欧氏空间上的光滑函数

解析函数

作为微分几何中的约定俗成，我们将坐标记为上标，而非下标.

定义. 对于非负整数 k，我们称一个函数 $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 C^k 的，如果其满足对于任意的 $j<k$，$\dfrac{\partial^j f}{\partial x^{i_1}\cdots x^{i_j}}$ 都在 p 点存在并且连续.
称函数 $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ 在点 p 是 C^∞ 的，如果对于所有的 $k\geq 0$ 都满足其是 C^k 的话.
另外，称一个函数 f 是 C^k 的，如果它在 U 上每个点都是 C^k 的话. 同时，C^∞ 的同义词是 "光滑的"

我们称一个函数 $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ 是**实解析**的，如果对于 U 中任意一个点 p，都存在一些邻域，使得其满足

$$f(x)=f(p)+\sum_i\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\left(x^i-p^i\right)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p)\left(x^i-p^i\right)\left(x^j-p^j\right)+\cdots$$

引理. 实解析函数一定是 C^∞ 的，因为上面的式子可以在其收敛区域内逐项微分. 但 C^∞ 函数则不一定是实解析的.

例. 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$
由于原点处的任意阶导数 $f^{(k)}(0)$ 都是 0，f 在原点处的任意邻域都是 0，因此 $f(x)$ 不等于其泰勒级数且 $f(x)$ 在原点处不是实解析的.

含余项的泰勒定理

虽然 C^∞ 的函数不一定等价泰勒定理，但可以通过添加余项来使其满足目的.

定义. (星型)
对于 $\mathbb{R}^n$ 的子集 S，称 S 是相对于 p 星型的，如果 S 中的任意一点 x 都满足 p 到 x 的线段被包含在 S 里.

引理. (含余项的 Taylor 定理)
令 f 是一个定义在 $U\subset\mathbb{R}$ 的 C^∞ 函数，满足其关于 $p:=\left(p^1,\cdots,p^n\right)\in U$. 那么存在一些定义在 U 上的 C^∞ 函数 $g_1(x),\cdots,g_n(x)$，使得

$$f(x)=f(p)+\sum_{i=1}^n\left(x^i-p^i\right)g_i(x),g_i(p)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Proof. 由于 U 是关于 p 星型的，所以对于 $\forall x\in U$，线段 $p+t(x-p),0\leq t\leq 1$ 在 U 内部.
那么考虑 $f(p+t(x-p)),t\in(0,1)$
由链式法则可知，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(p+t(x-p))=\sum\left(x^i-p^i\right)\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(p+t(x-p))$
接着两边同时对 t 从 0 到 1 积分，$f(p+t(x-p))|_0^1=\sum\left(x^i-p^i\right)\displaystyle\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(p+t(x-p))\,\mathrm{d}t$
在这里我们令 $g_i(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(p+t(x-p))\,\mathrm{d}t$，于是 $g_i(x)$ 是 C^∞
且原式变为 $f(x)-f(p)=\sum\left(x^i-p^i\right)g_i(x)$
另一方面，$g_i(p)=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,\mathrm{d}t=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ □

注意. 事实上，星型并非是限制条件，考虑任意一个开球 $B(p,\epsilon):=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-p\|<\epsilon\}$ 是关于 p 的星型. 如果 f 是定义在包含点 p 的开集 U 上的 C^∞ 函数，那么存在一个 $\epsilon>0$，使得 $p\in B(p,\epsilon)\subset U$. 于是 f 定义在一个 p 的星型邻域上，并且适用含有余项的泰勒定理.

欧氏空间中作为导数的切向量

为了区分点和向量，我们将定义在 $\mathbb{R}^n$ 的点记作 $p=\left(p^1,\cdots,p^n\right)$

切空间中的向量 $v\in T_p(\mathbb{R}^n)$ 记作 $v=\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^n\end{pmatrix}$ or $\langle v^1,\cdots,v^n\rangle$.

我们通常用 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 来表示 $\mathbb{R}^n$ 或 $T_p\mathbb{R}^n$ 的标准基，于是 $v=\sum v^i e_i$.
过点 $p=(p^1,\cdots,p^n)$ 的具有方向 $v=\langle v_1,\cdots,v_n\rangle\in\mathbb{R}^n$ 的直线具有参数化 $c(t)=(p^1+tv^1,\cdots,p^n+tv^n)$.

方向导数

f 在 p 上 v 方向的方向导数定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_v f &= \lim_{t\to 0}\frac{f(c(t))-f(p)}{t}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(c(t))\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}c^i}{\mathrm{d}t}(0)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\\ &= \sum_{i=1}^{n} v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\end{aligned}$$

显然可以看出，$\mathrm{D}_v f$ 是一个数字.

芽

定义在集合 S 上的关系 R 是 $S\times S$ 的子集. 我们称这个关系是一个等价关系如果它同时满足以下条件:
(1) 自反性: $x\sim x$ 对于任意的 $x\in S$
(2) 对称性: $x\sim y\Rightarrow y\sim x$
(3) 传递性: $x\sim y, y\sim z\Rightarrow x\sim z$
考虑所有 (f,U) 对所组成的集合，这里 U 是 p 的一个邻域并且 $f:U\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 的. 我们称 (f,U) 等价于 (g,V) 如果存在一个包含 p 的开集 $W\subset U\cap V$ 使得 $f=g$ 当其关于 W 的时候.

定义. 称 (f,U) 的等价类为 f 在 p 的芽 (germ).

某一点的导数

一个域 K 上定义在向量空间之间的映射 $L:V\longrightarrow W$ 称作线性映射或线性算子，如果对于所有的 $r\in K, u,v\in V$ 有:
(1) $L(u+v)=L(u)+L(v)$
(2) $L(rv)=rL(v)$
对于每个 $p\in\mathbb{R}^n$ 的切向量，p 的方向导数给出了一个实向量空间的映射 $\mathrm{D}_v:C_p^\infty\longrightarrow\mathbb{R}$.
于是 D_v 是一个 $\mathbb{R}$-线性的，并且满足 $\mathrm{D}_v(fg)=(\mathrm{D}_v f)g(p)+f(p)\mathrm{D}_v g$.
将 p 的所有导数所构成的集合记作 $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. 显然这个集合是一个实向量空间.
由于 p 的所有方向导数都是在这点的导数，因此存在一个映射

$$\begin{aligned}\phi: T_p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)\\ v &\longmapsto \mathrm{D}_v=\sum v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\end{aligned}$$

由于 D_v 是线性的，因此映射 ϕ 是一个向量空间的线性算子.

引理. 如果 D 是 C_p^∞ 的某一点的导数，那么对于所有的常函数 c，有 $\mathrm{D}(c)=0$

Proof. 由于 $\mathbb{R}-$ 线性，我们有 $\mathrm{D}(c)=c\mathrm{D}(1)$.
于是考虑 Leibniz，$\mathrm{D}(1)=\mathrm{D}(1\times 1)=\mathrm{D}(1)\times 1+1\times\mathrm{D}(1)=2\mathrm{D}(1)$
因此 $\mathrm{D}(1)=0$ □

定理. 线性映射 $\phi:T_p(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ 是向量空间的一个同构.

