

20240918

1

a

$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \\ \vec{F}_{12} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \end{cases}$$

b

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

c

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= \text{一定} \\ \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) &= 0 \\ m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= 0 \\ \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

d

显然我们有重心速度

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

由上述问题注意到分子为定值，因此其只能为静止或匀速直线运动其一

2

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \int \vec{F} dt &= \Delta m \vec{v} \end{aligned}$$

显然等号左边是力积而右边是动量的变化量

3

$$\begin{cases} v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 1} = 4.43 m/s \\ J = m \cdot v = 2 \cdot 4.43 = 8.86 kg \cdot m/s \\ F = \frac{J}{t} = \frac{8.86}{1} = 8.86 N \end{cases}$$

4

(a)

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - gt \\ y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(b)

$$-mg + bv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

注意到在终端速度时，其加速度可近似看作 0

因此运动方程可看作 $-mg + bv_\infty^2 = 0$ ，于是易得 $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{b}}$

(c)

注意到空气阻力和重力同向，因此有

$$-mg - bv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

課題

$$\begin{aligned} -mg - bv &= m \frac{dv}{dt} \\ dt &= -\frac{m}{mg + bv} dv \\ \int dt &= -\int \frac{m}{mg + bv} dv \\ \int dt &= -\int \frac{1}{g + \frac{b}{m}v} dv \end{aligned}$$

在这里令 $\frac{b}{m}v = u$

$$\begin{aligned} \int dt &= -\frac{m}{b} \int \frac{1}{g + u} du \\ t + C &= -\frac{m}{b} \log(g + u) \\ t + C &= -\frac{m}{b} \log\left(g + \frac{b}{m}v\right) \end{aligned}$$

我们代入初值 $v(0) = v_0$

$$0 + C = -\frac{m}{b} \log\left(g + \frac{b}{m}v_0\right)$$

将 $C = -\frac{m}{b} \log \left(g + \frac{b}{m} v_0 \right)$ 代入到原方程我们可以得到

$$\begin{aligned}
 t - \frac{m}{b} \log \left(g + \frac{b}{m} v_0 \right) &= -\frac{m}{b} \log \left(g + \frac{b}{m} v \right) \\
 \frac{bt}{m} - \log \left(g + \frac{b}{m} v_0 \right) &= -\log \left(g + \frac{b}{m} v \right) \\
 \exp \left(\frac{bt}{m} \right) &= \frac{g + \frac{b}{m} v_0}{g + \frac{b}{m} v} \\
 \exp \left(\frac{bt}{m} \right) g + \exp \left(\frac{bt}{m} \right) \frac{b}{m} v &= g + \frac{b}{m} v_0 \\
 \frac{b}{m} \exp \left(\frac{bt}{m} \right) v &= \left(1 - \exp \left(\frac{bt}{m} \right) \right) g + \frac{b}{m} v_0 \\
 \exp \left(\frac{bt}{m} \right) v &= \frac{m}{b} \left(1 - \exp \left(\frac{bt}{m} \right) \right) g + v_0 \\
 v &= \frac{m}{b} \left(\frac{1}{\exp \left(\frac{bt}{m} \right)} - 1 \right) g + \frac{1}{\exp \left(\frac{bt}{m} \right)} v_0
 \end{aligned}$$

而我们注意到

$$\begin{aligned}
 v_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{b} \left(\frac{1}{\exp \left(\frac{bt}{m} \right)} - 1 \right) g + \frac{1}{\exp \left(\frac{bt}{m} \right)} v_0 \right) \\
 &= -\frac{mg}{b}
 \end{aligned}$$

20240923

1

(a)

首先我们考虑垂直抗力为 $N = mg \cos \theta$ ，因此摩擦力为 $\mu' mg \cos \theta$

接着是沿斜坡向下（即 x 轴正方向）的受力为 $mg \sin \theta$

因此我们可以得到运动方程为 $mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta = m \frac{d^2 x}{dt^2}$

(b)

由于题目并未涉及到斜坡长度问题，因此我们可以简单认为加速度为负即可

根据运动方程我们可以得到， $g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) < 0$

这等价于 $\mu' > \tan \theta$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= g \sin \theta - \mu' g \cos \theta \\ dt &= \frac{1}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} dv \\ \int dt &= \int \frac{1}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} dv \\ t + C &= \frac{v}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta}\end{aligned}$$

考虑初值 $v(0) = v_0$ ，有

$$C = \frac{v_0}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta}$$

再代回原方程，得到

$$\begin{aligned}t + \frac{v_0}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} &= \frac{v}{g \sin \theta - \mu' g \cos \theta} \\ v &= v_0 + gt(\sin \theta - \mu' \cos \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \int v dt \\ &= \int v_0 + gt(\sin \theta - \mu' \cos \theta) dt \\ &= v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) t^2 + C\end{aligned}$$

由于 $x(0) = 0$ ，因此 $C = 0$

于是， $x = v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) t^2$

2

$$\begin{aligned} -kx &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ -ke^{\lambda t} &= m\lambda^2 e^{\lambda t} \\ \lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\ \lambda &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

于是 $x = \exp\left(\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$, 因此角振动数 ω 就是中间的 $\sqrt{\frac{k}{m}}$

其实是找 $i\omega t$ 的 ω

因此

$$\begin{cases} x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$$

代入 $x(t) = x_0, v(0) = 0$

$$\begin{cases} x_0 = A \\ 0 = B\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

综上

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v(t) &= -x_0\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{aligned}$$

3

(a)

$$\begin{aligned} v_x &= -r\omega \sin \omega t \\ v_y &= r\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

显然我们可以注意到, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = r^2\omega^2$, 因此 $v = r\omega$

(b)

$$\begin{aligned} a_x &= -r\omega^2 \cos \omega t \\ a_y &= -r\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

注意到, 加速度方向与位置方向差别仅为负号, 因此如果考虑从原点出发到位置的方向的话, 加速度方向就是位置方向出发到原点. 而大小则显然是 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$

(c)

$$f_x = -mr\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$f_y = -mr\omega^2 \sin(\omega t)$$

同样的，受力的方向与位置坐标的方向差别仅为负号，因此其受力指向原点

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = m\omega^2 r$$

(d)

$$\begin{cases} v = r\omega \\ a = \omega^2 r \end{cases} \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

課題

1

注意到在微小角度位移的情况下，复原力为 $-mg \sin \theta$

另一方面，其切向加速度可以看作弧长 $l\theta$ 对时间的二阶微分，这即 $l \frac{d^2\theta}{dt^2}$

因此运动方程为 $ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -g \sin(e^{\lambda t})$$

