COLÉGIO TALLES DE MILETO

ENZO MANTOVANI LIMA
LARA MARIANNE MONTEIRO DA SILVA
LUCAS CAUÃ LOPES RODRIGUES
SOPHIA NAOMI SHIGEMOTO KATSUOKA

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: UMA ANÁLISE DO PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Taboão da Serra
2024

ENZO MANTOVANI LIMA
LARA MARIANNE MONTEIRO DA SILVA
LUCAS CAUÃ LOPES RODRIGUES
SOPHIA NAOMI SHIGEMOTO KATSUOKA

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: UMA ANÁLISE DO PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colégio Talles de Mileto como requisito parcial para obtenção de nota no 1º ano do ensino médio.

Orientador: Prof. Rodrigo Alvarino.

Taboão da Serra
2024

Resumo

Este trabalho apresenta uma revisão bibliográfica sobre o significado e as aplicações das simulações numéricas, que são métodos computacionais empregados para resolver problemas complexos com mínima margem de erro. Destaca-se a relevância dessas simulações em áreas das ciências exatas, onde problemas como o *Problema de N Corpos* não possuem solução analítica. Esse problema trata da interação gravitacional entre múltiplos corpos, que se atraem conforme a lei da gravitação universal, sendo que a complexidade aumenta à medida que mais corpos são incluídos. Embora seja possível modelar e resolver o *Problema de Dois Corpos* com precisão, o *Problema de Três Corpos* é inerentemente caótico, o que impossibilita a obtenção de uma solução analítica exata. Esse problema descreve a interação gravitacional entre três corpos — como planetas e estrelas —, e devido ao comportamento caótico, pequenas variações nas condições iniciais podem gerar grandes diferenças nos resultados futuros. Para exemplificar, foi realizada uma simulação numérica do sistema Sol-Mercúrio-Terra, cuja análise dos dados confirmou a presença de comportamento caótico no sistema.

Palavras-chave: Gravitação, Equações Diferenciais, Mecânica Clássica, Simulação.

Abstract

This work presents a literature review on the meaning and applications of numerical simulations, which are computational methods used to solve complex problems with minimal error margins. The relevance of these simulations in the exact sciences is highlighted, especially for problems like the *N-Body Problem*, which have no analytical solution. This problem involves the gravitational interaction between multiple bodies, attracting each other according to the law of universal gravitation, with increasing complexity as more bodies are added. While it is possible to accurately model and solve the *Two-Body Problem*, the *Three-Body Problem* is inherently chaotic, making it impossible to obtain an exact analytical solution. This problem describes the gravitational interaction between three bodies — such as planets and stars — and, due to its chaotic nature, small variations in initial conditions can lead to significantly different outcomes. To illustrate, a numerical simulation of the Sun-Mercury-Earth system was performed, and the analysis of the data confirmed the presence of chaotic behavior in the system.

key-words: Gravitation, Differential Equations, Classical Mechanics, Simulation.

Sumário

1 Introdução

No Egito antigo, a matemática era usada principalmente para resolver problemas práticos, como medir terrenos após as inundações do Nilo e construir monumentos como as pirâmides. Estas tarefas exigiam cálculos precisos e um bom entendimento de geometria. Como argumenta (CLAGETT, 1999), "a matemática egípcia foi, em essência, uma ferramenta empírica desenvolvida para atender as necessidades práticas da vida cotidiana".

Na Grécia, no entanto, a matemática começou a transcender essas aplicações práticas. Filósofos como Pitágoras e Euclides transformaram-na em um campo de estudo abstrato, onde a busca pelo conhecimento era um fim em si mesmo. Pitágoras, por exemplo, não apenas descobriu relações numéricas fundamentais, como o teorema que leva seu nome, mas também desenvolveu uma visão do mundo onde os números e suas relações eram a essência da realidade. Euclides, por sua vez, com sua obra "Os Elementos", sistematizou o conhecimento geométrico de forma axiomática, estabelecendo um padrão de rigor que influenciaria a matemática por séculos.

Essa evolução da matemática como linguagem permitiu a descrição de sistemas complexos e abstratos. Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, por exemplo, utilizaram a matemática para formular o cálculo diferencial e integral, ferramentas essenciais para a física moderna. Como escreveu Richard Feynman (1967), "o cálculo é a linguagem em que está escrito o livro da natureza".

No entanto, nem todos os problemas com os quais nos deparamos nas ciências exatas são, de fato, exatamente solucionáveis. Alguns exigem outras abordagens, como métodos numéricos e simulações computacionais, para se obter soluções aproximadas. Um exemplo clássico é o "Problema dos Três Corpos"na mecânica celeste, onde a interação gravitacional entre três corpos resulta em um sistema de equações diferenciais que não possui uma solução geral analítica. Nesse contexto, a simulação numérica é essencial para prever o comportamento dos corpos ao longo do tempo, utilizando métodos como o de Runge-Kutta ou o algoritmo de Verlet[1].

Essa abordagem não se limita apenas à astrofísica. Na dinâmica dos fluidos, as equações de Navier-Stokes que descrevem o movimento de fluidos viscosos são altamente não-lineares e complexas. Soluções analíticas são raras e se aplicam apenas a casos extremamente simplificados. Em situações reais, como o design aerodinâmico de aviões ou a previsão meteorológica, as soluções numéricas obtidas por métodos como a Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD) são imprescindíveis. Segundo (ROACHE, 1998), "a simulação numérica em dinâmica de fluidos é hoje uma das ferramentas mais poderosas e versáteis para a engenharia e as ciências aplicadas".

Além da engenharia e da física, a simulação numérica é fundamental em biolo-

[1] Vide (BURDEN , 2011) para mais informações sobre métodos numéricos específicos

gia e medicina. Por exemplo, simulações de dinâmica molecular são utilizadas para entender o comportamento de proteínas e outras biomoléculas, facilitando o desenvolvimento de novos medicamentos. Essas simulações permitem aos cientistas observar interações moleculares em uma escala de tempo e espaço inacessíveis aos métodos experimentais tradicionais. Como menciona (KARPLUS; MCCAMMON, 2002), "as simulações computacionais tornaram-se uma terceira via, além da teoria e do experimento, para a investigação de processos biológicos".

Na economia e nas ciências sociais, modelos numéricos e simulações são usados para prever o comportamento de mercados e sociedades. Modelos baseados em agentes, por exemplo, podem simular as interações de indivíduos ou empresas em um mercado para estudar fenômenos como a formação de preços e as crises financeiras. Essas simulações são cruciais para entender sistemas complexos onde os comportamentos emergentes não podem ser facilmente deduzidos a partir de princípios simples.

Portanto, a simulação numérica não apenas complementa a teoria e a experimentação, mas muitas vezes se torna a única abordagem viável para estudar sistemas complexos. Como afirmou John von Neumann (1951), um dos pioneiros da simulação computacional, "qualquer um que considere métodos aritméticos para produzir dígitos aleatórios está, claro, em um estado de pecado", destacando a importância e a complexidade das abordagens numéricas na ciência moderna.

No contexto deste trabalho, o objetivo é realizar uma revisão abrangente da mecânica celeste clássica, tanto na sua forma Newtoniana quanto Lagrangiana. Este estudo inicial permitirá estabelecer uma base sólida para entender os princípios fundamentais que governam a dinâmica dos corpos celestes. Um dos objetivos específicos é estudar a solução analítica do problema de dois corpos, um sistema relativamente simples onde as leis de Newton oferecem uma solução exata. Esta etapa é crucial, pois proporciona uma compreensão dos métodos e das equações que servirão como base para análises mais complexas.

Adicionalmente, será revisada a bibliografia em matemática e física para compreender a complexidade da solução analítica para o problema de três corpos. O problema de três corpos, conhecido por sua natureza caótica e pela ausência de uma solução analítica geral, representa um desafio significativo na mecânica celeste. Através dessa revisão, serão explorados tanto os esforços históricos quanto as abordagens modernas para lidar com esse problema, incluindo a análise de soluções particulares e a aplicação de métodos perturbativos.

Uma vez compreendida a complexidade matemática inerente ao problema de três corpos, o próximo passo será desenvolver um código simples que seja capaz de simular a evolução temporal da posição de três corpos sob influência mútua. Utilizando a linguagem Python, será criada uma simulação que, embora simplificada, fornecerá as órbitas dos corpos com um nível razoável de precisão. Esta abordagem prática não só ilustrará os conceitos teóricos discutidos, mas também demonstrará a aplicação de métodos numéricos para resolver problemas complexos que são intratáveis por métodos analíticos.

