COLÉGIO TALLES DE MILETO

ENZO MANTOVANI LIMA
LARA MARIANNE MONTEIRO DA SILVA
LUCAS CAUÃ LOPES RODRIGUES
SOPHIA NAOMI SHIGEMOTO KATSUOKA

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: UMA ANÁLISE DO PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Taboão da Serra
2024

ENZO MANTOVANI LIMA
LARA MARIANNE MONTEIRO DA SILVA
LUCAS CAUÃ LOPES RODRIGUES
SOPHIA NAOMI SHIGEMOTO KATSUOKA

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: UMA ANÁLISE DO PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colégio Talles de Mileto como requisito parcial para obtenção de nota no 1º ano do ensino médio.

Orientador: Prof. Rodrigo Alvarino.

Taboão da Serra
2024

Sumário

Resumo

O Nosso trabalho é uma revisão bibliográfica do significado e aplicações das simulações numéricas, as simulações numéricas são uma forma de resolução computacional para resolver com uma mínima margem de erro problemas mais complexos. No decorrer deste trabalho você vai entender a importância que as simulações numéricas possuem dentro de diversas áreas exatas. Você irá aprender a solução analítica que é uma resolução que é possível escrever de forma matemática e existem fórmulas e cálculos da maneira correta. Um exemplo de problemas complexos que podem ter uma resolução analítica são “ O Problema de N Corpos".

Este problema seria a tese de que N corpos atraem-se por uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa, sendo essa lei nos permite calcular a força gravitacional exercida entre duas massas separadas com certa distância. Com o auxílio das simulações numéricas conseguimos fazer uma modelagem do problema de 2 corpos, conseguimos fazer o desenvolvimento para a resolução do problema de 2 corpos. No trabalho aprendemos também o que é o Problema de 3 Corpos , entendemos que este é um problema matematicamente impossível , porque por ser considerado um sistema inerentemente caótico ,ele está relacionado a movimentação de três corpos, como planetas e as estrelas sob a influência da sua própria gravidade,um exemplo seria o Sol, Júpiter e Saturno sozinhos que automaticamente formam um sistema de três corpos,assim se torna imprevisível saber o seu deslocamento,ou seja,não havendo uma solução analítica. Para a conclusão de nosso estudo, buscamos fontes para entender a simulação computacional do Problema de 3 Corpos.

Palavras-chave: Gravitação, EDO, Mecânica Clássica, Simulação.

Abstract

Our work is a literature review on the meaning and applications of numerical simulations. Numerical simulations are a form of computational resolution to solve more complex problems with a minimum margin of error. During this work you will understand the importance that numerical simulations have within several exact areas. You will learn that the analytical solution is a solution that you can write mathematically and that there are formulas and calculations in the correct way. An example of complex problems that can have analytical resolution is "The N-body problem".

This problem would be the thesis that N bodies attract each other by a force directly proportional to the product of their masses and inversely proportional to the square of the distance that separates them, and this law allows us to calculate the gravitational force exerted between two masses separated by a certain distance. With the help of numerical simulations, we were able to model the 2-body problem, we were able to develop the. solution to the 2-body problem In the work we also learned what the 3-Body Problem is, we understand that this is a mathematically impossible problem, as it is considered an inherently chaotic system, it is related to the movement of three bodies, such as planets and stars under the influence of their own gravity, an example would be the Sun, Jupiter and Saturn alone, which automatically form a system of three bodies, so it becomes unpredictable to know their displacement, that is, there is no analytical solution . To conclude our study, we searched for sources to understand the computer simulation of the 3-Body Problem.

key-words: Gravitation, ODE, Classical Mechanics, Simulation.

1 Introdução

No Egito antigo, a matemática era usada principalmente para resolver problemas práticos, como medir terrenos após as inundações do Nilo e construir monumentos como as pirâmides. Estas tarefas exigiam cálculos precisos e um bom entendimento de geometria. Como argumenta (CLAGETT, 1999), "a matemática egípcia foi, em essência, uma ferramenta empírica desenvolvida para atender as necessidades práticas da vida cotidiana".

Na Grécia, no entanto, a matemática começou a transcender essas aplicações práticas. Filósofos como Pitágoras e Euclides transformaram-na em um campo de estudo abstrato, onde a busca pelo conhecimento era um fim em si mesmo. Pitágoras, por exemplo, não apenas descobriu relações numéricas fundamentais, como o teorema que leva seu nome, mas também desenvolveu uma visão do mundo onde os números e suas relações eram a essência da realidade. Euclides, por sua vez, com sua obra "Os Elementos", sistematizou o conhecimento geométrico de forma axiomática, estabelecendo um padrão de rigor que influenciaria a matemática por séculos.

Essa evolução da matemática como linguagem permitiu a descrição de sistemas complexos e abstratos. Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, por exemplo, utilizaram a matemática para formular o cálculo diferencial e integral, ferramentas essenciais para a física moderna. Como escreveu Richard Feynman (1967), "o cálculo é a linguagem em que está escrito o livro da natureza".

