بسم الله الرّحمن الرّحیم

تمرین سری سوم

۱.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

الف)

$$T = 2,\ w_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} x_1(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-jk\pi t}dt,\ u = t,\ dv = e^{-\eta t}dt$$

با استفاده از روش جزء به جزء:

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{t}{\eta}e^{-\eta t}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{\eta}\int_{-1}^{1} e^{-\eta t}dt\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{t}{\eta}e^{-\eta t}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{\eta^2}e^{-\eta t}\Big|_{-1}^{1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\eta}\left(\frac{e^{-\eta}+e^{\eta}}{2}\right) - \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{e^{-\eta}-e^{\eta}}{2}\right) = -\frac{1}{jk\pi}cos(k\pi)$$

$$= \frac{1}{jk\pi}(-1)^{k+1} = \frac{j}{k\pi}(-1)^k$$

سیگنال فرد است:

$$a_0 = 0$$

ب)

$$T = 6,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} x_2(t)e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt$$

سیگنال زوج است:

$$= \frac{1}{3}\left(\int_{0}^{1} e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt + \int_{1}^{2}(-t+2)e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{jk\frac{\pi}{3}}e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\Big|_{0}^{1} - \frac{2}{jk\frac{\pi}{3}}e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\Big|_{1}^{2} + \frac{t}{jk\frac{\pi}{3}}e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\Big|_{1}^{2} + \frac{1}{(jk\frac{\pi}{3})^2}e^{\frac{\pi}{3}t}\Big|_{1}^{2}\right)$$

همین طور ادامه می‌دهیم و در نهایت برای k‌های زوج ضرایب صفر خواهند بود و برای k‌های فرد خواهیم داشت:

$$= \frac{6}{\pi^2 k^2} sin(\frac{k\pi}{6}) sin(\frac{k\pi}{2})$$

همچنین a_0 برابر یک ششم مساحت زیر نمودار سیگنال در یک دوره تناوب است:

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

ج)

$$T = 3,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x_3(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{3}\int_0^3 x_3(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 e^{-jk\frac{2\pi}{3}t} dt + \frac{1}{3}\int_1^2 e^{-jk\frac{2\pi}{3}t} dt$$

$$= \frac{2}{3}\frac{-1}{jk\frac{2\pi}{3}} e^{jk\frac{2\pi}{3}t}\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\frac{-1}{jk\frac{2\pi}{3}} e^{jk\frac{2\pi}{3}t}\Big|_1^2$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{1}{jk\frac{2\pi}{3}}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{3}} - 1\right) - \frac{1}{3}\frac{1}{jk\frac{2\pi}{3}}\left(e^{-jk\frac{4\pi}{3}} - e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{3}}}{jk\frac{2\pi}{3}}\left(e^{jk\frac{\pi}{3}} - e^{-jk\frac{\pi}{3}}\right) + \frac{1}{3}\frac{e^{-jk\pi}}{jk\frac{2\pi}{3}}\left(e^{jk\frac{\pi}{3}} - e^{-jk\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{3}}}{k\frac{2\pi}{3}} sin(\frac{k\pi}{3}) + \frac{2}{3}\frac{e^{-jk\pi}}{k\frac{2\pi}{3}} sin(\frac{k\pi}{3})$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{<T>} x_3(t)\, e^{-j(0)\omega_0 t} dt = \frac{1}{3}\int_0^3 x_3(t)\, dt = 1$$

۲.

$$T = 4,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

الف)

ابتدا ضرایب سری فوریه را به شکل زیر فرض می‌نماییم:

$$b_k = \frac{sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi}$$

با توجه به رابطه داده شده، سیگنالی که ضرایب سری فوریه بالا را داشته باشد باید از نوع موج مربعی متناوب باشد.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < |t| < 2. \end{cases}$$

ضرایب سری فوریه داده شده برای این بند فاقد ضریب a_0 می‌باشند. برای اینکه ضرایب سری فوریه سیگنال بالا دارای این خاصیت باشند، باید آن را منهای انتگرال در یک دوره تناوب با ضریب یک بر دوره تناوب (مقدار اندیس صفر ضرایب سری فوریه) نماییم.

$$\frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{j0\omega_0 t}dt = \frac{1}{4}$$

در نهایت ضریب j^k (یا به عبارتی $e^{j\frac{\pi}{2}k}$) هم تأخیر -1 واحدی ایجاد می‌کند و سیگنال ما بر اساس $x(t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x(t+1) - \frac{1}{4}$$

ب)

