地球物理笔记

Eden

January 17, 2022

Abstract

本文是地球物理笔记，用LaTeX编写，主要参考《现代地震学教程》一书，前置数理知识有高等数学（或数学分析），数学物理方法（或复变函数、偏微分方程），以及理论力学，以及一些基础的弹性力学知识。

笔记中的i,j,k 指标表示$1,2,3$，出现重复指标的公式约定用爱因斯坦求和法则。

笔记中用矢量形式$\nabla^2\boldsymbol{a}$ 来代表$\sum_{i,j}\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i^2}\hat{x}_j$ ，有时用∂_i 记号来代表偏微分算子$\frac{\partial}{\partial x_i}$。$\epsilon_{ijk}$ 为levi-civita 符号，即

$$\epsilon_{123}=\epsilon_{231}=\epsilon_{312}=1,\epsilon_{132}=\epsilon_{213}=\epsilon_{321}=-1$$

一些常用的公式：

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl} \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\epsilon_{ijk}\partial_j a_k\hat{x}_i \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{3}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a} \tag{4}$$

Contents

1 弹性力学基础与地震波 2
1.1 应变与位移的关系 2
1.2 应力张量与胡克定律 3
1.3 三维均匀介质中的波动方程 4
1.4 波动方程的解 6

2 体波与射线理论 8
2.1 程函方程与射线路径 8
2.2 水平地球模型中的射线走时 9

3 面波与地球自由振荡 11
3.1 瑞利波 11
3.2 洛夫波 13
3.3 相速度、群速度 15
3.4 均匀球体的自由振荡 16

Einstein: Curiosity has its own reason for existing.

1 弹性力学基础与地震波

地球介质的主要物质成分是硅酸盐和铁合金，地球内部由浅至深，其温度环境、围压环境及物相均有非常啊的差异。地球介质因为作用力的不同，表现出不同的力学性质。在受到小规模、瞬间力的作用下，如地震、爆破等，震源区外围介质表现出弹性响应，因而我们能记录到地震波、观测到大地震造成的地球自由振荡。

对在1 年或数年的短时间尺度内变化的作用，地球介质的力学响应可以用弹性响应来近似。地震波在弹性介质中的传播过程是满足波动方程的。地震波理论所涉及的弹性力学基础知识是本章的主要内容。

1.1 应变与位移的关系

取连续介质中相邻两点A, B。设点$A(x)$ 的位移为$U(x)$，点$B(x+\Delta x)$ 的位移为$U(x+\Delta x)$，那么它们的相对位移为

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{U} &= \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}+\Delta x)-\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x_2}\Delta x_2+\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x_3}\Delta x_3+O(\Delta x^2)\end{aligned}$$

对于**小形变条件**，忽略高阶小项，将其写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\Delta U_1\\ \Delta U_2\\ \Delta U_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{bmatrix}$$

可以将上面的矩阵拆成一个对称矩阵$\boldsymbol{e}$ 和一个反对称矩阵$\boldsymbol{\omega}$ 的和：

$$\Delta \boldsymbol{U} = \boldsymbol{e}\cdot\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\omega}\cdot\Delta\boldsymbol{x} \tag{5}$$

$$e_{ij}=e_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

$$\omega_{ij}=-\omega_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

或用**爱因斯坦求和法则**写成以下形式

$$\Delta U_i = e_{ij}\Delta x_j+\omega_{ij}\Delta x_j$$

式中$\boldsymbol{e}$ 称为**形变张量**，$\boldsymbol{\omega}$ 称为**旋转张量**。因为是小形变，$\Delta\boldsymbol{U}\approx\Delta\boldsymbol{x}$，所以$\boldsymbol{e}\approx 1$，$\boldsymbol{\omega}\approx 0$。旋转张量是反对称矩阵，可以写成以下形式

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \frac{\partial U_1}{\partial x_2}-\frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3}-\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial U_2}{\partial x_3}-\frac{\partial U_3}{\partial x_2}\\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1}{\partial x_3} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2}-\frac{\partial U_2}{\partial x_3} & 0\end{bmatrix}$$

变换矩阵$1+\boldsymbol{\omega}$ 代表的是介质在这一点处绕$\boldsymbol{w}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^T$ 轴发生微小旋转。可以验证$1+\boldsymbol{\omega}$ 是绕$\boldsymbol{w}$ 轴的小转动矩阵。实际上$\boldsymbol{w}$ 就是$\boldsymbol{U}$ 的**旋度**，即

$$\boldsymbol{w}=\nabla\times\boldsymbol{U}$$

对于对称张量e_{ij}，其对角元反映了三个方向上体形变的程度。在不同的正交坐标系下二阶张量的迹是相同的，我们定义**体应变**：

$$\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}=\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=\nabla\cdot\boldsymbol{U} \tag{7}$$

旋度$\boldsymbol{w}$ 和体应变θ 是描述位移场重要特征的物理量。

1.2 应力张量与胡克定律

弹性力学中将作用力分为两类：**体力和面力**。体力是介质内某点处单位体积内受到的力，例如重力、离心力等，与体积或质量成正比。面力又称接触力，是介质中某一局域平面上受到的力，力的大小与面积成正比。一般情况下，三个方向的局域平面上受到的力不同。我们用$\boldsymbol{T}(\hat{\boldsymbol{n}})$ 表示以$\hat{n}$ 为外法线方向的面上，外侧对内侧单位面积上的作用力为$\boldsymbol{T}$。

$$\boldsymbol{T}(\hat{x}_i)=\sigma_{ij}\hat{x}_j$$

对于以方向$\hat{n}$ 为外法线的面，可以构造以它为斜面的四面体，其余三个面的外法线分别是$\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3$。对于处于**平衡状态**下的连续介质，四面体应当受力平衡，因此

$$T_i(\hat{n})=\sigma_{ji}n_j$$

$\boldsymbol{\sigma}$ 被称为**应力张量**。对于平衡状态的连续介质，取一小立方体，它的合力与且合力矩为零，这意味着

$$\frac{\partial T_i(\hat{x}_j)}{\partial x_j}=0$$
$$T_i(\hat{x}_j)=T_j(\hat{x}_i)$$

