2.1、求证二阶张量的主不变量g_1,g_2,g_3,(由（2.3.5）式定义)与矩g_1^*,g_2^*,g_3^*(由（2.3.9）式定义)的关系式为

$$g_1=g_1^*,\quad g_2=\frac{1}{2}\left[(g_2^*)^2-g_2^*\right]\quad g_3=\frac{1}{6}(g_1^*)^3-\frac{1}{2}g_1^*g_2^*+\frac{1}{3}g_3^*$$

以及

$$g_1^*=g_1,\quad g_2^*=(g_1)^2-2g_2,\quad g_3^*=(g_1)^3-3g_1g_2+3g_3$$

求证：

由书$P56$式2.3.5及2.3.8可知：

$$g_1=T_{.1}^1+T_{.2}^2+T_{.3}^3$$

$$g_1=\begin{vmatrix}T_{.1}^1 & T_{.2}^1\\ T_{.1}^2 & T_{.2}^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T_{.2}^2 & T_{.3}^2\\ T_{.2}^3 & T_{.3}^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T_{.3}^3 & T_{.1}^3\\ T_{.3}^1 & T_{.1}^1\end{vmatrix}$$

$$g_3=\begin{vmatrix}T_{.1}^1 & T_{.2}^1 & T_{.3}^1\\ T_{.1}^2 & T_{.2}^2 & T_{.3}^2\\ T_{.1}^3 & T_{.2}^3 & T_{.3}^3\end{vmatrix}$$

$$g_1^*=trT=T_{.i}^i$$

$$g_2^*=tr(T\cdot T)=T_{.j}^iT_{.i}^j$$

$$g_3^*=tr(T\cdot T\cdot T)=T_{.j}^iT_{.k}^jT_{.i}^k$$

由以上可得

$$g_1^*=trT=T_{.i}^i=T_{11}+T_{22}+T_{33}=g_1$$

$$g_2^*=tr(T\cdot T)=T_{.j}^iT_{.i}^j=T_{11}T_{11}+T_{12}T_{21}+T_{21}T_{12}+T_{22}T_{22}+T_{23}T_{32}+T_{31}T_{13}+T_{32}T_{23}+T_{33}T_{33}$$

$$(g_1)^2=(T_{11}+T_{22}+T_{33})^2=T_{11}T_{11}+T_{22}T_{22}+T_{33}T_{33}+2T_{11}T_{22}+2T_{11}T_{33}+2T_{22}T_{33}$$

$$2g_2=2\left[T_{11}T_{22}-T_{12}T_{21}+T_{22}T_{33}-T_{23}T_{32}+T_{11}T_{33}-T_{31}T_{13}\right]$$

$$(g_1)^2-2g_2=T_{11}T_{11}+T_{12}T_{21}+T_{21}T_{12}+T_{22}T_{22}+T_{23}T_{32}+T_{31}T_{13}+T_{32}T_{23}+T_{33}T_{33}=g_2^*$$

同理可证$g_3^*=(g_1)^3-3g_1g_2+3g_3$

2.2已知T与S互为转置。求证：它们有相同的主不变量。

证明：T，S的矩分别是：

$$trT=T_{\bullet i}^i \qquad trS=S_{\bullet i}^i$$

$$tr(T\bullet T)=T_{\bullet j}^iT_{\bullet i}^j \qquad tr(S\bullet S)=S_{\bullet j}^iS_{\bullet i}^j$$

$$tr(T\bullet T\bullet T)=T_{\bullet j}^iT_{\bullet k}^jT_{\bullet i}^k \qquad tr(S\bullet S\bullet S)=S_{\bullet j}^iS_{\bullet k}^jS_{\bullet i}^k$$

又因为T与S互为转置

$$(T_{\bullet i}^j)^T=S_{\bullet i}^j$$

$$(T_{\bullet i}^j)^T=T_{\bullet j}^i$$

$$S_{\bullet i}^j=T_{\bullet j}^i$$

将S用T的分量表示：

$$trS=S_{\bullet i}^i=T_{\bullet i}^i$$

$$tr(S\bullet S)=S_{\bullet j}^iS_{\bullet i}^j=T_{\bullet i}^jT_{\bullet j}^i$$

$$tr(S\bullet S\bullet S)=S_{\bullet j}^iS_{\bullet k}^jS_{\bullet i}^k=T_{\bullet i}^jT_{\bullet j}^kT_{\bullet k}^i$$

所以T与S有相同的矩，根据（P56　2.3.9)可知T与S有相同的主变量

2.3已知：任意二阶张量$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 且 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B},\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$

求证：$\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{S}$具有相同的主不变量。

•

证明：$f_1^{T*}=tr(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{T}:\boldsymbol{G}=tr\left(\boldsymbol{A}\square\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{A}\square\boldsymbol{B}:\boldsymbol{G}$

$$=T^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g_i}\boldsymbol{g^j}\square T^{m}_{\cdot n}\boldsymbol{g_m}\boldsymbol{g^n}:g^{ab}\boldsymbol{g_a}\boldsymbol{g_b}$$

$$=T^{i}_{\cdot j}T^{m}_{\cdot n}\delta^{j}_{m}\boldsymbol{g_i}\boldsymbol{g^n}:g^{ab}\boldsymbol{g_a}\boldsymbol{g_b}$$

$$=T^{i}_{\cdot j}T^{m}_{\cdot n}\delta^{j}_{m}g^{ab}g_{ia}\delta^{n}_{b}$$

$$=T^{i}_{\cdot m}T^{m}_{\cdot b}g^{ab}g_{ia}$$

$$=T_{am}T^{ma}$$

$f_1^{S*}=tr(\boldsymbol{S})=\boldsymbol{S}:\boldsymbol{G}=tr\left(\boldsymbol{B}\square\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{B}\square\boldsymbol{A}:\boldsymbol{G}$

$$=T^{m}_{\cdot n}\boldsymbol{g_m}\boldsymbol{g^n}\square T^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g_i}\boldsymbol{g^j}:g^{ab}\boldsymbol{g_a}\boldsymbol{g_b}$$

$$=T^{m}_{\cdot n}T^{i}_{\cdot j}\delta^{n}_{i}\boldsymbol{g_m}\boldsymbol{g^j}:g^{ab}\boldsymbol{g_a}\boldsymbol{g_b}$$

$$=T^{m}_{\cdot n}T^{i}_{\cdot j}\delta^{n}_{i}g^{ab}g_{am}\delta^{j}_{b}$$

$$=T^{m}_{\cdot i}T^{i}_{\cdot b}g^{ab}g_{am}$$

$$=T_{ai}T^{ia}$$

$f_1^{T*}=f_1^{S*}=f_1$

所以二者具有相同的主不变量。

2.4 求证:

