

单位代码: 10293 密 级:           

# 南京邮电大学

## 硕士学位论文



论文题目: 压缩感知算法及其应用研究

学 号 Y008091905

姓 名 屈 冉

导 师 赵君喜 教授

学 科 专 业 应用数学

研 究 方 向 信息处理理论与应用

申请学位类别 理学硕士

论文提交日期 二零一三年四月

# **Research on Compressed Sensing Algorithms and Applications**

Thesis Submitted to Nanjing University of Posts and  
Telecommunications for the Degree of  
Master of Science



By

Ran Qu

Supervisor: Prof. JunXi Zhao

April 2013

## 南京邮电大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得南京邮电大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

本人学位论文及涉及相关资料若有不实，愿意承担一切相关的法律责任。

研究生签名： 屈冉 日期： 2013.4.3

## 南京邮电大学学位论文使用授权声明

本人授权南京邮电大学可以保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子文档；允许论文被查阅和借阅；可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索；可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编本学位论文。本文电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。论文的公布（包括刊登）授权南京邮电大学研究生院办理。

涉密学位论文在解密后适用本授权书。

研究生签名： 屈冉 导师签名： 赵君喜 日期： 2013.4.3

# 摘要

压缩感知基于信号的稀疏特性，利用远小于奈奎斯特采样率的信号样本实现信号的重构，大大地压缩了信号的处理成本。压缩感知理论一经提出，就引起学术界和工业界的广泛关注。本文主要研究了压缩感知算法及其应用。

第一章概述了压缩感知理论框架、研究的意义以及本文的主要研究内容。第二章主要讨论了压缩感知的基本原理、压缩感知算法、含噪声的压缩感知和最稀疏解的唯一性。

第三章主要介绍了贪婪类压缩感知算法，主要包括正交匹配追踪算法、分段正交匹配追踪算法、正则化正交匹配追踪算法等压缩感知算法，分析了这些算法性能。

第四章讨论压缩感知在图像去噪声中应用。基于椒盐噪声干扰下图像的结构特性，给出了一种去噪算法，并将其应用在椒盐去噪中。在实验中，我们利用低复杂度的正交匹配追踪算法，对去噪进行了实验分析。实验证实该去噪方法比一些传统的算法具有明显的优势。

第五章研究压缩感知在图像数据丢失中的应用，根据数据丢失下图像的结构特性，提出了利用压缩感知的重构算法。在较多数据丢失的情况下，该算法仍然具有良好的重构效果。

**关键词：** 压缩感知，正交匹配追踪，椒盐去噪，数据丢失

# Abstract

Based on signal sparse features, compressed sensing use few measurement data with much smaller than the Nyquist sampling rate to realize signal reconstruction, and can greatly reduce signal processing cost. Since the theory was proposed, it draws widely attention in academics and industry. this paper mainly research on compressed sensing algorithms and its applications.

The first chapter summarizes the framework、 significance of compressed sensing. The second chapter mainly discusses the basic principle of compressed sensing、 compressed sensing algorithms、 compressed sensing with noise and analyzes the uniqueness of sparse solution.

The third chapter mainly introduces the greed algorithms in compressed sensing: orthogonal matching pursuit algorithm, Stagewise Orthogonal Matching Pursuit, regularization orthogonal matching pursuit algorithm and so on. The performance of these algorithms is analyzed.

Based on the image stucture of salt and pepper noise, the fourth chapter applies compressed sensing to denoising, gives a denoising method. Compared to traditional denoising methods, the experimental results show that the method's efficiency.

Based on the sparsity of natual images, the fifth chapter researches the image recovery from loss data using compressed sensing. The experimental results show that under large data loss cases, the image recovery algorithm still gives good reconstruction results.

**Key words: Compressed Sensing, Orthogonal Matching Pursuit, Salt and Pepper Denoising, Missing Data**

# 目录

专用术语注释表 .....	1
第一章 绪论 .....	2
1.1 引言 .....	2
1.2 研究的意义 .....	3
1.3 结构和研究内容 .....	5
第二章 压缩感知理论 .....	6
2.1 压缩感知基本原理 .....	6
2.1.1 问题描述 .....	6
2.1.2 信号的稀疏表示 .....	8
2.1.3 观测矩阵的设计 .....	9
2.1.4 信号重构 .....	11
2.2 压缩感知算法 .....	12
2.3 含噪声的压缩感知 .....	12
2.4 最稀疏解的唯一性 .....	13
2.5 本章小结 .....	15
第三章 贪婪类压缩感知算法 .....	16
3.1 压缩感知算法归纳 .....	16
3.2 匹配追踪算法 .....	17
3.3 正交匹配追踪算法 .....	18
3.4 分段正交匹配追踪算法 .....	19
3.5 正则化正交匹配追踪算法 .....	19
3.6 压缩采样匹配追踪算法 .....	20
3.7 子空间匹配追踪算法 .....	21
3.8 改进的正交匹配追踪算法 .....	22
3.9 仿真与分析 .....	23
3.10 本章小结 .....	27
第四章 压缩感知在椒盐去噪中的应用 .....	28
4.1 图像去噪 .....	28
4.2 常见的去噪算法 .....	28
4.2.1 空间域去噪算法 .....	28
4.2.2 变换域去噪算法 .....	30
4.3 阶梯观测矩阵的设计 .....	31
4.3.1 非对称形式的对偶 .....	31
4.3.2 对偶问题的最优解 .....	32
4.3.3 对偶内点法算法步骤 .....	34
4.3.4 阶梯观测矩阵的合理性 .....	35
4.4 椒盐去噪算法 .....	38
4.5 基于压缩感知的椒盐去噪 .....	39
4.6 仿真结果 .....	40
4.7 本章小结 .....	45
第五章 压缩感知在丢失数据中的应用 .....	46
5.1 基于压缩感知的数据丢失重构算法 .....	46
5.1.1 数据丢失重构算法 .....	46
5.1.2 丢失数据重构的方法 .....	47

5.2 仿真结果 ..... 48

5.3 结果分析 ..... 51

5.4 本章小结 ..... 52

第六章 总结与展望 ..... 53

6.1 总结 ..... 53

6.2 展望 ..... 53

参考文献 ..... 54

附录 1 程序清单 ..... 58

附录 2 攻读硕士学位期间撰写的论文 ..... 59

致谢 ..... 60

## 专用术语注释表

### 符号说明:

$W^\perp$	$W$ 的正交补空间
$P_W$	在子空间 $W$ 上的正交投影

### 缩略词说明:

OMP	Orthogonal Matching Pursuit	正交匹配追踪
ROMP	Regularized Orthogonal Matching Pursuit	正则化正交匹配追踪
StOMP	Stagewise Orthogonal Matching Pursuit	分段正交匹配追踪
CoSaMP	Compressive Sampling Matching Pursuit	压缩采样匹配追踪
SP	Subspace Pursuit	子空间匹配追踪
RIP	Restricted Isometric Property	等距约束性
LASSO	Least Absolute Shrinkage and Selection Operator	最小绝对值收缩和算子选择
PSNR	Peak Signal to Noise Ratio	峰值信噪比
BP	Basis Pursuit	基追踪
GOMP	Generalized Orthogonal Matching Pursuit	广义正交匹配追踪
FER	Frequency of Exact Reconstruction	精确重构的概率
RMD	Recovery of Missing Data	丢失数据重构



# 第一章 绪论

## 1.1 引言

随着科学技术和社会的发展,人们对信息的需求日益增大。随着各种高清格式的视频和图片等大容量文件以及蓝光光盘等大容量携带媒介的迅速广泛流行,这也势必造成采样、传输和存储的巨大压力。如何缓解这种压力又能有效提取承载在信号中的有用信息是信号与信息处理中急需解决的问题之一。近年来国际上出现的压缩感知理论<sup>[1]</sup>(CS,Compressed Sensing)为缓解这些压力提供了解决方法。

由于在自然界中的信号都是以模拟形式存在的,而我们利用的对信息进行处理和传输的工具都是数字化的。这就决定了我们必须将模拟信号通过采样的方式转变成可以方便处理的数字信号。

信号与信息处理时信息科学近些年发展最迅速的学科之一,而奈奎斯特采样定理要求采样频率必须高于信号最高频率的两倍,才能保证不失真地重构原始信号<sup>[49]</sup>。这些信息量巨大的信息决定了携带它们的信号的高带宽,这就对信息处理系统的采样速率和处理速度提出了很高的要求。同时这些海量信息也使得传输系统负担很大。在理论研究突飞猛进的同时,由于硬件技术的发展相对较慢,导致了实际应用步履维艰,另一方面,大容量文件的广泛使用也带来了存储空间的要求。虽然现在有大量的压缩算法使得人们能够以比较少的比特数表示原来的信息,但是其都是建立在对原始模拟信号先进行大规模高速采样以得到原始数字离散信号,然后再在此基础上进行特定的操作将大量非必须的数据抛弃,以减少最后所得到的实际数据大小。这个过程在本质上仍然依赖于以奈奎斯特准则为基础的高速采样,摆脱不了高速采样的局限性。

压缩感知理论的核心思想主要包括两点:

(1)信号的稀疏结构。传统的香农采样定理只利用了被采样信号的先验信息,即信号的带宽。现实生活中信号本身具有一些结构特点,是由信号的更小的一部分自由度所决定。

(2)不相关性。稀疏信号的有用信息的获取可以通过一个非自适应的采样方法将信号压缩成较小的样本数据来完成,要求是与信号所在的稀疏空间是不相关的。

因此,在数字化的今天,奈奎斯特准则的理论框架已经在某种程度上束缚了新技术的发展。如果人们可以突破奈奎斯特准则的约束,建立起一种崭新的信息处理理论框架,在新框架内,只需要用比奈奎斯特准则所要求的采样速率低得多的采样速率对原始信号进行采样,

