מועד אחרון להגשה 22.6.24 בשעה 23:59

מטלה 1: חזרה, בעיית מציאת המקרב הטוב ביותר

1. יהי $V=\mathbb{R}^2$ המרחב האוקלידי מעל שדה הממשיים. לכל זוג וקטורים $u,v\in\mathbb{R}^2$ נגדיר:
$f(u,v)=\langle u,v\rangle=u^tAv$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & m\end{pmatrix}$.
מצאו את כל ערכי m שעבורם הפונקציה $f(u,v)$ מגדירה מכפלה פנימית על V.

2. יהי $V=C[a,b]$ מרחב הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי הפונקציה $\|\cdot\|_1$ מגדירה נורמה על V.

** __תזכורת:__ לכל $f(x)\in C[a,b]$ הגדרנו: $\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|dx$.

3. יהי $(V,\mathbb{R})$ ממ"פ. הוכיחו כי לכל $u,v\in V$ מתקיים $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$.

** זכרו כי בממ"פ מוגדרת הנורמה הטבעית $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$.

4. נגדיר $V=\mathbb{R}^2$. __מצאו באופן גיאומטרי__ (ע"י ניפוח כדורי יחידה מתאימים) את קבוצת המקרבים הטובים ביותר W^* לנקודה $v=(1,1)$ על הישר $W=\{y=-2\}$ ואת המרחק המינימלי $d_{\min}=\min_{w\in W}\|v-w\|$ מישר זה.
   א. מצאו את W^* ואת המרחק d_{min} לפי נורמה 2.
   ב. מצאו את W^* ואת המרחק d_{min} לפי נורמה ∞.
   ג. מצאו את W^* ואת המרחק d_{min} לפי נורמה 1.

בשאלה זו אין לפתור באופן אלגברי אלא רק באמצעות שיקולים גיאומטריים כנדרש בשאלה.

5. נגדיר $V=\mathbb{R}^2$. מהי הנקודה בתת המרחב $W=\{(2y,y)|y\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$ שהכי קרובה ל- $v=(-1,0)$ לפי נורמה ∞? מהו המרחק המינימלי? בתרגיל זה יש להציג פתרון אלגברי.

6. נתייחס למרחב המכפלה הפנימית $V=\mathbb{R}^n$ מעל שדה הממשיים $\mathbb{R}$ עם מ"פ אוקלידית
($\langle u,v\rangle=\left\langle(u_1,u_2,\ldots,u_n)^t,(v_1,v_2,\ldots,v_n)^t\right\rangle=\sum_{i=1}^n u_iv_i$)
ויהי W תת מרחב של V ממימד m עם בסיס $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$
   - ניתן להגדיר בסיס אורתונורמלי $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ של W (בסיס אורתונורמלי הוא בסיס המקיים $\langle a_i,a_j\rangle=0,\forall i\neq j$ וגם $\langle a_i,a_i\rangle=1$) באמצעות הנוסחה האיטרטיבית של גרם שמידט:

מטלה 1: חזרה, בעיית מציאת המקרב הטוב ביותר
מועד אחרון להגשה 22.6.24 בשעה 23:59

$$(*)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{b_1}{\|b_1\|} \\[2ex] a_p = \dfrac{b_p - \sum_{i=1}^{p-1} \langle b_p, a_i \rangle a_i}{\left\| b_p - \sum_{i=1}^{p-1} \langle b_p, a_i \rangle a_i \right\|}, \quad p = 2,3,\dots,m \end{cases}$$

- מאלגברה 2 ידוע כי המקרב הטוב ביותר $w^* \in W$ של $v \in V$ הוא יחיד ונתון ע"י הנוסחה:
  $w^* = \sum_{i=1}^{m} \langle v, a_i \rangle \cdot a_i$ (המקדמים $\alpha_i = \langle v, a_i \rangle$ נקראים מקדמי פורייה)

6א. כתבו תוכנית ב- matlab או פייתון אשר:
1. מקבלת כקלט וקטור $v \in V$, בסיס כלשהו $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ לתת מרחב $W \subset V$
2. מיישמת את תהליך גרם שמידט בהתאם לנוסחאות (*) לעיל למציאת בסיס אורתונורמלי $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ לתת המרחב W.
3. מוצאת את המקרב הטוב ביותר לפי הנוסחה $w^* = \sum_{i=1}^{m} \langle v, a_i \rangle \cdot a_i$.
4. מוצאת את המרחק המינימלי של v מ-W לפי נורמה 2: $d_{\min} = \|v - w^*\|_2$

6ב. יש לכתוב תוכניות נפרדות ליישום גרם שמידט ולמציאת המרחק המינימלי (h,,סעיפים 2, 3 כמפורט ב- 6א) ולקרוא להם מתוך התוכנית הראשית.

