(a)

$$\begin{cases}v\left(t\right)=v_0-gt\\ y\left(t\right)=y_0+v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

(b)

$$-mg + bv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

注意到在终端速度时，其加速度可近似看作 0
因此运动方程可看作 $-mg + bv_\infty^2 = 0$，于是易得 $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{b}}$

(c)

注意到空气阻力和重力同向，因此有

$$-mg - bv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

課題

$$\begin{aligned}
-mg - bv &= m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
\mathrm{d}t &= -\frac{m}{mg + bv}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= -\int \frac{m}{mg + bv}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= -\int \frac{1}{g + \frac{b}{m}v}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

在这里令 $\frac{b}{m}v = u$

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}t &= -\frac{m}{b}\int \frac{1}{g + u}\mathrm{d}u \\
t + C &= -\frac{m}{b}\log\left(g + u\right) \\
t + C &= -\frac{m}{b}\log\left(g + \frac{b}{m}v\right)
\end{aligned}$$

我们代入初值 $v\left(0\right) = v_0$

$$0 + C = -\frac{m}{b}\log\left(g + \frac{b}{m}v_0\right)$$

将 $C = -\frac{m}{b}\log\left(g + \frac{b}{m}v_0\right)$ 代入到原方程我们可以得到

$$
\begin{aligned}
t - \frac{m}{b}\log\left(g + \frac{b}{m}v_0\right) &= -\frac{m}{b}\log\left(g + \frac{b}{m}v\right) \\
\frac{bt}{m} - \log\left(g + \frac{b}{m}v_0\right) &= -\log\left(g + \frac{b}{m}v\right) \\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right) &= \frac{g + \frac{b}{m}v_0}{g + \frac{b}{m}v} \\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)g + \exp\left(\frac{bt}{m}\right)\frac{b}{m}v &= g + \frac{b}{m}v_0 \\
\frac{b}{m}\exp\left(\frac{bt}{m}\right)v &= \left(1 - \exp\left(\frac{bt}{m}\right)\right)g + \frac{b}{m}v_0 \\
\exp\left(\frac{bt}{m}\right)v &= \frac{m}{b}\left(1 - \exp\left(\frac{bt}{m}\right)\right)g + v_0 \\
v &= \frac{m}{b}\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)} - 1\right)g + \frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}v_0
\end{aligned}
$$

而我们注意到

$$
\begin{aligned}
v_\infty &= \lim_{t\to\infty} v\left(t\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{m}{b}\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)} - 1\right)g + \frac{1}{\exp\left(\frac{bt}{m}\right)}v_0\right) \\
&= -\frac{mg}{b}
\end{aligned}
$$

20240923

1

(a)

首先我们考虑垂直抗力为 $N = mg\cos\theta$，因此摩擦力为 $\mu' mg\cos\theta$
接着是沿斜坡向下（即 x 轴正方向）的受力为 $mg\sin\theta$
因此我们可以得到运动方程为 $mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

(b)

由于题目并未涉及到斜坡长度问题，因此我们可以简单认为加速度为负即可
根据运动方程我们可以得到，$g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right) < 0$
这等价于 $\mu' > \tan\theta$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g\sin\theta - \mu' g\cos\theta \\
\mathrm{d}t &= \frac{1}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}\mathrm{d}v \\
\int \mathrm{d}t &= \int \frac{1}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}\mathrm{d}v \\
t + C &= \frac{v}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}
\end{aligned}$$

考虑初值 $v(0) = v_0$，有

$$C = \frac{v_0}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta}$$

再代回原方程，得到

$$\begin{aligned}
t + \frac{v_0}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta} &= \frac{v}{g\sin\theta - \mu' g\cos\theta} \\
v &= v_0 + gt\big(\sin\theta - \mu'\cos\theta\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \int v\mathrm{d}t \\
&= \int v_0 + gt\big(\sin\theta - \mu'\cos\theta\big)\,\mathrm{d}t \\
&= v_0 t + \frac{1}{2}g\big(\sin\theta - \mu'\cos\theta\big)\,t^2 + C
\end{aligned}$$

由于 $x(0) = 0$，因此 $C = 0$
于是，$x = v_0 t + \dfrac{1}{2}g\left(\sin\theta - \mu'\cos\theta\right)t^2$

