بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین سری پنجم

۱.

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{-2|t-1|} \\
X_1(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-1|} e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{1} e^{2(t-1)} e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{1}^{\infty} e^{-(j\omega+2)t+2} dt + \int_{-\infty}^{1} e^{(2-j\omega)t-2} dt \\
&= -\frac{e^2}{-j\omega-2} e^{-(j\omega+2)t}\Big|_1^{\infty} + \frac{e^{-2}}{2-j\omega} e^{(2-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{1} \\
&= \frac{e^{j\omega}}{j\omega+2} + \frac{e^{-j\omega}}{2-j\omega} = \frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \frac{d}{dt}\left(u(-2-t) + u(t-2)\right) \\
&= -\delta(t+2) + \delta(t-2) \\
X_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\delta(t+2) + \delta(t-2)\right) e^{-j\omega t} dt
\end{aligned}$$

با استفاده از خاصیت غربالی ضربه:

$$= -e^{-j\omega(-2)} + e^{-j\omega(2)}$$

با توجه به اینکه:

$$sin(2\omega) = \frac{e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}}{2j} \rightarrow 2jsin(2\omega) = e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}$$

$X_2(j\omega)$ برابر خواهد بود با:

$$X_2(j\omega) = -2jsin(2\omega)$$

۲.

$$x(t) = 1 + cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$$
$$\omega_0 = 6\pi,\ T = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\left(e^{j(6\pi t + \frac{\pi}{8})} - e^{-j(6\pi t + \frac{\pi}{8})}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}}e^{j6\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}e^{-j6\pi t}$$

ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ به شکل زیر خواهند بود:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}},\ a_{-1} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}$$

بر اساس رابطه داده شده در روی سؤال خواهیم داشت:

$$X(j\omega) = 2\pi a_0\delta(\omega) + 2\pi a_1\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi a_{-1}\delta(\omega + \omega_0)$$
$$= 2\pi\delta(\omega) + \pi e^{j\frac{\pi}{8}}\delta(\omega - 6\pi) + \pi e^{-j\frac{\pi}{8}}\delta(\omega + 6\pi)$$

.۳

$$X_1(j\omega) = u(\omega) - u(\omega - 2)$$
$$X_1^*(-j\omega) = u^*(-\omega) - u^*(-\omega - 2)$$
$$= u(-\omega) - u(-\omega - 2) \neq u(\omega) - u(\omega - 2)$$
$$X_1(j\omega) \neq X_1^*(-j\omega)$$

نتیجه می‌گیریم $x_1(t)$ غیرحقیقی می‌باشد.

$$\begin{cases} X_1(j\omega) \neq X_1(-j\omega) \\ X_1(j\omega) \neq -X_1(-j\omega) \end{cases}$$

نه زوج است و نه فرد.

$$X_2(j\omega) = cos(\omega)sin(\frac{\omega}{2})$$
$$X_2^*(-j\omega) = cos(-\omega)sin(\frac{-\omega}{2}) = -cos(\omega)sin(\frac{\omega}{2})$$
$$X_2(j\omega) \neq X_2^*(-j\omega)$$

نتیجه می‌گیریم $x_2(t)$ غیر حقیقی می‌باشد.

$$X_2(-j\omega) = cos(-\omega)sin(-\frac{\omega}{2}) = -cos(\omega)sin(\frac{\omega}{2}) = -X_2(j\omega)$$

نتیجه می‌گیریم $x_2(t)$ تابعی فرد است.

با توجه به فرد بودن و غیرحقیقی بودن $x_2(t)$ نتیجه می‌گیریم این سیگنال موهومی خالص است.

.۴

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + 3}$$
$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}$$
$$y(t) = e^{-3t}u(t) + e^{-4t}u(t) \rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3} + \frac{1}{j\omega + 4}$$
$$= \frac{2j\omega + 7}{(j\omega + 3)(j\omega + 4)}$$
$$X(j\omega) = \frac{(2j\omega + 7)(j\omega + 3)}{(j\omega + 3)(j\omega + 4)} = 2 - \frac{1}{j\omega + 4}$$
$$x(t) = 2\delta(t) - e^{-4t}u(t)$$

.۵

$$F^{-1}\left\{(1 + j\omega)X(j\omega)\right\} = Ae^{-2t}u(t) \rightarrow X(j\omega) = \frac{F\left\{Ae^{-2t}u(t)\right\}}{1 + j\omega}$$
$$= \frac{A}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)}$$
$$= \frac{A}{1 + j\omega} - \frac{A}{2 + j\omega}$$
$$x(t) = Ae^{-t}u(t) - Ae^{-2t}u(t)$$

به عبارتی ما به دنبال حل معادله دیفرانسیلی زیر بودیم:

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = Ae^{-2t}u(t)$$

در ادامه برای پیدا کردن ضریب A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|X(j\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = 2\pi$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(Ae^{-t}u(t) - Ae^{-2t}u(t)\right)^2 dt = 1 \rightarrow \frac{A^2}{12} = 1 \rightarrow A = 2\sqrt{3}$$

.۶

$$F\left\{\delta(t)\right\}=1\rightarrow F\left\{\frac{1}{|\alpha|}\delta(t)\right\}=\frac{1}{|\alpha|}$$
$$F\left\{\delta(t)\right\}=1\rightarrow F\left\{\delta(\alpha t)\right\}=\frac{1}{|\alpha|}F\left\{\delta(t)\right\}_{\omega\rightarrow\frac{\omega}{\alpha}}=\frac{1}{|\alpha|}$$

دو سیگنال تبدیل فوریه برابر دارند، پس نتیجه می‌گیریم تساوی برقرار است.