应力张量需要满足

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}=0$$
$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji} \tag{8}$$

对于线性弹性体，应力与应变间的**本构关系**可以用**广义胡克定律**表示为

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}e_{kl}$$

c_{ijkl} 为介质的弹性模量，共81 个系数。考虑到应变张量和应力张量都是对称张量（式 5 式 8 ），易得到

$$c_{ijkl}=c_{jikl}=c_{ijlk}=c_{jilk}$$

现在有36 个独立系数。事实上还可以证明$c_{ijkl} = c_{klij}$（**为什么？**），因此独立的弹性系数将进一步减少至21 个。

对于各向同性的弹性介质，只有2 个独立的弹性模量，λ 和μ，称为**拉枚常数**。

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta kl + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

可以得到本构方程

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{9}$$

式中的θ 代表体应变，由式 7给出。

1.3 三维均匀介质中的波动方程

设单位体积质元的体力为$\boldsymbol{f}$，应力张量为σ_{ij}，那么质元的运动方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i \tag{10}$$

或者写成矢量形式

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}$$

将各向同性线弹性体的胡克定律式 9代入，得到

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + 2\mu\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + f_i$$

再代入式 6化简可得

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + f_i$$

其中θ 可以用式 7表示，再将上式写成矢量形式，可以得到运动方程

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}$$

利用矢量公式式 4，将它改写为

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f} \tag{11}$$

由**赫姆霍兹（Helmholtz）定理**，任意一个矢量场$\boldsymbol{u}$ 可以表达为一个无旋度的矢量场和无散度的矢量场之和：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \nabla\times\boldsymbol{u}_1 = 0, \nabla\cdot\boldsymbol{u}_2 = 0$$

暂时忽略体力$\boldsymbol{f}$ 的影响，运动方程式 11可以分解为两个波动方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{u}_1 \tag{12}$$
$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{u}_1 \tag{13}$$

上式代表了三维弹性介质中位移场的波动方程。这告诉我们三维弹性介质中可以存在两种以不同速度传播的波，一种是以较快速度$\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ 传播的**无旋波** $\boldsymbol{u}_1$，我们称它为**P 波（primary wave）**；另一种是以较慢速度$\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ 传播的**无散波** $\boldsymbol{u}_2$，我们称它为**S 波（secondary wave）**，这种波在地震记录图上通常是第二个到达的显著地震震相。不少地球固体介质可近似看成是泊松固体，其泊松比接近为0.25，有$\lambda = \mu$，因此P 波传播速度约为S 波传播速度的1.73 倍。如果考察质点振动的图像，P 波的偏振方向与波的传播方向一致，而S 波的偏振方向与波的传播方向垂直。

令

$$\alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

将散度算子$\nabla\cdot$ 作用于波动方程两边，则有

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \theta \tag{14}$$

将旋度算子$\nabla\times$ 作用于波动方程两边，则有

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{15}$$

可见体应变以P 波的速度传播，旋度以S 波的速度传播。

由于$\boldsymbol{u}_1$ 无旋，所以可以表示为某个标量场的梯度；$\boldsymbol{u}_2$ 无散度，可以表示为某个矢量场的旋度。于是位移场$\boldsymbol{u}$ 有赫姆霍兹势表达式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \tag{16}$$

P 波的势函数ϕ 是标量势函数，S 波的势函数$\boldsymbol{\Psi}$ 为矢量势函数，它们也满足波动方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \phi \tag{17}$$
$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\Psi} \tag{18}$$

P 波与S 波的主要差异有：

1. P 波的传播速度比S 波快，地震图上总是先记录到P 波。

2. 两种波的偏振方向相互正交。P 波的偏振方向与波的传播方向一致，而S 波的偏振方向与传播方向垂直。

3. 三分向地震仪[1]记录在通常情况下，P 波的垂直分量相对较强，S 波的水平分量相对较弱。S 波的低频成分较P 波丰富。

4. 天然地震的震源破裂通常以剪切破裂和剪切错动为主，震源向外辐射的S 波的能量较P 波的强。

5. P 波通过时质元无转动运动，但有体积变化，P 波是一种无旋波。S 波通过时，质元有转动，但无体积变化，S 波是一种无散的等容波。这可以从式 14式 15看出。

1.4 波动方程的解

波动方程式 17式 18的解蕴含P 波和S 波的信息，可以利用分离变量法进行求解。以ϕ 为例，它可以表达为一系列特解的线性叠加。这里我们取角频率为ω 的沿$\boldsymbol{k}_\alpha$ 方向传播的解

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = Ae^{\pm i(\omega t - \boldsymbol{k}_\alpha \cdot \boldsymbol{x})}$$

式中$|\boldsymbol{k}_\alpha| = \omega/\alpha$，$\alpha$ 为P 波的速度。$\boldsymbol{k}_\alpha$ 称为P 波的**波数矢量**。矢量势Ψ 的每个分量都满足波动方程，因此Ψ 类似地可以表达为一系列特解的线性叠加。我们取角频率为ω ，波数矢量为$\boldsymbol{k}_\beta$ （$|\boldsymbol{k}_\beta| = \omega/\beta$）的解

$$\Psi(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{B}e^{\pm i(\omega t - \boldsymbol{k}_\beta \cdot \boldsymbol{x})} \tag{19}$$