就能够准确恢复出原始信号,就可以很好地摆脱对高采样速率的依赖,极大地降低信号传输,处理和存储的成本,将开创一个新的技术时代。

近年来, Candes, Romberg, Tao 和 Donoho 等人提出一种新颖的信号处理技术压缩感知理论<sup>[1]</sup> (Compressive Sensing, CS)。这是一种能够较好的满足以上要求的理论框架。压缩感知理论与传统的奈奎斯特准则不同,它指出如果信号在某个变换域是可压缩的或者是稀疏的,那么就可以通过一个不相关的观测矩阵,将高维信号投影到低维空间中,通过求解最优化算法,以高概率重构原信号。压缩感知理论利用了少量采样点就可以包括稀疏空间中原始信号的全部信息。因此和奈奎斯特准则相比,在压缩感知理论框架中,精确重构信号所需要的采样速率并不取决于信号的带宽,而是取决于信号的内部结构,也就是取决于信号的稀疏表示。原始信号的稀疏度越高,所需要的采样速率就越小。而从理论上说,只要找到一个合适的稀疏表示空间,比如傅里叶变换,小波变换等,大多数信号都是具有稀疏性的。压缩感知理论的应用,也摆脱了传统信息处理系统中先采样后压缩储存的方式,如图所示,压缩感知理论的数据处理过程将采样和压缩步骤相结合,直接进行压缩采样,避免了高速采样的限制。因此压缩感知理论能给许多理论研究和实际应用领域带来重要影响和重大的实际意义。人们对其各方面的研究也越来越多,压缩感知理论已成为一个具有广阔前景的信号处理技术。

压缩感知在数据纠正、图像、雷达和信道估计中应用广泛,给出一个高维空间中的稀疏信号,要使得能在低维空间中使用少量的线性测量值进行重构。尽管这在理论上是可行的,问题的难点在于构造算法使得重构有效率,并且决定那一种线性测量值可以重构。

## 1.2 研究的意义

本文主要研究了贪婪类压缩感知算法,近年来提出了很多种算法,包括正交匹配追踪算法<sup>[22]</sup>、正则化正交匹配追踪算法<sup>[23]</sup>(ROMP)、压缩采样匹配追踪算法<sup>[24]</sup>(CoSaMP)、子空间匹配追踪算法<sup>[25, 57]</sup>(SP)和分段正交匹配追踪算法<sup>[14]</sup>(StOMP),所有这些匹配追踪算法都需要稀疏度  $K$  作为精确重构的先决条件。然而,在实际的信号处理中稀疏度  $K$  通常是未知的,自然图像信号在小波变换和离散余弦变换下,是近似稀疏的,但是无法知道其稀疏度。

在信号处理领域,对图像表示方式一直是一个很基础性的问题,通常在图像进行处理之前,需要对图像数据进行有效的表示。基于过完备字典的稀疏表示(Sparse Representation)是一种非常有效的图像表示方式,其基本思想是利用自然图像本身存在的稀疏特性,将图像在变换域的表示系数中较少的非零元素来压缩表示图像,为图像处理提供了较好的方法。

图像在获取和传输过程中,都不可避免地会受到外部因素的影响,从而会引入很多的噪

声。而且有的图像的噪声现象非常严重，图像中的噪声往往和信号交杂在一起，导致图像自身的许多细节如边缘轮廓、线条等变的模糊不清，很多重要的图像信息都难以分辨。因此，对图像进行去噪处理是一个非常重要的过程。

去噪已成为图像处理中及其重要的步骤，具有重要的意义。去除椒盐噪声又是其中的一项重要的任务，椒盐噪声是由图像传感器、传输信道、解码处理、图像切割等产生的黑白相间的亮暗点噪声。椒盐噪声的特征是噪声点的亮度值与其周围领域具有明显的不同，在图像上造成黑白相间的亮暗点噪声，严重影响了图像的质量。因此，如何能够有效的去除图像中的椒盐噪声，又尽量使图像不至变得很模糊，保存完整的细节信息成了图像处理中极为重要的问题，基于以上原因，本文给出了一种基于压缩感知的椒盐去噪方法。

基于压缩感知的去噪方法如图 1.1 所示：



图 1.1 基于压缩感知的去噪方法

随着信息化产业的迅猛发展，产生的数据量越来越大，许多数据要保存数十年以上，甚至是永久保存。关键数据成了各单位生存的命脉和宝贵的资源，而数据丢失问题也越来越突出，使之日益为人们所关注。如何在有数据丢失的情况下，恢复原始数据信息，使得灾难造成的损失降到最低限度，更好地保护重要数据，已成为当前信号处理研究领域的一个方向之一。

假设数据向量的部分数据丢失了，在部分数据向量的少量先验知识已知的条件下，能否从这些先验知识中重构出丢失的数据向量？

基于以上分析，利用自然图像所具有的稀疏特性，本文给出了一种基于压缩感知的数据丢失重构方法，重构方法如下图 1.2 所示：



图 1.2 基于压缩感知的数据丢失重构方法

### 1.3 结构和研究内容

本文主要对压缩感知理论的相关知识进行了详细分析，从传统信号采样过程引出压缩感知这一全新理论，与传统信号采样过程做了对比，并从理论上进行了说明；在第二章中对压缩感知理论框架中的三个重要组成部分：信号的稀疏分解、观测矩阵的构造、信号的重构进行了详细的分析，概述了压缩感知算法，含噪声的压缩感知，并对压缩感知解的唯一性做了分析；在第三章中分析了几种常见的贪婪类压缩感知算法，并给出了改进的正交匹配追踪算法，对各种算法的性能做了对比分析。第四章给出了一种阶梯观测矩阵，并验证了其设计的合理性，将其应用在椒盐去噪中。对比了空间域去噪算法和变换域去噪算法，实验结果显示本文方法的优势。第五章将压缩感知算法应用在图像传输过程中有数据丢失情况的图像重构问题。

## 第二章 压缩感知理论

### 2.1 压缩感知基本原理

压缩感知理论是近年来发展最为迅速的理论<sup>[13,14,15]</sup>之一，在该理论框架下，信号的采样速率不再取决于采样带宽，而是取决于信号的结构和内容，也就是稀疏性和非相干性。

压缩感知理论在采样的同时完成了信号的压缩，也就是说它突破了奈奎斯特采样定律的限制<sup>[28,29]</sup>。可以看出，利用压缩感知理论重构信号所需的观测个数与信号的最高频率无关，而与信号的稀疏性密切相关，只要信号是可压缩的或者是稀疏的，那么就可以使用压缩感知理论，从而大大的节约了采集信号的成本。

#### 2.1.1 问题描述

假设有这样一个实值的有限长一维离散时间信号  $X$ ，以及它的成员  $x_n, n=1, 2, \dots, N$ ，可以被看作一个  $R^N$  空间  $N \times 1$  维列向量，假设  $X$  在  $R^N$  空间有一个基础的基， $R^N$  空间的任何信号都可以用  $N \times 1$  维的基向量  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  的线性组合表示。将这个问题简化，假设这些基是规范正交的。把向量  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  作为列向量形成  $N \times N$  的基矩阵： $\Psi = [\psi_1 | \psi_2 | \dots | \psi_n]$ ，则任意信号  $X$  都可以表示为：

$$X = \sum_{k=1}^N \psi_k s_k = \Psi S \quad (2.1)$$

其中  $S$  是投影系数  $S = [s_i] = \langle X, \Psi_i \rangle$  构成的一个  $N \times 1$  的列向量。并且  $X$  和  $S$  是同一个信号的等价表示， $X$  是信号在时域的表达， $S$  是信号在  $\Psi$  域的表达。其中  $S$  向量有  $K$  个系数不为零，其它  $N-K$  个为零或者非常小，那么我们说  $X$  在  $\Psi$  域是可压缩的或者是  $K$ -稀疏的。通常，可压缩信号是指可以用  $K$  个大系数很好地逼近的信号，即它在某个正交基下的展开的系数按一定量级呈现指数衰减，含有很少的大系数和许多小系数。这种通过变换实现压缩的方法称为变换编码。

变换编码在数据采样系统中，发挥了重要的作用。在这个系统中，采样速率高但是信号是可以压缩的，采样得到的  $N$  点采样信号  $X$ ，计算  $S = \Psi^T X$  变换出系数  $\{s_i\}$ ，确定  $K$  个大系数

的位置, 然后剔除  $N-K$  个小系数, 对  $K$  个大系数和位置进行编码, 进而达到压缩的目的<sup>[48]</sup>。

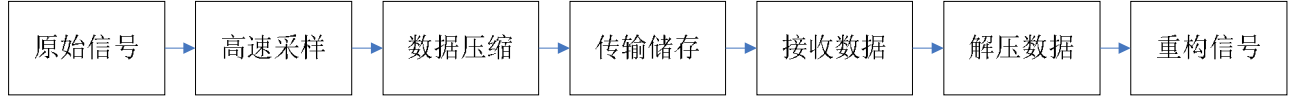


图 2.1 传统的数据压缩过程

很明显, 这种传统的以奈奎斯特采样定理为准则的高速采样后再压缩的过程浪费了大量的采样资源。比如 JPEG2000 标准中所定义的图像压缩, 原始的  $1024 \times 2048$  图像可能含有两百万自由度, 想要用小波来表示这个图像的人需要两百万个不同小波才能完美重建。但是典型的有意义的图像, 从小波理论的角度看来是非常稀疏的, 也就是可压缩的: 可能只需要十万个小波就已经足够获取图像所有的可见细节了, 其余一百九十万小波系数的贡献是很少量的。

压缩感知理论在信息论、信号处理、图像处理、地质勘探等领域受到极大的关注。因为压缩感知这个概念最初起源于对医学图像的处理, 此外, 莱斯大学还建立了专门的 Compressive Sensing 网站, 及时报道和更新该方向的最新研究成果, 在现实应用中, 莱斯大学已经研制出了单像素相机。

在这种稀疏域的条件下, 对  $X$  信号进行测量, 通过与一个  $M \times N$  的测量矩阵  $\Phi$  相乘, 采样出来的测量值是一个  $M \times 1$  的  $Y$  向量, 它是由  $Y = \Phi X$  算出来的, 那么就可以利用优化求解方法从观测集合中精确或以高概率地重构原始信号  $X$ 。