.۷

با توجه به اینکه عبارتی که می‌خواهیم از آن عکس فوریه بگیریم، نمایی می‌باشد از آن مشتق می‌گیریم. چون می‌دانیم مشتق توابع نمایی به صورت یک ضریب در خودشان ظاهر می‌شود.

$$X(j\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$
$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega}=-\frac{1}{2\pi}\omega e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}\rightarrow\frac{dX(j\omega)}{d\omega}=-\frac{\omega}{2\pi}X(j\omega)$$
$$=\frac{j}{2\pi}j\omega X(j\omega)$$

از طرفین عبارت بالا عکس فوریه می‌گیریم (دقت داشته باشید که $F\left\{-jtx(t)\right\}=\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$):

$$-jtx(t)=\frac{j}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt}\rightarrow tx(t)=-\frac{1}{2\pi}\frac{dx(t)}{dt}$$

معادله دیفرانسیلی بالا را حل می‌کنیم:

$$-2\pi tdt=\frac{dx(t)}{x(t)}\rightarrow-\pi t^2=ln\left(x(t)\right)+c$$
$$\rightarrow x(t)=ce^{-\pi t^2}\rightarrow x(0)=c$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}d\omega=1$$
$$x(t)=e^{-\pi t^2}$$

.۸

مانند مثال بالا عمل کرده و از سیگنال مشتق گرفته سپس تبدیل فوریه آن به دست می‌آوریم:

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \to \frac{dx(t)}{dt} = -2\pi t e^{-\pi t^2}$$
$$\to \frac{dx(t)}{dt} = -2\pi t x(t)$$
$$= -2j(-j)\pi t x(t)$$
$$j\omega X(j\omega) = -2\pi j \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \to \omega d\omega = -2\pi \frac{dX(j\omega)}{X(j\omega)}$$
$$\to -\frac{\omega^2}{4\pi} = ln\left(X(j\omega)\right) + c$$
$$\to cX(j\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$
$$X(j0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \to c = 1$$
$$X(j\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

.۹

$$x(t) \to X(j\omega) \Longleftrightarrow X(t) \to 2\pi x(-j\omega)$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

با تغییر ω و t خواهیم داشت:

$$x(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j\omega t} dt$$

با تغییر ω به $-\omega$ نیز خواهیم داشت:

$$2\pi x(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

.۱۰

$$y(t) + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} = 4x(t-1) + 2\frac{dx(t)}{dt}$$
$$Y(j\omega) + 3(j\omega)^2 Y(j\omega) = 4e^{-j\omega}X(j\omega) + 2(j\omega)X(j\omega)$$
$$Y(j\omega)\left(1 + 3(j\omega)^2\right) = X(j\omega)\left(4e^{-j\omega} + 2j\omega\right)$$
$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{4e^{-j\omega} + 2j\omega}{1 + 3(j\omega)^2}$$

.۱۱

$$x(t) = cos\ t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$$
$$X(j\omega) = \pi \left(\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\right)$$

$$h_1(t) = u(t)$$
$$H_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$
$$Y_1(j\omega) = H_1(j\omega)X(j\omega) = \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right)$$

دقت کنید که از خاصیت غربالی سیگنال ضربه استفاده شده است. می‌توانیم ضرایب را با جاگذاری $\omega = \pm 1$ در رابطه $H_1(j\omega)$ به دست آوریم.

$$y_1(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right) = sin\ t$$

$$h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t)$$
$$H_2(j\omega) = -2 + \frac{5}{j\omega+2}$$
$$Y_2(j\omega) = H_2(j\omega)X(j\omega) = \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right)$$

مشابه حالت قبل از خاصیت غربالی سیگنال ضربه استفاده شده است.

$$y_2(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right) = sin\ t$$

$$h_3(t) = 2te^{-t}u(t)$$
$$H_3(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+1)^2}$$

کاری که قسمت‌های قبل توصیف شد، به طور جزئی در این قسمت نوشته شده است:

$$\begin{aligned} Y_3(j\omega) &= H_3(j\omega)X(j\omega) \\ &= \frac{2\pi}{(j\omega+1)^2}\left(\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\right) \\ &= \frac{2\pi}{(-j+1)^2}\delta(\omega+1) + \frac{2\pi}{(j+1)^2}\delta(\omega-1) \\ &= \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right) \end{aligned}$$
$$y_3(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right) = sin\ t$$