我们以沿x_1x_3 平面传播的平面P 波为例，其位移函数$\boldsymbol{u}$ 具有沿x_2 方向的平移不变性，即$\boldsymbol{u}$ 仅是x_1, x_3, t 的函数。考察波动方程的解，其相位函数为

$$\omega t - \boldsymbol{k}_\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \omega t - k_{\alpha_1}x_1 - k_{\alpha_3}x_3$$

现在考虑x_1 轴平行于地平面（不考虑其曲率），x_3 轴垂直于地平面向下。设i 为P 波与x_3 轴的夹角，我们称它为入射角。那么

$$\begin{aligned} k_{\alpha_1} &= |\boldsymbol{k}_\alpha|\sin i = \frac{\omega}{\alpha}\sin i = \omega p \\ k_{\alpha_3} &= |\boldsymbol{k}_\alpha|\cos i = \frac{\omega}{\alpha}\cos i = \omega\eta_\alpha \end{aligned} \tag{20}$$

式中$p = \sin i/\alpha$ 为**射线参数**或水平慢度，是地震学射线理论中非常重要的一个量。η_α 称为**垂直慢度**。利用公式式 16可以求得P 波的质元位移：

$$\boldsymbol{u}_P = \nabla\phi = (\mp ik_{\alpha_1}\hat{x}_1 \mp k_{\alpha_3}\hat{x}_3)Ae^{\pm(\omega t - \boldsymbol{k}_\alpha \cdot \boldsymbol{x})} \tag{21}$$

[1]三分量地震仪记录的地面振动通常分别记录的波动矢量是：垂直向振动（向上为正），北南向振动（向北为正），东西向振动（向东为正）。

容易发现$u_{P_3}/u_{P_1}=k_{\alpha_3}/k_{\alpha_1}$，这验证了P 波的质元振动方向与传播方向（波数矢量方向）一致。

对于x_1x_3 平面内传播的S 波，同样也有

$$k_{\beta_1}=|\boldsymbol{k}_\beta|\sin i=\frac{\omega}{\beta}\sin i=\omega p$$
$$k_{\beta_3}=|\boldsymbol{k}_\beta|\cos i=\frac{\omega}{\beta}\cos i=\omega\eta_\beta$$

利用公式式 16可以求得S 波的质元位移：

$$\boldsymbol{u}_S=-\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}\hat{x}_1+\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x_1}\right)\hat{x}_2+\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1}\hat{x}_3$$

其中平行于x_1x_3 面的分量记为**SV 波**，垂直于x_1x_3 面（也就是沿x_2 方向）的分量记为**SH 波**。上式可以分解为$\boldsymbol{u}_{SV}$ 和$\boldsymbol{u}_{SH}$ 两部分：

$$\boldsymbol{u}_{SV}=-\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}\hat{x}_1+\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1}\hat{x}_3=-\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\hat{x}_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\hat{x}_3 \tag{22}$$
$$\boldsymbol{u}_{SH}=\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x_1}\right)\hat{x}_2=V\hat{x}_2$$

上式中用V 表示SH 波的位移大小，由$\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x_1}\right)$ 给出；ψ 由Ψ_2 给出，为SV 波的势函数。根据Ψ 的表达式式 19，V,ψ 也具有波动方程解的形式[2]：

$$V(x_1,x_3,t)=He^{\pm i(\omega t-k_{\beta_1}x_1-k_{\beta_3}x_3)} \tag{23}$$
$$\psi(x_1,x_3,t)=A'e^{\pm i(\omega t-k_{\beta_1}x_1-k_{\beta_3}x_3)}$$

代入式 22，得SV 波的位移公式：

$$\boldsymbol{u}_{SV}=\pm A'k_{\beta_3}ie^{\pm i(\omega t-\boldsymbol{k}_\beta\cdot\boldsymbol{x})}\hat{x}_1\mp A'k_{\beta_1}ie^{\pm i(\omega t-\boldsymbol{k}_\beta\cdot\boldsymbol{x})}\hat{x}_3$$

可以发现$u_{SV_3}/u_{SV_1}=-k_{\beta_1}/k_{\beta_3}$，这验证了SV 波的振动与传播方向垂直，且在$x_1x_3$ 平面内。

SH 波的振动方向与SV 波和P 波的振动方向正交，因此它不会与SV 波和P 波发生波型相互转化和能量交换。而P 波和SV 波之间则可能发生相互转换和能量交换，当波传播至介质速度间断面时可能产生反射或折射的转换波。在实际计算过程中，可以用上面的ϕ,ψ 来表示P 波和SV 波的势函数，用V 表示SH 波的位移大小。

记录地面振动的三分量地震仪通常会记录垂直向振动（Z分量）、北南向振动（N-S分量）和东西向振动（E-W分量）。经过坐标旋转变换，还可以在另一组正交基上表示波的三个分量。例如，将波动矢量旋转为：垂直向振动（Z 分量），径向振动（由源到记录台连线的水平投影，即震中到台站的连线方向，R 分量），切向振动（与径向正交的水平分量，T 分量）。R 分量记录的S 波是SV 波，T 分量记录的S 波是SH 波。T 分量方向与波的传播方向正交，所以T 分量上基本看不到P 波。对于各向异性介质，不同偏振方向的横波传播速度可能不同，则可能会产生横波分裂现象，