① $[\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}]+[\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}]+[\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{w}]=\mathcal{J}_1^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}]$

② $[\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{c}]=\mathcal{J}_2^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]$

证明： (1)

$$[\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}]+[\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}]+[\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{w}]$$

$$=\epsilon_{ijk}T^{i}_{\bullet l}u^l\delta^j_m v^m\delta^k_n w^n+\epsilon_{ijk}\delta^i_l u^l T^{j}_{\bullet m}v^m\delta^k_n w^n+\epsilon_{ijk}\delta^i_l u^l\delta^j_m v^m T^{k}_{\bullet n}w^n$$

$$=e_{ijk}T^{i}_{\bullet 1}\delta^j_2\delta^k_3\,\epsilon_{lmn}u^l v^m w^n+e_{ijk}\delta^i_1 T^{j}_{\bullet 2}\delta^k_3\,\epsilon_{lmn}u^l v^m w^n+e_{ijk}\delta^i_1\delta^j_2 T^{k}_{\bullet 3}\,\epsilon_{lmn}u^l v^m w^n$$

$$=\left(e_{i23}T^{i}_{\bullet 1}+e_{1j3}T^{j}_{\bullet 2}+e_{12k}T^{k}_{\bullet 3}\right)\epsilon_{lmn}u^l v^m w^n$$

$$=\left(T^{1}_{\bullet 1}+T^{2}_{\bullet 2}+T^{3}_{\bullet 3}\right)\epsilon_{lmn}u^l v^m w^n$$

$$=\mathcal{J}_1^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}]$$

（2）式左边

$=[T^{i}_{\cdot j}a^{j}\mathbf{g}_i\ \ T^{a}_{\cdot b}b^{b}\mathbf{g}_a\ \ c^{c}\mathbf{g}_c]+[a^{d}\mathbf{g}_d\ \ T^{i}_{\cdot j}b^{j}\mathbf{g}_i\ \ T^{a}_{\cdot b}c^{b}\mathbf{g}_a]+[T^{i}_{\cdot j}a^{j}\mathbf{g}_i\ \ b^{e}\mathbf{g}_e\ \ T^{a}_{\cdot b}c^{b}\mathbf{g}_a]$

$=T^{i}_{\cdot j}T^{a}_{\cdot b}a^{j}b^{b}c^{c}\varepsilon_{iac}+T^{i}_{\cdot j}T^{a}_{\cdot b}a^{d}b^{j}c^{b}\varepsilon_{dia}+T^{i}_{\cdot j}T^{a}_{\cdot b}a^{j}b^{e}c^{b}\varepsilon_{iea}$

$=\frac{1}{6}T^{i}_{\cdot j}T^{a}_{\cdot b}\left(a^{j}b^{b}c^{c}\varepsilon_{iea}\varepsilon_{jbc}\varepsilon^{jbc}+a^{d}b^{j}c^{b}\varepsilon_{dia}\varepsilon_{djb}\varepsilon^{djb}+a^{j}b^{e}c^{b}\varepsilon_{iea}\varepsilon_{jbb}\varepsilon^{jbb}\right)$

$=\frac{1}{6}T^{i}_{\cdot j}T^{a}_{\cdot b}\left\{\left(\delta^{i}_{j}\delta^{b}_{a}-\delta^{j}_{a}\delta^{b}_{i}\right)[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]+\left(\delta^{i}_{j}\delta^{b}_{a}-\delta^{j}_{a}\delta^{b}_{i}\right)[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]+\left(\delta^{i}_{j}\delta^{b}_{a}-\delta^{j}_{a}\delta^{b}_{i}\right)[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(T^{i}_{\cdot j}T^{a}_{\cdot b}\delta^{j}_{i}\delta^{b}_{a}-T^{i}_{\cdot j}T^{a}_{\cdot b}\delta^{j}_{a}\delta^{b}_{i}\right)[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$

$=\frac{1}{2}\left(T^{i}_{\cdot i}T^{a}_{\cdot a}-T^{i}_{\cdot a}T^{a}_{\cdot i}\right)[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]=\phi_2^{T}[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$命题得证。

2.5 已知：实对称张量N,其特征方程具有三个不等的实根。求证:N所对应的3个主轴方向 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$是唯一的且互相正交。

证明：

不妨设3个不等实根分别为λ_1，λ_2，λ_3

由$\mathbf{N}\bullet\mathbf{a}_1=\lambda_1\mathbf{a}_1,\mathbf{N}\bullet\mathbf{a}_2=\lambda_2\mathbf{a}_2$,两边分别左点积$\mathbf{a}_2$和$\mathbf{a}_1$得：

$\mathbf{a}_2\bullet\mathbf{N}\bullet\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2\bullet\lambda_1\mathbf{a}_1$， $\mathbf{a}_1\bullet\mathbf{N}\bullet\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_1\bullet\lambda_2\mathbf{a}_2$

$\because\mathbf{a}_2\bullet\mathbf{N}\bullet\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_1\bullet\mathbf{N}\bullet\mathbf{a}_2$ (张量N为对称张量)

$\therefore\mathbf{a}_2\bullet\lambda_1\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_1\bullet\lambda_2\mathbf{a}_2$