No entanto, nem todos os problemas com os quais nos deparamos nas ciências exatas são, de fato, exatamente solucionáveis. Alguns exigem outras abordagens, como métodos numéricos e simulações computacionais, para se obter soluções aproximadas. Um exemplo clássico é o "Problema dos Três Corpos"na mecânica celeste, onde a interação gravitacional entre três corpos resulta em um sistema de equações diferenciais que não possui uma solução geral analítica. Nesse contexto, a simulação numérica é essencial para prever o comportamento dos corpos ao longo do tempo, utilizando métodos como o de Runge-Kutta ou o algoritmo de Verlet[1].

Essa abordagem não se limita apenas à astrofísica. Na dinâmica dos fluidos, as equações de Navier-Stokes que descrevem o movimento de fluidos viscosos são altamente não-lineares e complexas. Soluções analíticas são raras e se aplicam apenas a casos extremamente simplificados. Em situações reais, como o design aerodinâmico de aviões ou a previsão meteorológica, as soluções numéricas obtidas por métodos como a Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD) são imprescindíveis. Segundo (ROACHE, 1998), "a simulação numérica em dinâmica de fluidos é hoje uma das ferramentas mais poderosas e versáteis para a engenharia e as ciências aplicadas".

Além da engenharia e da física, a simulação numérica é fundamental em biolo-

[1] Vide (BURDEN , 2011) para mais informações sobre métodos numéricos específicos

gia e medicina. Por exemplo, simulações de dinâmica molecular são utilizadas para entender o comportamento de proteínas e outras biomoléculas, facilitando o desenvolvimento de novos medicamentos. Essas simulações permitem aos cientistas observar interações moleculares em uma escala de tempo e espaço inacessíveis aos métodos experimentais tradicionais. Como menciona (KARPLUS; MCCAMMON, 2002), "as simulações computacionais tornaram-se uma terceira via, além da teoria e do experimento, para a investigação de processos biológicos".

Na economia e nas ciências sociais, modelos numéricos e simulações são usados para prever o comportamento de mercados e sociedades. Modelos baseados em agentes, por exemplo, podem simular as interações de indivíduos ou empresas em um mercado para estudar fenômenos como a formação de preços e as crises financeiras. Essas simulações são cruciais para entender sistemas complexos onde os comportamentos emergentes não podem ser facilmente deduzidos a partir de princípios simples.

Portanto, a simulação numérica não apenas complementa a teoria e a experimentação, mas muitas vezes se torna a única abordagem viável para estudar sistemas complexos. Como afirmou John von Neumann (1951), um dos pioneiros da simulação computacional, "qualquer um que considere métodos aritméticos para produzir dígitos aleatórios está, claro, em um estado de pecado", destacando a importância e a complexidade das abordagens numéricas na ciência moderna.

No contexto deste trabalho, o objetivo é realizar uma revisão abrangente da mecânica celeste clássica, tanto na sua forma Newtoniana quanto Lagrangiana. Este estudo inicial permitirá estabelecer uma base sólida para entender os princípios fundamentais que governam a dinâmica dos corpos celestes. Um dos objetivos específicos é estudar a solução analítica do problema de dois corpos, um sistema relativamente simples onde as leis de Newton oferecem uma solução exata. Esta etapa é crucial, pois proporciona uma compreensão dos métodos e das equações que servirão como base para análises mais complexas.

Adicionalmente, será revisada a bibliografia em matemática e física para compreender a complexidade da solução analítica para o problema de três corpos. O problema de três corpos, conhecido por sua natureza caótica e pela ausência de uma solução analítica geral, representa um desafio significativo na mecânica celeste. Através dessa revisão, serão explorados tanto os esforços históricos quanto as abordagens modernas para lidar com esse problema, incluindo a análise de soluções particulares e a aplicação de métodos perturbativos.

Uma vez compreendida a complexidade matemática inerente ao problema de três corpos, o próximo passo será desenvolver um código simples que seja capaz de simular a evolução temporal da posição de três corpos sob influência mútua. Utilizando a linguagem Python, será criada uma simulação que, embora simplificada, fornecerá as órbitas dos corpos com um nível razoável de precisão. Esta abordagem prática não só ilustrará os conceitos teóricos discutidos, mas também demonstrará a aplicação de métodos numéricos para resolver problemas complexos que são intratáveis por métodos analíticos.

2 Simulações numéricas e analíticas

Essas classificações se dão devido à necessidade de simulações numéricas, para obtermos resultados mais precisos por meio de abordagens que nos permitem solucionar problemas como a contabilidade de recursos finitos. Utilizamos dois principais métodos para realizar essas abordagens: método numérico e analítico. Os termos "numérico" e "analítico" são habitualmente utilizados para descrever diferentes abordagens para solucionar diversos problemas em distintos campos científicos[2].

