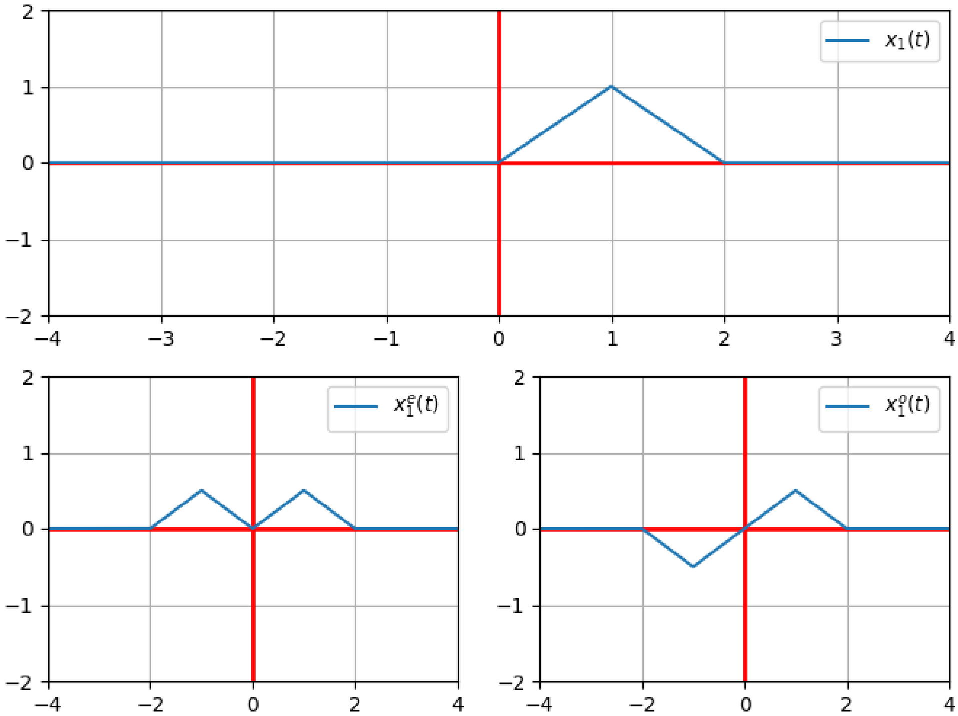
بسم اللّه الرّحمن الرّحیم
تمرین سری اول

۱.

$$x_1\left(t\right) = r\left(t\right) - 2r\left(t-1\right) + r\left(t-2\right)$$

$$x_1^e\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(r\left(t\right) - 2r\left(t-1\right) + r\left(t-2\right) + r\left(-t\right) - 2r\left(-t-1\right) + r\left(-t-2\right)\right)$$

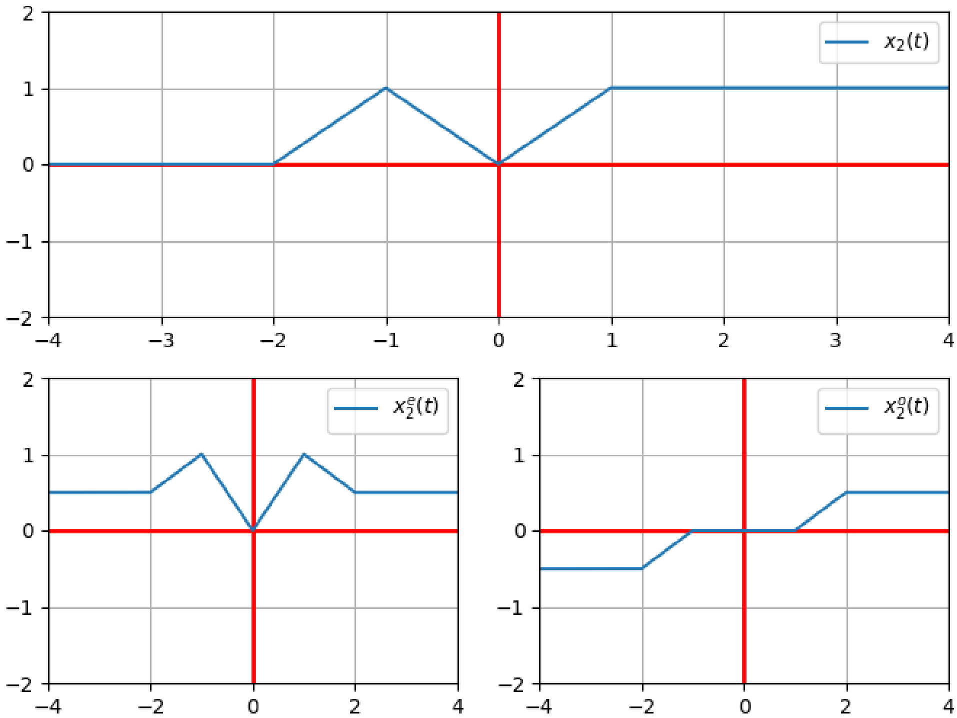
$$x_1^o\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(r\left(t\right) - 2r\left(t-1\right) + r\left(t-2\right) - r\left(-t\right) + 2r\left(-t-1\right) - r\left(-t-2\right)\right)$$