2 Simulações numéricas e analíticas

Essas classificações se dão devido à necessidade de simulações numéricas, para obtermos resultados mais precisos por meio de abordagens que nos permitem solucionar problemas como a contabilidade de recursos finitos. Utilizamos dois principais métodos para realizar essas abordagens: método numérico e analítico. Os termos “numérico” e “analítico” são habitualmente utilizados para descrever diferentes abordagens para solucionar diversos problemas em distintos campos científicos[2].

Quando um problema é classificado como numérico, isso significa que sua solução envolve principalmente a aplicação de números e cálculos quantitativos. Por exemplo, na física, problemas relacionados ao movimento de corpos, cálculos de energia e análise de dados experimentais são solucionados aplicando métodos como simulações computacionais. Como solução à impossibilidade analítica, buscamos convergências de séries numéricas. Com ferramentas de análise[3], somos capazes de propor uma abordagem extremamente simples para o problema e, em seguida, buscar métodos para diminuir os erros da aproximação.

2.1 Aplicação

Problemas analíticos envolvem uma abordagem mais teórica, muitas vezes baseada na análise lógica de informações. Na área da física, podem envolver a aplicação de leis fundamentais, como as leis de Newton, para deduzir soluções sem a necessidade de cálculos numéricos extensos. Em outras áreas, como na química, podem envolver a interpretação de dados experimentais.

A distinção entre as abordagens numéricas e analíticas não é rígida, e frequentemente é necessário utilizar ambas as abordagens em conjunto para resolver problemas complexos. Por exemplo, em muitas simulações computacionais, é comum combinar métodos numéricos para resolver equações com uma análise analítica para interpretar os resultados obtidos. Em resumo, enquanto problemas numéricos envolvem principalmente cálculos quantitativos, problemas analíticos dependem mais da análise conceitual de informações para chegar a uma solução. Ambas as abordagens desempenham papéis importantes na resolução de problemas científicos e na compreensão de efeitos socioeconômicos em geral.

2.2 Resolução de problemas complexos

As soluções numéricas, também conhecidas como métodos numéricos, ajudam na resolução de problemas matemáticos complexos de forma aproximada. Quando nos

[2](ANSYS, 2017)
[3](MENDES, 2009)

deparamos com problemas tão difíceis que não podem ser resolvidos apenas com capacidade humana, recorremos aos métodos numéricos e à capacidade dos computadores.

A linguagem que utilizamos para programar computadores difere da linguagem usada para resolver problemas de forma mais manual. A complexidade é maior e o tempo necessário também aumenta. No entanto, as soluções numéricas nos permitem encontrar uma resolução para problemas complexos em um tempo muito menor do que seria possível manualmente, além de facilitar a simulação de condições realistas de um determinado problema. Muitas áreas, como engenharia, física computacional, matemática, entre outras, se beneficiam desses métodos, resultando em avanços e descobertas significativas.

A solução numérica desempenha um papel crucial na engenharia civil, especialmente na área de estruturas. É aplicada para determinar raízes de equações, realizar interpolação numérica de valores tabelados, resolver equações diferenciais parciais ou ordinárias, e realizar integração numérica, entre outras aplicações essenciais. A determinação de raízes de equações é fundamental para resolver muitos problemas estruturais complexos na engenharia civil.

Conforme mencionado por (CHAPRA; CANALE, 2014), na análise de estabilidade de estruturas, a determinação das cargas críticas de flambagem envolve a solução de equações características, cujas raízes correspondem aos valores próprios do sistema. Esta análise é crucial para garantir que as estruturas sejam projetadas e construídas com segurança.

Além disso, como destacado por (COOK; MALKUS; PLESHA, 1989), na análise de vibrações estruturais, as frequências naturais de uma estrutura são determinadas pela resolução das raízes de equações diferenciais características. A aplicação de métodos numéricos para encontrar essas raízes é fundamental para garantir a segurança, eficiência e durabilidade das construções. Isso permite que engenheiros civis projetem e analisem estruturas complexas com maior precisão e confiabilidade, atendendo aos rigorosos padrões de segurança e desempenho exigidos na engenharia civil moderna.

A solução analítica de problemas matemáticos envolve encontrar uma expressão matemática exata que resolva uma equação ou descreva um fenômeno. Algumas das dificuldades matemáticas envolvidas na obtenção de soluções envolve Equações Diferenciais Complexas, Falta de Soluções Fechadas, Transformações e Métodos Especiais, Problemas Multidimensionais, Integrais complicadas, Series infinita e expansões assintóticas, condições de contorno e singularidades, simetria e invariância.

Muitas vezes, as equações diferenciais envolvidas em problemas físicos, como as de mecânica quântica ou teoria do caos, são não lineares e difíceis de resolver analiticamente. Mesmo quando são lineares, encontrar a solução geral pode ser desafiador.

Certas equações simplesmente não possuem soluções em termos de funções elementares (polinômios, exponenciais, logaritmos, etc.). Exemplos incluem a equação de Kepler e a equação de onda em meios complexos.

Métodos analíticos frequentemente envolvem transformações complicadas, como a Transformada de Laplace ou a Transformada de Fourier. Usar esses métodos pode ser complicado, especialmente quando as condições de contorno ou iniciais são complexas.

Resolver problemas em várias dimensões pode ser matematicamente intenso. Por exemplo, a equação de Laplace ou a equação de Schrödinger em três dimensões pode ser muito difícil de resolver sem simplificações ou aproximações.

Em muitos casos, a solução de um problema analítico requer a avaliação de integrais complicadas que podem não ter soluções fechadas. Essas integrais podem precisar ser resolvidas

Muitas soluções analíticas são dadas em termos de séries infinitas ou expansões assintóticas, que podem ser difíceis de manipular ou resumir em uma forma fechada útil.

A presença de condições de contorno complexas ou singularidades (como em equações diferenciais parciais) pode dificultar muito a obtenção de uma solução analítica.

Explorar simetrias no problema pode simplificar a solução, mas identificar e aplicar essas simetrias corretamente pode ser desafiador.

No decorrer do tempo cada vez mais foi analisado, atualizado e sempre tentando ter o melhor resultado e a explicação para diversos problemas. Para isso diversos cientistas conseguiram contribuir para o melhor entendimento histórico possível.

3 Cientistas e suas contribuições históricas

Tales de Mileto (Figura 1a), foi um filósofo, astrônomo, matemático , um cientista muito inteligente e que observava fenômenos naturais, como eclipses solares e lunares. Além disso, Tales é conhecido por seus estudos sobre geometria, particularmente sua descoberta de propriedades geométricas, como a semelhança de triângulos e a teoria dos círculos concêntricos. Embora esses estudos não estejam diretamente relacionados à mecânica celeste, as ideias e contribuições de Tales para a matemática e a filosofia natural ajudaram na base do pensamento científico, incluindo o estudo do movimento dos corpos celestes.

Galileu (Figura 1b) foi o primeiro a usar um telescópio para observar o céu noturno. Suas observações revelaram as fases de Vênus, as montanhas da Lua, as luas de Júpiter e as manchas solares, entre outras descobertas. Essas observações forneceram evidências diretas de que não tudo orbitava em torno da Terra, como acreditava-se na época. A descoberta das luas de Júpiter foi particularmente importante, pois mostrou que não apenas a Terra tinha um satélite natural, mas outros corpos celestes também. Isso ajudou a estabelecer a ideia de que a Terra não era o centro do universo e contribuiu para o desenvolvimento do modelo heliocêntrico de Copérnico.

Henri Poincaré (1854-1912) (Figura 1e) foi um matemático, físico e filósofo francês, considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele fez contribuições fundamentais em várias áreas da matemática, como a teoria das funções, a topologia, a geometria diferencial e a teoria do caos. Poincaré é frequentemente referido como o "pai da topologia", devido ao seu trabalho pioneiro na área. Além de suas contribuições à matemática, Poincaré também fez avanços significativos na física, especialmente na teoria da relatividade e na mecânica celeste. Seu trabalho sobre o problema dos três corpos e suas investigações sobre a estabilidade do sistema solar foram fundamentais para o desenvolvimento da teoria do caos.

Poincaré também teve um papel importante no desenvolvimento da relatividade restrita, antes mesmo de Albert Einstein publicar sua famosa teoria. Embora Poincaré não tenha chegado à formulação completa da relatividade restrita, seu trabalho preparou o terreno para as descobertas de Einstein. Ele também era conhecido por seu interesse na filosofia da ciência, onde explorava a natureza do conhecimento científico e o papel da intuição e da lógica na descoberta científica.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) (Figura 1c) foi um matemático e astrônomo francês-italiano, conhecido por suas contribuições em diversas áreas da matemática e da física. Um dos seus trabalhos mais influentes foi a formulação da mecânica lagrangiana, que reformulou a mecânica clássica utilizando conceitos de energia em vez de força, sendo fundamental para o desenvolvimento da física moderna, incluindo a mecânica quântica e a relatividade.