Proof. 单射性方面，对于 $v\in T_p(\mathbb{R}^n)$，令 $\mathrm{D}_v=0$. 将 D_v 作用于坐标函数 x^j，得到

$$0=\mathrm{D}_v(x^j)=\sum_i v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p x^j=\sum_i v^i\delta_i^j=v^j$$

因此，$v=0$ 且 ϕ 是单射.
满射性方面，令 $\mathtt{D}$ 是点 p 处的导数，令 (f,V) 的等价类为 C_p^∞ 上的芽.
不妨假设 V 是一个开球，于是其为星型.
由带余项的泰勒定理，存在一些 C^∞ 的函数 $g_i(x)$ 在 p 的邻域上，使得

$$f(x)=f(p)+\sum\left(x^i-p^i\right)g_i(x),g_i(x)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

将 $\mathtt{D}$ 作用在两边，记 $\mathtt{D}(f(p))=0,\mathtt{D}\left(p^i\right)=0$

$$\begin{aligned}\mathtt{D}f(x)&=\sum\left(\mathtt{D}x^i\right)g_i(p)+\sum\left(p^i-p^i\right)\mathtt{D}g_i(x)\\&=\sum\left(\mathtt{D}x^i\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\end{aligned}$$

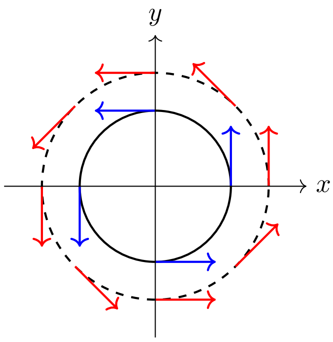
这就证明了对于 $v=\langle\mathtt{D}x^1,\cdots,\mathtt{D}x^n\rangle,\mathtt{D}=\mathtt{D}_v$ □

换句话说，这个定理证明了我们可以通过 p 点处的导数来识别其切向量. 在 $T_p(\mathbb{R}^n)\simeq\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ 下，$T_p(\mathbb{R}^n)$ 的基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 对应到偏导的集合 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right\}$
因此我们可以将 $v=\langle v^1,\cdots,v^n\rangle=\sum v^ie_i$ 写作 $v=\sum v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$

向量场

一个定义在开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 的向量场 X 是一个分配给 U 中所有点 p 的切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 的切向量 X_p. 由于切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 有基底 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right\}$，于是向量 X_p 是一个线性结合 $X_p=\sum a^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,p\in U$
向量场 X 是 U 上 C^∞ 的，如果其系数 a^i 全都是 U 上 C^∞ 的

例. 显然，在 $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ 上，$p:=(x,y)$ 的一个向量场如图



一个 U 上的 C^∞ 函数的环通常被记作 $C^\infty(U)$ 或者 $\mathcal{F}(U)$. 由于可以将 C^∞ 向量场作用在 C^∞ 函数上从而得到一个新的 C^∞ 向量场，将 U 上所有的 C^∞ 向量场记作 $\mathfrak{X}(U)$. $\mathfrak{X}$ 不仅是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间，同时也是 C^∞ 环上的一个模.

定义. 如果 R 是一个有单位元的交换环，那么 $R-$ 模是一个具有加法和标量乘法的操作的集合 A，使得:
(1) 在加法下，A 是一个阿贝尔群（可交换）
(2) 对于 $r,s\in R$ 和 $a,b\in A$,
(i) （封闭性）$ra\in A$
(ii) （单位元）如果 1 是 R 的乘法单位元的话，$1a=a$
(iii) （结合律）$(rs)a=r(sa)$
(iv) （分配律）$(r+s)a=ra+sa,r(a+b)=ra+rb$

向量场作为导数

A 的所有导数关于加法和乘法是封闭的，并且形成一个向量空间，记作 $\mathtt{Der}(A)$，于是我们有一个映射

$$\begin{aligned}\phi:\mathfrak{X}(U)&\longrightarrow\mathtt{Der}\left(C^\infty(U)\right)\\X&\longmapsto(f\mapsto Xf)\end{aligned}$$

交错 $k-$ 线性函数

对偶空间

如果 V,W 是实向量空间，我们记 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 为所有线性映射 $f:V\longrightarrow W$. 我们称 V 上所有实值线性函数所构成的向量空间为对偶空间 V^*. 换言之，$V^*=\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$
V^* 的元素称之为 V 上的共向量/余向量
假设 V 是一个有限维的向量空间，令 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基底. 于是每个 $v\in V$ 都有唯一的线性结合 $v=\sum v^ie_i, v^i\in\mathbb{R}$. 令 $\alpha^i:V\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个选取第 i 个坐标的线性函数，$\alpha^i(v)=v^i$. 注意到

$$\alpha^i(e_j)=\delta^i_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

命题. 函数 $\alpha^1,\cdots,\alpha^n$ 构成了 V^* 的一组基底

推论. 有限维向量空间 V 的对偶空间 V^* 与 V 拥有相同维度

多重线性函数

函数 $f:V^k\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个 $k-$ 线性，如果其中每个参数都有

$$f(\cdots,av+bw,\cdots)=af(\cdots,v,\cdots)+bf(\cdots,w,\cdots)$$

而一个 V 上的 $k-$ 线性函数同时也被叫做 V 上的$k-$ 张量

定义. 一个 $k-$ 线性函数 $f:V^k\longrightarrow\mathbb{R}$ 是对称的，如果

$$f\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)=f(v_1,\cdots,v_k)$$

称其为交替的，如果

$$f\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)=(\operatorname{sgn}\sigma)f(v_1,\cdots,v_k)$$

$k-$ 线性函数的置换操作

引理. 如果 σ,τ 是 S_k 的排列，f 是 V 上的一个 $k-$ 线性函数，那么 $\tau(\sigma f)=(\tau\sigma)f$

注意. 只需要考虑 $w_i=v_{\tau(i)}$

定义. 对于一个群 G 和一个集合 X，考虑映射

$$\begin{aligned}G\times X&\longrightarrow X\\ (\sigma,x)&\longmapsto\sigma\cdot x\end{aligned}$$

我们称这个映射是群 G 在集合 X 上的左作用，如果

(i) $1\cdot x=x$，这里 1 是 G 的单位元，x 是 X 的任意一个元

(ii) $\tau\cdot(\sigma\cdot x)=(\tau\sigma)\cdot x$

那么类似的，我们称其为右作用，如果满足

(i) $x\cdot 1=x$

(ii) $(x\cdot\sigma)\cdot\tau=x\cdot(\sigma\tau)$

对称算子和交错算子

定义. 对称算子：

$$(Sf)(v_1,\cdots,v_k)=\sum_{\sigma\in S_k}f\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)$$
$$Sf=\sum_{\sigma\in S_k}\sigma f$$

交错算子：

$$Af=\sum_{\sigma\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma f$$

张量积

定义. 令 f 和 g 分别是向量空间 V 上的 $k-$ 线性函数和 $l-$ 线性函数. 那么他们的张量积 $f\otimes g$ 是一个 $(k+l)-$ 线性函数, 定义为

$$(f\otimes g)(v_1,\cdots,v_{k+l})=f(v_1,\cdots,v_k)\,g(v_{k+1},\cdots,v_{k+l})$$

例.

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle&=\sum_i v^i w^i\\&=\sum_i \alpha^i(v)\,\alpha^i(w)\\&=\sum_i\left(\alpha^i\otimes\alpha^i\right)(v,w)\end{aligned}$$

例.

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_2b_1&a_3b_1\\a_1b_2&a_2b_2&a_3b_2\\a_1b_3&a_2b_3&a_3b_3\\a_1b_4&a_2b_4&a_3b_4\end{bmatrix}$$

例. 克罗内克积

$$U\otimes V=\begin{bmatrix}u_{11}V&u_{12}V&\cdots\\u_{21}V&u_{22}V&\cdots\\\vdots&\ddots&\vdots\end{bmatrix}$$

命题. $(f\otimes g)\otimes h=f\otimes(g\otimes h)$

楔积

定义. 对于 $f\in A_k(V),g\in A_l(V)$

$$\begin{aligned}f\wedge g&=\frac{1}{k!l!}A(f\otimes g)\\(f\wedge g)(v_1,\cdots,v_{k+l})&=\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\sigma)\,f\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)g\left(v_{\sigma(k+1)},\cdots,v_{\sigma(k+l)}\right)\end{aligned}$$

楔积的反交换性

命题. 对于 $f\in A_k(V),g\in A_l(V)$

$$f\wedge g=(-1)^{kl}\,g\wedge f$$

Proof. 记变换 $\tau\in S_{k+l}$ 为变换 $\tau=\begin{bmatrix}1&\cdots&l&l+1&\cdots&l+k\\k+1&\cdots&k+l&1&\cdots&k\end{bmatrix}$
换言之, $\tau(1)=k+1,\cdots,\tau(l)=k+l,\tau(l+1)=1,\cdots,\tau(l+k)=k$
于是

$$\begin{aligned}\sigma(1)=\sigma\tau(l+1),\cdots,\sigma(k)=\sigma\tau(l+k)\\\sigma(k+1)=\sigma\tau(1),\cdots,\sigma(k+l)=\sigma\tau(l)\end{aligned}$$