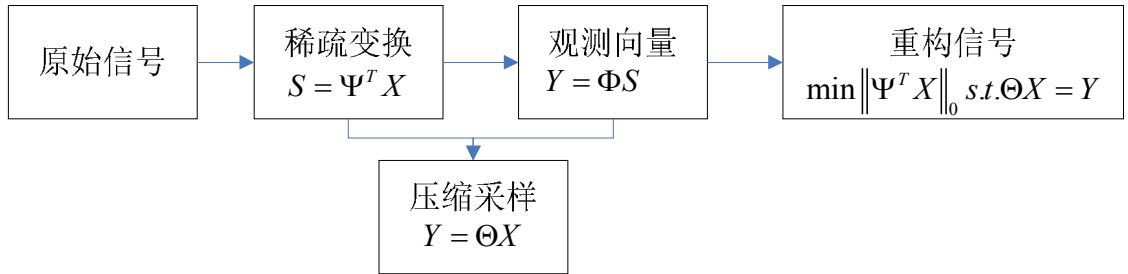


图 2.2 压缩感知理论框架

压缩感知在采样的同时实现了信号的压缩, 如图 2.2 所示, 如果原始信号  $X \in R^N$  在某个正交基  $\Psi$  下是稀疏的,  $S$  是信号  $X$  在  $\Psi$  域的等价或逼近表示  $S = \Psi^T X$ ; 设计一个  $M \times N$  维的观测矩阵  $\Phi$ , 对  $S$  进行观测得到观测样本  $Y = \Phi S = \Phi \Psi^T X$ , 也即是通过矩阵  $\Theta$  进行观测:  $Y = \Theta X$  (其中  $\Theta = \Phi \Psi^T$ ),  $\Theta$  称为 CS 的信息算子<sup>[48]</sup>, 最后利用 0-范数下的优化问题求解  $X$ :

$$\min \|\Psi^T X\|_0 \text{ s.t. } \Theta X = Y \quad (2.2)$$

因为  $M < N$ , 所以(2.2)表面上看起来上述方程是个病态方程, 方程的解不唯一, 但是当  $\Phi$  和  $\Psi$  能够满足不相关的性质的时候, 我们是有可能对上述信号进行精确的恢复的。而确实存

在着一些通用的测量矩阵，比如高斯矩阵，伯努利矩阵等，它们与其他任何矩阵都满足不相关的特性。所以恢复原始信号等价于解决一个最优化问题，如式(2.3)所示：

$$\min_s \|S\|_0 \text{ s.t. } Y = \Phi \Psi S \quad (2.3)$$

式(2.3)的优化问题也可以写成如下形式：

$$\min \|S\|_0 \text{ s.t. } \|\Phi \Psi S - Y\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.4)$$

现在压缩感知理论主要涉及的问题是：

(1) 信号的稀疏表示问题，对于信号  $X \in R^N$ ，如何找到某个正交基  $\Psi$ ，使得其在  $\Psi$  上是稀疏的，即具有最少的非零变换系数个数。

(2) 信号的低速采样问题，如何设计一个与变换基  $\Psi$  不相关的  $M \times N$  维的观测矩阵  $\Phi$ ，使得信号从  $N$  维降到  $M$  维时信号能量不被破坏，在实际中还要考虑观测矩阵的硬件实现可能性。

(3) 信号的重构算法问题，如何设计快速的重构算法保证重构信号的精确性和稳定性。从  $Y = \Theta X$  中重构原始信号。

### 2.1.2 信号的稀疏表示

研究信号的稀疏表示的目的是寻求信号在某一特定基下的最优逼近，本质是透过不同的角度和方式去观测和认识一个信号。信号的稀疏表示就是在变换域上用尽量少的基函数来表示原始信号。给定信号  $X \in R^N$ ，如果  $X$  中至多有  $K$  个非零值，也即是  $\|X\|_0 \leq K$ ，那么就说信号  $X$  是  $K$ -稀疏的，所有  $K$ -稀疏信号的集合为  $\Sigma_k = \{X : \|X\|_0 \leq K\}$ 。

在现实生活中，严格稀疏的信号几乎是没有的，更多的是信号在某个基上是稀疏的，在信号处理中称基为字典，并用矩阵来描述，字典中的元素称为原子。信号  $X \in R^N$  在某个字典  $\Psi$  上  $K$ -稀疏的，是指  $X = \Psi S$ ， $\|S\|_0 \leq K$ 。信号的自身稀疏的情况对应了  $\Psi = E$ ，其中  $E$  为单位矩阵。图 2.3 显示了自然图像在小波基下的稀疏特性，经过 2 层小波分解后，大部分的系数近似为 0（图中黑色区域）。

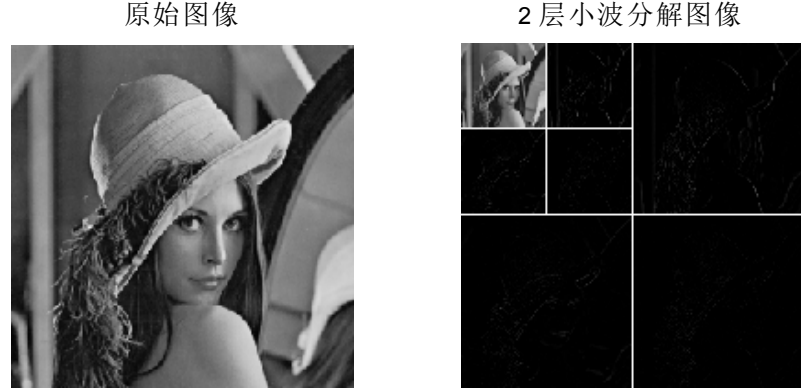


图 2.3 图像在小波分解下的稀疏特性

若信号在某个字典上稀疏，则会给出相应的字典。获得字典的方式主要有两种：基于分析和基于训练学习<sup>[50]</sup>。基于分析产生的字典可以是完备的，也可以是冗余的；而基于训练学习得到的字典不是预先设计的，字典学习相当于在  $\Psi$  和  $S$  都未知的条件下，求解下式的优化问题，即：

$$\min_{\Psi, S} \|X - \Psi S\|_2 \text{ s.t. } \forall i, \|s_i\|_0 \leq T \quad (2.5)$$

其中， $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  是输入信号矩阵， $S = [s_1, s_2, \dots, s_n]$  是稀疏表示矩阵，每一列对应于一个信号的稀疏表示系数，即满足  $x_i = \Psi s_i$ ， $T$  为控制稀疏表示系数稀疏程度的常数。

### 2.1.3 观测矩阵的设计

信号重构正如上面所描述的，要使得能精确重构  $K$ -稀疏信号，对于给定的  $Y$  从(2.3)式中求出  $S$  是一个线性规划问题，但由于  $M < N$ ，即方程的个数少于未知数的个数，这是一个欠定的方程，并且一般而言有无数个解。然而，如果  $S$  具有  $K$ -稀疏特性，则可以利用压缩感知理论和方法来寻找这个解。也就是，只要设法确定出  $S$  中的  $K$  个非零系数  $s_i$  的具体位置，由于观测向量  $Y$  是这些非零系数  $s_i$  对应  $\Phi$  的  $K$  个列向量的线性组合，从而可以形成一个  $M \times K$  的线性方程组来求解这些非零项的具体值。Candes和Tao证明了在一组较强的条件下，



通过求解式(2.3)可以利用基追踪重构  $K$ -稀疏信号, 要求观测矩阵不会把两个不同的  $K$ -稀疏信号映射到同一个采样集合中, 即观测矩阵的  $M$  个列向量构成的矩阵是非奇异的。等距约束性<sup>[12]</sup>(RIP), 对于所有的  $K$ -稀疏向量  $x \in \Sigma_k$ , 使得下式成立的最小  $\delta_k$ :

$$(1 - \delta_k) \|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|x\|_2^2 \quad (2.6)$$

如果一个矩阵的  $K$ -等距约束常数  $\delta_k \in (0, 1)$ , 则称这个压缩感知矩阵满足等距约束条件。

在实际使用等距约束性时, 需要决定什么样的矩阵满足等距约束性, 需要多少测量值。尽管计算一个矩阵是否满足等距约束性是很困难的, 事实上很多矩阵被证明了在很大的概率上满足等距约束性并且需要更少的测量值, 已经被证明了随机高斯矩阵、伯努利矩阵和部分傅里叶矩阵满足等距约束性。

高斯随机矩阵: 如果  $\sqrt{M}\Phi$  中元素为标准正态分布的随机变量, 当  $M \geq CK \log(N/K)/\varepsilon^2$  时,  $\delta_k \leq \varepsilon$  的概率大于等于  $1 - e^{-CM}$ , 其中  $C$  为一常数。

部分Fourier矩阵: 如果  $\sqrt{M}\Phi$  是从  $N \times N$  的DFT变换矩阵中随机抽取的  $M$  行组成的矩阵, 当  $M \geq CK \log^5 N \cdot \log(\varepsilon^{-1})/\varepsilon^2$  时,  $\delta_k \leq \varepsilon$  的概率大于等于  $1 - N^{-1}$ 。

亚高斯矩阵: 一个随机变量  $X$  是亚高斯, 如果对于所有的  $t > 0$  和部分正数  $C$ , 式子  $P(|X| > t) \leq Ce^{-ct^2}$  成立, 因而亚高斯随机变量由标准高斯随机变量支配的尾分布, 选择  $C = c = 1$ , 得到标准高斯矩阵, 选择  $C = e^{-1}$ ,  $c = 1$ , 得到伯努利矩阵。

亚高斯测量矩阵: 设  $\Phi$  是一个  $M \times N$  的亚高斯测量矩阵, 设  $s \geq 1$ ,  $0 < \varepsilon < 0.5$ , 假设测量值  $M$  满足  $M \geq \frac{Cs}{\varepsilon^2} \log\left(\frac{N}{\varepsilon^2 s}\right)$ , 矩阵  $\frac{1}{\sqrt{M}}\Phi$  以概率  $1 - \sigma$  满足等距约束性。

为了简化问题, 文献<sup>[48]</sup>指出如果观测矩阵  $\Phi$  和稀疏字典  $\Psi$  是不相干的, 则测量矩阵  $\Theta$  在很大概率上满足RIP性质。相关系数定义为:

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \cdot \max_{1 \leq i, k \leq N} |\langle \phi_i, \psi_k \rangle| \quad (2.7)$$

不相干是指向量  $\{\phi_i\}$  不能用  $\{\psi_i\}$  稀疏表示<sup>[10,48,51]</sup>, 其中向量  $\{\phi_i\}$  是矩阵  $\Phi$  的列向量, 向量  $\{\psi_i\}$  是矩阵  $\Psi$  的列向量, 如果  $\Phi$  和  $\Psi$  含有相关的列, 则相关系数越大, 反之越小, 相关系数的范围为  $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{N}]$ 。相关系数越小, 测量样本包含原始信号的信息越多, 准确重构的概率越大。

