

20240918

1

a

$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \\ \vec{F}_{12} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \end{cases}$$

b

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

c

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= \text{一定} \\ \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) &= 0 \\ m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= 0 \\ \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

d

显然我们有重心速度

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

由上述问题注意到分子为定值，因此其只能为静止或匀速直线运动其一

2

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \int \vec{F} dt &= \Delta m \vec{v} \end{aligned}$$

显然等号左边是力积而右边是动量的变化量

3

$$\begin{cases} v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 1} = 4.43 m/s \\ J = m \cdot v = 2 \cdot 4.43 = 8.86 kg \cdot m/s \\ F = \frac{J}{t} = \frac{8.86}{1} = 8.86 N \end{cases}$$

4

(a)

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - gt \\ y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(b)

$$-mg + bv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

注意到在终端速度时，其加速度可近似看作 0

因此运动方程可看作 $-mg + bv_\infty^2 = 0$ ，于是易得 $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{b}}$

(c)

注意到空气阻力和重力同向，因此有

$$-mg - bv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

課題

$$\begin{aligned} -mg - bv &= m \frac{dv}{dt} \\ dt &= -\frac{m}{mg + bv} dv \\ \int dt &= -\int \frac{m}{mg + bv} dv \\ \int dt &= -\int \frac{1}{g + \frac{b}{m}v} dv \end{aligned}$$

在这里令 $\frac{b}{m}v = u$

$$\begin{aligned} \int dt &= -\frac{m}{b} \int \frac{1}{g + u} du \\ t + C &= -\frac{m}{b} \log(g + u) \\ t + C &= -\frac{m}{b} \log\left(g + \frac{b}{m}v\right) \end{aligned}$$

我们代入初值 $v(0) = v_0$

$$0 + C = -\frac{m}{b} \log\left(g + \frac{b}{m}v_0\right)$$

将 $C = -\frac{m}{b} \log \left(g + \frac{b}{m} v_0 \right)$ 代入到原方程我们可以得到

$$\begin{aligned}
 t - \frac{m}{b} \log \left(g + \frac{b}{m} v_0 \right) &= -\frac{m}{b} \log \left(g + \frac{b}{m} v \right) \\
 \frac{bt}{m} - \log \left(g + \frac{b}{m} v_0 \right) &= -\log \left(g + \frac{b}{m} v \right) \\
 \exp \left(\frac{bt}{m} \right) &= \frac{g + \frac{b}{m} v_0}{g + \frac{b}{m} v} \\
 \exp \left(\frac{bt}{m} \right) g + \exp \left(\frac{bt}{m} \right) \frac{b}{m} v &= g + \frac{b}{m} v_0 \\
 \frac{b}{m} \exp \left(\frac{bt}{m} \right) v &= \left(1 - \exp \left(\frac{bt}{m} \right) \right) g + \frac{b}{m} v_0 \\
 \exp \left(\frac{bt}{m} \right) v &= \frac{m}{b} \left(1 - \exp \left(\frac{bt}{m} \right) \right) g + v_0 \\
 v &= \frac{m}{b} \left(\frac{1}{\exp \left(\frac{bt}{m} \right)} - 1 \right) g + \frac{1}{\exp \left(\frac{bt}{m} \right)} v_0
 \end{aligned}$$

而我们注意到

$$\begin{aligned}
 v_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{b} \left(\frac{1}{\exp \left(\frac{bt}{m} \right)} - 1 \right) g + \frac{1}{\exp \left(\frac{bt}{m} \right)} v_0 \right) \\
 &= -\frac{mg}{b}
 \end{aligned}$$

20240923

1

(a)

首先我们考虑垂直抗力为 $N = mg \cos \theta$ ，因此摩擦力为 $\mu' mg \cos \theta$

接着是沿斜坡向下（即 x 轴正方向）的受力为 $mg \sin \theta$

因此我们可以得到运动方程为 $mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta = m \frac{d^2 x}{dt^2}$

(b)

由于题目并未涉及到斜坡长度问题，因此我们可以简单认为加速度为负即可

根据运动方程我们可以得到， $g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) < 0$

这等价于 $\mu' > \tan \theta$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= g \sin \theta - \mu' g \cos \theta \\ dt &= \frac{1}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} dv \\ \int dt &= \int \frac{1}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} dv \\ t + C &= \frac{v}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta}\end{aligned}$$

考虑初值 $v(0) = v_0$ ，有

$$C = \frac{v_0}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta}$$

再代回原方程，得到

$$\begin{aligned}t + \frac{v_0}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} &= \frac{v}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} \\ v &= v_0 + gt(\sin \theta - \mu' \cos \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \int v dt \\ &= \int v_0 + gt(\sin \theta - \mu' \cos \theta) dt \\ &= v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) t^2 + C\end{aligned}$$

由于 $x(0) = 0$ ，因此 $C = 0$

于是， $x = v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) t^2$

2

$$\begin{aligned} -kx &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ -ke^{\lambda t} &= m\lambda^2 e^{\lambda t} \\ \lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\ \lambda &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

于是 $x = \exp\left(\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$, 因此角振动数 ω 就是中间的 $\sqrt{\frac{k}{m}}$

其实是找 $i\omega t$ 的 ω

因此

$$\begin{cases} x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$$

代入 $x(t) = x_0, v(0) = 0$

$$\begin{cases} x_0 = A \\ 0 = B\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

综上

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v(t) &= -x_0\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{aligned}$$

3

(a)

$$\begin{aligned} v_x &= -r\omega \sin \omega t \\ v_y &= r\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

显然我们可以注意到, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = r^2\omega^2$, 因此 $v = r\omega$

(b)

$$\begin{aligned} a_x &= -r\omega^2 \cos \omega t \\ a_y &= -r\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

注意到, 加速度方向与位置方向差别仅为负号, 因此如果考虑从原点出发到位置的方向的话, 加速度方向就是位置方向出发到原点. 而大小则显然是 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$

(c)

$$f_x = -mr\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$f_y = -mr\omega^2 \sin(\omega t)$$

同样的，受力的方向与位置坐标的方向差别仅为负号，因此其受力指向原点

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = m\omega^2 r$$

(d)

$$\begin{cases} v = r\omega \\ a = \omega^2 r \end{cases} \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

課題

1

注意到在微小角度位移的情况下，复原力为 $-mg \sin \theta$

另一方面，其切向加速度可以看作弧长 $l\theta$ 对时间的二阶微分，这即 $l \frac{d^2\theta}{dt^2}$

因此运动方程为 $ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$

$$\begin{aligned} ml \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -mg \sin \theta \\ l \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -g \sin \theta \\ l\lambda^2 e^{\lambda t} &= -g \sin(e^{\lambda t}) \end{aligned}$$

显然这样是无法直接进行求解的，因此我们考虑小角度下的近似： $\sin \theta = \theta$

$$\begin{aligned} l \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -g\theta \\ l\lambda^2 e^{\lambda t} &= -ge^{\lambda t} \\ \lambda^2 &= -\frac{g}{l} \\ \lambda &= \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

于是我们得到了 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

因此周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

2

由于张力 S 的竖直方向分力等于重力，因此 $S \cos \theta = mg$ ，即 $S = \frac{mg}{\cos \theta}$

另一方面这是圆锥摆，因此其向心力 f 为张力 S 的水平分力，因此 $f = S \sin \theta = mg \tan \theta$

$$mg = m\omega^2 l \cos \theta$$

$$mg = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 l \cos \theta$$

$$\frac{g}{l \cos \theta} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l \cos \theta}{g}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$$

20240925

1

(a)

在水平方向上，由于没有受力因此可以简单认为

$$x(t) = v_{x0}t$$

在铅直方向上由于仅受到重力作用因此

$$\begin{aligned} y(t) &= v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= v_{y0} \cdot \frac{x(t)}{v_{x0}} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x(t)}{v_{x0}} \right)^2 \\ &= -\frac{g}{2v_{x0}^2}x^2(t) + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x(t) \end{aligned}$$

显然，这是一条抛物线

(b)

y 达到最大的时候，其向上的速度是 0. 因此我们有 $t = \frac{v_{y0}}{g}$
此时

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{x0}v_{y0}}{g} \\ y &= \frac{v_{y0}^2}{2g} \end{aligned}$$

(c)

我们用 v_0 来重新表示其水平方向上和铅直方向上的运动

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \theta_0 \\ y &= v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

影响水平飞行距离的是飞行时间，而时间与竖直方向速度减到 0 的时间有关

$$t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

于是水平方向能达到的最远距离为

$$\begin{aligned} x_{max} &= 2v_0 \cdot \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \cdot \cos \theta_0 \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \end{aligned}$$

因此我们可以知道，若 x_{max} 取最大，则 $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

課題

在水平方向上

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv_x}{dt} &= -\beta m v_x \\
 \frac{dv_x}{dt} &= -\beta v_x \\
 -\frac{1}{\beta v_x} dv_x &= dt \\
 -\frac{1}{\beta} \int \frac{1}{v_x} dv_x &= \int dt \\
 -\frac{1}{\beta} \log v_x &= t + C
 \end{aligned}$$

考虑到初始时刻 $v_x = v_{x0}$

$$C = -\frac{1}{\beta} \log v_{x0}$$

代回原方程

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\beta} \log v_x &= t - \frac{1}{\beta} \log v_{x0} \\
 \log \left(\frac{v_x}{v_{x0}} \right) &= -\beta t \\
 \frac{v_x}{v_{x0}} &= e^{-\beta t} \\
 v_x &= v_{x0} e^{-\beta t}
 \end{aligned}$$

因此当经过足够长时间后，水平方向上速度趋近于 0
接着我们考虑铅直方向

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv_y}{dt} &= -mg - \beta m v_y \\
 \frac{dv_y}{dt} &= -g - \beta v_y \\
 -\frac{1}{g + \beta v_y} dv_y &= dt \\
 -\int \frac{1}{g + \beta v_y} dv_y &= \int dt \\
 -\log (g + \beta v_y) &= t + C
 \end{aligned}$$

