بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین سری دوم

۱. پایداری، حافظه‌دار بودن و علّی بودن سیستم‌هایی با پاسخ ضربه زیر را بررسی نمایید:

$h(t) = e^{j5t}u\left(t+1\right)$

$h\left[n\right] = 2^{n}u\left[-n\right]$

۲. سیستم‌های خطی در حالت کلی زمانی پایدار هستند که بدون توجه به زمان اعمال ورودی ضربه، انتگرال پاسخ ضربه محدود باشد. پایداری سیستم زیر را بررسی نمایید:

$h\left(t,\tau\right) = t\delta\left(t-\tau\right)$

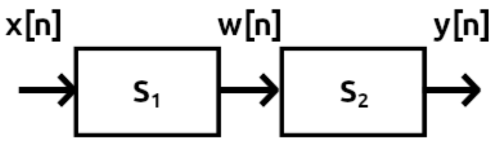
۳. سیستم‌های خطی با پاسخ ضربه زیر را از لحاظ تغییرپذیری با زمان، پایداری، علّی بودن و حافظه‌دار بودن بررسی نمایید:

$h\left(t,\tau\right) = \left(t-\tau\right)^{2}u\left(\tau-t\right)$

$h\left[n,k\right] = n^{2}+k^{2}-2nk$

$h\left(t,\tau\right) = \tau^{2}\delta\left(t-\tau\right)$

۴. اتصال سری دو سیستم به صورت شکل زیر را در نظر بگیرید:



سیستم S1 خطی، تغییرناپذیر با زمان و علی بوده و

$w\left[n\right] = \frac{1}{2}w\left[n-1\right]+x\left[n\right]$

سیستم S2 هم خطی، تغییرناپذیر با زمان و علی بوده و

$y\left[n\right] = \alpha y\left[n-1\right]+\beta w\left[n\right]$

معادله تفاضلی بین y و x بصورت زیر می‌باشد:

$$y\left[n\right]=-\frac{1}{8}y\left[n-2\right]+\frac{3}{4}y\left[n-1\right]+x\left[n\right]$$

الف) آلفا و بتا را بدست آورید.

ب) پاسخ ضربه اتصال سری سیستمهای S1 و S2 را بیابید.

۵. گزاره‌های زیر در مورد **<u>سیستم‌های LTI</u>** صحیح است یا غیر صحیح؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر پاسخ ضربه یک سیستم متناوب و غیر صفر باشد، سیستم ناپایدار است.

ب) سیستم وارون یک سیستم LTI علی همیشه علی است.

ج) اگر به ازای هر مقدار n قدر مطلق پاسخ ضربه یک سیستم گسسته h[n] محدود باشد، سیستم دارای پاسخ ضربه پایدار است.

د) اگر طول پاسخ ضربه یک سیستم گسسته در زمان محدود باشد، سیستم پایدار است.

هـ) اگر یک سیستم LTI علی باشد، سیستم پایدار است.

و) ترکیب متوالی یک سیستم علی و غیرعلی لزوما غیر علی است.

۶. با استفاده از رابطه کانولوشن نشان دهید اگر پاسخ ضربه یک سیستم **پیوسته** خطی تغییرناپذیر با زمان در لحظه غیر صفر، مقدار داشته باشد، این سیستم حافظه‌دار است.

۷. با استفاده از رابطه کانولوشن نشان دهید اگر پاسخ ضربه یک سیستم **پیوسته** خطی تغییرناپذیر با زمان برای لحظات قبل از صفر دارای مقدار باشد، آن سیستم غیرعلی می‌باشد.

۸. کانولوشن سیگنال‌های زیر را بدست آورید.

الف)

$$h\left(t\right)=u\left(t-1\right)-u\left(t-3\right)$$
$$x\left(t\right)=e^{-t}u\left(t\right)$$

ب)

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u[n-3]$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-6} u[n]$$

ج)

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{-n-2} u[-n]$$

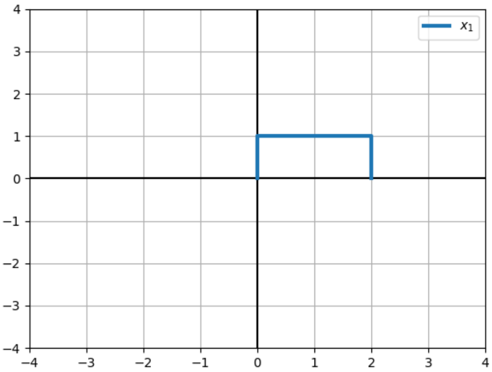
$$x[n] = -u[n-4]$$

د)

