[1.1] 求证：

并问：与是否相等？为矢量

**证明：**

因为为矢量，将上式按基矢量展开,

同理可证：

显然，，所以，

[1.2] 为矢量。

求证：

**证明：**

令，则

令，则

[1.3] 求证矢量的非退化性。即：若矢量与它所属的矢量空间中的任意矢量都正交，即，则矢量。

**证明：**

法一：反证法

假设当时，与它所属空间任意矢量都正交

∵ 与任意矢量都正交

即

∴

又∵ 为任意矢量

可以取

则由上式，得到

而根据正定性，当且仅当时，

假设不成立

故证

法二证明：

∵

即

****

∵当时，=1,时，=0

即=0

为任意矢量，则 =0

[1.4]已知：矢量***u****，****v****,*求证：

**证明：**

且



即 

**[1.6]** 求证：

**证明：**

（充分性）

故共面

即可得不全为0的数使得

即得证线性相关

（必要性）线性相关

即可得**,** 存在，使得左式成立。

假设取，

故共面,

[1.7] 已知：矢量**, ,** 为笛卡尔基；若将分解为与平行的矢量及垂直于的矢量之和，即。

求： (其中)

**解：**

由垂直于, 知

即

所以

[1.8] 利用, 证明是对称正定的。

证明：

===

又，

所以是对称正定的

[1.9] 求证：对于一组非个共面的**g，**存在唯一的**g**, **g**也是非共面的。



**证：**

由于=

由于是一个唯一确定的向量，所以也是唯一确定的。

同理可证：，也是唯一存在的。

综上：**g**是唯一存在的。

由于**g**非共面，所以，又由于



所以，即：**g**也是非共面的。



[1.10]已知：以表示三维空间中笛卡儿坐标基矢量，

(1)按公式（1.2.17），求以表示的式子；(2)求

**解：** (1)

[1.11] 根据上题结果验算公式：****

当j=1时

当j=2时

当j=3时

即验证了****

[1.12]已知：，，基矢量同上题。运用1.10题求的计算：

1. ； （2）的协变分量

解：（1）



（2）

[1.13]已知：（1）圆柱坐标系如图1.17（a），。

（2）球坐标系如图1.17（b）， 。



（a） （b）

图 1.17