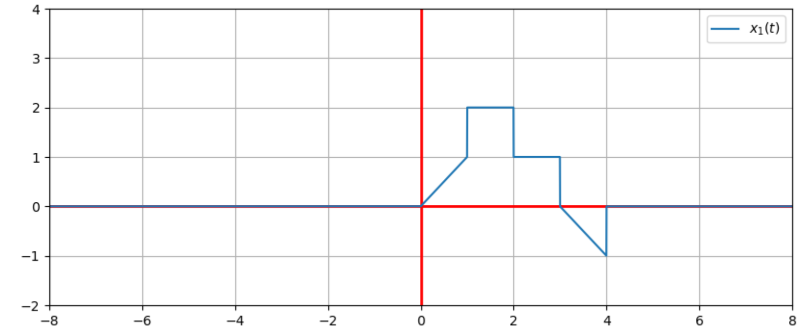
$$x_2(t) = r(t+2) - 2r(t+1) + 2r(t) - r(t-1)$$

$$x_2^e(t) = \frac{1}{2}\left(r(t+2) - 2r(t+1) + 2r(t) - r(t-1) + r(-t+2) - 2r(-t+1) + 2r(-t) - r(-t-1)\right)$$

$$x_2^o(t) = \frac{1}{2}\left(r(t+2) - 2r(t+1) + 2r(t) - r(t-1) + -r(-t+2) + 2r(-t+1) - 2r(-t) + r(-t-1)\right)$$

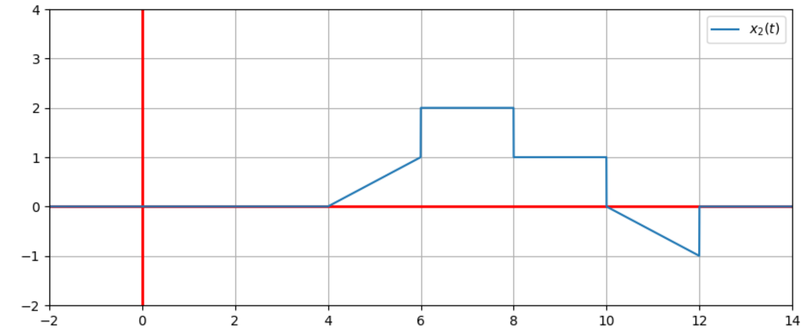


۲.



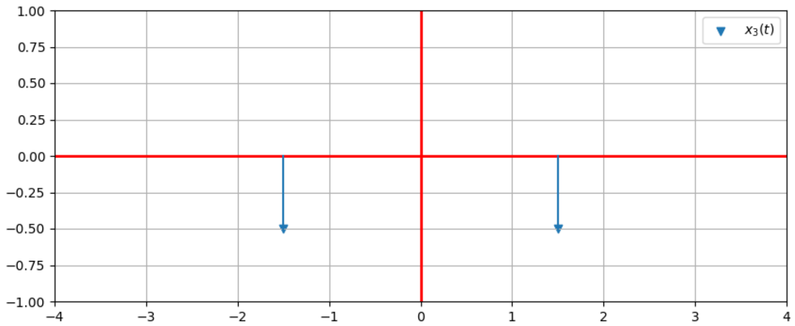
$x_1(t)$
4
3
2
1
0
−1
−2
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