显然这样是无法直接进行求解的，因此我们考虑小角度下的近似： $\sin \theta = \theta$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$$

$$l\lambda^2 e^{\lambda t} = -ge^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 = -\frac{g}{l}$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

于是我们得到了 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

因此周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

2

由于张力 S 的竖直方向分力等于重力，因此 $S \cos \theta = mg$ ，即 $S = \frac{mg}{\cos \theta}$

另一方面这是圆锥摆，因此其向心力 f 为张力 S 的水平分力，因此 $f = S \sin \theta = mg \tan \theta$

$$mg = m\omega^2 l \cos \theta$$

$$mg = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 l \cos \theta$$

$$\frac{g}{l \cos \theta} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l \cos \theta}{g}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$$

20240925

1

(a)

在水平方向上，由于没有受力因此可以简单认为

$$x(t) = v_{x0}t$$

在铅直方向上由于仅受到重力作用因此

$$\begin{aligned} y(t) &= v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= v_{y0} \cdot \frac{x(t)}{v_{x0}} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x(t)}{v_{x0}} \right)^2 \\ &= -\frac{g}{2v_{x0}^2}x^2(t) + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x(t) \end{aligned}$$

显然，这是一条抛物线

(b)

y 达到最大的时候，其向上的速度是 0. 因此我们有 $t = \frac{v_{y0}}{g}$
此时

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{x0}v_{y0}}{g} \\ y &= \frac{v_{y0}^2}{2g} \end{aligned}$$

(c)

我们用 v_0 来重新表示其水平方向上和铅直方向上的运动

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \theta_0 \\ y &= v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

影响水平飞行距离的是飞行时间，而时间与竖直方向速度减到 0 的时间有关

$$t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

于是水平方向能达到的最远距离为

$$\begin{aligned} x_{max} &= 2v_0 \cdot \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \cdot \cos \theta_0 \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \end{aligned}$$

因此我们可以知道，若 x_{max} 取最大，则 $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

課題

在水平方向上

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv_x}{dt} &= -\beta m v_x \\
 \frac{dv_x}{dt} &= -\beta v_x \\
 -\frac{1}{\beta v_x} dv_x &= dt \\
 -\frac{1}{\beta} \int \frac{1}{v_x} dv_x &= \int dt \\
 -\frac{1}{\beta} \log v_x &= t + C
 \end{aligned}$$

考虑到初始时刻 $v_x = v_{x0}$

$$C = -\frac{1}{\beta} \log v_{x0}$$

代回原方程

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\beta} \log v_x &= t - \frac{1}{\beta} \log v_{x0} \\
 \log \left(\frac{v_x}{v_{x0}} \right) &= -\beta t \\
 \frac{v_x}{v_{x0}} &= e^{-\beta t} \\
 v_x &= v_{x0} e^{-\beta t}
 \end{aligned}$$

因此当经过足够长时间后，水平方向上速度趋近于 0
接着我们考虑铅直方向

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv_y}{dt} &= -mg - \beta m v_y \\
 \frac{dv_y}{dt} &= -g - \beta v_y \\
 -\frac{1}{g + \beta v_y} dv_y &= dt \\
 -\int \frac{1}{g + \beta v_y} dv_y &= \int dt \\
 -\log (g + \beta v_y) &= t + C
 \end{aligned}$$

初始时刻 $v_y = v_{y0}$ 代入原方程得到

$$C = -\log (g + \beta v_{y0})$$

因此

$$\begin{aligned}
 -\log (g + \beta v_y) &= t - \log (g + \beta v_{y0}) \\
 \log \left(\frac{g + \beta v_{y0}}{g + \beta v_y} \right) &= t \\
 \frac{g + \beta v_{y0}}{g + \beta v_y} &= e^t \\
 g + \beta v_{y0} &= g e^t + \beta e^t v_y \\
 v_y &= \frac{g}{\beta} \left(\frac{1}{e^t} - 1 \right) + \frac{1}{e^t} v_{y0}
 \end{aligned}$$

因此，经过足够长时间后，铅直方向上的速度趋近于 $-\frac{g}{\beta}$
至于其 x, y 坐标，我们只需要对这两个求得的速度进行关于 t 的积分

$$\begin{aligned}x &= \int v_{x0} e^{-\beta t} dt \\&= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + C \\&= -\frac{1}{\beta} v_{x0} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} v_{x0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \int \left(\frac{g}{\beta} \left(\frac{1}{e^t} - 1 \right) + \frac{1}{e^t} v_{y0} \right) dt \\&= \frac{g}{\beta} (-e^{-t} - t) - v_{y0} e^{-t} + C \\&= \frac{g}{\beta} (-e^{-t} - t) - v_{y0} e^{-t} + \frac{g}{\beta} + v_{y0}\end{aligned}$$

20240930

1

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F \\
m \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} &= F \cdot \frac{dx}{dt} \\
m \frac{dv}{dt} \cdot v &= F \cdot v \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= \frac{d}{dt} W \\
\frac{1}{2} m v^2 &= W
\end{aligned}$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力所做的功

2

$$\begin{aligned}
W_1 &= -f \cdot p \\
W_2 &= -f \cdot q - f \cdot (q - p) \\
&= -f \cdot (2q - p) \\
W_2 - W_1 &= 2f(p - q) \neq 0
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} dx + m \frac{d^2 y}{dt^2} dy &= F dx + F dy \\
m \frac{dv_x}{dt} dx + m \frac{dv_y}{dt} dy &= F dx + F dy \\
m (v_x dv_x + v_y dv_y) &= F dx + F dy \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 \right) &= F dx + F dy \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 \right) &= \frac{d}{dt} W \\
\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) &= W
\end{aligned}$$

显然左侧是动能变化量右侧是外力做的功

4

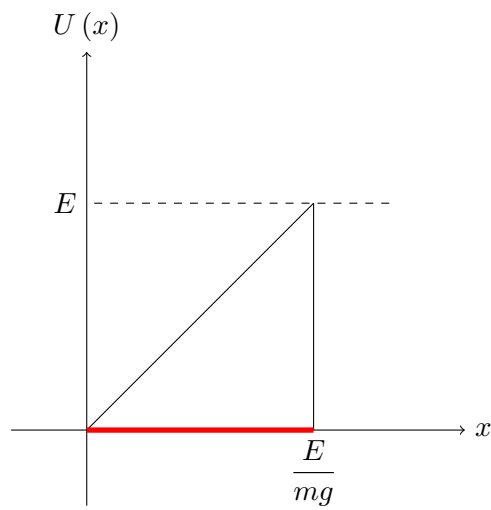
$$\begin{aligned}
\Delta E_k &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\
E_{k2} - E_{k1} &= \int_{x_1}^{x_2} -\frac{dU}{dx} dx \\
E_{k2} - E_{k1} &= U(x_1) - U(x_2)
\end{aligned}$$