求：两种坐标系中：

（1） 通过笛卡儿基的表达式，画出简图。

解答：（1）

柱坐标下： 球坐标下：

。



（2）求，说明与的大小与方向有何关系。

圆柱坐标：

设 **,**

设

设

综上所述，

，，

球坐标：

设**,**

设

设

综上所述，

，，

（3）由求，，。

圆柱坐标：

=

球坐标：

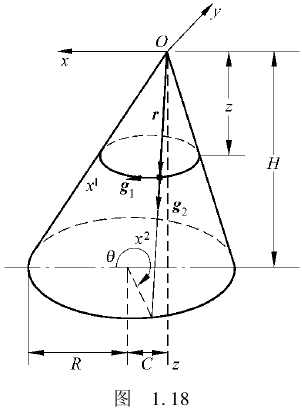
=

（4）直接由几何图形确定，求。

圆柱坐标： 球坐标：

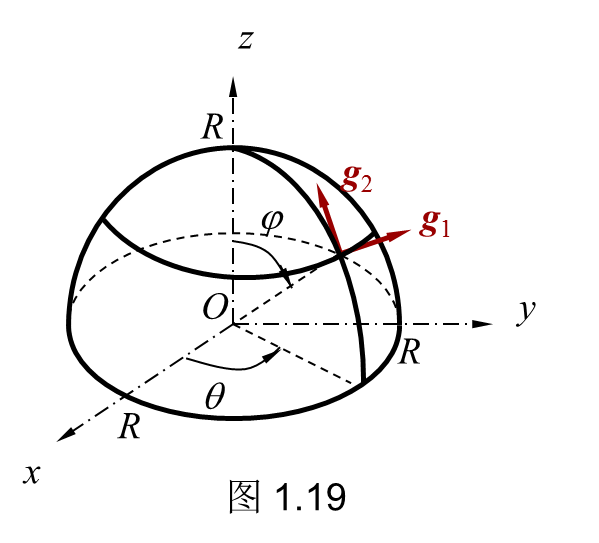


1.14 斜圆锥面上的坐标系x1=θ, x2=z, R,H,C为已知（见图1.18）。

求：

解：∵

根据

[1.15]二维空间为半径为R的半球面，见图1.19，*x1=θ, x2=φ*,用二种方法求：

解：∵

=

[1.16]已知：圆柱坐标系中、球坐标系中矢量的逆变分量。利用题 1.13 结果分别求两个坐标系中的协变分量 。

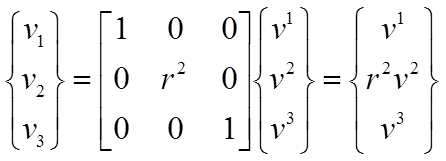
解：

圆柱坐标：

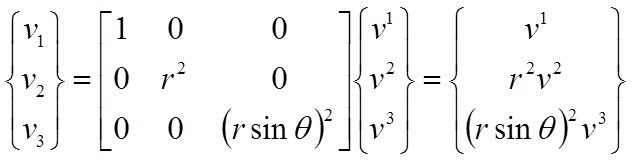
球坐标：



圆柱坐标：

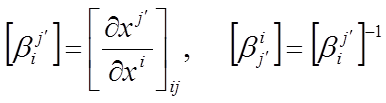


球坐标：

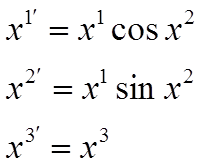
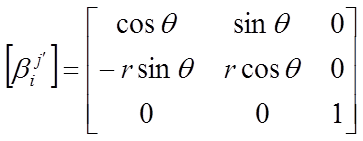
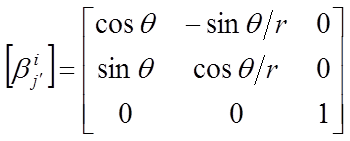


[1.17]求：题 1.13 所示圆柱坐标和球坐标，与笛卡儿坐标的转换系数与

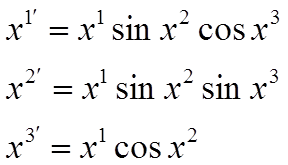
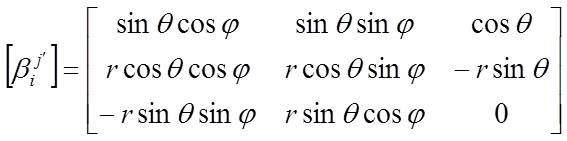
解：

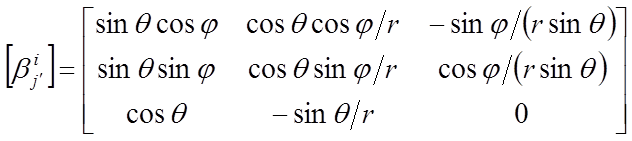


圆柱坐标：

球坐标：



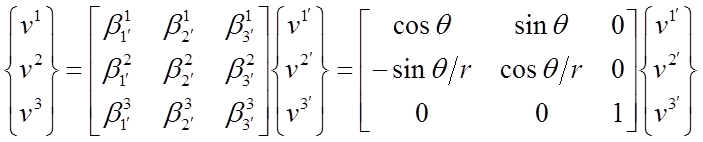
[1.18]（1）已知:笛卡儿坐标系中*v* 的分量为，，；求：圆柱坐标中 *v* 的分量，，。