即：（λ_1-λ_2）$\mathbf{a}_1\bullet\mathbf{a}_2$=0

显然：λ_1-$\lambda_2\neq0$，且$\mathbf{a}_1\bullet\mathbf{a}_2$=0

同理可证：$\mathbf{a}_1\bullet\mathbf{a}_3$=0，$\mathbf{a}_3\bullet\mathbf{a}_2$=0

$\therefore\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$相互正交且唯一

2.6 已知： $N=e_1e_1+2e_2e_2-2(e_1e_2+e_2e_1)-2(e_1e_3+e_3e_1)$

$$[N^{i}_{\cdot j}]=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&2&0\\-2&0&0\end{bmatrix}$$

求：（1）主分量（从大到小排列）。
（2）主方向对应的正交标准化基$e_{1'}$，$e_{2'}$，$e_{3'}$（右手系）。

解： $\mathcal{J}_1^N=3$， $\mathcal{J}_2^N=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-2\\-2&1\end{vmatrix}=-6$

$$\mathcal{J}_3^N=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\-2&2&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=-8$$

$$\Delta(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8=0$$

$$\lambda=\mu+1$$
$$(\mu+1)^3-3(\mu+1)^2-6(\mu+1)+8=0$$
$$\mu^3+3\mu^2+3\mu+1-3\mu^2-6\mu-3-6\mu-6+8=0$$
$$\mu^3-9\mu=0$$
$$\mu(\mu+3)(\mu-3)=0$$
$$\mu_1=0,\qquad \mu_2=-3,\qquad \mu_3=3$$
$$\lambda_1=\mu_3+1=4,\qquad \lambda_2=\mu_1+1=1,\qquad \lambda_3=\mu_2+1=-2$$

$$\begin{bmatrix}-3 & -2 & -2\\ -2 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0}\qquad \boldsymbol{a}_1=\begin{Bmatrix}2/3\\ -2/3\\ -1/3\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}\qquad \boldsymbol{a}_2=\begin{Bmatrix}1/3\\ 2/3\\ -2/3\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & -2\\ -2 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}\qquad \boldsymbol{a}_3=\begin{Bmatrix}2/3\\ 1/3\\ 2/3\end{Bmatrix}$$

$$\because\qquad \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3\qquad\qquad \therefore\qquad \boldsymbol{e}_{i'}=\boldsymbol{a}_i$$

2.7　已知：

$$\boldsymbol{N}=10\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+4(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)+5\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2-2(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1)+3(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2)-\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\left[N^{i}_{\bullet j}\right]=\begin{bmatrix}10 & 4 & -2\\ 4 & 5 & 3\\ -2 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

求：（1）主分量（从大到小排列）。
（2）主方向对应的正交标准化基$\boldsymbol{e}_{1'}$，$\boldsymbol{e}_{2'}$，$\boldsymbol{e}_{3'}$（右手系）。

解： $\mathcal{J}_1^N=14,\qquad \mathcal{J}_2^N=\begin{vmatrix}10 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 10\end{vmatrix}=6$

$$\mathcal{J}_3^N=\begin{vmatrix}10 & 4 & -2\\ 4 & 5 & 3\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=-192$$

$$\Delta(\lambda)=\lambda^3-14\lambda^2+6\lambda+192=0$$

$$\lambda=\mu+\frac{14}{3}$$

$$\left(\mu+\frac{14}{3}\right)^3-14\left(\mu+\frac{14}{3}\right)^2+6\left(\mu+\frac{14}{3}\right)+192=0$$

$$\mu^3+14\mu^2+\frac{14^2}{3}\mu+\frac{14^3}{27}-14\mu^2-2\times\frac{14^2}{3}\mu-\frac{14^3}{9}+6\mu+28+192=0$$

$$\mu^3-\frac{178}{3}\mu+\frac{452}{27}=0$$

2.8

$$①=\begin{vmatrix}\lambda-T_{.1}^{1} & -T_{2}^{1} & -T_{3}^{1}\\ -T_{.1}^{2} & \lambda-T_{2}^{2} & -T_{3}^{2}\\ -T_{.1}^{3} & -T_{.2}^{3} & \lambda-T_{3}^{3}\end{vmatrix},\quad ②=\begin{vmatrix}\lambda-T_{1}^{.1} & -T_{1}^{.2} & -T_{1}^{.3}\\ -T_{2}^{.1} & \lambda-T_{2}^{.2} & -T_{2}^{.3}\\ -T_{3}^{.1} & -T_{3}^{.2} & \lambda-T_{3}^{.3}\end{vmatrix}\quad (2.1.12b)$$

①$=\tau_3^T$　　②$=\tau_2^T$　**由公式（2.1.12b）det(τ_2^T)=det(τ_3^T)**

2.9 已知：任意二阶张量 $\mathbf{T}$ 及其转置张量 $\mathbf{T}^T$，又

$$\mathbf{X}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^T,\quad \mathbf{Y}=\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{T}$$

求证： $\mathbf{X}$ $\mathbf{Y}$ 均为对称张量，且

$$\Delta(\lambda)=\det\left(\lambda\delta_j^i-X_{.j}^i\right)=\det\left(\lambda\delta_j^i-Y_{.j}^i\right)$$

（两张量的主分量相等，但对应主分量的基矢量并不相等）

证：

$$\mathbf{X}^T=(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^T)^T=(\mathbf{T}^T)^T\cdot\mathbf{T}^T=\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^T=\mathbf{X}$$

$$\mathbf{Y}^T=(\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{T})^T=\mathbf{T}^T\cdot(\mathbf{T}^T)^T=\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{T}=\mathbf{Y}$$

因此 X，Y 均为对称张量，两相量分别用分量表示：

$$X=T\cdot T^T=T_{.j}^iT_{.i}^m g^j g_m=X_j^{.m}g^j g_m$$

所以：$X_{.j}^{i}=X_i^{.j}=T_{.j}^iT_{.i}^m=T_{.i}^mT_{.j}^i$

$$Y=T_{.m}^{i}T_{.j}^{m}g_ig^j=Y_{.j}^{i}g_ig^j=X_i^{.j}g_ig^j$$

则可知 X，Y 的特征多项式相同，特征值相等，则 $\lambda_X=\lambda_Y=\lambda$

2.10、已知任意二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 及转置张量 $\boldsymbol{T}^T$，任意矢量 $\boldsymbol{u}$,

