بسم الله الرّحمن الرّحیم

تمرین سری چهارم

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

۱.

الف)

$$N = 6$$

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=<6>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{6} \Big(x[-2]e^{-jk\omega_0(-2)} + x[-1]e^{-jk\omega_0(-1)} + x[0]e^{-jk\omega_0(0)} + x[1]e^{-jk\omega_0(1)}$$

$$+ x[2]e^{-jk\omega_0(2)} + x[3]e^{-jk\omega_0(3)} \Big)$$

$$= \frac{1}{6} \left(-e^{jk2\omega_0} + 2e^{jk\omega_0} + 1 + 2e^{-jk\omega_0} - e^{-jk2\omega_0} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(1 + 4cos\left(k\omega_0\right) - 2cos\left(2k\omega_0\right) \right) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3} cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)$$

ب)

$$N = 4,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$$

$$x[n] = 1 - sin\frac{\pi n}{4}, \qquad 0 \le n \le 3$$

$$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=<4>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(1 - sin\frac{0\pi}{4}\right) e^{-jk\omega_0(0)} + \left(1 - sin\frac{1\pi}{4}\right) e^{-jk\omega_0(1)} \right.$$

$$\left. + \left(1 - sin\frac{2\pi}{4}\right) e^{-jk\omega_0(2)} + \left(1 - sin\frac{3\pi}{4}\right) e^{-jk\omega_0(3)} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-jk\omega_0} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-j3k\omega_0} \right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-j2k\omega_0}\left(\frac{e^{jk\omega_0} + e^{-jk\omega_0}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-j2k\omega_0} cos(k\omega_0)$$

$$e^{-j2k\omega_0} = e^{-jk\pi} = (-1)^k$$

$$a_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1)^k cos(k\omega_0)$$

ج)

$$x[n] = sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$N = ?$$

$$x[n+N] = x[n] \to sin\left(\frac{2\pi(n+N)}{3}\right)cos\left(\frac{\pi(n+N)}{2}\right) = sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\frac{2\pi N}{3} = 2k\pi \to N = 3k$$

$$\frac{\pi N}{2} = 2k^{'}\pi \to N = 4k^{'}$$

$$N = 12,\ \omega_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$n = 0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11, \to x[n] = 0$$

$$x[2] = sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)cos\left(\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x[4] = sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)cos\left(2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x[8] = sin\left(\frac{16\pi}{3}\right)cos\left(4\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x[10] = sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)cos\left(5\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{12}\left(x[2]e^{-jk\frac{\pi}{6}(2)} + x[4]e^{-jk\frac{\pi}{6}(4)} + x[8]e^{-jk\frac{\pi}{6}(8)} + x[10]e^{-jk\frac{\pi}{6}(10)}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-jk\frac{4\pi}{6}} - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-jk\frac{8\pi}{6}} - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-jk\frac{10\pi}{6}}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(\sqrt{3}e^{-jk\frac{\pi}{2}}cos\left(k\frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}e^{-jk\frac{3\pi}{2}}cos\left(k\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(\sqrt{3}cos\left(k\frac{\pi}{6}\right)\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{3\pi}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{j}{6}\left(-1\right)^{k} sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) cos\left(k\frac{\pi}{6}\right)$$

.۲

الف)

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \\
&= sin\frac{\pi}{3}e^{j\omega_0 n} + sin\frac{2\pi}{3}e^{j2\omega_0 n} + sin\frac{4\pi}{3}e^{j4\omega_0 n} + sin\frac{5\pi}{3}e^{j5\omega_0 n} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{j2\omega_0 n} - e^{j4\omega_0 n} - e^{j5\omega_0 n}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{j\frac{3}{2}\omega_0 n}\left(e^{j\frac{1}{2}\omega_0 n} + e^{-j\frac{1}{2}\omega_0 n}\right) - e^{j\frac{9}{2}\omega_0 n}\left(e^{j\frac{1}{2}\omega_0 n} + e^{-j\frac{1}{2}\omega_0 n}\right)\right) \\
&= \sqrt{3}\ cos\left(\frac{\omega_0 n}{2}\right)\left(e^{j\frac{3}{2}\omega_0 n} - e^{j\frac{9}{2}\omega_0 n}\right) \\
&\qquad\qquad \dots \\
&= -2\sqrt{3}jcos\left(\frac{\omega_0 n}{2}\right) sin\left(\frac{3\omega_0 n}{2}\right) e^{j3\omega_0 n}
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \\
&= \frac{1}{4}e^{j(-3)\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j(-2)\omega_0 n} + e^{j(-1)\omega_0 n} + 2e^{j(0)\omega_0 n} \\
&\qquad + e^{j(1)\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j(2)\omega_0 n} + \frac{1}{4}e^{j(3)\omega_0 n} \\
&= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-j3\omega_0 n} + e^{j3\omega_0 n}}{2}\right) + \left(\frac{e^{-j2\omega_0 n} + e^{j2\omega_0 n}}{2}\right) \\
&\quad + 2\left(\frac{e^{-j\omega_0 n} + e^{j\omega_0 n}}{2}\right) \\
&= 2 + \frac{1}{2}cos\left(3\omega_0 n\right) + cos\left(2\omega_0 n\right) + 2cos\left(\omega_0 n\right)
\end{aligned}
$$