（2）已知:笛卡儿坐标系中v 的分量为，，；求：球坐标中 *v* 的分量 ，，。

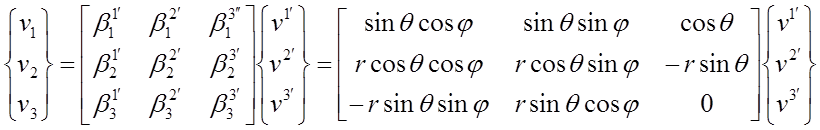
解：



圆柱坐标：

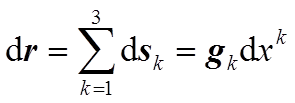


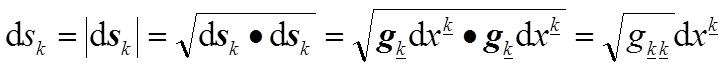
球坐标：



[1.19]试求线元的长度**。**

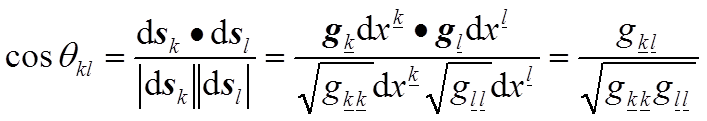
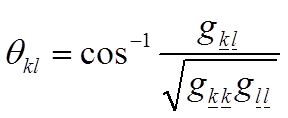
解：



[1.20]试求线元与的长度**。**

解：

[1.21] 证明一张量所有分量在某一坐标系中为零，则在任何坐标系中都为零

解：

**证明**：不妨取3阶张量

其分量为：

他们满足坐标转变关系，先将指标*ijk*用*rst*替换，我们可以得到

又因为转化系数可排列成雅可比矩阵，其值不为零

n阶张量同理可证

[1.22]证明张量的对称性与反对称性与坐标系无关。

证明：

(ⅰ)设有二阶对称张量，

在新坐标系中：即证。

(ⅱ) 设有二阶反对称张量，

在新坐标系中：即证。

[1.23]试证明：若

证明:



**[1.24]** 已知：***N***为对称二阶张量，为反对称二阶张量，***u***为任意矢量。

求证：（1）

（2）

（1）证明如下：

取对称二阶张量，它对应的转置张量为：,任意矢量为：

由对称张量的性质知：

且

所以，





所以，

（2）证明如下：

取反对称二阶张量，它对应的转置张量为：,任意矢量为：

由对称张量的性质知：

且

所以，



==

 =

==

所以，

[1.25] 已知：矩阵 ，

试计算矩阵与，从而说明尽管为对称，这两个矩阵互为转置，但不对称。

==

[1.26 ]已知：任意二阶张量***T***，***S。***

求证：。

证明：****

****

****





[1．28]由应变得定义，求证是对称二阶张量，式中是介质得拉格朗日坐标得微分。



[1.29]已知：坐标系中数组与坐标系中数组,恒满足关系：与，与为两个任意矢量在相应坐标系中的逆变分量。求证为二阶张量的协变分量

证明：

即 

因 为协变转换系数故必为二阶张量的协变分量

[1.30]已知：坐标系中对称数组,在坐标系中对称数组,恒满足与为任意矢量在相应坐标系中的逆变分量。

求证为二阶张量的协变分量

证明：

更换指标：又因为，

同理可得：



即 

因,，为协变转换系数故必为二阶张量的协变分量

1.31已知： 为一矢量的协变分量。

求证：为一反对称二阶张量的协变分量。

证明：

令

则由

可知: 

同理可得：

则

由于：

所以

即

所以的证：为二阶张量的协变分量。

当时恒有

又有

综上可知：为一反对称二阶张量的协变分量

1.32、已知一二阶对称张量N，二阶反对称张量

求证：=0

证明： 根据题意令：





1.33已知:为任意二阶张量， 为他们的转置张量。

求证：

证明：





证毕

1.34 已知：为任意矢量，为二阶对称张量。为二阶反对称张量。

求证：（1）

（2）

证明：

（1）

因为为二阶对称张量，即，从而有，所以得证。

（2）

由上式前面计算结果有： ，，由于为二阶反对称张量，即，所以

1.35已知：任意张量和度量张量.

