

## 3.2 矩阵的QR分解

**例** 利用Gram-Schmidt方法将下列矩阵进行QR分解：

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3.2 矩阵的QR分解

**解：**  $\alpha_1 = (4, 2, 2, 1)^T$ ,  $\beta_1 = \alpha_1 = (4, 2, 2, 1)^T$

$$\varepsilon_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|_2} = (0.8, 0.4, 0.4, 0.2)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \varepsilon_1) \varepsilon_1 = (0.4, -0.8, -0.8, 1.6)^T$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|_2} = (0.2, -0.4, -0.4, 0.8)^T$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, \varepsilon_1) \varepsilon_1 - (\alpha_3, \varepsilon_2) \varepsilon_2 = (0, 1, -1, 0)^T$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^T$$

## 3.2 矩阵的QR分解

所以  $A$  的QR分解为：

$$Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & \sqrt{2}/2 \\ 0.4 & -0.4 & -\sqrt{2}/2 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$
$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

### 1. 题目 (Problem Statement)

利用 Gram-Schmidt 正交化方法 (格拉姆-施密特方法) 将下列矩阵  $A$  进行 QR 分解：

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### 2. 通用方法 (General Method)

QR 分解的目标是将一个线性无关的实矩阵  $A$  分解为两个矩阵的乘积： $A = QR$ 。

- **$Q$  (正交矩阵):** 其列向量是标准正交向量组 (即向量长度为1且两两正交)。
- **$R$  (上三角矩阵):** 对角线元素为正，且为上三角形式。

**核心步骤 (施密特正交化 Gram-Schmidt Process) :**

设矩阵  $A$  的列向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 。

1. **正交化 (Orthogonalization):** 构造一组两两正交的向量  $\beta_1, \beta_2, \dots$

- $\beta_1 = \alpha_1$
- $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1$  (或者写成投影形式  $\beta_2 = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1$ )
- $\beta_k = \alpha_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \alpha_k, \epsilon_j \rangle \epsilon_j$

2. **单位化 (Normalization):** 将正交向量转化为单位向量  $\epsilon$ 。

$$\epsilon_k = \frac{\beta_k}{\|\beta_k\|_2}$$

3. **构造矩阵:**

- **$Q$  矩阵:** 由  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  作为列向量组成。
- **$R$  矩阵:**
  - 对角线元素  $r_{kk} = \|\beta_k\|_2$
  - 上三角元素  $r_{jk} = \langle \alpha_k, \epsilon_j \rangle (j < k)$ 。

- 或者直接通过  $R = Q^T A$  计算。

### 3. 详细题解 (Detailed Solution)

记矩阵  $A$  的三个列向量分别为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 。

$$\alpha_1 = (4, 2, 2, 1)^T, \quad \alpha_2 = (2, 0, 0, 2)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1, -1, 1)^T$$

#### 第一步：处理第一个向量 $\alpha_1$

1. 确定  $\beta_1$ :

$$\beta_1 = \alpha_1 = (4, 2, 2, 1)^T$$

2. 计算模长  $\|\beta_1\|_2$ :

$$\|\beta_1\|_2 = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 4 + 4 + 1} = \sqrt{25} = 5$$

3. 单位化得到  $\epsilon_1$ :

$$\epsilon_1 = \frac{\beta_1}{5} = (0.8, 0.4, 0.4, 0.2)^T$$

#### 第二步：处理第二个向量 $\alpha_2$

1. 计算投影系数:

$$\langle \alpha_2, \epsilon_1 \rangle = 2 \times 0.8 + 0 \times 0.4 + 0 \times 0.4 + 2 \times 0.2 = 1.6 + 0.4 = 2$$

2. 正交化得到  $\beta_2$ :

$$\beta_2 = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1$$

$$\beta_2 = (2, 0, 0, 2)^T - 2 \times (0.8, 0.4, 0.4, 0.2)^T$$

$$\beta_2 = (2, 0, 0, 2)^T - (1.6, 0.8, 0.8, 0.4)^T$$

$$\beta_2 = (0.4, -0.8, -0.8, 1.6)^T$$

3. 计算模长  $\|\beta_2\|_2$ :

$$\|\beta_2\|_2 = \sqrt{0.4^2 + (-0.8)^2 + (-0.8)^2 + 1.6^2} = \sqrt{0.16 + 0.64 + 0.64 + 2.56} = \sqrt{4} = 2$$

4. 单位化得到  $\epsilon_2$ :

$$\epsilon_2 = \frac{\beta_2}{2} = (0.2, -0.4, -0.4, 0.8)^T$$

#### 第三步：处理第三个向量 $\alpha_3$

1. 计算投影系数:

■ 对  $\epsilon_1$  的投影:  $\langle \alpha_3, \epsilon_1 \rangle = 1(0.8) + 1(0.4) + (-1)(0.4) + 1(0.2) = 1$

■ 对  $\epsilon_2$  的投影:  $\langle \alpha_3, \epsilon_2 \rangle = 1(0.2) + 1(-0.4) + (-1)(-0.4) + 1(0.8) = 0.2 - 0.4 + 0.4 + 0.8 = 1$

2. 正交化得到  $\beta_3$ :

$$\beta_3 = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 - \langle \alpha_3, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2$$

$$\beta_3 = (1, 1, -1, 1)^T - 1 \cdot \epsilon_1 - 1 \cdot \epsilon_2$$

$$\beta_3 = (1, 1, -1, 1)^T - (0.8, 0.4, 0.4, 0.2)^T - (0.2, -0.4, -0.4, 0.8)^T$$

计算分量:

■ 第1分量:  $1 - 0.8 - 0.2 = 0$

■ 第2分量:  $1 - 0.4 - (-0.4) = 1$

■ 第3分量:  $-1 - 0.4 - (-0.4) = -1$

■ 第4分量:  $1 - 0.2 - 0.8 = 0$

$$\beta_3 = (0, 1, -1, 0)^T$$

3. 计算模长  $\|\beta_3\|_2$ :

$$\|\beta_3\|_2 = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

4. 单位化得到  $\epsilon_3$ :

$$\epsilon_3 = \frac{\beta_3}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T$$

#### 第四步：组装 Q 和 R 矩阵

$Q$  矩阵: 由  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  组成。

$$Q = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.4 & -0.4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

$R$  矩阵: 通过  $R = Q^T A$  计算, 或直接利用之前的计算结果 (对角线为模长, 上三角为投影系数)。

■  $r_{11} = \|\beta_1\| = 5$

■  $r_{22} = \|\beta_2\| = 2$

■  $r_{33} = \|\beta_3\| = \sqrt{2}$

■  $r_{12} = \langle \alpha_2, \epsilon_1 \rangle = 2$

■  $r_{13} = \langle \alpha_3, \epsilon_1 \rangle = 1$

■  $r_{23} = \langle \alpha_3, \epsilon_2 \rangle = 1$

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

## 最终结果

$$A = QR$$

即：

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.4 & -0.4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$