求证：$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}^T$。

证：$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\cdot u^k\boldsymbol{g}_k=T_{ij}u^k\delta_k^j\boldsymbol{g}^i=T_{ij}u^j\boldsymbol{g}^i$

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}^T=u^k\boldsymbol{g}_k\cdot T_{ij}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^i=T_{ij}u^k\delta_k^j\boldsymbol{g}^i=T_{ij}u^j\boldsymbol{g}^i$

$\therefore$ 原式得证

2.11 已知任意二阶张量 *A*, *B*。求证: $\left(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}\right)^T=\mathbf{B}^T\bullet\mathbf{A}^T$

证明：

$$\mathbf{A}=A_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\quad \mathbf{B}=B_{rs}\mathbf{g}^r\mathbf{g}^s$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})^T&=\left(A_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\bullet B^{rs}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\right)^T\\&=\left(A_{ij}B^{rs}\delta_r^j\mathbf{g}^i\mathbf{g}_s\right)^T\\&=\left(A_{ij}B^{js}\mathbf{g}^i\mathbf{g}_s\right)^T\\&=\left(U_i^{s}\mathbf{g}^i\mathbf{g}_s\right)^T\\&=U_{.i}^{s}\mathbf{g}^i\mathbf{g}_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^T\bullet\mathbf{A}^T&=\left(B^{rs}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\right)^T\bullet\left(A_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\right)^T\\&=\left(B^{sr}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\right)\bullet\left(A_{ji}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\right)\\&=A_{ji}B^{sr}\delta_s^i\mathbf{g}_r\mathbf{g}^j\\&=A_{ji}B^{ir}\mathbf{g}_r\mathbf{g}^j\\&=U_j^{r}\mathbf{g}_r\mathbf{g}^j\\&=U_i^{s}\mathbf{g}_s\mathbf{g}^i=U_{.i}^{s}\mathbf{g}^i\mathbf{g}_s\\&\therefore\quad(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\bullet\mathbf{A}^T\end{aligned}$$

2-12 已知：T 为正则的二阶张量，u 为一矢量，$T\cdot u=0$

求证：$u=0$

解：T 为正则的二阶张量

存在 T^{-1} 使 $T\cdot T^{-1}=T^{-1}\cdot T=G$

将等式两边都左乘 T^{-1}

左边=$T^{-1}\cdot T\cdot u=G\cdot u=u$

右边=$T^{-1}\cdot 0=0$

所以 $u=0$

2.13 已知 T 为正则 2 阶张量。
求证：其逆张量 T^{-1} 的矩阵等于 T 的逆矩阵，$[T^{-1}]=[T]^{-1}$
$T=T^{ij}g_ig_j$
$T^{-1}=S_{kl}g_kg_l$
根据定义：$T\bullet T^{-1}=T^{-1}\bullet T=G$
点积缩去 g_j 与 g_k 有：
$$G=T_{ij}S_{kl}\delta_l^i g_ig_l=\delta_l^i g_ig_l$$
矩阵形式为：$[T][T^{-1}]=[E]$
又因为 T 正则，所以行列式不为零，所以矩阵 $[T]$ 可逆。
$[T]^{-1}=[T^{-1}]$ 得证。

2.14 求证：$(\mathbf{T}^T)^{-1}=(\mathbf{T}^{-1})^T$（T 为正则的二阶张量）

证明：

由 $(\mathbf{T}^{-1})^T\bullet\mathbf{T}^T=(\mathbf{T}^{-1}\bullet\mathbf{T})^T=\mathbf{G}^T=\mathbf{G}=(\mathbf{T}^T)^{-1}\bullet\mathbf{T}^T$　　P54公式2.24 $\mathbf{T}^{-1}\bullet\mathbf{T}=\mathbf{G}$

$[(\mathbf{T}^{-1})^T-(\mathbf{T}^T)^{-1}]\bullet\mathbf{T}^T=0$ 等式两边均又点积 $(\mathbf{T}^T)^{-1}$ 得：　　（P70根据度量张量的性质

$[(\mathbf{T}^{-1})^T-(\mathbf{T}^T)^{-1}]\bullet\mathbf{T}^T\bullet(\mathbf{T}^T)^{-1}=[(\mathbf{T}^{-1})^T-(\mathbf{T}^T)^{-1}]\bullet\mathbf{G}=0$　　$G\bullet T=T=T\bullet G$）

可证：$(\mathbf{T}^{-1})^T=(\mathbf{T}^T)^{-1}$　　（正则张量的转置张量仍是正则张量）

2.16 （1）已知：T 为任意二阶张量。求证：$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\geq\mathbf{0},\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{T}\geq\mathbf{0}$
解：由题意得
设 u 为任一非零矢量，它与二阶张量的点积 $u\cdot T=v$，v 也是一矢量，因为 $(T\cdot T^T)^T=T\cdot T^T$，所以 $T\cdot T^T$ 为对称二阶张量。
$$u\cdot(T^T\cdot T)\cdot u=(u\cdot T^T)\cdot(T\cdot u)=(T\cdot u)\cdot(T\cdot u)=|v|^2\geq 0$$
故由定义 $u\cdot N\cdot u=N:uu\geq 0$，$T^T\cdot T\geq 0$。
同理可得 $\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{T}\geq\mathbf{0}$

2.17 已知：正交张量 Q。
求证：$Q^T=Q^{-1}$ 亦为正交张量。
解：
$$[Q^T]^{-1}=[Q^{-1}]^{-1}=Q,$$
$$[Q^T]^T=Q$$
则有 $[Q^T]^{-1}=[Q^T]^T$
故 Q^T 亦为正交张量；
$$[Q^{-1}]^{-1}=Q$$
$$[Q^{-1}]^T=[Q^T]^T=Q$$
因此有，$[Q^{-1}]^{-1}=[Q^{-1}]^T$
故 Q^{-1} 亦为正交张量；
综上，$Q^T=Q^{-1}$ 亦为正交张量。

