给群论初学者的小小小介绍

方舟

2023 年 12 月 3 日

摘要

群论听起来相当高深莫测，实际上从知识角度讲，并不需要太多的前置知识，主要是逻辑推理。因此，任何大一学生只要有心、善于思考，就能学会群论。完整的群论学习，阅读标准教材，完成习题是必不可少的。但是对于非数学专业的学生而言，直接阅读标准教材也许会有些吃力，并且由于线性代数教材部分内容的缺失，可能会导致一些概念的引入不是很自然。这篇短短的小小小讲义希望能为非数学专业的学生学习群论起到过渡的作用。

瞬息万变置换，周而复始循环。如出一辙群同态，正规稳如泰山。
换天地群作用，做商不闻不问。自古英雄学群论，苦心孤诣对称。

1 把运算看成映射

小学的时候我们就学习过加法。但是加法对小学生来说太简单了，对大学生来说刚刚好。我们来学习一下什么是整数上的加法吧。

观察

学习一些加法的例子吧

- 2+3=5
- 3+2=5
- 0+6=6

数学概念提出的一个办法就是将习以为常的东西进行归纳和抽象提炼。**为了对整数加法进行抽象提炼，我们需要去问加法的本质是什么呢？**

我们可以把整数上做加法想象成这样一件事情：有一个熟练于加法的小学生，和不熟悉加法的大学生。大学生遇到科研上的困难，他急切地想知道2+3等于几。但是经过大学四年的打磨这位大学生已经变成一个懒狗，他去询问小学生的时候甚至不愿意多说一个字。现在，他毕恭毕敬地来到小学生面前，说：“二，三。” 由于大学生经常向小学生请教加法问题，他们之间已经有了默契，小学生知道大学生说“二，三”的意思就是问“二加三等于几”。所以小学生脱口而出：“五”。

思考如上想象的场景。当大学生不说出“二加三等于几”中的“加”和“等于几”，只要他和小学生有感人肺腑的默契，就可以只说“二，三”。而小学生在脑海中进行一番复杂的加法运算，会回答“五”。我们把上面的故事推广到所有我们所学过的二元运算（就是两个数之间进行的运算。开根号是一元运算，加减乘除是二元运算，三元运算估计在逻辑门中可以看到）。如此，引入如下的概念：

集合上的运算

设S是一个非空集合。定义新集合$S \times S = \{(x,y)|x \in S, y \in S\}$，称作$S$与$S$的笛卡尔积。
集合S 上的一个运算是指映射$S \times S \to S$。

注1：定义中，符号(x,y)表示一个有序对（计较顺序的一对数）。粗略而言，(x,y)的含义就是，宣称这里第一个元素是x，第二个元素是y。如果第一个元素是y，第二个元素是x，那么我们要写作(y,x)。
注2：回顾一下映射的定义。设A,B是两个集合，如果A中任何一个元素都对应B中的一个元素，那么这样的对应关系我们称为A到B的一个映射，记作$A \to B$。为了标记一个映射，我们会用一个字母去标记它，例如$\phi : S \times S \to S$
注3：集合上的运算具有封闭性，这是从定义可以看出来的，因为运算的结果还在S中。

这里我们列举一些集合上的运算的例子

例1：$\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a,b) \mapsto a+b$
例2：$\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a,b) \mapsto 0$
实际上，映射ψ就是整数加法运算的映射版本表达式。

练习

1.请写出实数上的加法、乘法、除法的映射形式。注意,考虑实数除法的时候，我们的用到的定义域并不是$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$。
2.写出任何一个集合上的常值运算的定义（类比高数中学习的常值函数）。

这一节归根到底就一句话：**把运算看成映射**。这只是不起眼的一小步，却是一个很大的进步。可能你会问进步在哪了？不就是换了种说法吗？意思是一样的呀？想象这样的事情吧。

你去问小学生："什么是整数加法？" 小学生回答："我告诉你加法怎么算：你要背十以内的加法运算规则，然后列竖式进位计算。" 问："什么是整数减法？" 小学生："我告诉你减法怎么算：你要背十以内的减法运算规则，然后列竖式退位计算。" 问："什么是整数乘法？"小学生："我告诉你什么乘法怎么算：你要背九九乘法表，然后列竖式用一种特殊的办法计算。" 问："什么是除法？" 小学生："你有完没完？"

你去问大学生："什么是整数加法？" 大学生回答："一种特殊的映射。" 问："什么是整数减法？" 大学生："一种特殊的映射。" 问："什么是整数乘法？" 大学生："一种特殊的映射。" 问："什么是整数除法？" 大学生："一种特殊......整数上不能做除法。" (结合定义思考为什么整数上不能定义除法，提示：从运算封闭性考虑)。

