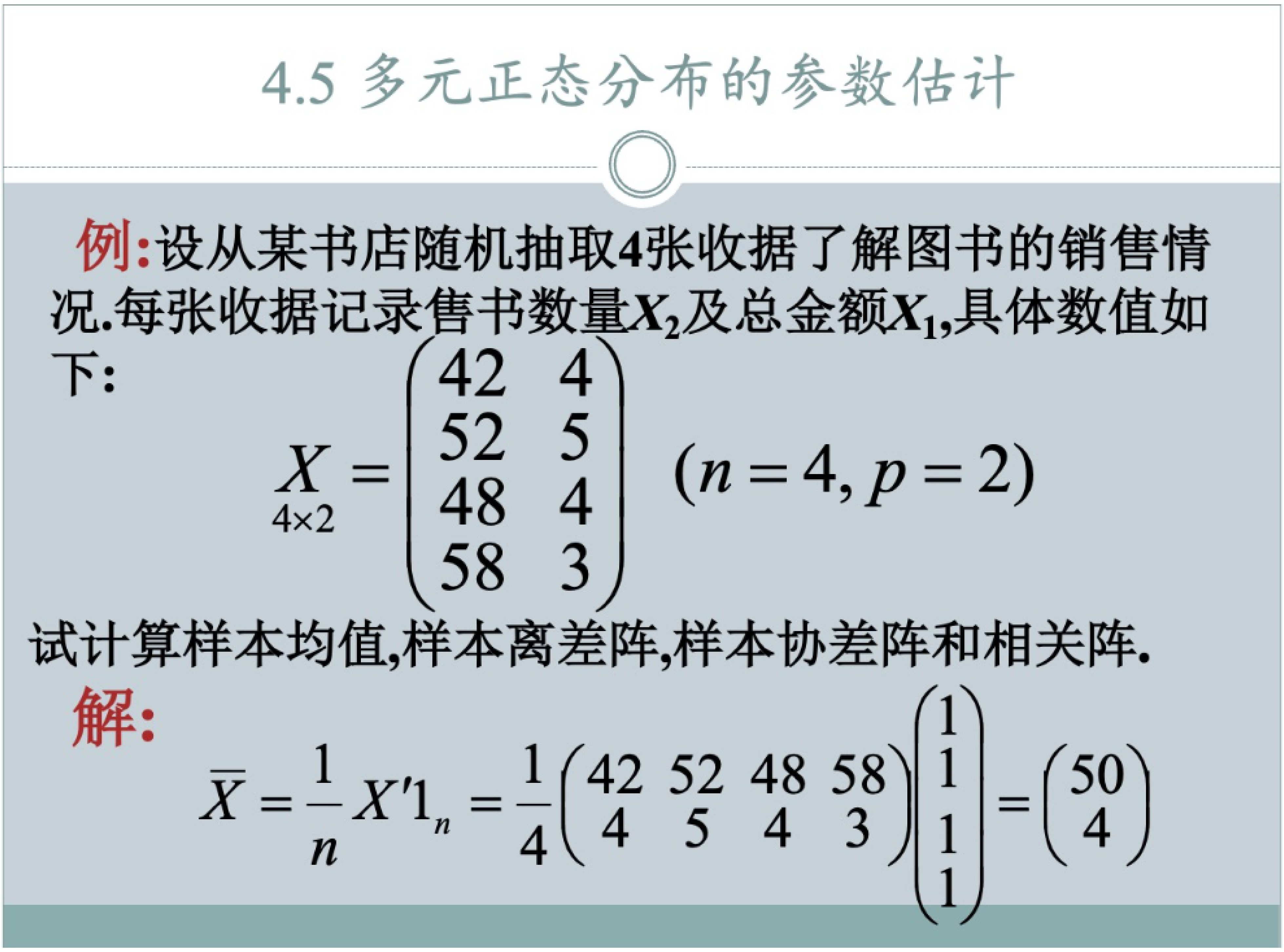
题型：协方差矩阵



例题信息：
从某书店随机抽取4张收据，了解图书的销售情况。每张收据记录售书数量 X_2 及总金额 X_1。
数据矩阵 X 如下：
$$X=\begin{pmatrix}42 & 4\\52 & 5\\48 & 4\\58 & 3\end{pmatrix}$$