[2]虽然解的值域是复数，但实部才是真正的观测结果

2 体波与射线理论

地震发生后，震源破裂造成的振动以体波的方式穿过地球介质，最先到达观测点。由于介质有一定结构，体波会产生不同震相，这些震相给我们带来地球内部结构的信息，帮助我们确定震源机制解，反演震源破裂过程等。

地震波的射线与几何光学中的射线类似，是用来追踪**波前**传播路径的虚拟线，它是将均匀弹性介质中的弹性波的解延伸至非均匀弹性介质中的有效工具。

2.1 程函方程与射线路径

非均匀介质三维空间的波动方程可以写为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2(\boldsymbol{x})\nabla^2\phi$$

其中$c(\boldsymbol{x})$ 为介质中$\boldsymbol{x}$ 处波的传播速度。设该方程的一个解为

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=A(\boldsymbol{x})e^{i\omega(W(\boldsymbol{x})-t)} \tag{24}$$

代入波动方程解得

$$\begin{aligned}(\nabla W(\boldsymbol{x}))^2-\frac{1}{c^2(\boldsymbol{x})}&=-\frac{\nabla^2A(\boldsymbol{x})}{A(\boldsymbol{x})\omega^2}\\2\nabla W(\boldsymbol{x})\cdot\nabla A(\boldsymbol{x})+A(\boldsymbol{x})\nabla^2W(\boldsymbol{x})&=0\end{aligned}$$

在**高频近似条件**下，可以忽略$\nabla^2A(\boldsymbol{x})/(A(\boldsymbol{x})\omega^2)$ 项，得到**程函方程**：

$$|\nabla W(\boldsymbol{x})|=\frac{1}{c(\boldsymbol{x})}$$

因此射线的波数矢量$\boldsymbol{k}$ 满足$|\boldsymbol{k}|=\omega/c$，式 24中波的相位为

$$\omega(W(\boldsymbol{x})-t)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t$$

先在考虑射线的传播，设$\boldsymbol{x}$ 是波前的位置，$\boldsymbol{k}=\omega\nabla W(\boldsymbol{x})$ 与射线的传播方向一致。假设传播了$\mathrm{d}s$ 距离，那么

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}=\frac{\boldsymbol{k}}{k}=c(\boldsymbol{x})\nabla W$$

两边同时点乘$\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s$ 可以得到

$$1=c(\boldsymbol{x})\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s}$$

于是可以推出**射线方程**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{c(\boldsymbol{x})}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\mathrm{d}(\nabla W)}{\mathrm{d}s}=\nabla\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s}\right)=\nabla\left(\frac{1}{c(\boldsymbol{x})}\right)$$

一般认为，当应用的地震波资料的最大波长比需要考虑的介质空间不均匀度小1 个数量级时，可以用高频近似，上面的程函方程和射线方程才成立。

2.2 水平地球模型中的射线走时

对于均匀介质，$c(\boldsymbol{x})$ 为一个常数，由射线方程可以推出射线沿直线方向传播。若地震波速度随深度变化，即$c(\boldsymbol{x}) = c(x_3)$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{c(x_3)}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}\right) &= 0\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{c(x_3)}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}\right) &= 0\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{c(x_3)}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s}\right) &= -\frac{c'(x_3)}{c(x_3)^2}\end{aligned} \tag{25}$$

由前两式可得

$$\frac{1}{c(x_3)}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} = a_1, \frac{1}{c(x_3)}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} = a_2$$

其中a_1, a_2 是我们常量。将两式相除，可得

$$x_1 = \frac{a_1}{a_2}x_2 + a_3$$

这说明射线在水平面上的投影是一条直线。我们可以旋转坐标轴，将x_1 轴设为这条直线，那么地震波在x_1x_3 平面内传播。设入射角为i，则$\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s = \sin i$，因此由式 20定义的**射线参数** p 为常量：

$$a_1 = \frac{1}{c(x_3)}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\sin i}{c(x_3)} = p$$

这就是地震学中的**斯涅尔（Snell）定律**。高频电震波的射线总是沿着一条走时稳定的路径传播，即如果固定起点和终点，对路径作一个变分$\delta\boldsymbol{x}(t)$，则走时的一阶变化量δt 应当等于0。因此几何光学中的**费马原理**在地震学中也是成立的，斯涅尔定律也可以由费马原理导出。

如果我们再利用式 25推导射线在x_1x_3 平面内的传播轨迹，则可以推出射线曲率与速度梯度成正比：

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}s} = pc'(x_3)$$

现在推导射线走时。根据斯涅尔定律，$p = \sin i/c(x_3)$ 是常数，于是我们有

$$\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_3 \tan i = \mathrm{d}x_3 \frac{c(x_3)p}{\sqrt{1 - c(x_3)^2p^2}} \tag{26}$$

在近震范围内（震中矩小于1000千米），可以忽略地球的曲率。地球介质物性在水平方向的变化远小于其垂直方向的变化，所以可以简化为地震波速度只沿深度变化的简单模型，用上面的公式进行计算。不妨设地震射线的射线参数为p，从地表的A 点出发，能到达地球最深的深度为Z，接着又重新回到地表的B 点。在最深

处$p=\sin i_0/c(x_{30})=1/c(Z)$，因此$Z$ 是p 的函数。可以对式 26进行积分，求出AB两点的距离：

$$X(p)=2\int_0^{Z(p)}\frac{c(x_3)p}{\sqrt{1-c(x_3)^2p^2}}\mathrm{d}x_3=2p\int_0^{Z(p)}\frac{\mathrm{d}x_3}{\sqrt{\gamma(x_3)^2-p^2}} \tag{27}$$