求证：

证明：根据题意设：、。

 所以:



1.36已知：二阶张量***T****,****S***，对于任意矢量***a****，****b***，均成立***a·****T****·b=a·S·b***

求证：***T****=****S***

证明：

1.37 已知：二阶对称张量***M,N,***对于任意矢量***a,***均成立

求证：

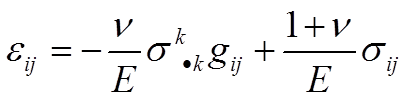
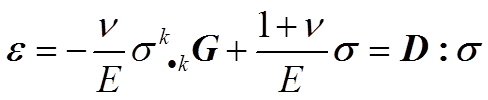
证明:



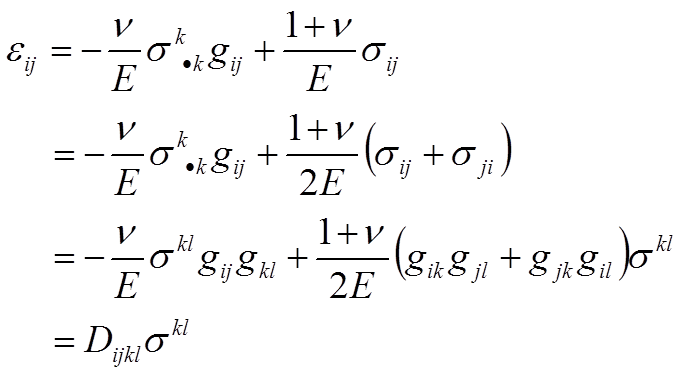
******

(1)都是二阶张量，由弹性关系知：

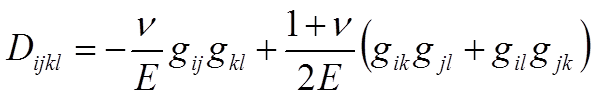
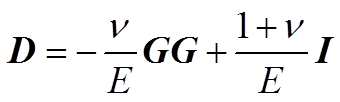
由张量商法则知：上式中的是一个四阶张量

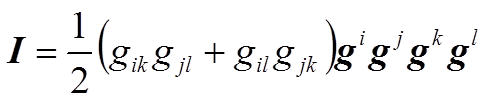
 

（2）



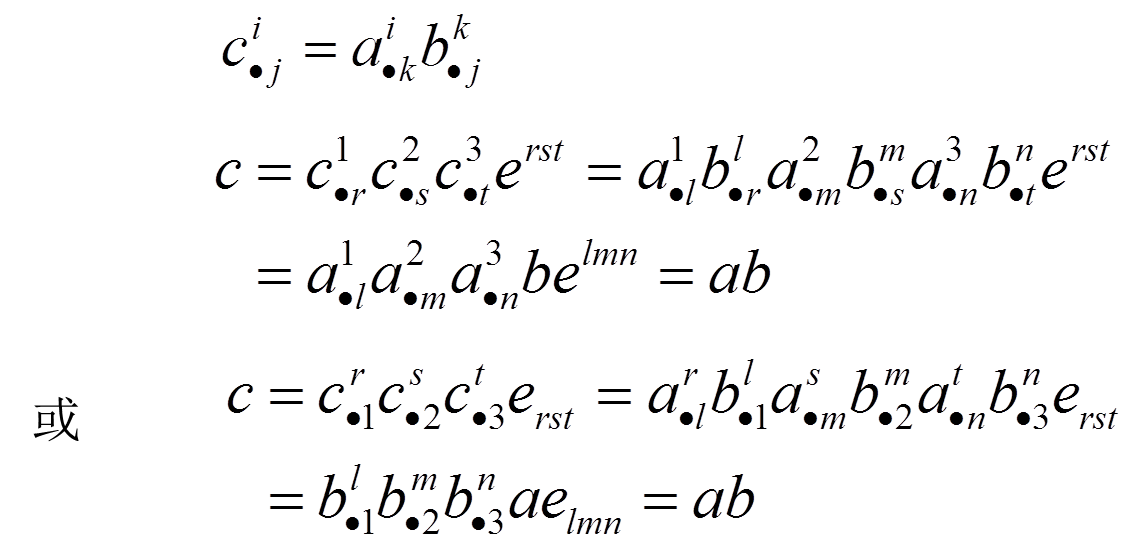
（3）



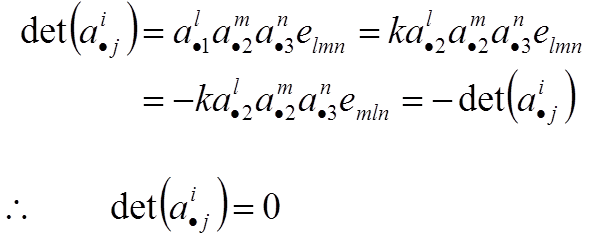
1.39已知：矩阵[A]，[B]，[C]=[A][B]，a=det[A]，b=det[B]，c=det[C]。求：利用置换符号证明：c=ab。