5

(a)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -mg \\
 U(x) &= -\int f(x) dx \\
 &= mgx + C = mgx \\
 \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + mgx &= \text{const}
 \end{aligned}$$

(b)



于是我们可以得到，运动范围是红线所覆盖的 $0 \leq x \leq \frac{E}{mg}$

6

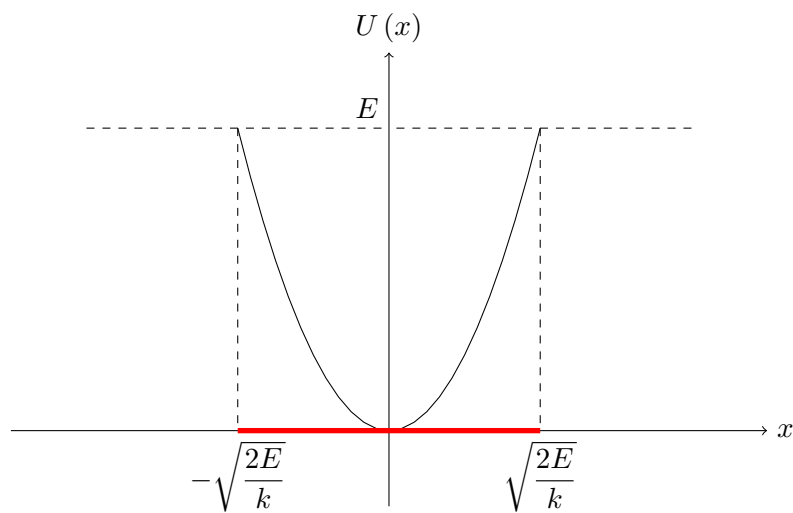
(a)

$$\begin{aligned}
 U(x) &= -\int f(x) dx \\
 &= -\int -kx dx \\
 &= \frac{1}{2}kx^2 + C \\
 &= \frac{1}{2}kx^2
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx \\
m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} &= -kx \frac{dx}{dt} \\
m \frac{dv}{dt} v &= -kxv \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) \\
\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 &= 0
\end{aligned}$$

(c)



由图可知，运动范围是 $-\sqrt{\frac{2E}{k}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2E}{k}}$

(d)

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \\
\frac{1}{2} mv^2 &= E - \frac{1}{2} kx^2 \\
v^2 &= \frac{1}{m} (2E - kx^2) \\
v &= \pm \sqrt{\frac{1}{m} (2E - kx^2)}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{d}{dt}x \\
 &= \frac{d}{dt}(a \cos(\omega t)) \\
 &= -a\omega \sin(\omega t) \\
 &= -a\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}tx\right)
 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
 K(t) &= \frac{1}{2}mv^2 \\
 &= \frac{1}{2}m \cdot (a\omega \sin \omega t)^2 \\
 &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\omega t)
 \end{aligned}$$

由于 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 我们可以得到 $k = m\omega^2$

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \frac{1}{2}kx^2 \\
 &= \frac{1}{2}k(a \cos(\omega t))^2 \\
 &= \frac{1}{2}m\omega^2a^2 \cos^2(\omega t)
 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
 K(t) + U(t) &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) \\
 &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2
 \end{aligned}$$

課題

1

$$\begin{aligned}
 \langle K \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} K(t) dt \\
 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi}ma^2\omega^3 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t)) dt
 \end{aligned}$$

对于这个积分，我们按照如下方式来积

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt &= \int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos s \right) \cdot \frac{1}{2\omega} ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos s \right) ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{2}s - \frac{1}{2} \sin s \right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\langle K \rangle &= \frac{1}{4\pi} ma^2 \omega^3 \cdot \frac{\pi}{\omega} \\ &= \frac{1}{4} ma^2 \omega^2\end{aligned}$$

类似的， $\langle U \rangle$ 由于与 $\langle K \rangle$ 只有相位差，因此只需要后面的相位进行积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t) dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} (\cos(2\omega t) + 1) dt \\ &= \int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos s \right) \cdot \frac{1}{2\omega} ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos s \right) ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \sin s \right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{\pi}{\omega}\end{aligned}$$

因此 $\langle K \rangle = \langle U \rangle$

2a

由于受力为其势能的负梯度，因此可以注意到， x_a 处梯度为负，受力方向是正； x_d 处梯度是正，受力方向是负； x_c, x_e 两处梯度为零，因此合力为 0

2b

$$\begin{cases} x_a \leq x & E = E_2 \\ x_b \leq x \leq x_d, x_f \leq x & E = E_1 \\ x_c = x & E = E_0 \end{cases} \begin{cases} v_a = 0 \\ v_b = v_d = v_f = 0 \\ v_c = 0 \end{cases} \begin{cases} E = E_2 \\ E = E_1 \\ E = E_0 \end{cases}$$
 因此， $x = x_c$ 的情况可能是简谐振子速度为 0 的振幅处（若 $E = E_0$ ）或处于合力为 0 的情况（若 $E = E_1$ 或 $E = E_2$ ）

2c

由 (b) 的推导可以知道，动能最大的点在 x_c

20241002

1

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\Gamma \frac{dx}{dt} - kx \\
m \frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \\
mp^2 e^{pt} + \Gamma p e^{pt} + k e^{pt} &= 0 \\
(mp^2 + \Gamma p + k) e^{pt} &= 0 \\
mp^2 + \Gamma p + k &= 0 \\
mp^2 + 2m\gamma p + m\omega_0^2 &= 0 \\
p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 &= 0 \\
p &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}$$

2

由上一问我们可以得到

$$x(t) = A e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + B e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

由初期条件 $x(0) = 0$, 我们得到 $A + B = 0$. 接着

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{d}{dt} x(t) \\
&= -A \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) - B \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) \\
&= (B - A) \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}$$

初期条件 $v(0) = v_0$ 可得 $B - A = \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

因此, $A = -\frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, B = \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$

综上, 我们有

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \\
&= \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left(e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right)
\end{aligned}$$

3

(a)

这里我们只需要将其代入运动方程验证即可

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \\
m\gamma(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + \Gamma(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + kte^{-\gamma t} &= 0 \\
m\gamma(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + 2m\gamma(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + m\gamma^2 te^{-\gamma t} &= 0 \\
(-2 + \gamma t)e^{-\gamma t} + 2(1 - \gamma t)e^{-\gamma t} + \gamma te^{-\gamma t} &= 0
\end{aligned}$$

