题型：多元正态分布线性变换之后的分布

4.3 条件分布和独立性

例如:设三维随机向量$X=(X_1,X_2,X_3)'$,且

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \hline X_3 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \hline 0 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\right),$$

则有(1) $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$; $X_3 \sim N(0,3)$

(2) $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$与$X_3$相互独立.(因$\Sigma_{12}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

4.2 多元正态分布

(2)

令 $Y=\begin{pmatrix}X_2\\X_3\\X_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=BX,$

由性质2知,*Y*为3维正态随机向量,且

$$\mu_y=B\mu_x=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

4.2 多元正态分布

$$\Sigma_y=B\Sigma_xB'$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&3\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$Y=\begin{pmatrix}X_2\\X_3\\X_1\end{pmatrix}\sim N(\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&1\end{pmatrix}).$$

4.2 多元正态分布

(3) 设$Z=2X_1-X_2+3X_3$,试求随机变量Z的分布.

$$Z=2X_1-X_2+3X_3=(2,-1,3)X=CX$$

故有:

$$\mu_z=C\mu_x=(2,-1,3)\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=4$$

$$\sigma_z^2=C\Sigma_x C'$$

$$=(2,-1,3)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=(1,0,9)\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$=29$$

所以 $Z\sim \mathrm{N}(4,29)$.

题目

设三维随机向量 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,X_3)'$ 服从多元正态分布 $N\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right)$。

试求:

1. X_1 的分布以及 $\begin{pmatrix}X_2\\X_3\end{pmatrix}$ 的分布。
2. 令 $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}X_2\\X_3\\X_1\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{Y}$ 的分布。
3. 设 $Z=2X_1-X_2+3X_3$，求随机变量 Z 的分布。

解答

第一问：求 X_1 的分布以及 $\begin{pmatrix}X_2\\X_3\end{pmatrix}$ 的分布

根据多元正态分布的性质，如果一个随机向量服从多元正态分布，那么其任何子向量也服从多元正态分布。

对于 X_1，它是 $\mathbf{X}$ 的第一个分量。
其均值是 $\mu_{\mathbf{X}}$ 的第一个分量，即 $\mu_{X_1}=2$。
其方差是 $\mathbf{\Sigma_X}$ 的 $(1,1)$ 位置元素，即 $\sigma_{X_1}^2=1$。
所以，$X_1\sim N(2,1)$。

对于 $\begin{pmatrix}X_2\\X_3\end{pmatrix}$，它是 $\mathbf{X}$ 的后两个分量。
其均值向量是 $\mu_{\mathbf{X}}$ 的后两个分量，即 $\begin{pmatrix}\mu_{X_2}\\\mu_{X_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$。
其协方差矩阵是 $\mathbf{\Sigma_X}$ 对应的子矩阵，即取第2、3行和第2、3列构成的矩阵：
$\begin{pmatrix}\sigma_{X_2}^2&\mathrm{Cov}(X_2,X_3)\\\mathrm{Cov}(X_3,X_2)&\sigma_{X_3}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$。
所以，$\begin{pmatrix}X_2\\X_3\end{pmatrix}\sim N_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\right)$。

第二问：求 $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_1 \end{pmatrix}$ 的分布

令 $\mathbf{Y} = B\mathbf{X}$，其中 B 是一个置换矩阵，用于重新排列 $\mathbf{X}$ 的分量。
要得到 $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_1 \end{pmatrix}$，我们需要：
第一行选取 X_2 (对应 $\mathbf{X}$ 的第二列)
第二行选取 X_3 (对应 $\mathbf{X}$ 的第三列)
第三行选取 X_1 (对应 $\mathbf{X}$ 的第一列)
所以矩阵 B 为：

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据线性变换的性质，如果 $\mathbf{X} \sim N(\mu_{\mathbf{X}}, \mathbf{\Sigma_X})$，那么 $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} \sim N(B\mu_{\mathbf{X}}, B\mathbf{\Sigma_X}B')$。

首先计算 $\mu_{\mathbf{Y}} = B\mu_{\mathbf{X}}$：

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 2+1\cdot 0+0\cdot 0 \\ 0\cdot 2+0\cdot 0+1\cdot 0 \\ 1\cdot 2+0\cdot 0+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

接下来计算 $\mathbf{\Sigma_Y} = B\mathbf{\Sigma_X}B'$：

$$B\mathbf{\Sigma_X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma_Y} = (B\mathbf{\Sigma_X})B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 1+3\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+3\cdot 1 & 0\cdot 1+0\cdot 0+3\cdot 0 \\ 1\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以，$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_1 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$。

第三问：求 $Z = 2X_1 - X_2 + 3X_3$ 的分布

令 $Z = C\mathbf{X}$，其中 $C = (2, -1, 3)$。

根据线性变换的性质，如果 $\mathbf{X} \sim N(\mu_{\mathbf{X}}, \mathbf{\Sigma_X})$，那么 $Z = C\mathbf{X} \sim N(C\mu_{\mathbf{X}}, C\mathbf{\Sigma_X}C')$.

首先计算均值 $\mu_Z = C\mu_{\mathbf{X}}$：

$$\mu_Z = (2, -1, 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 0 = 4$$

接下来计算方差 $\sigma_Z^2 = C\mathbf{\Sigma_X}C'$：

$$C\mathbf{\Sigma_X} = (2, -1, 3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 3\cdot 0, \quad 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 3\cdot 0, \quad 2\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 3)$$
$$= (2 - 1 + 0, \quad 2 - 2 + 0, \quad 0 + 0 + 9)$$
$$= (1, 0, 9)$$

$$\sigma_Z^2 = (1, 0, 9) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 9\cdot 3 = 2 + 0 + 27 = 29$$

所以，$Z \sim N(4, 29)$。