那么对于 $v_1,\cdots,v_{k+l}\in V$

$$\begin{aligned}A(f\otimes g)(v_1,\cdots,v_{k+l})&=\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\sigma)\,f\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)g\left(v_{\sigma(k+1)},\cdots,v_{\sigma(k+l)}\right)\\&=\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\sigma)\,f\left(v_{\sigma\tau(l+1)},\cdots,v_{\sigma\tau(l+k)}\right)g\left(v_{\sigma\tau(1)},\cdots,v_{\sigma\tau(l)}\right)\\&=(\mathrm{sgn}\tau)\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(\mathrm{sgn}\sigma\tau)\,g\left(v_{\sigma\tau(1)},\cdots,v_{\sigma\tau(l)}\right)f\left(v_{\sigma\tau(l+1)},\cdots,v_{\sigma\tau(l+k)}\right)\\&=(\mathrm{sgn}\tau)\,A(g\otimes f)(v_1,\cdots,v_{k+l})\end{aligned}$$

于是在两边同时除以 $k!l!$ 就得到了 $f\wedge g=(\mathrm{sgn}\tau)\,g\wedge f$ □

推论. 如果 f 是 V 上的一个 $k-$ 共向量，且 k 是奇数，那么 $f\wedge f=0$

楔积的结合律

引理. 令 f,g 分别是一个 $k-$ 线性函数和 $l-$ 线性函数，那么

(i) $A\left(A\left(f\right)\otimes g\right)=k!A\left(f\otimes g\right)$

(ii) $A\left(f\otimes A\left(g\right)\right)=l!A\left(f\otimes g\right)$

命题. $(f\wedge g)\wedge h=f\wedge(g\wedge h)$

Proof.

$$\begin{aligned}(f\wedge g)\wedge h&=\frac{1}{(k+l)!m!}A\left((f\wedge g)\otimes h\right)\\&=\frac{1}{(k+l)!m!}\frac{1}{k!l!}A\left(A\left(f\otimes g\right)\otimes h\right)\\&=\frac{(k+l)!}{(k+l)!m!k!l!}A\left((f\otimes g)\otimes h\right)\\&=\frac{1}{k!l!m!}A\left((f\otimes g)\otimes h\right)\\&=\frac{1}{k!l!m!}A\left(f\otimes(g\otimes h)\right)\\&=\frac{1}{k!\left(l+m\right)!}A\left(f\otimes\frac{1}{l!m!}A\left(g\otimes h\right)\right)\\&=f\wedge(g\wedge h)\end{aligned}$$

□

推论. $f\wedge g\wedge h=\dfrac{1}{k!l!m!}A\left(f\otimes g\otimes h\right)$

推论. $f_i\in A_{d_i}\left(V\right)$

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_r=\frac{1}{d_1!\cdots d_r!}A\left(f_1\otimes\cdots\otimes f_r\right)$$

$\mathbb{R}^n$ 上的微分形式

微分 1− 形式

p 点在 $\mathbb{R}^n$ 上的余切空间 $T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$ 被定义为切空间 $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的对偶空间 $\left(T_p\mathbb{R}^n\right)^*$. 类似于向量场的定义，一个开集 $U\subset\mathbb{R}^n$余向量场或微分 1− 形式ω 是一个给每个 $p\in U$ 分配一个余向量 $\omega_p\in T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的函数.

命题. 如果 $x^1,\cdots,x^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准基底，那么对于每个 $p\in\mathbb{R}^n$，$\left\{\left(dx^1\right)_p,\cdots,\left(dx^n\right)_p\right\}$ 都是对偶于以 $\left\{\left.\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right|_p,\cdots,\left.\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right\}$ 为基底的切空间 $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的余切空间 $T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的基底

Proof.

$$\begin{aligned}\left(dx^i\right)_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)&=\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p x^i\\&=\delta^i_j\end{aligned}$$

□

微分 $k-$ 形式

更一般的，考虑在 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的一个 k 阶的微分形式 ω 或一个 $k-$ 形式，这是一个分配给每个 $p\in U$ 一个切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 上交错 $k-$ 线性函数的函数. 换言之，$\omega_p\in A_k(T_p\mathbb{R}^n)$.
而 $A_k(T_p\mathbb{R}^n)$ 的基底是 $dx_p^I=dx_p^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_p^{i_k},1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n$
因此，对于每个 $p\in U$，ω_p 都是线性结合 $\sum a_I(p)\,dx_p^I$
而一个 $k-$ 形式 ω 是线性结合 $\omega=\sum a_Idx^I$ 记 U 上的 C^∞ 的 $k-$ 形式构成的向量空间为 $\Omega^k(U)$
一个 $0-$ 形式分配给了每个 $p\in U$ 一个 $A_0(T_p\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}$ 的元素
因此 $0-$ 形式是 U 上的一个单纯的函数，并且 $\Omega^0(U)=C^\infty(U)$
由于可以将 C^∞ 函数乘在 C^∞ 的 $k-$ 形式上，因此集合 $\Omega^k(U)$ 既是一个 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，也是一个 $C^\infty(U)$ 上的模
将楔积作为乘法的话，直和 $\Omega^*(U)=\oplus_{k=0}^n\Omega^k(U)$ 既是一个 $\mathbb{R}$ 上的代数，也是 C^∞ 上的一个模. 另外作为一个代数，它实际上是反对称的和满足结合律的.

向量场上作为多线性函数的微分形式

对于 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 的 $1-$ 形式 ω 和 C^∞ 向量场 X，按如下方式定义一个 U 上的函数

$$\omega(X)_p=\omega_p(X_p)$$

如果用坐标写的话

$$\omega=\sum a_idx^i\qquad X=\sum b^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

因此

$$\omega(X)=\left(\sum a_idx^i\right)\left(\sum b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum a_ib_i$$

U 上的 C^∞ 的 $1-$ 形式给出了一个映射：$\mathfrak{X}(U)\longrightarrow C^\infty(U)$. 由于 $f\in C^\infty(U)\Rightarrow\omega(fX)=f\omega(X)$，这个映射实际上是环 $C^\infty(U)$ 上的线性.
而在这种方式下，U 上的 $1-$ 形式给出了一个 $\mathcal{F}(U)-$ 映射：$\mathfrak{X}(U)\longrightarrow\mathcal{F}(U)$
类似的，一个 U 上的 $k-$ 形式给出了一个 $\mathcal{F}(U)$ 上的 $k-$ 线性映射：$\mathfrak{X}(U)\times\cdots\times\mathfrak{X}(U)$(k 个)$\longrightarrow\mathcal{F}(U)$

外导数

定义. 如果 $\omega=\sum_I a_I\mathrm{d}x^I\in\Omega^k(U)$，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\sum_I\mathrm{d}a_I\wedge\mathrm{d}x^I\\&=\sum_I\left(\sum_j\frac{\partial a_I}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\right)\wedge\mathrm{d}x^I\\&\in\Omega^{k+1}(U)\end{aligned}$$

例. 令 ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个 $1-$ 形式 $f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y$，同时 f,g 是 $\mathbb{R}^2$ 的 C^∞ 函数.
另一方面，为了方便，记 $f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x},f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}y\\&=(f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}x+(g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}y\\&=(g_x-f_x)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

域 K 上的一个代数 A 是已分次的 (be graded), 如果其可以写成 K 上的向量空间的直和 $A=\oplus_{k=0}^\infty A^k$

定义. 令 $A=\oplus_{k=0}^\infty A^k$ 是域 K 上的已分次的代数，那么分次代数 A 的反微分是一个 $K-$ 线性映射 $D:A\longrightarrow A$ 使得对于 $\omega\in A^k,\tau\in A^l$

$$\mathrm{D}(\omega\tau)=(\mathrm{D}\omega)\tau+(-1)^k\omega\mathrm{D}\tau$$

如果反微分从 A^k 映射到 A^{k+m} 的话，我们称这是个 m 阶的反微分

命题. (i) 外导数 $d:\Omega^*(U)\longrightarrow\Omega^*(U)$ 是一个 1 阶的反微分:

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\tau)=(\mathrm{d}\omega)\wedge\tau+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge\mathrm{d}\tau$$

(ii) $\mathrm{d}^2=0$
(iii) 如果 $f\in C^\infty(U), X\in\mathfrak{X}(U)$, 那么 $(\mathrm{d}f)(X)=Xf$

