3.1
解：设

$$\tilde{v} = Q \cdot v = v \cdot Q^T$$

有
$$\tilde{f} = e^{\tilde{v}^2} = e^{(Q \cdot v)^2} = e^{(v \cdot Q^T) \cdot (Q \cdot v)} = e^{v \cdot E \cdot v} = e^{v^2}$$

函数值保持不变
所以为各向同性函数。
3 .2 已知 ：T 为二阶张量。
求：下列函数是否为T 的各向同性标量函数，并说明理由。
（1） 在某一特定的笛卡尔坐标系中

$$f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(T_{ij}\right)^2$$

（2）$f = T^T : T$

解答:（1）是 $f = T^T : T$ 是 T 的不变量

（2） 是 $f = T^{i}_{\bullet j} T^{i}_{\bullet_i} = \lambda_2^*$

3.3 求证：$H = T^n$ 是二阶张量T的各向同性二阶张量函数。

证明：设$\boldsymbol{Q}$为任意正交张量，$\boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{E}$

$$\begin{aligned}(\widetilde{\boldsymbol{T}})^{\boldsymbol{n}} &= (\boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{\boldsymbol{n}} \\ &= \boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \bullet \boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \ldots \boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \bullet \boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}} \bullet \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

根据各向同性函数的定义，即证得$H = T^n$ 是二阶张量T 的各向同性二阶张量函数。

3.4 （1） $H = \left(\widetilde{T}\right)^T = \left(QTQ^T\right)^T = Q^T T^T Q = T^T$

（2） $H = \widetilde{T} \cdot A \cdot \widetilde{T} = QTQ^T \cdot A \cdot QTQ^T$ 其中 $Q^T A Q \neq A$,所以其不为 T 各向同性张量函数

3.5 已知：二阶张量 T 的张量函数$H = A \cdot T$ （A 为二阶常张量)。
求：A 满足什么条件时，H 是 T 的各向同性函数。
解：当 A 是球形张量时，$H = A \cdot T$ 是 T 的各向同性函数。

$H = A \cdot T$ 是 T 的各向同性函数即$H = A \cdot T = (Q \cdot A \cdot Q^T) \cdot T$，所以$Q \cdot A \cdot Q^T = A$

设二阶张量 A 在一组正交标准化基e_1，e_2，e_3 中的并矢展开式为

$A = A_{11}\mathrm{e}_1\mathrm{e}_1 + A_{12}\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 + A_{13}\mathrm{e}_1\mathrm{e}_3 + A_{21}\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1 + A_{22}\mathrm{e}_2\mathrm{e}_2 + A_{23}\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3 + A_{31}\mathrm{e}_3\mathrm{e}_1 + A_{32}\mathrm{e}_3\mathrm{e}_2 + A_{33}\mathrm{e}_3\mathrm{e}_3$

先证 A 是对称张量。若取正交张量$Q = -\mathrm{e}_1\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3\mathrm{e}_3$ (为关于 x^2，x^3 平面的镜面反射)，则

$Q \cdot A \cdot Q^T = A_{11}\mathrm{e}_1\mathrm{e}_1 - A_{12}\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 - A_{13}\mathrm{e}_1\mathrm{e}_3 - A_{21}\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1 + A_{22}\mathrm{e}_2\mathrm{e}_2 + A_{23}\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3 - A_{31}\mathrm{e}_3\mathrm{e}_1 + A_{32}\mathrm{e}_3\mathrm{e}_2 + A_{33}\mathrm{e}_3\mathrm{e}_3$ 由 于 $Q \cdot A \cdot Q^T = A$

故可证得，$A_{12} = -A_{12} = 0$，$A_{13} = -A_{13} = 0$，$A_{21} = -A_{21} = 0$，$A_{31} = -A_{31} = 0$

同理若设$Q = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3\mathrm{e}_3$

可证得 $A_{23} = A_{32} = 0$

故$A = A_{11}\mathrm{e}_1\mathrm{e}_1 + A_{22}\mathrm{e}_2\mathrm{e}_2 + A_{33}\mathrm{e}_3\mathrm{e}_3$ 是对称张量。

再证 A 是球形张量。即证 $A_{11} = A_{22} = A_{33}$

若取$Q = \mathrm{e}_2\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3\mathrm{e}_3$（即绕 x^3 转动 90º）

$Q \cdot A \cdot Q^T = A_{11}\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3 + A_{22}\mathrm{e}_1\mathrm{e}_1 + A_{33}\mathrm{e}_3\mathrm{e}_3$

由于$Q \cdot A \cdot Q^T = A$，故可证得，$A_{11} = A_{22}$

同理，若设$Q = \mathrm{e}_1\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_3\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_2\mathrm{e}_3$，可证得 $A_{22} = A_{33}$

故$A = A_{11}(\mathrm{e}_1\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3\mathrm{e}_3) = A_{11}G$ 是球形张量。

3.7 设反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的轴方向为 $\boldsymbol{e}_3$，在正交标准化基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 中

$$[\boldsymbol{\Omega}]=\begin{bmatrix}0 & -\varphi & 0\\ \varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