初始时刻 $v_y = v_{y0}$ 代入原方程得到

$$C = -\log (g + \beta v_{y0})$$

因此

$$\begin{aligned}
 -\log (g + \beta v_y) &= t - \log (g + \beta v_{y0}) \\
 \log \left(\frac{g + \beta v_{y0}}{g + \beta v_y} \right) &= t \\
 \frac{g + \beta v_{y0}}{g + \beta v_y} &= e^t \\
 g + \beta v_{y0} &= g e^t + \beta e^t v_y \\
 v_y &= \frac{g}{\beta} \left(\frac{1}{e^t} - 1 \right) + \frac{1}{e^t} v_{y0}
 \end{aligned}$$

因此，经过足够长时间后，铅直方向上的速度趋近于 $-\frac{g}{\beta}$
至于其 x, y 坐标，我们只需要对这两个求得的速度进行关于 t 的积分

$$\begin{aligned}x &= \int v_{x0} e^{-\beta t} dt \\&= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + C \\&= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} v_{x0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \int \left(\frac{g}{\beta} \left(\frac{1}{e^t} - 1 \right) + \frac{1}{e^t} v_{y0} \right) dt \\&= \frac{g}{\beta} (-e^{-t} - t) - v_{y0} e^{-t} + C \\&= \frac{g}{\beta} (-e^{-t} - t) - v_{y0} e^{-t} + \frac{g}{\beta} + v_{y0}\end{aligned}$$

20240930

1

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F \\
m \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} &= F \cdot \frac{dx}{dt} \\
m \frac{dv}{dt} \cdot v &= F \cdot v \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= \frac{d}{dt} W \\
\frac{1}{2} m v^2 &= W
\end{aligned}$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力所做的功

2

$$\begin{aligned}
W_1 &= -f \cdot p \\
W_2 &= -f \cdot q - f \cdot (q - p) \\
&= -f \cdot (2q - p) \\
W_2 - W_1 &= 2f(p - q) \neq 0
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} dx + m \frac{d^2 y}{dt^2} dy &= F dx + F dy \\
m \frac{dv_x}{dt} dx + m \frac{dv_y}{dt} dy &= F dx + F dy \\
m (v_x dv_x + v_y dv_y) &= F dx + F dy \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 \right) &= F dx + F dy \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 \right) &= \frac{d}{dt} W \\
\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) &= W
\end{aligned}$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力做的功

4

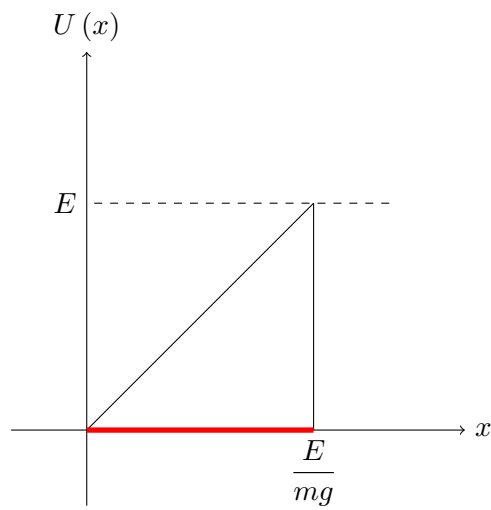
$$\begin{aligned}
\Delta E_k &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\
E_{k2} - E_{k1} &= \int_{x_1}^{x_2} -\frac{dU}{dx} dx \\
E_{k2} - E_{k1} &= U(x_1) - U(x_2)
\end{aligned}$$

5

(a)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -mg \\
 U(x) &= -\int f(x) dx \\
 &= mgx + C = mgx \\
 \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + mgx &= \text{const}
 \end{aligned}$$

(b)



于是我们可以得到，运动范围是红线所覆盖的 $0 \leq x \leq \frac{E}{mg}$

6

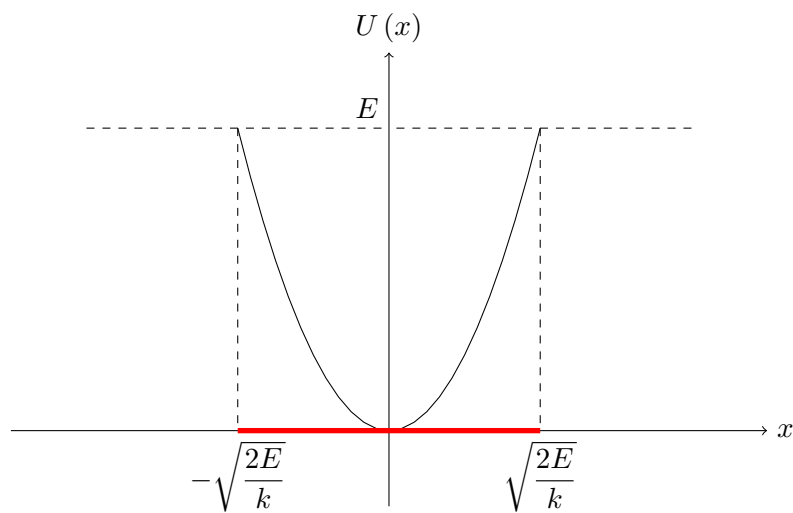
(a)

$$\begin{aligned}
 U(x) &= -\int f(x) dx \\
 &= -\int -kx dx \\
 &= \frac{1}{2}kx^2 + C \\
 &= \frac{1}{2}kx^2
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx \\
 m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} &= -kx \frac{dx}{dt} \\
 m \frac{dv}{dt} v &= -kxv \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) \\
 \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 &= 0
 \end{aligned}$$

(c)



由图可知，运动范围是 $-\sqrt{\frac{2E}{k}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2E}{k}}$

(d)

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \\
 \frac{1}{2} mv^2 &= E - \frac{1}{2} kx^2 \\
 v^2 &= \frac{1}{m} (2E - kx^2) \\
 v &= \pm \sqrt{\frac{1}{m} (2E - kx^2)}
 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{d}{dt}x \\
 &= \frac{d}{dt}(a \cos(\omega t)) \\
 &= -a\omega \sin(\omega t) \\
 &= -a\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}tx\right)
 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
 K(t) &= \frac{1}{2}mv^2 \\
 &= \frac{1}{2}m \cdot (a\omega \sin \omega t)^2 \\
 &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\omega t)
 \end{aligned}$$

由于 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 我们可以得到 $k = m\omega^2$

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \frac{1}{2}kx^2 \\
 &= \frac{1}{2}k(a \cos(\omega t))^2 \\
 &= \frac{1}{2}m\omega^2a^2 \cos^2(\omega t)
 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
 K(t) + U(t) &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) \\
 &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2
 \end{aligned}$$

課題

1

$$\begin{aligned}
 \langle K \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} K(t) dt \\
 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t)) dt
 \end{aligned}$$

对于这个积分，我们按照如下方式来积

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt &= \int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos s \right) \cdot \frac{1}{2\omega} ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos s \right) ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{2}s - \frac{1}{2} \sin s \right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\langle K \rangle &= \frac{1}{4\pi} ma^2 \omega^3 \cdot \frac{\pi}{\omega} \\ &= \frac{1}{4} ma^2 \omega^2\end{aligned}$$

类似的， $\langle U \rangle$ 由于与 $\langle K \rangle$ 只有相位差，因此只需要后面的相位进行积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t) dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} (\cos(2\omega t) + 1) dt \\ &= \int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos s \right) \cdot \frac{1}{2\omega} ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos s \right) ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \sin s \right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega}\end{aligned}$$

因此 $\langle K \rangle = \langle U \rangle$

2a

由于受力为其势能的负梯度，因此可以注意到， x_a 处梯度为负，受力方向是正； x_d 处梯度是正，受力方向是负； x_c, x_e 两处梯度为零，因此合力为 0

2b

$$\begin{cases} x_a \leq x & E = E_2 \\ x_b \leq x \leq x_d, x_f \leq x & E = E_1 \\ x_c = x & E = E_0 \end{cases} \begin{cases} v_a = 0 \\ v_b = v_d = v_f = 0 \\ v_c = 0 \end{cases} \begin{cases} E = E_2 \\ E = E_1 \\ E = E_0 \end{cases}$$
 因此， $x = x_c$ 的情况可能是简谐振子速度为 0 的振幅处（若 $E = E_0$ ）或处于合力为 0 的情况（若 $E = E_1$ 或 $E = E_2$ ）

2c

由 (b) 的推导可以知道，动能最大的点在 x_c

20241002

1

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\Gamma \frac{dx}{dt} - kx \\
m \frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \\
mp^2 e^{pt} + \Gamma p e^{pt} + k e^{pt} &= 0 \\
(mp^2 + \Gamma p + k) e^{pt} &= 0 \\
mp^2 + \Gamma p + k &= 0 \\
mp^2 + 2m\gamma p + m\omega_0^2 &= 0 \\
p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 &= 0 \\
p &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}$$

2

由上一问我们可以得到

$$x(t) = A e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + B e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

由初期条件 $x(0) = 0$, 我们得到 $A + B = 0$. 接着

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{d}{dt} x(t) \\
&= -A \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) - B \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) \\
&= (B - A) \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}$$

初期条件 $v(0) = v_0$ 可得 $B - A = \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

因此, $A = -\frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, B = \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

综上, 我们有

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\
&= \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left(e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right)
\end{aligned}$$

3

(a)

这里我们只需要将其代入运动方程验证即可

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \\
m\gamma(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + \Gamma(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + kte^{-\gamma t} &= 0 \\
m\gamma(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + 2m\gamma(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + m\gamma^2 te^{-\gamma t} &= 0 \\
(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + 2(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + \gamma te^{-\gamma t} &= 0
\end{aligned}$$

显然, 将 $e^{-\gamma t}$ 提出来之后系数项总和为 0, 因此等号两边相等

(b)

我们不妨设其解为 $x(t) = Ate^{-\gamma t}$, 显然满足 $x(0) = 0$

接着对于 $v(0)$, 由于 $v(t) = A(1 - \gamma t)e^{-\gamma t}$, 因此我们可以注意到, $A = v_0$

综上, $x(t) = v_0 te^{-\gamma t}$

4

(a)

由于 $\omega_0 > \gamma$, 因此 1 里的解为 $p = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

因此我们假设通解是 $x(t) = e^{-\gamma t} \left(A \cos \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) + B \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) \right)$

考虑 $x(0) = 0$, 我们有 $A = 0$, 于是我们可以将通解写成 $x(t) = Be^{-\gamma t} \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right)$