命题. 外微分的特征
由于上面的命题可以知道, 如果 $\mathrm{D}:\Omega^*(U)\longrightarrow\Omega^*(U)$ 是一个一阶的外微分, 满足 $\mathrm{D}^2=0$, 对于 $f\in C^\infty(U), X\in\mathfrak{X}(U)$, 有 $(\mathrm{D}f)(X)=Xf$, 那么 $\mathrm{D}=\mathrm{d}$

闭形式和恰当形式

定义. U 上的一个 $k-$ 形式 ω 是闭的, 如果它满足 $\mathrm{d}\omega=0$
称其是恰当的, 如果存在一个 $k-1$ 形式 τ 满使得 $\omega=\mathrm{d}\tau$

由于 $\mathrm{d}^2=0$, 每个恰当形式都是闭的

一点例子

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \Omega^1(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \Omega^2(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \Omega^3(U) \arrow[d, "\simeq"'] \\
C^\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{grad}"'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{curl}"'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{div}"'] & C^\infty(U)
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$\longrightarrow$ 于是 0− 形式 f 的外微分 $\mathrm{grad}f=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{bmatrix}$

1− 形式的外微分

$$\mathrm{d}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z)=(R_y-Q_z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-(R_x-P_z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(Q_x-P_y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$\longrightarrow \mathrm{curl}\begin{bmatrix}P\\Q\\R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_y-Q_z\\-(R_x-P_z)\\Q_x-P_y\end{bmatrix}$

2− 形式的外微分

$$\mathrm{d}(P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=(P_x+Q_y+R_z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$\longrightarrow \mathrm{div}\begin{bmatrix}P\\Q\\R\end{bmatrix}=P_x+Q_y+R_z$

由于是否为保守场仅和拓扑性质有关, 那么我们可以用向量空间的商来定义闭形式的"失败程度"

$$H^k(U):=\frac{U\text{ 上的 }k-\text{ 闭形式}}{U\text{ 上的 }k-\text{ 恰当形式}}$$

我们将这个称作 U 的 k 阶 De Rham 上同调

关于上标下标的一些约定

对于向量场，通常用下标如 $e_1, \cdots, c_n$
对于微分形式，通常采用上标如 $\omega^1, \cdots, \omega^n$
对于 0− 形式，坐标函数用上标如 $x^1, \cdots, x^n$
他们的微分 1− 形式也是上标，如 $\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n$
而坐标向量场 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ 则一般用下标，因为其存在于分母
而对于系数部分的上下标，通常取决于其为向量场的系数还是微分形式的系数
如 $X = \sum a^i e_i$，$\omega = \sum b_j \mathrm{d}x^j$
比如，对于 $e_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$$\begin{aligned}\omega(X) &= \left(\sum b_j \mathrm{d}x^j\right)\left(\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\ &= \sum b_i a^i\end{aligned}$$

或者 $X = \sum a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$$a^i = \left(\mathrm{d}x^i\right)(X)$$

注意到等号两边的净指标相等，净指标为 0 是“守恒的”.

流形

拓扑流形

定义. 一个拓扑空间 M 是 n 维局部欧几里得的，如果 M 的每个点 p 都有一个邻域 U 满足 U 有一个映射到 $\mathbb{R}^n$ 的开子集的同胚 ϕ. 我们称 $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ 为一个图表，称 U 为一个坐标邻域或者坐标开集，称 ϕ 为 U 的一个坐标映射或者坐标系. 我们称一个图表 (U, ϕ) 是以 $p \in U$ 为中心的，如果 $\phi(p) = 0$.

定义. 一个 n 维的拓扑流形是一个 Hausdorff，第二可数（A2），局部欧几里得的 n 维空间

相容图表

定义. 一个拓扑流形的两个图表 $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n), (V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ 是 C^∞− 相容的，如果两个映射 $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V), \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ 是 C^∞ 的. 这两个映射是过渡映射.

定义. 一个局部欧几里得空间 M 的 C^∞ 图册是一组覆盖了 M 的 C^∞ 相容图表的集合. 换句话说，$M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$.

虽然 C^∞ 相容图是自反和对称的，但是却不一定是传递的.
考虑 $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ 是 C^∞− 相容的，$(U_2, \phi_2), (U_3, \phi_3)$ 也是 C^∞− 相容的. 那么由于三个都包含的坐标映射只在 U_{123} 被定义，因此 $\phi_3 \circ \phi_1^{-1} = \left(\phi_3 \circ \phi_2^{-1}\right) \circ \left(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}\right)$ 仅在 $\phi_1(U_{123})$ 是 C^∞− 相容的

光滑流形

一个局部欧几里得空间上的图册 $\mathfrak{U}$ 称作最大的，如果不存在一个更大的图册包含它. 换言之，如果 $\mathfrak{M}$ 是另外一个包含 $\mathfrak{U}$ 的图册的话，$\mathfrak{M} = \mathfrak{U}$.

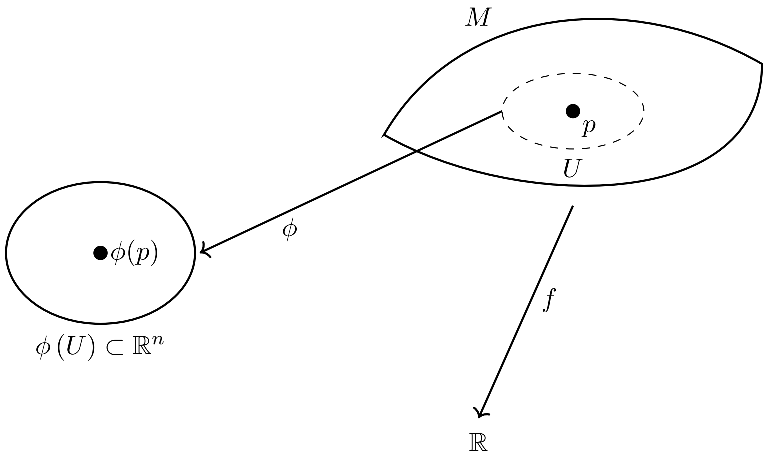
定义. 光滑流形或 C^∞ 流形是一个具有最大图册的拓扑流形 M. 这个最大图册也叫 M 的微分结构. 一个微分流形的维度是 n，如果其所有的连通分支都具有维度 n

命题. 局部欧几里得空间上任意的图册 $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 都被包含在唯一的最大图册里.

综上所述，我们验证一个拓扑空间 M 是否是一个 C^∞ 流形，只需要确认：
(i) M 是 Hausdorff，A2 的
(ii) M 有一个 C^∞ 图册（无须是最大的）

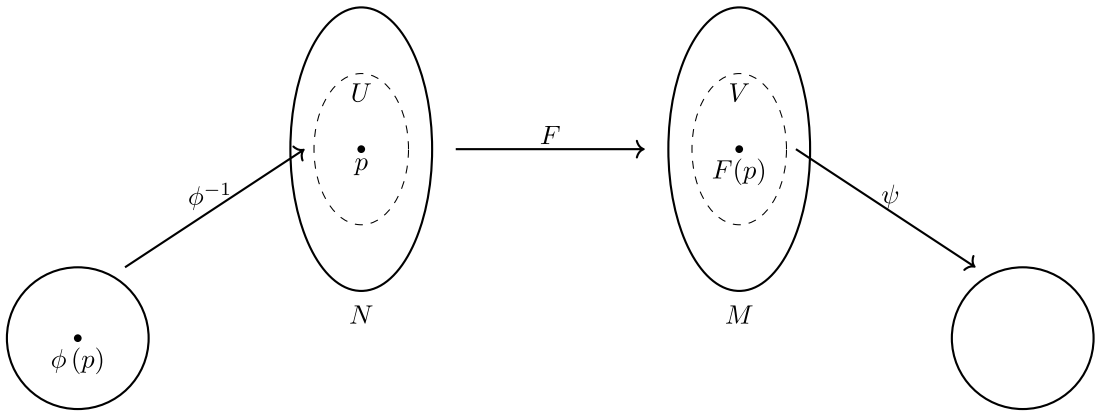
流形上的光滑映射

定义. 令 M 是一个 n 维的光滑流形. 称一个函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 在 M 上的点 p 是 C^∞ 的或者光滑的，如果存在一个在 M 的图册里的包含 p 的图 (U, ϕ)，使得 $f \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 是 C^∞ 的.