对于一个随机高斯矩阵  $\Phi$ ，当  $M \geq cK \log(N/K)$  时， $\Phi\Psi^T = \Theta$  以很高的概率满足 RIP 性质<sup>[1,10]</sup> (其中  $c$  是一个很小的常数)，因此可以从  $M$  个观测值  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_M)$  中以很高的概率重构出长度为  $N$  的  $K$ -稀疏信号。

#### 2.1.4 信号重构

在压缩感知理论中，由于观测样本数量  $M$  远远小于信号长度  $N$ ，这是一个欠定方程，似乎是无解的，但是文献<sup>[1]</sup>指出在信号  $X$  是稀疏的或可压缩的前提下，这个问题可解，并且 RIP 性质从理论上保证了精确重构信号的可能性。

为了描述信号重构问题，定义了  $p$ -范数，一般来说， $l_0$  范数是和  $l_p$  范数 ( $0 < p < 1$ ) 联系在一起的， $l_0$  范数是  $l_p$  范数当  $p \rightarrow 0$  时的极限值：

$$\|x\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \|x\|_p^p = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m |x_k|^p \quad (2.8)$$

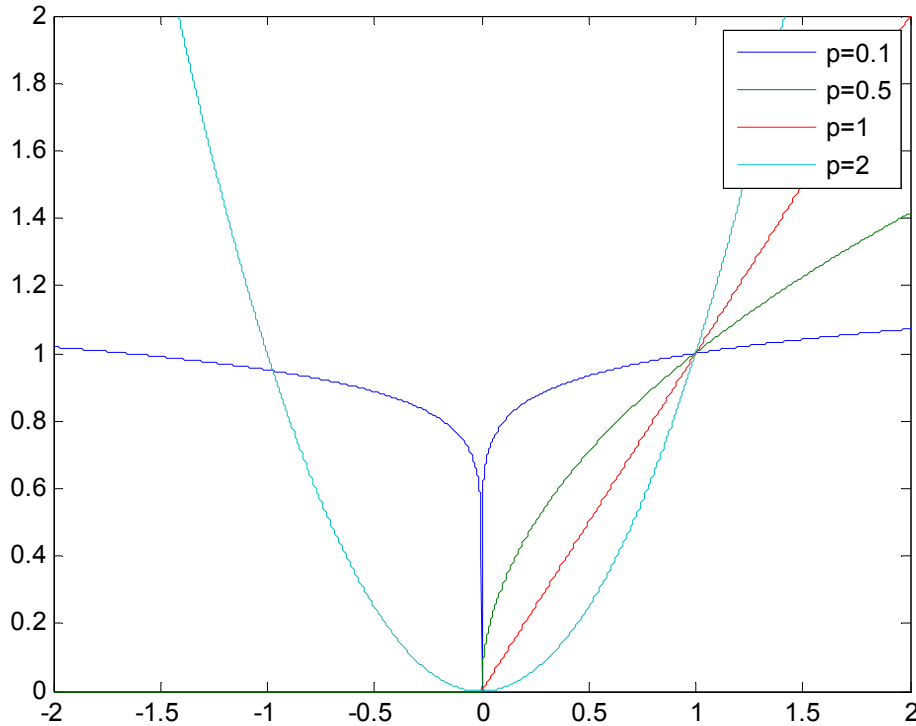


图 2.4 不同  $p$  值下的  $p$ -范数

不同的  $p$  值下  $|x|^p$  的性质，当  $p \rightarrow 0$ ， $|x|^p$  接近指示函数，当  $x=0$  时值为 0，其他点值为 1。当  $p=0$  时得到 0-范数，它实际上就是表示  $X$  中非零项的个数。

于是, 在信号  $X$  是稀疏或可压缩的前提下, 求解欠定方程  $Y = \Theta X$  的问题转化为最小化  $l_0$ -范数问题:

$$\min \|\Psi^T X\|_0 \quad s.t. \Theta X = \Phi \Psi^T X = Y \quad (2.9)$$

Chen 和 Donoho 指出<sup>[52]</sup>, 将  $l_0$  范数简化为  $l_1$  范数会产生同等的解(要求  $\Phi$  和  $\Psi$  不相关):

$$\min \|\Psi^T X\|_1 \quad s.t. \Theta X = \Phi \Psi^T X = Y \quad (2.10)$$

## 2.2 压缩感知算法

压缩感知算法是压缩感知理论研究的核心之一, 算法的关键是在采样得到的少量样本点下, 快速、精确地重构原信号, 信号的重构是从长度为  $M$  的测量样本中, 重构出长度为  $N$  的原信号的过程, 然而  $M < N$ , 方程似乎有无穷多的解, 但是信号具有可压缩性或者稀疏性, 使得求解问题变得可能。作为压缩感知理论的关键部分, 重构算法对于压缩后的信号重构和验证采样过程的准确性具有重要的意义。

在重建算法中, 贪婪类压缩感知算法由于算法复杂度低, 而得到大量的应用。贪婪类压缩感知算法的基本思想是通过不断地迭代, 每次迭代中均选择与原信号最为匹配的原子, 通过多次迭代, 来逼近原信号。比较典型的贪婪类算法有正交匹配追踪算法<sup>[22]</sup>(OMP)、由于该算法的贪婪特性, 导致信号重构出现过匹配现象, 随后提出的正则化正交匹配追踪算法<sup>[23]</sup>(ROMP)、分段正交匹配追踪算法<sup>[14]</sup>(StOMP), 在重构过程中, 引入阈值的概念。后来提出的压缩采样匹配追踪算法<sup>[24]</sup>(CoSaMP)、子空间匹配追踪算法<sup>[25]</sup>(SP)引入了回溯的思想, 对挑选出的原子应用回溯的思想剔除多余的原子, 得到最优的原子组合。

除了贪婪迭代算法外, 还有线性规划算法和组合算法等, 这些算法都有各自的优势和缺点, 线性规划算法所需的测量值数目少, 但是计算复杂度高, 组合算法计算速度快, 但所需的测量样本数目多。

重构算法的设计直接影响了信号的重构质量, 压缩感知算法的设计主要是为了解决降低算法的复杂度, 减少测量样本数目, 提高算法的稳定性等几方面的问题。

## 2.3 含噪声的压缩感知

但是在现实中的信号不是真正的稀疏信号, 而是近似稀疏的。并且这些信号和测量值还包含了噪声, 所以很多人开发在这种条件下也能重构的算法, Candes、Romberg和Tao证明了<sup>[10]</sup>在含噪声条件下的精确重构信号, 在含有噪声的情况下, 由于测量值很难得到, (2.9)式不

再适用，将算法稍微作了修改，采用BP(基追踪)方法对噪声进行抑制，使得在较小的扰动下也能重构<sup>[53]</sup>：

$$\min \|X\|_1 \quad s.t. \quad \|\Phi X - Y\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.11)$$

当已知信号的稀疏程度(1-范数大小)时，则采用 LASSO 方法<sup>[54]</sup>对信号进行重构：

$$\min \|\Theta X - Y\|_2 \quad s.t. \quad \|X\|_1 \leq \varepsilon \quad (2.12)$$

当信号和噪声都是未知的时候，通过带约束二次规划寻找稀疏解，提出利用 GP(梯度投影)算法来有效求解：

$$\min \|\Theta X - Y\|_2 + \lambda \|X\|_1 \quad (2.13)$$

**定理2.1** (BP算法的稳定性)<sup>[47]</sup> 设  $\Theta$  是一个测量矩阵满足等距约束性，则对于任意的  $K$ -稀疏信号  $X$  和含噪的测量值  $Y = \Theta X + e$ ， $\|e\|_2 \leq \varepsilon$ ，解  $\hat{X}$  满足

$$\|\hat{X} - X\|_2 \leq C_K \cdot \varepsilon \quad (2.14)$$

其中  $C_K$  只取决于等距约束常数  $\delta_K$ 。

由于测量矩阵  $\Theta$  的列数大于行数，大多数的奇异值是零。所以理论上认为尽管这个问题是病态的，但是使用基追踪能控制住误差。假设信号  $X$  的支撑集是先验的，最好的从测量值  $Y = \Theta X + e$  重构信号  $X$  的方法，就是在支撑集上应用广义逆矩阵  $\Theta_K^+ \stackrel{def}{=} (\Theta_K^* \Theta_K)^{-1} \Theta_K^*$ ，设其余的值为0。这就是说可以通过下式重构信号  $X$ ，

$$\hat{X} = \begin{cases} \Theta_K^+ Y, & \text{在 } K \text{ 上} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.15)$$

由于  $\Theta_K$  的奇异值是可以控制的，支撑集上的误差  $\|e\|_2 \leq \varepsilon$ ，在支撑集以外的误差当然就是0。

**定理2.2** (BP算法的稳定性)<sup>[47]</sup> 假设  $\Theta$  是满足等距约束性的测量矩阵，对任意的信号和含噪的测量值  $Y = \Theta X + e$ ， $\|e\|_2 \leq \varepsilon$ ，它的解  $\hat{X}$  满足

$$\|\hat{X} - X\|_2 \leq C_K \cdot \varepsilon + C'_K \cdot \frac{\|X - X_K\|_1}{\sqrt{K}} \quad (2.16)$$

其中  $X_K$  表示  $X$  最大系数向量。

## 2.4 最稀疏解的唯一性

假设长度为  $N$  的信号  $X$  最多含  $K$  个非零元素，且  $K \ll N$ ，则  $X$  被称为  $K$ -稀疏信号。将

$X$  投影到一个随机向量上可以得到一个采样值，通过  $M$  ( $K < M < N$ ) 次随机投影即可得到观测向量  $Y$ ，观测方程可以表示为  $Y = \Theta X$ ，其中  $\Theta \in R^{M \times N}$  为测量矩阵。设矩阵  $\Theta$  是满秩的，则线性方程  $Y = \Theta X$  显然为欠定方程，存在无穷多个解。

$$\min_x \|X\|_0 \text{ s.t. } Y = \Theta X \quad (2.17)$$

所需要解决的问题是该问题是否有唯一解，在何种条件下有？该问题的唯一解是否是方程的正确解？下面将讨论基于 Spark 秩的唯一性，在信号稀疏分解和逼近中，使用  $\Theta$  的 Spark 秩来说明唯一性。

**定义 2.1**<sup>[12]</sup> 一个矩阵  $\Theta$  的 Spark 秩是  $\Theta$  所含线性独立列的最小数目。

数学上，矩阵的秩被定义为  $\Theta$  中所含线性独立列的最大数目，显然矩阵的 Spark 秩更难取得。Spark 秩给出了稀疏解的唯一性的简单准则。由 Spark 秩可得：