这里 $n=4$ (样本数量)，$p=2$ (变量数量，X_1 是总金额， X_2 是售书数量)。

---

1. 计算样本均值向量 $\bar{X}$

样本均值向量 $\bar{X}$ 的计算公式为：
$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}X_\alpha$

或者，如果数据以行为观测值（如您提供的矩阵 X），则可以按列求平均。
X_1 列 (总金额): $42,52,48,58$
X_2 列 (售书数量): $4,5,4,3$

$\bar{x}_1=\frac{42+52+48+58}{4}=\frac{200}{4}=50$
$\bar{x}_2=\frac{4+5+4+3}{4}=\frac{16}{4}=4$

所以，样本均值向量为：
$$\bar{X}=\begin{pmatrix}50\\4\end{pmatrix}$$

这与您图片中给出的 $\bar{X}=\begin{pmatrix}50\\4\end{pmatrix}$ 一致。

---

2. 计算样本离差阵 A

样本离差阵的定义是 $A=\sum_{\alpha=1}^{n}(X_\alpha-\bar{X})(X_\alpha-\bar{X})'$。
首先，我们需要计算每个观测值与均值向量的离差。
$X_\alpha-\bar{X}$

观测值1: $X_1 = \begin{pmatrix} 42 \\ 4 \end{pmatrix}$

$X_1 - \bar{X} = \begin{pmatrix} 42 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

观测值2: $X_2 = \begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}$

$X_2 - \bar{X} = \begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

观测值3: $X_3 = \begin{pmatrix} 48 \\ 4 \end{pmatrix}$

$X_3 - \bar{X} = \begin{pmatrix} 48 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

观测值4: $X_4 = \begin{pmatrix} 58 \\ 3 \end{pmatrix}$

$X_4 - \bar{X} = \begin{pmatrix} 58 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

现在，计算 $(X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})'$ 并求和:

第一项: $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

第二项: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

第三项: $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

第四项: $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & -8 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$

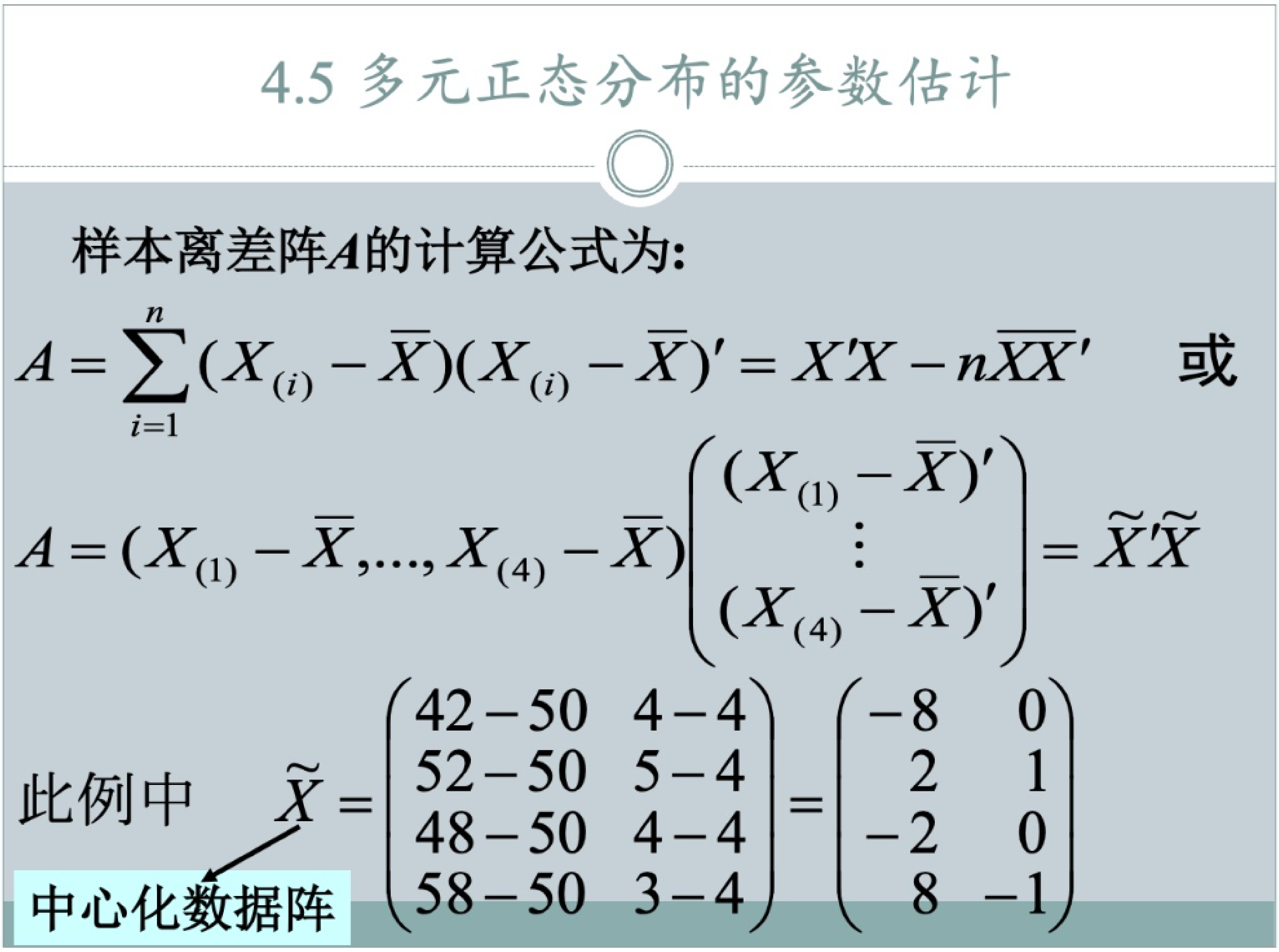
将这四项相加:

$A = \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 64 & -8 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 64+4+4+64 & 0+2+0-8 \\ 0+2+0-8 & 0+1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

所以，样本离差阵为:

$A = \begin{pmatrix} 136 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

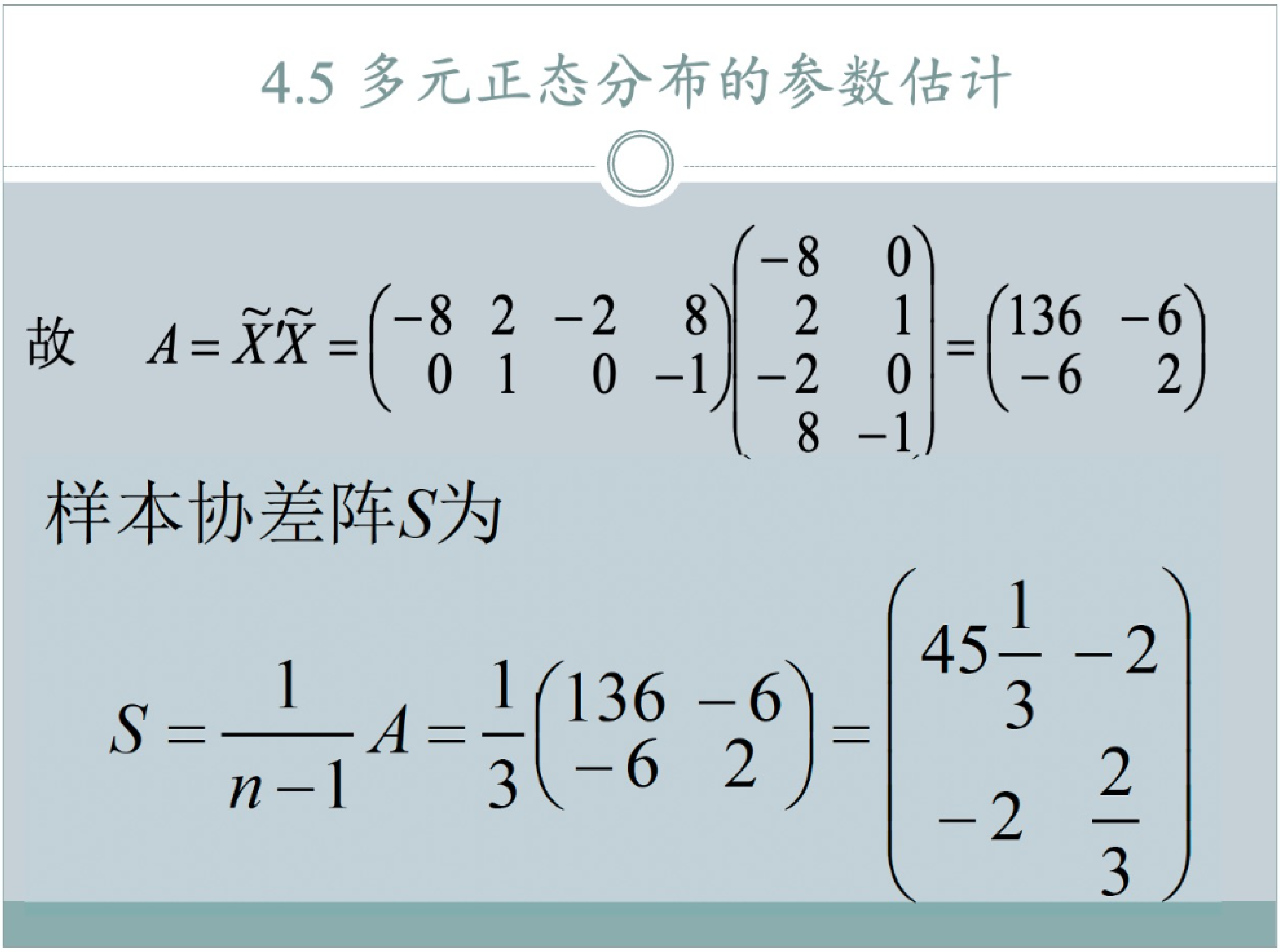


3. 计算样本协差阵 S

样本协差阵 S 通常定义为 $S = \frac{1}{n-1} A$ (无偏估计)。
这里 $n = 4$，所以 $n - 1 = 3$。

$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 136 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136/3 & -6/3 \\ -6/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45.333 & -2 \\ -2 & 0.667 \end{pmatrix}$ (保留三位小数)

所以，样本协差阵为：
$S = \begin{pmatrix} 45.333 & -2 \\ -2 & 0.667 \end{pmatrix}$



---

4. 计算相关阵 R

相关阵 R 的元素 r_{ij} 定义为：
$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii} s_{jj}}}$
其中 s_{ij} 是协方差矩阵 S 的元素，s_{ii} 和 s_{jj} 是主对角线元素（即方差）。

从协方差矩阵 S 中，我们有：
$s_{11} = 136/3 = 45.333$ (变量 X_1 的方差)
$s_{22} = 2/3 = 0.667$ (变量 X_2 的方差)
$s_{12} = s_{21} = -2$ (变量 X_1 和 X_2 的协方差)

首先计算标准差：
$\sqrt{s_{11}} = \sqrt{136/3} \approx \sqrt{45.333} \approx 6.733$
$\sqrt{s_{22}} = \sqrt{2/3} \approx \sqrt{0.667} \approx 0.816$

现在计算相关系数：
$r_{11} = 1$ (任何变量与其自身的相关系数都为1)