2

$$
\begin{aligned}
-kx &= m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\
-ke^{\lambda t} &= m\lambda^2 e^{\lambda t} \\
\lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\
\lambda &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}
$$

于是 $x = \exp\left(\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$，因此角振动数 ω 就是中间的 $\sqrt{\frac{k}{m}}$
其实是找 $i\omega t$ 的 ω
因此
$\begin{cases} x\left(t\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v\left(t\right) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$
代入 $x\left(t\right) = x_0, v\left(0\right) = 0$
$\begin{cases} x_0 = A \\ 0 = B\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow B = 0 \end{cases}$
综上

$$
\begin{aligned}
x\left(t\right) &= x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
v\left(t\right) &= -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)
\end{aligned}
$$

3

(a)

$$
\begin{aligned}
v_x &= -r\omega\sin\omega t \\
v_y &= r\omega\cos\omega t
\end{aligned}
$$

显然我们可以注意到，$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = r^2\omega^2$，因此 $v = r\omega$

(b)

$$
\begin{aligned}
a_x &= -r\omega^2\cos\omega t \\
a_y &= -r\omega^2\sin\omega t
\end{aligned}
$$

注意到，加速度方向与位置方向差别仅为负号，因此如果考虑从原点出发到位置的方向的话，加速度方向就是位置方向出发到原点. 而大小则显然是 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$

(c)

$$f_x = -mr\omega^2 \cos(\omega t)$$
$$f_y = -mr\omega^2 \sin(\omega t)$$

同样的，受力的方向与位置坐标的方向差别仅为负号，因此其受力指向原点
$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = m\omega^2 r$

(d)

$\begin{cases} v = r\omega \\ a = \omega^2 r \end{cases} \quad \Rightarrow a = \dfrac{v^2}{r}$

課題

1

注意到在微小角度位移的情况下，复原力为 $-mg\sin\theta$
另一方面，其切向加速度可以看作弧长 $l\theta$ 对时间的二阶微分，这即 $l\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
因此运动方程为 $ml\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta$

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta$$
$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\theta$$
$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -g\sin\left(e^{\lambda t}\right)$$

显然这样是无法直接进行求解的，因此我们考虑小角度下的近似：$\sin\theta = \theta$

$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta$$
$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -ge^{\lambda t}$$
$$\lambda^2 = -\frac{g}{l}$$
$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

于是我们得到了 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$
因此周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

2

由于张力 S 的竖直方向分力等于重力，因此 $S\cos\theta = mg$，即 $S = \dfrac{mg}{\cos\theta}$
另一方面这是圆锥摆，因此其向心力 f 为张力 S 的水平分力，因此 $f = S\sin\theta = mg\tan\theta$

$$
\begin{aligned}
mg &= m\omega^2 l\cos\theta \\
mg &= m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l\cos\theta \\
\frac{g}{l\cos\theta} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \\
T^2 &= 4\pi^2\frac{l\cos\theta}{g} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}
\end{aligned}
$$

20240925

1

(a)

在水平方向上，由于没有受力因此可以简单认为

$$x\left(t\right)=v_{x0}t$$

在铅直方向上由于仅受到重力作用因此

$$\begin{aligned}y\left(t\right)&=v_{y0}t-\frac{1}{2}gt^2\\&=v_{y0}\cdot\frac{x\left(t\right)}{v_{x0}}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x\left(t\right)}{v_{x0}}\right)^2\\&=-\frac{g}{2v_{x0}^2}x^2\left(t\right)+\frac{v_{y0}}{v_{x0}}x\left(t\right)\end{aligned}$$

显然，这是一条抛物线

(b)

y 达到最大的时候，其向上的速度是 0. 因此我们有 $t=\dfrac{v_{y0}}{g}$
此时

$$\begin{aligned}x&=\frac{v_{x0}v_{y0}}{g}\\y&=\frac{v_{y0}^2}{2g}\end{aligned}$$

(c)

我们用 v_0 来重新表示其水平方向上和铅直方向上的运动

$$\begin{aligned}x&=v_0t\cos\theta_0\\y&=v_0t\sin\theta_0-\frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

影响水平飞行距离的是飞行时间，而时间与竖直方向速度减到 0 的时间有关

$$t=\frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

于是水平方向能达到的最远距离为

$$\begin{aligned}x_{max}&=2v_0\cdot\frac{v_0\sin\theta_0}{g}\cdot\cos\theta_0\\&=\frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0\\&=\frac{v_0^2}{g}\sin2\theta_0\end{aligned}$$