**定理 2.3**<sup>[12]</sup> 如果是  $\|X\|_0 \leq \text{spark}(\Theta)/2$ ，那么  $X$  必然是线性方程  $Y = \Theta X$  唯一的最稀疏解。

**定理 2.2**<sup>[12]</sup> 假设方程  $Y = \Theta X$  存在另外一个解  $\hat{X}$  且  $\|\hat{X}\|_0 \leq \text{spark}(\Theta)/2$ ，则有  $\Theta(X - \hat{X}) = 0$ 。而由  $\|X\|_0 \leq \text{spark}(\Theta)/2$  和  $\|\hat{X}\|_0 \leq \text{spark}(\Theta)/2$  可得  $\|X - \hat{X}\|_0 \leq \text{spark}(\Theta)$ ，所以  $\Theta(X - \hat{X}) = 0$  肯定不成立，假设不成立。

#### 1) 基于互相干性的唯一性

矩阵  $\Theta$  的互相干性是由矩阵中任意两个不同列向量，归一化内积最大的绝对值表示的，互相干性的数学定义如下：

$$\mu(\Theta) = \max_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} \frac{|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|}{\|\varphi_i\|_2 \|\varphi_j\|_2} \quad (2.18)$$

当互相干系数较大，矩阵任意两列的相互关联也较强。如果  $\mu(\Theta) = 1$ ，则意味着矩阵中至少包含了两个相同的列向量。如果互相干系数较小，矩阵的各个列是非相干的。正交矩阵的互相干系数为零。互相干系数为各个列向量的冗余性提供了一种可能的测度手段。

矩阵的 Spark 秩通常是很难计算的，而矩阵的互相关系数可以使我们计算 Spark 秩的下界。

**定理 2.4**<sup>[12]</sup> 对于矩阵  $\Theta$  存在  $\text{spark}(\Theta) \geq \left(1 + \frac{1}{\mu(\Theta)}\right)$

**定理2.5**<sup>[13,41]</sup> 如果线性方程  $Y = \Theta X$  有解满足  $\|X\|_0 \leq \frac{1}{2}(1 + \mu(\Theta))$ ，那么方程的解是唯一的  
最稀疏解。

## 2) 基于RIP的唯一性<sup>[12]</sup>

不论是基于 Spark 秩还是基于互相干性，方程存在唯一解的关键在于任意  $2K$  个列向量是线性无关的。回到RIP的定义可以发现如果  $\delta_{2K} < 1$ ，则意味着  $\Theta$  中任意  $2K$  个列向量是线性无关的。因此可基于RIP得到以下结论：

**定理2.6**<sup>[12]</sup> 设线性方程  $Y = \Theta X$ ， $X$  为  $K$ -稀疏信号，如果  $\Theta$  满足RIP性质且  $\delta_{2K} < 1$ ，那么问题  $X$  是式子(2.11)的解是唯一的。

由以上的分析我们可以了解到，很多情况下，最稀疏解是可以保证唯一的。因此最稀疏解必然是式子(2.11)的全局优化的结果。这些分析和结论构成了压缩采样信号重构的重要理论基础。

## 2.5 本章小结

本章概述了压缩感知的基本原理，主要包括信号的稀疏表示、观测矩阵的设计和信号的重构展开，并讨论了含噪声的压缩感知以及最稀疏解的唯一性。

## 第三章 贪婪类压缩感知算法

贪婪算法的主要特点就是计算复杂度低，可以大大简化硬件的集成度，在求解问题时，总是做出在当前看来是最好的选择，每次贪婪选择都导致最终结果是问题的一个最优解。贪婪算法的基本思想是多次迭代，从字典中选取原子，并计算相应的系数，使得这些原子的线性组合与测量样本数据之间的差别逐渐减小。贪婪类压缩感知算法具有良好的重建效果和较快的重建速度，并且算法相对稳定，本文重点研究了贪婪类压缩感知算法。

### 3.1 压缩感知算法归纳

压缩感知算法可以归纳为：

#### 1. 基追踪算法 (Basic Pursuit), LASSO, DS 等基于线性规划

基追踪方法最早由 S.S.Chen 等<sup>[4]</sup>在 1998 年提出，用于解决信号的稀疏分解。Donoho 等<sup>[53]</sup>对 BP 算法进行了改进，在模型中引入噪声，提出了基追踪去噪算法(BPDN)。算法的基本思想，都是从完备原字库中寻找信号的最稀疏表示，用最少的原子来表示信号。BP 算法利用信号在基上的投影的系数的个数作为稀疏性的度量，通过求解最小化  $l_1$  范数将原信号的重构问题转化为极值约束问题，从而可以通过线性规划求解。算法特点：可以得到准确的稀疏解，而且对于噪声干扰的抑制能力比较强，缺点就是计算复杂度高，这给硬件实现带来苦难。

#### 2. 迭代阈值算法 IHT, IST

最小  $l_1$  范数和匹配追踪类算法都没有直接针对  $l_0$  范数进行求解。为了解决这一问题，M.Fornasier 提出了迭代硬阈值算法<sup>[17]</sup>(Iterative Hard Thresholding, IHT), T.Blumensath 提出了迭代软阈值算法<sup>[63]</sup>(Iterative Soft Thresholding, IST)等，后来，T.Blumensath 又提出了加速迭代硬阈值算法<sup>[64]</sup>以解决 IHT 算法效率不高的缺陷。然而由于  $l_0$  范数的非凸特性，这类算法很容易收敛到局部最优解，而且迭代阈值法最初值极其敏感，所以在实际中很难直接应用。算法特点：可以提供准备的稀疏解，但是有一个条件就是待估计变量的稀疏度要比较高，也就是说，变量的非零个数越少，估计精度会越高，反之亦然，这种算法的计算量显然比第一类算法的计算量要简单很多。

#### 3. 贪婪类算法

贪婪算法的思想是，算法在每次迭代的过程中在原字库中选择一个与信号残差最匹配的

原子，求出新的残差值并更新原字库，然后逐步逼近，经过反复迭代，直到迭代次数达到预先设定的值或迭代残差小于给定的阈值。从而得到信号在稀疏域的近似表示。贪婪算法可以分为两类：第一类是以匹配追踪<sup>[15]</sup>，正交匹配追踪<sup>[22]</sup>为代表的算法，在信噪比较高的情况下，可以获得比较好的 MSE 估计性能，但是在信噪比不高的情况下，估计精度非常的不稳定；第二类算法是以正则化正交匹配追踪<sup>[23]</sup>和压缩采样匹配追踪<sup>[24]</sup>为代表的正则化算法，这种算法比较相对第一类算法比较稳定，而且可以获得比较准确的估计量，贪婪类算法不从整体最优加以考虑，其所做出的仅是局部最优解。

#### 4. 光滑 $l_0$ 范数算法

由于  $l_1$  范数的最优化算法得到的解有可能不是最优稀疏的表示，从根本上来说  $l_0$  范数的优化算法要比  $l_1$  范数的优化算法好，H.Mohimani 等人提出了光滑范数算法<sup>[28]</sup>(Smoothed  $l_0$ -norm, SL0)简单地说，这类算法基于凸优化的迭代算法，可以看作是另类的压缩感知算法。算法特点：估计精度高而且计算量很低；而且对于信噪比变化不是很敏感，因此可以获得稳健的稀疏估计量。

#### 5. 压缩感知其它算法

近年来，对于压缩感知的研究集中了很多专家和学者。有部分学者与数学物理方法相结合，提出了链式追踪算法<sup>[65]</sup>(Chaining Pursuit, CP)、贝叶斯压缩感知算法<sup>[66]</sup>(Bayesian Compressive Sensing, BCS)等，S.Gleichman 等在稀疏度未知的情况下，提出了盲压缩感知算法<sup>[67]</sup>(Blind Compressed Sensing, BCS)，R.G.Baraniuk 提出了基于模型的压缩感知算法<sup>[68]</sup>(Model-Based Compressed Sensing, MBCS)，这类算法能利用信号模型的结构减少测量数目及其运算复杂度，Y.C.Eldar 等人提出了块稀疏正交匹配追踪算法<sup>[69]</sup>(Block-sparse Orthogonal Matching Pursuit, BOMP)，在同样的测量次数下，能大大提高信号的重构概率，但需要预先知道块稀疏度作为先验知识，这在实际中很难获取，限制了算法的推广和应用。

### 3.2 匹配追踪算法

匹配追踪算法<sup>[15]</sup>(Matching Pursuit)使用贪婪迭代策略，和基追踪算法比较起来，计算速度要快，匹配追踪算法<sup>[15]</sup>利用最大相关匹配准则

$$\max_{\theta_j} \left| \left\langle r_{t-1}, \theta_j \right\rangle \right| \quad (3.1)$$

其中  $r_{t-1}$  是信号剩余分量， $\theta_j$  是矩阵  $\Theta$  中的第  $j$  个原子。选出与信号剩余分量  $r_{t-1}$  最匹配的原子，



在每次迭代后信号剩余分量可以分解为:

$$r_{t-1} = \langle r_{t-1}, \theta_j \rangle + r_t \quad (3.2)$$

匹配追踪算法如下:

输入:  $M \times N$  维测量矩阵  $\Phi$ 、 $M$  维观测值  $y$ 、稀疏度  $K$ ，匹配矩阵  $D_0 = \emptyset$ ，给定误差限  $\varepsilon$

- 1) 初始化:  $r^0 = y, t = 1$ ;
- 2) 找索引集  $\Lambda_t$ ，使得  $\Lambda_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,n} |\langle r_{t-1}, \Phi_j \rangle|$ ;
- 3) 更新索引集  $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$ ， $D_t = [D_{t-1}, \phi_{\lambda_t}]$ ;
- 4) 计算:  $b_t = \langle r_{t-1}, \phi_{\lambda_t} \rangle \phi_{\lambda_t}$ ， $r_t = r_{t-1} - b_t$ ;
- 5)  $t = t + 1$ ，如果  $t < K$  或者  $\|r_t\|_2 \geq \varepsilon$ ，返回 2)