6ג. הפלט של התוכנית יהיה הווקטור v, הבסיס האורתוגונלי שמתקבל באמצעות גרם שמידט, המקרב הטוב ביותר w^* והמרחק המינימלי $d_{\min}$.

6ד. יש להריץ את התוכנית עבור וקטור $v = (1,1,-1,2)^t \in \mathbb{R}^4$ והבסיס $\{b_1 = (1,2,0,3)^t, b_2 = (4,0,5,8)^t, b_3 = (8,1,5,6)^t\}$ של תת המרחב W.

הנחיות להגשת המטלה:

1. הגשה בזוגות.
2. הגשת העבודה באמצעות המודל באמצעות שני קבצים.
   2.1 קובץ pdf שיכלול
   - פתרון לשאלות 1-5,
   - את הטקסט של הקוד לשאלה 6
   - את הקלט והפלט עבור ההרצה.

   2.2 קובץ WORD או קובץ py/ m.file שיכלול את הקוד של שאלה 6 (כולל הקודים לתוכניות העזר והתיעוד המתאים).
3. אנא הקפידו לציין בכל קובץ הגשה את שמות המגישים כולל מספר זהות בחלק העליון של העמוד הראשון של הקובץ או בדף כותר ייעודי.
4. רק אחד מבני הזוג נדרש להגיש והציון יוזן לשני המגישים ששמם רשום בקבצי ההגשה.

בהצלחה!!!

1. יהי $V=\mathbb{R}^2$ המרחב האוקלידי מעל שדה הממשיים. לכל זוג וקטורים $u,v\in\mathbb{R}^2$ נגדיר:
$f(u,v)=\langle u,v\rangle=u^tAv$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&m\end{pmatrix}$.
מצאו את כל ערכי m שעבורם הפונקציה $f(u,v)$ מגדירה מכפלה פנימית על V.

R^2 מייצג את מרחב הקורדינטות בר 2 ממדים

(u,v) הם אלמנטים במרחב זה המייצגים כווקטורים.

הפונקציה f מגדירה: $f(u,v)=u^t\cdot A\cdot v$. u^t הוא הטרנספוז של u (שווקטור u)

הביטוי $u^t\cdot A\cdot v$ מייצג כפל מטריצה

פונקציה זו מחשבת ערך סקלרי שהוא תוצאה של מכפלת המטריצה של העברה של u

נבדוק האם A סימטרית: $A=A^t$ ← אכן סימטרית

סימטריה זו קריטית לפתרון מכיוון שמטריצה סימטרית מבטיחה ערכים עצמיים ו וקטורים עצמיים אורתוגונליים

נמצא את הערכים העצמיים:

$$(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & m-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(m-\lambda)-4\Rightarrow m-\lambda-m\lambda+\lambda^2-4$$

$$\lambda^2-\lambda(m+1)+m-4$$ נפתור משוואה ריבועית כדי למצוא ערכים עצמיים

$$\boxed{\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}}\Leftarrow$$ נוסחה