显然, 将 $e^{-\gamma t}$ 提出来之后系数项总和为 0, 因此等号两边相等

(b)

我们不妨设其解为 $x(t) = Ate^{-\gamma t}$, 显然满足 $x(0) = 0$

接着对于 $v(0)$, 由于 $v(t) = A(1 - \gamma t)e^{-\gamma t}$, 因此我们可以注意到, $A = v_0$

综上, $x(t) = v_0 te^{-\gamma t}$

4

(a)

由于 $\omega_0 > \gamma$, 因此 1 里的解为 $p = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

因此我们假设通解是 $x(t) = e^{-\gamma t} \left(A \cos \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) + B \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) \right)$

考虑 $x(0) = 0$, 我们有 $A = 0$, 于是我们可以将通解写成 $x(t) = Be^{-\gamma t} \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right)$

然后考虑 $v(t) = e^{-\gamma t} \left(B\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - B\gamma \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) \right)$ 和 $v(0) = v_0$

$$\begin{aligned} B\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - B\gamma \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) &= v_0 \\ B \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - \gamma \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) \right) &= v_0 \\ \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) - \gamma \sin \left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right)} &= B \\ \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} &= B \end{aligned}$$

因此, $x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right)$

(b)

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\Gamma v - kx \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\Gamma \frac{dx}{dt} - kx \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} &= -\Gamma \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} - kx \frac{dx}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= -2m\gamma v \cdot v - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) &= -2m\gamma v \cdot v \end{aligned}$$

課題

1

首先我们将三种振动的位移时间依赖性 $x(t)$ 写在一起

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left(e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right) & \omega_0 < \gamma \\ x(t) = v_0 te^{-\gamma t} & \omega_0 = \gamma \\ x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right) & \omega_0 > \gamma \end{cases}$$

显然式子过于繁琐难以判断，因此我们首先记 $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ 和 $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ 分别为 $\hat{\omega}$ 和 $\tilde{\omega}$ 于是过衰减振动变成

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}} \left(e^{-\gamma t + \hat{\omega} t} - e^{-\gamma t - \hat{\omega} t} \right) \\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-\gamma t} \left(e^{\hat{\omega} t} - e^{-\hat{\omega} t} \right) \\ &= \frac{v_0}{\hat{\omega}} e^{-\gamma t} \sinh(\hat{\omega} t) \\ &\simeq \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-\gamma t} \cdot e^{\hat{\omega} t} \\ &= \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-(\gamma - \hat{\omega})t} \end{aligned}$$

衰减振动变成

$$x(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t)$$

因此简化后的三个式子变成

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-(\gamma - \hat{\omega})t} & \omega_0 < \gamma \\ x(t) = v_0 t e^{-\gamma t} & \omega_0 = \gamma \\ x(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t) & \omega_0 > \gamma \end{cases}$$

注意到这里公因式是 $v_0 e^{-\gamma t}$

因此我们仅需证明 $\left\{ \frac{1}{\hat{\omega}} \sinh(\hat{\omega} t), t, \frac{1}{\tilde{\omega}} \sin(\tilde{\omega} t) \right\}$ 中， t 的增长速度/斜率/梯度是最快/大的

显然，这里 t 在任何情况下都比第三项含有 \sin 的式子梯度要大，因此我们只需要讨论双曲正弦的部分。

显然趋近于无穷时，次方位置为负项的那部分可以忽视掉，也就是最后的 $\frac{v_0}{2\hat{\omega}} e^{-(\gamma - \hat{\omega})t}$ 。而系数对于衰减速度几乎没有任何影响（因为控制主体增减的是指数函数），因此我们仅需要判断指数位置

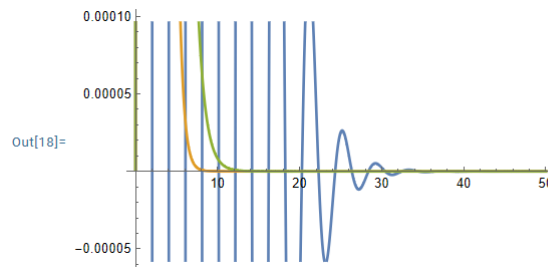
由于 $\hat{\omega} > 0$ ，因此 $-(\gamma - \hat{\omega}) > -\gamma$ 。因此临界衰减振动的衰减速度大于过衰减的衰减速度

2

我们先分别将三种情况给代入

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_0 \sqrt{0.6}} e^{-0.2\omega_0 t} \sin(\sqrt{0.6}\omega_0 t) & \gamma = 0.2\omega_0 \\ x(t) = v_0 t e^{-\omega_0 t} & \gamma = \omega_0 \\ x(t) = \frac{v_0}{2\omega_0 \sqrt{0.44}} \left(e^{(-1.2 + \sqrt{0.44})\omega_0 t} - e^{(-1.2 - \sqrt{0.44})\omega_0 t} \right) & \gamma = 1.2\omega_0 \end{cases}$$

接着代入 mathematica 之后我们可以得到



具体来说，我们可以知道，蓝色波动的那根是衰减运动，稍微靠右上的绿色线是过衰减，剩下的黄线是临界衰减

20241007

1

(a)

$$\begin{aligned}
 f_0 \cos(\omega t) &= -a_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) + 2\gamma \cdot (-a_0 \omega \sin(\omega t + \phi_0)) + a_0 \omega_0^2 \cos(\omega t + \phi_0) \\
 f_0 \cos(\omega t) &= -a_0 \omega^2 (\cos(\omega t) \cos \phi_0 - \sin(\omega t) \sin \phi_0) \\
 &\quad - 2\gamma a_0 \omega (\sin(\omega t) \cos \phi_0 + \cos(\omega t) \sin \phi_0) \\
 &\quad + a_0 \omega_0^2 (\cos(\omega t) \cos \phi_0 - \sin(\omega t) \sin \phi_0) \\
 f_0 \cos(\omega t) &= \cos(\omega t) (-a_0 \omega^2 \cos \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 \omega_0^2 \cos \phi_0) \\
 &\quad + \sin(\omega t) (a_0 \omega^2 \sin \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \cos \phi_0 - a_0 \omega_0^2 \sin \phi_0)
 \end{aligned}$$

通过比较系数可以得到

$$\begin{cases} f_0 = -a_0 \omega^2 \cos \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 \omega_0^2 \cos \phi_0 \\ 0 = a_0 \omega^2 \sin \phi_0 - 2\gamma a_0 \omega \cos \phi_0 - a_0 \omega_0^2 \sin \phi_0 \end{cases} \implies \begin{cases} f_0 = -2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi_0 \\ 0 = -2\gamma a_0 \omega \cos \phi_0 + a_0 (\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi_0 \end{cases}$$