主不变量为 $\mathscr{J}_1^{\boldsymbol{\Omega}}=0$，$\mathscr{J}_2^{\boldsymbol{\Omega}}=\varphi^2$，$\mathscr{J}_3^{\boldsymbol{\Omega}}=0$

已知：张量函数

$$\boldsymbol{R}=e^{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{G}+\frac{1}{1!}\boldsymbol{\Omega}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{\Omega}^2+\cdots \quad \text{（设级数收敛）}$$

求证：

$$[\boldsymbol{R}]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R}$ 是正交张量，其主不变量为 $\mathscr{J}_1^{\boldsymbol{R}}=1+2\cos\varphi$，$\mathscr{J}_2^{\boldsymbol{R}}=1+2\cos\varphi$，$\mathscr{J}_3^{\boldsymbol{R}}=1$

解：$\boldsymbol{R}=e^{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{G}+\frac{1}{1!}\boldsymbol{\Omega}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{\Omega}^2+\cdots=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\varphi-\frac{1}{3!}\varphi^3+\cdots\right)\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$+\left(-\frac{1}{2!}\varphi^2+\frac{1}{4!}\varphi^4-\cdots\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(1-\frac{1}{2!}\varphi^2+\frac{1}{4!}\varphi^4-\cdots\right) & -\left(\varphi-\frac{1}{3!}\varphi^3+\cdots\right) & 0\\ \left(\varphi-\frac{1}{3!}\varphi^3+\cdots\right) & \left(1-\frac{1}{2!}\varphi^2+\frac{1}{4!}\varphi^4-\cdots\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

由于 $\cos\varphi=1-\frac{1}{2!}\varphi^2+\frac{1}{4!}\varphi^4-\cdots$，$\sin\varphi=\varphi-\frac{1}{3!}\varphi^3+\frac{1}{5!}\varphi^5-\cdots$，则

$$[\boldsymbol{R}]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

又因为 $[\boldsymbol{R}][\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{G}$，则 $\boldsymbol{R}$ 为正交张量。

$\mathscr{J}_1^{\boldsymbol{R}}==\cos\varphi+\cos\varphi+1=1+2\cos\varphi$，$\mathscr{J}_2^{\boldsymbol{R}}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}\cos\varphi & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1+2\cos\varphi$，$\mathscr{J}_3^{\boldsymbol{R}}=\det\boldsymbol{R}=1$

3.8 求证：前题中

（1）$\boldsymbol{R}=e^{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{G}+\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\boldsymbol{\Omega}+\dfrac{2\sin^2\left(\varphi/2\right)}{\varphi^2}\boldsymbol{\Omega}^2$

（2）$\boldsymbol{\Omega}=\ln\boldsymbol{R}=\dfrac{\varphi}{2\sin\varphi}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G})\bullet\left[(1+2\cos\varphi)\boldsymbol{G}-\boldsymbol{R}\right]$

解：（1）注意到 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 均有三个不同的特征根，$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 可以同时化为对角型标准形。现设 $\boldsymbol{R}=e^{\boldsymbol{\Omega}}=k_0\boldsymbol{G}+k_1\boldsymbol{\Omega}+k_2\boldsymbol{\Omega}^2$，则有 $\boldsymbol{\Omega}=i\varphi\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1-i\varphi\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2$，$\boldsymbol{R}=e^{i\varphi}\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+e^{-i\varphi}\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$；

$$\begin{cases}k_0+k_1 i\varphi+k_2(i\varphi)^2=e^{i\varphi}\\ k_0-k_1 i\varphi+k_2(-i\varphi)^2=e^{-i\varphi}\\ k_0=1\end{cases}$$

解以上方程组可得

$k_0=1$，$k_1=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2i\varphi}=\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$，$k_2=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}-2}{2\varphi^2}=\dfrac{\cos\varphi-1}{\varphi^2}=\dfrac{2\sin^2\left(\varphi/2\right)}{\varphi^2}$

则 $\boldsymbol{R}=e^{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{G}+\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\boldsymbol{\Omega}+\dfrac{2\sin^2\left(\varphi/2\right)}{\varphi^2}\boldsymbol{\Omega}^2$ 。

（2）设 $\boldsymbol{\Omega}=\ln\boldsymbol{R}=k_0\boldsymbol{G}+k_1\boldsymbol{R}+k_2\boldsymbol{R}^2$，