从A 到B 射线的走时为

$$T(p)=2\int_0^{Z(p)}\frac{\mathrm{d}s}{c(x_3)}=2\int_0^{Z(p)}\frac{\mathrm{d}x_3}{c(x_3)\sqrt{1-c^2p^2}}=2\int_0^{Z(p)}\frac{\gamma(x_3^2}{\sqrt{\gamma(x_3)^2-p^2}}\mathrm{d}x_3 \tag{28}$$

上式中$\gamma(x_3)=1/c(x_3)$ 称为慢度。如果震源几乎在地表，震源发出的射线的$Z(p)$远大于震源深度，那么震源位置是A，台站位置为B，射线走时由式 28给出。如果震源有一定深度且不可忽略，则要对走时公式进行修正。

由式 27式 28还可以给出

$$T(p)=pX(p)+2\int_0^{Z(p)}\sqrt{\gamma(x_3)^2-p^2}\mathrm{d}x_3=pX(p)+2\int_0^{Z(p)}\eta(x_3)\mathrm{d}x_3$$

其中$\eta(x_3)=\gamma\cos i$ 称为**垂直慢度**。在勘探地震学中有一个重要的反演方法，称为$\tau(p)$ 法，τp 定义如下：

$$\tau(p)=T-pX=2\int_0^{Z(p)}\sqrt{\gamma^2-p^2}\mathrm{d}x_3$$

可以推出

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}p}=2\sqrt{\gamma(Z)^2-p^2}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}p}+2\int_0^{Z(p)}\frac{-p\mathrm{d}x_3}{\sqrt{\gamma^2-p^2}}=-2\int_0^{Z(p)}\frac{p\mathrm{d}x_3}{\sqrt{\gamma^2-p^2}}=-X$$

$\tau(p)$ 的引入可简化对走时曲线的分析。例如我们可以对$T=pX+\tau$ 求导，求得走时T 与X 关系：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}X}&=p+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}X}X+\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}X}=p+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}X}X+\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}X}\\&=p+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}X}X-X\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}X}=p\end{aligned}$$

这说明，由上面的数学模型给出的地震走时曲线$T(X)$ 的斜率就是射线参数p。

随着射线最深深度$Z(p)$ 的增加，震中矩$X(p)$ 不一定增加，这取决于地球内部介质的速度结构，不同的速度结构会导致不同的走时曲线形态。反过来，我们可以通过走时曲线来开展地球结构反演。$T(X)$ 可能不是单调递增函数，也可能不是单值函数，但$\tau(p)$ 的斜率$-X$ 是负的，这保证了$\tau(p)$ 曲线一定是单调减函数。勘探地震学里常用$\tau(p)$ 进行速度反演。

3 面波与地球自由振荡

前两章我们由波动理论推导出各项同性弹性介质内部可以存在两种传播速度不同、偏振方向相互正交的波：P 波和S 波。然而地球介质是有边界的，在界面附近可能存在另一种波，它们沿着界面传播，称为面波。面波有多种，最重要的是**瑞利（Rayleigh）波**和**洛夫（Love）波**。在宽频带或长周期地震记录图上，面波振幅一般较体波大，原因之一是体波传播过程中能量是在三维空间中扩散的，而面波能量是在二维空间中扩散的，因此在传播一定距离后，地震记录上的面波就比较显著了。

3.1 瑞利波

可以证明，P 波和SV 波不可能独立地沿自由面传播。于是我们考虑另一种情形：P 波和SV 波同时沿自由面的x_1 轴方向传播，传播速度为c。假设单频率P 波和SV 波的势函数分别为

$$
\begin{aligned}
\Phi(x_1, x_3, t) &= A(x_3)e^{i\omega(x_1/c-t)} \\
\Psi(x_1, x_3, t) &= B(x_3)e^{i\omega(x_1/c-t)}
\end{aligned}
$$

两个势函数应当满足波动方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &= \alpha^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}\right) \\
\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} &= \beta^2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2}\right)
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2A(x_3)}{\mathrm{d}x_3^2} - \omega^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)A(x_3) = 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2B(x_3)}{\mathrm{d}x_3^2} - \omega^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)A(x_3) = 0
\end{aligned}
$$

可以解得

$$
\Phi = Ae^{-\omega\hat{\eta}_\alpha x_3}e^{i\omega(px_1-t)}, \Psi = Be^{-\omega\hat{\eta}_\beta x_3}e^{i\omega(px_1-t)}
$$

式中$\hat{\eta}_\alpha = \sqrt{1/c^2 - 1/\alpha^2}, \hat{\eta}_\beta = \sqrt{1/c^2 - 1/\beta^2}$，$p = 1/c$ 为面波沿x_1 方向传播的慢度。为保证波动在$x_3 \to \infty$ 有限，$\hat{\eta}_\alpha, \hat{\eta}\beta$ 必须为实数，所以应有不等式成立：

$$
c < \beta < \alpha
$$

即面波的传播速度比横波速度小。

现在根据自由面边界条件来求解未知系数A, B 与面波慢度p。利用式 21式 22 根据P 波势函数和SV 波势函数可以求解位移：

$$
\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, 0, \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}, 0, \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)
$$

自由面上的正应力σ_{33} 和切应力σ_{13} 应当为0。再根据胡克定律及本构方程式 9，可以得到自由面边界条件

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_3=0} = 0$$
$$\sigma_{33}|_{x_3=0} = \left[\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)+2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]\Big|_{x_3=0} = 0$$

最终可以得到

$$(p^2-\eta_\beta^2)A - 2p\eta_\beta B = 0$$
$$2p\eta_\alpha A + (p^2-\eta_\beta^2)B = 0$$