2.18. 已知：对于任意矢量 u, v, 均成立 $(\mathbf{Q}\ ?\mathbf{u})\ ?(\mathbf{Q}\ ?\mathbf{v})=\mathbf{u}\ ?\mathbf{v}$
求证：$\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}=\mathbf{Q}^{-1}$，Q 为正交张量。
证明：要证 $\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}=\mathbf{Q}^{-1}$，Q 为正交张量。考虑到 u, v 的任意性，只需证明 $\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\bullet\mathbf{Q}=\mathbf{G}$，
即 $\mathbf{Q}_{\mathrm{j}}^{\ \mathrm{i}}\bullet\mathbf{Q}^{\mathrm{i}}_{\ \mathrm{j}}=1$

$$(\mathbf{Q}\bullet\mathbf{u})\bullet(\mathbf{Q}\bullet\mathbf{v})=(\mathbf{Q}\bullet\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\bullet(\mathbf{Q}\bullet\mathbf{u})=(\mathbf{v}\bullet\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})\bullet(\mathbf{Q}\bullet\mathbf{u})=$$

$$(\mathbf{v}_i\mathbf{g}^i\bullet\mathbf{Q}_{m}^{\bullet\,l}\mathbf{g}_l\mathbf{g}^m)\bullet(\mathbf{Q}^{n}_{\bullet k}\mathbf{g}_n\mathbf{g}^k\bullet\mathbf{u}^j\mathbf{g}_j)=(\mathbf{v}_i\mathbf{Q}_{m}^{\bullet\,l}\boldsymbol{\delta}_l^i\mathbf{g}^m)\bullet(\mathbf{Q}^{n}_{\bullet k}\mathbf{u}^j\boldsymbol{\delta}_j^k\mathbf{g}_n)$$

$$=\mathbf{v}_i\mathbf{Q}_{m}^{\bullet\,i}\mathbf{Q}^{n}_{\bullet j}\mathbf{u}^j\mathbf{g}^m\bullet\mathbf{g}_n=\mathbf{v}_i\mathbf{Q}_{m}^{\bullet\,i}\mathbf{Q}^{n}_{\bullet j}\mathbf{u}^j\boldsymbol{\delta}_n^m=\mathbf{v}_i\mathbf{Q}_{n}^{\bullet i}\mathbf{Q}^{n}_{\bullet j}\mathbf{u}^j=\mathbf{v}_i\mathbf{Q}_{n}^{\bullet i}\mathbf{Q}^{n}_{\bullet j}\boldsymbol{\delta}_n^j\mathbf{u}^n$$

$$=\mathbf{v}_i\mathbf{Q}_{j}^{\bullet i}\mathbf{Q}^{n}_{\bullet j}\mathbf{u}^n=\mathbf{v}_n\boldsymbol{\delta}_i^n\mathbf{Q}_{j}^{\bullet i}\mathbf{Q}^{n}_{\bullet j}\mathbf{u}^n=\mathbf{v}_n\mathbf{Q}_{j}^{\bullet n}\mathbf{Q}^{n}_{\bullet j}\mathbf{u}^n=\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\mathbf{u}^m\mathbf{g}_m\bullet\mathbf{v}_n\mathbf{g}^n$$

$$=\mathbf{u}^n\mathbf{v}_n$$

$$\Rightarrow\mathbf{Q}_{j}^{\bullet n}\mathbf{Q}^{n}_{\bullet j}=1$$

2.19 已知：矢量$v\ \omega$,，正交张量Q

求证：$(Q\cdot v)\times(Q\cdot\omega)=(\det Q)Q\cdot(v\times\omega)$

证明：$(Q\cdot v)\times(Q\cdot\omega)=Q^{i}_{\cdot j}v^jQ^{k}_{\cdot l}\omega^l g_i\times g_k=\varepsilon_{ikm}Q^{i}_{\cdot j}Q^{k}_{\cdot l}v^j\omega^l g^m$

$$(\det Q)Q\cdot(v\times\omega)=Q^{i}_{\cdot 1}Q^{k}_{\cdot 2}Q^{m}_{\cdot 3}\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jnl}v^j\omega^l Q\cdot g^n$$

$$=\varepsilon_{ikm}Q^{i}_{\cdot j}Q^{k}_{\cdot l}Q^{m}_{\cdot n}v^j\omega^l Q_{s}^{\cdot n}g^s$$

$$=\varepsilon_{ikm}Q^{i}_{\cdot j}Q^{k}_{\cdot l}v^j\omega^l\delta_s^m g^s$$

$$=\varepsilon_{ikm}Q^{i}_{\cdot j}Q^{k}_{\cdot l}v^j\omega^l g^m$$

故:$(Q\cdot v)\times(Q\cdot\omega)=(\det Q)Q\cdot(v\times\omega)$

2.20 已知：矢量 wv，正则的二阶张量 B。求证：

$$(B\cdot v)\times(B\cdot w)=(\det B)(B^{-1})^T\cdot(v\times w)$$

证明：$(B\cdot v)\times(B\cdot w)=(\det B)(B^{-1})^T\cdot(v\times w)$

则可得：$(B\cdot v)\times(B\cdot w)=\mathrm{B}^{i}_{\cdot j}B^{m}_{\cdot n}V^jW^nB^{q}_{\cdot b}\varepsilon_{imq}g^b=\det B\varepsilon_{jnb}V^jW^ng^b=\det B(\mathrm{v}\times\mathrm{w})$

即原命题成立。

21.求证 2.9 题与 2.16 题中的 $X=T\bullet T^{T}$ 与 $Y=T^{T}\bullet T$ 之间互为正交相似张量。即，存在正交张量 Q，使得 $X=Q\bullet Y\bullet Q^{T}$

证明：$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Y}\cdot\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T)^T=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T)^T=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T)^T$

又 Q 为正交张量，所以有$\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}^{-1}$,所以$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$

故$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Y}\cdot\boldsymbol{Q}^T=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^T)^T=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{X}$