则有 $\boldsymbol{\Omega}=i\varphi\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1-i\varphi\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2$，$\boldsymbol{R}=e^{i\varphi}\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+e^{-i\varphi}\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$，由式（3.4.17）得到

$$\boldsymbol{\Omega}=\ln\boldsymbol{R}=\frac{i\varphi}{\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)\left(e^{i\varphi}-1\right)}\left(\boldsymbol{R}-e^{-i\varphi}\boldsymbol{G}\right)\bullet\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G}\right)+\frac{-i\varphi}{\left(e^{-i\varphi}-e^{i\varphi}\right)\left(e^{-i\varphi}-1\right)}\left(\boldsymbol{R}-e^{i\varphi}\boldsymbol{G}\right)\bullet\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G}\right)$$

$$=\frac{\varphi}{2\sin\varphi\left(e^{i\varphi}-1\right)}\left(\boldsymbol{R}-e^{-i\varphi}\boldsymbol{G}\right)\bullet\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G}\right)+\frac{\varphi}{2\sin\varphi\left(e^{-i\varphi}-1\right)}\left(\boldsymbol{R}-e^{i\varphi}\boldsymbol{G}\right)\bullet\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G}\right)$$

$$=\frac{\varphi}{2\sin\varphi}\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G}\right)\bullet\left(\left(\frac{1}{e^{i\varphi}-1}+\frac{1}{e^{-i\varphi}-1}\right)\boldsymbol{R}-\left(\frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}-1}+\frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}-1}\right)\boldsymbol{G}\right)$$

$$=\frac{\varphi}{2\sin\varphi}\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G}\right)\bullet\left(-\boldsymbol{R}+\frac{e^{2i\varphi}-e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}-1}\boldsymbol{G}\right)$$

$$=\frac{\varphi}{2\sin\varphi}\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G}\right)\bullet\left(e^{-i\varphi}\left(e^{2i\varphi}+e^{i\varphi}+1\right)\boldsymbol{G}-\boldsymbol{R}\right)$$

$$=\frac{\varphi}{2\sin\varphi}\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G}\right)\bullet\left(\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}+1\right)\boldsymbol{G}-\boldsymbol{R}\right)$$

$$=\frac{\varphi}{2\sin\varphi}\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{G}\right)\bullet\left(\left(2\cos\varphi+1\right)\boldsymbol{G}-\boldsymbol{R}\right)$$

问题得证。

3.9 已知：任一反对称二阶张量 Ω，其反偶矢量 φe_3 。

求证：$\Omega^3+\varphi^2\Omega=0$

证明：易知，非对称二阶张量的特征方程为

$$\lambda^3+\delta_2^{\Omega}\lambda=0$$

又由于 Ω 的反偶矢量的模为 $\varphi=\sqrt{\delta_2^{\Omega}}$ ，所以 $\varphi^2=\delta_2^{\Omega}$ ，代入上式得，

$$\lambda^3+\varphi^2\lambda=0$$

又由于矩阵理论 Hamilton-Cayley 等式，可将张量的幂级数定义式化为张量的二次多项式，即

$$\Omega^3+\varphi^2\Omega=0$$

所以，得证。

3.10　已知：二阶反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的轴方向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_3$，与 $\boldsymbol{e}_3$ 为反偶的张量 $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L}=-\in\bullet\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\varphi}\boldsymbol{\Omega}$$

求证：（1）$\boldsymbol{L}^2=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{G}$

（2）3.8 题中 $\boldsymbol{R}$ 又可写作

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{G}+\sin\boldsymbol{L}+2\sin^2\frac{\varphi}{2}(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{G})$$

证明：（1）根据已知有 $\boldsymbol{L}=\dfrac{1}{\varphi}\boldsymbol{\Omega}$，即需证的式子为

$$(\frac{1}{\varphi}\boldsymbol{\Omega})^2=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{G}$$

两边同时乘以$\boldsymbol{\Omega}$，得到

$$\frac{1}{\varphi^2}\boldsymbol{\Omega}^3=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{G}$$

$$\varphi'(\boldsymbol{v})$$

两边同时乘以φ^2，又因为$\boldsymbol{G}$为度量张量，上式可写成

$$\boldsymbol{\Omega}^3=\varphi^2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3-\varphi^2\boldsymbol{\Omega}$$

二阶反对称张量$\boldsymbol{\Omega}$的轴方向单位矢量$\boldsymbol{e}_3$与$\boldsymbol{\Omega}$满足关系式$\boldsymbol{\Omega}\bullet\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$，得到

$$\boldsymbol{\Omega}^3+\varphi^2\boldsymbol{\Omega}=0$$

二阶反对称张量$\boldsymbol{\Omega}$的特征方程为$\lambda^3+\mathscr{J}_2^{\Omega}\lambda=0$，由 Hamilton-cayley 等式有

$$\boldsymbol{\Omega}^3+\mathscr{J}_2^{\Omega}\boldsymbol{\Omega}=0$$

又有$\mathscr{J}_2^{\Omega}=\varphi^2$，故得$\boldsymbol{\Omega}^3+\varphi^2\boldsymbol{\Omega}=0$成立，本题得证。

（2）3.8 中$\boldsymbol{R}=e^{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{G}+\frac{\sin\varphi}{\varphi}\boldsymbol{\Omega}+\frac{2\sin^2(\varphi/2)}{\varphi^2}\boldsymbol{\Omega}^2$，由$\boldsymbol{L}=\frac{1}{\varphi}\boldsymbol{\Omega}$及（1）中证得的$\boldsymbol{L}^2=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{G}$代入即得到