因此我们可以知道，若 x_{max} 取最大，则 $2\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta_0=\dfrac{\pi}{4}$

課題

在水平方向上

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -\beta m v_x \\
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -\beta v_x \\
-\frac{1}{\beta v_x}\mathrm{d}v_x &= \mathrm{d}t \\
-\frac{1}{\beta}\int \frac{1}{v_x}\mathrm{d}v_x &= \int \mathrm{d}t \\
-\frac{1}{\beta}\log v_x &= t + C
\end{aligned}
$$

考虑到初始时刻 $v_x = v_{x0}$

$$
C = -\frac{1}{\beta}\log v_{x0}
$$

代回原方程

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\beta}\log v_x &= t - \frac{1}{\beta}\log v_{x0} \\
\log\left(\frac{v_x}{v_{x0}}\right) &= -\beta t \\
\frac{v_x}{v_{x0}} &= e^{-\beta t} \\
v_x &= v_{x0}e^{-\beta t}
\end{aligned}
$$

因此当经过足够长时间后，水平方向上速度趋近于 0
接着我们考虑铅直方向

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -mg - \beta m v_y \\
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -g - \beta v_y \\
-\frac{1}{g+\beta v_y}\mathrm{d}v_y &= \mathrm{d}t \\
-\int \frac{1}{g+\beta v_y}\mathrm{d}v_y &= \int \mathrm{d}t \\
-\log(g+\beta v_y) &= t + C
\end{aligned}
$$

初始时刻 $v_y = v_{y0}$ 代入原方程得到

$$
C = -\log(g+\beta v_{y0})
$$

因此

$$
\begin{aligned}
-\log(g+\beta v_y) &= t - \log(g+\beta v_{y0}) \\
\log\left(\frac{g+\beta v_{y0}}{g+\beta v_y}\right) &= t \\
\frac{g+\beta v_{y0}}{g+\beta v_y} &= e^t \\
g+\beta v_{y0} &= ge^t + \beta e^t v_y \\
v_y &= \frac{g}{\beta}\left(\frac{1}{e^t} - 1\right) + \frac{1}{e^t}v_{y0}
\end{aligned}
$$

因此，经过足够长时间后，铅直方向上的速度趋近于 $-\dfrac{g}{\beta}$
至于其 x, y 坐标，我们只需要对这两个求得的速度进行关于 t 的积分

$$\begin{aligned} x &= \int v_{x0} e^{-\beta t} \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + C \\ &= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} v_{x0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{g}{\beta} \left(\frac{1}{e^t} - 1 \right) + \frac{1}{e^t} v_{y0} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{g}{\beta} \left(-e^{-t} - t \right) - v_{y0} e^{-t} + C \\ &= \frac{g}{\beta} \left(-e^{-t} - t \right) - v_{y0} e^{-t} + \frac{g}{\beta} + v_{y0} \end{aligned}$$

20240930

1

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t} &= F \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= F\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot v &= F\cdot v \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W \\
\frac{1}{2}mv^2 &= W
\end{aligned}
$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力所做的功

2

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -f\cdot p \\
W_2 &= -f\cdot q - f\cdot(q-p) \\
&= -f\cdot(2q-p) \\
W_2 - W_1 &= 2f\left(p-q\right) \neq 0
\end{aligned}
$$

3

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}x + m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}y &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x + m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
m\left(v_x\mathrm{d}v_x + v_y\mathrm{d}x_y\right) &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2\right) &= F\mathrm{d}x + F\mathrm{d}y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W \\
\frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) &= W
\end{aligned}
$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力做的功

4

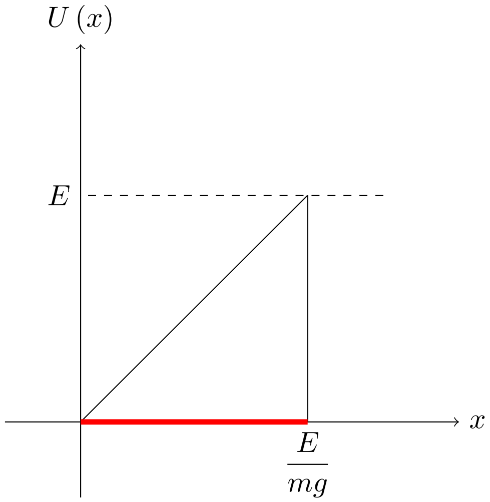
$$
\begin{aligned}
\Delta E_k &= \int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)\mathrm{d}x \\
E_{k2} - E_{k1} &= \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
E_{k2} - E_{k1} &= U\left(x_1\right) - U\left(x_2\right)
\end{aligned}
$$