由下式

$$\begin{aligned}
 0 &= a_0 ((\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi_0 - 2\gamma \omega \cos \phi_0) \\
 0 &= (\omega^2 - \omega_0^2) \sin \phi_0 - 2\gamma \omega \cos \phi_0 \\
 \tan \phi_0 &= \frac{2\gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \sin \phi_0 &= \frac{\tan \phi_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}} \\
 &= \frac{2\gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}} \\
 &= \frac{2\gamma \omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}
 \end{aligned}$$

这里疑似有个符号问题，由于并没有标明 ω, ω_0 的大小关系因此这里 $\sin \phi_0$ 处可能存在负号
接下来我们看上式

$$\begin{aligned}
 f_0 &= -2\gamma a_0 \omega \sin \phi_0 + a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi_0 \\
 a_0 &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi_0 - 2\gamma \omega \sin \phi_0} \\
 &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}} - 2\gamma \omega \frac{\tan \phi_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}} \\
 &= \frac{f_0 \sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\gamma \omega \tan \phi_0} \\
 &= -\frac{f_0 \sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}{\frac{2\gamma \omega}{\tan \phi_0} + 2\gamma \omega \tan \phi_0} \\
 &= -\frac{f_0}{2\gamma \omega} \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}{\frac{1}{\tan \phi_0} + \tan \phi_0} \\
 &= -\frac{f_0}{2\gamma \omega} \cos \phi_0 \sqrt{\sec^2 \phi_0} \sin \phi_0
 \end{aligned}$$

由于这里 a_0 的实际意义是振幅，因此我们只需要考虑绝对值的情况，因此

$$\begin{aligned} a_0 &= \left| -\frac{f_0}{2\gamma\omega} \cos \phi_0 \sqrt{\sec^2 \phi_0} \sin \phi_0 \right| \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\omega} \sin \phi_0 \\ &= \frac{f_0}{2\gamma\omega} \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} a_0 &= \frac{d}{d\omega} \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\ &= -\frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cdot \frac{1}{2} \left((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4(\omega^3 - \omega_0^2\omega + 2\gamma^2\omega) \\ &= \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)}{\left((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

注意到，上式取极值的情况当且仅当分子 $2\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2) = 0$ 因此， $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$ 时取到极值

(c)

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt} x(t) \\ &= \frac{d}{dt} a_0 \cos(\omega t + \phi_0) \\ &= -a_0\omega \sin(\omega t + \phi_0) \end{aligned}$$

2

(a)

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -kx + mf_0 \cos(\omega t) \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -m\omega_0^2 x + mf_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -m\omega_0^2 x + mf_0 \cos(\omega t) \\ -a_0\omega^2 \cos(\omega t + \phi) &= -a_0\omega_0^2 \cos(\omega t + \phi) + f_0 \cos(\omega t) \\ f_0 \cos(\omega t) &= a_0 \cos(\omega t + \phi) (\omega_0^2 - \omega^2) \\ f_0 \cos(\omega t) &= a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi \cos(\omega t) - a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi \sin(\omega t) \end{aligned}$$

比较系数可得 $\begin{cases} f_0 = a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi \\ 0 = a_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \phi = 0 \end{cases}$

于是, $x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$

(c)

注意到上一问求出来的实际上是特解, 因此我们只需要讨论齐次解从而推导出通解
对于齐次解, 其为 $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

因此通解是 $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt} x(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \right) \\ &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{\omega f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

考虑到 $x(0) = 0, v(t) = 0$

$$\begin{cases} 0 = A + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ 0 = B\omega_0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ B = 0 \end{cases}$$

综上, 解为 $x(t) = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$

(d)

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t) \\ &= -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega_0 t) \cos(\Delta\omega t) - \sin(\omega_0 t) \sin(\Delta\omega t)) \\ &\xrightarrow{\Delta\omega t \rightarrow 0} -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega_0 t) \cdot 1 - \sin(\omega_0 t) \cdot 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

課題

1

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \cdot v dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T m f_0 \cos(\omega t) \cdot v dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T m f_0 \cos(\omega t) \cdot (-a_0 \omega \sin(\omega t + \phi_0)) dt \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{T} \left[\frac{1}{2} t \sin \phi_0 - \frac{1}{4\omega} \cos(2\omega t + \phi_0) \right]_0^T \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{T} \left(\frac{T}{2} \sin \phi_0 + \frac{1}{4\omega} \cos \phi_0 - \frac{1}{4\omega} \cos(2\omega T + \phi_0) \right) \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{2} \sin \phi_0 - \frac{a_0 f_0 m}{4T} \cos \phi_0 + \frac{a_0 f_0 m}{4T} \cos(2\omega T + \phi_0) \\
&= -\frac{a_0 f_0 m \omega}{2} \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} - \frac{a_0 f_0 m}{4T} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\
&\quad + \frac{a_0 f_0 m}{4T} \left(\cos(2\omega T) \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} - \sin(2\omega T) \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \right) \\
&= \frac{a_0 f_0 m (\omega^2 - \omega_0^2)}{4T \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} (\cos(2\omega T) - 1) - \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \left(\frac{a_0 f_0 m \omega}{2} + \sin(2\omega T) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P' &= -\frac{1}{T} \int_0^T 2m\gamma v \cdot v dt \\
&= -\frac{2m\gamma}{T} \int_0^T v^2 dt \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \phi_0) dt \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{T} \left[\frac{1}{4\omega} \sin(2(\omega t + \phi_0)) - \frac{1}{2\omega} (\omega t + \phi_0) \right]_0^T \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{4\omega T} (\sin(2(\omega T + \phi_0)) - 2(\omega T + \phi_0) - \sin(2\phi_0) + 2\phi_0) \\
&= -\frac{2a_0^2 m \omega^2 \gamma}{4\omega T} (2 \sin(\omega T + \phi_0) \cos(\omega T + \phi_0) - 2\omega T - \sin(2\phi_0)) \\
&= -\frac{a_0^2 m \omega^2 \gamma}{\omega T} (\sin(\omega T) \cos(\omega T) (\cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0) + \sin \phi_0 \cos \phi_0 (\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T) - 1))
\end{aligned}$$

为了方便，我们先计算一些小细节

$$\begin{aligned}
\cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0 &= \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} - \frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\
&= 1 - \frac{8\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \phi_0 \cos \phi_0 &= \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \\ &= \frac{2\gamma\omega (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\end{aligned}$$