Quando um problema é classificado como numérico, isso significa que sua solução envolve principalmente a aplicação de números e cálculos quantitativos. Por exemplo, na física, problemas relacionados ao movimento de corpos, cálculos de energia e análise de dados experimentais são solucionados aplicando métodos como simulações computacionais. Como solução à impossibilidade analítica, buscamos convergências de séries numéricas. Com ferramentas de análise[3], somos capazes de propor uma abordagem extremamente simples para o problema e, em seguida, buscar métodos para diminuir os erros da aproximação.

2.1 Aplicação

Problemas analíticos envolvem uma abordagem mais teórica, muitas vezes baseada na análise lógica de informações. Na área da física, podem envolver a aplicação de leis fundamentais, como as leis de Newton, para deduzir soluções sem a necessidade de cálculos numéricos extensos. Em outras áreas, como na química, podem envolver a interpretação de dados experimentais.

A distinção entre as abordagens numéricas e analíticas não é rígida, e frequentemente é necessário utilizar ambas as abordagens em conjunto para resolver problemas complexos. Por exemplo, em muitas simulações computacionais, é comum combinar métodos numéricos para resolver equações com uma análise analítica para interpretar os resultados obtidos. Em resumo, enquanto problemas numéricos envolvem principalmente cálculos quantitativos, problemas analíticos dependem mais da análise conceitual de informações para chegar a uma solução. Ambas as abordagens desempenham papéis importantes na resolução de problemas científicos e na compreensão de efeitos socioeconômicos em geral.

2.2 Resolução de problemas complexos

As soluções numéricas, também conhecidas como métodos numéricos, ajudam na resolução de problemas matemáticos complexos de forma aproximada. Quando nos

[2](ANSYS, 2017)
[3](MENDES, 2009)

deparamos com problemas tão difíceis que não podem ser resolvidos apenas com capacidade humana, recorremos aos métodos numéricos e à capacidade dos computadores.

A linguagem que utilizamos para programar computadores difere da linguagem usada para resolver problemas de forma mais manual. A complexidade é maior e o tempo necessário também aumenta. No entanto, as soluções numéricas nos permitem encontrar uma resolução para problemas complexos em um tempo muito menor do que seria possível manualmente, além de facilitar a simulação de condições realistas de um determinado problema. Muitas áreas, como engenharia, física computacional, matemática, entre outras, se beneficiam desses métodos, resultando em avanços e descobertas significativas.

A solução numérica desempenha um papel crucial na engenharia civil, especialmente na área de estruturas. É aplicada para determinar raízes de equações, realizar interpolação numérica de valores tabelados, resolver equações diferenciais parciais ou ordinárias, e realizar integração numérica, entre outras aplicações essenciais. A determinação de raízes de equações é fundamental para resolver muitos problemas estruturais complexos na engenharia civil.

Conforme mencionado por (CHAPRA; CANALE, 2014), na análise de estabilidade de estruturas, a determinação das cargas críticas de flambagem envolve a solução de equações características, cujas raízes correspondem aos valores próprios do sistema. Esta análise é crucial para garantir que as estruturas sejam projetadas e construídas com segurança.

Além disso, como destacado por (COOK; MALKUS; PLESHA, 1989), na análise de vibrações estruturais, as frequências naturais de uma estrutura são determinadas pela resolução das raízes de equações diferenciais características. A aplicação de métodos numéricos para encontrar essas raízes é fundamental para garantir a segurança, eficiência e durabilidade das construções. Isso permite que engenheiros civis projetem e analisem estruturas complexas com maior precisão e confiabilidade, atendendo aos rigorosos padrões de segurança e desempenho exigidos na engenharia civil moderna.

A solução analítica de problemas matemáticos envolve encontrar uma expressão matemática exata que resolva uma equação ou descreva um fenômeno. Algumas das dificuldades matemáticas envolvidas na obtenção de soluções envolve Equações Diferenciais Complexas, Falta de Soluções Fechadas, Transformações e Métodos Especiais, Problemas Multidimensionais, Integrais complicadas, Series infinita e expansões assintóticas, condições de contorno e singularidades, simetria e invariância.

Muitas vezes, as equações diferenciais envolvidas em problemas físicos, como as de mecânica quântica ou teoria do caos, são não lineares e difíceis de resolver analiticamente. Mesmo quando são lineares, encontrar a solução geral pode ser desafiador.

Certas equações simplesmente não possuem soluções em termos de funções elementares (polinômios, exponenciais, logaritmos, etc.). Exemplos incluem a equação de Kepler e a equação de onda em meios complexos.

Métodos analíticos frequentemente envolvem transformações complicadas, como a Transformada de Laplace ou a Transformada de Fourier. Usar esses métodos pode ser complicado, especialmente quando as condições de contorno ou iniciais são complexas.

Resolver problemas em várias dimensões pode ser matematicamente intenso. Por exemplo, a equação de Laplace ou a equação de Schrödinger em três dimensões pode ser muito difícil de resolver sem simplificações ou aproximações.

Em muitos casos, a solução de um problema analítico requer a avaliação de integrais complicadas que podem não ter soluções fechadas. Essas integrais podem precisar ser resolvidas

Muitas soluções analíticas são dadas em termos de séries infinitas ou expansões assintóticas, que podem ser difíceis de manipular ou resumir em uma forma fechada útil.