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{G}+\sin\boldsymbol{L}+2\sin^2\frac{\varphi}{2}(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{G})$$

11 题 $\varphi'(v;u)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[\varphi(\boldsymbol{v}+hu)-\varphi(v)]$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\mathrm{h}}[v^2+h^2u^2+2hv\cdot u-v^2]$$

$$=\lim_{h\to 0}(hu^2+2v\cdot u)$$

$$=2v\cdot u$$

因为 $\varphi'(v;u)=\varphi'(v)\cdot u$

所以 $\varphi'(v)\cdot u=2v\cdot u$

以为u是任意的，所以$\varphi'(v)=2v$

3.12 已知：$f(T)=\varphi(T)\psi(T)$，其中T为二阶张量，f,φ,ψ均为标量函数。

用定义求$f'(T)$，要求用$\varphi(T),\psi(T)$及其导数表示。

分析：函数对于增量C的有限微分为：

$$f'(T;C)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(T+hC)-f(T)]$$

$$\varphi(\boldsymbol{v})=u(\boldsymbol{v})\cdot w(\boldsymbol{v})$$

$$\varphi'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{g}_k)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\varphi(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{g}_k)-\varphi(\boldsymbol{v})\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\varphi(T+hC)\psi(T+hC)-\varphi(T)\psi(T)]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\varphi(T+hC)\psi(T+hC)-\varphi(T+hC)\psi(T)+\varphi(T+hC)\psi(T)-\varphi(T)\psi(T)]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\varphi(T+hC)[\psi(T+hC)-\psi(T)]+\psi(T)[\varphi(T+hC)-\varphi(T)]\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\varphi(T+hC)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\psi(T+hC)-\psi(T)]+\psi(T)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\varphi(T+hC)-\varphi(T)]$$

$$=\varphi(T)\cdot\psi'(T;C)+\psi(T)\varphi'(T;C)$$

$$=\varphi(T)\cdot\psi'(T):C+\psi(T)\cdot\varphi'(T):C$$

$=[\varphi(T)\psi'(T)+\psi(T)\varphi'(T)]:C$ ………………………①

由于$f'(T;C)=f'(T):C$ ……………………②

比较①②可知$f'(T)=\varphi(T)\psi'(T)+\psi(T)\varphi'(T)$

3.13 已知：正交二阶张量$Q(t)$。

求证：$Q(t)\cdot Q^T(t)$关于一切时间 t 均为分对称二阶张量。

分析：正交张量的性质 $Q^T=Q^{-1}$

反对称张量的性质 $Q=-Q^T$

证明：令$Q=Q(t)$

$Q\cdot Q^T$=I 方程左右求导，有

$$Q\cdot\frac{dQ^T}{dt}+\frac{dQ}{dt}\cdot Q^T=0$$

即 $$Q\cdot\frac{dQ^T}{dt}=-\frac{dQ}{dt}\cdot Q^T \quad ①$$

又∵ $$Q\cdot\frac{dQ^T}{dt}=\left(\frac{dQ}{dt}\cdot Q^T\right)^T \quad ②$$

$$\therefore Q\cdot\frac{dQ^T}{dt}=\left(\frac{dQ}{dt}\cdot Q^T\right)^T$$

原式得证。

14 已知：V 是矢量，W(V)和 U(V)是矢量函数，。求：要求用 W(V)，U(V)及其导数表示。

$$\varphi'(v;g_k)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\varphi(v+hg_k)-\varphi(v)\right]$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{U(v+hg_k)\left[W(v+hg_k)-W(v)\right]+\left[U(v+hg_k)-U(v)\right]W(v)\right\}$$

$$=U(v)\ W'(v;g_k)+U'(v;g_k)W(v)$$

$$\varphi'(v)=w(v)\cdot u'(v)+u(v)\cdot w'(v)$$

3.15 求证二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的各向同性标量函数 $\varphi=f(\boldsymbol{T})$ 的导数 $f'(\boldsymbol{T})$ 为各向同性张量函数。

相关知识点：各向同性 导数

解

因为 $f'(\boldsymbol{T})=\dfrac{\partial f(\boldsymbol{T})}{\partial \boldsymbol{T}_{ij}}i_ii_j$，$\boldsymbol{V}$ 为任意二阶张量

所以 $$\frac{df(\boldsymbol{T})}{d\boldsymbol{T}}:\boldsymbol{V}=\frac{df(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T)}{d\boldsymbol{T}}:\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{Q}^T$$

$$=\mathrm{tr}\left\{\left[\frac{df(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T)}{d\boldsymbol{T}}\right]^T\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{Q}^T\right\}$$

$$=\mathrm{tr}\left\{\left[\boldsymbol{Q}^T\cdot\frac{df(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T)}{d\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{Q}\right]^T\cdot\boldsymbol{V}\right\}$$

$$=\left[\boldsymbol{Q}^T\cdot\frac{df(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T)}{d\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{Q}\right]:\boldsymbol{V}$$