输出: 索引集  $\Lambda_t$ ，重建信号  $\hat{b}$ ，余量  $r_t$ 。

### 3.3 正交匹配追踪算法

匹配追踪算法<sup>[15]</sup>中只能保证每次产生的新的剩余分量与最后确定的原子是正交的，但是不能保证与其它以选出的所有原子正交，为了解决这一缺陷，正交匹配追踪算法<sup>[22]</sup>算法在剩余分量的更新上做了一点改进，递归地对剩余分量进行施密特正交化，使得剩余分量与已选中的所有原子都是正交的，使算法更快地收敛，提高了追踪的效率。其时间复杂度约为  $O(KMN)$ 。

正交匹配追踪算法如下:

输入:  $M \times N$  维测量矩阵  $\Phi$ 、 $M$  维观测值  $y$ 、稀疏度  $K$ ，匹配矩阵  $D_0 = \emptyset$ ，给定误差限  $\varepsilon$

- 1) 初始化:  $r_0 = y$ ，索引集  $\Lambda_0 = \emptyset$ ，迭代次数  $t = 1$ ;
- 2) 找到索引集  $J_t$ ，使得  $J_t = \arg \max_{i=1,2,\dots,n} |\langle r_{t-1}, \Phi_j \rangle|$ ;
- 3) 令  $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{J_t\}$ ， $D_t = [D_{t-1}, \phi_{\lambda_t}]$ ;
- 4) 通过求解最小二乘问题得到信号的近似解:  $\hat{b} = \arg \min_b \|y - \Phi b\|_2$ ;
- 5) 计算:  $r_t = y - \Phi \hat{b}$ ;
- 6)  $t = t + 1$ ，如果  $t < K$  或者  $\|r_t\|_2 \geq \varepsilon$ ，返回 2)，依次迭代。

输出：索引集  $\Lambda_i$ ，重建信号  $\hat{b}$ ，余量  $r_i$ 。

### 3.4 分段正交匹配追踪算法

文献<sup>[14]</sup>提出了分段正交匹配追踪算法(Stagewise Orthogonal Matching Pursuit)，该算法每次对原子与残差内积施加阈值，选取内积幅值大于阈值的相应原子。该阈值与残差向量的  $l_2$  范数相关，原子选取准则如下：

$$\Lambda = \left\{ i : |g_i| > t_s \|r^{n-1}\|_2 / \sqrt{M} \right\} \quad (3.3)$$

所以 StOMP 算法<sup>[14]</sup>可以选取多个原子，因此运算速度较快。StOMP 算法比较适合大规模信号重构问题。

分段正交匹配追踪算法如下：

输入：  $M$  维观测向量  $y$ ，  $M \times N$  维测量矩阵  $\Phi$

初始化：  $r^0 = y, n=1, \Gamma^0 = \emptyset$

迭代：

- 1)  $g^n = \Phi^T r^{n-1}$  ；
- 2)  $\Lambda = \left\{ i : |g_i| > t_s \|r^{n-1}\|_2 / \sqrt{M} \right\}$  ；
- 3)  $\Gamma^n = \Gamma^{n-1} \cup \Lambda$  ；
- 4)  $x_{\Gamma^n}^n = \arg \min_{\tilde{x}} \|y - \Phi_{\Gamma^n} \tilde{x}\|, x_i^n |_{i \notin \Gamma^n} = 0$  ；
- 5)  $r^n = y - \Phi_{\Gamma^n} x_{\Gamma^n}^n$  ；
- 6) 如果终止条件满足退出，否则  $n = n + 1$ ，并重复步骤 1)。

输出：  $N$  维重构信号  $\hat{x}$

### 3.5 正则化正交匹配追踪算法

D.Needell 等人在文献中提出了正则化正交匹配追踪算法<sup>[23]</sup>(Regularized Orthogonal Matching Pursuit, ROMP)。ROMP 算法首先通过求残差与各个原子之间内积的绝对值来计算相关系数，再从所有原子中筛选出与残差内积绝对值最大的  $K$  个原子，并将它们的索引存到候选集  $\Lambda$  中以便进行原子的再次筛选。ROMP 算法采用正则化过程进行原子的再次筛选。设

$g_i = \langle \phi_i, r^{n-1} \rangle$ ，则 ROMP 算法根据下式将  $\Lambda$  中索引值对应的原子的相关系数分成若干组：

$$|g_i| \leq 2|g_j|, i, j \in \tilde{\Lambda} \quad (3.4)$$

然后选择能量最大的一组相关系数对应的原子索引值加入候选集合  $\Gamma$  中。对于没有选入支撑集的原子，正则化过程则能保证它们的能量一定远小于被选入原子的能量，是一种简单有效的原子筛选方法。经过一定的迭代得到用于信号重构的支撑集后，再采用最小二乘法进行信号逼近以及余量更新。

ROMP 算法的具体步骤如下：

输入：  $M$  维观测向量  $y$ ，  $M \times N$  维测量矩阵  $\Phi$ ，  $x$  中非零值元素数  $K$

输出：  $N$  维重构信号  $\hat{x}$

初始化：  $r^0 = y, n=1, \Gamma^0 = \emptyset, \Lambda = \emptyset$

迭代：

- 1)  $g^n = \Phi^T r^{n-1}$ ;
- 2)  $\Lambda = \{g^n \text{ 幅度的前 } K \text{ 个最大值的索引}\}$ ;
- 3) 找到  $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ ，使得  $|g_i| \leq 2|g_j|$ ，对所有  $i, j \in \tilde{\Lambda}$ ;
- 4)  $\Gamma^n = \Gamma^{n-1} \cup \tilde{\Lambda}$ ;
- 5)  $x_{\Gamma^n}^n = \arg \min_{\tilde{x}} \|y - \Phi_{\Gamma^n} \tilde{x}\|, x_{(\Gamma^n)^c}^n = 0$ ;
- 6)  $r^n = y - \Phi_{\Gamma^n} x_{\Gamma^n}^n$ ;
- 7) 若  $|\Lambda| \geq 2K$ ，则停止迭代，否则令  $n = n+1$ ，转 2)。
- 8) 如果迭代终止条件满足，则  $\hat{x} = x_{\Gamma^n}^n$ ；否则  $n = n+1$  并重复步骤 1)。

### 3.6 压缩采样匹配追踪算法

在 ROMP 算法的基础上，D.Needell 等人进一步提出了压缩采样匹配追踪算法<sup>[24]</sup>(Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP)，CoSaMP 与前面讨论的匹配追踪算法不同的是采用了一种回退策略，从候选集合删除原子。与 ROMP 算法相似，CoSaMP 需要  $K$  值已知。

CoSaMP 算法的步骤如下：

输入：  $M$  维观测向量  $y$ ，  $M \times N$  维测量矩阵  $\Phi$ ，  $x$  中非零元素数  $K$

输出:  $N$  维观测向量  $\hat{x}$ ,  $\hat{x}_{\Gamma^n} = \arg \min_{x_{\Gamma^n}} \|y - \Phi_{\Gamma^n} x_{\Gamma^n}\|_2^2$ ,  $\hat{x}$  中其它元素为零

初始化:

a)  $n = 1$ ;

b)  $\Gamma^0 = \{\Phi^T r^n \text{ 幅度前 } K \text{ 个最大值的索引}\}$ ;

c)  $r^0 = \min \|y - \Phi_{\Gamma^0} x_{\Gamma^0}\|_2^2$ ;

迭代:

1)  $g^n = \Phi^T r^{n-1}$ ;

2)  $\hat{\Gamma} = \Gamma^n \cup \{g^n \text{ 前 } 2K \text{ 个最大幅值元素的索引}\}$ ;

3)  $\hat{x}_{\hat{\Gamma}} = \arg \min_{x_{\hat{\Gamma}}} \|y - \Phi_{\hat{\Gamma}} x_{\hat{\Gamma}}\|_2^2$ ;

4)  $\tilde{\Gamma} = \{|x_{\hat{\Gamma}}| \text{ 前 } K \text{ 个最大索引值相应原子索引}\}$ ;

5)  $\tilde{r} = \min \|y - \Phi_{\tilde{\Gamma}} x_{\tilde{\Gamma}}\|_2^2$ ;

6) 如果终止条件满足则退出, 否则  $\Gamma^n = \tilde{\Gamma}, r^n = \tilde{r}, n = n + 1$ , 重复步骤 1)

### 3.7 子空间匹配追踪算法

W.Dai 等人提出了与压缩采样匹配追踪算法(CoSaMP)很相似的子空间匹配追踪算法<sup>[57]</sup> (Subspace Pursuit, SP)。和 CoSaMP 一样 SP 也采用了一种回退策略, SP 算法与 CoSaMP 算法的不同主要在支撑集的合并, SP 加入的是前  $K$  个最大幅值元素的索引而不是前  $2K$  个。

子空间匹配追踪算法如下:

输入:  $K, \Phi, y = 0$

初始化:  $T^0 = \{\Phi^* y \text{ 中的 } K \text{ 个最大系数}\}$ ,  $y_r^0 = \text{resid}(y, \Phi_{T^0})$ 。

执行  $l = 1; l = l + 1$  直到满足条件

1)  $\tilde{T}^l = T^{l-1} \cup \{\Phi^* y_r^{l-1} \text{ 中的最大 } K \text{ 个系数}\}$ ;

2)  $x_p = \Phi_{\tilde{T}^l}^+ y$ ;

3)  $T^l = \{x_p \text{ 中的最大 } K \text{ 个元素}\}$ ;

4)  $y_r^l = \text{resid}(y, \Phi_{T^l})$ ;

5) 如果  $\|y_r^l\|_2 > \|y_r^{l-1}\|_2$ , 设  $T^l = T^{l-1}$  并且退出迭代。

输出：估计信号  $\hat{x}$ ，满足  $\hat{x}_{\{1, \dots, N\}-T^l} = 0$  并且  $\hat{x}_{T^l} = \Phi_{T^l}^+ y$ 。

### 3.8 改进的正交匹配追踪算法

类似于正则化正交匹配追踪算法(ROMP)，我们将正交匹配追踪算法<sup>[22]</sup>(OMP)变形，在正交匹配追踪的基础上，在每次过程中迭代过程中，选取多个原子，引入常数  $d$ ，在每次迭代中选取原子  $j$ ，使得满足  $|h(j)| \geq \left( \max_i |h(i)| \right) / d$ ，并将其保存在集合  $\Lambda$  中。特别地，当  $d=1$  时，即为原始的正交匹配追踪算法，本文称作广义正交匹配追踪算法(Generalized OMP)。