A presença de condições de contorno complexas ou singularidades (como em equações diferenciais parciais) pode dificultar muito a obtenção de uma solução analítica.

Explorar simetrias no problema pode simplificar a solução, mas identificar e aplicar essas simetrias corretamente pode ser desafiador.

3 solução e explicação analítica do problema de dois corpos

O problema de dois corpos é uma questão clássica da mecânica celeste e da física que envolve prever os movimentos de dois objetos que interagem apenas entre si por meio de uma força, como a gravidade. Esse problema tem 6 graus de liberdade porque cada corpo pode se mover em três dimensões diferentes (x, y, z), o que significa que precisamos acompanhar seis coordenadas no total: r_{1_x},r_{1_y},r_{1_z}, para o primeiro corpo, e r_{2_x},r_{2_y},r_{2_z} para o segundo corpo. A complexidade do problema surge porque as equações de movimento dessas coordenadas são interdependentes. No entanto, com algumas manipulações algébricas inteligentes e usando algumas identidades matemáticas, podemos simplificar significativamente o problema. Para facilitar a análise, definimos a posição relativa r dos dois corpos como a diferença entre as suas posições:

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{1}$$

Essa definição nos ajuda a focar na distância e no vetor que aponta de um corpo para o outro, em vez de nos preocuparmos com suas posições absolutas. Assim, se um dos corpos se mover, sabemos como isso afeta a distância e a direção entre eles.

A posição do centro de massa R do sistema de dois corpos é definida como:

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} \tag{2}$$

onde m_1 e m_2 são as massas dos corpos e $M = m_1 + m_2$ é massa total do sistema.

O centro de massa é como o "ponto de equilíbrio"do sistema, onde toda a massa do sistema pode ser considerada concentrada. Esse conceito é crucial porque, em muitos casos, podemos simplificar a análise do movimento considerando apenas o movimento do centro de massa.

Também introduzimos a massa reduzida μ, que é uma combinação das massas dos dois corpos:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

A massa reduzida é uma quantidade que aparece naturalmente quando lidamos com problemas de dois corpos. Ela nos permite tratar o problema como se fosse um único corpo com uma massa igual a μ movendo-se sob a influência de uma força.

Com essas definições, podemos expressar as posições dos dois corpos (r_1 e r_2) em termos do centro de massa R e da posição relativa r:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M}\vec{r} \tag{4}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M}\vec{r} \tag{5}$$

Essas equações mostram como a posição de cada corpo é afetada tanto pela posição do centro de massa quanto pela posição relativa entre os dois corpos. Após termos explorado a posição e a velocidade dos corpos no sistema, podemos agora nos concentrar em como essas grandezas se relacionam com as energias do sistema. A análise das energias cinética e potencial é essencial para compreendermos a dinâmica dos dois corpos e como eles interagem sob a influência de forças centrais. Para fazer isso, usaremos uma abordagem em física conhecida como formalismo de Lagrange, que combina essas energias em uma função chamada Lagrangiana.

Assim, a energia cinética total do sistema de dois corpos é a soma das energias cinéticas de cada corpo. Para um corpo de massa m movendo-se com velocidade v, a energia cinética é dada por $\frac{1}{2}m|v|^2$ Portanto, a energia cinética total é:

$$T = \frac{1}{2}m_1|\dot{r}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{r}_2|^2 \tag{6}$$

Onde $\dot{r}_1$ e $\dot{r}_2$ são as velocidades dos corpos 1 e 2, respectivamente.

Com a nossa definição de $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$:

$$\frac{d\vec{r_1}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} - \frac{m_2\vec{r}}{M}\right) = \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}$$

abrindo os quadrados e cancelando com os termos repetidos de $\vec{r_2}$ acabamos com

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{R}^2}_{T_{CM}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}_{T_r}$$

Usando a Lagrangiana que é uma função que captura toda a dinâmica de um sistema físico. Que é definida como a diferença entre a energia cinética T e a energia potencial U,tem se:

$$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \underbrace{U(r)}_{U_{\text{grav}}}$$

Neste caso, $U(r)$ é a energia potencial que depende apenas da distância entre os dois corpos, r. Na maioria dos problemas de dois corpos, essa energia potencial é a energia potencial gravitacional, que tem a forma:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \tag{7}$$

Onde G é a constante da gravitação universal

Como a Lagrangiana depende das variáveis de posição e de suas derivadas temporais (velocidades), podemos usá-la para encontrar as equações de movimento do sistema.

Ao calcular a derivada parcial da Lagrangiana em relação a R_x (uma das componentes de $\vec{R}$), encontramos:

$$\frac{\partial L}{\partial R_x} = 0$$

Isso significa que a Lagrangiana não depende de R_x, o que nos leva à conclusão de que:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}_x} = \frac{d}{dt}(M\dot{R}_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{R}_x = \text{cte.}$$

De forma similar, temos:

$$\begin{cases} \dot{R}_x = \text{cte.} \\ \dot{R}_y = \text{cte.} \\ \dot{R}_z = \text{cte.} \\ \dot{\vec{R}} = \overrightarrow{\text{cte.}} \overset{!}{=} \vec{0} \end{cases}$$

Onde escolhemos o valor de $\vec{R}$ por não interferir na energia cinética do vetor $\vec{r}$, associado à posição relativa.

