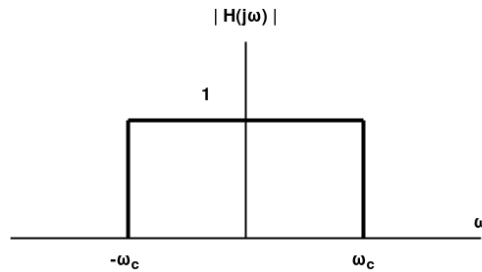


بسم الله الرحمن الرحيم

تمرین فیلترهای زمان پیوسته و زمان گسسته

۱. شکل زیر یک فیلتر پایین‌گذر را نشان می‌دهد. پاسخ ضربه این فیلتر را به ازای فازهای زیر به دست آورید و آن را رسم کنید.



(الف)

$$\angle H(j\omega) = 0$$

(ب)

$$\angle H(j\omega) = \omega T$$

که در آن T مقدار ثابتی است.

(ج)

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega < 0 \end{cases}$$

۲. شکل زیر سیستمی را نشان می‌دهد که معمولاً برای تبدیل فیلتر پایین‌گذر به بالاگذر و بالعکس به کار می‌رود.

(الف) نشان دهید که اگر $H(j\omega)$ یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل با فرکانس قطع ω_{lp} باشد، آنگاه سیستم کل یک فیلتر بالاگذر ایده‌آل است. فرکانس قطع فیلتر بالاگذر را به دست آورید و پاسخ ضربه آن را رسم کنید.

(ب) نشان دهید که اگر $H(j\omega)$ یک فیلتر بالاگذر ایده‌آل با فرکانس قطع ω_{hp} باشد، آنگاه سیستم کل یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل است. فرکانس قطع فیلتر پایین‌گذر را یافته و پاسخ ضربه آن را رسم کنید.



۳. یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$ و پاسخ ضربه حقیقی $h(t)$ را در نظر بگیرید. ورودی $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ را به این سیستم اعمال می‌نماییم. می‌توان نشان داد که خروجی به شکل زیر خواهد بود:

$$y(t) = Ax(t - t_0)$$

که در آن A یک عدد حقیقی غیر منفی است که تغییر مقیاس دامنه را نشان می‌دهد و t_0 تاخیر زمانی است.

الف) A را بر حسب $|H(j\omega)|$ بیان کنید.

ب) t_0 را بر حسب $\angle H(j\omega)$ بیان کنید.

۴. یک فیلتر بالاگذر ایده‌آل گسسته در زمان با پاسخ فرکانسی زیر را در نظر بگیرید:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \pi - \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| < \pi - \omega_c \end{cases}$$

الف) اگر $h[n]$ پاسخ ضربه این فیلتر باشد، $g[n]$ را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم:

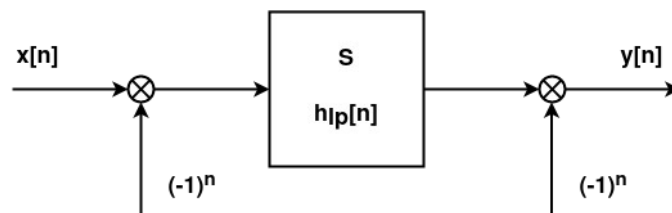
$$h[n] = \left(\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \right) g[n]$$

ب) آیا با افزایش ω_c پاسخ ضربه حول مبدا متمرکزتر می‌شود یا نه؟

۵. یک سیستم گسسته در زمان به صورت شکل زیر ساخته شده است. سیستم S در این شکل یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_{lp}[n]$ است.

الف) نشان دهید که کل سیستم یک سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

ب) اگر $h_{lp}[n]$ یک فیلتر پایین‌گذر باشد، سیستم زیر چه نوع فیلتری است؟



۶. یک فیلتر میانگین متحرک سه نقطه‌ای وزن‌دار به صورت زیر است:

$$y[n] = b \{ ax[n-1] + x[n] + ax[n+1] \}$$

الف) پاسخ فرکانسی میانگین متحرک سه نقطه‌ای معادله بالا را به صورت تابعی از a و b تعیین کنید.

ب) ضریب b را چنان تعیین کنید که بهره $H(e^{j\omega})$ در فرکانس صفر برابر یک باشد.

ج) در بسیاری از مسائل مربوط به تحلیل سری‌های زمانی ضریب a میانگین متحرک وزن‌دار معادله بالا به صورت

$a = \frac{1}{2}$ انتخاب می‌شود. پاسخ فرکانسی فیلتر حاصل را تعیین و رسم کنید.