定义. 令 $F: N \to M$ 的一个映射而 h 是 M 上的一个函数. 那么 h 由 F 的拉回记作 F^*h，定义为 $F^*h := h \circ F$

定义. 令 N, M 分别是 n, m 维的流形，我们称一个映射 $F: N \to M$ 在 N 的点 p 是 C^∞ 的，如果存在包含 $F(p)$ 的 M 的图 (V, ψ) 和包含 p 的 N 的图 (U, ϕ)，满足一个 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的复合映射 $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 是 C^∞ 的.



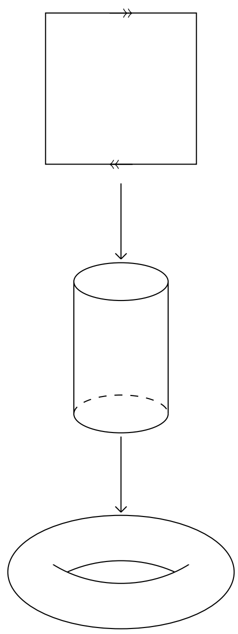
定义. 如果 F 是一个双射，且 F, F^{-1} 都是 C^∞ 的话，我们称 F 为一个微分同胚.

命题. 令 U 是流形 M 的一个开集，如果映射 $F: U \to \mathbb{R}^n$ 是其像上的一个微分同胚，那么 (U, F) 是 M 的图册中的一个图

定义. 一个李群是指一个拥有群结构的光滑流形 G，满足以下映射都是 C^∞ 的：
1. $\mu: G \times G \to G$
2. $\iota: G \to G, \iota(x) = x^{-1}$

商

我们可以通过粘合一个正方形来得到一个环面，这个过程被称为等化，或商构造



商空间上映射的连续性

令 $\sim$ 是拓扑空间 S 上的一个等价关系，$S/\sim$ 是商拓扑.
假设函数 $f : S \to Y$ 在各等价类上都是常值的，于是引导了映射 $\bar{f}([p]) = f(p)$. 换言之，

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ S/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

命题. 诱导映射 $\bar{f} : S/\sim \to Y$ 是连续的，当且仅当 $f : S \to Y$ 是连续的

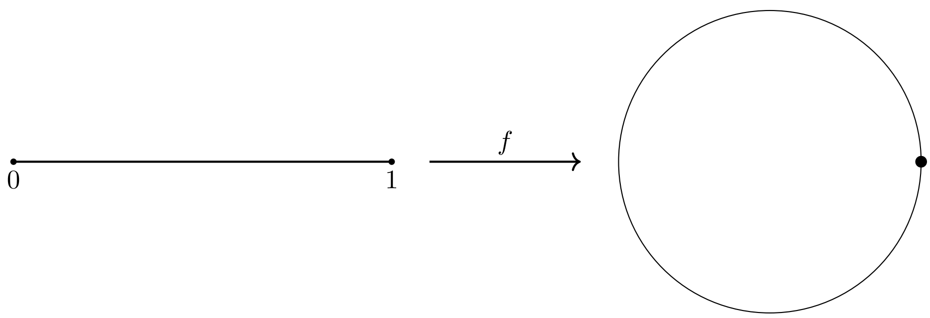
同化为一个点

我们可以通过如下方式将拓扑空间 S 的子空间 A 等化到一个点：
定义一个 S 上的关系 $\sim$:
(i)$x \sim x$，对于所有的 $x \in S$
(ii)$x \sim y$，对于所有的 $x, y \in S$
显然这是 S 上的一个等价关系（第一条给出了自反性）

例. 令 $I := [0,1]$. $I/\sim$ 是通过将 $\{0,1\}$ 同化为一个点之后得到的商空间. 令 S^1 为复平面上的单位圆. 那么

$$\begin{aligned} f : I &\to S^1 \\ x &\mapsto \exp(2\pi i x) \end{aligned}$$

由于 $f(0) = f(1)$，我们可以导出一个函数 $\bar{f} : I/\sim S^1$



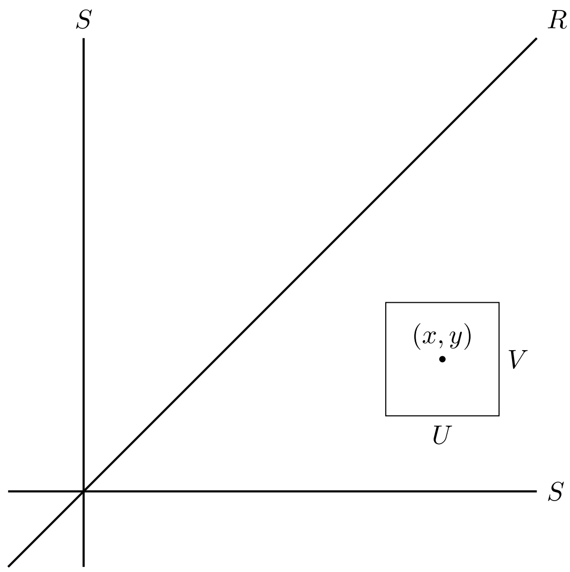
命题. 如果商空间 $S/\sim$ 是 Hausdorff 的，那么 S 的任意一点 p 的等价类 $[p]$ 在 S 上是闭的.

开等价关系

定义. 一个拓扑空间 S 上的等价关系称为开的，如果投影映射 $\pi : S \to S/\sim$ 是开的

换言之，当且仅当 $\forall U \subset S, \pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x\in U}[x]$ 是 S 中的开集的时候，等价关系 $\sim$ 才是开的.

令 $\sim$ 为 S 上的等价关系，我们可以用 $R \subset S \times S$ 来表示定义该关系的集合：$R := \{(x,y) \in S \times S | x \sim y\}$. 我们称这个 R 为等价关系的图.



定理. 令 $\sim$ 是 S 的一个开等价关系. 那么商空间 $S/\sim$ 是 Hausdorff 的，当且仅当等价关系的图 R 在 $S \times S$ 上是闭的.

定理. 令 $\sim$ 是有投影映射 $\pi : S \to S/\sim$ 的空间 S 的一个开等价关系. 如果 $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ 是 S 的基，那么它在 π 下的像 $\{\pi(B_\alpha)\}$ 是 $S/\sim$ 的基.

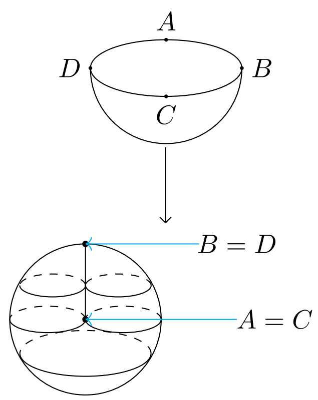
推论. 如果 $\sim$ 是第二可数空间 S 的一个开等价关系，那么商空间 $S/\sim$ 也是第二可数的.

实投影空间

按如下方式定义 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 上的一个等价关系：

$$x \sim y \iff y = tx \, (\forall t \in \mathbb{R} - \{0\})$$

这里 $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. 而实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 则是由这个等价关系构成的 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 的商空间. 我们将点 $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 的等价类记作 $[a_0, \cdots, a_n]$ 并令 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ 为投影. 我们称这个 $[a_0, \cdots, a_n]$ 为 $\mathbb{R}P^n$ 的齐次坐标.



由上图可知，虽然 $\mathbb{R}P^2$ 虽然不能嵌入为 $\mathbb{R}^3$ 的子流形，但是如果允许自相交的话就可以形成下面这样的图案（但这并非双射）.

命题. $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ 上的等价关系 $\sim$ 在 $\mathbb{R}P^n$ 定义里是开等价关系.

推论. 实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 是第二可数的.

命题. 实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 是 Hausdorff 的.