Essas equações mostram que o centro de massa do sistema se move com velocidade constante. Isso não interfere na energia cinética do vetor r, que está associado à posição relativa. Assim, podemos escolher uma R que seja constante sem perda de generalidade. A Lagrangiana então se simplifica para:

ficamos então com

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U(r)$$

o que simplifica nosso problema para agora **3 graus de liberdade** $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$.

Sendo necessário partir para o momento angular que é uma grandeza física que representa a quantidade de movimento de rotação que um corpo possui. Ele é dado pelo produto vetorial entre a posição r e o momento linear p do corpo:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad\qquad \vec{p} \equiv m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$$

$$\vec{L} = \vec{r_1} \times \vec{p_1} + \vec{r_2} \times \vec{p_2} = m_1(\vec{r_1} \times \dot{\vec{r_1}}) + m_2(\vec{r_2} \times \dot{\vec{r_2}})$$

Substituindo novamente as definições de $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$, e já cancelando os termos paralelos do produto vetorial, ficamos com

$$\vec{L} = m_1\left(\frac{-m_2}{M}\right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

que reduz para

$$\vec{L} = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}$$

Que é o momento angular associado à rotação relativa dos corpos.

Aplicando a definição de Torque, temos

$$\boxed{\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \Longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte.}$$

Que é o princípio da conservação do momento angular.

Supondo, sem perda de generalidade, que os vetores $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$ sejam coplanares ao plano xy.

$$\begin{cases} \vec{r} = \langle r_x, r_y, 0\rangle \\ \dot{\vec{r}} = \langle \dot{r}_x, \dot{r}_y, 0\rangle \end{cases}$$

$$\vec{L} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r_x & r_y & 0 \\ \dot{r}_x & \dot{r}_y & 0 \end{vmatrix} = \cdots = \langle 0, 0, L_z\rangle$$

Percebemos então, que o momento angular se conserva numa direção perpendicular ao plano de rotação. i.e. as órbitas são planares! O que nos permite reduzir o problema a **2 graus de liberdade** (x, y) ou (r, θ).

Vamos preferir utilizar as coordenadas polares, considerando que nosso movimento relativo ($\vec{r}$) é de rotação em torno de um ponto.

Pela transformação de coordenadas convencional, temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta$$

$$\dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta$$

Somando $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$, utilizando as identidades pitagóricas e cancelando os termos que se anulam, temos

$$T = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Agora retornando à lagrangiana,

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

Vemos que

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu r^2\dot{\theta} = \text{cte.} \equiv l$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \mu r\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\ddot{r}$$

Chegamos, finalmente às duas equações diferenciais paramétricas

$$\boxed{\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}} \tag{1}$$

$$\mu r^2\dot{\theta} = l \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), chegamos à chamada equação diferencial radial do problema de dois corpos reduzido

$$\mu\ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial U}{\partial r} \qquad \square$$

Essa equação diferencial, também conhecida como Equação de Binet, representa a equação de movimento para o problema de dois corpos em coordenadas polares. É a partir dessa equação que podemos encontrar as soluções analíticas para as órbitas dos corpos.

A solução da equação radial nos permite determinar a trajetória dos corpos em função do tempo. Dependendo da forma da função de potencial U(r), as soluções podem ser órbitas elípticas, parabólicas, ou hiperbólicas. Por exemplo, no caso de um potencial gravitacional, a solução geral é uma seção cônica (elipse, parábola ou hipérbole), o que explica a variedade de órbitas observadas no universo.

Começamamos definindo $u \equiv \dfrac{1}{r}$ e considerando $r(\theta(t))$.

Essa definição é útil porque facilita a manipulação matemática das equações de movimento, especialmente quando se trabalha com forças que depende inversamente do quadrado da distância $\frac{1}{r^2}$, como a força gravitacional.

Queremos expressar como a distância r varia ao longo do tempo t, considerando que r é uma função do ângulo θ que varia com o tempo:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

Percebemos que o operador $\frac{d}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}$, portanto

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \dot{\theta}^2\frac{d^2r}{d\theta^2} = \left(\frac{l}{\mu r^2}\right)^2\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

Observamos que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -u^2\frac{dr}{d\theta}$$