Lagrange também contribuiu significativamente para a teoria das equações diferenciais, desenvolvendo as equações de Lagrange, que descrevem o movimento de sistemas dinâmicos. Além disso, ele foi um dos fundadores do cálculo das variações, uma área da matemática que busca encontrar funções que otimizam ou minimizam certas quantidades. Seu trabalho teve um impacto profundo na matemática e na física, e suas ideias continuam a ser amplamente utilizadas hoje.

Ele também fez importantes contribuições na teoria dos números e na mecânica celeste, incluindo o estudo das órbitas dos corpos celestes. A sua obra "Mécanique Analytique", publicada em 1788, é um dos textos mais importantes na história da mecânica, sintetizando e estendendo o trabalho de seus predecessores de uma forma extremamente elegante e geral.

William Rowan Hamilton (1805-1865) (Figura 1d) foi um matemático, físico e astrônomo irlandês, conhecido por suas contribuições fundamentais à matemática e à física, particularmente na área da mecânica e da álgebra. Hamilton é mais famoso por ter desenvolvido a mecânica hamiltoniana, uma reformulação da mecânica clássica que, assim como a mecânica lagrangiana, é uma das bases da física teórica moderna. A mecânica hamiltoniana utiliza funções chamadas de "funções hamiltonianas"para descrever a evolução temporal de um sistema físico, o que é essencial no estudo da mecânica quântica e da relatividade. Além de sua contribuição à física, Hamilton também fez avanços significativos na álgebra. Ele introduziu os quaterniões, uma extensão dos números complexos que foi a primeira aplicação bem-sucedida de números em mais de duas dimensões. Os quaterniões são ainda usados hoje em várias áreas, incluindo gráficos computacionais e física teórica.

Hamilton também fez importantes contribuições à ótica, onde desenvolveu a ideia de "trajetórias hamiltonianas"para descrever a propagação da luz. Ele era conhecido por sua mente brilhante e seus trabalhos foram fundamentais para o desenvolvimento de várias áreas da matemática e da física.

Andrey Kolmogorov (1903-1987) (Figura 1g) foi um matemático e estatístico russo, amplamente reconhecido por suas contribuições fundamentais em várias áreas da matemática, incluindo a teoria das probabilidades, a topologia, a teoria da informação e a teoria da complexidade algorítmica.

Kolmogorov é mais famoso por estabelecer a formulação moderna da teoria das probabilidades. Em 1933, ele publicou o livro "Fundamentos da Teoria das Probabilidades", onde apresentou uma base axiomática para a probabilidade, usando a teoria dos conjuntos, o que permitiu que a probabilidade fosse tratada de forma rigorosa como uma disciplina matemática. Essa formulação é conhecida como "axiomas de Kolmogorov"e é a base para a teoria das probabilidades moderna.

Além de suas contribuições à probabilidade, Kolmogorov também fez importantes avanços na teoria da informação e na teoria da complexidade algorítmica. Ele desenvolveu o conceito de "complexidade de Kolmogorov", que mede a quantidade de informação contida em um objeto, como uma sequência de números, definindo a complexidade como o tamanho do menor programa de computador que pode produzir essa sequência.

Kolmogorov também fez contribuições à dinâmica dos fluidos, estudando a turbulência, e à topologia, onde trabalhou em espaços topológicos e funções contínuas. Sua influência se estende por várias áreas da matemática e da ciência, e ele é considerado um dos maiores matemáticos do século XX.

Aleksandr Lyapunov (1857-1918) (Figura 1f) foi um matemático e físico russo, conhecido principalmente por suas contribuições à teoria da estabilidade e à teoria das probabilidades. Seu trabalho teve um impacto duradouro em diversas áreas da matemática aplicada e da física.

A contribuição mais famosa de Lyapunov é o desenvolvimento da teoria da estabilidade de Lyapunov, que é fundamental no estudo de sistemas dinâmicos. Ele introduziu métodos para determinar a estabilidade de soluções de equações diferenciais, o que é crucial para entender o comportamento de sistemas físicos e matemáticos sob pequenas perturbações. A estabilidade de Lyapunov é usada para analisar sistemas em engenharia, física, biologia, economia e muitas outras áreas.

Lyapunov também fez importantes avanços na teoria das probabilidades. Ele desenvolveu o teorema central do limite, que generaliza os trabalhos anteriores de Chebyshev, e estabeleceu condições para a convergência de distribuições de soma de variáveis aleatórias para a distribuição normal. Este teorema é um dos pilares da estatística e da teoria das probabilidades.

Além disso, Lyapunov trabalhou em problemas de mecânica celeste e hidrodinâmica, aplicando sua teoria da estabilidade a problemas complexos de física matemática. Sua abordagem rigorosa e analítica para resolver problemas complexos ajudou a formar a base de muitas áreas da matemática moderna.

4 solução e explicação analítica do problema de dois corpos

O problema de dois corpos é uma questão clássica da mecânica celeste e da física que envolve prever os movimentos de dois objetos que interagem apenas entre si por meio de uma força, como a gravidade. Esse problema tem 6 graus de liberdade porque cada corpo pode se mover em três dimensões diferentes (x, y, z), o que significa que precisamos acompanhar seis coordenadas no total: r_{1_x},r_{1_y},r_{1_z}, para o primeiro corpo, e r_{2_x},r_{2_y},r_{2_z} para o segundo corpo. A complexidade do problema surge porque as equações de movimento dessas coordenadas são interdependentes. No entanto, com algumas manipulações algébricas inteligentes e usando algumas identidades matemáticas, podemos simplificar significativamente o problema. Para facilitar a análise, definimos a posição relativa r dos dois corpos como a diferença entre as suas posições:

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{1}$$

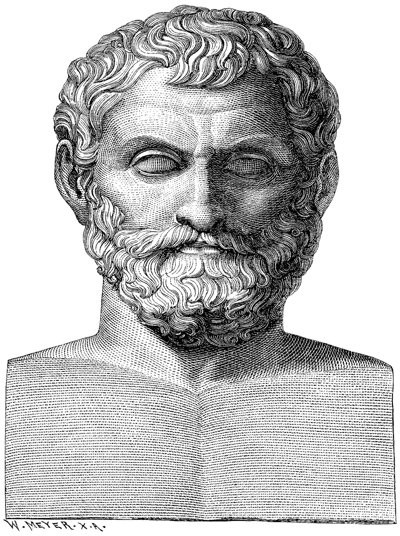
Essa definição nos ajuda a focar na distância e no vetor que aponta de um corpo para o outro, em vez de nos preocuparmos com suas posições absolutas. Assim, se um dos corpos se mover, sabemos como isso afeta a distância e a direção entre eles.

A posição do centro de massa R do sistema de dois corpos é definida como:

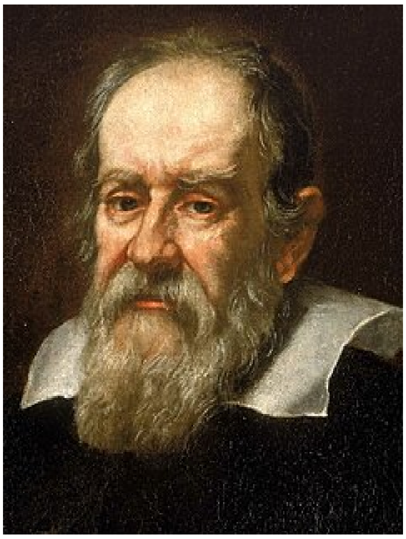
$$\vec{R} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} \tag{2}$$

onde m_1 e m_2 são as massas dos corpos e $M = m_1 + m_2$ é massa total do sistema.

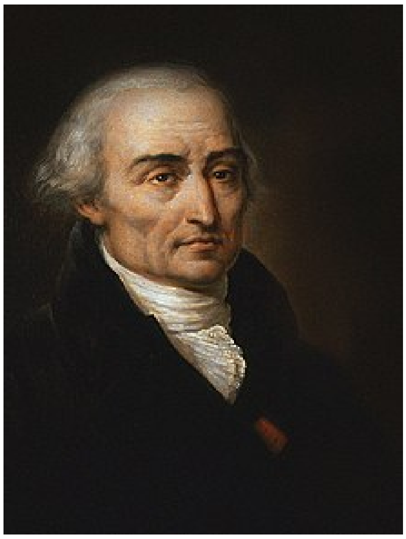
O centro de massa é como o "ponto de equilíbrio"do sistema, onde toda a massa



(a) Tales de Mileto (624 a.c. – 546 a.c.)