然后考虑 $v(t) = e^{-\gamma t} \left(B\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - B\gamma \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) \right)$ 和 $v(0) = v_0$

$$\begin{aligned} B\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - B\gamma \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) &= v_0 \\ B \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - \gamma \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) \right) &= v_0 \\ \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - \gamma \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right)} &= B \\ \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} &= B \end{aligned}$$

因此, $x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right)$

(b)

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\Gamma v - kx \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\Gamma \frac{dx}{dt} - kx \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} &= -\Gamma \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} - kx \frac{dx}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= -2m\gamma v \cdot v - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) &= -2m\gamma v \cdot v \end{aligned}$$

課題

1

首先我们将三种振动的位移时间依赖性 $x(t)$ 写在一起

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left(e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right) & \omega_0 < \gamma \\ x(t) = v_0 te^{-\gamma t} & \omega_0 = \gamma \\ x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right) & \omega_0 > \gamma \end{cases}$$

显然式子过于繁琐难以判断，因此我们首先记 $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ 和 $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ 分别为 $\hat{\omega}$ 和 $\tilde{\omega}$ 于是过衰减振动变成

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}} \left(e^{-\gamma t + \hat{\omega} t} - e^{-\gamma t - \hat{\omega} t} \right) \\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-\gamma t} \left(e^{\hat{\omega} t} - e^{-\hat{\omega} t} \right) \\ &= \frac{v_0}{\hat{\omega}} e^{-\gamma t} \sinh(\hat{\omega} t) \\ &\simeq \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-\gamma t} \cdot e^{\hat{\omega} t} \\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-(\gamma - \hat{\omega})t} \end{aligned}$$

衰减振动变成

$$x(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t)$$

因此简化后的三个式子变成

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-(\gamma - \hat{\omega})t} & \omega_0 < \gamma \\ x(t) = v_0 t e^{-\gamma t} & \omega_0 = \gamma \\ x(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t) & \omega_0 > \gamma \end{cases}$$

注意到这里公因式是 $v_0 e^{-\gamma t}$

因此我们仅需证明 $\left\{ \frac{1}{\hat{\omega}} \sinh(\hat{\omega} t), t, \frac{1}{\tilde{\omega}} \sin(\tilde{\omega} t) \right\}$ 中， t 的增长速度/斜率/梯度是最快/大的

显然，这里 t 在任何情况下都比第三项含有 \sin 的式子梯度要大，因此我们只需要讨论双曲正弦的部分。

显然趋近于无穷时，次方位置为负项的那部分可以忽视掉，也就是最后的 $\frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-(\gamma - \hat{\omega})t}$ 。而系数对于衰减速度几乎没有任何影响（因为控制主体增减的是指数函数），因此我们仅需要判断指数位置

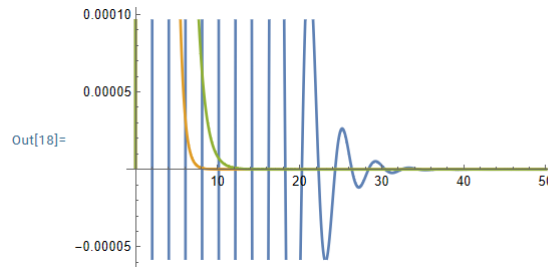
由于 $\hat{\omega} > 0$ ，因此 $-(\gamma - \hat{\omega}) > -\gamma$ 。因此临界衰减振动的衰减速度大于过衰减的衰减速度

2

我们先分别将三种情况给代入

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_0 \sqrt{0.6}} e^{-0.2\omega_0 t} \sin(\sqrt{0.6}\omega_0 t) & \gamma = 0.2\omega_0 \\ x(t) = v_0 t e^{-\omega_0 t} & \gamma = \omega_0 \\ x(t) = \frac{v_0}{2\omega_0 \sqrt{0.44}} \left(e^{(-1.2 + \sqrt{0.44})\omega_0 t} - e^{(-1.2 - \sqrt{0.44})\omega_0 t} \right) & \gamma = 1.2\omega_0 \end{cases}$$

接着代入 mathematica 之后我们可以得到



具体来说，我们可以知道，蓝色波动的那根是衰减运动，稍微靠右上的绿色线是过衰减，剩下的黄线是临界衰减

20241007

1

(a)

$$\begin{aligned}
 f_0 \cos(\omega t) &= -a_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) + 2\gamma \cdot (-a_0 \omega \sin(\omega t + \phi_0)) + a_0 \omega_0^2 \cos(\omega t + \phi_0) \\
 f_0 \cos(\omega t) &= -a_0 \omega^2 (\cos(\omega t) \cos \phi_0 - \sin(\omega t) \sin \phi_0) \\
 &\quad - 2\gamma a_0 \omega (\sin(\omega t) \cos \phi_0 + \cos(\omega t) \sin \phi_0) \\
 &\quad + a_0 \omega_0^2 (\cos(\omega t) \cos \phi_0 - \sin(\omega t) \sin \phi_0) \\
 f_0 \cos(\omega t) &= \cos(\omega t) (-a_0 \omega^2 \cos \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 \omega_0^2 \cos \phi_0) \\
 &\quad + \sin(\omega t) (a_0 \omega^2 \sin \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \cos \phi_0 - a_0 \omega_0^2 \sin \phi_0)
 \end{aligned}$$

通过比较系数可以得到

$$\begin{cases} f_0 = -a_0 \omega^2 \cos \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 \omega_0^2 \cos \phi_0 \\ 0 = a_0 \omega^2 \sin \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \cos \phi_0 - a_0 \omega_0^2 \sin \phi_0 \end{cases} \implies \begin{cases} f_0 = -2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi_0 \\ 0 = -2\gamma a_0 \omega \cos \phi_0 + a_0 (\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi_0 \end{cases}$$

由下式

$$\begin{aligned}
 0 &= a_0 ((\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi_0 - 2\gamma \omega \cos \phi_0) \\
 0 &= (\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi_0 - 2\gamma \omega \cos \phi_0 \\
 \tan \phi_0 &= \frac{2\gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \sin \phi_0 &= \frac{\tan \phi_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}} \\
 &= \frac{2\gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}} \\
 &= \frac{2\gamma \omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}
 \end{aligned}$$

这里疑似有个符号问题，由于并没有标明 ω, ω_0 的大小关系因此这里 $\sin \phi_0$ 处可能存在负号
接下来我们看上式

$$\begin{aligned}
 f_0 &= -2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi_0 \\
 a_0 &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi_0 - 2\gamma \omega \sin \phi_0} \\
 &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}} - 2\gamma \omega \frac{\tan \phi_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}} \\
 &= \frac{f_0 \sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\gamma \omega \tan \phi_0} \\
 &= -\frac{f_0 \sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}{\frac{2\gamma \omega}{\tan \phi_0} + 2\gamma \omega \tan \phi_0} \\
 &= -\frac{f_0}{2\gamma \omega} \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}{\frac{1}{\tan \phi_0} + \tan \phi_0} \\
 &= -\frac{f_0}{2\gamma \omega} \cos \phi_0 \sqrt{\sec^2 \phi_0} \sin \phi_0
 \end{aligned}$$

由于这里 a_0 的实际意义是振幅，因此我们只需要考虑绝对值的情况，因此

$$\begin{aligned} a_0 &= \left| -\frac{f_0}{2\gamma\omega} \cos \phi_0 \sqrt{\sec^2 \phi_0} \sin \phi_0 \right| \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\omega} \sin \phi_0 \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\omega} \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} a_0 &= \frac{d}{d\omega} \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\ &= -\frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cdot \frac{1}{2} \left((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4(\omega^3 - \omega_0^2\omega + 2\gamma^2\omega) \\ &= \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)}{\left((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

注意到，上式取极值的情况当且仅当分子 $2\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2) = 0$
因此， $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$ 时取到极值

(c)

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt} x(t) \\ &= \frac{d}{dt} a_0 \cos(\omega t + \phi_0) \\ &= -a_0\omega \sin(\omega t + \phi_0) \end{aligned}$$

2

(a)

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx + mf_0 \cos(\omega t) \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -m\omega_0^2 x + mf_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -m\omega_0^2 x + mf_0 \cos(\omega t) \\ -a_0\omega^2 \cos(\omega t + \phi) &= -a_0\omega_0^2 \cos(\omega t + \phi) + f_0 \cos(\omega t) \\ f_0 \cos(\omega t) &= a_0 \cos(\omega t + \phi) (\omega_0^2 - \omega^2) \\ f_0 \cos(\omega t) &= a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi \cos(\omega t) - a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi \sin(\omega t) \end{aligned}$$

比较系数可得
$$\begin{cases} f_0 = a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi \\ 0 = a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \phi = 0 \end{cases}$$

于是, $x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$

(c)

注意到上一问求出来的实际上是特解, 因此我们只需要讨论齐次解从而推导出通解
对于齐次解, 其为 $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

因此通解是 $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt} x(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \right) \\ &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{\omega f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

考虑到 $x(0) = 0, v(t) = 0$

$$\begin{cases} 0 = A + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ 0 = B\omega_0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ B = 0 \end{cases}$$

综上, 解为 $x(t) = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$

(d)

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega_0 t) \cos(\Delta\omega t) - \sin(\omega_0 t) \sin(\Delta\omega t)) \\ &\xrightarrow{\Delta\omega t \rightarrow 0} -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega_0 t) \cdot 1 - \sin(\omega_0 t) \cdot 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

