题型：Householder变换将a向量反射到b

3.2 矩阵的QR分解

例 用Householder变换化向量 $x=(3,0,4)^T$ 与e_1共线

解：令 $u = x + \|x\|_2 e_1 = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix}$

$$H = I - \frac{2}{\|u\|_2^2}uu^T = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \frac{2}{80}\begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&0&4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-0.6&0&-0.8\\0&1&0\\-0.8&0&0.6\end{pmatrix}$$

此时 $Hx = (-5\quad 0\quad 0)^T$

题目： 用 Householder 变换，将向量 $x=(3,0,4)^T$ 与 e_1 共线。

步骤：

1. **确定原始向量 x：**
   $x = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$
2. **计算 x 的模长 $\|x\|$：**
   $\|x\| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$
3. **确定目标向量 $\tilde{x}$：**
   目标是使变换后的向量与 $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 共线，且模长与 x 相同。
   根据 Householder 变换的常见约定，为了数值稳定性，我们通常选择目标向量 $\tilde{x}$ 的第一个分量的符号与原始向量 x 的第一个分量的符号相反（除非原始向量第一个分量为零）。
   $x_1 = 3 > 0$，所以我们选择目标向量的第一个分量为负值。
   所以，目标向量 $\tilde{x} = -\|x\|e_1 = -5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}$。
4. **构造 Householder 向量 v：**
   我们使用 $v = x - \tilde{x}$ 来构造 Householder 向量。
   $v = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-(-5)\\0-0\\4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix}$
5. **计算 v^Tv (即 $\|v\|^2$)：**
   $v^Tv = 8^2+0^2+4^2 = 64+0+16 = 80$
6. **构造 Householder 矩阵 H：**
   $H = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$
   $H = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - 2\frac{1}{80}\begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&0&4\end{pmatrix}$
   $H = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \frac{2}{80}\begin{pmatrix}8\cdot8&8\cdot0&8\cdot4\\0\cdot8&0\cdot0&0\cdot4\\4\cdot8&4\cdot0&4\cdot4\end{pmatrix}$

$$H = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{40}\begin{pmatrix}64 & 0 & 32\\0 & 0 & 0\\32 & 0 & 16\end{pmatrix}$$
$$H = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}64/40 & 0 & 32/40\\0 & 0 & 0\\32/40 & 0 & 16/40\end{pmatrix}$$
$$H = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1.6 & 0 & 0.8\\0 & 0 & 0\\0.8 & 0 & 0.4\end{pmatrix}$$
$$H = \begin{pmatrix}1-1.6 & 0 & 0-0.8\\0 & 1 & 0\\0-0.8 & 0 & 1-0.4\end{pmatrix}$$
$$H = \begin{pmatrix}-0.6 & 0 & -0.8\\0 & 1 & 0\\-0.8 & 0 & 0.6\end{pmatrix}$$

7. **验证 Hx：**

$$Hx = \begin{pmatrix}-0.6 & 0 & -0.8\\0 & 1 & 0\\-0.8 & 0 & 0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$
$$Hx = \begin{pmatrix}(-0.6)(3)+0(0)+(-0.8)(4)\\0(3)+1(0)+0(4)\\(-0.8)(3)+0(0)+0.6(4)\end{pmatrix}$$
$$Hx = \begin{pmatrix}-1.8-3.2\\0\\-2.4+2.4\end{pmatrix}$$
$$Hx = \begin{pmatrix}-5.0\\0\\0\end{pmatrix}$$

结果：

使用我们的方法，得到的 Householder 矩阵是 $H = \begin{pmatrix}-0.6 & 0 & -0.8\\0 & 1 & 0\\-0.8 & 0 & 0.6\end{pmatrix}$，并且 $Hx = \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}$。

与 PPT 结果的比较：

- **Householder 矩阵 H：** 我们的结果与 PPT 中计算出的 H 完全一致。
- **变换后的向量 Hx：** 我们的结果是 $\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}$，这也与 PPT 中给出的结果完全一致。