数值积分与数值微分 实验题

吴佳龙 2018013418

摘要

结合理论分析和编程计算，运用不同方法计算了一函数的数值积分。运用的方法分别为：五点 Gauss-Legendre 求积公式的复合求积公式和 Romberg 求积方法。

1 问题

用不同的数值积分方法计算

$$I(f)=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 \frac{1}{x^2}\sin\frac{2\pi}{x}dx$$

准确解为：$I(f)=-0.238732414637843\cdots$

1. 把 $[1,3]$ 分成 4 个子区间，用五点 Gauss-Legendre 求积公式的复合求积公式计算。
2. 用 Romberg 求积方法计算积分，取 $\varepsilon=10^{-7}$，并与第一种办法比较。

2 五点 Gauss-Legendre 求积公式的复合求积公式

2.1 算法原理

2.1.1 Gauss 求积公式

Newton-Cotes 求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\sum_{i=1}^n c_{ik}^{(n)} f\left(x_i^{(n)}\right)+E_n(f)$$

取等距的求积节点 $x_k^{(n)}$。对于 $n+1$ 个等距节点的插值型求积公式，其代数精度至多为 $n+1$。

考虑适当选取 $n+1$ 个节点的位置，使得代数精度从 n 或 $n+1$ 增加到 $2n+1$。

Newton-Cotes 求积公式中余项为

$$E(f)=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \rho(x)f^{(n+1)}(\xi(x))\omega_{n+1}(x)\mathrm{d}x$$

若要对 $f\in\mathscr{P}_{2n+1}\Rightarrow f^{(n+1)}\in\mathscr{P}_n$ 都有 $E(f)=0$，可取 $\omega_{n+1}(x)$ 为 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 次正交多项式，即取插值节点为 $[a,b]$ 上 $n+1$ 次正交多项式的零点。

有以下定理：

Theorem 1. 插值型求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度的充分必要条件是求积节点是 $[a,b]$ 上权函数为 ρ 的 $n+1$ 次正交多项式的零点。

该求积公式称为 Gauss 求积公式，相应的求积节点为 Gauss 点。

与 Newton-Cotes 公式不同，Gauss 求积公式的求积系数都是正数，从而 Gauss 求积是数值稳定的。另外，还可证明，Gauss 求积公式有收敛性：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f\left(x_k^{(n)}\right)=\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x$$

2.1.2 Gauss-Legendre 求积公式

在区间 $[-1,1]$ 上取权函数 $\rho(x)=1$ 对应的 Gauss 求积公式称为 Gauss-Legendre 求积公式。

其误差为

$$E_n(f)=\frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}f^{(2n+2)}(\eta)$$

取 $n=4$，五点 Gauss-Legendre 求积公式的 Gauss 点和求积系数如下：

x_k	A_k
-0.9061798459	0.2369268851
-0.5384693101	0.4786286705
0	0.5688888889
0.5384693101	0.4786286705
0.9061798459	0.2369268851

对一般区间 $[a,b]$，将其变换到 $[-1,1]$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left[\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right]\mathrm{d}t$$

2.1.3 复合求积公式

为提高定积分的精度，将整个积分区间分成若干子区间，然后分别采用低阶求积公式。这种积分方法称为复合求积公式。

2.2 算法实现

五点 Gauss-Legendre 求积公式的 MATLAB 实现如下:

```
function I = myGaussLegendre(f,a,b)
% 五点 Gauss−Legendre 求积公式求 f 在 [a,b] 上积分
xk = [−0.9061798459, −0.5384693101, 0,
    0.5384693101, 0.9061798459];
Ak = [0.2369268851, 0.4786286705,
    0.5688888889, 0.4786286705,
    0.2369268851];
I = (b−a)/2*sum(f((a+b)/2+(b−a)/2*xk).*
    Ak);
end
```

复合的五点 Gauss-Legendre 求积公式的 MATLAB 实现如下:

```
function I = myCompositeGaussLegendre(f,a
    ,b,n)
% 五点 Gauss−Legendre 求积公式复合求 f 在
    [a,b] 上积分
% 将 [a,b] 等分成 n 段
I = 0;
for i=0:n−1
    ai = a+(b−a)/n*i;
    bi = a+(b−a)/n*(i+1);
    I = I + myGaussLegendre(f,ai,bi);
end
end
```

2.3 计算结果

调用函数 `myCompositeGaussLegendre(@f,1,3,4)`，得到数值解为

$$I(f) \approx -0.238732340355842$$

3 Romberg 求积方法

3.1 算法原理

3.1.1 Euler-Maclaurin 公式

令 B_k 为 Bernoulli 数, 有 Euler-Maclaurin 求和公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f) =$$
$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{B_{2l}}{(2l)!}\left[f^{(2l-1)}(b)-f^{(2l-1)}(a)\right]h^{2l}+r_{m+1}$$

其中 $T_n(f)$ 为复合梯形求积公式，r_{m+1} 为余项。

3.1.2 Richardason 外推方法

用 $(T_1f)(h)$ 来表示 $T_n(f)$，由 Euler-Maclaurin 公式

$$I(f)-(T_1f)(h)=\alpha_2h^2+O(h^4)$$

将 h 缩小一半，有

$$I(f)-(T_1f)(\frac{h}{2})=\alpha_2(\frac{h}{2})^2+O(h^4)$$

令

$$(T_2f)(h)=\frac{4\left(T_1f\right)\left(\frac{h}{2}\right)-\left(T_1f\right)(h)}{3}$$