5

(a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -mg \\
U(x) &= -\int f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= mgx + C = mgx \\
\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 &+ mgx = const
\end{aligned}
$$

(b)



于是我们可以得到，运动范围是红线所覆盖的 $0 \le x \le \dfrac{E}{mg}$

6

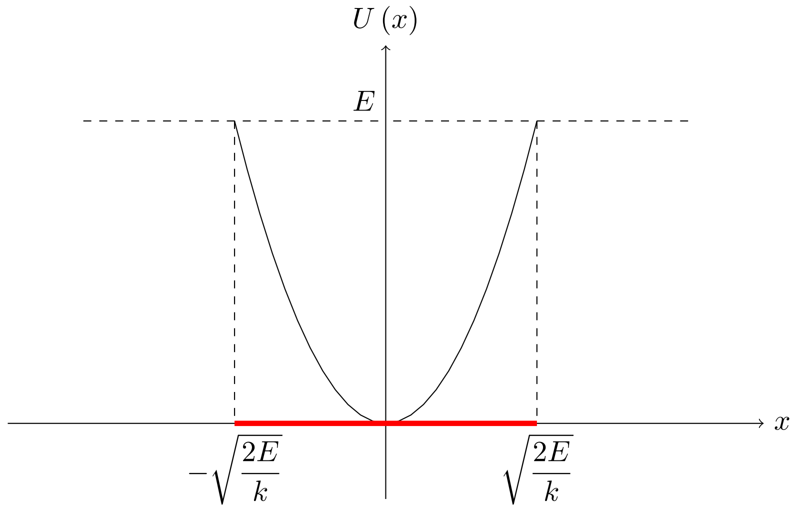
(a)

$$
\begin{aligned}
U(x) &= -\int f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int -kx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}kx^2 + C \\
&= \frac{1}{2}kx^2
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -kx \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v &= -kxv \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \\
\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0 &
\end{aligned}
$$

(c)



由图可知，运动范围是 $-\sqrt{\frac{2E}{k}} \le x \le \sqrt{\frac{2E}{k}}$

(d)

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
\frac{1}{2}mv^2 &= E - \frac{1}{2}kx^2 \\
v^2 &= \frac{1}{m}\left(2E - kx^2\right) \\
v &= \pm\sqrt{\frac{1}{m}\left(2E - kx^2\right)}
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(a \cos \left(\omega t \right) \right) \\
&= -a\omega \sin \left(\omega t \right) \\
&= -a\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} tx \right)
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
K \left(t \right) &= \frac{1}{2} m v^2 \\
&= \frac{1}{2} m \cdot \left(a\omega \sin \omega t \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2 \left(\omega t \right)
\end{aligned}
$$

由于 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$，我们可以得到 $k = m\omega^2$

$$
\begin{aligned}
U \left(t \right) &= \frac{1}{2} k x^2 \\
&= \frac{1}{2} k \left(a \cos \left(\omega t \right) \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \cos^2 \left(\omega t \right)
\end{aligned}
$$

(g)

$$
\begin{aligned}
K \left(t \right) + U \left(t \right) &= \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \left(\sin^2 \left(\omega t \right) + \cos^2 \left(\omega t \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} m a^2 \omega^2
\end{aligned}
$$

課題

1

$$
\begin{aligned}
\langle K \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} K \left(t \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2 \left(\omega t \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi} m a^2 \omega^3 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \left(\omega t \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi} m a^2 \omega^3 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(2\omega t \right) \right) \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

对于这个积分，我们按照如下方式来积

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos s\right)\cdot\frac{1}{2\omega}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos s\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sin s\right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\langle K\rangle &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3\cdot\frac{\pi}{\omega} \\ &= \frac{1}{4}ma^2\omega^2\end{aligned}$$