解：



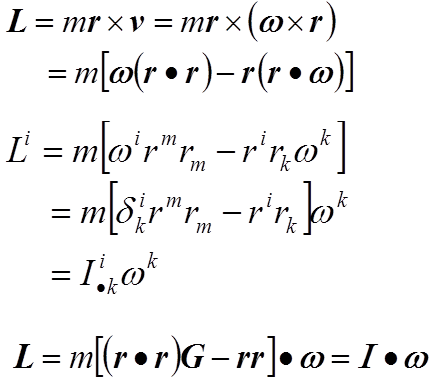
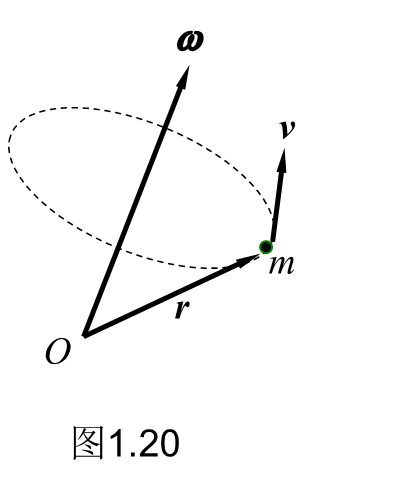
1.40已知：矩阵中某两列的元素成比例，例如：, k 为一个实数。求：利用置换符号证明:

解：



1.41质量为m，绕定点O 以角速度转动的质点（如图1.20），其动量矩矢量的定义为，其中，为定点O 至质点的矢径， 为质点的线速度。求证： ，式中***I*** 为惯性矩张量，