实投影空间上的标准 C^∞ 图册

令 $[a_0.\cdots,a_n]$ 是投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 的齐次坐标. a_0 虽然不是一个 $\mathbb{R}P^n$ 上 well-defined 的函数，但是 $a_0\neq 0$ 是独立于 $[a_0,\cdots,a_n]$ 代表元的选择的. 因此 $a_0\neq 0$ 在 $\mathbb{R}P^n$ 上是有意义的. 我们可以归纳地定义 $\forall i\in\mathbb{N},U_i:=\{[a_0,\cdots,a_n]\in\mathbb{R}P^n|a_i\neq 0\}$. 和：

$$\begin{aligned}\phi_i:U_i&\to\mathbb{R}^n\\ [a_0,\cdots,a_n]&\mapsto\left(\frac{a_0}{a_i},\cdots,\frac{\hat{a_i}}{a_i},\cdots,\frac{a_n}{a_i}\right)\end{aligned}$$

这里ˆ是指省略该项. 这证明了 $\mathbb{R}P^n$ 是以 (U_i,ϕ_i) 为图表的局部欧几里得的.
在交集 $U_0\cap U_1$ 里，$a_0\neq 0,a_1\neq 0$，于是就有两套坐标系：

$$\begin{tikzcd}
 & {[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n]} \arrow[dl, "\phi_0"'] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
\left(\frac{a_1}{a_0},\frac{a_2}{a_0},\cdots,\frac{a_n}{a_0}\right) & & \left(\frac{a_0}{a_1},\frac{a_2}{a_1},\cdots,\frac{a_n}{a_1}\right)
\end{tikzcd}$$

在 U_0 上，坐标函数为 $x_1,\cdots,x_n$. 在 U_1 上，坐标函数是 $y_1,\cdots,y_n$.
在 U_0，$\forall i\in\mathbb{N},x_i=\dfrac{a_i}{a_0}$. 在 U_1，$y_1=\dfrac{a_0}{a_1},y_2=\dfrac{a_2}{a_1},\cdots,y_n=\dfrac{a_n}{a_1}$
因此 $\phi_1\circ\phi_0^{-1}(x)=\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{x_2}{x_1},\dfrac{x_3}{x_1},\cdots,\dfrac{x_n}{x_1}\right)$
由于在 $\phi_0(U_0\cap U_1)$ 上 $x_1\neq 0$，因此这是个光滑函数. 在其他 $U_i\cap U_j$ 上也可以得到类似式子，因此 $\{(U_i,\phi_i)\}_{i=0,\cdots,n}$ 是 $\mathbb{R}P^n$ 的 C^∞ 图册，称为标准图册. 这就包含了 $\mathbb{R}P^n$ 是光滑流形的证明.

切空间

定义. 流形 M 中点 p 的切向量为其在 p 的方向

定理. 链式法则
如果 $F:N\to M,G:M\to P$ 是流形的光滑映射且 $p\in N$ 的话，有 $(G\circ F)_{*,p}=G_{*,F(p)}\circ F_{*,p}$

推论. 如果 $F:N\to M$ 是流形的一个微分同胚且 $p\in N$，那么 $F_*:T_pN\to T_pM$ 是向量空间的同构

推论. 维数不变性
如果开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 微分同胚于开集 $V\subset\mathbb{R}^m$，那么 $n=m$.

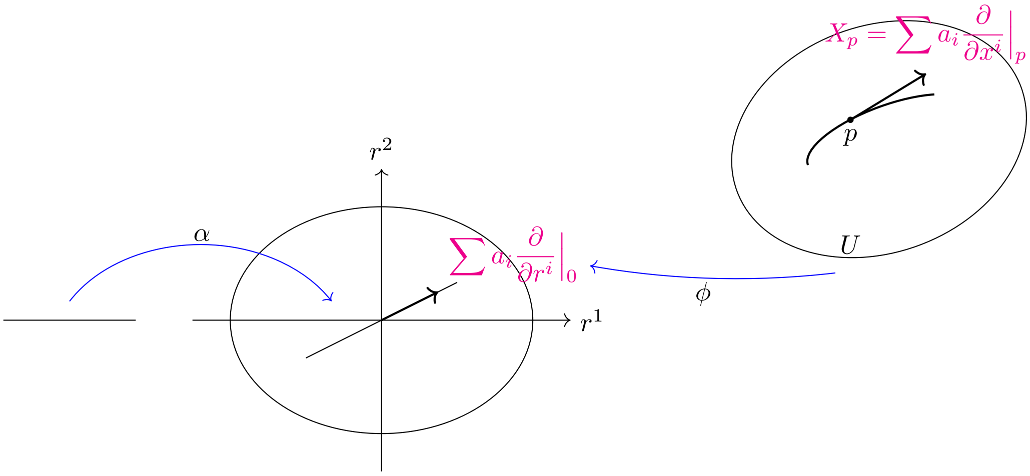
命题. 令 $(U,\phi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ 是一个关于流形 M 中的点 p 的图表，那么 $\phi_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)=\dfrac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}$

命题. 如果 $(U,\phi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ 是一个包含点 p 的图表，那么切空间 T_pM 有基 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$

命题. 坐标向量变换矩阵
令 $(U,x^1,\cdots,x^n)$ 和 $(V,y^1,\cdots,y^n)$ 是流形 M 的两个坐标图表，那么在 $U\cap V$ 上 $\dfrac{\partial}{\partial x^j}=\sum_i\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\dfrac{\partial}{\partial y^i}$

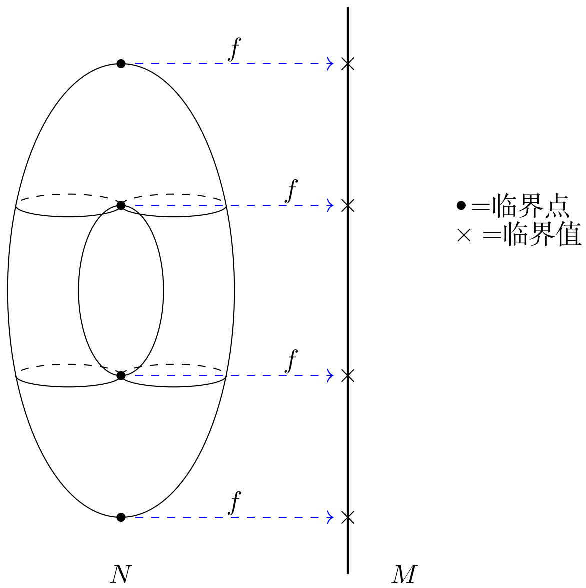
命题. $F:N\to M$ 是流形间的光滑映射，$p\in N$，令 $\left(U,x^1,\cdots,x^n\right)$ 和 $\left(V,y^1,\cdots,y^n\right)$ 是关于 $p\in N$ 和 $F(p)\in M$ 的坐标图表. 关于 T_pN 的基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right\}$ 以及 T_pM 的基 $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{F(p)}\right\}$，微分映射 $F_{*,p}:T_p\to T_pM$ 由矩阵 $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j(p)}\right]$ 表示. 这里 $F^i=y^i\circ F$，是第 i 个分量.

命题. 对于流形 M 上所有的点 p，以及所有的切向量 $X_p\in T_pM$，对于 $\epsilon>0$ 存在一个光滑曲线 $c:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ 使得 $c(0)=p$ 且 $c'(0)=X_p$



命题. 令 $F:N\to M$ 是一个流形间的光滑映射，$p\in N$，并且 $X_p\in T_pN$. 如果 c 是一个开始于 $p\in N$ 的，p 点速度 X_p 的曲线，那么有 $F_{*,p}(X_p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 F\circ c(t)$.

定义. $p\in N$ 是 f 的临界点，如果其微分 $f_{*,p}:T_pN\to T_{f(p)}M$ 不是满射. 反之，如果这是满射，那么该点为常规点. M 的一个点是临界值，如果其像是临界点，否则其为常规点.



命题. 对于实值函数 $f:M\to\mathbb{R}$，点 $p\in M$ 是临界点，当且仅当关于包含 p 的图表 $\left(U,x^1,\cdots,x^n\right)$，$\forall j\in\mathbb{N},\frac{\partial f}{\partial x^j}(p)=0$

子流形

子流形

定义. 一个 n 维的流形 N 的开子集 S 是 k 维正则子流形，如果 $\forall p\in S$，N 的图册中存在一个 p 的坐标邻域 $(U,\phi)=\left(U,x^1,\cdots,x^n\right)$，使得 $U\cap S$ 可以由 $n-k$ 个坐标函数的消失来定义.

我们称 N 的这样一个图表 (U,ϕ) 是相对于 S 的适配图.

定义. 如果 S 是 n 维流形 N 的一个 k 维正则子流形，那么我们称 $n-k$ 为 S 在 N 的余维.

函数的零集

一个映射 $f:N\to M$ 的水平集定义为 $f^{-1}(\{c\})=\{p\in N|f(p)=c\}$ 对于 $c\in M$.