2.22 已知：$\mathbf{D}$ 为二阶对称张量 $\mathbf{N}$ 的偏斜张量。

求证：

$$\wp_1^D=0,\wp_2^D=\wp_2^N-\frac{1}{3}\left(\wp_1^N\right)^2$$

$$\wp_3^D=\wp_3^N-\frac{1}{3}\wp_1^N\wp_2^N+\frac{2}{27}\left(\wp_1^N\right)^3$$

$$\wp_2^D=-\frac{1}{6}\left\{\left(N^1_{\bullet1}-N^2_{\bullet2}\right)^2+\left(N^2_{\bullet2}-N^3_{\bullet3}\right)^2+\left(N^3_{\bullet3}-N^1_{\bullet1}\right)^2+\right.$$

$$\left.6\left(N^1_{\bullet2}N^2_{\bullet1}+N^2_{\bullet3}N^3_{\bullet2}+N^3_{\bullet1}N^1_{\bullet3}\right)\right\}$$

证：$\mathbf{N}=\mathbf{P}+\mathbf{D}$

其中，球形张量为 $\mathbf{P}=P^i_{\bullet j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j=\frac{1}{3}\wp_1^T\mathbf{G}=\frac{1}{3}\wp_1^T\delta^i_j\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j$

球形张量只有一个独立的分量

$$P^i_{\bullet j}=\frac{1}{3}\wp_1^T\delta^i_j=\frac{1}{3}\wp_1^N\delta^i_j=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(N^1_{\bullet1}+N^2_{\bullet2}+N^3_{\bullet3}\right),i=j\\[2ex]0,i\neq j\end{cases}$$

球形张量的三个主不变量为

$$\wp_1^P = \wp_1^T = \wp_1^N, \wp_2^P = \frac{1}{3}\left(\wp_1^N\right)^2, \wp_3^P = \frac{1}{27}\left(\wp_1^N\right)^3$$

偏斜张量 $\mathbf{D}$ 为

$$\mathbf{D} = D_{\bullet j}^{\ i} \mathbf{g}_i \mathbf{g}^j = \left(N_{\bullet j}^{\ i} - P_{\bullet j}^{\ i}\right)\mathbf{g}_i \mathbf{g}^j$$

$$D_{\bullet j}^{\ i} = N_{\bullet j}^{\ i} - \frac{1}{3}\wp_1^N \delta_j^i$$

$$= \begin{cases} N_{\bullet j}^{\ i} - \frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right), i = j \\ N_{\bullet j}^{\ i}, i \neq j \end{cases}$$

$$\wp_1^D = \mathbf{G} : \mathbf{D} = \delta_l^i D_{\bullet i}^{\ l} = D_i^i = N_{\bullet 1}^{\ 1} - \frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right),$$

$$+ N_{\bullet 2}^{\ 2} - \frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right) + N_{\bullet 3}^{\ 3} - \frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right) = 0$$

$$\wp_2^D = \frac{1}{2}\delta_{lm}^{ij} D_{\bullet i}^{\ l} D_{\bullet j}^{\ m} = \frac{1}{2}\left(D_{\bullet i}^{\ i} D_{\bullet l}^{\ l} - D_{\bullet l}^{\ i} D_{\bullet i}^{\ l}\right) = \begin{vmatrix} D_{\bullet 1}^{\ 1} & D_{\bullet 2}^{\ 1} \\ D_{\bullet 1}^{\ 2} & D_{\bullet 2}^{\ 2} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} D_{\bullet 2}^{\ 2} & D_{\bullet 3}^{\ 2} \\ D_{\bullet 2}^{\ 3} & D_{\bullet 3}^{\ 3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{\bullet 3}^{\ 3} & D_{\bullet 1}^{\ 3} \\ D_{\bullet 3}^{\ 1} & D_{\bullet 1}^{\ 1} \end{vmatrix} = D_{\bullet 1}^{\ 1} D_{\bullet 2}^{\ 2} - D_{\bullet 2}^{\ 1} D_{\bullet 1}^{\ 2} + D_{\bullet 2}^{\ 2} D_{\bullet 3}^{\ 3} - D_{\bullet 3}^{\ 2} D_{\bullet 2}^{\ 3} + D_{\bullet 3}^{\ 3} D_{\bullet 1}^{\ 1} - D_{\bullet 1}^{\ 3} D_{\bullet 3}^{\ 1}$$

$$= \left(N_{\bullet 1}^{\ 1} - \frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right)\right)\left(N_{\bullet 2}^{\ 2} - \frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right)\right) - N_{\bullet 2}^{\ 1} N_{\bullet 1}^{\ 2} +$$

$$\left(N_{\bullet 2}^{\ 2} - \frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right)\right)\left(N_{\bullet 3}^{\ 3} - \frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right)\right) - N_{\bullet 3}^{\ 2} N_{\bullet 2}^{\ 3} +$$

$$\left(N_{\bullet 3}^{\ 3} - \frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right)\right)\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} - \frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right)\right) - N_{\bullet 1}^{\ 3} N_{\bullet 3}^{\ 1}$$

$$= -\frac{1}{6}\Big\{\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} - N_{\bullet 2}^{\ 2}\right)^2 + \left(N_{\bullet 2}^{\ 2} - N_{\bullet 3}^{\ 3}\right)^2 + \left(N_{\bullet 3}^{\ 3} - N_{\bullet 1}^{\ 1}\right)^2 +$$

$$6\left(N_{\bullet 2}^{\ 1} N_{\bullet 1}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 2} N_{\bullet 2}^{\ 3} + N_{\bullet 1}^{\ 3} N_{\bullet 3}^{\ 1}\right)\Big\}$$

$$= N_{\bullet 1}^{\ 1} N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 2}^{\ 2} N_{\bullet 3}^{\ 3} + N_{\bullet 3}^{\ 3} N_{\bullet 1}^{\ 1} - N_{\bullet 2}^{\ 1} N_{\bullet 1}^{\ 2} - N_{\bullet 3}^{\ 2} N_{\bullet 2}^{\ 3} - N_{\bullet 1}^{\ 3} N_{\bullet 3}^{\ 1} -$$