.۳

الف)

$$b_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n-n_0]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{m=<N>} x[m]e^{-jk\omega_0(m+n_0)}$$

$$= \frac{e^{-jk\omega_0 n_0}}{N}\sum_{m=<N>} x[m]e^{-jk\omega_0 m}$$

$$= e^{-jk\omega_0 n_0} a_k$$

ب)

$$c_k = a_k - b_k\Big|_{n_0=1} = a_k - e^{-jk\omega_0}a_k$$

$$= a_k\left(1-e^{-jk\omega_0}\right)$$

ج)

$$d_k = a_k - e^{-jk\omega_0\frac{N}{2}}a_k,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$= a_k\left(1-e^{-jk\pi}\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & if\ k\ is\ even \\ 2a_k & oth. \end{cases}$$

د)

$$f_k = \frac{1}{\frac{N}{2}}\sum_{n=<\frac{N}{2}>}\left[x\left[n\right]+x\left[n+\frac{N}{2}\right]\right]e^{-j2k\omega_0 n}$$

$$= \frac{2}{N}\left(\sum_{n=<\frac{N}{2}>} x[n]e^{-j(2k)\omega_0 n} + \sum_{n=<\frac{N}{2}>} x\left[n+\frac{N}{2}\right]e^{-j(2k)\omega_0 n}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j(2k)\omega_0 n} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x\left[n\right]e^{-j(2k)\omega_0 n}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}a_{2k}\right) = 2a_{2k}$$

هـ)

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x^*[-n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$g_k^* = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[-n] e^{-j(-k)\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=<N>} x[m] e^{-j(-k)\omega_0(-m)} = a_k$$

$$g_k = a_k^*$$

و

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} (-1)^n x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}n} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\left(k-\frac{N}{2}\right)\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= a_{k-\frac{N}{2}}$$

ز

$$o_k = \frac{1}{2N} \sum_{n=<2N>} (-1)^n x[n] e^{-jk\omega_0 n},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{2N} = \frac{\pi}{N}$$

$$\omega_0^x = \frac{2\pi}{N} \to \omega_0 = \frac{\omega_0^x}{2}$$

با توجه به اینکه:

$$(-1)^n = e^{j\frac{\pi}{N}Nn} = e^{j\omega_0 Nn}$$

خواهیم داشت:

$$o_k = \frac{1}{2N} \sum_{<2N>} x[n] e^{j\omega_0 Nn} e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_{n=<2N>} x[n] e^{-j(k-N)\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{2N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\left(\frac{k-N}{2}\right)\omega_0^x n} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\left(\frac{k-N}{2}\right)\omega_0^x (n+N)} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_{\frac{k-N}{2}} + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\left(\frac{k-N}{2}\right)\omega_0^x n} e^{-j\pi(k-N)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_{\frac{k-N}{2}} + (-1)^{k-N} a_{\frac{k-N}{2}}\right)$$

با توجه به فرد بودن N برای اندیس‌های زوج عبارت بالا برابر صفر و برای اندیس‌های فرد برابر $a_{\frac{k-N}{2}}$ خواهد بود.

ح)

می‌توان سیگنال داده شده را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + (-1)^n x[n]\right)$$

با استفاده از روابط به دست آمده در قسمت‌های پیشین در صورتی که N فرد باشد خواهیم داشت:

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(a_k + a_{\frac{k-N}{2}}\right), & k\ is\ even \\ \frac{1}{2} a_k, & oth. \end{cases}$$

و در صورتی که N زوج باشد:

$$p_k = \frac{1}{2}\left(a_k + a_{k-\frac{N}{2}}\right)$$

.۴

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\omega_0 n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{M}-1} x[n]e^{-jk\omega_0 n} + \frac{1}{N}\sum_{n=\frac{N}{M}}^{\frac{2N}{M}-1} x[n]e^{-jk\omega_0 n} + \cdots \\
&= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{n=r\frac{N}{M}}^{(r+1)\frac{N}{M}-1} x[n]e^{-jk\omega_0 n}
\end{aligned}
$$

تغییر متغیر $\eta = n - r\dfrac{N}{M}$ را اعمال می‌نماییم:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{\eta=0}^{\frac{N}{M}-1} x\left[\eta + r\frac{N}{M}\right] e^{-jk\omega_0\left(\eta + r\frac{N}{M}\right)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{\eta=0}^{\frac{N}{M}-1} x\left[\eta + r\frac{N}{M}\right] e^{-jk\frac{2\pi}{N}\eta}e^{-jkr\frac{2\pi}{M}}
\end{aligned}
$$

حال a_k را به ازای اندیس‌های مضرب M محاسبه می‌کنیم:

$$
a_{\alpha M} = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{\eta=0}^{\frac{N}{M}-1} x\left[\eta + r\frac{N}{M}\right] e^{-j\alpha M\frac{2\pi}{N}\eta}e^{-j\alpha Mr\frac{2\pi}{M}}, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}
$$