定理. 令 $f:N\to\mathbb{R}$ 是流形 N 的一个 C^∞ 函数. 那么非空正则水平集 $S=f^{-1}(c)$ 是 N 的一个余维为 1 的正则子流形

正则水平集定理

定理. 令 $f:N\to\mathbb{R}^m$ 是 n 维流形 N 上的一个 C^∞ 映射. 那么一个非空正则水平集 $S=f^{-1}(c)$ 是 N 的一个 $n-m$ 维的正则子流形.

定理. 正则水平集定理
令 $f:N\to M$ 是流形间的 C^∞ 映射，并且 $\dim N=n,\dim M=m$，那么一个非空正则水平集 $f^{-1}(c)$ 是维度 $n-m$ 的流形 N 的正则子流形.

范畴与函子

光滑流形的秩

常秩定理

定理. 常秩定理
令 N,M 分别是维度为 n,m 的流形. 设 $f:N\to M$ 在 $p\in N$ 的邻域有常秩 k，那么存在以 $p\in N$ 为中心的图表 (U,ϕ) 和以 $f(p)\in M$ 为中心的 (V,ψ)，使得在 $\phi(p)$ 的邻域，$\psi\circ\phi^{-1}\left(r^1,\cdots,r^n\right)=\left(r^1,\cdots,r^n,0,\cdots,0\right)$

定理. 常值水平集定理
令 $f:N\to M$ 是流形间的光滑映射，$c\in M$. 如果 f 在水平集 $f^{-1}(c)\in N$ 的邻域有常秩 k，那么 $f^{-1}(c)$ 是 N 的一个余维 k 的正则子流形.

浸入与浸没

定义. 一个流形间的光滑映射 $f:N\to M$ 是浸入，如果对于 $\forall p\in N$ 的微分 $f_{*,p}:T_pN\to T_{f(p)}M$ 都是单射. 如果是满射那么被称为浸没.

例. 显然，浸入的一个经典例子是 $\iota\left(x^1,\cdots,x^n\right)=\left(x^1,\cdots,x^n,0,\cdots,0\right)$ 这样的向更高维的拓展. 而浸没的例子则是 $\pi\left(x^1,\cdots,x^m,x^{m+1},\cdots,x^n\right)=\left(x^1,\cdots,x^m\right)$ 这样向更低维的投影.

命题. 令流形 N,M 的维度分别为 n,m. 如果一个光滑映射 $f:N\to M$ 是 $p\in N$ 的一个浸入，那么其在 p 的邻域上有常秩 n. 如果一个光滑映射 $f:N\to M$ 是 $p\in N$ 的一个浸没，那么其在 p 的邻域上有常秩 m.

定理. 令流形 N,M 的维度分别为 n,m.
(i)浸入定理令 $f:N\to M$ 是 $p\in N$ 的一个浸入，那么存在一个以 $p\in N$ 为中心的图表 (U,ϕ) 和以 $f(p)\in M$ 为中心的图表 (V,ψ) 使得在 $\phi(p)$ 的邻域，有

$$\psi\circ f\circ\phi^{-1}\left(r^1,\cdots,r^n\right)=\left(r^1,\cdots,r^n,0,\cdots,0\right)$$

(ii)浸没定理令 $f:N\to M$ 是 $p\in N$ 的一个浸入，那么存在一个以 $p\in N$ 为中心的图表 (U,ϕ) 和以 $f(p)\in M$ 为中心的图表 (V,ψ) 使得在 $\phi(p)$ 的邻域，有

$$\psi\circ f\circ\phi^{-1}\left(r^1,\cdots,r^m,r^{m+1},\cdots,r^n\right)=\left(r^1,\cdots,r^m\right)$$

推论. 一个流形间的浸没 $f:N\to M$ 是一个开映射

光滑映射的像

定理. 如果 $f: N \to M$ 是一个嵌入，那么其像 $f(N)$ 是 M 的一个正则子流形.

定理. 如果 N 是 M 的一个正则子流形，那么包含映射 $\iota: N \to M, \iota(p) = p$ 是一个嵌入

光滑映射到子流形

定理. 令 $F: N \to M$ 是 C^∞ 的，F 的像在 $S \subset M$ 中. 如果 S 是 M 的一个正则子流形，那么诱导映射 $F: N \to S$ 是 C^∞ 的.

切丛

切丛的拓扑

令 $TU = \bigsqcup_{p\in U} T_pU = \bigsqcup_{p\in U} T_pM$

引理. 令 U, V 是 M 上的一个坐标开集. 如果 A 在 TU 上是开的，B 在 TV 上是开的，那么 $A \cap B$ 在 $T(U \cap V)$ 上是开的.

引理. 流形 M 包含由坐标开集构成的可数基.

命题. 流形 M 的切丛 TM 是第二可数的.

命题. 流形 M 的切丛 TM 是 Hausdorff 的.

切丛上的流形结构

如果 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 是 M 的一个 C^∞ 图册，那么 $\{(TU_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 是 TM 的 C^∞ 图册

向量丛

定义. 给定 $\pi: E \to M$，我们称对于 $\forall p \in M$，逆像 $\pi^{-1} := \pi^{-1}(\{p\})$ 为在 p 点的纤维，记作 E_p.

一个满射的流形间的光滑映射 $\pi: E \to M$ 是 r 阶局部平凡的，如果：
(i) 每个纤维 $\pi^{-1}(p)$ 都是 r 维的向量空间
(ii) 对于每个 $p \in M$，存在 p 的一个开邻域 U 和纤维保持微分同胚 $\phi: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$，使得对于 $\forall q \in U$，该映射将纤维 $\pi^{-1}(p)$ 映射为相应的纤维 $q \times \mathbb{R}^r$ 作为向量空间同构.
$\{U\}$ 作为 M 的一个开覆盖，集合 $\{(U, \phi)\}$ 是 E 的一个局部平凡化，同时 $\{U\}$ 称为对于 E，M 的一个平凡化开集.
一个 C^∞ 的秩 r 的向量丛是 (E, M, π)，包含流形 E, M，和一个 r 阶局部平凡的光滑满射 $\pi: E \to M$，E 是总空间，M 是基空间. 我们也可以称 E 为 M 的向量丛.

截面

定义. 流形 M 上的一个向量场 X 是分配切向量 $X_p \in T_pM$ 到每个 $p \in M$ 的函数. 对于切丛而言，M 上的向量场是切丛 $\pi: TM \to M$ 的一个截面
向量场是光滑的，如果 M 到 TM 的映射是光滑的

凸函数与单位分解

C^∞ 凸函数

定义. 流形 M 上，C^∞ 函数 f 的支集定义为 $\operatorname{supp} f = \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}}$
$q \in M$ 且 U 为 q 的一个邻域的话，在 p 的凸函数指的是任何一个连续函数 f，它在 q 的邻域里恒为 1，且 $\operatorname{supp} f \subset U$

命题. C^∞ 函数的延拓
假设 f 是一个定义在 $q \in M$ 的邻域 U 的光滑函数，那么存在一个 M 上的光滑函数 $\widetilde{f}$ 使得在 q 的更小的邻域内与 f 一致.

单位分解

定义. 如果 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的一个有限开覆盖，那么从属于 $\{U_i\}$ 的 C^∞ 单位分解是一组非负的 C^∞ 函数 $\{\rho_i\}_{i\in I}$，满足：
(i) $\sum \rho_i = 1$
(ii) $\mathrm{supp}\rho_i \subset U_i$

定义. 一个流形上的 C^∞ 单位分解是指一组 C^∞ 函数 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得：
(i) $\{\mathrm{supp}\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是局部有限的
(ii) $\sum \rho_\alpha = 1$

单位分解的存在性

引理. 如果 $\rho_1,\cdots,\rho_m$ 是流形 M 上的实值函数，那么 $\mathrm{supp}\left(\sum \rho_i\right) \subset \bigcup \mathrm{supp}\rho_i$

命题. 设 M 是一个紧流形，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的一个开覆盖，那么存在一个从属于 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的 C^∞ 单位分解 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$

定理. *C^∞ 单位分解的存在性*
令 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是流形 M 的一个开覆盖
(i) 存在一个带有紧支集的 C^∞ 单位分解 $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$，使得 $\forall k, \mathrm{supp}\phi_k \subset U_\alpha$ 对某些 $\alpha\in A$ 成立
(ii) 若对紧支集无要求，那么存在从属于 $\{U_\alpha\}$ 的 C^∞ 单位分解 $\{\rho_\alpha\}$