課題

1

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \cdot v dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T m f_0 \cos(\omega t) \cdot v dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T m f_0 \cos(\omega t) \cdot (-a_0 \omega \sin(\omega t + \phi_0)) dt \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{T} \left[\frac{1}{2} t \sin \phi_0 - \frac{1}{4\omega} \cos(2\omega t + \phi_0) \right]_0^T \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{T} \left(\frac{T}{2} \sin \phi_0 + \frac{1}{4\omega} \cos \phi_0 - \frac{1}{4\omega} \cos(2\omega T + \phi_0) \right) \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{2} \sin \phi_0 - \frac{a_0 f_0 m}{4T} \cos \phi_0 + \frac{a_0 f_0 m}{4T} \cos(2\omega T + \phi_0) \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{2} \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} - \frac{a_0 f_0 m}{4T} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\
&\quad + \frac{a_0 f_0 m}{4T} \left(\cos(2\omega T) \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} - \sin(2\omega T) \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \right) \\
&= \frac{a_0 f_0 m (\omega^2 - \omega_0^2)}{4T \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} (\cos(2\omega T) - 1) - \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \left(\frac{a_0 f_0 m \omega}{2} + \sin(2\omega T) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P' &= -\frac{1}{T} \int_0^T 2m\gamma v \cdot v dt \\
&= -\frac{2m\gamma}{T} \int_0^T v^2 dt \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \phi_0) dt \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{T} \left[\frac{1}{4\omega} \sin(2(\omega t + \phi_0)) - \frac{1}{2\omega} (\omega t + \phi_0) \right]_0^T \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{4\omega T} (\sin(2(\omega T + \phi_0)) - 2(\omega T + \phi_0) - \sin(2\phi_0) + 2\phi_0) \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{4\omega T} (2 \sin(\omega T + \phi_0) \cos(\omega T + \phi_0) - 2\omega T - \sin(2\phi_0)) \\
&= -\frac{a_0^2 m \omega^2 \gamma}{\omega T} (\sin(\omega T) \cos(\omega T) (\cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0) + \sin \phi_0 \cos \phi_0 (\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T) - 1))
\end{aligned}$$

为了方便, 我们先计算一些小细节

$$\begin{aligned}
\cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0 &= \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} - \frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\
&= 1 - \frac{8\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \phi_0 \cos \phi_0 &= \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\ &= \frac{2\gamma\omega (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\end{aligned}$$

于是，最后结果是

$$P' = -\frac{a_0^2 m \omega \gamma}{T} \left(\left(1 - \frac{8\gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right) \sin(2\omega T) - \frac{4\gamma\omega (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \sin^2(\omega T) \right)$$

这不是最简但是我懒得化简了，显然这两项里 a_0 都还可以代入，代入再进行化简应该没这么繁琐. 原则上 $P = P'$

2

本题只需要计算 $\frac{d}{d\omega} P$ 证明在 $\omega = \omega_0$ 时取到极值即可，而这是参考问题 1.(b) 的结论

20241009

1

这题和上次的相同，不重复写

2

这实际上是一个方向全部朝下大小为 g 的向量场，我们只需要分别通过三条路径进行线积分

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \\
 X_1(t) &= \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \right) \\
 X_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2at \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X_{31}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}}t \\ -2at \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X_{32}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}}t \\ 0 \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X'_1(t) &= \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \right) \\
 X'_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X'_{31}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -2a \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X'_{32}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1)
 \end{aligned}$$

通过上面的计算，我们有

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-ag \cos t) dt \\
 &= 2ag \\
 W_2 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} dt \\
 &= 2ag \\
 W_3 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -2a \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
 &= 2ag + 0 \\
 &= 2ag
 \end{aligned}$$

3

首先由于我们需要证明存在 $U(x, y, z)$ 使得

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}$$

因此我们不妨假设在 A, B 间 $U = -\int_A^B F \cdot ds$
而这相对于 $U_x(B) - U_x(A) = -F_x \cdot \Delta x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U_x(B) - U_x(A)}{\Delta x} \\ &= -F_x \end{aligned}$$

其余两个方向也可以类似地证明

4

首先我们尝试通过计算这个向量场是否是某个标量场的负梯度来证明

$$\begin{aligned} U_x &= -\int F_x \cdot dx \\ &= -\int (-axy) dx \\ &= ay \int x dx \\ &= \frac{1}{2} ax^2 y \\ \\ U_y &= -\int F_y \cdot dy \\ &= -\int \left(-\frac{1}{2} ax^2 - y^2 \right) \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} ax^2 y + \frac{1}{3} y^3 \end{aligned}$$

由于对这里计算的 U_y 进行关于 x 的求导的话，实际上第二项是不存在的，符合 U_x 的计算（这里其实省略掉了 $+C$ ）

因此存在 $U(x, y) = \frac{1}{2} ax^2 y + \frac{1}{3} y^3$ 是力 F 的势能函数

另一方面，由于保守力的旋度为零，因此我们可以尝试计算其旋度来判断是否是 0

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -axy \\ -\frac{1}{2} ax^2 - y^2 \end{pmatrix} \\ &= -ax - (-ax) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此这是保守力，接下来其势能函数的计算同上

課題

1

这就是上一问用的结论，即保守场旋度为零，同时题目描述也说明了其第三个性质，保守力积分不随路径变化而变化

同样的，我们有两个方法来解决这个证明，首先

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_A^Q F \cdot dr + \int_Q^B F \cdot dr \\ &= F_y \cdot k + F_x \cdot h \\ W_2 &= \int_A^P F \cdot dr + \int_P^B F \cdot dr \\ &= F_x \cdot h + F_y \cdot k \end{aligned}$$

由于 $W_1 = W_2$ 对 W_1, W_2 分别求 $\Delta h, \Delta k \rightarrow 0$ 的极限就得到了需要证明的式子

另一方面，我们也可以通过向量分析的小结论来证明，换言之我们仅需要证明梯度的旋度为零

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla U) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

最后这一步是 Hesse 矩阵的小结论，由于二阶混合偏导是连续的因此相等

2

$$\begin{aligned} U_x &= - \int F_x dx \\ &= - \int 3x^2 y dx \\ &= -x^3 y + C(y) \\ U_y &= - \int F_y dy \\ &= - \int x^3 dy \\ &= -x^3 y + C(x) \end{aligned}$$

因此这是保守力，势能函数为 $x^3 y$

20241014**1**

上次第三题，不重复写

2

上次第四题，不重复写

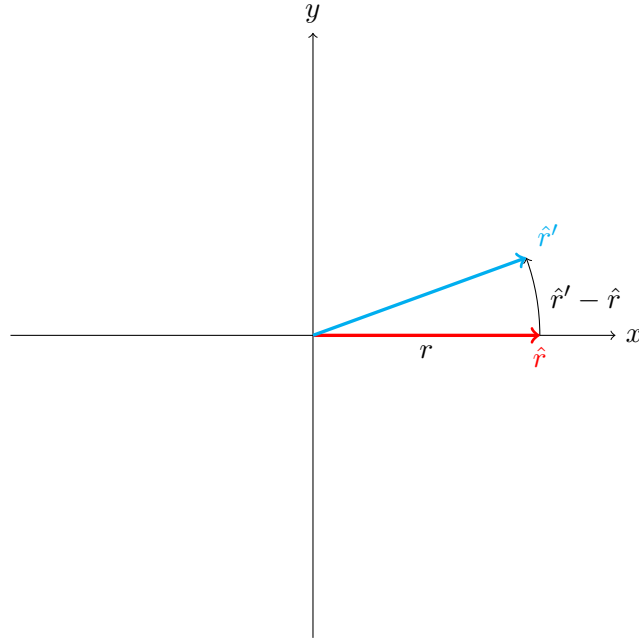
3

$$\begin{aligned}
 F &= -\nabla U \\
 &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{x\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{y\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{z\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |F| &= \sqrt{\left(-\frac{x\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{y\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{z\mu}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2} \\
 &= \frac{\mu}{r^3} \cdot r \\
 &= \frac{\mu}{r^2}
 \end{aligned}$$

于是其大小是 $\frac{\mu}{r^2}$ ，而方向则是坐标点指向原点

4



由于极坐标下的坐标表示为 $\vec{r} = r\hat{r}$ ，将其关于 t 进行求导我们可以得到

$$\begin{aligned} v &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{d\phi}\dot{\phi} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \end{aligned}$$

显然，前一项是径向速度及其方向，后一项是切向速度及其方向

5

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d}{dt}(r \cos \phi) \\ &= \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi \\ v_y &= \frac{d}{dt}(r \sin \phi) \\ &= \dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi \end{aligned}$$

6

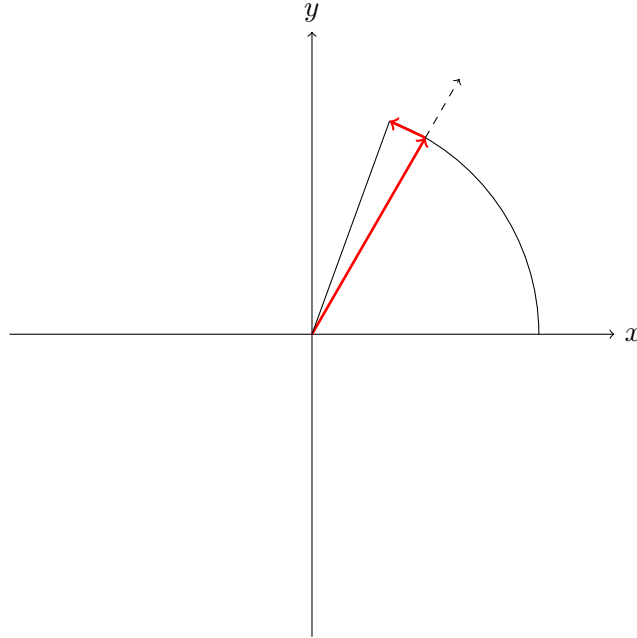
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \\ &= \frac{1}{2}m\left((\dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi)^2 + (\dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 \cos^2 \phi - 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + \dot{r}^2 \sin^2 \phi + 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + r^2\dot{\phi}^2 \cos^2 \phi\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + r^2\dot{\phi}^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) \end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \\
&= \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - \left(\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi + r (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \right) \\
&= \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \\
&= \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \\
&= \ddot{r} \sin \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) \\
&= \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi
\end{aligned}$$

8



我们只需要进行力的分解就可以简单证明
 实际上是懒得画 tikz

9

$$\begin{aligned}
a_r &= a_x \cos \phi + a_y \sin \phi \\
&= \left(\ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \right) \cos \phi \\
&\quad + \left(\ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi \right) \sin \phi \\
&= \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \\
a_\phi &= -a_x \sin \phi + a_y \cos \phi \\
&= - \left(\ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \right) \sin \phi \\
&\quad + \left(\ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi \right) \cos \phi \\
&= 2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}
\end{aligned}$$

課題

1

显然，径向单位向量对时间微分等价于径向单位向量旋转的速度，而这就是 $\dot{\phi}e_\phi$ ，另一方面，切向单位向量可以视作径向向量逆时针旋转 90° ，这就带来了负号，其大小则是正常对 ϕ 进行关于 t 的微分