Portanto,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}$$

e utilizando a relação de $\frac{d}{dt}$, temos

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right) = \left(\frac{l}{\mu r^2}\right)\left(-\frac{l}{\mu}\right)\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{l^2u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Considerando $u = u(\theta)$, a EDO fica

$$-\frac{\mu l^2 u^2}{\mu^2} u'' = F + \frac{l^2}{\mu} u^3$$

$$\mu'' = \frac{\mu}{l^2 u^2} F - u$$

Sendo a força $F = -\frac{\gamma}{r^2} = -\gamma u^2$, característica das forças centrais gravitacional e elétrica, temos

$$u'' = -u - \frac{\mu\gamma}{l^2}$$

Que é uma equação para um oscilador harmônico forçado, cuja solução é da forma

$$u(\theta) = A\cos(\theta + \delta) + \frac{\mu\gamma}{l^2}$$

Com as constantes A e δ a serem determinadas pelas condições iniciais do problema. Vamos definir algumas constantes para nos ajudar na visualização dessa solução

$$\epsilon \equiv \frac{Al^2}{\mu\gamma} \qquad C \equiv \frac{l^2}{\gamma\mu}$$

$$u(\theta) = \frac{1}{C}(1 + \epsilon\cos\theta)$$

agora retornando ao raio $u \equiv \frac{1}{r}$

$$r(\theta) = \frac{C}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{8}$$

Essa é a equação polar de uma cônica. O tipo de cônica (círculo, elipse, parábola, ou hipérbole) é determinado pelo valor da excentricidade ε:

- Círculo: $\varepsilon = 0$
- Elipse: $0 < \varepsilon < 1$
- Parábola: $\varepsilon = 1$
- Hipérbole: $\varepsilon > 1$

Para reconhecermos essa curva de forma mais familiar, vamos retornar às coordenadas cartesianas

$$r + \epsilon r\cos\theta = C \quad \Rightarrow \quad r = C - \epsilon x$$

$$r^2 = C^2 + \epsilon^2 x^2 - 2C\epsilon x$$

$$x^2 + y^2 = C^2 + \epsilon^2 x^2 - 2C\epsilon x$$

$$x^2(1-\epsilon^2) + 2C\epsilon x + y^2 = C^2$$

Considerando o caso em que $\epsilon \neq 1$, temos

$$x^2 + \frac{2C\epsilon x}{1-\epsilon^2} + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} = \frac{C^2}{1-\epsilon^2}$$

Agora completando quadrados, temos

$$\left(x + \frac{C\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2 - \frac{C^2\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^2} + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} = \frac{C^2}{1-\epsilon^2}$$

$$\left(x + \frac{C\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} = \frac{C^2}{(1-\epsilon^2)^2}$$

Agora definindo

$$d \equiv \frac{C\epsilon}{1-\epsilon^2} \qquad a \equiv \frac{C}{1-\epsilon^2} \qquad b \equiv \frac{C}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

chegamos à familiar equação da elipse

$$\left(\frac{x+d}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \blacksquare$$

Onde d é a distância focal da elipse e $\epsilon = \frac{d}{a}$ sua excentricidade.

Lembrando que nossa elipse está com a origem em um dos focos (que corresponde ao centro de massa do binário) e que escolhemos $\delta = 0$ por simplicidade, mas sem perda de generalidade.

A equação encontrada representa a trajetória de dois corpos sob a influência de uma força central (como a força gravitacional). Dependendo da excentricidade , a órbita pode ser circular, elíptica, parabólica, ou hiperbólica. Esta análise é fundamental para a compreensão de muitos sistemas astronômicos, incluindo planetas orbitando estrelas ou satélites ao redor de planetas.

4 O problema de 3 corpos

A compreensão do problema dos três corpos está intimamente ligada à capacidade de determinar trajetórias precisas ou aproximadas de múltiplos corpos celestes sob influência gravitacional mútua. Por exemplo, considerando o problema de dois corpos em um sistema, hipoteticamente sem forças externas, aplica-se a Primeira Lei de Newton, que descreve a inércia — a tendência de um corpo de manter seu estado inicial de movimento ou repouso. Isso implica que, na ausência de forças externas, um corpo continuaria em sua trajetória indefinidamente.

Ao adicionar um terceiro corpo ao sistema, a complexidade aumenta significativamente. Isaac Newton, influenciado pelo trabalho de Johannes Kepler e suas leis orbitais, desenvolveu a Teoria da Gravitação Universal para descrever como dois corpos com massas interagem gravitacionalmente, orbitando em torno de um centro de massa comum. Esta teoria estabeleceu as bases para a compreensão dos movimentos orbitais planetários.

Entretanto, o problema dos três corpos é matematicamente desafiador e, até recentemente, considerado insolúvel de forma geral. Este problema envolve a interação gravitacional de três ou mais corpos, como planetas, estrelas ou satélites, onde cada corpo influencia e é influenciado pelos outros. As interações gravitacionais entre os corpos podem levar a comportamentos caóticos e imprevisíveis ao longo do tempo, dificultando a determinação de órbitas precisas sem o uso de simulações computacionais avançadas.

No século XVIII, Joseph-Louis Lagrange desenvolveu métodos analíticos que permitiram encontrar soluções para casos especiais do problema dos três corpos, como o caso dos corpos formando um triângulo equilátero. Pierre-Simon Laplace contribuiu significativamente com seus métodos em teoria dos potenciais e teoria das perturbações, aplicados para entender as influências mútuas entre os corpos e prever suas órbitas ao longo do tempo.

