§11

Cheng Kexin

🐈‍⬛

A11.1

(1)

B_n は明らかに有界で、$\mu(B_n) = n^2\pi$、$B_n = B(0, n) \subset \mathbb{R}^2$
$n^2 < (n+1)^2 \Longrightarrow B_n \subset B_{n+1}$
$B_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{R}^2$ から、$\forall B \subset \mathbb{R}^2, \lim_{n\to\infty} |B \cap B_n| = |B|$
以上より、$(B_n)_n$ は $\mathbb{R}^2$ の取尽し列である

$$\begin{aligned}
\iint_{B_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \int_0^n e^{-r^2} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^n r e^{-r^2} \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^n \\
&= \pi - \pi e^{-n^2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lim_{n\to\infty} \iint_{B_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\pi - \pi e^{-n^2}\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

よって、広義積分可能で値が π である

(3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \iint_{R_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{R_n} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} \mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{-n}^n x^{-y^2} \mathrm{d}y\right) \\
&= \left(\int_{-n}^n e^{-x^2}\right)^2 \\
&= \mathrm{RHS}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \lim_{n\to\infty}\iint_{R_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \lim_{n\to\infty}\iint_{R_n} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{-n}^{n} x^{-y^2}\mathrm{d}y\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\right)^2 \\
&= \mathrm{RHS}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

B11.2

$3'$ より、$n \longrightarrow \infty \Longrightarrow K \subset K_n$
$\Longrightarrow |K| \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} |K \cap K_n|$
これは条件 (3) と同じである

B11.3

$$\begin{aligned}
\int_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_A \widetilde{f}\chi_A(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_B \widetilde{f}(\mathbf{x})\,\chi_B(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{A\setminus B} \widetilde{f}(\mathbf{x})\,\chi_{A\setminus B}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_B \widetilde{f}(\mathbf{x})\,\chi_B(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_B f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

これより、領域 A はその中で可測な取尽し列で近づいた領域 K_n と可測でないものとの和集合であるから、上で証明したものを用いて領域 A の広義積分は明らかに領域 K_n の広義積分である

B11.4

$\mu(K_n) = \pi\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ で、Jordan 可測である、また、$\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} < 1$ から、$K_n \subset A$
$\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} < \sqrt{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} \Longrightarrow K_n \subset K_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}|K \cap K_n| &= |K \cap K_\infty| \\
&= |K \cap A| \\
&= |K|
\end{aligned}$$

よって、K_n は可測な取尽し列である

B11.5

$D'_1 := \{r \in [1, \infty], \theta \in [0, 2\pi]\}$

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_1^n \frac{\sin r}{r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_1^n \frac{\sin r}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(1)\right) \\
&= \pi^2 - 2\pi\mathrm{Si}(1)
\end{aligned}$$

$D'_2 := \{r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]\}$

$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^2 \frac{\sin r}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\pi\int_{\frac{1}{n}}^2 \frac{\sin r}{r}\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\mathrm{Si}(2)
\end{aligned}$$

だから、実際この積分は広義積分可能である

B11.6

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\sin x}{y^\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\int_y^{\pi} \frac{\sin x}{y^\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{1+\cos y}{y^\alpha}\mathrm{d}y \\
&= \begin{cases}
\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} (1+\cos y)\,\mathrm{d}y & \alpha = 0 \\
\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{1}{y}\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\cos y}{y}\mathrm{d}y & \alpha = 1 \\
\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{1}{y^\alpha}\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\cos y}{y^\alpha}\mathrm{d}y & \alpha \neq 0, 1
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
[y + \sin y]_{\frac{1}{n}}^{\pi} & \alpha = 0 \\
[\log y + \mathrm{Ci}(y)]_{\frac{1}{n}}^{\pi} & \alpha = 1 \\
\left[\frac{1}{1-\alpha}y^{1-\alpha}\right]_{\frac{1}{n}}^{\pi} + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\cos y}{y^\alpha}\mathrm{d}y & \alpha \neq 0, 1
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\pi & \alpha = 0 \\
\infty & \alpha = 1 \\
\left[\frac{1}{1-\alpha}y^{1-\alpha}\right]_{\frac{1}{n}}^{\pi} + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\cos y}{y^\alpha}\mathrm{d}y & \alpha \neq 0, 1
\end{cases}
\end{aligned}$$