则

$$I(f)-(T_2f)(h)=O(h^4)$$

将误差从 $O(h^2)$ 提高到了 $O(h^4)$。

这种方法称为 Richardason 外推方法，详见课本。

3.1.3 Romberg 求积方法

将 Euler-Maclaurin 公式和 Richardason 外推方法结合, 在外推算法中取 $q=\frac{1}{2}, p_k=2k$，得到 Romberg 求积方法。

$$(T_1f)(h) = \frac{h}{2}\sum_{m=1}^{n}\left[f(x_{m-1}) + f(x_m)\right]$$

$$(T_{j+1}f)(h) = \frac{4^j (T_jf)\left(\frac{h}{2}\right) - (T_jf)(h)}{4^j - 1}$$

误差

$$\int_a^b f(x)dx - (T_{j+1}f)(h) = O\left(h^{2(j+1)}\right)$$

引入记号

$$T_j^k f = (T_jf)\left(\frac{h}{2^k}\right)$$

上式写作

$$T_{j+1}^k f = \frac{4^j T_j^{k+1} f - T_j^k f}{4^j - 1}$$

Romberg 求积方法的机器实现描述如下：

1. 令 $l = 1$, 求 $T_1^0 f$
2. 求 $T_1^l f$，并递推得到 $T_{l+1}^0 f$
3. 若 $\left|T_l^0 f - T_{l+1}^0 f\right| < \varepsilon$ 则结束，否则 $l = l + 1$，转 2

3.2 算法实现

Romberg 求积方法的 MATLAB 实现如下：

```
function I = myRomberg(f,a,b,eps)
% Romberg 求积方法, f 在 [a,b] 上积分
% eps 为指定的停止时的误差控制
T = (b-a)/2*(f(a)+f(b));
l = 2;
while true
    T = [T, zeros(l-1,1); zeros(1,l)];
    n = 2^(l-1);
    T(l,1) = (f(a)+f(b)+2*sum(f(a+(b-a)/n
        *(1:n-1))))*(b-a)/n/2;
    for j = 2:l
        T(l,j) = (4^(j-1)*T(l,j-1)-T(l-1,j
            -1)) / (4^(j-1)-1);
    end
    if abs(T(l,l)-T(l-1,l-1))<eps
        break
    end
    l = l+1;
end
I = T(l,l);
end
```

3.3 计算结果

调用函数 `myRomberg(@f,1,3,1e-7)`，得到数值解为

$$I(f) \approx -0.238732414621623$$

4 方法比较

4.1 五点 Gauss-Legendre 复合求积公式的更多结果

选取不同的将区间 $[a, b]$ 等分的段数 n，计算得相对误差的对数

$$\log_{10}\frac{|Q^{(n)}(f) - I(f)|}{|I(f)|}$$

与 n 的关系如图 1 所示。

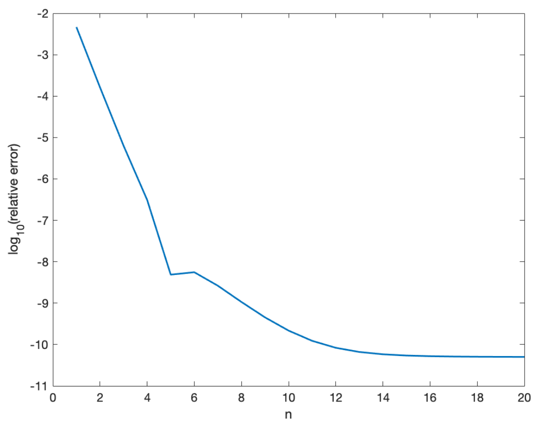

Figure 1: 相对误差与 n 之间的关系

4.2 Romberg 求积方法的更多结果

选取不同的 ε，计算得相对误差的对数与 ε 的关系如图 2 所示。

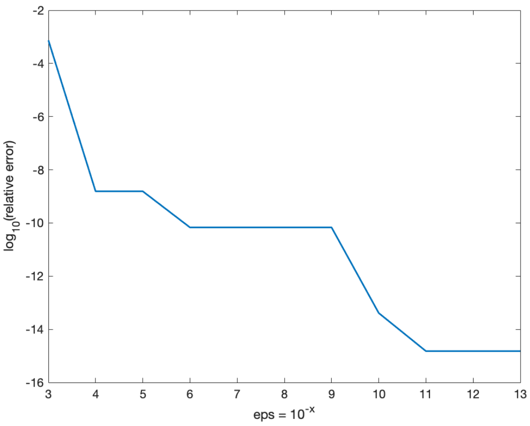

Figure 2: 相对误差与 ε 之间的关系

从以上结果中可以看出，五点 Gauss-Legendre 复合求积公式和 Romberg 求积方法都有着良好的数值稳定性，随着 n 的增加或 ε 的减小，数值积分的结果都收敛至准确解。两者结果的精度优劣与选取的 n 和 ε 有关。

5 总结

本次实验对于五点 Gauss-Legendre 求积公式的复合求积公式和 Romberg 求积方法进行了理论分析和编程计算，算得了 $I(f)$ 的数值解。

本次实验还探究了五点 Gauss-Legendre 复合求积公式和 Romberg 求积方法的结果分别与选取的参数 n 和 ε 的关系。结果符合预期，适当选择参数，数值积分结果将收敛于准确解。