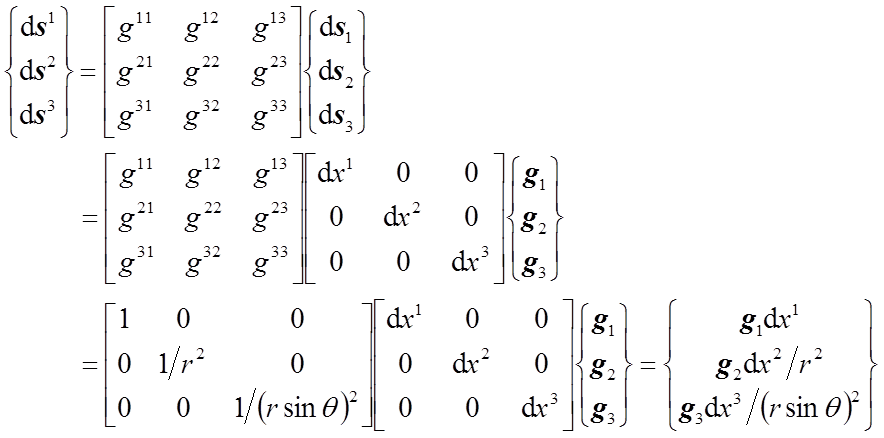
解：

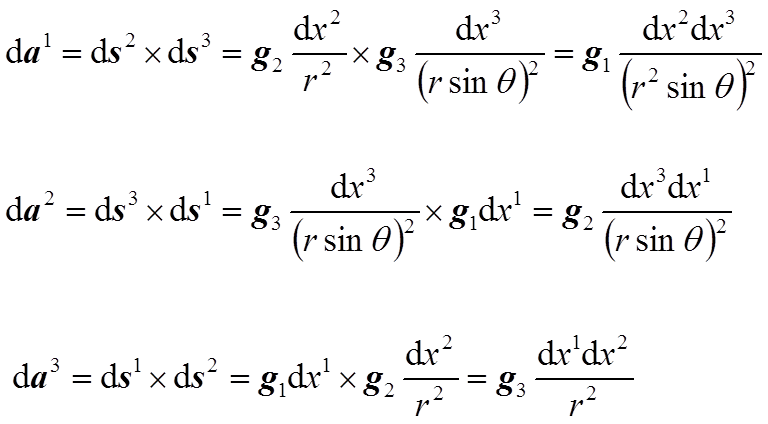


1.42 求图1.11（p11）所示球坐标系中的面元矢量。

解：



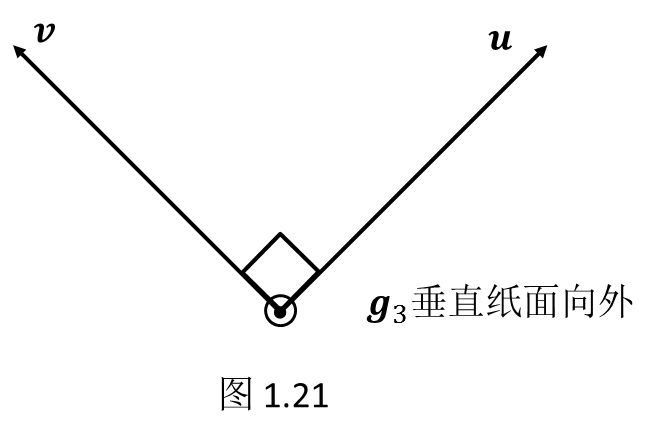




1.43、二维空间内为任意矢量，为另一矢量，

求证：

(即**,** 如图1.21所示，垂直于纸面向外)

解：

所以

故

[1.44]***A,B,C,D***为矢量。

利用置换张量求证：（***A***×***B***）·(***C***×***D***)=(***A***·***C***)(***B***·***D***)-(***A***·***D***)(***B***·***C***)

证明：

（***A***×***B***）·(***C***×***D***)=(***AB***︰)·(***CD***︰)

=(***A***·***C***)(***B***·***D***)-(***A***·***D***)(***B***·***C***)