$\alpha \geq 1$ のとき、$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\cos y}{y^{\alpha}} \mathrm{d}y$ が収束するかどうかを考えればいいから

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{\epsilon} \left| \frac{\cos y}{y^{\alpha}} \right| \mathrm{d}y &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{\epsilon} \frac{1}{x^{\alpha}} \\ &= \infty\end{aligned}$$

を注意すると、$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\cos y}{y^{\alpha}} \mathrm{d}y$ が発散しているから $\alpha \geq 1$ も発散している
よって、$\alpha < 1$ であればいい

B11.7

二つの極限 f, f' が存在するとすると
$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N_1 \Rightarrow |f_n - f| < \frac{\epsilon}{2}$
$\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N_2 \Rightarrow |f_n - f'| < \frac{\epsilon}{2}$
$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおけば
$|f' - f| \leq |f_n - f| + |f_n - f| < \epsilon$ から
$f' = f$

B11.8

$(f_n)_n$ は一様収束であるから、$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N \Rightarrow |f_n - f| < \epsilon$
これは各 $x \in A$ に対しても成立するから、これは明らかに各点収束である

B11.9

各点収束は点による変化あるから、場合分けが必要
$\forall x \in [0, 1)$ では、$x \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ から、各点収束極限は 0
$x = 1$ なら、$\forall n, x^n = 1$ から、各点収束極限は 1 また、この $x = 1$ は一様収束でない反例だから、一様収束しない

B11.10

$x \in A$ を取って固定する

$$\begin{aligned}\partial_{x_j} f &= \lim_{t \to \infty} \frac{f(x + t x_j) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to \infty} \frac{f_n(x + t x_j) - f_n(x)}{t} \\ &= \partial_{x_j} f_n\end{aligned}$$

$\Longrightarrow x_j$ 方向で偏微分可能

$$\begin{aligned}\left|\lim_{t\to\infty}\frac{f(x+tx_j)-f(x)}{t}-g(x)\right| &\le \lim_{t\to\infty}\left|\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+tx_j)-f_n(x+tx_j)}{t}\right| \\ &+\lim_{t\to\infty}\left|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x+tx_j)-f_n(x+tx_j)}{t}-\partial_{x_j}f_n(x)\right)\right| \\ &+\lim_{t\to\infty}\left|\partial_{x_j}f_n(x)-g(x)\right| \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

よって、その偏微分は $g(x)$ である

B11.11

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)| &\le |f_n-f|+|f_m-f| \\ &\le \sup_{x\in A}|f_n-f_m| \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

$\Longrightarrow N := \max\{N_n, N_m\}$ とすればいい

B11.12

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \cos^n\theta$
$\cos^n\theta \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases}1 & \theta=0\\ 0 & \theta\neq 0\end{cases}$

B11.13

(N1) 絶対値の定義から導ける
(N2)$0 \le \|f\| = 0 \Longrightarrow f=0$
(N3)$\mathcal{B}(K)$ の線形性と sup の斉次性より導ける
(N4) 両辺を平方して比較すれば導ける

B11.14

$\Longleftarrow$
$m \ge N_m \Longrightarrow \|f_m - f\| < \epsilon$
$n \ge N_n \Longrightarrow \|f_n - f\| < \epsilon$
$N := \max\{N_m, N_n\}$ とすると $\|f_n - f_m\| \le \|f_m - f\| + \|f_n - f\| < \epsilon$
$\Longrightarrow$
任意に x_0 を取って固定する

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(x_0)\| &\le \|f(x)-f_n(x)\|+\|f_n(x)-f_n(x_0)\|+\|f_n(x_0)-f(x_0)\| \\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

B11.15

(1)

$\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$\Longrightarrow \exists N := \frac{1}{\epsilon}, s.t. \forall n \geq N \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n} - 0\right\| &= \left\|\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n}\right\| \\ &\leq \left\|\frac{1}{n}\right\| \\ &\leq \left\|\frac{1}{N}\right\| \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty 0\mathrm{d}x \\ &= 0\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^R e^{-\frac{x}{n}}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-\frac{R}{n}} + 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

🐈‍⬛

参考文献