می‌دانیم:

$$
e^{-j\alpha r2\pi} = 1
$$

طبق رابطه داده شده در روی سؤال یعنی

$$
\sum_{r=0}^{M-1} x\left[n + r\frac{N}{M}\right] = 0
$$

همچنین اینکه ضریب $e^{-j\alpha M\frac{2\pi}{N}\eta}$ مستقل از r است، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
a_{\alpha M} &= \frac{1}{N}\sum_{\eta=0}^{\frac{N}{M}-1}\left(\sum_{r=0}^{M-1} x\left[\eta + r\frac{N}{M}\right]\right) e^{-j\alpha M\frac{2\pi}{N}\eta} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

.۵

الف)

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad N = 2\alpha$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{\alpha}n}$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \in \Re$$

$$a_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\pi n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[n] \in \Re$$

ب)

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad N = 2\alpha + 1$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \in \Re$$

.۶

با توجه به اطلاعاتی که از سوالات پیشین به دست آوردیم می‌دانیم اگر:

$$z[n] = (-1)^n\, x[n]$$

آنگاه ضرایب سری فوریه سیگنال $z[n]$ برحسب ضرایب سری فوریه a_k برابر خواهد بود با:

$$c_k = a_{k-\frac{N}{2}} = a_{k-4}$$

با توجه به اینکه روی سوال گفته است $a_k = -a_{k-4}$ داریم:

$$x[n] = -\,(-1)^n\, x[n]$$

از این رو به ازای اندیس‌های زمانی زوج داریم:

$$x[n] = -x[n] \to x[n] = 0, \quad n = 2\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z}$$

سیگنال $y[n]$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$y[n] = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right) x[n-1]$$

به ازای n های فرد $x[n-1]$ و $\frac{1+(-1)^n}{2}$ هر دو با هم صفر خواهند بود. برای n های زوج نیز $\frac{1+(-1)^n}{2}$ برابر ۱ است. پس می‌توان ضریب سیگنال $x[n-1]$ را نادیده گرفت.

$$y[n] = x[n-1]$$

با استفاده از روابطی که در تمرین‌های قبلی به دست آمد برای ضرایب سری فوریه خواهیم داشت:

$$b_k = e^{-j\omega_0} a_k$$

.۷

با توجه به اطلاعاتی که از سوالات پیشین به دست آوردیم می‌دانیم اگر:

$$y[n] = (-1)^n \, x[n]$$

آنگاه ضرایب سری فوریه سیگنال $y[n]$ برحسب ضرایب سری فوریه a_k برابر خواهد بود با:

$$b_k = a_{k-\frac{N}{2}} = a_{k-4}$$

با توجه به اینکه روی سوال گفته است $a_k = -a_{k-4}$ داریم:

$$x[n] = -\,(-1)^n \, x[n]$$

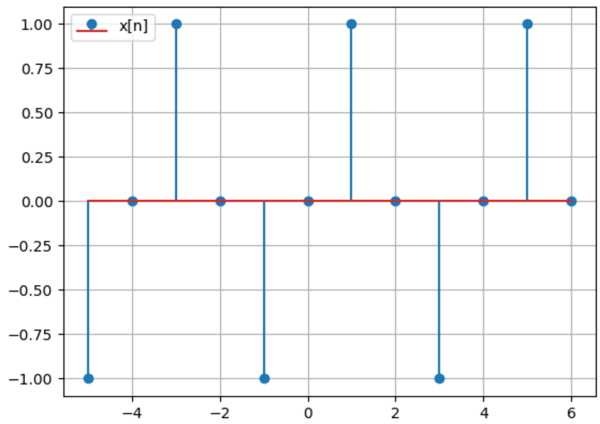
از این رو به ازای اندیس‌های زمانی زوج داریم:

$$x[n] = -x[n] \rightarrow x[n] = 0, \qquad n = 2\alpha, \;\; \alpha \in \mathbb{Z}$$

برای اندیس‌های زمانی فرد از رابطه داده شده یعنی $x[2n+1] = (-1)^n$ استفاده می‌کنیم:

$$x[\eta] = (-1)^{\frac{\eta-1}{2}} \;, \;\; \eta = 2\alpha + 1, \;\; \alpha \in \mathbb{Z}$$

نمودار سیگنال به شکل زیر خواهد بود:



۸.

رابطه دوگانی در سری فوریه سیگنال‌های گسسته یعنی:

$$x[n] \Leftrightarrow a_k,\ \omega_0 \Longleftrightarrow a[n] \Leftrightarrow \frac{1}{N}x[-k],\ \omega_0$$

را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌شود که سیگنال $y[n]$ به شکل ضرایب فوریه سیگنال $x[n]$ است. از رابطه دوگانی استفاده می‌کنیم:

$$b_k = \frac{1}{N}x[-k] = \frac{1}{16} \times 2cos\left(\frac{3\pi}{8}k\right) = \frac{1}{8}cos\left(\frac{3\pi}{8}k\right)$$