مانند قسمت قبلی ابتدا ضرایب سری فوریه را به شکل زیر فرض می‌نماییم:

$$b_k = \frac{sin(\frac{k\pi}{8})}{k\pi}$$

با توجه به رابطه داده شده، سیگنالی که ضرایب سری فوریه بالا را داشته باشد باید از نوع موج مربعی متناوب باشد.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} < |t| < 2. \end{cases}$$

در نهایت ضریب $\frac{(-1)^k}{2}$ (یا به عبارتی $\frac{e^{j\pi k}}{2}$) هم تأخیر -2 واحدی و مقیاس دهی $\frac{1}{2}$ ایجاد می‌کند و سیگنال ما بر اساس $x(t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{2}x(t+2)$$

ج)

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\
&= je^{j\omega_0 t} - je^{-j\omega_0 t} + 2je^{2j\omega_0 t} - 2je^{-2j\omega_0 t} \\
&= -2\left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right) - 4\left(\frac{e^{2j\omega_0 t} - e^{-2j\omega_0 t}}{2j}\right) \\
&= -2sin(\omega_0 t) - 4sin(2\omega_0 t)
\end{aligned}$$

.۳

$$x(t) \to a_k$$

$$y(t) \to b_k$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \to jk\omega_0 b_k$$

الف)

$$x(t) = cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} \to a_1 = \frac{1}{2},\ a_{-1} = \frac{1}{2},\ T = 1$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t) \to jk2\pi b_k + 4b_k = a_k$$

$$\to b_k = \frac{1}{jk2\pi + 4}a_k \to b_1 = \frac{1}{2(j2\pi + 4)},\ b_{-1} = \frac{1}{2(-j2\pi + 4)}$$

ب)

$$x(t) = sin(4\pi t) + cos(6\pi t + \frac{\pi}{4}) \to T = 1,\ \omega_0 = 2\pi$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{2j}e^{j(2)2\pi t} - \frac{1}{2j}e^{j(-2)2\pi t}\right) + \left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j(3)2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j(-3)2\pi t}\right)$$

$$\to a_2 = \frac{1}{2j},\ a_{-2} = -\frac{1}{2j},\ a_3 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}},\ a_{-3} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t) \to jk2\pi b_k + 4b_k = a_k \to b_k = \frac{1}{jk2\pi + 4}a_k$$

$$b_2 = -\frac{1}{8\pi - 8j},\ b_{-2} = -\frac{1}{8\pi + 8j}$$

$$b_3 = \frac{1}{8 + j12\pi}e^{j\frac{\pi}{4}},\ b_{-3} = \frac{1}{8 - j12\pi}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

۴.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

الف)

$$x_1(t) = x(t-t_0) + x(t+t_0) \rightarrow a_{1k} = \frac{1}{T}\int_{<T>} x_1(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$a_{1k} = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t-t_0)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t+t_0)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

تغییر متغیر $\tau_1 = t - t_0$ و $\tau_2 = t + t_0$ را انجام می‌دهیم:

$$= \frac{1}{T}\int_{<T>} x(\tau_1)e^{-jk\omega_0(\tau_1+t_0)}d\tau_1 + \frac{1}{T}\int_{<T>} x(\tau_2)e^{-jk\omega_0(\tau_2-t_0)}d\tau_2$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0}a_k + e^{jk\omega_0 t_0}a_k$$

$$= 2cos(k\omega_0 t_0)a_k$$

ب)

$$x_2(t) = Even\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right) \rightarrow a_{2k} = \frac{1}{T}\int_{<T>} x_2(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$a_{2k} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{<T>} x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right]$$

برای انتگرال دوم تغییر متغیر $\tau = -t$ را انجام می‌دهیم:

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{<T>} x(\tau)e^{-j(-k)\omega_0 \tau}d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_k + a_{-k}\right)$$

ج)

$$x_3(t) = \Re e\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left(x(t) + x^*(t)\right) \rightarrow a_{3k} = \frac{1}{T}\int_{<T>} x_3(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

ضرایب سری فوریه $x^*(t)$ را می‌یابیم:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x^*(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \rightarrow b_k^* = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-j(-k)\omega_0 t}dt \rightarrow b_k^* = a_{-k}$$

$$b_k = a_{-k}^*$$

$$a_{3k} = \frac{1}{2}\left(a_k + a_{-k}^*\right)$$

د)

$$x_4(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \rightarrow a_{4k} = \frac{1}{T}\int_{<T>} x_4(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -k^2\omega_0^2 a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\rightarrow a_{4k} = -k^2\omega_0^2 a_k$$

