بسم اللّه الرّحمن الرّحیم
تمرین سری دوم

۱.

$$h(t) = e^{j5t}u(t+1)$$

- حافظه‌دار چون پاسخ ضربه در غیر زمان t=0 دارای مقدار است.
- غیرعلی چون پاسخ ضربه برای زمان‌های قبل از صفر نیز دارای مقدار است.
- ناپایدار چون انتگرال پاسخ ضربه محدود نمی‌باشد.

$$h[n] = 2^n u[-n]$$

- حافظه‌دار چون پاسخ ضربه در اندیس‌های زمانی غیر n=0 نیز دارای مقدار است.
- غیرعلی چون پاسخ ضربه برای اندیس‌های زمانی قبل از صفر نیز دارای مقدار است.
- پایدار چون مجموع پاسخ ضربه محدود می‌باشد.

۲.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t-\tau)dt = \tau$$

اگر زمان اعمال ضربه به بینهایت میل کند، انتگرال پاسخ ضربه محدود نخواهد بود. پس سیستم ناپایدار است.

.۳

$$h\left(t,\tau\right)=\left(t-\tau\right)^2 u\left(\tau-t\right)$$

- تغییرناپذیر با زمان است چون $h\left(t,\tau\right)$ تابعی از $t-\tau$ می‌باشد.

$$h\left(t-t_0,\tau\right)=h\left(t,\tau+t_0\right)$$
$$h\left(t,\tau\right)=f\left(t-\tau\right)\longrightarrow f\left(t-t_0-\tau\right)=f\left(t-\left(\tau+t_0\right)\right)$$

- ناپایدار است چون انتگرال اندازه پاسخ ضربه به ازای $\tau\to\infty$ بی‌کران می‌شود.
- غیرعلی است چون $h\left(t,\tau\right)\neq 0$ زمانی که $t<\tau$.
- حافظه‌دار است چون $h\left(t,\tau\right)\neq 0$ زمانی که $t\neq\tau$.

$$h\left[n,k\right]=n^2+k^2-2nk=\left(n-k\right)^2$$

- تغییرناپذیر با زمان است چون $h\left[n,k\right]$ تابعی از $n-k$ است.
- ناپایدار چون انباشت اندازه پاسخ ضربه به ازای $k\to\infty$ بی‌کران می‌شود.
- غیر علی است چون $h\left[n,k\right]\neq 0$ زمانی که $n<k$.
- حافظه‌دار است چون $h\left[n,k\right]\neq 0$ زمانی که $n\neq k$.

$$h\left(t,\tau\right)=\tau^2\delta\left(t-\tau\right)$$

- تغییرپذیر با زمان است چون $h\left(t,\tau\right)$ تابعی از $t-\tau$ نمی‌باشد.
- ناپایدار است چون انتگرال اندازه پاسخ ضربه به ازای $\tau\to\infty$ بی‌کران می‌شود.
- علی است چون $h\left(t,\tau\right)=0$ است، زمانی که $t<\tau$.
- بدون حافظه است چون $h\left(t,\tau\right)=0$ است، زمانی که $t\neq\tau$.

.۴

$$w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n] \qquad (۱)$$

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n] \rightarrow w[n] = \frac{1}{\beta}\left(y[n] - \alpha y[n-1]\right)$$

$$\rightarrow w[n-1] = \frac{1}{\beta}\left(y[n-1] - \alpha y[n-2]\right)$$

با جاگذاری $w[n]$ و $w[n-1]$ در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\beta}\left(y[n] - \alpha y[n-1]\right) = \frac{1}{2\beta}\left(y[n-1] - \alpha y[n-2]\right) + x[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{2\beta}y[n-1] + \alpha y[n-1] - \frac{\alpha}{2\beta}y[n-2] + \beta x[n]$$

عبارت فوق را متحد با رابطه $y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n]$ قرار داده و ضرایب را می‌یابیم:

$$\beta = 1,\ -\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{8},\ \frac{1}{2} + \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