2

这里实际上也有两种做法，一种是如上参考问题的进行笛卡尔系下的计算，另一种则是基于参考问题第四题的进一步求导

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{d}{dt} \left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \right) \\
 &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\frac{d\hat{\phi}}{dt} \\
 &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} - r\dot{\phi}^2\hat{r} \\
 &= \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \right) \hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} \right) \hat{\phi}
 \end{aligned}$$

20241016**1**

上次原题不重复写

2

上次原题不重复写

3

上次原题不重复写

4

上次原题不重复写

5

上次原题不重复写

6

$$\begin{aligned}
 m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) &= 0 \\
 m(2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi}) &= 0 \\
 2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} &= 0 \\
 r^2\dot{\phi} &= C
 \end{aligned}$$

7

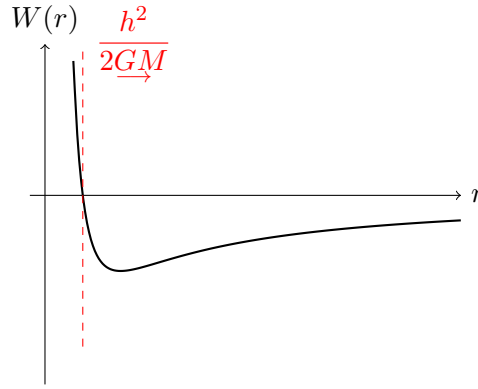
$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot r\dot{\phi} \\
 &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}
 \end{aligned}$$

8

$$\begin{aligned}
 E &= K + U \\
 &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \\
 &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{GMm}{r}
 \end{aligned}$$

9

根据上一问，我们有 $W(r) = \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$



至于 $E < 0$ 的情况, $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} < 0$ 由于径向动能项包含微分且恒大于 0, 因此我们不妨舍去. 于是式子变成了 $\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} < \frac{GMm}{r}$. 而这实际上是 $r > \frac{h^2}{2GM}$

10

$W'(r) = -\frac{mh^2}{r^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{h^2}{GM}$ 而此时的 r 是最低能状态, 因此不存在轨道半径震荡, 这就是单纯的圆轨道

課題

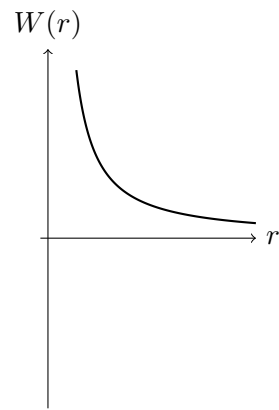
1

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \phi \\
 v_x &= \frac{d}{dt}(r \cos \phi) \\
 &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\
 \frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \\
 &= \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \\
 &= \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \\
 y &= r \sin \phi \\
 v_y &= \frac{d}{dt}(r \sin \phi) \\
 &= \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\
 \frac{dv_y}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \\
 &= \ddot{r} \sin \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) \\
 &= \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi
 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
 E &= K + U \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + \frac{mk}{r}
 \end{aligned}$$

因此有效势能为 $\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + \frac{mk}{r}$



由于中心力为斥力因此并不存在一个稳定存在的点，而在 r_{min} 处，径向速度为 0 因此我们可以得到 $E = \frac{mh^2}{2r_{min}^2} + \frac{mk}{r_{min}}$

20241021

1

首先先列出角动量 $L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \end{pmatrix} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$

其关于时间的变化量是

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt}(m(x\dot{y} - y\dot{x})) \\ &= m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) \\ &= F_y x - F_x y \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \cdot \sin \theta \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ &= xv_y - yv_x \end{aligned}$$

3

根据上次的第七题可以得到，面积速度是 $\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$ ，将其乘上 $2m$ 之后变为 $mr^2\dot{\phi}$ 而由于 $v = r\dot{\phi}$ ，因此这就是 rmv （即角动量的大小）

4

我们不妨考虑一个柱坐标系 (r, θ, z) ，为了方便讨论设 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} mv_r \\ mv_\theta \\ mv_z \end{pmatrix}$

那么角动量表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_r \\ mv_\theta \\ mv_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ r & 0 & z \\ mv_r & mv_\theta & mv_z \end{vmatrix} \\ &= (mv_r z) \hat{\theta} + (rmv_\theta) \hat{z} - (rmv_z) \hat{\theta} - (mv_\theta z) \hat{r} \\ &= (-mv_\theta z) \hat{r} - (mv_r z - rmv_z) \hat{\theta} + (rmv_\theta) \hat{z} \end{aligned}$$

由于角动量的方向确定且方向是 \hat{z} ，因此 $\begin{cases} -mv_\theta z = 0 \\ -(mv_r z - rmv_z) = 0 \\ rmv_\theta = A \end{cases}$

这里 A 是一个固定的常数 (fixed number) 从第三个式子可以知道 v_θ 并非为 0，因此代回一式可以得到 $z = 0$ ，而这代回二式就可以得到 $v_z = 0$ 。于是 \mathbf{r}, \mathbf{p} 的 z 坐标都是 0，换言之都在平面 $z = 0$ 内部

至于为什么角动量的方向是 \hat{z} ，其实只是参考系选取的而已，我们只需要选取一个让角动量方向是 \hat{z} 的参考系就可以了

5

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{L} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\
&= \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \\
&= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{r} \times \left(F \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

因此角动量不随时间变化，换言之其守恒

6

左侧： $mgl \sin \phi$ ，方向逆时针

右侧： $mgl \sin \phi$ ，方向顺时针

課題

1

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \begin{pmatrix} 0 \\ r_p \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rmv \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

显然 $L = 0$ 当且仅当 r_p 为 0

而守恒条件为其不受外力或所受外力指向和位置矢量的指向相同

2

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} r_p \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix} \\
\mathbf{L} &= \begin{pmatrix} r_p \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mgt \end{pmatrix} \\
&= -mgr_p t \\
\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= -mgr_p
\end{aligned}$$

由于角动量对时间微分等价于力矩，而通过计算可以得到力矩的力就是 mg

20241023

1

上次原题不重复写

2

上次原题不重复写

3

$$r^2 \dot{\phi} = h \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{h}{r^2} = hu^2$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) \\ &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} \\ &= -\frac{\dot{\phi}}{u^2} \frac{du}{d\phi} \\ &= -h \frac{du}{d\phi} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(-h \frac{du}{d\phi} \right) \\ &= -h \frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{d\phi} \right) \cdot \frac{d\phi}{dt} \\ &= -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -G \frac{M}{r^2} \\ -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} - \frac{1}{u} h^2 u^4 &= -GM u^2 \\ \frac{d^2u}{d\phi^2} + u &= \frac{GM}{h^2} \end{aligned}$$

4

由于 $\frac{GM}{h^2}$ 并不包含 ϕ ，因此实际上 $\frac{d^2u}{d\phi^2} = 0$ ，因此 $\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 + u = 0 + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2}$

接着假设其齐次解是 $u = A \cos \phi + B \sin \phi$ （由于其特征方程是 $u^2 + 1 = 0$ ）

因此其通解是 $u = A \cos \phi + B \sin \phi + \frac{GM}{h^2}$

而为了方便计算我们不妨将其通解记作 $u = A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{GM}{h^2}$ ，这实际上是等价的

課題

1

上次原题不重复写

2

$$\begin{aligned}m \frac{v^2}{r} &= G \frac{Mm}{r^2} \\v^2 &= \frac{GM}{r} \\v &= \frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{r}}\end{aligned}$$

速度和半径的平方根成反比

$$\begin{aligned}m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r &= G \frac{Mm}{r^2} \\ \frac{4\pi^2}{T^2} &= \frac{GM}{r^3} \\ \frac{r^3}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2}\end{aligned}$$

显然右边是定值

20241031

1

我们从两个角度证明，首先是通过比耐公式计算得到

由上次所求得通解可以知道 $u = A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{GM}{h^2}$

接着为了方便，我们将基准作为长轴，换言之 $\phi_0 = 0$

因此原式为 $u = A \cos \phi + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2} \left(\frac{Ah^2}{GM} \cos \phi + 1 \right)$

接着我们记 $\epsilon = \frac{Ah^2}{GM}, l = \frac{h^2}{GM}$

于是这就得到了 $u = \frac{1}{l} (1 + \epsilon \cos \phi) \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{l} (1 + \epsilon \cos \phi) \Leftrightarrow r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \phi}$

接着我们可以得到近日点和远日点分别是 $\phi = 0, \pi$

换言之 $r_{\min} = \frac{l}{1 + \epsilon}, r_{\max} = \frac{l}{1 - \epsilon}$

而半长轴 $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{l}{1 - \epsilon^2}$

而半短轴 $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{l}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$

至于另一种方法，我们建立一个以太阳为左侧焦点的极坐标系 (r, ϕ) ，接着对于任意一点 $P(r, \phi)$ ，我们有 $PF_1 = r, PF_2 = 2a - r, F_2(2c, 0) = (2\epsilon a, 0)$ ，在三角形 PF_1F_2 中我们由余弦定理可以得到 $PF_2 = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \phi}$ 。根据椭圆定义（任意一点到两焦点距离之和为 $2a$ ），有

$r + \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \phi} = 2a$ 。而将其化简后得到 $r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \phi}$ ，仅需令 $l = a(1 - \epsilon^2)$ 便可

得到最后结果（由于我们这里将基准极轴选取为了指向另外一个焦点的方向因此分母处出现了负号）

2

在上一问的结果里，我们得到了 $r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \phi}$ 。

显然 $\epsilon = 1$ 意味着抛物线，而这代入回极坐标方程就是 $r = \frac{l}{1 + \cos \phi}$

3

由于双曲线的情况下 $\epsilon > 1$ ，我们重新考虑某点到两焦点距离关系

$\left| r - \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \phi} \right| = 2a$ ，化简后得到了 $r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 - \epsilon \cos \phi}$ （事实上还有另外一个解，但

是其无实际物理意义）

令 $l = a(\epsilon^2 - 1)$ 即可得到最终结果

另一方面 $r_{\min} = r_{\phi=0} = \frac{l}{1 - \epsilon}$ ，渐近线 $\cos \phi = \frac{1}{\epsilon}$