最后得：$$\frac{df(\boldsymbol{T})}{d\boldsymbol{T}}:\boldsymbol{V}=\left[\boldsymbol{Q}^T\cdot\frac{df(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T)}{d\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{Q}\right]:\boldsymbol{V}$$

由于 V 的任意性，有：

$$\frac{df(\boldsymbol{T})}{d\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{Q}^T\cdot\frac{df(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T)}{d\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{Q}$$

即 $$\boldsymbol{Q}^T\cdot\frac{df(\boldsymbol{T})}{d\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{Q}=\frac{df(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T)}{d\boldsymbol{T}}$$

得证。

3.16 求证矢量v的各向同性矢量函数$w=F(v)$的导数$F'(v)$为各向同性二阶张量函数。

解答：设$v=v^ig_i=v_ig^i$

其旋转量$\tilde{v}=v^i\tilde{g}_i=v_i\tilde{g}^i$ 其中$\tilde{g}_i=Q\cdot g_i$ $\tilde{g}^i=Q\bullet g^i$

因为$F(v)$是v的各向同性矢量函数，故

$$F\left(\tilde{v}\right)=Q\bullet F(v)$$

设$H=F^{'}(v)=\dfrac{\partial F(v)}{\partial V_i}g_i$

故 $F^{'}(\tilde{v})=\dfrac{\partial F(\tilde{v})}{\partial v_i}\tilde{g}_i=\dfrac{\partial[Q\bullet F(v)]}{\partial v_i}Q\bullet g_i=Q\bullet\dfrac{\partial F(v)}{\partial v_i}g_i\bullet Q^*=Q\bullet H\bullet Q^*=\tilde{H}$

3.17.试直接对$\mathscr{I}_1=G:T=\delta^i_jT^l_{\bullet i}=T^i_{\bullet j}$求导的方法求 d$\mathscr{I}_k$/dT 及其分量。

$$\mathscr{I}_2=\frac{1}{2}\delta^{ij}_{lm}T^l_{\bullet i}T^m_{\bullet j}=\frac{1}{2}(T^i_{\bullet j}T^l_{\bullet l}-T^i_{\bullet j}T^j_{\bullet i}),$$

$$\mathscr{I}_3=\frac{1}{6}\delta^{ijk}_{lmn}T^l_{\bullet i}T^m_{\bullet j}T^n_{\bullet k}=\det T$$

解：$d\mathscr{I}_1/dT=\dfrac{d(G:T)}{dT}=G$

$$\partial\mathscr{I}_1/\partial T^i_{\bullet j}=\frac{\partial(\delta^i_jT^l_{\bullet i})}{\partial T^i_{\bullet j}}=\delta^i_j$$

$$d\mathscr{I}_2/dT=\frac{d(\frac{1}{2}\delta^{ij}_{lm}T^l_{\bullet i}T^m_{\bullet j})}{dT}=\mathscr{I}_1G-T^T$$

$$\partial\mathscr{I}_2/\partial T^i_{\bullet j}=\frac{\partial(\frac{1}{2}\delta^{ij}_{lm}T^l_{\bullet i}T^m_{\bullet j})}{\partial T^i_{\bullet j}}=\mathscr{I}_1\delta^j_i-T^j_{\bullet i}$$

$$d\mathscr{I}_3/dT=\frac{d(\frac{1}{6}\delta^{ijk}_{lmn}T^l_{\bullet i}T^m_{\bullet j}T^n_{\bullet k})}{dT}=(\mathscr{I}_2G-\mathscr{I}_1T+T^2)^T$$

$$\partial\mathscr{I}_3/\partial T^i_{\bullet j}=\frac{\partial(\det T)}{\partial T^i_{\bullet j}}=\mathscr{I}_2\delta^j_i-\mathscr{I}_1T^j_{\bullet i}+T^j_{\bullet k}T^k_{\bullet i}$$

3.18 求$\det(T^m)$的导数。（T为二阶张量）

$$\frac{\mathrm{d}\left[\det(\boldsymbol{T}^m)\right]}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\frac{\mathrm{d}\left[(\det\boldsymbol{T})^m\right]}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{m}(\det\boldsymbol{T})^{\boldsymbol{m}-1}\frac{\mathrm{d}(\det\boldsymbol{T})}{\boldsymbol{dT}}$$

解：

$$=\boldsymbol{mJ}_3{}^{\boldsymbol{m}-1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_3}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{mJ}_3{}^{\boldsymbol{m}-1}\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{T}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

$$=\boldsymbol{mJ}_3{}^{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{T}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

3.19 $\dfrac{\mathrm{d}T^T}{dT}=\dfrac{T_{ji}}{T_{kl}}g^jg^ig_kg_l=\delta^j_k\delta^i_lg^jg^ig_kg_l=g^jg^ig_jg_i$

3. 20 求$\frac{\mathrm{d}[(T^T)^2]}{dT}$（$T^T$为二阶张量 T 的转置张量）

解：设$T=T^{ij}g_ig_j=T_{ij}g^ig^j=T^i_{\bullet j}g_ig^j=T_i^{\bullet j}g^ig_j$

故$\mathrm{T}^T=T^{ij}g_jg_i=T_{ij}g^jg^i=T^i_{\bullet j}g^jg_i=T_i^{\bullet j}g_jg^i$