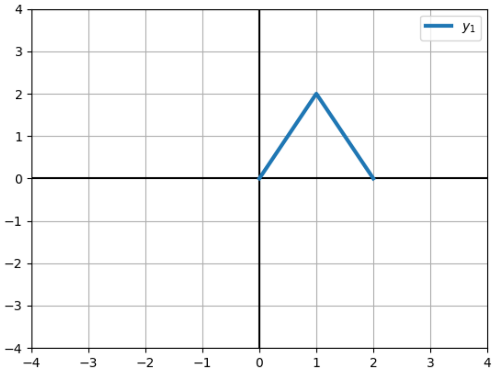
$$h(t) = tu(-t)$$

$$x(t) = sin(-t-1)\,u(-t-1)$$

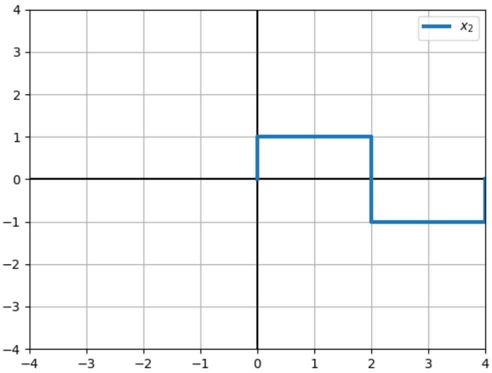
۹. فرض کنید پاسخ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان به ورودی x_1 برابر با y_1 می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی‌های x_2 و x_3 را با بسط آن‌ها بر اساس سیگنال x_1 و نمونه‌های تأخیریافته آن بیابید.



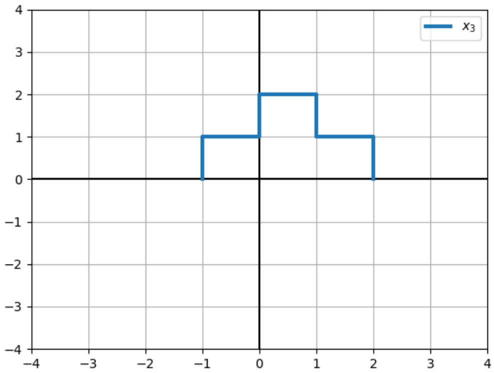
x_1



y_1



x_2



x_3

۱۰. اگر

$$h_1[n] = 0, \quad n < n_1$$
$$h_2[n] = 0, \quad n < n_2$$

ثابت کنید کانولوشن این دو سیگنال برای اندیس‌های

$$n < n_1 + n_2$$

برابر صفر خواهد بود.

۱۱. اگر

$$h_1[n] = 0, \quad n > n_1$$
$$h_2[n] = 0, \quad n > n_2$$

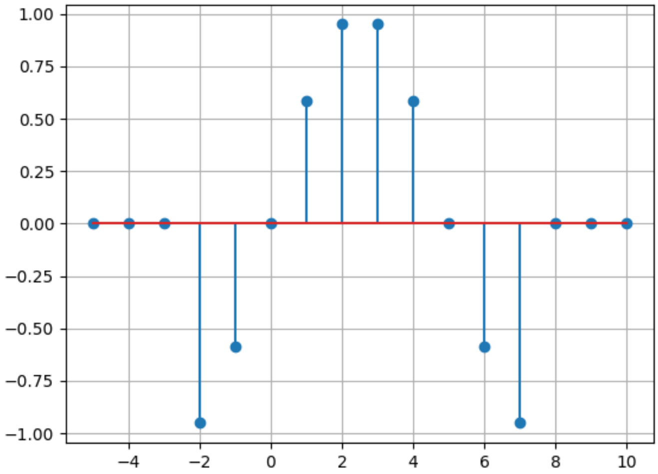
ثابت کنید کانولوشن این دو سیگنال برای اندیس‌های

$$n > n_1 + n_2$$

برابر صفر خواهد بود.

۱۲. با استفاده از نتایج سوالات ۹ و ۱۰ نشان دهید اگر تعداد اندیس‌های بازه‌ای از زمان که دو سیگنال $h_1[n]$ و $h_2[n]$ در آن‌ها دارای مقدار می‌باشند به ترتیب برابر L_1 و L_2 باشد، تعداد اندیس‌های بازه‌ای از زمان که کانولوشن این دو سیگنال دارای مقدار خواهد بود، برابر $L_1 + L_2 - 1$ است.

* برای نمونه در سیگنال زیر تعداد اندیس‌های بازه‌ای از زمان که سیگنال دارای مقدار می‌باشد برابر ۱۰ است. بخشی از سیگنال که دارای مقدار است از اندیس زمانی ۲ــ شروع و تا اندیس زمانی ۷ ادامه یافته است.



۱۳. فرض کنید:

$$y\left(t\right)=x\left(t\right)*h\left(t\right)$$

$$S_y=\int_{-\infty}^{\infty}y\left(t\right)dt,\quad S_x=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t\right)dt,\quad S_h=\int_{-\infty}^{\infty}h\left(t\right)dt$$

نشان دهید:

$$S_y=S_x.S_h$$

۱۴. کانولوشن دو سیگنال متناوب زیر را حساب کنید:

$$h\left(t\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(-1\right)^{k+1}\delta\left(t-k\right)$$

$$x\left(t\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u\left(t-2k\right)-u\left(t-2k-1\right)$$