هـ)

$$x_5(t) = x(3t-1),\ x(t+T) = x(t)$$

$$x_5(t+T_5) = x_5(t) \rightarrow x(3t+3T_5-1) = x(3t-1) \rightarrow 3T_5 = T \rightarrow T_5 = \frac{1}{3}T$$

$$\rightarrow \omega_{05} = 3\omega_0$$

ضرایب سری فوریه سیگنال $x(3t)$ همان ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ یعنی a_k خواهد بود با این تفاوت که مقادیر دوره تناوب پایه یک سوم و فرکانس پایه سه برابر خواهند بود.

$$b_k = \frac{3}{T}\int_{<\frac{1}{3}T>} x(3t)e^{-jk3\omega_0 t}dt$$

با تغییر متغیر $\tau = 3t$ و $dt = \frac{1}{3}d\tau$ داریم:

$$b_k = \frac{3}{T}\int_{<T>} x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}\frac{1}{3}d\tau = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau = a_k$$

با توجه به بند (الف) این تمرین نیز خواهیم داشت:

$$a_{5k} = e^{-jk3\omega_0}a_k$$

.۵

الف)

$x(t) \to a_k$

$x^*(t) \to a^*_{-k}$

$x(t) = x^*(t) \to a_k = a^*_{-k} \to a_0 = a^*_0$

ب)

$x(t) \to a_k$

$x(-t) \to a_{-k}$

$x(t) = x(-t) \to a_k = a_{-k}$

$x(t) = x^*(t) \to a_k = a^*_{-k} \to a_k = a^*_k$

ج)

$x(t) \to a_k$

$x(-t) \to a_{-k}$

$x(t) = -x(-t) \to a_k = -a_{-k}$

از عبارت بالا در عبارت پایین استفاده کرده و به جای a_k جاگذاری می‌نماییم:

$x(t) = x^*(t) \to a_k = a^*_{-k} \to -a_{-k} = a^*_{-k} \to a_k = -a^*_k$

$a_0 = a^*_0 \to a_0 = 0$

د)

$x(t) \to a_k$

$x^e(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right) \to a^e_k = \frac{1}{2}\left(a_k + a_{-k}\right)$

$x(t) = x^*(t) \to a_k = a^*_{-k} \to a^e_k = \frac{1}{2}\left(a_k + a^*_k\right) = \Re e\{a_k\}$

هـ)

$x(t) \to a_k$

$x^o(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) - x(-t)\right) \to a^o_k = \frac{1}{2}\left(a_k - a_{-k}\right)$

$x(t) = x^*(t) \to a_k = a^*_{-k} \to a^o_k = \frac{1}{2}\left(a_k - a^*_k\right) = j\ \Im m\{a_k\}$

.۶

$$T = 6,\ \omega_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$x(t) = a_1 e^{-j\frac{\pi}{3}t} + a_{-1} e^{j\frac{\pi}{3}t} + a_2 e^{-j2\frac{\pi}{3}t} + a_{-2} e^{j2\frac{\pi}{3}t}$$

با توجه به حقیقی بودن سیگنال داریم:

$$x(t) = x^*(t) \rightarrow a_k = a^*_{-k} \rightarrow a_{-1} = a_1^*,\ a_{-2} = a_2^*$$

بعبارتی:

$$x(t) = a_1 e^{-j\frac{\pi}{3}t} + a_1^* e^{j\frac{\pi}{3}t} + a_2 e^{-j2\frac{\pi}{3}t} + a_2^* e^{j2\frac{\pi}{3}t}$$

با توجه به اینکه $x(t) = -x(t-3)$ داریم:

$$a_1 e^{-j\frac{\pi}{3}t} + a_1^* e^{j\frac{\pi}{3}t} + a_2 e^{-j2\frac{\pi}{3}t} + a_2^* e^{j2\frac{\pi}{3}t} = -a_1 e^{-j\frac{\pi}{3}(t-3)}$$
$$-a_1^* e^{j\frac{\pi}{3}(t-3)} - a_2 e^{-j2\frac{\pi}{3}(t-3)} - a_2^* e^{j2\frac{\pi}{3}(t-3)}$$

می‌دانیم $e^{j\pi} = -1$ و $e^{j2\pi} = 1$، در این صورت:

$$a_2 = -a_2 \rightarrow a_2 = 0$$

طبق بند آخر اطلاعات مسئله:

$$a_1 = a_1^*$$

در ادامه با رابطه پارسوال:

$$\frac{1}{6}\int_{-3}^{3} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = \frac{1}{2}$$

و چون طبق فرض مسئله $a_1 > 0$،

$$|a_1|^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{\pi}{3}t} + e^{j\frac{\pi}{3}t}\right) = cos(\frac{\pi}{3}t)$$