[1.45]定义轮换张量式中, 设为任意二阶张量。求证：即得到反对称化张量

解：

所以，

[1.46] 定义轮换张量 

式中 

设T为任意张量

求证：

[1.47] 设对于为反对称，坐标系为右手系

定义：

式中：

求证：为一张量。且

解：因为

则归纳为

又因为都是张量，故也是张量。

即

[1.48]已知：为二阶反对称张量，矢量与互为反偶，即满足

求证：对任一矢量，必满足

证明如下：

取二阶反对称张量, 矢量, 矢量

矢量与互为反偶，即满足

因为

又因为，将中的哑指标对换得, 由二阶反对称张量的性质知， ,故

所以，

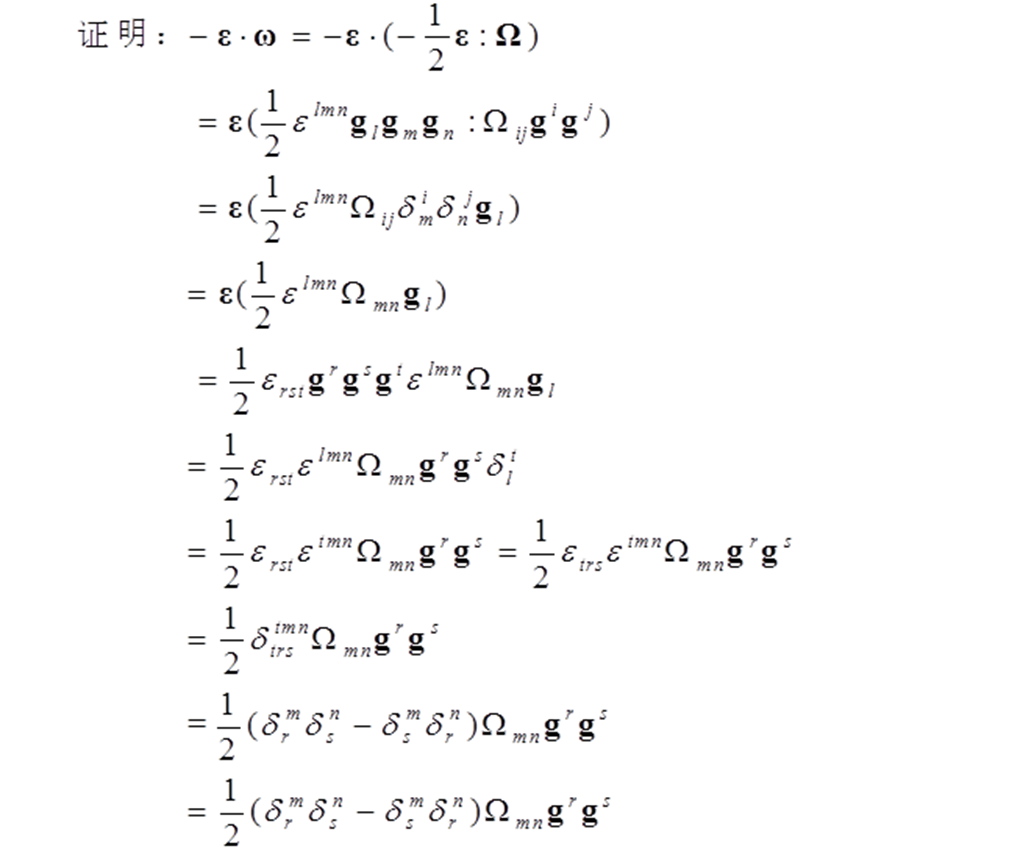
=

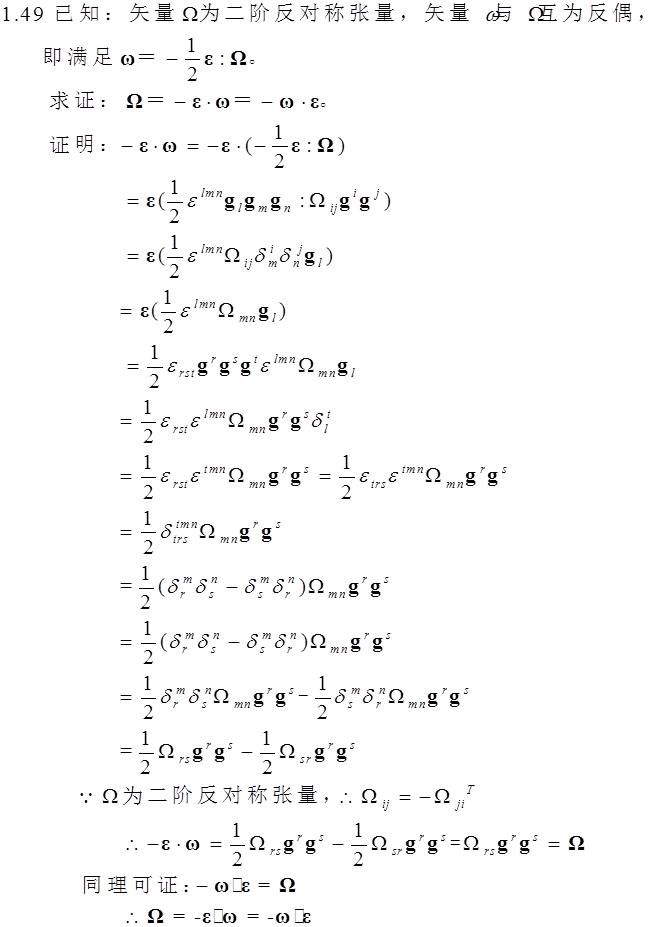
****而

所以，，得证。

[1.49]已知：矢量互为反偶，即满足

求证：

****



同理可证：**，**所以

[1.50] 已知：矢量互为反偶，即满足**，**矢量与矢量平行。

求证：

由1.48知，**,** 因为矢量与矢量平行，所以即

[1.51] 证明：由已知得



已知为反对称张量，故

所以

而 得证