看见了吗，当我们把**运算看成映射**，这套语言可以统一很多种不同的运算。所有映射具有的性质，二元运算都有，我们不必在每次引入一个运算的时候都重新说一遍。能统一很多概念的概念是更深刻、更值得研究的概念。近年来的明星理论——范畴论，被称为"理论的理论"，在这套语言下，集合、群、线性空间可以放在**同一套语言下**研究，简直是米奇回到妙妙屋——妙到家了！要知道虽然我们学习的是很简单的内容，即将很多运算用一种语言——映射——来描述，但是引发我们进行这一步的动机确是很深刻的。这种深刻性的欣赏是数学审美的重要组成部分，并且这种审美是大一非数学专业的学生也可以

体会到的，真是激动人心啊。

2 数学老师的口头禅——“结构”

在线性代数课堂上，我们常常会听到老师说“结构”"结构"。很多初学者会很好奇结构是什么东西？我只看见一些字母、符号，没看见有什么建筑结构呀？事实上，**结构就可以理解为集合上的运算长什么样**。大家学习的第一个结构是线性空间结构。无论你是否学习过线性空间，本节都会以不同于市面上教材的方式重新介绍线性空间的概念，来说明“结构”的含义。

注：我不是来学群论的吗？你怎么开始讲线性空间了？退钱!!!

稍安勿躁，我认为一上来就讲群的概念是很突兀的，尤其是在没有Motivation的情况下。本小节希望用大部分同学熟悉的线性空间先讲明白什么是数学结构，然后就可以用结构（就是运算）说明一系列数学上听起来很时髦的概念了。

我先放一个实线性空间的定义（略略瞟一眼即可）：

实线性空间

设V是一个集合。称V是一个实数上的线性空间，若在V上给定加法运算$+ : V \times V \to V$以及数乘运算$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$，满足以下八大条性质：

1.$x + y = y + x$,对任意$x, y \in V$。【加法交换律】

2.对任意$x, y, z \in V$，有$x + (y + z) = (x + y) + z$【加法结合律】

3.存在$0 \in V$，使得 $x + 0 = x$【有零元】

4.对任意$x \in V$，存在$y \in V$, 使得$x + y = 0$【存在负元】

5.对任意$x \in V$, 有$1x = x$【数乘是幺作用】

6.对任意$k, l \in \mathbb{R}, x \in V$，有$(kl)x = k(lx)$【懂得都懂不好命名性质】

7.对任意$k, l \in \mathbb{R}, x \in V$，有$(k + l)x = kx + lx$【分配律】

8.对任意$k \in \mathbb{R}, x, y \in V$，有$k(x + y) = kx + ky$【分配律】

注1：所谓实线性空间，就是定义数乘时映射是$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$。思考复线性空间的数乘映射如何定义。

注2：所谓实线性空间，又叫实数上的线性空间，又叫$\mathbb{R}-$线性空间。

第一次学习线性空间的时候一定有这样的疑问,为什么线性空间要求满足那八大条性质呢？虽然这八大条性质是自然的，但是有没有更深刻的理由呢？答案是有的。当你发现了这个规律，你就可以自己写出很多数学结构的定义了。

我们仔细看看上面线性空间的八大条性质吧。

1.【加法交换律】小学的时候我们就学过加法交换律了，比如“2+3=3+2”，很好理解。但是交换律并不是所有的运算都具有的性质，也就是说,任意$x, y \in S$, 未必有$x + y = y + x$。不过对于不交换的运算，习惯上我们不记做加法，而是记作乘法$x \cdot y$或xy。

注：呃……乘法也是满足交换律的呀？
如果实数的乘法确实具有交换律，但是例如矩阵的乘法，就没有交换律了。

例1： 矩阵的乘法运算就是不交换的。
例2： 我们考虑一个集合，集合的元素是一个三阶魔方的全体操作集合，例如“最顶上一层顺时针拧90度”就是该集合中的一个元素。我们定义该集合上的一个运算是操作的复合。你会发现这个运算就是不交换的。请举出一个拧魔方不交换的例子。
例3： 三维空间的旋转操作构成的集合上可以定义一个运算，就是操作的复合。这个运算也是非交换的，请举出一个例子。