半实轴可以通过两焦点距离关系得出 $a = \frac{l}{\epsilon^2 - 1}$

半虚轴结合渐近线可以得到为 $b = \frac{l}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$

4

$$\begin{aligned}
r &= \frac{l}{1 + \epsilon \cos \phi} \\
\frac{1}{r} &= \frac{1 + \epsilon \cos \phi}{l} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\epsilon \dot{\phi} \sin \phi}{l} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\epsilon \sin \phi}{l} \cdot \frac{h}{r^2} \\
\dot{r} &= \frac{h}{l} \epsilon \sin \phi \\
\ddot{r} &= \frac{h}{l} \epsilon \dot{\phi} \cos \phi \\
&= \frac{h^2}{r^2 l} \epsilon \cos \phi \\
&= \frac{h^2}{r^2 l} \left(\frac{l}{r} - 1 \right) \\
&= \frac{h^2}{r^3} - \frac{h^2}{l r^2}
\end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}
r &= \frac{l}{1 + \cos \phi} \\
\frac{\dot{r}}{r^2} &= \frac{\dot{\phi} \sin \phi}{l} \\
\dot{r} &= \frac{h \sin \phi}{l} \\
\ddot{r} &= \frac{h^2 \cos \phi}{l} \cdot \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

显然，径向移动方程是 $m\ddot{r} = F$ ，而等号左边和 r 的平方成反比

6

由于此时在近日点径向速度为 0，因此

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} m \left(\frac{h}{r} \right)^2 - \frac{GMm}{r} \\
&= \left(\frac{mh^2}{2} - GMmr \right) \frac{1}{r^2} \\
&= \left(\frac{mh^2}{2} - GMm \frac{h^2}{GM(1+\epsilon)} \right) \frac{G^2 M^2 (1+\epsilon)^2}{h^4} \\
&= m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\epsilon} \right) \frac{G^2 M^2 (1+\epsilon)^2}{h^2} \\
&= - \frac{G^2 M^2 m (1-\epsilon^2)}{2h^2}
\end{aligned}$$

課題

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi ab}{h} \\ &= \frac{2\pi}{h} \cdot \frac{l}{1-\epsilon^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \\ &= \frac{2\pi l^2}{h(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 l^4}{h^2(1-\epsilon^2)^3} \\ &= \frac{4\pi^2 l}{h^2} \cdot \frac{l^3}{(1-\epsilon^2)^3} \\ &= \frac{4\pi^2 l}{h^2} \cdot a^3 \end{aligned}$$

20241104

1

(a)

$$\begin{aligned}
dV &= \det \left(\nabla \begin{pmatrix} r \sin \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{vmatrix} \\
0- &= r^2 \sin \phi
\end{aligned}$$

由于在坐标变换时我们需要用的是绝对值，因此这里实际上是 $r^2 \sin \phi$.
 另一方面，实际上我们这里使用的是数学定义，即 ϕ 来作为天顶角而非经度角

(b)

考虑在 dV 的范围内，其质量 $dM = \rho dV = \rho R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$

$$\begin{aligned}
dU &= -G \frac{mdM}{s} \\
&= -\frac{1}{s} Gm\rho R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta} \\
s^2 &= r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta \\
2s ds &= -2Rr \sin \theta d\theta \\
ds &= \frac{1}{s} Rr \sin \theta d\theta
\end{aligned}$$

(d)

$D := \{(R, \theta, \phi) : R \in [0, R_0], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]\}$
 $E := \{(R, s, \phi) : R \in [0, R_0], s \in [r - R, r + R], \phi \in [0, 2\pi]\}$

$$\begin{aligned}
U &= \iiint_D dU \\
&= \iiint_D \left(-\frac{1}{s} Gm\rho R^2 \sin \theta \right) dR d\theta d\phi \\
&= -\frac{Gm\rho}{r} \iiint_E R dR ds d\phi \\
&= -\frac{Gm\rho}{r} \cdot 4\pi \int_0^{R_0} R^2 dR \\
&= -\frac{Gm}{r} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho R_0^3 \\
&= -\frac{GMm}{r}
\end{aligned}$$

2

由上一问可以知道，对于一个这样均匀的球壳来说，其内部所受到的势能仅与距离球心距离有关，因此一整个球壳内部的万有引力所产生的势能实际上只需要考虑不同半径的势能总和（由于其球对称性），而这实际上总和是 0. 另一方面，引力实际上是势能的负梯度，因此引力在任意半径上的总和同样是 0

3

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{Gm}{x^2} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi \rho x^3 \right)$$

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi}{3} G \rho x$$

显然，这是简谐振动

課題

1

$$D := \{(\phi, \theta) : \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$$

$$\begin{aligned} dM &= \rho R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi \\ &= \rho_a R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ M &= \int_D \rho_a R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{2\pi \rho_a R}{r} \int_{r-R}^{r+R} s ds \\ &= \frac{2\pi \rho_a R}{r} \cdot 2Rr \\ &= 4\pi \rho_a R^2 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} dU &= -G \frac{m dM}{s} \\ &= -\frac{Gm \rho_a R^2 \sin \theta d\theta d\phi}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \int_D dU \\ &= 2\pi \int_0^\pi \left(-\frac{Gm \rho_a R^2 \sin \theta}{s} \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_{r-R}^{r+R} \left(-\frac{Gm \rho_a R}{r} \right) ds \\ &= -\frac{4\pi Gm \rho_a R^2}{r} \\ &= -G \frac{Mm}{r} \end{aligned}$$

因此其收到一个有源向心力，在全方向上总受力为 0

20241106

課題

1

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{r} \\
&= \frac{\epsilon \cos \phi - 1}{l} \\
\dot{u} &= -\frac{\epsilon \sin \phi}{l} \dot{\phi} \\
\frac{du}{d\phi} \cdot \dot{\phi} &= -\frac{\epsilon \sin \phi}{l} \dot{\phi} \\
\frac{du}{d\phi} &= -\frac{\epsilon \sin \phi}{l} \\
\frac{d^2 u}{d\phi^2} &= -\frac{\epsilon \cos \phi}{l}
\end{aligned}$$

因此我们令 $l = \frac{h^2}{k}$ 和 $\frac{d^2 u}{d\phi^2} = -\frac{\epsilon \cos \phi}{l}$ ，并代入原微分方程，就有

$$\begin{aligned}
-\frac{\epsilon \cos \phi}{l} + u &= -\frac{1}{l} \\
u &= \frac{\epsilon \cos \phi - 1}{l} \\
\frac{1}{r} &= \frac{\epsilon \cos \phi - 1}{l} \\
r &= \frac{l}{\epsilon \cos \phi - 1}
\end{aligned}$$

2

首先注意到， $r_{min} = \frac{l}{\epsilon - 1}$

其次在 r_{min} 处径向速度为零，因此

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} m \frac{h^2}{r^2} + \frac{mk}{r} \\
&= \frac{mh^2(\epsilon - 1)^2}{2l^2} + \frac{mk(\epsilon - 1)}{l} \\
&= \frac{m(\epsilon - 1)}{l} \left(\frac{h^2(\epsilon - 1)}{2l} + k \right) \\
&= \frac{mk^2(\epsilon - 1)}{h^2} \left(\frac{\epsilon - 1}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{mk^2(\epsilon - 1)}{h^2} \cdot \frac{\epsilon + 1}{2} \\
&= \frac{mk^2}{2h^2} (\epsilon^2 - 1) \\
\epsilon^2 - 1 &= \frac{2Eh^2}{mk^2} \\
\epsilon^2 &= 1 + \frac{2h^2 E}{mk^2}
\end{aligned}$$

3

1

$$\begin{aligned}mr^2\dot{\phi} &= pmv_0 \\ r^2\dot{\phi} &= pv_0 \\ h &= pv_0\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}\epsilon^2 &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2} \\ \frac{1}{\cos^2\Phi} &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2} \\ 1 + \tan^2\Phi &= 1 + \frac{2h^2E}{mk^2} \\ \tan\Phi &= \sqrt{\frac{2h^2E}{mk^2}}\end{aligned}$$

5

事实上前两个等号只是单纯的三角恒等式的变换，不涉及具体证明，因此我们只需要证明最后一个等号 $\tan\Phi = \frac{v_0^2 p}{k}$

首先将 $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ 和 $h = pv_0$ 代入进 $\tan\Phi = \sqrt{\frac{2h^2E}{mk^2}}$ ，有 $\tan\Phi = \sqrt{\frac{2p^2v_0^2 \cdot \frac{1}{2}mv_0^2}{mk^2}} = \sqrt{\frac{p^2v_0^4}{k^2}}$

而这实际上就是 $\tan\Phi = \frac{pv_0^2}{k}$

¹<https://eman-physics.net/elementary/rutherford.html>

20241111

1

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= f(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) &= f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
\frac{d^2}{dt^2} \left((m_1 + m_2) \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) &= 0 \\
(m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) &= 0 \\
m_G \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} &= 0 \\
m_G \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} &= 0
\end{aligned}$$

这题似乎存在一点小歧义，如果将这个中心力理解为某个第三方的力分别作用到两个质点上的话合外力不是 0，而是 $f(\vec{r}_1) + f(\vec{r}_2)$ ，这样一来使得两物体的重心并非按照匀速运动，而是按照合外力进行匀加速运动。然而我们如果仅仅考虑两质点间的万有引力或是相互吸引的其他什么力（而非是原题中直接说的中心力）的话，我们确实可以按照上面所给出的方式来导出两质点的重心确实是受合外力 0 进行匀速运动

2

$$\begin{aligned}
\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
&= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) \\
&= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{f(r)}{m_2} \frac{\vec{r}}{r} + \frac{f(r)}{m_1} \frac{\vec{r}}{r} \right) \\
&= f(r) \frac{\vec{r}}{r}
\end{aligned}$$

这一问采取考虑添加单位方向 $\frac{\vec{r}}{r}$ 的原因一方面是因为这一问计算过程并未明确给出力的指向，另一方面是懒得改上一问，实际上上一问也需要添加方向项

3

$$\begin{aligned}
\mu \frac{4\pi^2}{T^2} r &= \frac{G m_1 m_2}{r^2} \\
T^2 &= \frac{4\pi^2 r^3}{G(m_1 + m_2)} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(m_1 + m_2)}}
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} f &= \frac{Gm_1m_2}{r^2} \\ &= Gm_1m_2 \cdot \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2 r_2^2} \\ &= \frac{Gm_1^3m_2}{(m_1+m_2)^2 r_2^2} \end{aligned}$$