于是，最后结果是

$$P' = -\frac{a_0^2 m \omega \gamma}{T} \left(\left(1 - \frac{8\gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right) \sin(2\omega T) - \frac{4\gamma\omega (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \sin^2(\omega T) \right)$$

这不是最简但是我懒得化简了，显然这两项里 a_0 都还可以代入，代入再进行化简应该没这么繁琐. 原则上 $P = P'$

2

本题只需要计算 $\frac{d}{d\omega} P$ 证明在 $\omega = \omega_0$ 时取到极值即可，而这是参考问题 1.(b) 的结论

20241009

1

这题和上次的相同，不重复写

2

这实际上是一个方向全部朝下大小为 g 的向量场，我们只需要分别通过三条路径进行线积分

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \\
 X_1(t) &= \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \right) \\
 X_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2at \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X_{31}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}}t \\ -2at \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X_{32}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}}t \\ 0 \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X'_1(t) &= \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \right) \\
 X'_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X'_{31}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -2a \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1) \\
 X'_{32}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} (0 \leq t \leq 1)
 \end{aligned}$$

通过上面的计算，我们有

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-ag \cos t) dt \\
 &= 2ag \\
 W_2 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} dt \\
 &= 2ag \\
 W_3 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ -2a \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2a}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
 &= 2ag + 0 \\
 &= 2ag
 \end{aligned}$$

3

首先由于我们需要证明存在 $U(x, y, z)$ 使得

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}$$

因此我们不妨假设在 A, B 间 $U = -\int_A^B F \cdot ds$
而这相对于 $U_x(B) - U_x(A) = -F_x \cdot \Delta x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U_x(B) - U_x(A)}{\Delta x} \\ &= -F_x \end{aligned}$$

其余两个方向也可以类似地证明

4

首先我们尝试通过计算这个向量场是否是某个标量场的负梯度来证明

$$\begin{aligned} U_x &= -\int F_x \cdot dx \\ &= -\int (-axy) dx \\ &= ay \int x dx \\ &= \frac{1}{2} ax^2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_y &= -\int F_y \cdot dy \\ &= -\int \left(-\frac{1}{2} ax^2 - y^2 \right) \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} ax^2 y + \frac{1}{3} y^3 \end{aligned}$$

由于对这里计算的 U_y 进行关于 x 的求导的话，实际上第二项是不存在的，符合 U_x 的计算（这里其实省略掉了 $+C$ ）

因此存在 $U(x, y) = \frac{1}{2} ax^2 y + \frac{1}{3} y^3$ 是力 F 的势能函数

另一方面，由于保守力的旋度为零，因此我们可以尝试计算其旋度来判断是否是 0

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -axy \\ -\frac{1}{2} ax^2 - y^2 \end{pmatrix} \\ &= -ax - (-ax) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此这是保守力，接下来其势能函数的计算同上

課題

1

这就是上一问用的结论，即保守场旋度为零，同时题目描述也说明了其第三个性质，保守力积分不随路径变化而变化

同样的，我们有两个方法来解决这个证明，首先

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_A^Q F \cdot dr + \int_Q^B F \cdot dr \\ &= F_y \cdot k + F_x \cdot h \\ W_2 &= \int_A^P F \cdot dr + \int_P^B F \cdot dr \\ &= F_x \cdot h + F_y \cdot k \end{aligned}$$

由于 $W_1 = W_2$ 对 W_1, W_2 分别求 $\Delta h, \Delta k \rightarrow 0$ 的极限就得到了需要证明的式子

另一方面，我们也可以通过向量分析的小结论来证明，换言之我们仅需要证明梯度的旋度为零

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla U) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

最后这一步是 Hesse 矩阵的小结论，由于二阶混合偏导是连续的因此相等

2

$$\begin{aligned} U_x &= - \int F_x dx \\ &= - \int 3x^2 y dx \\ &= -x^3 y + C(y) \\ U_y &= - \int F_y dy \\ &= - \int x^3 dy \\ &= -x^3 y + C(x) \end{aligned}$$

因此这是保守力，势能函数为 $x^3 y$

20241014

1

上次第三题，不重复写

2

上次第四题，不重复写

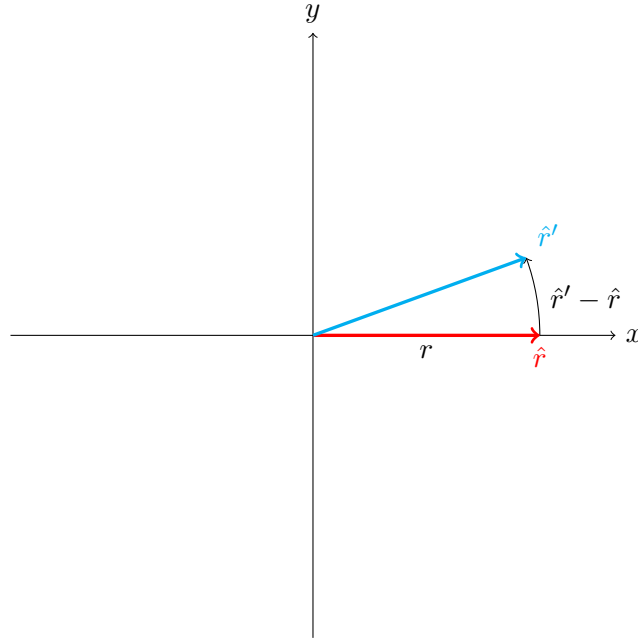
3

$$\begin{aligned}
 F &= -\nabla U \\
 &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{x\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{y\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{z\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |F| &= \sqrt{\left(-\frac{x\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{y\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(-\frac{z\mu}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2} \\
 &= \frac{\mu}{r^3} \cdot r \\
 &= \frac{\mu}{r^2}
 \end{aligned}$$

于是其大小是 $\frac{\mu}{r^2}$ ，而方向则是坐标点指向原点

4



由于极坐标下的坐标表示为 $\vec{r} = r\hat{r}$ ，将其关于 t 进行求导我们可以得到

$$\begin{aligned} v &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{d\phi}\dot{\phi} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \end{aligned}$$

显然，前一项是径向速度及其方向，后一项是切向速度及其方向

5

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d}{dt}(r \cos \phi) \\ &= \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi \\ v_y &= \frac{d}{dt}(r \sin \phi) \\ &= \dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi \end{aligned}$$