向量场

向量场的光滑性

命题. 一个 M 上的向量场 X 是光滑的，当且仅当对于 M 上任意的光滑函数 f，函数 Xf 在 M 上是光滑的

积分曲线

定义. 令 X 是一个流形 M 上的一个光滑向量场，$p\in M$. 开始于 p 的 X 的积分曲线是一个曲线 $c:(a,b)\to M$，定义在开区间 (a,b) 上，满足 $c(0)=p, c'(t)=X_{c(t)}$

定义. 我们称一个积分曲线是极大的，如果其定义域不能扩展到更大的区间

局部流

定理. 令 V 是一个 $\mathbb{R}^n$ 的开集，$p_0\in V$，$f:V\to\mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 函数. 那么微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y), y(0)=p_0$ 有唯一的光滑解 $y:(a(p_0),b(p_0))\to V$，其中 $(a(p_0),b(p_0))$ 是包含 0 的极大区间

定理. 令 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集，$f:V\to\mathbb{R}^n$ 是 V 上一个光滑函数. 对于每个 $p_0\in V$，存在 $p_0\in V$ 的一个邻域 W，$\epsilon>0$，和一个光滑函数 $y:(-\epsilon,\epsilon)\times W\to V$，使得对于 $\forall(t,q)\in(-\epsilon,\epsilon)\times W$，$\frac{\partial y}{\partial t}(t,q)=f(y(t,q)), y(0,q)=q$

定义. 一个关于光滑流形上的开集 U 中的点 p 的局部流是一个光滑函数 $F:(-\epsilon,\epsilon)\times W\to U$，这里 ϵ 是正实数，W 是 $p\in U$ 的一个邻域，使得 $F_t(q)=F(t,q)$ 的话，有：
(i) $F_0(q)=q$，对于 $\forall q\in W$
(ii) $F_t(F_s(q))=F_{t+s}(q)$ 如果两边都被定义的话

李括号

假设 X,Y 是定义在流形 M 的开子集 U 上的两个光滑向量场，将其视为作用在 $C^\infty(U)$ 的导子. 对于 $C^\infty(U)$ 中的函数 f，Yf 是 U 上的 C^∞ 函数，定义为 $(XY)f:=X(Yf)$ 的函数同样是 U 上的 C^∞ 函

数.
对于 $f,g\in C^\infty(U)$，有

$$\begin{aligned}XY(fg)&=X((Yf)g+fYg)\\&=(XYf)g+(Yf)(Xg)+(Xf)(Yg)+f(XYg)\end{aligned}$$

使 XY 不为导子的 $(Yf)(Xg),(Xf)(Yg)$ 是对称的. 于是我们只需要对 $XY(fg)$ 和 $YX(fg)$ 作差即可消掉，从而得到 $XY-YX$ 是 $C^\infty(U)$ 的导子.
给定两个定义在 U 上的光滑向量场 X,Y，$p\in U$，定义它们之间的李括号为

$$[X,Y]_p f=(X_pY-Y_pX)f$$

这里 f 是 p 点任意 C^∞ 函数的芽.

命题. 如果 X,Y 是 M 上光滑的向量场的话，$[X,y]$ 在 M 上也是光滑的

例. Jacobi 恒等式
$\sum_{cyc}[X,[Y,Z]]=0$

定义. 李代数是一个实向量空间 V，配有括积计算 $[,]:V\times V\to V$，对于 $\forall a,b\in\mathbb{R}^n,X,Y,Z\in V$，满足以下性质：
(i) 双线性：

$$\begin{aligned}[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]\\ [Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y]\end{aligned}$$

(ii) 反交换性：

$$[Y,X]=-[X,Y]$$

(iii)Jacobi 恒等式：

$$\sum_{cyc}[X,[Y,Z]]=0$$

定义. 一个李代数 V 的导子是一个线性映射 $D:V\to V$ 满足：

$$D[Y,Z]=[DY,Z]+[Y,DZ]$$

相关向量场

定义. 令 $F:N\to M$ 是流形间的光滑映射，一个 N 上的向量场 X 是 $F-$ 相关于 M 上的向量场 $\widetilde{X}$，如果对 $\forall p\in N,F_{*,p}(X_p)=\widetilde{X}_{F(p)}$

命题. N 上的向量场 X 和 M 上的向量场 $\widetilde{X}$ 是 $F-$ 相关的，当且仅当

$$\forall g\in C^\infty(M),X(g\circ F)=\left(\widetilde{X}g\right)\circ F$$

命题. 令 $F:N\to M$ 是流形间的光滑映射. 如果 N 上的光滑向量场 X,Y 是 $F-$ 相关于 M 上的光滑向量场 $\widetilde{X},\widetilde{Y}$. 那么 $[X,Y]$ 是 $F-$ 相关于 $\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]$ 的

李群

李群的例子

定义. 李群是指一个 C^∞ 流形 G 在是一个群的同时，满足以下运算是 C^∞ 的：

$$\begin{aligned}\mu:G\times G\to G,\mu(a,b)=ab\\ \iota:G\to G,\iota(a)=a^{-1}\end{aligned}$$

子李群

定义. 李群 G 的子李群是满足以下条件的抽象子群 H:
(i) H 是一个抽象子群
(ii) H 是通过包含映射定义的浸入子流形
(iii) H 上的群运算是 C^∞ 的

命题. 如果 H 是一个抽象子群和一个李群 G 的正则子流形，那么它是 G 的子李群

定理. 闭子群定理
一个闭的李群的子群是一个嵌入的子李群

矩阵的迹

定义 $n\times n$ 矩阵 X 的迹为 $tr\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_{ii}$

引理. (i) $\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}, tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$
(ii) $X\in\mathbb{R}^{n\times n}, A\in \mathrm{GL}\left(n,\mathbb{R}\right), tr\left(AXA^{-1}\right)=tr\left(X\right)$

命题. 矩阵的迹等于其特征值的总和

命题. $\forall X\in\mathbb{R}^{n\times n}, \det\left(e^X\right)=e^{trX}$

行列式微分

命题. $\forall X\in\mathbb{R}^{n\times n}, \det_{*,I}\left(X\right)=trX$

李代数

命题. 切空间 $T_I\left(SL\left(n,\mathbb{R}\right)\right)$ 是包含所有迹 0 的矩阵的 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间

命题. 一个李群 G 上左不变的向量空间 X 是光滑的

命题. 如果 X,Y 是 G 上的左不变向量场，那么 $[X,Y]$ 也是

命题. 如果 $A,B\in T_eG$ 且 $\widetilde{A},\widetilde{B}$ 是他们生成的左不变向量场，那么 $\left[\widetilde{A},\widetilde{B}\right]=[A,B]^{\sim}$

命题. $A=\sum a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I, B=\sum b_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I\in T_I\left(GL\left(n,\mathbb{R}\right)\right)$
如果 $[A,B]=\left[\widetilde{A},\widetilde{B}\right]_I=\sum c_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I$，那么 $c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}-b_{ik}a_{kj}$

定义. 令 $F:H\to G$ 是李群间的一个光滑映射. 定义 $F_*:L\left(H\right)\to L\left(G\right)$ 为 $F_*\left(\widetilde{A}\right)=\left(F_*A\right)^{\sim}, \forall A\in T_eH$

定义. 李群 H,G 的映射 $F:H\to G$ 是李群同态，如果这是个光滑映射且这是个群同态

命题. 如果 $F:H\to G$ 是李群同态，$A\in T_eJ$ 是在 H 的单位 e 处的切向量，那么 G 上的左不变向量场 $F_*\widetilde{A}$ 是 $F-$ 相关于 H 上的左不变向量场 $\widetilde{A}$

微分 1− 形式

函数的微分

定义. 如果 f 是一个在流形 M 上的光滑的函数，其微分定义为 M 上的 1− 形式使得 $\forall p\in M$ 且 $X_p\in T_pM$ 的话 $\left(\mathrm{d}f\right)_p\left(X_p\right)=X_pf$

命题. 如果 $f:M\to\mathbb{R}$ 是光滑的，那么 $\forall p\in M, X_p\in T_pM$，有 $f_*\left(X_p\right)=\left(\mathrm{d}f\right)_p\left(X_p\right)\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{f(p)}$

参考文献