課題

1

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - l) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - l) \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \\ &= -\frac{k}{m_2}(x-l) - \frac{k}{m_1}(x-l) \\ &= -k(x-l)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \\ &= -\frac{k}{\mu}(x-l) \end{aligned}$$

显然特解是 $x = l$ ，而齐次解方面，特征方程 $\alpha^2 + \frac{k}{\mu} = 0$ 的解是 $\alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{\mu}}$

那么其次解就是 $x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right)$

因此，通解为 $x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right) + l$ 而重心初始位置是 $\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ ，因此两质点的位置分别是

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}x \\ &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t\right) + l \right) \\ &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (C \cos(\omega t + \phi) + l) \\ x_Q &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}x \\ &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (C \cos(\omega t + \phi) + l) \end{aligned}$$

这里 $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\phi = \arctan\left(-\frac{C_2}{C_1}\right)$

3

$$\begin{aligned}
LHS &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1 \left(\frac{d}{dt} \left(x_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2}x \right) \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{d}{dt} \left(x_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2}x \right) \right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1 \left(\dot{x}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{x} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\dot{x}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{x} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{x}^2 \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 \\
&= RHS
\end{aligned}$$

20241113

1

(a)

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} &= \frac{d}{dt} p_1 \\
 &= F_1 + \sum_{k=1}^{N-1} F_{k1}
 \end{aligned}$$

(b)

$$F_{kj} = -F_{jk}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} P &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^N p_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{d}{dt} p_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^N \left(F_j + \sum_{k \neq j} F_{kj} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^N F_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} F_{kj} \\
 &= \sum_{j=1}^N F_j
 \end{aligned}$$

最后一个等号这里实际上是一点小小的数学技巧. 第二问我们得到了交换顺序后的受力和交换前的受力相抵消, 而对于每个质点, 我们在计算其本身作为受力指向的时候得到了 $N - 1$ 个指向该质点的力, 而在计算剩下的 $N - 1$ 个质点的时候, 每一个指向这 $N - 1$ 个质点的力都与刚才所得到的力所抵消, 换言之后面的二重求和实际上全部抵消变为 0

(d)

$$\begin{aligned}
 r_G &= \sum_{j=1}^N \frac{m_j r_j}{M} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^N m_j r_j}{\sum_{j=1}^N m_j}
 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
P &= m_G \dot{r}_G \\
&= \sum_{j=1}^N m_j \dot{r}_j \\
&= \sum_{j=1}^N m_j v_j \\
&= \sum_{j=1}^N m_j \cdot \frac{\sum_{j=1}^N m_j v_j}{\sum_{j=1}^N m_j} \\
&= M v_G
\end{aligned}$$

(f)

由 c 可知，总动量对时间微分等价于总外力，而由 e 可以知道，总动量等价于总质量与重心速度的乘积，换言之体系的整体运动相对于令所有质量的总和位于重心，所有速度的加权平均作用在重心上。综上，系统整体的运动可以看作总受力作用在质量为总质量的重心所引起的重心运动

(g)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N m_j \frac{dr'_G}{dt} &= \sum_{j=1}^N m_j (v_j - v_G) \\
&= P - \sum_{j=1}^N m_j v_G \\
&= P - M v_G \\
&= 0
\end{aligned}$$

(h)

首先显然根据分解我们可以知道，总能量实际上是相当于重心动能和各质点相对重心的运动的动能的总和（也就是 f 证明的结果），而根据 g 我们可以知道，各质点相对重心的动量实际上是 0，而显然质量项没有 0 出现，换言之相对质心运动的动能项为 0

課題

1

$$\begin{aligned}
mv &= (m + dm)(v + dv) + (-dm)[v + dv - u] \\
mv &= mv + mdv + vdm + dmdv - vdm - dmdv + udm \\
0 &= mdv + udm \\
0 &= \frac{dv}{u} + \frac{dm}{m}
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
-\frac{dv}{u} &= \frac{dm}{m} \\
-\frac{1}{u} \int dv &= \int \frac{1}{m} dm \\
-\frac{v}{u} &= \log m + C
\end{aligned}$$

代入初值我们有 $C = -\log m_0$

$$\begin{aligned}
-\frac{v}{u} &= \log m - \log m_0 \\
v &= u (\log m_0 - \log m) \\
&= u \log \left(\frac{m_0}{m} \right)
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
(m_0 - \alpha t) \frac{dv}{dt} &= \frac{u}{dt} dm - (m_0 - \alpha t) g \\
(m_0 - \alpha t) \frac{dv}{dt} &= u\alpha - (m_0 - \alpha t) g \\
(m_0 - \alpha t) \left(\frac{dv}{dt} + g \right) &= u\alpha \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{u\alpha}{m_0 - \alpha t} - g \\
\int dv &= \int \left(\frac{u\alpha}{m_0 - \alpha t} - g \right) dt \\
v &= -u \log (m_0 - \alpha t) - gt + C
\end{aligned}$$

代入初值可以得到, $C = u \log m_0$

$$\begin{aligned}
v &= -u \log (m_0 - \alpha t) - gt + u \log m_0 \\
&= u \log \left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \right) - gt
\end{aligned}$$

20241118

1

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho v &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho v \\ r_0^3 v_0 &= r^3 v \\ v &= \frac{r_0^3}{r^3} v_0\end{aligned}$$

2

由于板子和人构成的系统并未收到外力，因此整体质心并未发生移动
接着我们不妨假设板子移动距离为 d ，同时将一开始人站的位置作为原点

$$\begin{aligned}r_G &= \frac{M \cdot \frac{l}{2} + m \cdot 0}{M + m} \\ &= \frac{Ml}{2(M + m)} \\ &= r'_G \\ &= \frac{M \cdot (d + \frac{l}{2}) + m \cdot (d + l)}{M + m}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{Ml}{2(M + m)} &= \frac{M(d + \frac{l}{2}) + m(d + l)}{M + m} \\ Ml &= 2Md + Ml + 2md + 2ml \\ 0 &= Md + md + ml \\ d &= -\frac{ml}{M + m}\end{aligned}$$

3

线密度是 ρ ，因此在提起长度为 x 时，被提起部分的重力为 ρxg

由于动量对时间微分是力，因此为了保持整体速度为 v ，我们需要考虑增加一项“增加动量”的力，大小是 $\dot{p} = \rho \dot{x} \cdot v = \rho v^2$ 。因此总受力就是 $\rho(gx + v^2)$

而如果是在非匀速的情况下，我们需要考虑进惯性力，即 ρxa ，于是总力就是 $\rho(gx + v^2 + xa)$

4

首先我们考虑铅直方向上的运动，在 t 到 $t + dt$ 期间

$$\begin{aligned}(m + dm) \cdot (v + dv) - mv \\ &= (\rho x + \rho v dt) \cdot (v + a dt) - \rho x v \\ &= (\rho xg - T) dt\end{aligned}$$

至于水平方向，我们同样有

$$\begin{aligned}(m - dm) \cdot (v + dv) - mv \\ &= (\rho(l - x) - \rho v dt) \cdot (v + a dt) - \rho(l - x)v \\ &= T dt\end{aligned}$$

由于这两个张力 T 是相等的，因此我们分别表示出来，对于上式的垂直方向

$$\begin{aligned}
 (\rho x + \rho v dt) \cdot (v + a dt) - \rho x v &= (\rho x g - T) dt \\
 \rho x v + \rho v^2 dt + \rho x a dt + \rho v a dt dt - \rho x v &= (\rho x g - T) dt \\
 \rho v^2 dt + \rho x a dt + \rho v a dt dt &= (\rho x g - T) dt \\
 \rho dt (v^2 + x a) &= (\rho x g - T) dt \\
 T &= \rho (x g - v^2 - x a)
 \end{aligned}$$

在水平方向

$$\begin{aligned}
 (\rho (l - x) - \rho v dt) \cdot (v + a dt) - \rho (l - x) v &= T dt \\
 \rho (l - x) v - \rho v^2 dt + \rho (l - x) a dt - \rho v a dt dt - \rho (l - x) v &= T dt \\
 \rho dt ((l - x) a - v^2) &= T dt \\
 T &= \rho ((l - x) a - v^2)
 \end{aligned}$$

联立上面两个式子我们可以得到

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{xg}{l} \\
 \ddot{x} &= \frac{xg}{l}
 \end{aligned}$$

考虑特征方程我们有通解 $x = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$

由于 $x(0) = x_0$ ，我们得到 $C_1 + C_2 = x_0$

由于 $v(0) = 0$ ，我们有 $C_1 \sqrt{\frac{g}{l}} - C_2 \sqrt{\frac{g}{l}} = 0$

由上面的式子我们可以知道， $C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$

综上我们得到

$$x(t) = \frac{x_0}{2} \exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + \frac{x_0}{2} \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

課題

我们假设线密度为 ρ ，于是分别考虑棒两端（为了方便，令右边垂下的长度为 x ）

$$\begin{aligned}
 m_R &= \rho x \\
 m_R \ddot{x} &= \rho x g - T \\
 \rho x \ddot{x} &= \rho x g - T \\
 m_L &= \rho (l - x) \\
 -m_L \ddot{x} &= \rho (l - x) g - T \\
 -\rho (l - x) \ddot{x} &= \rho (l - x) g - T
 \end{aligned}$$

将左右两边合并后

$$\begin{aligned}
 x \ddot{x} + (l - x) \ddot{x} &= x g - (l - x) g \\
 l \ddot{x} &= (2x - l) g \\
 \ddot{x} &= \frac{g}{l} (2x - l) \\
 \ddot{x} - \frac{2g}{l} x + g &= 0
 \end{aligned}$$

显然特解是 $x = \frac{l}{2}$ ，而齐次解是 $x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right)$

这题似乎缺少条件，因为对于这一步而言缺少了一个初始值无法完整求解，因此我们假设初始速度为 0

代入初值可得 $C_1 = x_0 - \frac{l}{2}, C_2 = 0$

因此， $x = \frac{l}{2} + \left(x_0 - \frac{l}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right)$