类似的，$\langle U\rangle$ 由于与 $\langle K\rangle$ 只有相位差，因此只需要后面的相位进行积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^2\left(\omega t\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\omega t\right)+1\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos s\right)\cdot\frac{1}{2\omega}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_0^{4\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos s\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\sin s\right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega}\end{aligned}$$

因此 $\langle K\rangle=\langle U\rangle$

2a

由于受力为其势能的负梯度，因此可以注意到，x_a 处梯度为负，受力方向是正；x_d 处梯度是正，受力方向是负；x_c,x_e 两处梯度为零，因此合力为 0

2b

$\begin{cases}x_a\leq x & E=E_2\\ x_b\leq x\leq x_d, x_f\leq x & E=E_1\\ x_c=x & E=E_0\end{cases}\begin{cases}v_a=0 & E=E_2\\ v_b=v_d=v_f=0 & E=E_1\\ v_c=0 & E=E_0\end{cases}$ 因此，$x=x_c$ 的情况可能是简谐振子速度为 0 的振幅处（若 $E=E_0$）或处于合力为 0 的情况（若 $E=E_1$ 或 $E=E_2$）

2c

由（b）的推导可以知道，动能最大的点在 x_c

20241002

1

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx &= 0 \\
mp^2e^{pt} + \Gamma pe^{pt} + ke^{pt} &= 0 \\
\left(mp^2 + \Gamma p + k\right)e^{pt} &= 0 \\
mp^2 + \Gamma p + k &= 0 \\
mp^2 + 2m\gamma p + m\omega_0^2 &= 0 \\
p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 &= 0 \\
p &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}
$$

2

由上一问我们可以得到

$$
x(t) = Ae^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}
$$

由初期条件 $x(0) = 0$，我们得到 $A + B = 0$. 接着

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \\
&= -A\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) - B\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) \\
&= (B - A)\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}
$$

初期条件 $v(0) = v_0$ 可得 $B - A = \dfrac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

因此，$A = -\dfrac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, B = \dfrac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

综上，我们有

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} + \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} \\
&= \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\left(e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} - e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}\right)
\end{aligned}
$$

3

(a)

这里我们只需要将其代入运动方程验证即可

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx &= 0 \\
m\gamma(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + \Gamma(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + kte^{-\gamma t} &= 0 \\
m\gamma(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + 2m\gamma(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + m\gamma^2te^{-\gamma t} &= 0 \\
(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + 2(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + \gamma te^{-\gamma t} &= 0
\end{aligned}
$$

显然，将 $e^{-\gamma t}$ 提出来之后系数项总和为 0，因此等号两边相等

(b)

我们不妨设其解为 $x(t) = Ate^{-\gamma t}$，显然满足 $x(0) = 0$
接着对于 $v(0)$，由于 $v(t) = A(1-\gamma t)e^{-\gamma t}$，因此我们可以注意到，$A = v_0$
综上，$x(t) = v_0 te^{-\gamma t}$

4

(a)

由于 $\omega_0 > \gamma$，因此 1 里的解为 $p = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
因此我们假设通解是 $x(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right)$
考虑 $x(0) = 0$，我们有 $A = 0$，于是我们可以将通解写成 $x(t) = Be^{-\gamma t}\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)$
然后考虑 $v(t) = e^{-\gamma t}\left(B\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) - B\gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right)$ 和 $v(0) = v_0$

$$\begin{aligned}
B\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) - B\gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) &= v_0\\
B\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) - \gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right) &= v_0\\
\frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) - \gamma\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)} &= B\\
\frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} &= B
\end{aligned}$$

因此，$x(t) = \dfrac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right)$

(b)

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\Gamma v - kx\\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx\\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= -2m\gamma v\cdot v - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) &= -2m\gamma v\cdot v
\end{aligned}$$

課題

1

首先我们将三种振动的位移时间依赖性 $x(t)$ 写在一起

$$\begin{cases}
x(t) = \dfrac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\left(e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} - e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}\right) & \omega_0 < \gamma\\
x(t) = v_0te^{-\gamma t} & \omega_0 = \gamma\\
x(t) = \dfrac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right) & \omega_0 > \gamma
\end{cases}$$

显然式子过于繁琐难以判断，因此我们首先记 $\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ 和 $\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ 分别为 $\hat{\omega}$ 和 $\widetilde{\omega}$
于是过衰减振动变成