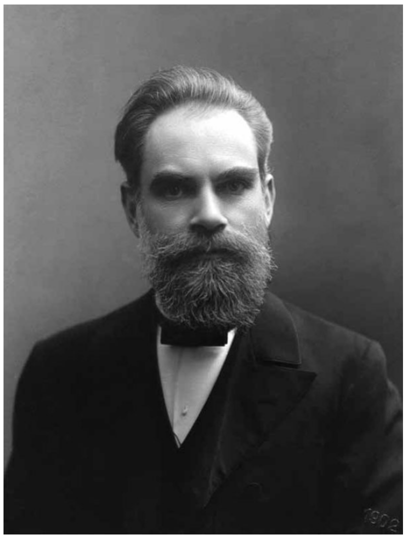
(b) Galileu Galilei (1564 – 1642)



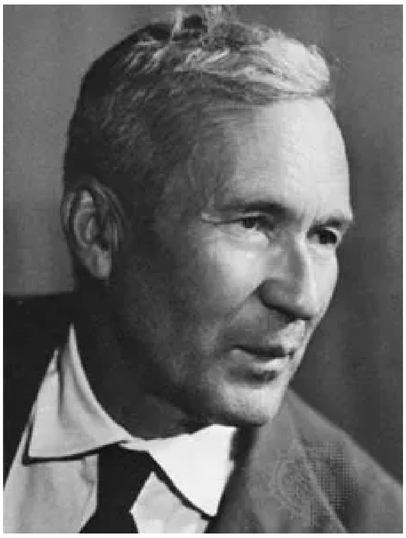
(c) Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813)

(d) William Rowan Hamilton (1805 – 1856)

(e) Henri Poincaré (1854 – 1912)



(f) Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857 – 1918)



(g) Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987)

Figura 1: Cientistas que contribuíram ao estudo da Mecânica e ao problema de três corpos do sistema pode ser considerada concentrada. Esse conceito é crucial porque, em muitos casos, podemos simplificar a análise do movimento considerando apenas o movimento do centro de massa.

Também introduzimos a massa reduzida μ, que é uma combinação das massas dos dois corpos:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

A massa reduzida é uma quantidade que aparece naturalmente quando lidamos com problemas de dois corpos. Ela nos permite tratar o problema como se fosse um único corpo com uma massa igual a μ movendo-se sob a influência de uma força.

Com essas definições, podemos expressar as posições dos dois corpos (r_1 e r_2) em termos do centro de massa R e da posição relativa r:

$$\vec{r_1} = \vec{R} - \frac{m_2}{M}\vec{r} \tag{4}$$

$$\vec{r_2} = \vec{R} + \frac{m_1}{M}\vec{r} \tag{5}$$

Essas equações mostram como a posição de cada corpo é afetada tanto pela posição do centro de massa quanto pela posição relativa entre os dois corpos. Após termos explorado a posição e a velocidade dos corpos no sistema, podemos agora nos concentrar em como essas grandezas se relacionam com as energias do sistema. A análise das energias cinética e potencial é essencial para compreendermos a dinâmica dos dois corpos e como eles interagem sob a influência de forças centrais. Para fazer isso, usaremos uma abordagem em física conhecida como formalismo de Lagrange, que combina essas energias em uma função chamada Lagrangiana.

Assim, a energia cinética total do sistema de dois corpos é a soma das energias cinéticas de cada corpo. Para um corpo de massa m movendo-se com velocidade v, a energia cinética é dada por $\frac{1}{2}m|v|^2$ Portanto, a energia cinética total é:

$$T = \frac{1}{2}m_1|\dot{r}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{r}_2|^2 \tag{6}$$

Onde $\dot{r}_1$ e $\dot{r}_2$ são as velocidades dos corpos 1 e 2, respectivamente.

Com a nossa definição de $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$:

$$\frac{d\vec{r_1}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} - \frac{m_2\vec{r}}{M}\right) = \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}} \tag{7}$$

abrindo os quadrados e cancelando com os termos repetidos de $\vec{r_2}$ acabamos com

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{R}^2}_{T_{CM}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}_{T_r} \tag{8}$$

Usando a Lagrangiana que é uma função que captura toda a dinâmica de um sistema físico. Que é definida como a diferença entre a energia cinética T e a energia potencial U,tem se:

$$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \underbrace{U(r)}_{U_{\text{grav}}} \tag{9}$$

Neste caso, $U(r)$ é a energia potencial que depende apenas da distância entre os dois corpos, r. Na maioria dos problemas de dois corpos, essa energia potencial é a energia potencial gravitacional, que tem a forma:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \tag{10}$$

Onde G é a constante da gravitação universal

Como a Lagrangiana depende das variáveis de posição e de suas derivadas temporais (velocidades), podemos usá-la para encontrar as equações de movimento do sistema.

Ao calcular a derivada parcial da Lagrangiana em relação a R_x (uma das componentes de $\vec{R}$), percebe-se que o centro de massa do sistema se move com velocidade constante. Isso não interfere na energia cinética do vetor r, que está associado à posição relativa. Assim, podemos escolher uma R que seja constante sem perda de generalidade. A Lagrangiana então se simplifica para:

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U(r) \tag{11}$$

o que simplifica nosso problema para agora **3 graus de liberdade** $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$.

Sendo necessário verificar o momento angular que é uma grandeza física que representa a quantidade de movimento de rotação que um corpo possui. Ele é dado pelo produto vetorial entre a posição r e o momento linear p do corpo:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad\qquad \vec{p} \equiv m\vec{v} = m\dot{\vec{r}} \tag{12}$$

Com algumas substituições e manipulações percebemos que o momento angular se conserva numa direção perpendicular ao plano de rotação. i.e. as órbitas são planares! O que nos permite reduzir o problema a **2 graus de liberdade** (x, y) ou (r, θ).

Vamos preferir utilizar as coordenadas polares, considerando que nosso movimento relativo ($\vec{r}$) é de rotação em torno de um ponto.

Pela transformação de coordenadas convencional, temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{13}$$

A Lagrangiana nas novas coordenadas fica

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \tag{14}$$

E com mais algumas manipulações chegamos, finalmente às duas equações diferenciais paramétricas

$$\boxed{\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}} \tag{15}$$

$$\mu r^2\dot{\theta} = l \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}} \tag{16}$$

Substituindo a equação (16) em (15), chegamos à chamada equação diferencial radial do problema de dois corpos reduzido

$$\mu\ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial U}{\partial r} \tag{17}$$

A equação (17), também conhecida como Equação de Binet, representa a equação de movimento para o problema de dois corpos em coordenadas polares. É a partir dessa equação que podemos encontrar as soluções analíticas para as órbitas dos corpos.

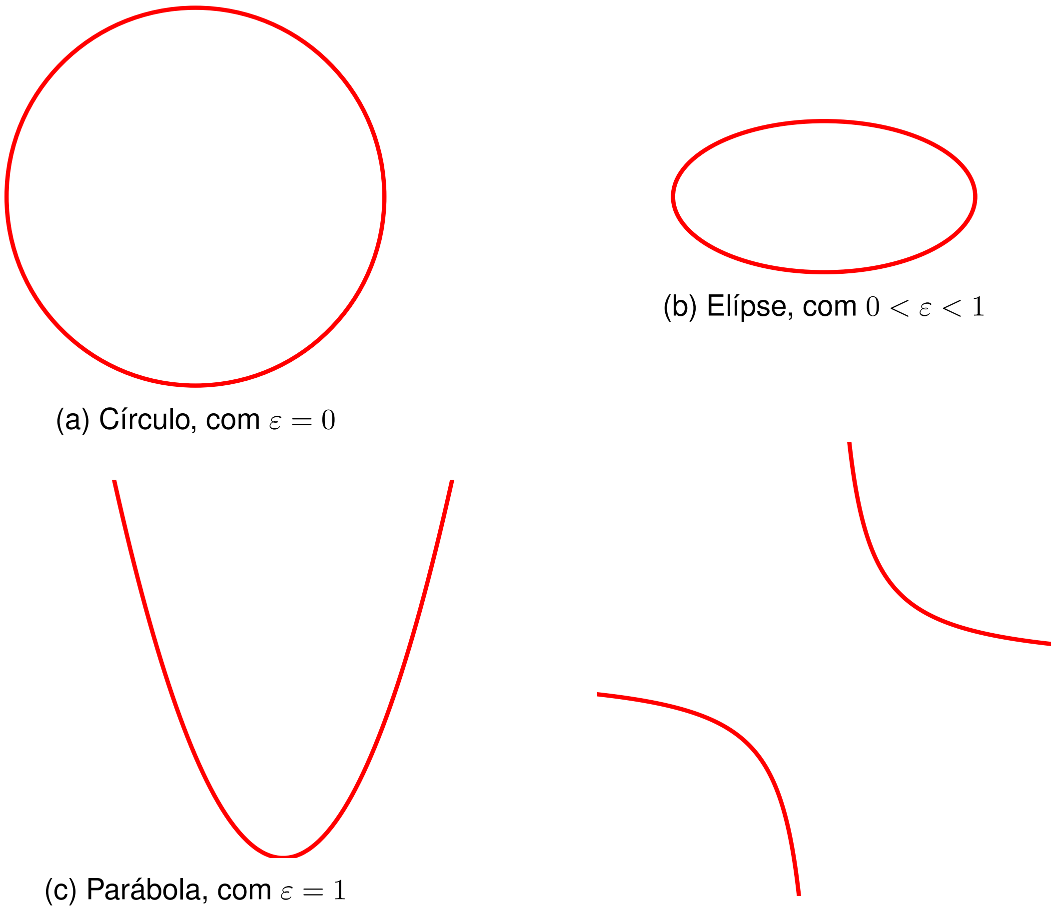
A solução da equação radial nos permite determinar a trajetória dos corpos em função do tempo. Dependendo da forma da função de potencial U(r), as soluções podem ser órbitas elípticas, parabólicas, ou hiperbólicas. Por exemplo, no caso de um potencial gravitacional, a solução geral é uma seção cônica (elipse, parábola ou hipérbole), o que explica a variedade de órbitas observadas no universo.