6

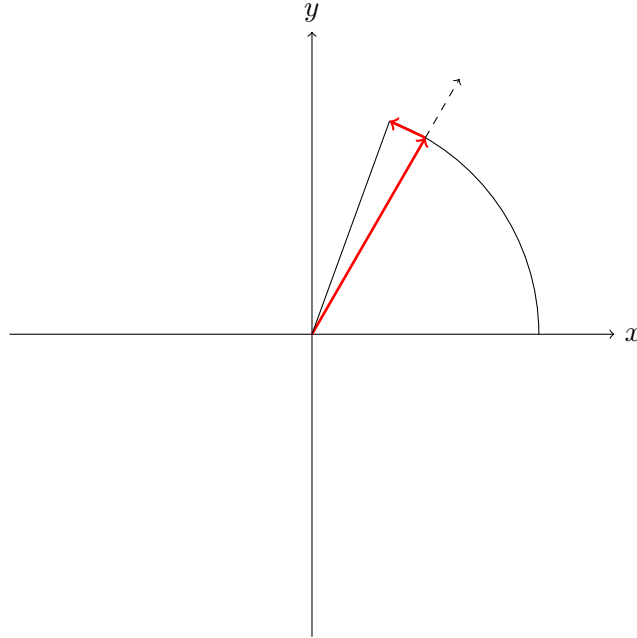
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \\ &= \frac{1}{2}m\left((\dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi)^2 + (\dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 \cos^2 \phi - 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + \dot{r}^2 \sin^2 \phi + 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + r^2\dot{\phi}^2 \cos^2 \phi\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + r^2\dot{\phi}^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) \end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \\
&= \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - \left(\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi + r (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \right) \\
&= \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \\
&= \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \\
&= \ddot{r} \sin \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) \\
&= \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi
\end{aligned}$$

8



我们只需要进行力的分解就可以简单证明
 实际上是懒得画 tikz

9

$$\begin{aligned}
a_r &= a_x \cos \phi + a_y \sin \phi \\
&= \left(\ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \right) \cos \phi \\
&\quad + \left(\ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi \right) \sin \phi \\
&= \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \\
a_\phi &= -a_x \sin \phi + a_y \cos \phi \\
&= - \left(\ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \right) \sin \phi \\
&\quad + \left(\ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi \right) \cos \phi \\
&= 2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}
\end{aligned}$$

課題

1

显然，径向单位向量对时间微分等价于径向单位向量旋转的速度，而这就是 $\dot{\phi}e_\phi$ ，另一方面，切向单位向量可以视作径向向量逆时针旋转 90° ，这就带来了负号，其大小则是正常对 ϕ 进行关于 t 的微分

2

这里实际上也有两种做法，一种是如上参考问题的进行笛卡尔系下的计算，另一种则是基于参考问题第四题的进一步求导

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{d}{dt} \left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \right) \\
 &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\frac{d\hat{\phi}}{dt} \\
 &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} - r\dot{\phi}^2\hat{r} \\
 &= \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \right) \hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} \right) \hat{\phi}
 \end{aligned}$$

20241016**1**

上次原题不重复写

2

上次原题不重复写

3

上次原题不重复写

4

上次原题不重复写

5

上次原题不重复写

6

$$\begin{aligned}
 m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) &= 0 \\
 m(2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi}) &= 0 \\
 2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} &= 0 \\
 r^2\dot{\phi} &= C
 \end{aligned}$$

7

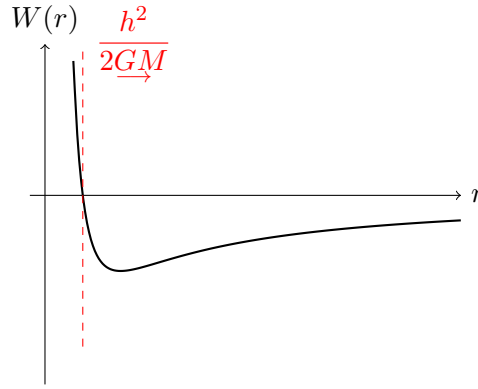
$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot r\dot{\phi} \\
 &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}
 \end{aligned}$$

8

$$\begin{aligned}
 E &= K + U \\
 &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \\
 &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{GMm}{r}
 \end{aligned}$$

9

根据上一问，我们有 $W(r) = \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$



至于 $E < 0$ 的情况, $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} < 0$ 由于径向动能项包含微分且恒大于 0, 因此我们不妨舍去. 于是式子变成了 $\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} < \frac{GMm}{r}$. 而这实际上是 $r > \frac{h^2}{2GM}$

10

$W'(r) = -\frac{mh^2}{r^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{h^2}{GM}$ 而此时的 r 是最低能状态, 因此不存在轨道半径震荡, 这就是单纯的圆轨道

課題

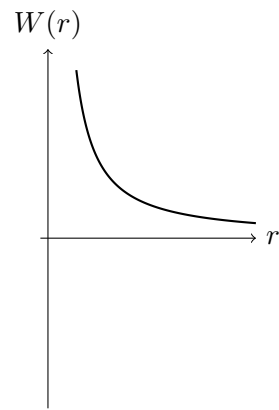
1

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \phi \\
 v_x &= \frac{d}{dt}(r \cos \phi) \\
 &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\
 \frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \\
 &= \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \\
 &= \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \\
 y &= r \sin \phi \\
 v_y &= \frac{d}{dt}(r \sin \phi) \\
 &= \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\
 \frac{dv_y}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \\
 &= \ddot{r} \sin \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) \\
 &= \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi
 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
 E &= K + U \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + \frac{mk}{r}
 \end{aligned}$$

因此有效势能为 $\frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + \frac{mk}{r}$



由于中心力为斥力因此并不存在一个稳定存在的点，而在 r_{min} 处，径向速度为 0 因此我们可以得到 $E = \frac{mh^2}{2r_{min}^2} + \frac{mk}{r_{min}}$

20241021

1

首先先列出角动量 $L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \end{pmatrix} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$

其关于时间的变化量是

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt}(m(x\dot{y} - y\dot{x})) \\ &= m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) \\ &= F_y x - F_x y \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \cdot \sin \theta \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ &= xv_y - yv_x \end{aligned}$$

3

根据上次的第七题可以得到，面积速度是 $\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$ ，将其乘上 $2m$ 之后变为 $mr^2\dot{\phi}$ 而由于 $v = r\dot{\phi}$ ，因此这就是 rmv （即角动量的大小）

4

我们不妨考虑一个柱坐标系 (r, θ, z) ，为了方便讨论设 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} mv_r \\ mv_\theta \\ mv_z \end{pmatrix}$