No entanto, foi somente com os avanços da mecânica estatística e teoria do caos no século XX que se começou a entender melhor os sistemas de três corpos. Ernst Bruns e Henri Poincaré demonstraram que não há solução analítica geral para o problema, devido à sensibilidade às condições iniciais e ao comportamento caótico das órbitas[4].

Recentemente, cientistas como Nicholas Stone e Nathan Leigh conseguiram transformar a natureza caótica das interações de três corpos em uma ferramenta útil, ao mapear regiões no espaço de fase onde ejeções de corpos são prováveis. Isso permitiu compreender melhor como sistemas de três corpos evoluem ao longo do tempo, explorando todas as configurações possíveis dentro de certas restrições físicas.

Portanto, o estudo do problema dos três corpos não só desafia os limites da matemática e da física teórica, mas também impulsiona avanços tecnológicos significativos em astronomia, navegação espacial, dinâmica de fluidos e cosmologia.

A teoria do Caos é desenvolvida em estudos de diversas áreas como física, filosofia, astronomia e filosofia. Sendo aplicada em sistemas caóticos, que são caracterizados como emergência, que é um termo matemático, que indica padrões de problemas complexos formados por objetos simplórios. Sistemas caóticos são uma subdivisão dos sistemas dinâmicos, que são sistemas que mudam ao longo do tempo, sendo representados por vetores em um certo período de tempo. Essas mudanças são simuladas por leis naturais ou equações diferenciais mostrando como o sistema evolui.

[4](SPACE, 2020) e (PANUCCI-TED-ED, 2020)

O problema de 3 corpos, por sua vez, se caracteriza como sistema caótico não linear. A lei básica que determina o estado futuro do problema caótico é a sua dependência das condições iniciais, um exemplo clássico é o "efeito borboleta"criado por (Edward Lorenz) que ilustra : mesmo o simples bater de asas de uma borboleta pode causar efeitos catastróficos. Essa metáfora por sua vez desafia a mecânica clássica de Newton.

Esses sistemas são estritamente deterministas (determinismo, em meio científico, surgiu a partir dos estudos de Isaac Newton que mais a frente estabeleceu a física newtoniana, publicando o livro Principia que formulou as leis de movimento e gravitação, baseando-se na tese de que o estado atual é consequência de ações anteriores e condições específicas), considerando o conceito de gravitação e a órbita de um planeta como algo previsível. porém, mais a frente ele descobriu que existem instabilidades, que chamamos de sensibilidade às condições iniciais, significando que as perturbações (mínimas mudanças do curso previsto) podem mudar completamente os resultados futuros. O'Que nos impossibilita de obter uma previsão absoluta, conseguindo calcular apenas probabilidades do que possivelmente virá a acontecer.

No presente contexto, por mais que os sistemas caóticos sejam determinantes e similares aos sistemas determinísticos eles possuem diferenças entre os determinísticos. Que são elas: as possíveis previsibilidades, em sistemas determinista a previsibilidade é alta tornando o futuro do sistema totalmente determinado pelo seu estado atual, sem qualquer aleatoriedade, de modo que pequenas mudanças não tem efeitos dramáticos no resultado do sistema, dando como exemplo: um corpo frio é colocado próximo a corpos aquecidos o corpo frio irá absorver o calor independentemente se movemos o corpo levemente . Entretanto em sistemas caóticos a previsibilidade é limitada no tempo pois a alta sensibilidade a condições iniciais implica que previsões precisas a longo prazo são praticamente impossíveis. O seu comportamento temporal é variado e extremamente difícil de ser previsto, sendo praticamente imprevisível , mesmo que sejam governados por leis deterministas. Os descrevendo como fatores "deterministicamente aleatórios", por isso esses sistemas são tão complexos e raros no mundo real.

Modelar um problema de caos envolve: descrever um sistema dinâmico que apresenta comportamento caótico. Devemos primeiro definir o problema indicando as variáveis do problema, traduzi-lo em equações diferenciais discretas analisando a dinâmica linear do presente problema, então aplicamos um modelo matemático.

No caso do problema de 3 corpos utilizaremos equações diferenciais ordinárias ou Edo's , que são equações compostas por derivadas, que são taxas de variação instantânea de y em relação ao ponto x, aparentes em funções $y = f(x)$, de uma função desconhecida da variável. O *three body problem* (3BP) é definido como um problema complexo, não linear, que é frequentemente associado com oscilador caótico por apresentar dinâmica complexa e caótica, o que significa que o comportamento das órbitas pode ser imprevisível. Esse tipo de oscilador se diferencia de osciladores harmônicos simples de modo, que podem ser descritos por equações diferenciais não lineares. Essa complexidade faz com que o problema dos três corpos, quando os corpos têm interações gravitacionais mútuas, seja um exemplo clássico de sistema dinâmico caótico. Após esse processo devemos realizar simulações utilizando o modelo escolhido, então aplicamos o mesmo em sistemas computacionais como Python, iremos analisar o comportamento inicial e Constância do problema.

