Teoria Cinética dos Gases

Partimos de quatro hipóteses para definição de nosso gás ideal

1. As moléculas se movem desordenadamente e governadas pela Mecânica Newtoniana
2. A única força atuando no sistema é a das colisões
3. As colisões são perfeitamente elásticas entre moléculas e com as paredes
4. As dimensões das moléculas são desprezíveis comparadas ao espaço vazio entre elas

Naturalmente dessas hipóteses seguem as propriedades de permanência de fase e liberdade para todos os valores de pressão e volume.

A partir disso, supomos uma certa quantidade N de moléculas de um gás ideal confinadas num recipiente cúbico de lado L, como mostra a figura 1. Cada molécula possui massa m_0 e supomos a velocidade média das moléculas sendo v.

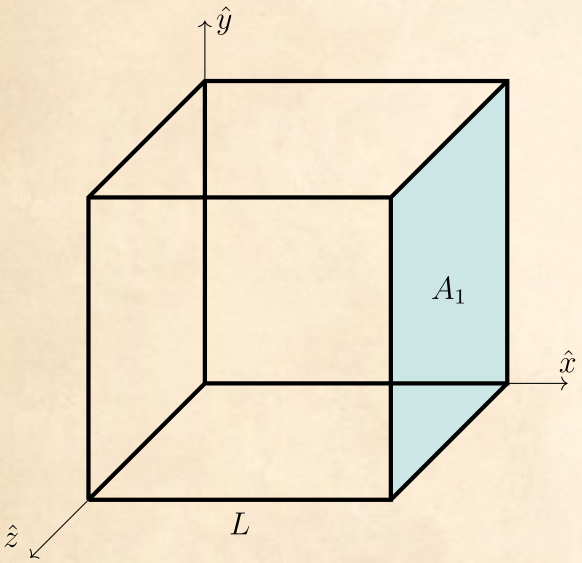

Figura 1: Recipiente cúbico com gás ideal

Podemos supor que, em média, um terço das moléculas está se movendo em cada uma das direções ($\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$).

Ao colidir com uma das faces do cubo, a molécula sofre uma variação de momento linear

$$\Delta p = 2m_0 v$$

Entre dois choques consecutivos com a mesma face, ela percorre $2L$, e portanto o período e a frequência dos choques valem

$$T = \frac{2L}{v} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2L}$$

Considerando todas as moléculas que se chocam contra a mesma face, a variação de momento linear por unidade de tempo vale

$$f\Delta p \frac{N}{3} = \frac{v}{2L} 2m_0 v \frac{N}{3} = \frac{N m_0 v^2}{3L}$$

Por análise dimensional, ou pelo teorema do impulso, reconhecemos a segunda lei de Newton e vemos que a força média sobre a face é

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{N m_0 v^2}{3L}$$

como a pressão sobre uma face plana pode ser calculada por $p = \frac{F}{A}$, temos

$$p = \frac{N m_0 v^2}{3L^3}$$

lembrando que $V = L^3$, $m = N m_0$, $\rho = \frac{m}{V}$. A **pressão sobre a face** fica então

$$p = \frac{1}{3}\frac{m}{V} v^2 \qquad \left(= \frac{1}{3}\rho v^2 \right) \tag{1}$$

Agora manipulando a equação 1 e a expressão usual para a energia cinética $K = \frac{mv^2}{2}$ temos

$$2K = 3pV \implies K = \frac{3}{2} pV$$

que pela equação de Clapeyron fica

$$K = \frac{3}{2} nRT \tag{2}$$

para a energia cinética por molécula basta dividir pelo número de moléculas, lembrando que $N = nN_A$, e portanto $\frac{n}{N} = \frac{1}{N_A}$.

$$\epsilon = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A} T$$

definindo a **constante de Boltzmann**

$$K_B = \frac{R}{N_A} \approx 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \qquad \text{(S.I.)}$$

temos enfim

$$\epsilon = \frac{3}{2} K_B T \qquad (3)$$

que é um resultado muito interessante, visto que a energia cinética do gás não depende das características particulares de seus constituintes, mas sim apenas da temperatura absoluta.

Por fim, apenas por completude, nos valendo da equação 2 para a energia cinética, podemos calcular a velocidade média das moléculas do gás

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} nRT \implies v^2 = \frac{3nRT}{m} \qquad n \equiv \frac{m}{M}$$

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad (4)$$

onde M é a massa atômica do constituinte do gás.

Vale lembrar que muitas simplificações foram adotadas para essa dedução, e que supomos lidar com gases **monoatômicos**. No caso de gases **diatômicos** a fração $\frac{3}{2}$ deve ser substituida por $\frac{5}{2}$.

Exercícios Propostos

1. Suponha um recipiente cúbico de volume V, preenchido com um gás monoatômico a uma temperatura inicial T_0 e pressão p_0, com um pequeno orifício de área S em uma das faces. Modele o comportamento da pressão nas paredes do recipiente com o passar do tempo.

2. Se outro orifício for adicionado em uma parede adjacente, como isso afeta o resultado anterior? E se o for na parede oposta?

3. Qual deveria ser o fluxo de calor através das paredes do recipiente para que a pressão não se alterasse no caso de um orifício?

4. Qual o limite físico necessário para esses resultados?