而$\frac{\mathrm{d}[(T^T)^2]}{dT}=2(T^T)\frac{dT^T}{dT}=(T^T+T^T)\frac{d(T^T)}{dT}$

由于$\frac{\mathrm{d}T^T}{dT}=g^ig_jg^jg_i$ (3. 19 题已证明)

故$\mathrm{T}^{\mathrm{T}}\frac{dT^T}{dT}=T^i_{\bullet j}g^jg_i\cdot g^ng_sg^sg_n=T^i_{\bullet j}g^jg_sg^sg_i$

又$\mathrm{g^j}g_sg^sg_i$作偶数次（2 次）置换可得$\mathrm{g}^sg_ig^jg_s$

于是$\mathrm{g^j}g_sg^sg_i=\mathrm{g}^sg_ig^jg_s$

故$\frac{\mathrm{d}[(T^T)^2]}{dT}=T^i_{\bullet j}(g^sg_ig^jg_s+g^jg_sg^sg_i)$

3.21 求 $\det(\lambda \boldsymbol{G}-\boldsymbol{T})$ 对 λ 及对 $\boldsymbol{T}$ 的一阶、二阶导数（$\boldsymbol{T}$ 为二阶张量）。

解： $\dfrac{d}{d\lambda}\left[\det(\lambda \boldsymbol{G}-\boldsymbol{T})\right]=3\lambda^2-2\lambda\delta_1^T+\delta_2^T$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\det(\lambda \boldsymbol{G}-\boldsymbol{T})\right]=6\lambda-2\delta_1^T$$

$$\frac{d}{d\boldsymbol{T}}\left[\det(\lambda \boldsymbol{G}-\boldsymbol{T})\right]=(-\lambda^2+\lambda\delta_1^T-\delta_2^T)\boldsymbol{G}+(-\lambda+\delta_1^T)\boldsymbol{T}^*-(\boldsymbol{T}^2)^*$$

$$\frac{d^2}{d\boldsymbol{T}^2}\left[\det(\lambda \boldsymbol{G}-\boldsymbol{T})\right]=(\lambda-\delta_1^T)\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{T}^*+\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{G}+(\delta_1^T-\lambda)\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{T}^*}-\frac{d(\boldsymbol{T}^*)^2}{d\boldsymbol{T}}$$

3.22已知：矢量 $\boldsymbol{v}$的标量函数 φ^{v^2}

求：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{d\boldsymbol{v}}$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{d\boldsymbol{v}}$是否为各向同性函数， 并说明理由。

(1)$\varphi'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{v}]=[e^{v^2}\bullet 2\boldsymbol{v}\bullet \boldsymbol{v}']\bullet \boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{u}$为任意值。

$$\varphi'(\boldsymbol{v})=e^{v^2}\bullet 2\boldsymbol{v}\bullet \boldsymbol{v}'$$

$$\mathrm{d}\varphi=e^{v^2}\bullet 2\boldsymbol{v}\bullet d\boldsymbol{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{d\boldsymbol{v}}=e^{v^2}\bullet 2\boldsymbol{v}$$

(2)令$\widetilde{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{Q}^T$

则有φ'（$\widetilde{\boldsymbol{v}}$）$=e^{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{v}\boldsymbol{Q}^T)}\bullet 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{Q}\bullet\varphi'(\boldsymbol{v})$

3.23已知线弹性材料应变能密度$w(\boldsymbol{\varepsilon})=\dfrac{1}{2}\left[a_0\left(\mathscr{I}_1^*\right)^2+a_1\left(\mathscr{I}_2^*\right)\right]$。

求（1）利用格林公式$\boldsymbol{\sigma}=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}$，求$\boldsymbol{\sigma}$ 与$\boldsymbol{\varepsilon}$的关系；

（2）弹性常数C_{ijkl}，要求满足 Voigt 对称性。

解：（1）$\boldsymbol{\sigma}=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}=\dfrac{1}{2}\left[2a_0\mathscr{I}_1^*\left(\mathrm{d}\mathscr{I}_1^*/\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\right)+a_1\mathrm{d}\,\mathscr{I}_2^*/\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\right]=a_0\mathscr{I}_1\boldsymbol{G}+a_1\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$

$$\sigma_{ij}=a_0g_{ij}\varepsilon_{\bullet k}^{k}+a_1\varepsilon_{ij}$$

（2）应力张量与应变张量都是对称二阶张量，应当利用应变张量的对称性，将以上式改为对称形式$\boldsymbol{\sigma}=a_0\mathscr{I}_1\boldsymbol{G}+\dfrac{1}{2}a_1\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\varepsilon}\right)$