式中$\eta_\alpha = i\hat{\eta}_\alpha, \eta_\beta = i\hat{\eta}_\beta$。对于非平凡解，面波慢度$p = 1/c$ 应满足以下方程：

$$\left(2p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)^2 - 4p^2\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}}\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta^2}} = 0 \tag{29}$$

式 29被称为**瑞利方程**，用来确定**瑞利波**速度$c = 1/p$。等式左边被称为瑞利函数$R(p)$。可以发现面波波速c 与频率ω 无关，因此瑞利波无**频散**（P 波和S 波也是无频散的波）。可以证明，瑞利方程至少存在一个根，满足$c = 1/p$ 小于S 波速度β。瑞利波是P-SV 波耦合面波，记为LR 或R。理想的瑞利波没有垂直于传播平面的SH 型振动分量。

如果地球介质用泊松固体（$\lambda = \mu$）近似，则$\alpha/\beta = \sqrt{3}$，可以求得

$$c = \frac{2\beta}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \approx 0.9194\beta$$

瑞利波的波速（与S 波波速之比）只与泊松比有关。在泊松比的典型变化范围内（0.2 0.4）瑞利波的波速在S 波的0.9 0.95 倍之间变化。

求得瑞利波速度c 以后，根据式 29还可以求出B 与A 之比：

$$\frac{B}{A} = \frac{2-c^2/\beta^2}{2c\eta_\beta}$$

因此质元位移的两个分量u_1, u_3 的表达式为

$$u_1 = Ai\omega p\left[e^{-\omega\hat{\eta}_\alpha x_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{\beta^2}-2\right)e^{-\omega\hat{\eta}_\beta x_3}\right]e^{i\omega(px_1-t)}$$
$$u_3 = -A\omega\left[\hat{\eta}_\alpha e^{-\omega\hat{\eta}_\alpha x_3} + \frac{1}{2c^2\hat{\eta}_\alpha}\left(\frac{c^2}{\beta^2}-2\right)e^{-\omega\hat{\eta}_\beta x_3}\right]e^{i\omega(px_1-t)}$$

上式的实部为可观测的物理量。对于泊松固体，可以进一步写为

$$u_1 = -Ak(e^{-0.85kx_3} - 0.58e^{-0.39kx_3})\sin(kx_1-\omega t)$$
$$u_3 = -Ak(0.85e^{-0.85kx_3} - 1.47e^{-0.39kx_3})\cos(kx_1-\omega t)$$

可见瑞利波的质点运动轨迹为椭圆，其振幅总体上显示出随深度指数衰减的特征，但这种衰减不是单调的。对于泊松固体，在约0.193λ 深度处（λ 为波长），$u_1 = 0$。瑞利波在地表面的质点运动轨迹为逆进椭圆，垂直方向振幅约为水平方向振幅的1.5 倍。在大约$1/5$ 波长的深度一下，质点振动轨迹变为顺进椭圆。

半无限非均匀弹性介质空间（如分层均匀半空间）的自由面上也存在瑞利波，但这种瑞利波存在频散，即不同频率的波有不同的传播速度（相速度）。由于地下深层的波速比浅层的快，频率越低的波穿透的深度月深，因而传播速度也越快，所以在地震记录上低频波比高频波先到达，因此会形成瑞利波的有明显波散特征的记录。面波频散曲线可以作为反演地下介质速度结构的重要资料之一。

3.2 洛夫波

SH 波在传播过程中不会与P 波或SV 波发生转换或能量与动量的交换。可以证明在半无限均匀弹性介质中SH 波不能沿自由面独立传播，也无法与P 波和SV 波耦合在一起形成新的面波。但是在双层地球介质模型中，SH 波可以形成**洛夫波**。具体而言，上层是厚度为H 的均匀弹性覆盖层，下层S 波波速β_2 大于上层波速β_1，而上层低速覆盖层成为SH 波的波导层。

考虑覆盖层内SH 波向下入射的情形，有入射波、反射波、折射波。SH 波的位移函数$V(x_1, x_3, t)$ 具有波动方程解的形式（式 23）：

$$
\begin{aligned}
V^I &= Ae^{i\omega(px_1+\eta_{\beta_1}x_3-t)} \\
V^R &= Be^{i\omega(px_1+\eta_{\beta_1}x_3-t)} \\
V^T &= Ce^{i\omega(px_1+\eta_{\beta_1}x_3-t)}
\end{aligned}
$$

位移方向均为$\hat{x}_2$。自由面边界条件为

$$
\sigma_{32}|_{x_3=0} = \mu_1 \left[\frac{\partial(V^I+V^R)}{\partial x_3}\right]\bigg|_{x_3=0} = 0
$$

深度H 处的地层分界面处有位移连续性条件：

$$
(V^I+V^R)|x_3 = H = V^T|_{x_3=H}
$$

还要满足应力连续条件：

$$
\mu_1 \left[\frac{\partial(V^I+V^R)}{\partial x_3}\right]\bigg|_{x_3=H^-} = \sigma_{32}|_{x_3=H^-} = \sigma_{32}|_{x_3=H^+} = \mu_2 \frac{\partial V^T}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=H^+}
$$

将入射波、反射波、折射波的唯一表达式代入上面的三个条件，令$b_1 = \omega\eta_{\beta_1}, b_2 = \omega\eta_{\beta_2}$，可以整理得

$$
\begin{aligned}
&A = B \\
&A[e^{ib_1H} + e^{-ib_1H}] - Ce^{ib_2H} = 0 \\
&A\mu_1\eta_{\beta_1}[eib_1H - e^{-ib_1H}] - C\mu_2\eta_{\beta_2}e^{ib_2H} = 0
\end{aligned}
$$