پاسخ ضربه یک سیستم که از سری‌سازی دو سیستم LTI حاصل شده است، برابر با کانولوشن پاسخ ضربه هر یک از سیستم‌ها است.

$$w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + \delta[n]$$

$$w[0] = 1,\ w[1] = \frac{1}{2},\ w[2] = \frac{1}{4},\ \cdots \rightarrow h_w[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \delta[n]$$

$$y[0] = 1,\ y[1] = \frac{1}{4},\ y[2] = \frac{1}{16},\ \cdots \rightarrow h_y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$h[n] = h_w[n] * h_y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_w[k]h_y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k u[k]\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k]\right\}$$

محاسبه جمع محدود خواهد شد به اندیس‌های:

$$k \geq 0,\ n-k \geq 0 \ \rightarrow\ 0 \leq k \leq n$$

در ادامه خواهیم داشت:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n] = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2k} u[n] = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} u[n]$$

$$
= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} - 1\right] u[n]
$$
$$
= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right] u[n]
$$

۵. الف) صحیح، با توجه به اینکه در این حالت انتگرال قدر مطلق پاسخ ضربه نامحدود خواهد شد، سیستم ناپایدار است.

ب) غلط، سیستمی خطی و تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که مقدار تأخیر مشخصی را ایجاد می‌نماید. معکوس این سیستم به مقادیر ورودی در زمان‌های آینده نیاز دارد، پس علی نیست.

ج) غلط، معیار پایداری مجموع قدر مطلق مقادیر پاسخ ضربه در تمامی لحظات است.

د) غلط، در صورت نامحدود بودن یک اندیس زمانی از پاسخ ضربه انباشت قدرمطلق پاسخ ضربه بی‌کران خواهد بود و علی‌رغم محدود بودن ورودی خروجی نامحدود خواهد گردید.

هـ) غلط، برای مثال سیستمی با پاسخ ضربه $h(t) = u(t)$ را در نظر بگیرید که علی بوده ولی انتگرال قدر مطلق پاسخ ضربه نامحدود دارد.

و) غلط، برای مثال سیستمی که برای بند (ب) ذکر گردید را در نظر بگیرید. ترکیب متوالی این سیستم علی و معکوس غیر علی آن، بدون حافظه و علی خواهد بود.

۶.

$$
y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau
$$
$$
\exists t_0 \neq 0 \mid h(t_0) \neq 0
$$

در این صورت در لحظه t_0 پاسخ ضربه مخالف صفر خواهد بود و از $x(t-t_0)$ برای محاسبه $y(t)$ استفاده خواهد شد. پس طبق تعریف سیستم حافظه‌دار خواهد بود.

.۷

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$\exists t_0<0 \mid h(t_0)\neq 0$$

در این صورت در لحظه t_0 پاسخ ضربه مخالف صفر خواهد بود و از $x(t-t_0)$ برای محاسبه $y(t)$ استفاده خواهد شد. با توجه به اینکه $t_0<0$ می‌باشد، برای محاسبه خروجی از ورودی در زمان‌های آتی استفاده می‌گردد که تعریف علی بودن را نقض می‌نماید.

۸. الف)

$$h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(\tau-1)-u(\tau-3)\right]e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{t}\left[u(\tau-1)-u(\tau-3)\right]e^{-(t-\tau)}d\tau \qquad t-\tau>0\rightarrow\tau<t$$

به ازای t در بازه‌های زمانی مختلف کانولوشن را محاسبه می‌نماییم:

$$t<1\rightarrow h(t)*x(t)=0$$
$$1\leq t\leq 3\rightarrow h(t)*x(t)=\int_{1}^{t}e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-(t-\tau)}\Big|_{1}^{t}=1-e^{-(t-1)}$$
$$t>3\rightarrow h(t)*x(t)=\int_{1}^{3}e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\left(e^{3}-e^{1}\right)$$

ب)

$$h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}u[k-3]\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k-6}u[n-k]$$
$$n<3\rightarrow h[n]*x[n]=0$$
$$n\geq 3\rightarrow h[n]*x[n]=\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k-6}$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-6}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{-k}$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-6}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-6}\left(2^{n+1}-2^{3}\right)$$