Resolvendo a equação diferencial pelos métodos comuns à Mecânica Clássica, chega-se à equação da trajetória

$$r(\theta) = \frac{C}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{18}$$

Essa é a equação polar de uma cônica. O tipo de cônica (círculo, elipse, parábola, ou hipérbole) é determinado pelo valor da excentricidade ε, como mostra a figura 2.

A equação encontrada representa a trajetória de dois corpos sob a influência de uma força central (como a força gravitacional). Dependendo da excentricidade ε, a órbita pode ser circular, elíptica, parabólica, ou hiperbólica. Esta análise é fundamental para a compreensão de muitos sistemas astronômicos, incluindo planetas orbitando estrelas ou satélites ao redor de planetas.



(a) Círculo, com $\varepsilon = 0$

(b) Elípse, com $0 < \varepsilon < 1$

(c) Parábola, com $\varepsilon = 1$

(d) Hipérbole, com $\varepsilon > 1$

Figura 2: Seções Cônicas

5 O problema de 3 corpos

A compreensão do problema dos três corpos está intimamente ligada à capacidade de determinar trajetórias precisas ou aproximadas de múltiplos corpos celestes sob influência gravitacional mútua. Por exemplo, considerando o problema de dois corpos em um sistema, hipoteticamente sem forças externas, aplica-se a Primeira Lei de Newton, que descreve a inércia — a tendência de um corpo de manter seu estado inicial de movimento ou repouso. Isso implica que, na ausência de forças externas, um corpo continuaria em sua trajetória indefinidamente.

Ao adicionar um terceiro corpo ao sistema, a complexidade aumenta significativamente. Isaac Newton, influenciado pelo trabalho de Johannes Kepler e suas leis orbitais, desenvolveu a Teoria da Gravitação Universal para descrever como dois corpos com massas interagem gravitacionalmente, orbitando em torno de um centro de massa comum. Esta teoria estabeleceu as bases para a compreensão dos movimentos orbitais planetários.

Entretanto, o problema dos três corpos é matematicamente desafiador e, até recentemente, considerado insolúvel de forma geral. Este problema envolve a interação gravitacional de três ou mais corpos, como planetas, estrelas ou satélites, onde cada corpo influencia e é influenciado pelos outros. As interações gravitacionais entre os corpos podem levar a comportamentos caóticos e imprevisíveis ao longo do tempo, dificultando a determinação de órbitas precisas sem o uso de simulações computacionais avançadas.

No século XVIII,um dos primeiros a ter encontrado casos especiais do problema dos três corpos foi Leonhard Euler,que encontrou uma família de soluções para três corpos onde todos os corpos permanecem em uma linha reta,essencialmente em eclipse permanente. Joseph-Louis Lagrange também encontrou uma solução, como o caso dos corpos formando um triângulo equilátero (figura 3), sendo para qualquer dois corpos orbitando entre si, as soluções de Euler e Lagrange definem 5 órbitas adicionais para um terceiro corpo que podem ser descritas como equações simples. Pierre-Simon Laplace contribuiu significativamente com seus métodos em teoria dos potenciais e teoria das perturbações, aplicados para entender as influências mútuas entre os corpos e prever suas órbitas ao longo do tempo.

Tudo isso utilizando a Lagrangiana, tornando-se uma função de posição e de velocidade de corpos,sendo definida como a diferença entre a energia cinética e a energia potencial do sistema,assim a Lagrangiana é uma reformulação da mecânica newtoniana, onde seu principal foco utiliza equações de movimento como $F = ma$,entretanto temos a Mecânica Hamiltoniana criada por William Rowan Hamilton, mudando o foco totalmente da mecânica newtoniana,começando a olhar para a energia do sistema como um todo,sendo definida como a energia cinética mais a energia potencial, anali-

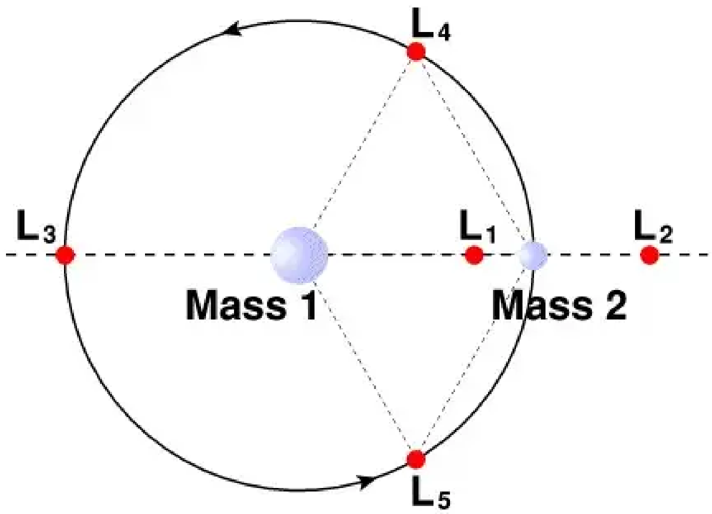


Figura 3: Pontos L_4 e L_5: Solução de Lagrange para configuração dos três corpos formando um triângulo equilátero; L_1,L_2,L_3: Demais soluções de Lagrange

sando a conservação de energia e a evolução do sistema no espaço de fase,facilitando a visualização de seu comportamento dinâmico,como órbitas e caos.

No entanto, foi somente com os avanços da mecânica estatística e teoria do caos no século XX que se começou a entender melhor os sistemas de três corpos. Ernst Bruns e Henri Poincaré demonstraram que não há solução analítica geral para o problema, devido à sensibilidade às condições iniciais e ao comportamento caótico das órbitas[4].

Recentemente, cientistas como Nicholas Stone e Nathan Leigh conseguiram transformar a natureza caótica das interações de três corpos em uma ferramenta útil, ao mapear regiões no espaço de fase onde ejeções de corpos são prováveis. Isso permitiu compreender melhor como sistemas de três corpos evoluem ao longo do tempo, explorando todas as configurações possíveis dentro de certas restrições físicas.

Portanto, o estudo do problema dos três corpos não só desafia os limites da matemática e da física teórica, mas também impulsiona avanços tecnológicos significativos em astronomia, navegação espacial, dinâmica de fluidos e cosmologia.

A teoria do Caos é desenvolvida em estudos de diversas áreas como física, filosofia, astronomia e filosofia. Sendo aplicada em sistemas caóticos, que são caracterizados como emergência, que é um termo matemático, que indica padrões de problemas complexos formados por objetos simplórios. Sistemas caóticos são uma subdivisão dos sistemas dinâmicos, que são sistemas que mudam ao longo do tempo, sendo representados por vetores em um certo período de tempo. Essas mudanças são simuladas por leis naturais ou equações diferenciais mostrando como o sistema evolui.

O problema de 3 corpos, por sua vez, se caracteriza como sistema caótico não linear. A lei básica que determina o estado futuro do problema caótico é a sua depen-

[4](SPACE, 2020) e (PANUCCI-TED-ED, 2020)

dência das condições iniciais, um exemplo clássico é o "efeito borboleta"criado por (Edward Lorenz) dita que: “mesmo o simples bater de asas de uma borboleta pode causar efeitos catastróficos”. Essa metáfora por sua vez desafia a mecânica clássica de Newton.

Esses sistemas são estritamente deterministas (determinismo, em meio científico, surgiu a partir dos estudos de Isaac Newton que mais a frente estabeleceu a física newtoniana, publicando o livro Principia que formulou as leis de movimento e gravitação, baseando-se na tese de que o estado atual é consequência de ações anteriores e condições específicas), considerando o conceito de gravitação e a órbita de um planeta como algo previsível. porém, mais a frente ele descobriu que existem instabilidades, que chamamos de sensibilidade às condições iniciais, significando que as perturbações (mínimas mudanças do curso previsto) podem mudar completamente os resultados futuros. O’Que nos impossibilita de obter uma previsão absoluta, conseguindo calcular apenas probabilidades do que possivelmente virá a acontecer.