$$\boldsymbol{C}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}=a_0\frac{\partial\varepsilon_{\bullet i}^{i}}{\partial\varepsilon_{\bullet l}^{k}}\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_l+\frac{1}{2}a_1\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\bullet l}^{k}}\left(\varepsilon_{\bullet j}^{i}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j+\varepsilon_{\bullet j}^{i}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i\right)\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_l$$

$$=a_0\delta_k^i\delta_i^l\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_l+\frac{1}{2}a_1\left(\delta_k^i\delta_j^l\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j+\delta_k^i\delta_j^l\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i\right)\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_l$$

$$=a_0\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_k+\frac{1}{2}a_1\left(\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j+\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i\right)$$

$$=\left[a_0g_{ij}g_{kl}+\frac{1}{2}a_1\left(g_{ik}g_{jl}+g_{il}g_{jk}\right)\right]\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

$$= C_{ijkl}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

$$C_{ijkl} = a_0 g_{ij}g_{kl} + \frac{1}{2}a_1\left(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk}\right)$$

[3.24] 已知：某种各向同性非线性材料，应变能密度为

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}a_0(\mathscr{I}^{\varepsilon}_1)^3 - a_0\mathscr{I}^{\varepsilon}_1\mathscr{I}^{\varepsilon}_2$$

求：（1）$\boldsymbol{\sigma}$与$\boldsymbol{\varepsilon}$的关系

（2）切线模量$\mathbf{C} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}$，写出$C_{ijkl}$的表达式，要求满足 Voigt 对称性

解：（1）

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}a_0(\mathscr{I}^{\varepsilon}_1)^3\cdot\frac{\mathrm{d}\mathscr{I}^{\varepsilon}_1}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}} - a_0\mathscr{I}^{\varepsilon}_2\frac{\mathrm{d}\mathscr{I}^{\varepsilon}_1}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}} - a_0\mathscr{I}^{\varepsilon}_1\frac{\mathrm{d}\mathscr{I}^{\varepsilon}_2}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}$$

又因为$\frac{\mathrm{d}\mathscr{I}^{\varepsilon}_1}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{G}$，$\frac{\mathrm{d}\mathscr{I}^{\varepsilon}_2}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathscr{I}^{\varepsilon}_1\boldsymbol{G} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$，所以

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2}a_0(\mathscr{I}^{\varepsilon}_1)^2\boldsymbol{G} - a_0\mathscr{I}^{\varepsilon}_2\boldsymbol{G} - a_0(\mathscr{I}^{\varepsilon}_1)^2\boldsymbol{G} + a_0\mathscr{I}^{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}a_0(\mathscr{I}^{\varepsilon}_1)^2\boldsymbol{G} - a_0\mathscr{I}^{\varepsilon}_2\boldsymbol{G} + a_0\mathscr{I}^{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$$

$$= \frac{a_0}{2}\left[\left(\mathscr{I}^{\varepsilon}_1\right)^2 - 2\mathscr{I}^{\varepsilon}_2\right]\boldsymbol{G} + a_0\mathscr{I}^{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} = \frac{a_0}{2}\mathscr{I}^{\varepsilon *}_2\boldsymbol{G} + a_0\mathscr{I}^{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\sigma_{ij} = \frac{a_0}{2}\left\{\varepsilon^{k}_{\cdot k}\varepsilon^{l}_{\cdot l} - 2\left[\frac{1}{2}(\varepsilon^{k}_{\cdot k}\varepsilon^{l}_{\cdot l} - \varepsilon^{k}_{\cdot l}\varepsilon^{l}_{\cdot k})\right]\right\}g_{ij} + a_0\varepsilon^{k}_{\cdot k}\varepsilon_{ij} = \frac{a_0}{2}\varepsilon^{k}_{\cdot l}\varepsilon^{l}_{\cdot k}g_{ij} + a_0\varepsilon^{k}_{\cdot k}\varepsilon_{ij}$$

(2)应力张量与应变张量都是对称二阶张量，应当利用应变张量的对称性，将应力张量改写为对称的形式，即

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{a_0}{2}\mathscr{I}^{\varepsilon *}_2\boldsymbol{G} + \frac{a_0}{2}\mathscr{I}^{\varepsilon}_1(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\varepsilon})$$

$$\mathbf{C} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon^{r}_{\cdot s}}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}_s$$

$$= \frac{a_0}{2}\frac{\partial\ (\varepsilon^{k}_{\cdot l}\varepsilon^{l}_{\cdot k})}{\partial\varepsilon^{r}_{\cdot s}}g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}_s + \frac{a_0}{2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^{r}_{\cdot s}}(\varepsilon^{k}_{\cdot k}\varepsilon^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j + \varepsilon^{k}_{\cdot k}\varepsilon^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i)\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}_s$$

$$= \frac{a_0}{2}(\delta^k_r\delta^s_l\varepsilon^{l}_{\cdot k} + \delta^l_r\delta^s_k\varepsilon^{k}_{\cdot l})\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}_s + \frac{a_0}{2}\left[\left(\delta^k_r\delta^s_k\varepsilon^{i}_{\cdot j} + \delta^i_r\delta^s_j\varepsilon^{k}_{\cdot k}\right)\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\right.$$

$$\left.+(\delta^k_r\delta^s_k\varepsilon^{i}_{\cdot j} + \delta^i_r\delta^s_j\varepsilon^{k}_{\cdot k})\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i\right]\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}_s$$

$$= \frac{a_0}{2}(\varepsilon^{s}_{\cdot r} + \varepsilon^{s}_{\cdot r})\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}_s + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_k + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{k}_{\cdot k}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^s\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}_s + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_k + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{k}_{\cdot k}\boldsymbol{g}^s\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}_s$$