(الف)



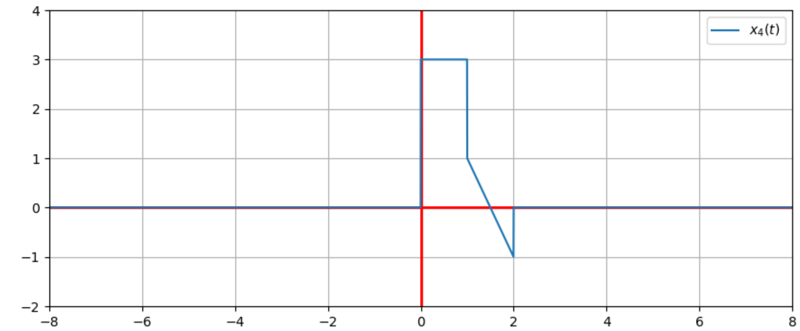
$x_2(t)$
4
3
2
1
0
−1
−2
−2
0
2
4
6
8
10
12
14

(ب)



$x_3(t)$
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

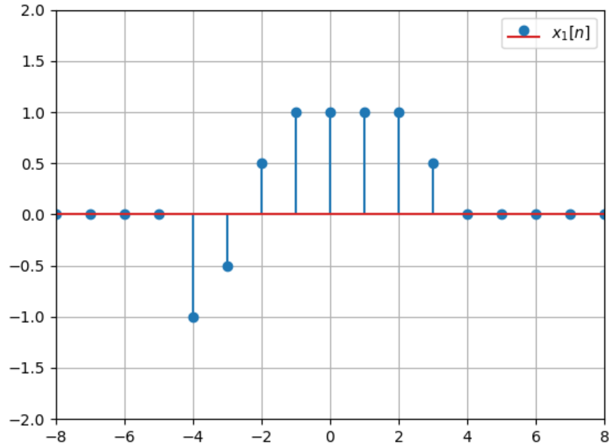
(ج)



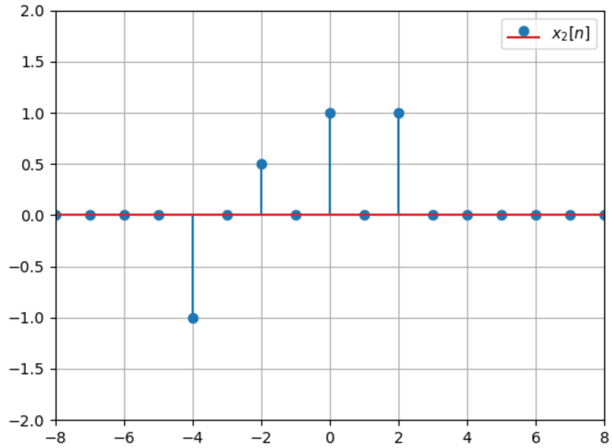
$x_4(t)$
4
3
2
1
0
−1
−2
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

(د)

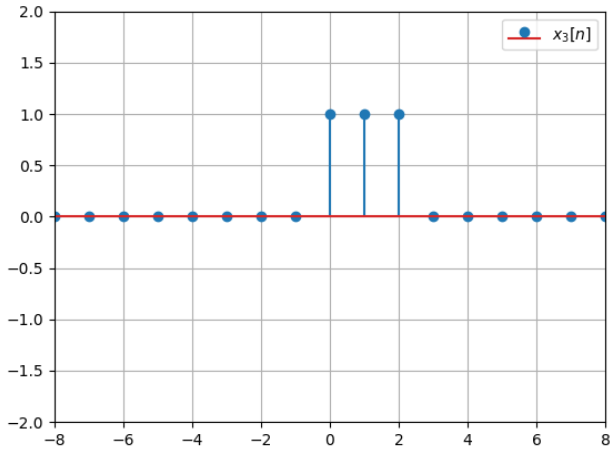
۳.