20241120

1

$$\begin{aligned}
m_j \ddot{x}_j &= F_j \\
r_j \times m_j \ddot{x}_j &= r_j \times F_j \\
\frac{d}{dt} L_j &= N_j \\
\sum_{j=1}^n \frac{dL_j}{dt} &= \sum_{j=1}^n N_j \\
\frac{dL}{dt} &= N
\end{aligned}$$

2

根据上次问题可以知道整体角动量为各角动量总和，即 $L = \sum_{j=1}^N (\mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j)$

对于位置向量 \mathbf{r}_j ，我们注意到其等价于 $\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j$

另一方面，动量项 $\mathbf{p}_j = m_j v_j = m_j \dot{r}_j = m_j \cdot \left(\frac{d}{dt} r_G + \frac{d}{dt} r'_j \right)$

于是总角动量等价于 $\sum_{j=1}^N m_j (r_G + r'_j) \times \left(\frac{dr_G}{dt} + \frac{dr'_j}{dt} \right)$

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{j=1}^N m_j (r_G + r'_j) \times \left(\frac{dr_G}{dt} + \frac{dr'_j}{dt} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N m_j \left((r_G + r'_j) \times \frac{dr_G}{dt} + (r_G + r'_j) \times \frac{dr'_j}{dt} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N m_j (r_G \times \dot{r}_G + r'_j \times \dot{r}_G + r_G \times \dot{r}'_j + r'_j \times \dot{r}'_j) \\
&= r_G \times P + \sum_{j=1}^N m_j r'_j \times \dot{r}'_j \\
&= r_G \times P + \sum_{j=1}^N r'_j \times p'_j
\end{aligned}$$

3

本题公式完全复制上一问的，略过

4

我们同样利用 $r_j = r_G + r'_j$ 来处理

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{j=1}^N r_j \times F_j \\
 &= \sum_{j=1}^N (r_G + r'_j) \times F_j \\
 &= \sum_{j=1}^N r_G \times F_j + \sum_{j=1}^N r'_j \times F_j \\
 &= N_G + N'
 \end{aligned}$$

5

显然

課題

1

$$\begin{aligned}
 L &= L_P + L_Q \\
 &= 2l \times m\omega 2l \\
 &= 4m\omega l^2
 \end{aligned}$$

2

$$r_G = \frac{m \cdot 0 + m \cdot 2l}{m + m} = l$$

$$\begin{aligned}
 L_G &= l \cdot 2m\omega l \\
 &= 2m\omega l^2
 \end{aligned}$$

3

我们考虑相对位置, P, Q 分别距离重心 $-l, l$, 线速度分别是 $-\omega l, \omega l$
 于是我们可以知道 $L' = 2m\omega l^2$
 综上, $L = L_G + L' = 4m\omega l^2$

20241127

1

$$\begin{aligned}
 r &= r_0 + r' \\
 \ddot{r} &= \ddot{r}_0 + \ddot{r}' \\
 a_S &= a_0 + a_{S'} \\
 F_S &= m(a_0 + a_{S'}) \\
 F_S + F &= ma_{S'} \\
 F &= -ma_0
 \end{aligned}$$

2

考虑两个惯性系 S, S' ，关系为 $r' = r - vt, t' = t$

考虑速度关系，我们有 $u' = \dot{r}' = \dot{r} - v = u - v$

而加速度方面， $a' = \dot{u}' = \dot{u} = a$

由于在伽利略变换下（都为惯性系）受力相等，而其加速度也相等，因此我们可以知道运动方程没有区别

3

考虑运动方程为 $mg - N = ma$ ，因此地面对物体支持力是 $N = m(g - a)$

另一方面，根据牛三，物体对地面所造成的力为大小相同方向相反的 $m(a - g)$

4

由于水平方向上并未收到外力因此我们可以立刻知道 $x'(t) = u_0 t$

至于竖直方向，我们有加速度 $-(g + a)$ ，因此 $y'(t) = h_0 - \frac{1}{2}(g + a)t^2$

5

我们首先考虑一个单纯弹簧的例子，显然弹簧是个简谐振动，我们可以得到其运动为

$$x' = \frac{ma}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

接着我们需要考虑其在基础弹簧运动的基础上额外运动的部分，即 $\frac{m(g - a)}{k}$

综上，运动为 $x(t) = \frac{m(g - a)}{k} + \frac{ma}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

6

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{g} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{\alpha}{g}\right)$$

課題

1

显然我们可以得到 $x = a \cos(\omega t + \phi)$ ，因此其加速度是 $-a\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

显然其离开表面的要求是 $|-a\omega^2| > g$

因此留在表面的要求是 $a\omega^2 \leq g$

2

$$T_0 = \frac{2v_0}{g}$$
$$T = \frac{2v_0}{g - a}$$
$$T = \frac{g}{g - a} T_0$$

20241202

1

(a)

$$v_G = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}$$

(b)

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 - v_G \\ &= -\frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \\ V_2 &= v_0 - v_G \\ &= \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} m_1 V_1 + m_2 V_2 &= m_1 V'_1 + m_2 V'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 V'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 V'^2_2 \end{aligned}$$

对于下面的式子，我们有 $m_1 (V_1 + V'_1) (V_1 - V'_1) = m_2 (V'_2 + V_2) (V'_2 - V_2)$
 而上面的式子可以得到 $m_1 (V_1 - V'_1) = m_2 (V'_2 - V_2)$ ，代入之后可以得到 $V_1 + V'_1 = V_2 + V'_2$
 由上一问可以知道 $m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0$ ，于是 $V_2 = -\frac{m_1}{m_2} V_1$ ，解得 $V'_2 = V_1 + V'_1 + \frac{m_1}{m_2} V_1$
 将这两个代入动量守恒可以得到 $V_1 = V'_1$ 接着得到 $V_2 = V'_2$

(d)

$$\begin{aligned} v_x &= V_2 \cos \phi + V_G \\ &= \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \cos \phi + \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \\ v_y &= V_2 \sin \phi \\ &= \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \sin \phi \\ \tan \Phi &= \frac{v_y}{v_x} \\ &= \frac{\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \sin \phi}{\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \cos \phi + \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}} \\ &= \frac{m_1 \sin \phi}{m_1 \cos \phi + m_2} \\ &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi + \frac{m_2}{m_1}} \end{aligned}$$

2

考虑入射和出射的 x 方向分解, $u_i = (u_0 \cos \alpha, u_0 \sin \alpha), u_f = (-u_0 \cos \alpha, u_0 \sin \alpha)$
 接着加入行星系的速度, $u'_i = (-V + u_0 \cos \alpha, u_0 \sin \alpha), u'_f = (-V - u_0 \cos \alpha, u_0 \sin \alpha)$

另一方面, 有 $\alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$

$$\begin{aligned}\Delta K &= \frac{1}{2}m(u_f'^2 - u_i'^2) \\ &= \frac{1}{2}m \left((V + u_0 \cos \alpha)^2 + u_0^2 \sin^2 \alpha - (V - u_0 \cos \alpha)^2 - u_0^2 \sin^2 \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2}m \cdot 4Vu_0 \cos \alpha \\ &= 2mu_0V \cos \alpha \\ &= \sqrt{2}mu_0V \sqrt{1 - \cos \theta}\end{aligned}$$

課題

逐步进行计算

首先重心速度为 $v_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

于是重心系下 $\begin{cases} V_1 = v_1 - v_G = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \\ V_2 = v_2 - v_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1) \end{cases}$

接着碰撞后仅发生了方向变化, 于是我们有 $\begin{cases} V_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \\ V_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1) \end{cases}$

然后再将重心系转为正常实验室惯性系 $\begin{cases} v_1' = V_1' + v_G = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' = V_2' + v_G = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$

20241204

1

事实上这题只需要画出来图进行向量分解就能证明，但是这里不采用这种方法

事实上，在二维平面我们仅需要考虑基底向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的变化，换言之，我们需要做的仅仅是计算出其表现矩阵

对于第一个基，旋转 ϕ_0 后显然为 $\begin{pmatrix} \cos \phi_0 \\ \sin \phi_0 \end{pmatrix}$

而第二个旋转后利用诱导公式实际上就是 $\begin{pmatrix} -\sin \phi_0 \\ \cos \phi_0 \end{pmatrix}$

于是我们自然得到了表现矩阵 $\begin{pmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{pmatrix}$ ，这便是旋转矩阵

这里也存在一个小歧义，事实上如果我们理解成将坐标系进行旋转而非旋转坐标系内元素的话确实是其所给出来的 $\begin{pmatrix} \cos \phi_0 & \sin \phi_0 \\ -\sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{pmatrix}$ ，因为这实际上相对于坐标系内点的顺时针旋转

2

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}' \cos \omega t - \omega x' \sin \omega t - \dot{y}' \sin \omega t - \omega y' \cos \omega t \\ &= (\dot{x}' - \omega y') \cos \omega t - (\dot{y}' + \omega x') \sin \omega t \\ \ddot{x} &= (\ddot{x}' - \omega \dot{y}') \cos \omega t - (\omega \dot{x}' - \omega^2 y') \sin \omega t - (\ddot{y}' + \omega \dot{x}') \sin \omega t - (\omega \dot{y}' + \omega^2 x') \cos \omega t \\ &= (\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' + \omega^2 x') \cos \omega t - (\ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y') \sin \omega t\end{aligned}$$

省略掉 \ddot{y} 部分的计算

3

根据第二问我们可以得到

$$\begin{aligned}F_x &= m(\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega^2 x') \cos \omega t - m(\ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y') \sin \omega t \\ F_y &= m(\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega^2 x') \sin \omega t + m(\ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y') \cos \omega t\end{aligned}$$

接着

$$\begin{aligned}F_{x'} &= F_x \cos \omega t + F_y \sin \omega t \\ &= m(\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega^2 x') \cos^2 \omega t - m(\ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y') \sin \omega t \cos \omega t \\ &\quad + m(\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega^2 x') \sin^2 \omega t + m(\ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' - \omega^2 y') \sin \omega t \cos \omega t \\ &= m(\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' - \omega^2 x')\end{aligned}$$

因此 $m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega \dot{y}' + m\omega^2 x'$

$F_{y'}$ 同理可得

4

5

6

課題

20241209

1

2

3

4

5

課題

20241211

1

2

3

4

5

6

課題

20241216

1

2

3

課題

1

2

参考文献