将上式替换指标整理得：

$$\mathbf{C} = a_0\varepsilon^{j}_{\cdot k}\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_j + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{l}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_k + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{i}_{\cdot i}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_j + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{l}_{\cdot i}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_k + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{l}_{\cdot l}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_i$$

$$= (a_0\varepsilon^{j}_{\cdot k}g_{ij}g_{lj} + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{l}_{\cdot j}g_{il}g_{lk} + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{i}_{\cdot i}g_{ik}g_{lj} + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{l}_{\cdot i}g_{jl}g_{lk} + \frac{a_0}{2}\varepsilon^{l}_{\cdot l}g_{jk}g_{li})\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

$$= (a_0\varepsilon_{ik}g_{lj} + \frac{a_0}{2}\varepsilon_{ij}g_{lk} + \frac{a_0}{2}\varepsilon_{ki}g_{lj} + \frac{a_0}{2}\varepsilon_{ji}g_{lk} + \frac{a_0}{2}\varepsilon_{il}g_{jk})\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

因为利用应变张量的对称性，上式可化简为

$$\mathbf{C} = (\frac{3a_0}{2}\varepsilon_{ik}g_{jl} + a_0\varepsilon_{ij}g_{lk} + \frac{a_0}{2}\varepsilon_{kj}g_{il})\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

$$C_{ijkl} = \frac{3a_0}{2}\varepsilon_{ik}g_{jl} + a_0\varepsilon_{ij}g_{lk} + \frac{a_0}{2}\varepsilon_{kj}g_{il}$$

3.25　已知：某种高分子材料为各向同性材料，应力和应变的关系可简化为二次式描述。

求：（1）写出材料应力应变关系的张量表达式，最多有多少独立的弹性常数。

（2）由 $\boldsymbol{C}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}$ 求材料的切线模量 C_{ijkl}，利用它应满足 Voigt 对称性，确定有多少独立的弹性常数。

（3）如何测量这些弹性常数。

解：（1）各向同性材料的应力应变关系可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=k_0\boldsymbol{G}+k_1\boldsymbol{\varepsilon}+k_3\boldsymbol{\varepsilon}^2$$

其中

$$k_i=k_i(\mathscr{I}_1^{\varepsilon}, \mathscr{I}_2^{\varepsilon}, \mathscr{I}_3^{\varepsilon}) \qquad (i=1,2,3)$$

是应变张量的三个主不变量的各向同性标量函数，$\mathscr{I}_1^{\varepsilon}$，$\mathscr{I}_2^{\varepsilon}$，$\mathscr{I}_3^{\varepsilon}$ 分别为应变分量的一次、二次与三次式。

题中已知该材料的应力和应变的关系可简化为二次式描述，即可设

$$k_0=\alpha_0+\beta_0\mathscr{I}_1^{\varepsilon}+\gamma_0\mathscr{I}_2^{\varepsilon}$$
$$k_1=\alpha_1+\beta_1\mathscr{I}_1^{\varepsilon}$$
$$k_2=\alpha_2$$

代入应力应变关系得

$$\boldsymbol{\sigma}=(\alpha_0+\beta_0\mathscr{I}_1^{\varepsilon}+\gamma_0\mathscr{I}_2^{\varepsilon})\ \boldsymbol{G}+(\alpha_1+\beta_1\mathscr{I}_1^{\varepsilon})\ \boldsymbol{\varepsilon}+\alpha_2\boldsymbol{\varepsilon}^2$$

最多有 6 个独立的弹性常数。

（3）　X

3.26、已知：应力偏量 $\sigma'=\sigma-\dfrac{1}{3}g_1^{\sigma}G$，等效应力 $\sigma_{eq}=(\dfrac{2}{3}\sigma':\sigma')^{\frac{1}{2}}$

求：$d\sigma_{eq}/d\sigma$（规定 $d\sigma_{eq}/d\sigma$ 为对称二阶偏斜张量）。

解：$\sigma_{\mathrm{eq}}=(\dfrac{2}{3}\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}g^ig^j:g^kg^l)^{\frac{1}{2}}=(\dfrac{2}{3}\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}g^{ik}g^{jl})^{\frac{1}{2}}$

$d\sigma_{eq}/d\sigma=(d\sigma_{eq}/d\sigma')\cdot(d\sigma'/d\sigma)=\dfrac{2}{3}\left[g^mg^n-\dfrac{1}{3}g_{ij}\varepsilon^{k}_{\cdot k}\right]$