在学习过程中你会渐渐发现，我们的集合中的元素不仅仅可以是数字、矩阵，还可以是“操作”这类听起来和生活很接近的东西。对于这种现象，我引一句李文威老师的话：

> 惟其抽象，故堪实用。
>
> -李文威

2.【加法结合律】运算不满足交换律仍然有很丰富的内容（比如矩阵乘法不满足交换律，不影响矩阵论有丰富的内容），但是不满足结合律的运算就没什么好玩的东西了。我们一般都会要求一个二元运算满足结合律，有的时候我们甚至可以略去这一点不说，因为结合律是默认满足的。

3.【有零元】讲运算一般都要求运算单位元存在，这一点也是近乎默认，可以略去不提。

4.【存在负元】这是在说加法运算有逆。其实这也是默认的，我们一般会把一个逆存在的运算叫做加法。（都是前辈的习惯）

5.【数乘是幺作用】性质比较好的结构里的数乘都是幺作用，因此这一点也近乎默认，偷懒的时候可以不提。

6.【懂得都懂不好命名性质】你看定义的书写形式就知道，这也是结合律的一种。结合律都是默认满足，可以不提。

7.8.【分配律】这两条反映的是不同运算间的相容性。

什么是相容性？相容性在英文里称作"compatible"。为了更好地理解相容性，我们想象这样的场景：学生食堂炒菜的大叔现在打算做一盘番茄炒蛋（这是我能想到食堂比较能吃的菜了orz）。假设食堂大叔的祖传秘方是现炒好番茄鸡蛋，再往里加盐和酱汁，那么先加盐再加酱汁和先加酱汁再加盐，我们尝起来是一样的。如果用数学的话来说，就是：你对番茄炒蛋先做盐运算，再做酱汁运算和先做酱汁运算再做盐运算，最后结果是一样的，我们尝不出来区别。我们称这种可以换序的运算叫做运算的相容性。回到数学里来，我们罗列一下实线性空间涉及的运算有哪些，再要求他们都互相相容就可以了。实线性空间里涉及实数加法、乘法，集合V上的加法以及链接二者的数乘运算。如果你真的去列，就会发现很多相容性已经被封装进一个好的结构里不必多言或是没有意义，实际有意义的相容性只有数乘和V上加法相容以及实数加法和数乘相容。数乘和V上加法相容，意思是先做加法再数乘和先数乘再做加法得到结果一毛一样，也即第8条【分配律】；实数加法和数乘相容同理，得到第7条分配律。

注：相容性实际上反映了一种哲学信念。如果一个集合上配备了多种结构，我们要求结构之间非常“和谐”，也即，我考虑结构的顺序不能影响我的分析结果。

有了相容性这么高度归纳性质的语言，如果再忽略掉一些默认的条件，我们可以重新给出实线性空间的定义（不是正式的）。

实线性空间

设V是一个集合。在V上定义一个加法，再定义$\mathbb{R}$数乘,并且要求所有涉及的运算都相容，则V是一个线性空间。

注：再次强调我们这里省略了很多默认的话。我们说定义一个加法，就是默认这个运算存在零元存在负元，有结合律并且交换；定义一个数乘，就是有结合律并且1乘上任何元还是该元素。

出于习惯，当我们说定义一个乘法，就是默认该乘法有结合律。如果语境比较好，比如在数论中用到的环的乘法，一般还要求乘法有单位元，记作1。

这是非常惊人的，我们用简单的几句话就说明了什么是线性空间。也许你会说，也就是相容性能把两条分配律讲得简单点吧，其余都是当作默认不讲，也没有多少实质性的进展呀？实际上，我们是对“加法”，“乘法”“数乘”这些词赋予了一些习惯上的含义，这是非常有用的。这就意味着，你可以写出下面的定义（严格写出每一条该满足的性质）

练习

请写出如下数学对象的定义：

1.一个$\mathbb{R}-$代数是一个集合上面定义乘法、加法、$R-$数乘，并且所涉及的所有运算都相容。

2.一个环是一个集合上面定义乘法和加法，所有运算都相容。

3.设R是一个环，一个$R-$模M是集合M配备上加法和$R-$乘法，所涉及运算都相容。

令人吃惊吧！这里很多的概念，例如$R-$代数，环，模，都是听起来很深奥的概念，但是他们无非就是一个集合上面加了一堆感兴趣的运算，再要求这些运算都相容罢了。我们从这一思路出发，正式引出群的概念。

3 群与群同态

现在终于可以引出群的定义了！实际上有了上面的铺垫，我只要说一句话，你就可以自己把群的定义写下来(我相信这种成就感是非凡的，因为你在一瞬间有了和前辈写下定义时相似的体验)。准备好纸和笔，我现在要念这句话了：