GOMP 算法如下：

输入：观测向量  $y$ ，测量矩阵  $\Phi$ ，稀疏度  $k$ ，冗余因子  $d$ 。

初始化：  $\Lambda = \emptyset$ ，  $y_r = y$ 。

重复 3), 4) 直到  $r=0$  或者迭代  $k$  次。

- 1) 计算  $h = \Phi^T y$ ，令  $H = \max_{j \in \{1, 2, \dots, M\}} |h_j|$ ；
- 2) 选取原子集合  $I$ ，  $j \in I$ ，使得  $|h(j)| \geq H/d$ ；
- 3) 更新下标集和剩余分量：  $\Lambda = \Lambda \cup I$ ，  $\alpha' = \arg \min_{\beta} \|y_r - \Phi_{\Lambda} \beta\|$ ，  $y_r = y_r - \Phi_{\Lambda} \alpha'$ ；
- 4)  $\alpha = \Phi_{\Lambda}^+ y$ ，并且  $\Lambda = \{i : |\alpha_i| \geq |\alpha_j|, \text{ for } j \notin \Lambda\}$ ，  $|\Lambda|=k$ 。

输出：下标集  $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, M\}$ ，重构向量  $\alpha$ 。

很明显，在  $d > 1$  时，GOMP 算法在迭代过程中选取了多个原子，所以其比原始的正交匹配追踪算法<sup>[22]</sup>算法减少了运算时间，下面分析 GOMP 算法精确重构的条件，根据第二章中定理 2.3，不难得出下面的结论。

**定理 1：** 假设冗余因子  $d \geq 1$ ，测量矩阵  $\Phi$  满足  $\mu_1(k) = 1/(1+\delta)$ ，则 GOMP 算法能至多需要  $k$  次迭代，就能从  $y = \Phi \alpha$  中精确重构出  $k$ -稀疏信号。

下面给出定理的证明， $\alpha$  的支撑集记为  $\Lambda$ ，假定每次迭代过程中，选取的原子集  $I$  非空并都包含在集合  $\Lambda$  中，那么 GOMP 算法至多需要  $k$  次迭代就可以重构  $\alpha$ 。

利用归纳法，假设 GOMP 在前  $l-1$  次迭代中已成功选取支撑集  $\Lambda$ ，并且剩余分量不为 0。用  $y_r$  和  $\tilde{\alpha}$  分别表示剩余分量和  $\alpha$  的估计值，令  $i_0 = \arg \max_{i \in \Lambda} |\tilde{\alpha}_i|$ ， $H = \max_i |\langle y_r, \phi_i \rangle|$ 。则对于  $j \in \Lambda$

$$\left| \langle y_r, \phi_j \rangle \right| \geq \left| \alpha_{i_0} \right| \left( 1 - \sum_{i \in \Lambda - \{j\}} \left| \langle \phi_i, \phi_j \rangle \right| \right) > [1 - 1/(1 + \delta)] \left| \alpha_{i_0} \right| \quad (3.5)$$

对于  $j \notin \Lambda$ ,

$$\left| \langle y_r, \phi_j \rangle \right| \leq \left| \alpha_{i_0} \right| \sum_{i \in \Lambda} \left| \langle \phi_i, \phi_j \rangle \right| < \frac{\left| \alpha_{i_0} \right|}{1 + \delta} \quad (3.6)$$

如果  $\left| \langle y_r, \phi_j \rangle \right| \geq H/\delta$ , 则

$$\left| \langle y_r, \phi_j \rangle \right| \geq \frac{1}{\delta} \max_{j \in \Lambda} \left| \langle y_r, \phi_j \rangle \right| \geq \frac{1}{1 + \delta} \left| \alpha_{i_0} \right| > \max_{j \notin \Lambda} \left| \langle y_r, \phi_j \rangle \right| \quad (3.7)$$

所以有

$$I = \left\{ j : \left| h_j \right| \geq \frac{1}{2} \max_i \left| h_i \right| \right\} \subseteq \Lambda \quad (3.8)$$

据此可以推断 GOMP 在第  $l$  次迭代中, 也能够确定支撑集  $\Lambda$ 。

### 3.9 仿真与分析

为了测试 OMP、ROMP、CoSaMP、SP、StOMP 和 GOMP 算法的算法性能, 利用蒙特卡罗模拟方法<sup>[71]</sup>进行仿真分析, 本文下面的所有仿真结果都是在 Windows XP 操作系统、内存 2GB、CPU 为 Intel 2GHz, 软件为 Matlab R2009b 的平台上进行仿真的。

仿真算法步骤如下:

- 1) 固定信号长度  $N = 256$ , 观测样本数目  $M = 128$  或者稀疏度  $K = 30$ ;
- 2) 产生稀疏度为  $K$  的  $[1, -1]$  随机信号  $x$ , 其中  $\|x\|_0 = K$ ;
- 3) 重复下面步骤 300 次
  - a) 产生随机高斯观测矩阵  $\Phi \in R^{M \times N}$  (均值为 0, 方差为 1);
  - b) 获得测量样本值  $y = \Phi x$ ;
  - c) 使用上述压缩感知算法进行重构;
  - d) 利用  $|\hat{x} - x| < 10^{-6}$  作为判断是否能够精确重构;
  - e) 统计精确重构的次数  $T$ ;
- 4) 计算精确重构的概率  $T/\text{time}$ 。
- 5) 选取不同的稀疏度  $K$  或者观测样本数目  $M$ , 重做。