$$\frac{1}{3}\left(N_{\bullet 1}^{\ 1} + N_{\bullet 2}^{\ 2} + N_{\bullet 3}^{\ 3}\right)^2 = \wp_2^N - \frac{1}{3}\left(\wp_1^N\right)$$

$$\wp_3^D = \begin{vmatrix} D_{\bullet 1}^{\ 1} D_{\bullet 2}^{\ 1} D_{\bullet 3}^{\ 1} \\ D_{\bullet 1}^{\ 2} D_{\bullet 2}^{\ 2} D_{\bullet 3}^{\ 2} \\ D_{\bullet 1}^{\ 3} D_{\bullet 2}^{\ 3} D_{\bullet 3}^{\ 3} \end{vmatrix} = D_{\bullet 1}^{\ 1} D_{\bullet 2}^{\ 2} D_{\bullet 3}^{\ 3} + D_{\bullet 3}^{\ 1} D_{\bullet 1}^{\ 2} D_{\bullet 2}^{\ 3} + D_{\bullet 1}^{\ 3} D_{\bullet 2}^{\ 1} D_{\bullet 3}^{\ 2} -$$

$$D_{\bullet 3}^{\ 1} D_{\bullet 2}^{\ 2} D_{\bullet 1}^{\ 3} - D_{\bullet 1}^{\ 1} D_{\bullet 3}^{\ 2} D_{\bullet 2}^{\ 3} - D_{\bullet 3}^{\ 3} D_{\bullet 2}^{\ 1} D_{\bullet 1}^{\ 2} = \cdots =$$

$$\wp_3^N - \frac{1}{3}\wp_1^N \wp_2^N + \frac{2}{27}\left(\wp_1^N\right)^3$$

得证。

2.23

证明：

$$\boldsymbol{N} \bullet \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{P}) \bullet \boldsymbol{a} = \lambda^N \boldsymbol{a}$$

$$N_{\cdot j}^{\ i} a^j = \left(D_{\cdot j}^{\ i} + P_{\cdot j}^{\ i}\right) a^j = \lambda^N a^j$$

$$N_{\cdot j}^{\ i} a^j = \left(D_{\cdot j}^{\ i} + \frac{1}{3} f_1^N \delta_j^i\right) a^j = \lambda^N a^j$$

$$D_{\cdot j}^{\ i} a^j = (\lambda^N - \frac{1}{3} f_1^N \delta_j^i) a^j = \lambda^D a^j$$

也即： $\boldsymbol{D} \bullet \boldsymbol{a} = \lambda^D \boldsymbol{a}$

∴ 偏斜张量 $\boldsymbol{D}$ 与它对应的对称张量 $\boldsymbol{N}$ 具有相同的主方向

由 $N_{\bullet j}^{i}=D_{\bullet j}^{i}+\frac{1}{3}f_{1}^{N}\delta_{j}^{i}$偏 斜 张 量 $\boldsymbol{D}$的 主 分 量 为 ：

$D_{i}=N_{i}-\frac{1}{3}f_{1}^{N}$

[2.24] 已知：二阶张量

$$\boldsymbol{T}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

求：（1）进行加法分解

（2）进行乘法分解

解：（1）由二阶张量的表达式知，其二阶张量的分量为

$$[\boldsymbol{T}]=[T_{ij}]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \sqrt{3} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

又因为，$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=T_{ji}\boldsymbol{e}_{ij}$

$$[\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}]=[T_{ji}]=[T_{ij}]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

对二阶张量进行对称化与反对称化运算，$\boldsymbol{N}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})$; $\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})$

$$[\boldsymbol{N}]=[N_{ij}]=\frac{1}{2}([T_{ij}]+[T_{ji}])=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \sqrt{3} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{\Omega}]=[\Omega_{ij}]=\frac{1}{2}([T_{ij}]-[T_{ji}])=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \sqrt{3} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & 0\\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以，

$$\boldsymbol{T}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{\Omega}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\right)+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\frac{3\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\right)$$

(2)二阶张量作乘法分解：

$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{Q}_1$

而$(\boldsymbol{H}_1)^2=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$

$$[\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}]=[T_{ij}][T_{ji}]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \sqrt{3} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

所以$[\boldsymbol{H}_1]=\begin{bmatrix}\sqrt{1} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{4} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{H}_1]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

而$\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{H}_1)^{-1}\cdot\mathbf{T}$

又因为$[(\boldsymbol{H}_1)^{-1}]=[\boldsymbol{H}_1]^{-1}$

$$[\boldsymbol{Q}_1]=[\boldsymbol{H}_1]^{-1}[\boldsymbol{T}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \sqrt{3} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

经验证，

$$[\boldsymbol{Q}_1\cdot\boldsymbol{Q}_1{}^{\mathrm{T}}]=[\boldsymbol{Q}_1][\boldsymbol{Q}_1{}^{\mathrm{T}}]=[\boldsymbol{Q}_1][\boldsymbol{Q}_1]^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{G}]$$ 所以，$\boldsymbol{Q}_1$是正交张量，$\boldsymbol{H}_1$是正张量。

$$\boldsymbol{T}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{Q}_1$$

$$=(1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\right)$$

2.25 对于以下三种应力状态的应力张量σ，将其分解为球形张量与偏斜张量S。求$\mathcal{J}_1^{\sigma}$，$\mathcal{J}_2^{S}$与$\mathcal{J}_3^{S}$，以及偏斜张量S的ω角。

（1）单向拉伸：$\sigma_1=\sigma_0\quad 0$，$\sigma_2=\sigma_3=0$；

（2）单向压缩 $\sigma_1=\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\sigma_0<0$；

（3）纯剪切： $\sigma_1=\tau>0$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\tau$。