对于非平凡解，应当满足条件

$$\tan(\omega\eta_{\beta_1}H)=\frac{\mu_2\eta_{\beta_2}}{i\mu_1\eta_{\beta_1}}$$

为使方程有解，应保证垂直慢度$\eta_{\beta_1}=\sqrt{1/\beta_1^2-1/c^2}$ 为实数，$\eta_{\beta_2}=\sqrt{1/\beta_2^2-1/c^2}$ 为纯虚数（这里设$\eta_{\beta_2}=i\hat{\eta}_{\beta_2}$），这要求$\beta_1<c<\beta_2$。即**洛夫波**的波速大小在两层介质的S 波波速之间。方程带三角函数tan，因此可以有多个解。方程可改写为

$$\omega H\sqrt{1/\beta_1^2-1/c_n^2}=\arctan\left[\frac{\mu_2\sqrt{1/c_n^2-1/\beta_2^2}}{\mu_1\sqrt{1/\beta_1^2-1/c_n^2}}\right]+n\pi,\ n=0,1,2,\cdots \tag{30}$$

式中n 为洛夫波的波速，$n=0$ 对应的洛夫波称为**基阶洛夫波**，其他称为高阶洛夫波。观测表明洛夫波的能量主要集中在基阶波上。洛夫波的相速度不仅和阶数有关，还和波的频率ω 有关，这表明有频散现象。式 30也被称为洛夫波的**频散方程**。

对于n 阶洛夫波，不同的频率导致不同的相速度，高频可以任意的高，但低频存在截止点。根据单调性，频率越高的波相速度越接近覆盖层的S 波速度β_1。频散方程中arctan 的取值范围是$(0,\pi/2)$，当$c_n\to\beta_2$ 时$\arctan\to 0$。因此n 阶洛夫波的截止低频为

$$\omega_{cn}=\frac{n\pi}{H\sqrt{1/\beta_1^2-1/\beta_2^2}},\ n=0,1,2,\cdots$$

对应的截止波长为

$$\lambda_{cn}=\frac{2\pi}{\omega_{c_n}}c_n=\frac{2H\sqrt{\beta_2^2/\beta_1^2-1}}{n},\ n=0,1,2,\cdots$$

上覆盖层中SH 波的位移为

$$V_i=V^I+V^R=2A\cos(\omega\eta_{\beta_1}x_3)e^{i\omega(px_1-t)},\ x_3<H$$

下层中的位移为

$$V_{ii}=V^T=Ce^{-\omega\hat{\eta}_{\beta_2}x_3}e^{i\omega(x_1p-t)},\ x_3\geq H$$

上层中沿水平方向传播的是SH 型面波，被称为洛夫波，其振幅随深度的变化是按预先函数变化的，自由面的振幅最大。下层中洛夫波振幅按指数单调衰减。

现在讨论n 阶洛夫波振幅随深度的变化。令

$$g=\arctan\left[\frac{\mu_2\sqrt{1/c_n^2-1/\beta_2^2}}{\mu_1\sqrt{1/\beta_1^2-1/c_n^2}}\right]$$

根据频散方程，$\omega\eta_{beta_1}=(g+n\pi)/H$。盖层（上层）中节面深度$x_3$ 应满足条件

$$\cos(\omega\eta_{\beta_1}x_3)=\cos\left[\frac{g+n\pi}{H}x_3\right]=0$$

解得

$$x_3 = \left[\frac{(m+1/2)\pi}{g+n\pi}\right]H,\ m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

由于节面深度应满足$0 \le x_3 \le H$，而g 的取值范围为$(0, \pi/2)$。所以m 的取值范围为$\{0, 1, \cdots, n-1\}$。上式应改为

$$x_3 = \left[\frac{(m+1/2)\pi}{g+n\pi}\right]H,\ m = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{31}$$

n 阶洛夫波在盖层中存在n 个振幅为0 的节面，各节面深度由式 31决定。

实际的地壳、上地幔结构更接近多个分层的非均匀弹性半空间，这种结构的洛夫波频散方程远比式 30复杂。这种结构下不仅洛夫波存在频散，瑞利波也存在频散，且还存在高阶瑞利波。

3.3 相速度、群速度

由于频散，不同频率的波动成分叠加会形成以**群速度**传播的波包。群速度U 与相速度c 的关系为

$$U = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c + k\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}k}$$

如果考察实际传播的地震波，将频率在$(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$ 范围内的波叠加，得到的叠加位移为

$$\begin{aligned} u &= A\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} e^{i(kx-\omega t)}\mathrm{d}\omega \\ &= Ae^{i\omega_0(x/c-t)}\int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{i\omega(x/U-t)}\mathrm{d}\omega \\ &= 2A\Delta\omega\frac{\sin Y}{Y}e^{i\omega_0(x/c-t)},\ Y = \Delta\omega(x/U-t) \end{aligned}$$

$\sin Y/Y$ 是振幅调制因子，它意味着地震图上会形成一个以群速度传播的鱼状的波包。

如果以周期为横坐标，相速度及群速度为纵坐标画出**频散曲线**，群速度频散曲线上的极小值对应的频率点意味着在该频率附近的简谐波群将几乎是同时到达，从而在地震图上形成一个大振幅的震相，我们称之为**艾里（Airy）相**。

测量群速度频散曲线有许多基于数字信号处理技术的方法，其中应用最广的是**时频分析（FTAN）法**。将去除趋势变化后的面波地震记录时间序列$\omega(t)$ 傅立叶变换，得到频谱$W(\omega)$，经仪器响应校正后得到地动信号的傅氏谱$\bar{W}(\omega)$（复数谱，含振幅及相位）。随后用窄带数字滤波器$H(\omega-\omega_j)$ 对$\bar{W}(\omega)$ 进行多重滤波。常选用高斯滤波函数作为窄带数字滤波器：

$$H(\omega-\omega_j) = \exp\left[-\alpha_j\left(\frac{\omega-\omega_j}{\omega_j}\right)^2\right],\ j = 1, \cdots, N$$