(الف)



(ب)



(ج)

۴.

الف)

$$x[n+N_0]=x[n] \rightarrow x\left((n+N_0)T\right)=x(nT)$$
$$\rightarrow e^{j\omega_0(n+N_0)T}=e^{j\omega_0 nT}$$
$$\rightarrow e^{j\omega_0 N_0 T}=1 \rightarrow \omega_0 N_0 T=2k\pi$$
$$\rightarrow N_0 T=\frac{2k\pi}{\omega_0} \rightarrow N_0 T=kT_0$$

اگر کوچکترین k ممکن را انتخاب کنیم تا N_0 دوره تناوب پایه باشد، خواهیم داشت:

$$\rightarrow \frac{T}{T_0}=\frac{k}{N_0}, \quad gcd\left(k,N_0\right)=1$$

ب)

از نتیجه قسمت (الف) استفاده می‌کنیم. در این حالت ما نمی‌دانیم p و q نسبت به هم اول هستند یا خیر. برای اینکه نسبت به هم اول باشند، باید آن‌ها را به بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد تقسیم کنیم:

$$\frac{T}{T_0}=\frac{p/gcd(p,\ q)}{q/gcd(p,\ q)}=\frac{k}{N_0}$$

$$N_0=\frac{q}{gcd(q,p)},\ \Omega_0=2\pi\frac{gcd(p,q)}{q}$$

ج) یک دوره تناوب $x[n]$ برابر با N_0 نمونه است. برای داشتن هر نمونه به اندازه دوره تناوب نمونه‌برداری یعنی T صبر می‌کنیم. پس N_0T برابر با زمان لازم در سیگنال پیوسته برای طی یک دوره تناوب از سیگنال گسسته است. به عبارتی سوال از ما می‌پرسد N_0T چند برابر T_0 است.

$$k=\frac{p}{gcd(p,q)}$$

.۵

$$E_{x_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mid x_1 \mid^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-4t} dt = -\frac{1}{4} e^{-4t} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{4}$$
$$P_{x_1} = 0$$

$$E_{x_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid x_2[n] \mid^2 = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ... = \frac{4}{3}$$
$$P_{x_2} = 0$$

$$E_{x_3} = \infty$$
$$P_{x_3} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mid x_3(t) \mid^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} t \Big|_{-T}^{T}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \times 2T = 1$$

$$E_{x_4} = \infty$$
$$P_{x_4} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} \mid x_4[n] \mid^2$$

چون سیگنال متناوب است، در یک دوره تناوب توان را محاسبه می‌نماییم.

$$x_4[n+N_0] = x_4[n] \to cos\left(\frac{\pi}{4}(n+N0)\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \to \frac{\pi}{4}N_0 = 2\pi \to N_0 = 8$$
$$P_{x_4} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \mid x_4[n] \mid^2$$
$$= \frac{1}{8}\left(x_4^2[0] + x_4^2[\frac{\pi}{4}] + x_4^2[\frac{\pi}{2}] + x_4^2[\frac{3\pi}{4}] + x_4^2[\pi] + x_4^2[\frac{5\pi}{4}] + x_4^2[\frac{3\pi}{2}] + x_4^2[\frac{7\pi}{4}]\right)$$
$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

.۶

$$x_1[-n] = -x_1[n]$$
$$x_2[-n] = x_2[n]$$
$$x[n] = x_1[n] \times x_2[n] \rightarrow x[-n] = x_1[-n] \times x_2[-n] = (-x_1[n]) \times (x_2[n]) = -x[n]$$

.۷

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_o[n] + x_e[n])^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x_o^2[n] + x_e^2[n] + 2x_e x_o\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o[n]x_e[n]\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن اینکه حاصل ضرب یک سیگنال فرد در یک سیگنال زوج یک سیگنال فرد است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o[n]x_e[n] &= \sum_{n=-\infty}^{-1} x_o[n]x_e[n] + x_o[0]x_e[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x_o[n]x_e[n] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} x_o[n]x_e[n] + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_o[n]x_e[n] = 0\end{aligned}$$