$r_{22} = 1$

$r_{12} = \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11} s_{22}}} = \frac{-2}{\sqrt{(136/3)(2/3)}} = \frac{-2}{\sqrt{272/9}} = \frac{-2}{\frac{\sqrt{272}}{3}} = \frac{-6}{\sqrt{272}} = \frac{-6}{4\sqrt{17}} = \frac{-3}{2\sqrt{17}}$
$r_{12} \approx \frac{-3}{2 \times 4.123} \approx \frac{-3}{8.246} \approx -0.364$

$r_{21} = r_{12} \approx -0.364$

所以，相关阵为：
$R = \begin{pmatrix} 1 & -0.364 \\ -0.364 & 1 \end{pmatrix}$

4.5 多元正态分布的参数估计

样本相关阵R为

$$R=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-6}{\sqrt{136\times 2}} \\ \dfrac{-6}{\sqrt{136\times 2}} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-3}{\sqrt{68}} \\ \dfrac{-3}{\sqrt{68}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -0.3638 \\ -0.3638 & 1 \end{pmatrix}$$

总结计算结果：

1. **样本均值向量** $\bar{X}$**：**
   $\bar{X}=\begin{pmatrix} 50 \\ 4 \end{pmatrix}$
2. **样本离差阵** A**：**
   $A=\begin{pmatrix} 136 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$
3. **样本协差阵** S**：**
   $S=\begin{pmatrix} 136/3 & -2 \\ -2 & 2/3 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 45.333 & -2 \\ -2 & 0.667 \end{pmatrix}$
4. **相关阵** R**：**
   $R=\begin{pmatrix} 1 & -0.364 \\ -0.364 & 1 \end{pmatrix}$