那么角动量表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_r \\ mv_\theta \\ mv_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ r & 0 & z \\ mv_r & mv_\theta & mv_z \end{vmatrix} \\ &= (mv_r z) \hat{\theta} + (rmv_\theta) \hat{z} - (rmv_z) \hat{\theta} - (mv_\theta z) \hat{r} \\ &= (-mv_\theta z) \hat{r} - (mv_r z - rmv_z) \hat{\theta} + (rmv_\theta) \hat{z} \end{aligned}$$

由于角动量的方向确定且方向是 \hat{z} ，因此 $\begin{cases} -mv_\theta z = 0 \\ -(mv_r z - rmv_z) = 0 \\ rmv_\theta = A \end{cases}$

这里 A 是一个固定的常数 (fixed number) 从第三个式子可以知道 v_θ 并非是 0，因此代回一式可以得到 $z = 0$ ，而这代回二式就可以得到 $v_z = 0$ 。于是 \mathbf{r}, \mathbf{p} 的 z 坐标都是 0，换言之都在平面 $z = 0$ 内部

至于为什么角动量的方向是 \hat{z} ，其实只是参考系选取的而已，我们只需要选取一个让角动量方向是 \hat{z} 的参考系就可以了

5

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\mathbf{L} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\
 &= \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \\
 &= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} \\
 &= \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\
 &= \mathbf{r} \times \left(F \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

因此角动量不随时间变化，换言之其守恒

6

左侧： $mgl \sin \phi$ ，方向逆时针

右侧： $mgl \sin \phi$ ，方向顺时针

課題

1

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \begin{pmatrix} 0 \\ r_p \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rmv \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

显然 $L = 0$ 当且仅当 r_p 为 0

而守恒条件为其不受外力或所受外力指向和位置矢量的指向相同

2

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} r_p \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix} \\
 \mathbf{L} &= \begin{pmatrix} r_p \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mgt \end{pmatrix} \\
 &= -mgr_p t \\
 \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= -mgr_p
 \end{aligned}$$

由于角动量对时间微分等价于力矩，而通过计算可以得到力矩的力就是 mg

20241023

1

上次原题不重复写

2

上次原题不重复写

3

$$r^2 \dot{\phi} = h \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{h}{r^2} = hu^2$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) \\ &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} \\ &= -\frac{\dot{\phi}}{u^2} \frac{du}{d\phi} \\ &= -h \frac{du}{d\phi} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(-h \frac{du}{d\phi} \right) \\ &= -h \frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{d\phi} \right) \cdot \frac{d\phi}{dt} \\ &= -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -G \frac{M}{r^2} \\ -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} - \frac{1}{u} h^2 u^4 &= -GM u^2 \\ \frac{d^2u}{d\phi^2} + u &= \frac{GM}{h^2} \end{aligned}$$

4

由于 $\frac{GM}{h^2}$ 并不包含 ϕ ，因此实际上 $\frac{d^2u}{d\phi^2} = 0$ ，因此 $\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 + u = 0 + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2}$

接着假设其齐次解是 $u = A \cos \phi + B \sin \phi$ （由于其特征方程是 $u^2 + 1 = 0$ ）

因此其通解是 $u = A \cos \phi + B \sin \phi + \frac{GM}{h^2}$

而为了方便计算我们不妨将其通解记作 $u = A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{GM}{h^2}$ ，这实际上是等价的

課題

1

上次原题不重复写

2

$$\begin{aligned}m \frac{v^2}{r} &= G \frac{Mm}{r^2} \\v^2 &= \frac{GM}{r} \\v &= \frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{r}}\end{aligned}$$

速度和半径的平方根成反比

$$\begin{aligned}m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r &= G \frac{Mm}{r^2} \\ \frac{4\pi^2}{T^2} &= \frac{GM}{r^3} \\ \frac{r^3}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2}\end{aligned}$$

显然右边是定值

20241031

1

我们从两个角度证明，首先是通过比耐公式计算得到

由上次所求得通解可以知道 $u = A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{GM}{h^2}$

接着为了方便，我们将基准作为长轴，换言之 $\phi_0 = 0$

因此原式为 $u = A \cos \phi + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2} \left(\frac{Ah^2}{GM} \cos \phi + 1 \right)$

接着我们记 $\epsilon = \frac{Ah^2}{GM}, l = \frac{h^2}{GM}$

于是这就得到了 $u = \frac{1}{l} (1 + \epsilon \cos \phi) \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{l} (1 + \epsilon \cos \phi) \Leftrightarrow r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \phi}$

接着我们可以得到近日点和远日点分别是 $\phi = 0, \pi$

换言之 $r_{\min} = \frac{l}{1 + \epsilon}, r_{\max} = \frac{l}{1 - \epsilon}$

而半长轴 $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{l}{1 - \epsilon^2}$

而半短轴 $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{l}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$

至于另一种方法，我们建立一个以太阳为左侧焦点的极坐标系 (r, ϕ) ，接着对于任意一点 $P(r, \phi)$ ，我们有 $PF_1 = r, PF_2 = 2a - r, F_2(2c, 0) = (2\epsilon a, 0)$ ，在三角形 PF_1F_2 中我们由余弦定理可以得到 $PF_2 = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \phi}$ 。根据椭圆定义（任意一点到两焦点距离之和为 $2a$ ），有

$r + \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \phi} = 2a$ 。而将其化简后得到 $r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \phi}$ ，仅需令 $l = a(1 - \epsilon^2)$ 便可

得到最后结果（由于我们这里将基准极轴选取为了指向另外一个焦点的方向因此分母处出现了负号）

2

在上一问的结果里，我们得到了 $r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \phi}$ 。

显然 $\epsilon = 1$ 意味着抛物线，而这代入回极坐标方程就是 $r = \frac{l}{1 + \cos \phi}$

3

由于双曲线的情况下 $\epsilon > 1$ ，我们重新考虑某点到两焦点距离关系

$\left| r - \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cos \phi} \right| = 2a$ ，化简后得到了 $r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 - \epsilon \cos \phi}$ （事实上还有另外一个解，但

是其无实际物理意义）

令 $l = a(\epsilon^2 - 1)$ 即可得到最终结果

另一方面 $r_{\min} = r_{\phi=0} = \frac{l}{1 - \epsilon}$ ，渐近线 $\cos \phi = \frac{1}{\epsilon}$

半实轴可以通过两焦点距离关系得出 $a = \frac{l}{\epsilon^2 - 1}$

半虚轴结合渐近线可以得到为 $b = \frac{l}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$

4

5

6

課題

20241104

20241106

20241111

20241113

20241118

20241120

20241127

20241202

20241204

20241209

20241211

20241216

2022

参考文献