No presente contexto, por mais que os sistemas caóticos sejam determinantes e similares aos sistemas determinísticos eles possuem diferenças entre os determinísticos. Que são elas: as possíveis previsibilidades, em sistemas determinista a previsibilidade é alta tornando o futuro do sistema totalmente determinado pelo seu estado atual, sem qualquer aleatoriedade, de modo que pequenas mudanças não tem efeitos dramáticos no resultado do sistema, dando como exemplo: um corpo frio é colocado próximo a corpos aquecidos o corpo frio irá absorver o calor independentemente se movemos o corpo levemente . Entretanto em sistemas caóticos a previsibilidade é limitada no tempo pois a alta sensibilidade a condições iniciais implica que previsões precisas a longo prazo são praticamente impossíveis. O seu comportamento temporal é variado e extremamente difícil de ser previsto, sendo praticamente imprevisível , mesmo que sejam governados por leis deterministas. Os descrevendo como fatores "deterministicamente aleatórios", por isso esses sistemas são tão complexos e raros no mundo real.

Modelar um problema de caos envolve: descrever um sistema dinâmico que apresenta comportamento caótico. Devemos primeiro definir o problema indicando as variáveis do problema, traduzi-lo em equações diferenciais discretas analisando a dinâmica linear do presente problema, então aplicamos um modelo matemático.

O *three body problem* (3BP) é definido como um problema complexo, não linear, que é frequentemente associado com oscilador caótico por apresentar dinâmica complexa e caótica, o que significa que o comportamento das órbitas pode ser imprevisível. Esse tipo de oscilador se diferencia de osciladores harmônicos simples de modo, que podem ser descritos por equações diferenciais não lineares. Essa complexidade faz com que o problema dos três corpos, quando os corpos têm interações gravitacionais mútuas, seja um exemplo clássico de sistema dinâmico caótico. Após esse processo devemos realizar simulações utilizando o modelo escolhido, então aplicamos o mesmo em sistemas computacionais como os modelados em Python.

O objetivo da modelagem é gerenciar o sistema do modo mais preciso possível. Após elaborar a modelagem do problema iremos aplicar o método das seções de Poincaré.

Henri Poincaré em 1895 publicou o livro "Analysis Situs"que é considerado o marco da criação da topologia algébrica. Poincaré estudava o comportamento dinâmico de três corpos sujeitos a ação de força gravitacional em um plano, segundo a lei universal de Newton do inverso da distância ao quadrado.

O controle do Caos em sistemas dinâmicos caracterizados como complexos se dá pela aplicação de ferramentas como as seções de Poincaré que estudam o comportamento dos sistemas que evoluem conforme o tempo. Elas são utilizadas para analisar o comportamento qualitativo de sistemas dinâmicos não lineares.

As seções de Poincaré são fatias discretizadas de sistemas dinâmicos, de modo que são praticamente a superfície de um problema maior, fornecendo uma representação mais simples e compreensível do comportamento do sistema. Essa simulação simplificada nos permite observar as interações das trajetórias do sistema, dando como exemplo a órbita do problema de 3 corpos, para simular uma seção de Poincaré devemos registrar os pontos em que os sistemas se cruzam, ilustrando tais abordagens em deversos tipos de atratores. Na superfície nós podemos simular a dinâmica do sistema.

É possível obter um atrator que ilustra a movimentação dos corpos de modo a aplicar equações diferenciais (que são um conjunto de comportamentos e características que evoluem para um sistema dinâmico). Atratores podem ter três classificações:

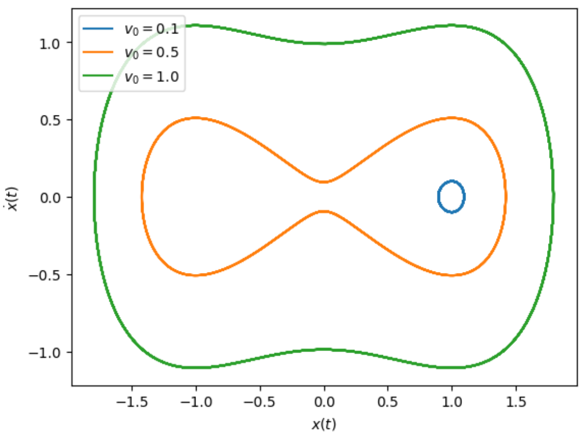
Atrator periódico: o objeto poderá se mover sobre uma curva fechada de modo indefinido (vide figura 4a);

Atrator de ponto fixo: O movimento do atrator converge de modo a colapsar em um ponto para todo instante após um intervalo de tempo de transiente (vide figura 4b);

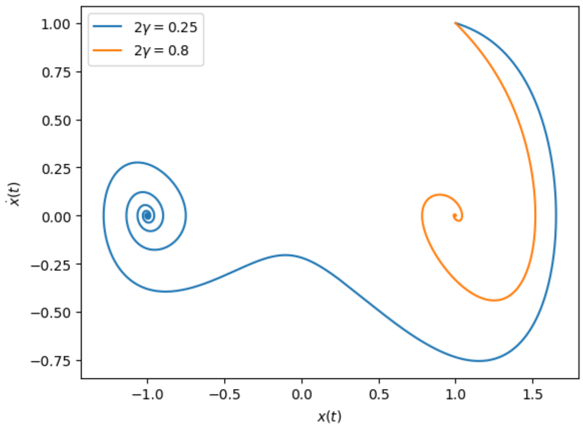
Atrator estranho: Não existe intervalo de transiente para o qual o atrator converje à alguma superfície topológica determinada (vide figura 4c). É portanto caótico.

Os sistemas caóticos mais complexos, que são mais instáveis, possuem os três tipos de atratores por conta das suas condições iniciais e a sua constante imprevisibilidade, devido à dificuldade de precisão, ao realizar os cálculos.

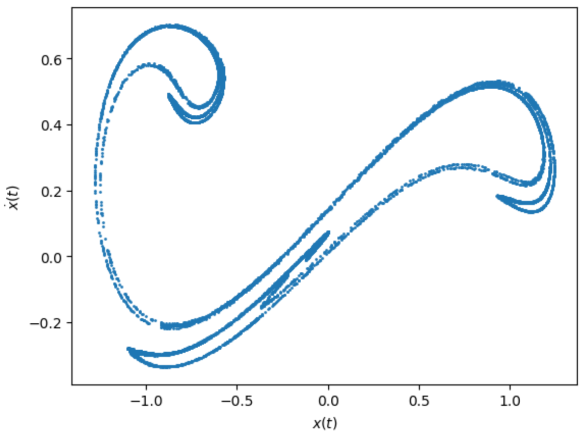
Fractais são utilizados no estudo de sistemas caóticos e teoria do caos, pois tais equações são usadas para descrever fenômenos naturais e comportamentais que se



(a) Atrator periódico



(b) Atrator de ponto fixo



(c) Atrator estranho

Figura 4: Exemplos de tipos de atratores apresentam na dinâmica do sistema, compondo-se por padrões de pontos específicos com complexidade infinita, porém que obedecem certas regras. Uma dimensão fracionária é a dimensão de um fractal, que é uma figura geométrica que se repete infinitamente em diferentes tamanhos. Os fractais estão presentes no 3BP pois corpos em sistemas caóticos podem formar padrões que exibem características fractais. Esses padrões são uma consequência da dinâmica não linear e da sensibilidade às condições iniciais do sistema, junto da frequência incomensurável de suas órbitas.

6 Modelagem

Utilizaremos Python3(ROSSUM; DRAKE, 2009) para lidar com a modelagem e animação do problema por conta do caráter "de alto nível", a fim de propor soluções computacionalmente simples e de fácil compreensão. O código da simulação pode ser encontrado no apêndice A

Das bibliotecas importadas nas linhas 1 a 10 do código, apenas a biblioteca *Numpy* é necessária à simulação. As demais foram utilizadas para a animação dos resultados com *Matplotlib*.

Consideramos o valor da constante da gravitação universal sendo G = 6.67·10^{-11} Nm^2/kg^2 (linha 16) e tomamos um intervalo de tempo Δt = 10^4 s , o equivalente a 2.7 horas. Vale notar que para o movimento planetário, um intervalo de três dias seria suficiente ao traçado da órbita.

na linha 20 cria-se a matriz que comporta as massas de cada planeta, já nomeadas no código. Nas linhas 26 e 32 faz-se o mesmo com as matrizes de posição $\vec{r}$ e velocidade $\vec{v}$ de cada corpo. Os dados inseridos são os raios e velocidades médias da Terra e de Mercúrio em relação ao Sol, obtidos de domínio público.