练习

群是一个集合上面配备一个单位元存在、可逆元存在的乘法。请写出群的定义。

群的定义甚至比代数、环、模的定义还好写，因为群里就只有一种运算结构，甚至不涉及相容性检查的问题，简直so easy。

群

设G是一个集合。定义其上一个二元运算$\cdot : G \times G \to G$.称$(G,\cdot)$是一个群，若满足： 1.任意$x,y,z \in G, (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ 2.存在幺元1,满足$1\cdot x = x$ 3.任何元素$x \in G$，存在元素$y \in G$，满足$x\cdot y = y\cdot x = 1$
若群G的乘法还满足交换律，则称为阿贝尔群或交换群。

注1：阿贝尔是一位挪威数学家，群论鼻祖之一。我们会把阿贝尔当作形容词来用，比如我们会说群是阿贝尔的，意思是群是阿贝尔群，而不是群归阿贝尔所拥有。
注2：有些书本会写要求群乘法满足乘法封闭性，这一点我们已经纳入二元运算里考虑了（思考为什么）

例1： 任何一个实线性空间如果只考虑其上加法，忽略数乘，就是一个阿贝尔群。
例2： 整数上配备加法构成阿贝尔群。

练习

1.所有的n阶矩阵配备上矩阵乘法可以构成群吗？
2.请尝试写出"魔方操作群"的定义。
以下两题对于学过线性代数的同学是简单的：
3.证明群中的单位元是唯一的。
4.证明群的逆元是唯一的。

介绍完群的定义，我们就需要定义两个群之间的映射是什么。这其实是代数学的很重要的思考方式——定义完一个对象，思考该对象间的映射是什么。例如，我们有两个集合，集合之间的映射就是平平无奇的集合间的映射。比如我们有两个线性空间，我们会思考两个线性空间之间的映射是什么——答案是线性映射。将来也许会学习到拓扑空间，我们也会去问拓扑空间之间的映射是什么。

也许我说这些话，你没法明白是什么意思，让我们更具体一点吧。还是从大部分同学已经学过的线性映射说起。先给出线性映射的定义（略略一瞟即可）

线性映射

设V,W是两个实线性空间。f是两个线性空间之间的线性映射，若它满足以下条件：
1.$f(kx) = kf(x)$, 任意$k \in \mathbb{R}, x \in V$ 【保数乘】
2.$f(x+y) = f(x) + f(y)$，任意$x,y \in V$ 【保加法】

有了之前的铺垫，你应该能明白线性映射这么定义的原因了。线性空间上的结构（结构可以理解为其上的运算）就是加法和乘法，那么线性空间上的映射自然就要保这些结构了，也就是保加法、保乘法。所以我们考虑的映射，是保持数学结构的映射。这一点对所有目前为止的数学对象都正确，凭着这一点，任何人可以写出一系列对象之间定义最自然的映射是什么。

练习

1.请写出群之间的映射——群同态的定义
2.请写出环之间的映射——环同态的定义
3.请写出代数间的映射——代数同态的定义
4.请写出模之间的映射——模同态的定义

有一个很常见的问题：为什么一定要考虑保结构的映射呢？我能不能把线性空间看成两个集合，然后把线性映射定义成集合之间的平平无奇的映射呢？答案是可以，但是在你的体系下和别人解释线性映射就会出现这样的情况：

A:什么是线性映射？
B:就是线性空间之间的映射。
A:什么是线性空间？
B:就是blablabla，（耐心解释八大条性质）。A:好的我明白什么是线性空间了，现在请告诉我线性映射是什么意思吧？
B：就是你把线性空间当成集合，考虑集合间的映射就行。
A:?我好不容易学会了线性空间上的加法、数乘结构，现在又让我忘掉这些结构，只把线性空间看成集合就行？

所以如果在定义线性映射的时候不考虑线性空间的结构，只是考虑集合映射，那么我们费老鼻子劲定义线性空间就是吃饱了撑着。

群同态、群同构

设H,K是两个群，$f : H \to K$是集合H, K之间的映射。称f是群同态，若其满足：$f(xy) = f(x)f(y)$，任意$x, y \in H$。
进一步地，如果f是一个双射，则称f是群同构。

如果在这本小小小介绍给出定义前，你已经自己写下了这些定义，那么你一定能够欣赏到这些数学结构的美妙之处。对于代数学的欣赏很多时候不是发生在单个数学对象身上的，结合很多数学对象，你发现它们有着共同的本质，这是非常有意思的事情。这也是本介绍的一个初衷，试图让读者自己去发现，而不是直白地给出定义。代数里面有大量的定义都是如此，是可以自己写下来的。写下一个定义，就可以开始玩了。