式中的参数α_j 可以用来控制频带相对宽度。对每个窄带滤波的信号谱进行傅立叶逆变换，可得到各个频带的时间信号函数

$$S(\omega_j,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{W}(\nu)H(\nu-\omega_j)e^{i\nu t}\mathrm{d}\nu,\ j=1,\cdots,N$$

在实际计算中需存储数组$|S(\omega_j,t_k)|$，$\phi(\omega_j,t_k)$，再计算各格点的相对幅值的分贝数D_{jk}，复数信号$S(\omega_j,t_k)$ 的模是窄频信号的包络线。通过确定波群走时τ 和震中矩r，可以计算相应的群速度。最后就可以画出群速度频散曲线。

测量相速度频散曲线可以通过双台法，即选择同一地球大圆弧上的两个震中矩合适的台站，用时频分析法对两个台站分别求出群走时曲线$\tau^1(\omega)$ 和$\tau^2(\omega)$ ，以及时间相位$\phi^1(\omega)$ 和$\phi^2(\omega)$。那么群速度为

$$C(\omega)=\frac{r_1-r_2}{\tau^1(\omega)-\tau^2(\omega)-[\phi^1(\omega)-\phi^2(\omega)+2\pi n]/\omega}$$

这里的n 是一个待选常数，选择其值要使$C(\omega)$ 相对于低频的数值处在合适的取值范围内。随后就可以得到相速度频散曲线。

3.4 均匀球体的自由振荡

为了解影响地球自由振荡的基本几何因素和物理因素，我们先分析最简单的均匀球体振荡模型。设有一半径为R_0 的均匀可压缩液体球，其弹性性质可由体压缩模量κ 和密度ρ 来描述；并设没有体力作用。先考虑相对于平衡压强场的微小压强扰动P 引起的振荡。应力$\sigma_{ij}=-P\delta_{ij}$，运动方程式 10可以写成

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=-\nabla P$$

胡克定律在此处的表达式为

$$P=-\kappa\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

将梯度算子作用于两边，可以得到

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 P,\ c^2=\kappa/\rho \tag{32}$$

解这类偏微分方程的常见方法是：用分离变量法求得球边界条件下拉普拉斯算子的本征函数：

$$P_{nlm}(r,\theta,\phi)=j_l\left(\frac{\omega_{ln}r}{c}\right)Y_l^m(\theta,\phi)$$

其中$j_l(x)$ 为l 阶**球贝塞尔函数**，$\omega_{ln}R_0/c$ 是j_l 的第$n+1$ 个正零点（这是因为球的边界处$P=0$），Y_l^m 为**球谐函数**。

设特解为$T(t)P_{nlm}(r,\theta,\phi)$，代入式 32 ，可以求得时间因子$T(t)=e^{\pm i\omega_{ln}t}$。只要将$t=0$ 时的初始函数$P(r,\theta,\phi)$ 在这组本征函数下展开，并对边界条件和初始条件进行分析，就可以求出P 随时间的演化。

由此可得，球自由振荡的**本征频率**只能取特定的离散值：ω_{ln}，$n = 0, 1, \cdots; l = 0, 1, \cdots$。对于球对称的球体，$n$ 和l 相同而m 不同的振型（$m = 0, \pm 1, \cdots, \pm l$，共$2l + 1$ 个）有相同的谐振频率。

略去时间因子$e^{i\omega t}$ 后，球型振荡的位移$\boldsymbol{u}$ 可以表示为两部分：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^S + \boldsymbol{u}^T \\
&\boldsymbol{u}^S = \{U(r)Y_l^m, V(r)\frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}, \frac{V(r)}{\sin\theta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}\} \\
&\boldsymbol{u}^T = \{0, \frac{W(r)}{\sin\theta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}, -W(r)\frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}\}
\end{aligned}
$$

其中的$U(r), V(r), W(r)$ 是由边界条件决定的位移分量随径向变化的函数。$\boldsymbol{u}^S$ 描述了球型振荡，相当于$P - SV$ 波型或瑞利波型的振动；而$\boldsymbol{u}^T$ 描述了环型振荡，相当于SH 波或洛夫波的振动。容易验证$\boldsymbol{u}^S \cdot \boldsymbol{u}^T = 0$，即任意点处环形振荡的位移与球型振荡的位移垂直。环形振荡无径向分量，位移在垂直于半径的球面，可以验证

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{u}^T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r^T) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta^T) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi^T}{\partial\phi} = 0
$$

所以环形振荡不会引起密度变化，即地球重力场不受扰动。因此重力仪观测不到环形振荡。

真实地球模型比上述模型更复杂，还要考虑重力、自转，以及地球介质的不均匀、各向异性、含非弹性介质的影响。至今已观测到的本征振荡频率已达1000 多个。其中球型振荡约占三分之二，环形振荡约占三分之一。由于地球自转效应的影响，在振动的频谱图上n, l 相同的振型对应的地球振荡频率分裂为$2l + 1$ 条，与原子光谱线在磁场中发生分裂的塞曼效应类似。自传会使质点振动方向像傅科摆一样变化，球型振荡与环形振荡发生耦合；而且真实地球更接近于旋转椭球体。将不同地球模型的自由振荡频率与观测到的地球自由振荡频率进行对比，可以检验并改善地球模型，从而研究地球内部结构。