O objetivo da modelagem é gerenciar o sistema do modo mais preciso possível. Após elaborar a modelagem do problema é possível obter um atrator, um conjunto de comportamentos e características que evoluem para um sistema dinâmico. Atratores podem ter três classificações: Atrator periódico – o objeto poderá se mover sobre uma curva fechada de modo indefinido, atrator fixo – é fixado a uma superfície por decorrência dos efeitos da gravidade, Atrator estranho – esse tipo de atrator não apresenta nenhuma das outras descrições, porém é contínuo e caótico. Os sistemas caóticos mais complexos, que são mais instáveis e aleatórios, possuem os três tipos de atratores por conta das suas condições iniciais e a sua constante imprevisibilidade, devido à dificuldade de precisão, ao realizar os cálculos.

4.1 Contribuições Históricas

Tivemos três importantes cientistas que contribuíram indiretamente para o problema dos três corpos: Tales de Mileto, Johannes Kepler e Galileu Galilei.

Uma das contribuições de Tales de Mileto foi a introdução de conceitos geométricos e matemáticos para explicar fenômenos naturais, como eclipses solares e lunares. Além disso, Tales é conhecido por seus estudos sobre geometria, particularmente sua descoberta de propriedades geométricas, como a semelhança de triângulos e a teoria dos círculos concêntricos. Embora esses estudos não estejam diretamente relacionados à mecânica celeste, as ideias e contribuições de Tales para a matemática e a filosofia natural ajudaram na base do pensamento científico, incluindo o estudo do movimento dos corpos celestes.

Galileu foi o primeiro a usar um telescópio para observar o céu noturno. Suas observações revelaram as fases de Vênus, as montanhas da Lua, as luas de Júpiter e as manchas solares, entre outras descobertas. Essas observações forneceram evidências diretas de que não tudo orbitava em torno da Terra, como acreditava-se na época. A descoberta das luas de Júpiter foi particularmente importante, pois mostrou que não apenas a Terra tinha um satélite natural, mas outros corpos celestes também. Isso ajudou a estabelecer a ideia de que a Terra não era o centro do universo e contribuiu para o desenvolvimento do modelo heliocêntrico de Copérnico.

Kepler formulou três leis que descrevem o movimento dos planetas ao redor do Sol:

1ª Lei de Kepler: as órbitas planetárias são elipses com o Sol em um dos focos, o que significa que os planetas seguem uma espécie de "oval"em sua órbita ao redor do Sol, em vez de um círculo perfeito.

2ª Lei de Kepler: os planetas percorrem áreas iguais em tempos iguais. Isso explica que quando um planeta está mais próximo do Sol em sua órbita elíptica, ele se move mais rapidamente, cobrindo uma área maior em um determinado período de tempo. Quando está mais distante do Sol, ele se move mais devagar, cobrindo uma área menor em um período de tempo semelhante.

3ª Lei de Kepler: o quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita. Isso significa que quanto mais distante um planeta estiver do Sol em sua órbita elíptica, mais tempo levará para completar uma órbita completa, seguindo um padrão específico em relação ao tamanho da órbita.

Não só as leis de Kepler, como também os estudos dos outros cientistas citados, forneceram uma base matemática sólida para entender o movimento planetário, o que foi fundamental para o desenvolvimento posterior da física e da astronomia.

Referências

ANSYS. **Métodos Numéricos Analíticos**. 2017. Acesso em: 02 abr. 2024. Disponível em: <https://www.esss.com/blog/simulacao-numerica-metodo-analitico-experimental-na-engenharia/>.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2014.

CLAGETT, M. **Ancient Egyptian Science: A Source Book**. Philadelphia: American Philosophical Society, 1999. v. 3.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Conceitos e Aplicações da Análise de Elementos Finitos**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1989.

FEYNMAN, R. P. **The Character of Physical Law**. Cambridge, MA: MIT Press, 1967.

KARPLUS, M.; MCCAMMON, J. A. Molecular dynamics simulations of biomolecules. **Nature Structural Biology**, Nature Publishing Group, v. 9, n. 9, p. 646–652, 2002.

MENDES, T. **Métodos Numéricos**. 2009. Acesso em: 02 abr. 2024. Disponível em: <https://www.ifsc.usp.br/~lattice/oldlattice/minicurso_fiscomp.pdf>.

NEUMANN, J. von. Various techniques used in connection with random digits. In: HOUSEHOLDER, A. S.; FORSYTHE, G. E.; GERMOND, H. H. (Ed.). **Monte Carlo Method**. Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1951. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, v. 12), p. 36–38.

PANUCCI-TED-ED, F. **Newton's three-body problem explained**. 2020. Disponível em: <https://youtu.be/D89ngRr4uZg?si=RKffg_OGc5L8Nb1A>.

ROACHE, P. J. **Verification and Validation in Computational Science and Engineering**. Albuquerque, NM: Hermosa Publishers, 1998.

SPACE, P. **Resolvendo o problema dos três corpos**. 2020. Disponível em: <https://youtu.be/et7XvBenEo8?si=CHgrerpupsJbg29c>.