解：（1）单向拉伸

$$\begin{bmatrix}\sigma_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_0/3 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_0/3 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_0/3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\sigma_0/3 & 0 & 0\\ 0 & -\sigma_0/3 & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_0/3\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}_1^{\sigma}=\sigma_0$$

$$\mathcal{J}_2^{S}=\begin{vmatrix}2\sigma_0/3 & 0\\ 0 & -\sigma_0/3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-\sigma_0/3 & 0\\ 0 & -\sigma_0/3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-\sigma_0/3 & 0\\ 0 & 2\sigma_0/3\end{vmatrix}$$

$$=\left(-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\right)\sigma_0^2=-\frac{1}{3}\sigma_0^2$$

$$\mathcal{J}_3^{S}=\begin{vmatrix}2\sigma_0/3 & 0 & 0\\ 0 & -\sigma_0/3 & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_0/3\end{vmatrix}=\frac{2}{27}\sigma_0^3$$

$$\cos 3\omega=-\frac{\sqrt{27}\mathcal{J}_3^{S}}{2\left|\mathcal{J}_2^{S}\right|^{3/2}}=-\frac{\sqrt{27}\bullet 2\sigma_0^3/27}{2\left|-\sigma_0^2/3\right|^{3/2}}=-1$$

$$\omega=60^{\circ}$$

（2）单向压缩

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sigma_0/3 & 0 & 0\\ 0 & -\sigma_0/3 & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_0/3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sigma_0/3 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_0/3 & 0\\ 0 & 0 & -2\sigma_0/3\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}_1^{\sigma}=-\sigma_0$$

$$\mathcal{J}_2^{S}=\begin{vmatrix}\sigma_0/3 & 0\\ 0 & \sigma_0/3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_0/3 & 0\\ 0 & -2\sigma_0/3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2\sigma_0/3 & 0\\ 0 & \sigma_0/3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\right)\sigma_0^2=-\frac{1}{3}\sigma_0^2$$

$$\mathcal{J}_3^{S}=\begin{vmatrix}\sigma_0/3 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_0/3 & 0\\ 0 & 0 & -2\sigma_0/3\end{vmatrix}=-\frac{2}{27}\sigma_0^3$$

$$\cos 3\omega=-\frac{\sqrt{27}\mathcal{J}_3^{S}}{2\left|\mathcal{J}_2^{S}\right|^{3/2}}=-\frac{\sqrt{27}\bullet\left(-2\sigma_0^3/27\right)}{2\left|-\sigma_0^2/3\right|^{3/2}}=1$$

$$\omega=0^{\circ}$$

（3）纯剪切

$$\begin{bmatrix}\tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\tau\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\tau\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}_1^{\sigma}=\mathcal{J}_3^{S}=0$$

$$\mathcal{J}_2^{S}=\begin{vmatrix}\tau & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -\tau\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-\tau & 0\\ 0 & \tau\end{vmatrix}=-\tau^2$$

$$\cos 3\omega = -\frac{\sqrt{27}\mathcal{J}_3^S}{2\left|\mathcal{J}_2^S\right|^{3/2}} = -\frac{\sqrt{27}\bullet 0}{2\left|-\tau^2\right|^{3/2}} = 0$$

$$\omega = 30^\circ$$

2.27　已知：对称二阶张量 M 与 N 之间满足：$M^2=N$。
求证：M 与 N 具有相同的主方向。

证明： $\quad \boldsymbol{M}\bullet\boldsymbol{a} = \lambda^M\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{N}\bullet\boldsymbol{a} = \boldsymbol{M}^2\bullet\boldsymbol{a} = \boldsymbol{M}\bullet\lambda^M\boldsymbol{a} = \left(\lambda^M\right)^2\boldsymbol{a} = \lambda^N\boldsymbol{a}$$

即，M,N 具有相同的主方向 a 。

2.28、已知：$\boldsymbol{A}$为二阶张量，$\boldsymbol{Q}$为任意正交张量，对于一切$\boldsymbol{Q}$，
均有$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{A}$。求证：$A$为球形张量。
证明：设二阶张量A在一组正交标准基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$中的并矢展开式为
$\boldsymbol{A} = A_{11}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + A_{12}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + A_{13}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + A_{21}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + A_{22}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2$
$+ A_{23}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + A_{31}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + A_{32}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + A_{33}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$
由于Q为任意正交张量，取正交张量$Q = -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$
则，$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}^T = A_{11}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 - A_{12}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - A_{13}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 - A_{21}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + A_{22}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2$
$+ A_{23}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 - A_{31}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + A_{32}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + A_{33}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$
由题知$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{A}$

则有：$A_{12} = -A_{12} = 0$，$A_{13} = -A_{13} = 0$，$A_{21} = -A_{21} = 0$，$A_{31} = -A_{21} = 0$
同理，取正交张量$Q = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$
则有$\boldsymbol{A} = A_{11}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + A_{22}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + A_{33}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$
可得，$A_{23} = A_{32} = 0$
证得$\boldsymbol{A}$为对称张量
由$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{A}$得
$A_{11} = A_{22}$
同理，取正交张量$Q = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$
可证：$A_{22} = A_{33}$
故A_{11}（$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$）为球形张量。

2.29 解

$$T = \mathrm{N} + \Omega = \begin{bmatrix} \mathrm{N}_1 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & \mathrm{N}_2 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & \mathrm{N}_3 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Tr}(\mathrm{T}) = T^i{}_{\cdot j}$

$\mathrm{Tr}(T^2) = T^i{}_{\cdot j}T^j{}_{\cdot i}$

$\mathrm{Tr}(T^3) = T^i{}_{\cdot j}T^j{}_{\cdot k}T^k{}_{\cdot i}$

因主不变量与坐标的变换无关，因此可以将上试与矩阵中的元素分别对应

$\mathrm{Tr}(\mathrm{T}) = N_1 + N_2 + N_3$

$\mathrm{Tr}(\mathrm{T}) = N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 - 2\omega_1^2 - 2\omega_2^2 - 2\omega_3^2$

$\mathrm{Tr}(\mathrm{T}) = (N_1)^3 + (N_2)^3 + (N_3)^3$　　(P83)