

参考問題 2024/12/16

地球表面近くの運動を考える。地球の引力と遠心力の合力の向きを $-z$ 方向とし、地表の一点を原点とし、 z 軸と垂直に南方へ x 軸、東方へ y 軸をとるとする。 z 方向にはたらくみかけの重力を $-mg$ 、 z 軸が赤道面となす角度を λ としたとき、運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + 2m\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y - 2m\omega \left(\sin \lambda \frac{dx}{dt} + \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z - mg + 2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

となる。ただし、 X, Y, Z は重力以外の外力の成分である。

1. 地上から南に初速度 u_0 、鉛直上方に初速度 v_0 で打ち上げられた物体の軌道を求めよ。地上に落ちたとき東西方向にどれだけずれるか？
2. フーコーの振り子の運動を考える。ひもの長さを ℓ 、ひもの張力を S 、おもりの質量を m とする。支点を原点にとる。微小振動を考えるため、 $z \simeq -\ell = \text{一定}$ としてよい。

(a) x, y 方向の運動方程式をかけ。

(b) x 方向の運動方程式に $-y$ を、 y 方向の運動方程式に x をかけて加える、積分することにより、

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = -\omega(x^2 + y^2) \sin \lambda$$

となることを示せ。ただし、 $t = 0$ において、 $x = 0, y = 0$ とする。

(c) $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ を代入することにより、 $\dot{\varphi} = -\omega \sin \lambda$ であることを示せ。

3. 北半球では台風の風が左回りになる理由を説明せよ。

課題

1. 東京 ($\lambda = 35^\circ 43'$) から南または北に打ち上げられた物体が東西方向にずれないためには、打ち上げ角度をどのように選べばよいか？
2. フーコーの振り子の振幅が小さい場合には $S \simeq mg$ と近似できるとする。 $\zeta = x + iy$ において運動方程式を解け。ただし、 $t = 0$ で $x = y = 0, \dot{x} = v_0, \dot{y} = 0$ とする。