3.2 矩阵的QR分解

例 利用Householder变换将下列矩阵进行QR分解：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

解： 对向量 $\alpha_1=(0,2,0)^T$ ，令

$$u_1=\frac{\alpha_1+\|\alpha_1\|_2\, e_1}{\|\alpha_1+\|\alpha_1\|_2\, e_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$$

（u_1 实际上是平面 $x+y=0$ 的法向量）

从而得Householder 矩阵

$$H_1=I-2u_1u_1^H=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3.2 矩阵的QR分解

使得

$$H_1A=\left(\begin{array}{c|cc}-2&-1&6\\\hline 0&3&-1\\0&4&-2\end{array}\right)$$

对向量 $\beta_2=(3,4)^T$ ，令 $\tilde{u}_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$

（$\tilde{u}_2$ 实际上是平面 $2y+z=0$ 的法向量）

3.2 矩阵的QR分解

可得 Householder 矩阵

$$\tilde{H}_2 = I - 2\tilde{u}_2\tilde{u}_2^H = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

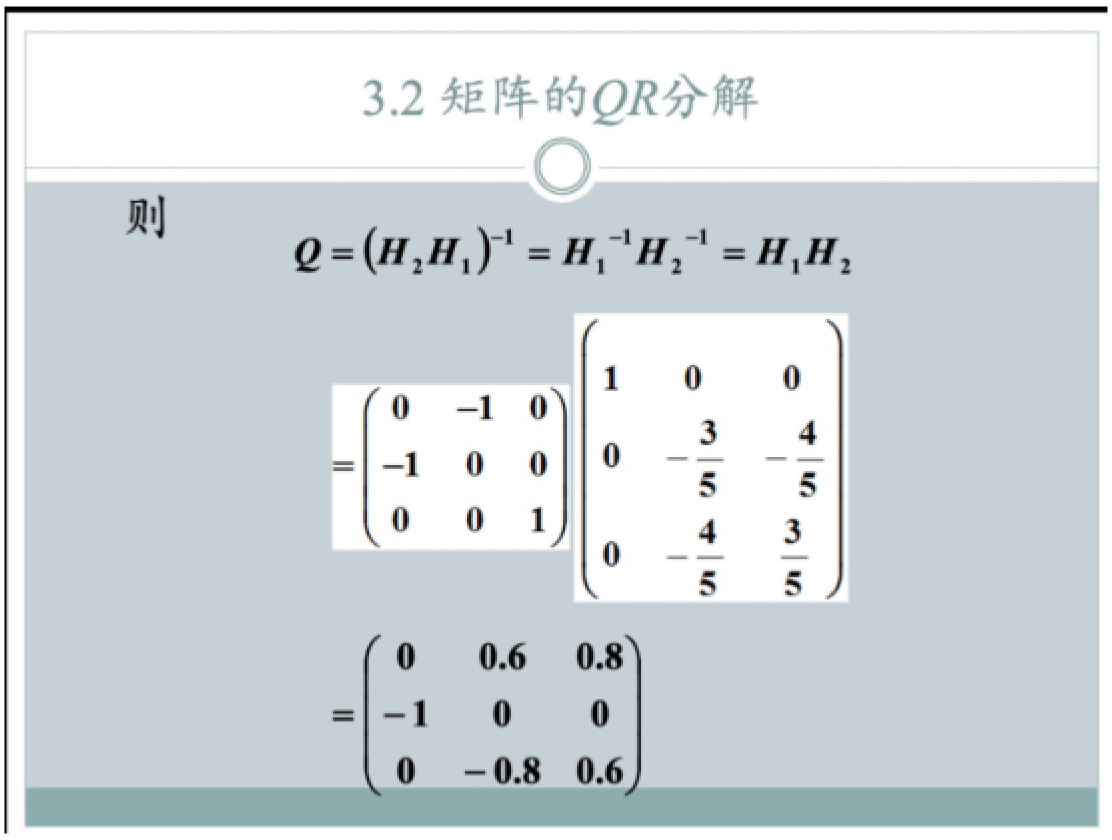
3.2 矩阵的QR分解

因此取

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

从而有

$$H_2H_1A = \left(\begin{array}{cc:c} -2 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \equiv R$$



问题： 对矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-3&1\\2&1&-6\\0&4&2\end{pmatrix}$ 进行 QR 分解。

QR 分解的目标是将矩阵 A 分解为 $A=QR$，其中 Q 是正交矩阵，R 是上三角矩阵。Householder 变换是一种常用的方法，它通过一系列正交变换将 A 逐步转化为上三角矩阵 R。