נשים את המקדמים של λ

$a=1\Rightarrow(\lambda^2)$

$b=-(m+1)\;=\lambda(m+1)$

$c=(m-4)$

$$\lambda=\frac{-(-(m+1))\pm\sqrt{(-m-1)^2-4\cdot1\cdot(m-4)}}{2}$$

$$\lambda=\frac{(m+1)\pm\sqrt{(-m-1)^2-4\cdot1\cdot(m-4)}}{2}$$

המשך

$$ה = \frac{(m+1) \pm \sqrt{m^2+2m+1-4m+16}}{2}$$

$$ה = \frac{(m+1) \pm \sqrt{m^2-2m+17}}{2}$$

$$\Delta = m^2-2m+17$$

תמיד חיובי

$$(m+1)-\sqrt{m^2-2m+17} > 0$$

$$(m+1)^2 > m^2-2m+17$$

$$m^2+2m+1 > m^2-2m+17$$

$$4m > 16$$

$$\boxed{m > 4}$$

$$m+1+\sqrt{m^2-2m+17} > 0$$

$$\vdots$$

$$m^2+2m+17 < -m^2+2m-17$$

$$2m^2 > -34$$

$$m < \sqrt{-17}$$

שלילי

כאשר מטריצה היא סימטרית $A^t=A$

ניתן להגיד שהיא חיובית רציפה אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה חיוביים. הביטוי: u^tAv התכונות שלו ← חיובי ורציף

וצריך לבדוק שלכל וקטור שאינו 0 הביטוי רציף

מסקנה הפונקציה $f(u,v)$ מגדירה מכפלה פנימית במרחב R^2 אם ורק אם מלכת זה התנאי הדרוש למטריצה הערכים העצמיים

של מטריצה A והיו חיוביים ולכן תהיה המטריצה חיובית
כ זופה ששומר את כללי המכפלה הפנימית.

2. יהי $V = C[a,b]$ מרחב הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי הפונקציה $\|\cdot\|_1$ מגדירה נורמה על V.

** תזכורת: לכל $f(x)\in C[a,b]$ הגדרנו: $\|f\|_1=\int_a^b |f(x)|dx$.

נוכיח את קיום האקסיומות בהגדרת הנורמה

אקסיומה 1 $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i| \geq 0$

1) הגדרת הנורמה $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$

2) תכונת החיוביות של הערך המוחלט

אקסיומה 2

$$\|u\|_1 = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |u_i| = 0 \iff \forall i: |u_i| = 0 \iff u = (0,0,\dots,0)^t = 0_V$$

1) הגדרת נורמה 1 $\|f\|_1=\sum_{i=1}^{n}|f_i|$

2) תכונת החיוביות של הערך המוחלט

אקסיומה 3 מתקיים:

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda u_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda|\cdot|u_i| = |\lambda|\cdot\sum_{i=1}^{n}|u_i| = |\lambda|\cdot\|u\|_1$$

1) הגדרת כפל וקטור בסקלר והגדרת נורמה 1: $\|f\|_1=\sum_{i=1}^{n}|f_i|$

2) תכונת ערך מוחלט ב R: $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|, \forall a,b\in R$

3) חוק הפילוג מ R: $xy+xz = x(y+z), \forall x,y,z\in R$

4) הגדרת נורמה 1

אקסיומה 4

$$\|u+v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i+v_i| \le \sum_{i=1}^{n} (|u_i|) + \sum_{i=1}^{n} |v_i| = \|u\|_1+\|v\|_1$$

1) הגדרת סכום וקטורים והגדרת נורמה 1 $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|f_i|$

2) אי שוויון המשולש ב R: $|a+b|\le|a|+|b|, \forall a,b\in R$

3) תכונת סכום ממשיים (חילופיות קיבוציות)

4) הגדרת נורמה 1

3. יהי $(V,\mathbb{R})$ ממ״פ. הוכיחו כי לכל $u,v\in V$ מתקיים $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$.

** זכרו כי בממ״פ מוגדרת הנורמה הטבעית $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$.

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2$$
$$=\|u+v\|\cdot\|u+v\|+\|u-v\|\cdot\|u-v\|$$
$$=$$
$$=u\cdot u+u\cdot v+v\cdot u+v\cdot v+u\cdot u-u\cdot v-v\cdot u+v\cdot v$$
$$=|u|^2+u\cdot v+u\cdot v+|v|^2+|u|^2-u\cdot v-u\cdot v+|v|^2$$
$$=2|u|^2+2|v|^2$$
$$=2(|u|^2+|v|^2)$$

אותו דבר בסימונים שונים

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2$$
$$u,v\in V$$
$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle+\langle u-v,u-v\rangle=$$
$$\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle+\langle u,u\rangle-\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle-$$
$$\langle v,v\rangle$$
$$=2\langle u,u\rangle+2\langle v,v\rangle$$
$$=2[\langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle]$$
$$=2[\|u\|^2+\|v\|^2]$$