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}}\left(e^{-\gamma t+\hat{\omega}t}-e^{-\gamma t-\hat{\omega}t}\right) \\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-\gamma t}\left(e^{\hat{\omega}t}-e^{-\hat{\omega}t}\right) \\ &= \frac{v_0}{\hat{\omega}}e^{-\gamma t}\sinh(\hat{\omega}t) \\ &\simeq \frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-\gamma t}\cdot e^{\hat{\omega}t} \\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-(\gamma-\hat{\omega})t} \end{aligned}$$

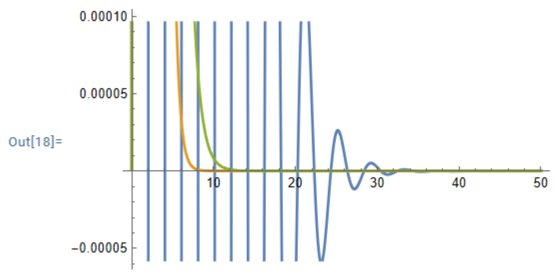
衰减振动变成

$$x(t)=\frac{v_0}{\widetilde{\omega}}e^{-\gamma t}\sin(\widetilde{\omega}t)$$

因此简化后的三个式子变成
$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-(\gamma-\hat{\omega})t} & \omega_0<\gamma \\ x(t)=v_0te^{-\gamma t} & \omega_0=\gamma \\ x(t)=\dfrac{v_0}{\widetilde{\omega}}e^{-\gamma t}\sin(\widetilde{\omega}t) & \omega_0>\gamma \end{cases}$$
注意到这里公因式是 $v_0e^{-\gamma t}$
因此我们仅需证明 $\left\{\dfrac{1}{\hat{\omega}}\sinh(\hat{\omega}t), t, \dfrac{1}{\widetilde{\omega}}\sin(\widetilde{\omega}t)\right\}$ 中，t 的增长速度/斜率/梯度是最快/大的
显然，这里 t 在任何情况下都比第三项含有 sin 的式子梯度要大，因此我们只需要讨论双曲正弦的部分.
显然趋近于无穷时，次方位置为负项的那部分可以忽视掉，也就是最后的 $\dfrac{v_0}{2\hat{\omega}}e^{-(\gamma-\hat{\omega})t}$. 而系数对于衰减速度几乎没有任何影响（因为控制主体增减的是指数函数），因此我们仅需要判断指数位置
由于 $\hat{\omega}>0$，因此 $-(\gamma-\hat{\omega})>-\gamma$. 因此临界衰减振动的衰减速度大于过衰减的衰减速度

2

我们先分别将三种情况给代入
$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{v_0}{\omega_0\sqrt{0.6}}e^{-0.2\omega_0t}\sin\left(\sqrt{0.6}\omega_0t\right) & \gamma=0.2\omega_0 \\ x(t)=v_0te^{-\omega_0t} & \gamma=\omega_0 \\ x(t)=\dfrac{v_0}{2\omega_0\sqrt{0.44}}\left(e^{\left(-1.2+\sqrt{0.44}\right)\omega_0t}-e^{\left(-1.2-\sqrt{0.44}\right)\omega_0t}\right) & \gamma=1.2\omega_0 \end{cases}$$
接着代入 mathematica 之后我们可以得到



具体来说，我们可以知道，蓝色波动的那根是衰减运动，稍微靠右上的绿色线是过衰减，剩下的黄线是临界衰减

20241007

1

(a)

$$
\begin{aligned}
f_0\cos(\omega t) &= -a_0\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)+2\gamma\cdot(-a_0\omega\sin(\omega t+\phi_0))+a_0\omega_0^2\cos(\omega t+\phi_0)\\
f_0\cos(\omega t) &= -a_0\omega^2\left(\cos(\omega t)\cos\phi_0-\sin(\omega t)\sin\phi_0\right)\\
&\quad -2\gamma a_0\omega\left(\sin(\omega t)\cos\phi_0+\cos(\omega t)\sin\phi_0\right)\\
&\quad +a_0\omega_0^2\left(\cos(\omega t)\cos\phi_0-\sin(\omega t)\sin\phi_0\right)\\
f_0\cos(\omega t) &= \cos(\omega t)\left(-a_0\omega^2\cos\phi_0-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\omega_0^2\cos\phi_0\right)\\
&\quad +\sin(\omega t)\left(a_0\omega^2\sin\phi_0-2\gamma a_0\omega\cos\phi_0-a_0\omega_0^2\sin\phi_0\right)
\end{aligned}
$$