As linhas 37 a 45 foram ocultadas por possuírem repetições das matrizes anteriores com outros valores teste.

A partir da linha 56 são definidas as funções a serem iteradas durante a simulação. Uma breve explicação do algorítmo pode ser útil à compreensão do método escolhido.

6.1 Algoritmo

Definidas as massas, posições e velocidades iniciais de cada corpo, inicia-se o loop atualizando as posições a partir da função `update_position()`

$$\text{(para cada corpo } i) \quad \vec{r}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i \Delta t \tag{19}$$

Note que estamos considerando o movimento no pequeno intervalo Δt como sendo retilíneo e uniforme, como na relação $S = S_0 + v_0 \Delta t$.

Após atualizada a posição, é chamada a função `update_velocity()` que antes de executar sua rotina principal chama `a(r[i])` que calcula a nova aceleração a que estão submetidos os corpos em sua nova configuração através da lei da gravitação universal.

$$\text{(para cada corpo } i\text{)} \quad \vec{a}_i = \sum_{j \neq i}^{3} \frac{G m_j}{r_{ji}^3} \vec{r}_{ji} \tag{20}$$

Onde $\vec{r}_{ji}$ é o vetor que aponta para o corpo j a partir do corpo i.

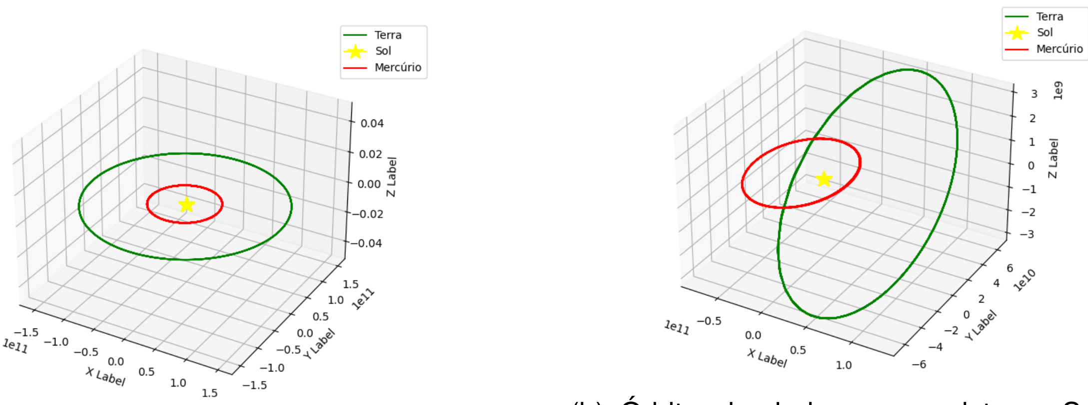
Atualizado o valor da aceleração gravitacional sobre cada corpo, atualizam-se as velocidades considerando que, no pequeno intervalo Δt o movimento é uniformemente acelerado como na expressão da cinemática escalar $v = v_0 + a\Delta t$

$$\text{(para cada corpo } i\text{)} \quad \vec{v}_i = \vec{v}_i + \vec{a}_i \Delta t \tag{21}$$

Após essa etapa, o método é iterado algumas milhares de vezes até se obter as órbitas como vistas nas figuras.

6.2 Perturbações

A partir de pequenas mudanças nas matrizes iniciais, pôde-se notar mudanças significativas nas energias e trajetórias (figura 5) do sistema.

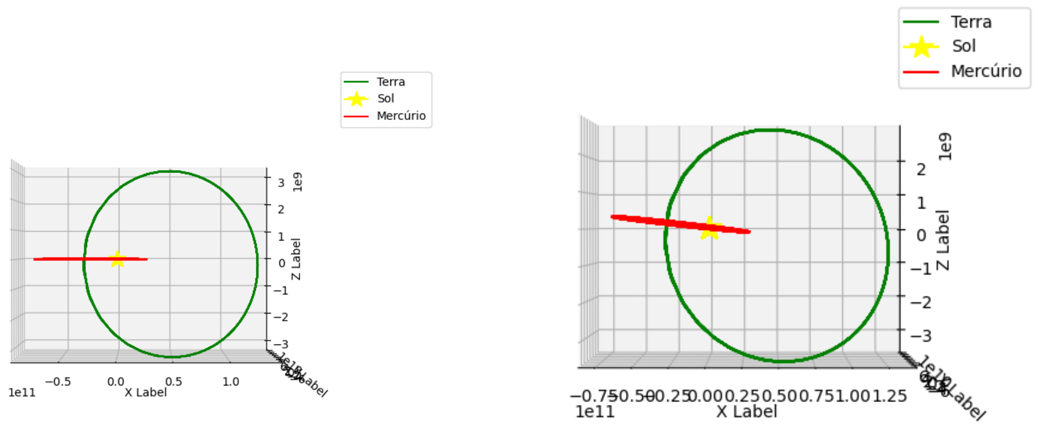


(a) Órbita simulada para o sistema Sol-Mercúrio-Terra com valores reais

(b) Órbita simulada para o sistema Sol-Mercúrio-Terra com valores perturbados de ΔH

Figura 5: Órbitas pré e pós perturbação

No sistema perturbado, após 10^6 iterações com Δt = 10000, observamos uma mudança considerável na trajetória de Mercúrio, indicada na figura 6. Ao calcular a diferença dos valores das órbitas para 5000 iterações antes e depois desse passo temporal observa-se uma crescente exponencial no desvio de Mercúrio, característica de um comportamento caótico com algum expoente de Lyapunov. A figura 7 mostra o gráfico das diferenças entre órbitas ponto a ponto para cada coordenada da posição dos três corpos.



(a) Órbitas Iniciais do sistema SMT

(b) Órbitas dos sistema SMT após 10^6 iterações

Figura 6: Representação do desvio da órbita de Mercúrio, no sistema perturbado Sol-Mercúrio-Terra, após transiente de 10^{10} segundos.

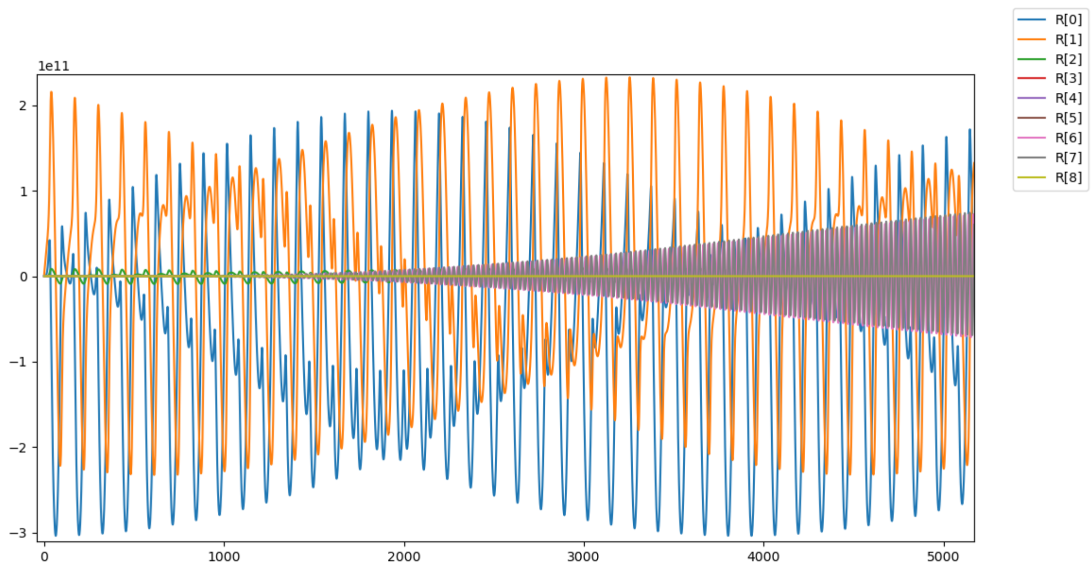


Figura 7: Gráfico do erro das órbitas do sistema perturbado “SMT” após 10^6 iterações

7 Considerações Finais

A partir da revisão histórica do problema de três corpos, pôde-se notar sua importância ímpar na formulação de teoria e métodos matemáticos sofisticados que transcenderam o problema original, formando hoje áreas inteiramente novas e de grande atividade em pesquisas atuais.