ج)

$$h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-k-2}u[-k]u[n-k-4] \qquad (۲)$$

بر اساس اینکه سیگنال‌های پله به ازای چه زمانهایی مقدار غیر صفر دارند، محدوده‌های مؤثر سیگما را یافته و بر اساس مقدار n بازه‌بندی می‌کنیم:

$-k \geq 0 \rightarrow k \leq 0$

$n-k-4 \geq 0 \rightarrow k \leq n-4$

با توجه به اینکه برای غیر صفر بودن رابطه (۲) باید مقدار k در دو عبارت بالا صدق کند، محاسبه کانولوشن را بر اساس مقدار n به دو قسمت تقسیم می‌شود:

$$n \leq 4 \rightarrow h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-4}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-k-2}$$

تغییر متغیر $k^{'}=-k-2$ را انجام می‌دهیم:

$$h[n]*x[n]=\sum_{k^{'}=-n+2}^{\infty}-\left(\frac{1}{4}\right)^{k^{'}}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{-n+1}$$

برای $n>4$ مقدار کانولوشن ثابت می‌ماند:

$$h\left[n\right]*x\left[n\right]=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{-4+1=-3}$$

د)

$$h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}sin(-\tau-1)u(-t-1)(t-\tau)u(-t+\tau)d\tau$$

بر اساس بازه‌ای از زمان که تابع پله دارای مقدار غیر صفر است محدوده انتگرال‌گیری را بازنویسی می‌کنیم:

$-t-1 \geq 0 \rightarrow t \leq -1$

$-t+\tau \geq 0 \rightarrow \tau \geq t$

بر اساس مقدار t داریم:

$$t>-1 \rightarrow h(t)*x(t)=0$$

$$t \leq -1 \rightarrow h(t)*x(t)=\int_{t}^{-1}sin(-\tau-1)(t-\tau)d\tau$$

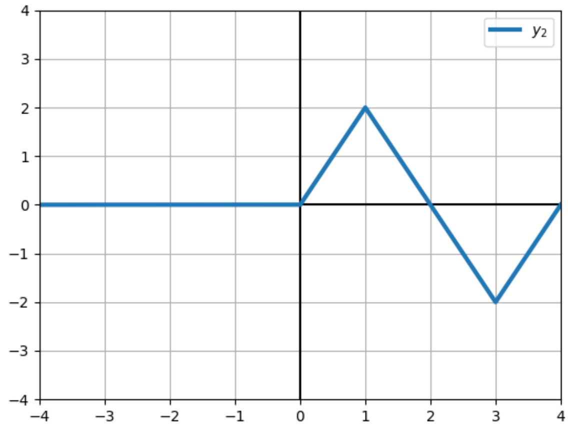
با روش انتگرال جزء به جزء:

$$=2tcos(t+1)-sin(t+1)-t+1$$

.۹

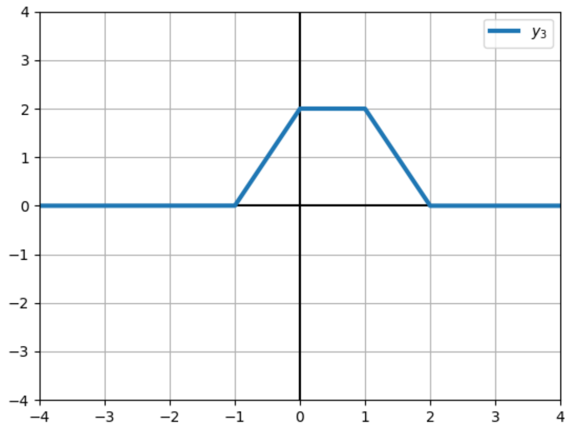
$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$

$y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$



$x_3(t) = x_1(t+1) + x_1(t)$

$y_3(t) = y_1(t+1) + y_1(t)$



.۱۰

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k]$$

طبق فرض مسئله $h_1[k]$ زمانی مخالف صفر است که $k \geq n_1$ باشد. همچنین در عبارت بالا برای اینکه $h_2[n-k]$ مخالف صفر باشد، باید داشته باشیم:

$n - k \geq n_2 \rightarrow n \geq n_2 + k$

اگر نتیجه‌گیری اول یعنی $k \geq n_1$ را وارد عبارت بالا کنیم، خواهیم داشت:

$n \geq n_1 + n_2$

وقتی رابطه بالا برقرار نباشد عبارت داخل سیگما صفر خواهد بود پس لزوما برای اندیس‌های زمانی $n < n_1 + n_2$ مقدار کانولوشن برابر صفر خواهد بود.

.۱۱

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k]$$

طبق فرض مسئله $h_1[k]$ زمانی مخالف صفر است که $k \leq n_1$ باشد. همچنین در عبارت بالا برای اینکه $h_2[n-k]$ مخالف صفر باشد، باید داشته باشیم:

$n - k \leq n_2 \rightarrow n \leq n_2 + k$

اگر نتیجه‌گیری اول یعنی $k \leq n_1$ را وارد عبارت بالا کنیم، خواهیم داشت:

$n \leq n_1 + n_2$

وقتی رابطه بالا برقرار نباشد عبارت داخل سیگما صفر خواهد بود پس لزوما برای اندیس‌های زمانی $n > n_1 + n_2$ مقدار کانولوشن برابر صفر خواهد بود.

۱۲.

فرض کنیم سیگنال $h_1[n]$ از اندیس زمانی n_{11} شروع شده و تا اندیس زمانی n_{12} ادامه دارد، به عبارتی:

$$h_1[n] = 0, \quad n < n_{11},\ n > n_{12}$$

به طوری که:

$$L_1 = n_{12} - n_{11} + 1$$

همچنین سیگنال $h_2[n]$ از اندیس زمانی n_{21} شروع شده و تا اندیس زمانی n_{22} ادامه دارد، به عبارتی:

$$h_2[n] = 0, \quad n < n_{21},\ n > n_{22}$$

به طوری که:

$$L_2 = n_{22} - n_{21} + 1$$

با توجه به قضایای اثبات شده در دو سوال قبلی برای کانولوشون دو سیگنال خواهیم داشت:

$$h[n] = h_1[h] * h_2[n]$$
$$h[n] = 0, \quad n > n_{12} + n_{22}$$
$$h[n] = 0, \quad n < n_{11} + n_{21}$$

در این حالت طول سیگنال برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} L &= (n_{12} + n_{22}) - (n_{11} + n_{21}) + 1 \\ &= (n_{12} + n_{22} - 1) - (n_{11} + n_{21} - 1) + 1 \\ &= (n_{12} - n_{11} + 1) + (n_{22} - n_{21} + 1) - 1 \\ &= L_1 + L_2 - 1 \end{aligned}$$

.۱۳

$$S_h = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt$$

$$S_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$S_y = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * h(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)dt\ d\tau$$

می‌توانیم انتگرال‌ها را جدا کنیم. برای روشنی بیشتر تغییر متغیر انجام می‌دهیم:

$$u = t-\tau,\ du = dt,\ t = u+\tau$$

با این تغییر متغیر خواهیم داشت:

$$S_y = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} h(u)du\ d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau\ \int_{-\infty}^{\infty} h(u)du = S_x\ S_h$$

.۱۴

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1}\,\delta(t-k) \qquad\qquad T_h = 2$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t-2k) - u(t-2k-1) \qquad\qquad T_x = 2$$

کوچکترین مضرب مشترک دوره تناوب دو سیگنال برابر ۲ است:

$$h(t) * x(t) = \int_{<2>} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^2 \left(\delta(\tau)-\delta(\tau-1)\right)\left(u(t-\tau)-u(t-\tau-1)\right)d\tau$$

$$= u(t)-u(t-1)-u(t-1)+u(t-2)$$

$$= u(t)-2u(t-1)+u(t-2), \qquad T = 2$$