通过比较系数可以得到

$$
\begin{cases}f_0=-a_0\omega^2\cos\phi_0-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\omega_0^2\cos\phi_0\\ 0=a_0\omega^2\sin\phi_0-2\gamma a_0\omega\cos\phi_0-a_0\omega_0^2\sin\phi_0\end{cases}\implies\begin{cases}f_0=-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi_0\\ 0=-2\gamma a_0\omega\cos\phi_0+a_0\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin\phi_0\end{cases}
$$

由下式

$$
\begin{aligned}
0&=a_0\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin\phi_0-2\gamma\omega\cos\phi_0\right)\\
0&=\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\sin\phi_0-2\gamma\omega\cos\phi_0\\
\tan\phi_0&=\frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\sin\phi_0&=\frac{\tan\phi_0}{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}\\
&=\frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\gamma^2\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}}}\\
&=\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}
\end{aligned}
$$

这里疑似有个符号问题，由于并没有标明 ω,ω_0 的大小关系因此这里 $\sin\phi_0$ 处可能存在负号
接下来我们看上式

$$
\begin{aligned}
f_0&=-2\gamma a_0\omega\sin\phi_0+a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi_0\\
a_0&=\frac{f_0}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi_0-2\gamma\omega\sin\phi_0}\\
&=\frac{f_0}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}-2\gamma\omega\frac{\tan\phi_0}{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}}\\
&=\frac{f_0\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-2\gamma\omega\tan\phi_0}\\
&=-\frac{f_0\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}{\frac{2\gamma\omega}{\tan\phi_0}+2\gamma\omega\tan\phi_0}\\
&=-\frac{f_0}{2\gamma\omega}\frac{\sqrt{1+\tan^2\phi_0}}{\frac{1}{\tan\phi_0}+\tan\phi_0}\\
&=-\frac{f_0}{2\gamma\omega}\cos\phi_0\sqrt{\sec^2\phi_0}\sin\phi_0
\end{aligned}
$$

由于这里 a_0 的实际意义是振幅，因此我们只需要考虑绝对值的情况，因此

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left|-\frac{f_0}{2\gamma\omega}\cos\phi_0\sqrt{\sec^2\phi_0}\sin\phi_0\right| \\
&= \frac{f_0}{2\gamma\omega}\sin\phi_0 \\
&= \frac{f_0}{2\gamma\omega}\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\
&= \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}a_0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\
&= -\frac{1}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4\left(\omega^3-\omega_0^2\omega+2\gamma^2\omega\right) \\
&= \frac{2\omega\left(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2\right)}{\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

注意到，上式取极值的情况当且仅当分子 $2\omega\left(\omega^2-\omega_0^2+2\gamma^2\right)=0$
因此，$\omega^2=\omega_0^2-2\gamma^2$ 时取到极值

(c)

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_0\cos(\omega t+\phi_0) \\
&= -a_0\omega\sin(\omega t+\phi_0)
\end{aligned}$$

2

(a)

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -kx+mf_0\cos(\omega t) \\
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -m\omega_0^2x+mf_0\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -m\omega_0^2x+mf_0\cos(\omega t) \\
-a_0\omega^2\cos(\omega t+\phi) &= -a_0\omega_0^2\cos(\omega t+\phi)+f_0\cos(\omega t) \\
f_0\cos(\omega t) &= a_0\cos(\omega t+\phi)\left(\omega_0^2-\omega^2\right) \\
f_0\cos(\omega t) &= a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi\cos(\omega t)-a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\phi\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

比较系数可得 $\begin{cases} f_0 = a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi \\ 0 = a_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\phi \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = \dfrac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2} \\ \phi = 0 \end{cases}$

于是，$x\left(t\right) = \dfrac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\omega t\right)$

(c)

注意到上一问求出来的实际上是特解，因此我们只需要讨论齐次解从而推导出通解
对于齐次解，其为 $x\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right)$
因此通解是 $x\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right) + \dfrac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\omega t\right)$

$$\begin{aligned} v\left(t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\left(t\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\omega t\right)\right) \\ &= -A\omega_0\sin\left(\omega_0 t\right) + B\omega_0\cos\left(\omega_0 t\right) - \frac{\omega f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\left(\omega t\right) \end{aligned}$$