O problema original, como previsto por Newton e tratado por Poincaré, Euler e Lagrange, leva a uma reflexão muito importante quanto ao valor das formulações analíticas da mecânica e de outras áreas tangentes à dinâmica matemática. É perceptível a relevância de soluções exatas à modelagem de sistemas e processos naturais, tanto para sua melhor compreensão, quanto sua previsão. No entanto, certos sistemas possuem características únicas que os tornam muito especiais. Em situações muito semelhantes a casos triviais e fundamentais dos exemplos físicos, com apenas algumas sutís alterações em propriedades aparentemente irrelevantes, ou não conectadas, pode-se alcançar estados de completo caos e imprevisibilidade.

Lembrando que no contexto matemático, o termo “caos” não é sinônimo de aleatoriedade, nem implica, automaticamente, a condição de imprevisibilidade. Mas sim atesta que um sistema, sujeito à mudanças muito pequenas em suas condições iniciais, acaba evoluindo a estados muito diferentes dos originais sem tais mudanças. É no contexto das aplicações dos cálculos e integração das equações do movimento que somos levados à situações de imprevisibilidade, pois apesar de completamente determinísticos, os sistemas caóticos podem ser de integração inviável considerando os métodos atuais de computação. Percebemos tais limitações no tempo de execução da simulação dos corpos conforme aumentava-se o intervalo transiente para observação do desvio de Mercúrio. É válido ressaltar que mesmo as órbitas reais dos planetas em nosso sistema solar, como estão hoje, ainda são sujeitas às limitações de medida dos equipamentos terrestres e, portanto, constituem um sistema caótico cuja evolução não pode ser absolutamente descrita para qualquer intervalo de tempo. Muito se fala sobre a essentricidade de Mercúrio, e o tempo característico para sua ejeção dos sitema solar é tópico muito recorrente nas publicações da área.

Através das simulações realizadas no decorrer do trabalho, utilizando configurações iniciais tabeladas, e aplicando pequenas perturbações pudemos perceber algumas características do movimento caótico e como se manifesta nos sistemas físicos. A noção de transiente como um intervalo de tempo necessário à manifestação clara de mudanças no sistema foi uma das principais surpresas contra o senso comum da “alteração imediata”. Em muitos casos, é contra intuitivo esperar que dois sistemas em condições iniciais diferentes, ainda que próximas, comportem-se de maneira similar por um certo intervalo de tempo até finalmente destoarem por completo. Foi ainda mais surpreendente perceber que esse fenômeno ocorre em muitas áreas da física para além da gravitação.

No contexto da simulação selecionada para apresentação dos resultados no presente trabalho, a do sistema Sol-Mercúrio-Terra, foi notado um desvio nas órbitas dos três corpos, mas principalmente na de Mercúrio, que se mostrou de crescimento exponencial sob análise qualitativa. Apesar da possível classificação desse comportamento através da análise de Lyapunov, o cálculo do referido expoente λ de Lyapunov ultrapassa o objetivo do presente trabalho, que se propôs a modelar o problema de três corpos e observar de modo superficial e, tanto quanto possível, qualitativamente, seu comportamento caótico perante variações nas energias do sistema.

Tal observação fora feita através dos *plots* das órbitas e do gráfico de erro no desvio das trajetórias, e concluiu-se que de fato o erro cresce com o tempo decorrido e, como observado em outras modelagens, tenderia ao colapso do sistema e eventual ejeção (ou colisão) de um dos corpos.

Para uma eventual análise mais profunda e completa, seria necessário considerar todos os dados gerados em cada iteração, sem exclusão de qualquer transiente, bem como aumentar em algumas ordens de grandeza o número de dados. De posse de potência computacional, também é de interesse diminuir o intervalo de discretização temporal e assumir modelos mais robustos de integração das equações de movimento, como por exemplo o método de Runge-Kutta.

A análise dos dados também pode ser melhorada através de repetições pelo método de Monte-Carlo junto do ajuste das curvas de erro para os raios médios das órbitas em cada período orbital dos corpos, através do método de χ^2. Assim, não só os expoentes de Lyapunov poderiam ser identificados, como também os atratores do sistema podem ser plotados e analisados com técnicas pertinentes. Utilizando por fim a teoria de grupos e órbitas da geometria diferencial pode-se classificar as órbitas do sistema diante de cada configuração inicial e encontrar os pontos nodais que conectam as famílias acessíveis aos corpos em questão. Tais medidas ficam como sugestão de práticas futuras no contexto da graduação e da pesquisa nas áreas de Dinâmica e Mecânica Clássica.

Referências

ANSYS. **Métodos Numéricos Analíticos**. 2017. Acesso em: 02 abr. 2024. Disponível em: <https://www.esss.com/blog/simulacao-numerica-metodo-analitico-experimental-na-engenharia/>.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2014.

CLAGETT, M. **Ancient Egyptian Science: A Source Book**. Philadelphia: American Philosophical Society, 1999. v. 3.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Conceitos e Aplicações da Análise de Elementos Finitos**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1989.

FEYNMAN, R. P. **The Character of Physical Law**. Cambridge, MA: MIT Press, 1967.

KARPLUS, M.; MCCAMMON, J. A. Molecular dynamics simulations of biomolecules. **Nature Structural Biology**, Nature Publishing Group, v. 9, n. 9, p. 646–652, 2002.

MENDES, T. **Métodos Numéricos**. 2009. Acesso em: 02 abr. 2024. Disponível em: <https://www.ifsc.usp.br/~lattice/oldlattice/minicurso_fiscomp.pdf>.

NEUMANN, J. von. Various techniques used in connection with random digits. In: HOUSEHOLDER, A. S.; FORSYTHE, G. E.; GERMOND, H. H. (Ed.). **Monte Carlo Method**. Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1951. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, v. 12), p. 36–38.

PANUCCI-TED-ED, F. **Newton's three-body problem explained**. 2020. Acesso em: 23 mai. 2024. Disponível em: <https://youtu.be/D89ngRr4uZg?si=RKffg_OGc5L8Nb1A>.

ROACHE, P. J. **Verification and Validation in Computational Science and Engineering**. Albuquerque, NM: Hermosa Publishers, 1998.

ROSSUM, G. V.; DRAKE, F. L. **Python 3 Reference Manual**. Scotts Valley, CA: CreateSpace, 2009. ISBN 1441412697.

SPACE, P. **Resolvendo o problema dos três corpos**. 2020. Acesso em: 23 mai. 2024. Disponível em: <https://youtu.be/et7XvBenEo8?si=CHgrerpupsJbg29c>.

Apêndice A Código da simulação de três corpos

A.1 Definição de Parâmetros

Código 1: Parâmetros

```
import scipy.integrate as integrate
import numpy as np
np.random.seed( 11850761 )
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation
from matplotlib import rc
rc('animation', html='jshtml')
import mpl_toolkits.mplot3d.axes3d as p3
from matplotlib import animation
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

data = open("data.txt","w")

# ------------------------
#       PARAMETROS
# ------------------------

G = 6.67e-11

dt = 10000

m = [
    6e24, #Terra 6e24
    2e30, #Sol 2e30
    3.3e23  #Mercurio 3.3e23
]

r = [
    np.array([1.5e11,0,0]), # Terra 1.5e11,0,0
    np.array([0,0,0]),      # Sol 0,0,0
    np.array([-5.7e10,0,0]) #Mercurio -5.7e10,0,0
]

v = [
```

```
    np.array([0,30e3,1e3]),   #Terra  0,30e3,0
    np.array([0,0,0]),    #Sol  0,0,0
```

A.2 Funções

Código 2: Funções

```
# ]

def a(corpo):
    a = np.array([0,0,0])
    for index in range(3):
        if np.array_equal(r[index],corpo):
            pass
        else:
            d_vec = r[index]-corpo
            d = np.linalg.norm(d_vec)
            a = np.add(a,(G*m[index]/d**3)*d_vec,casting="unsafe")
    return a


def update_position():
    global r
    for index in range(3):
        r[index] = np.add(r[index],dt*v[index],casting="unsafe")


def update_velocity():
    global r
```

A.3 Salvando os Dados

Código 3: Loop para registro dos dados de posição

```
for _ in range(9000):
    for k in range(25):
        update_velocity()
```

```
        update_position()
    for body in r:
        for comp in body:
                data.write(str(comp)+"\t")
    data.write("0\n")
```

A.4 Desenhando a trajetória

Código 4: Rotina para plot das trajetórias com matplotlib

```
M = np.loadtxt("data.txt",delimiter="\t",unpack=True)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111,projection='3d')
fig.subplots_adjust(left=0,right=1,bottom=0,top=1)
ax.set_xlabel('X Label')
ax.set_ylabel('Y Label')
ax.set_zlabel('Z Label')

ax.plot(M[0],M[1],M[2],color='green',label="Terra")
ax.plot(M[3],M[4],M[5],color='yellow',label="Sol",marker='*',ms=15)
ax.plot(M[6],M[7],M[8],color='red',label="Merc rio")

fig.legend()
fig.savefig("drawn_orbit.png")
plt.show()
```