پس در نهایت:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n]$$

.۸

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$y(t) \mid_{x(t)=x_1(t)+x_2(t)} \stackrel{?}{=} y_1(t) + y_2(t)$$

$$y_1(t) = \begin{cases} \frac{x_1(t)}{|x_1(t)|} & x_1(t) \neq 0 \\ 0 & x_1(t) = 0. \end{cases} \quad , \quad y_2(t) = \begin{cases} \frac{x_2(t)}{|x_2(t)|} & x_2(t) \neq 0 \\ 0 & x_2(t) = 0. \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{x_1(t)+x_2(t)}{|x_1(t)+x_2(t)|} & x_1(t) + x_2(t) \neq 0 \\ 0 & x_1(t) + x_2(t) = 0. \end{cases}$$

$$y(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$$

غیرخطی

$$y(t) \mid_{x(t-t_0)} \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

$$y(t) \mid_{x(t-t_0)} = \begin{cases} \frac{x(t-t_0)}{|x(t-t_0)|} & x(t - t_0) \neq 0 \\ 0 & x(t - t_0) = 0. \end{cases}$$

$$y(t - t_0) = \begin{cases} \frac{x(t-t_0)}{|x(t-t_0)|} & x(t - t_0) \neq 0 \\ 0 & x(t - t_0) = 0. \end{cases}$$

تغییرناپذیر با زمان

.۹

شرط لازم برای معکوس پذیری یک سیستم استفاده از تمام لحظات ورودی برای ساختن خروجی می‌باشد. بر اساس ضابطه‌ها لحظاتی که x(t) در آن‌ها سنجیده می‌شود را می‌یابیم.

$$y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t \geq 1; \\ x(-t+1) & t < 1. \end{cases}$$

از ضابطه اول:

$$t \geq 1 \longrightarrow t-1 \geq 0$$

از ضابطه دوم:

$$t < 1 \longrightarrow -t > -1 \longrightarrow -t+1 > 0$$

از لحظات $t < 0$ ورودی استفاده نمی شود و تفاوت در آن‌ها اختلافی در خروجی ایجاد نمی‌کنند. به‌عبارتی دیگر اگر دو ورودی داشته باشیم که در زمان‌های بزرگتر از صفر یکسان باشند و در زمان‌های کوچکتر از صفر متفاوت، سیستم به ازای این دو ورودی، خروجی یکسان خواهد داشت. سیستم معکوس ناپذیر.

.۱۰

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-2k]$$

تغییرپذیر با زمان

$$y[n]\Big|_{x[n-n_0]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k-n_0]\delta[n-2k], \quad k^{'} = k - n_0$$

$$= \sum_{k^{'}=-\infty}^{\infty} x[k^{'}]\delta[n-2(k^{'}+n_0)]$$

$$= \sum_{k^{'}=-\infty}^{\infty} x[k^{'}]\delta[n-2n_0-2k^{'}]$$

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-n_0-2k]$$

$$y[n]\Big|_{x[n-n_0]} \neq y[n-n_0]$$

معکوس ناپذیر

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-2k], \quad \eta = 2k$$

$$= \sum_{k=-\infty,\eta=2k}^{\infty} x[k]\delta[n-\eta]$$

$$= \sum_{k=-\infty,\eta=2k}^{\infty} x[\eta]$$

از ورودی در اندیس‌های زمانی فرد برای ساخت خروجی استفاده نمی‌شود. اگر دو ورودی داشته باشیم که در اندیس‌های زمانی زوج یکسان و در اندیس‌های زمانی فرد متفاوت باشند، خروجی یکسان خواهند داشت.

.۱۱

معکوس پذیر

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$$

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} x[k] = 2\sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n} x[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

$$x[n] = y[n] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

معکوس ناپذیر

$$y(t) = cos(x(t))$$

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = x(t) + 2k\pi$$

.۱۲

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$$

حافظه‌دار، خطی، غیرعلی، ناپایدار، تغییرپذیر با زمان

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n+1], & n \leq -1 \end{cases}$$

حافظه‌دار، خطی، پایدار، غیرعلی، تغییرپذیر با زمان