考虑到 $x\left(0\right) = 0, v\left(t\right) = 0$
$\begin{cases} 0 = A + \dfrac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2} \\ 0 = B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2} \\ B = 0 \end{cases}$
综上，解为 $x\left(t\right) = -\dfrac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \dfrac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\omega t\right)$

(d)

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= -\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\omega t\right) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\left(\omega_0+\Delta\omega\right)t\right) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\cos\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\Delta\omega t\right) - \sin\left(\omega_0 t\right)\sin\left(\Delta\omega t\right)\right) \\ &\xrightarrow{\Delta\omega t\to 0} -\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\cos\left(\omega_0 t\right)\cdot 1 - \sin\left(\omega_0 t\right)\cdot 0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

課題

1

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\cdot v\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T mf_0\cos(\omega t)\cdot v\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T mf_0\cos(\omega t)\cdot\left(-a_0\omega\sin(\omega t+\phi_0)\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{T}\left[\frac{1}{2}t\sin\phi_0-\frac{1}{4\omega}\cos(2\omega t+\phi_0)\right]_0^T \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{T}\left(\frac{T}{2}\sin\phi_0+\frac{1}{4\omega}\cos\phi_0-\frac{1}{4\omega}\cos(2\omega T+\phi_0)\right) \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{2}\sin\phi_0-\frac{a_0f_0m}{4T}\cos\phi_0+\frac{a_0f_0m}{4T}\cos(2\omega T+\phi_0) \\
&= -\frac{a_0f_0m\omega}{2}\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}-\frac{a_0f_0m}{4T}\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\
&+\frac{a_0f_0m}{4T}\left(\cos(2\omega T)\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}-\sin(2\omega T)\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\right) \\
&= \frac{a_0f_0m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}{4T\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\left(\cos(2\omega T)-1\right)-\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\left(\frac{a_0f_0m\omega}{2}+\sin(2\omega T)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P' &= -\frac{1}{T}\int_0^T 2m\gamma v\cdot v\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2m\gamma}{T}\int_0^T v^2\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\phi_0)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{T}\left[\frac{1}{4\omega}\sin\left(2\left(\omega t+\phi_0\right)\right)-\frac{1}{2\omega}\left(\omega t+\phi_0\right)\right]_0^T \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{4\omega T}\left(\sin\left(2\left(\omega T+\phi_0\right)\right)-2\left(\omega T+\phi_0\right)-\sin(2\phi_0)+2\phi_0\right) \\
&= -\frac{2a_0^2m\omega^2\gamma}{4\omega T}\left(2\sin(\omega T+\phi_0)\cos(\omega T+\phi_0)-2\omega T-\sin(2\phi_0)\right) \\
&= -\frac{a_0^2m\omega^2\gamma}{\omega T}\left(\sin(\omega T)\cos(\omega T)\left(\cos^2\phi_0-\sin^2\phi_0\right)+\sin\phi_0\cos\phi_0\left(\cos^2(\omega T)-\sin^2(\omega T)-1\right)\right)
\end{aligned}
$$

为了方便，我们先计算一些小细节

$$
\begin{aligned}
\cos^2\phi_0-\sin^2\phi_0 &= \frac{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}-\frac{4\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2} \\
&= 1-\frac{8\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\sin\phi_0\cos\phi_0 &= \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cdot\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\\ &= \frac{2\gamma\omega\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\end{aligned}$$

于是，最后结果是

$$P'=-\frac{a_0^2m\omega\gamma}{T}\left(\left(1-\frac{8\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\right)\sin\left(2\omega T\right)-\frac{4\gamma\omega\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\sin^2\left(\omega T\right)\right)$$

这不是最简但是我懒得化简了，显然这两项里 a_0 都还可以代入，代入再进行化简应该没这么繁琐. 原则上 $P=P'$

2

本题只需要计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}P$ 证明在 $\omega=\omega_0$ 时取到极值即可，而这是参考问题 1.(b) 的结论

20241009

1

(a)

(b)

(c)

(d)

2

3

4

課題

1

2

20241014

20241016

20241021

20241023

20241028

20241104

20241106

20241111

20241113

20241118

20241120

20241127

20241202

20241204

20241209

20241211

20241216

2022

参考文献