

3.2 矩阵的QR分解



例 利用Gram-Schmidt方法将下列矩阵进行QR分解：

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 矩阵的QR分解



解： $\alpha_1 = (4, 2, 2, 1)^T, \quad \beta_1 = \alpha_1 = (4, 2, 2, 1)^T$

$$\varepsilon_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|_2} = (0.8, 0.4, 0.4, 0.2)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \varepsilon_1)\varepsilon_1 = (0.4, -0.8, -0.8, 1.6)^T$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|_2} = (0.2, -0.4, -0.4, 0.8)^T$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, \varepsilon_1)\varepsilon_1 - (\alpha_3, \varepsilon_2)\varepsilon_2 = (0, 1, -1, 0)^T$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^T$$

3.2 矩阵的QR分解

所以 A 的QR分解为：

$$Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & \sqrt{2}/2 \\ 0.4 & -0.4 & -\sqrt{2}/2 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

1. 题目 (Problem Statement)

利用 Gram-Schmidt 正交化方法（格拉姆-施密特方法）将下列矩阵 A 进行 QR 分解：

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 通用方法 (General Method)

QR 分解 的目标是将一个线性无关的实矩阵 A 分解为两个矩阵的乘积： $A = QR$ 。

- Q (**正交矩阵**): 其列向量是标准正交向量组（即向量长度为1且两两正交）。
- R (**上三角矩阵**): 对角线元素为正，且为上三角形式。

核心步骤（施密特正交化 Gram-Schmidt Process）：

设矩阵 A 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 。

1. **正交化 (Orthogonalization)**: 构造一组两两正交的向量 β_1, β_2, \dots

- $\beta_1 = \alpha_1$
- $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1$ （或者写成投影形式 $\beta_2 = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1$ ）
- $\beta_k = \alpha_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \alpha_k, \epsilon_j \rangle \epsilon_j$

2. **单位化 (Normalization)**: 将正交向量转化为单位向量 ϵ 。

- $\epsilon_k = \frac{\beta_k}{\|\beta_k\|_2}$

3. **构造矩阵**:

- Q **矩阵**: 由 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 作为列向量组成。
- R **矩阵**:
 - 对角线元素 $r_{kk} = \|\beta_k\|_2$ 。
 - 上三角元素 $r_{jk} = \langle \alpha_k, \epsilon_j \rangle$ ($j < k$)。

- 或者直接通过 $R = Q^T A$ 计算。

3. 详细题解 (Detailed Solution)

记矩阵 A 的三个列向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。

$$\alpha_1 = (4, 2, 2, 1)^T, \quad \alpha_2 = (2, 0, 0, 2)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1, -1, 1)^T$$

第一步：处理第一个向量 α_1

- 确定 β_1 :**
 $\beta_1 = \alpha_1 = (4, 2, 2, 1)^T$
- 计算模长 $\|\beta_1\|_2$:**
 $\|\beta_1\|_2 = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 4 + 4 + 1} = \sqrt{25} = 5$
- 单位化得到 ϵ_1 :**
 $\epsilon_1 = \frac{\beta_1}{5} = (0.8, 0.4, 0.4, 0.2)^T$

第二步：处理第二个向量 α_2

- 计算投影系数:**
 $\langle \alpha_2, \epsilon_1 \rangle = 2 \times 0.8 + 0 \times 0.4 + 0 \times 0.4 + 2 \times 0.2 = 1.6 + 0.4 = 2$
- 正交化得到 β_2 :**
 $\beta_2 = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1$
 $\beta_2 = (2, 0, 0, 2)^T - 2 \times (0.8, 0.4, 0.4, 0.2)^T$
 $\beta_2 = (2, 0, 0, 2)^T - (1.6, 0.8, 0.8, 0.4)^T$
 $\beta_2 = (0.4, -0.8, -0.8, 1.6)^T$
- 计算模长 $\|\beta_2\|_2$:**
 $\|\beta_2\|_2 = \sqrt{0.4^2 + (-0.8)^2 + (-0.8)^2 + 1.6^2} = \sqrt{0.16 + 0.64 + 0.64 + 2.56} = \sqrt{4} = 2$
- 单位化得到 ϵ_2 :**
 $\epsilon_2 = \frac{\beta_2}{2} = (0.2, -0.4, -0.4, 0.8)^T$

第三步：处理第三个向量 α_3

- 计算投影系数:**
 - 对 ϵ_1 的投影: $\langle \alpha_3, \epsilon_1 \rangle = 1(0.8) + 1(0.4) + (-1)(0.4) + 1(0.2) = 1$
 - 对 ϵ_2 的投影: $\langle \alpha_3, \epsilon_2 \rangle = 1(0.2) + 1(-0.4) + (-1)(-0.4) + 1(0.8) = 0.2 - 0.4 + 0.4 + 0.8 = 1$
- 正交化得到 β_3 :**
 $\beta_3 = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 - \langle \alpha_3, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2$
 $\beta_3 = (1, 1, -1, 1)^T - 1 \cdot \epsilon_1 - 1 \cdot \epsilon_2$
 $\beta_3 = (1, 1, -1, 1)^T - (0.8, 0.4, 0.4, 0.2)^T - (0.2, -0.4, -0.4, 0.8)^T$
计算分量:
 - 第1分量: $1 - 0.8 - 0.2 = 0$
 - 第2分量: $1 - 0.4 - (-0.4) = 1$
 - 第3分量: $-1 - 0.4 - (-0.4) = -1$
 - 第4分量: $1 - 0.2 - 0.8 = 0$ $\beta_3 = (0, 1, -1, 0)^T$
- 计算模长 $\|\beta_3\|_2$:**
 $\|\beta_3\|_2 = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$
- 单位化得到 ϵ_3 :**
 $\epsilon_3 = \frac{\beta_3}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T$

第四步：组装 Q 和 R 矩阵

Q 矩阵: 由 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 组成。

$$Q = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.4 & -0.4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

R 矩阵: 通过 $R = Q^T A$ 计算, 或直接利用之前的计算结果 (对角线为模长, 上三角为投影系数)。

- $r_{11} = \|\beta_1\| = 5$
- $r_{22} = \|\beta_2\| = 2$
- $r_{33} = \|\beta_3\| = \sqrt{2}$
- $r_{12} = \langle \alpha_2, \epsilon_1 \rangle = 2$
- $r_{13} = \langle \alpha_3, \epsilon_1 \rangle = 1$
- $r_{23} = \langle \alpha_3, \epsilon_2 \rangle = 1$

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

最终结果

$$A = QR$$

即：

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.4 & -0.4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$