下面各图均为信号长度为 256, 观测样本数目为 128, 稀疏度为 25 的稀疏信号, 重构误

差计算公式为 $|\hat{x} - x|/|x|$ ，采用不同的算法重构信号。

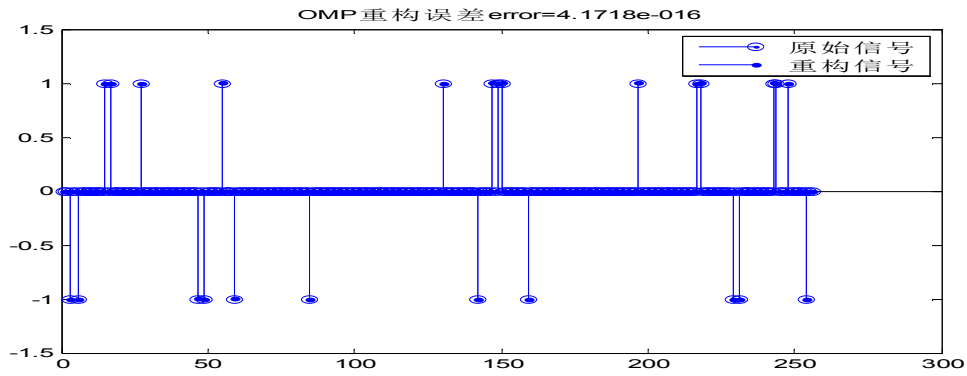


图 3.1  $N = 256$ ， $M = 128$ ， $K = 25$  时，OMP 算法的重构效果

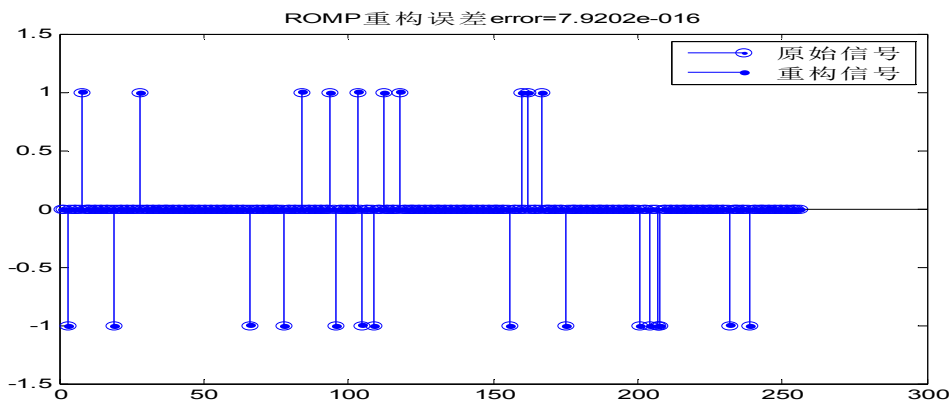


图 3.2  $N = 256$ ， $M = 128$ ， $K = 25$  时，ROMP 算法的重构效果

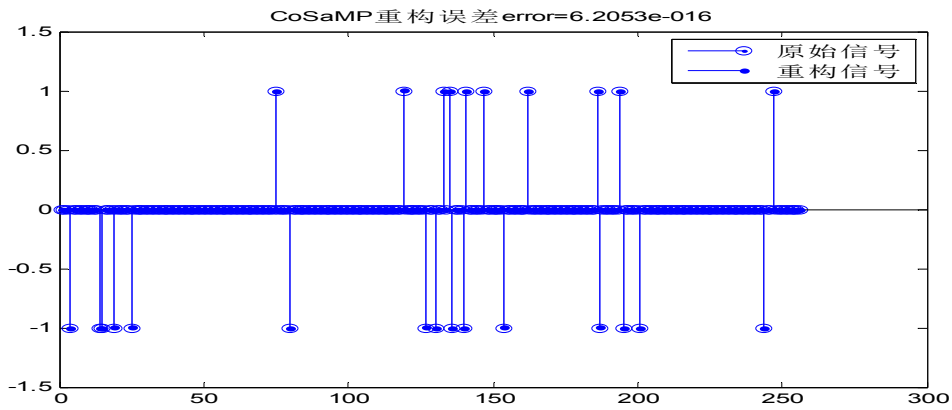
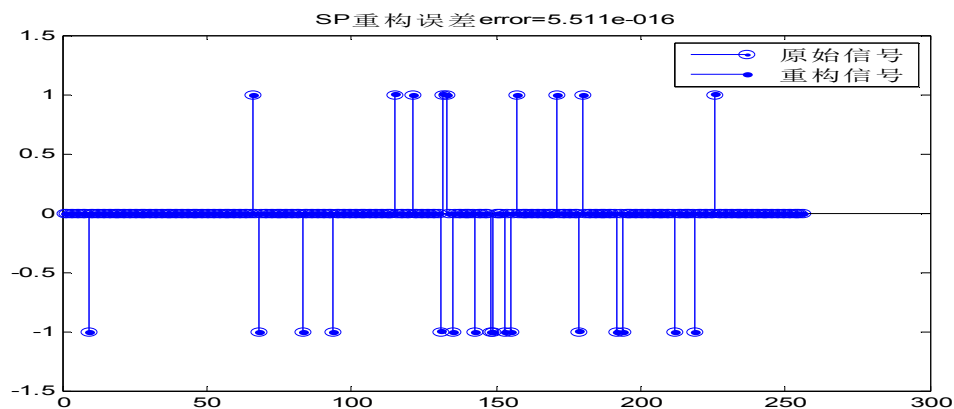
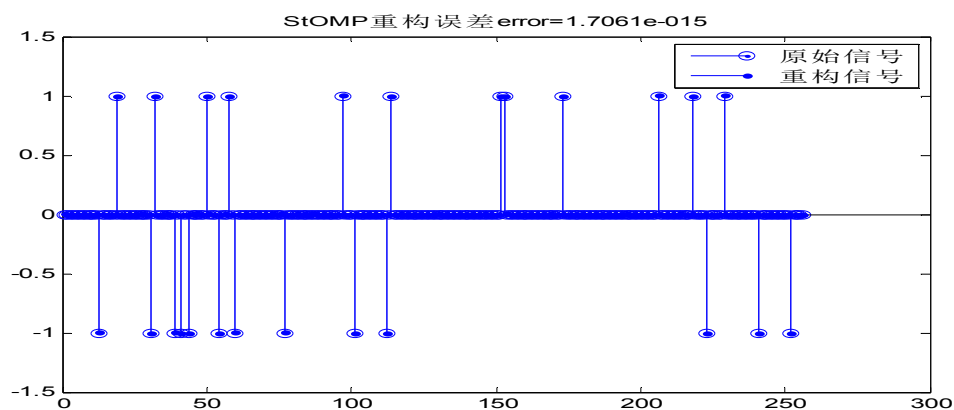
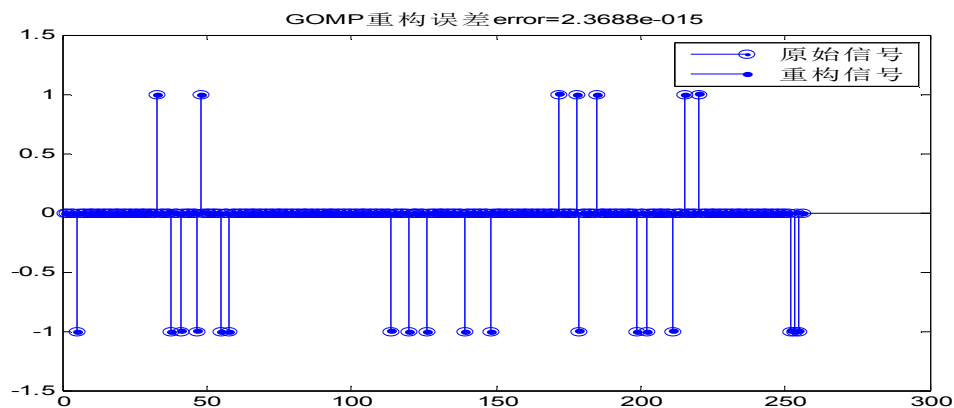


图 3.3  $N = 256$ ， $M = 128$ ， $K = 25$  时，CoSaMP 算法的重构效果

图 3.4  $N = 256$ ,  $M = 128$ ,  $K = 25$  时, SP 算法的重构效果图 3.5  $N = 256$ ,  $M = 128$ ,  $K = 25$  时, StOMP 算法的重构效果图 3.6  $N = 256$ ,  $M = 128$ ,  $K = 25$  时, GOMP 算法的重构效果

从图 3.1-3.6 可以看出, 在充分多的测量样本值下, 各种算法均能精确重构出原始信号, 为了进一步比较各种算法之间的重构效果和信号稀疏度以及测量样本数目之间的关系, 再次采用稀疏的  $[1, -1]$  随机信号, 设定  $N = 256$ , 改变信号的稀疏度和观测次数, 比较稀疏度和精确重构概率的关系时, 设定观测样本数目  $M = 128$ , 比较观测样本数目和精确重构概率关系时, 设定稀疏度为  $K = 30$ , 利用本小节开始提到的蒙特卡罗模拟方法, 重复试验 300 次进行仿真分析。



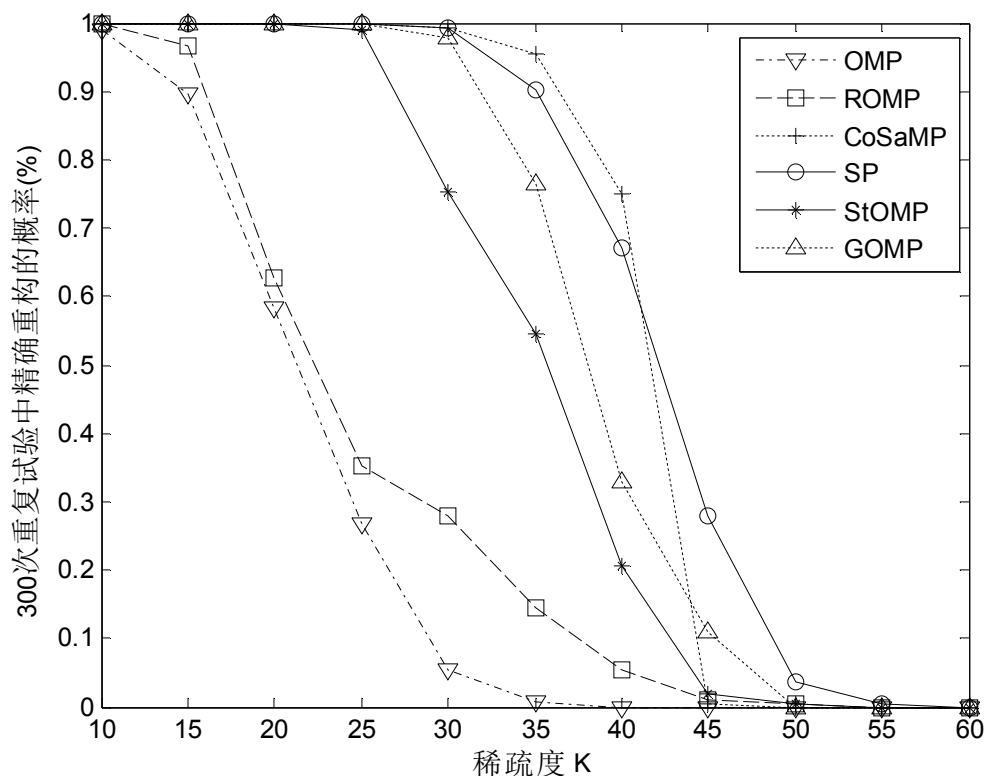


图 3.7 贪婪类压缩感知算法在不同稀疏度下的精确重构结果比较

从图 3.7 的仿真结果可以看出，当测量样本数目一定时，随着信号稀疏度的增加，信号精确重构的概率逐渐减小，在信号很稀疏的情况下，各种算法均能以很高的概率精确重构原信号。随着稀疏度的增加，OMP 和 ROMP 精确重构的概率迅速减小，而 CoSaMP 和 SP 算法则以相对较高的概率精确重构原信号。

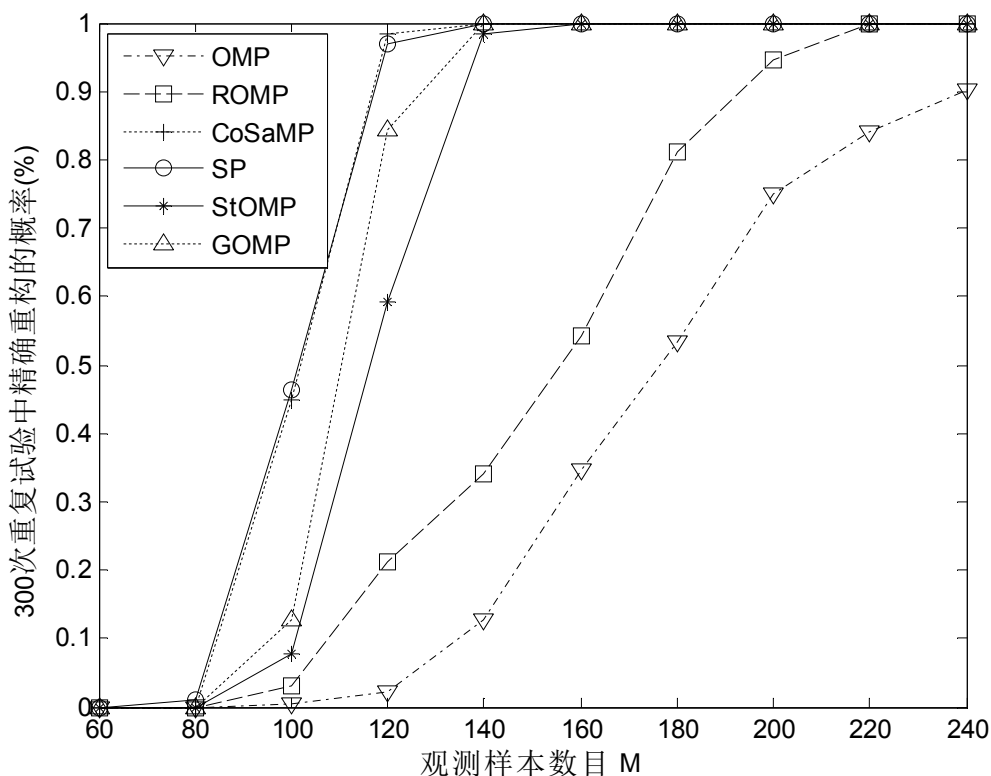


图 3.8 贪婪类压缩感知算法在不同观测样本下精确重构结果比较

图 3.8 显示了当稀疏度一定的时候，在不同的观测样本值下，各种算法的精确重构概率，仿真结果显示随着观测样本数目的增多，精确重构原始信号的概率逐渐增大，CoSaMP 和 SP 算法精确重构原信号所需的观测样本数目相对较少，但在同等稀疏度或者观测样本数目下，改进的 OMP 算法信号重构效果明显好于 OMP 算法，但是 OMP 算法复杂度较低，且较为稳定。

### 3.10 本章小结

本章对压缩感知的重构算法作了总结，主要对贪婪类的压缩感知算法重点概述。在此基础上，提出改进的 OMP 算法，即广义正交匹配算法，并对这类压缩感知算法的性能进行了数值分析，给出了在不同稀疏度下，不同观测样本数目下，各种算法精确重构原信号的概率。

## 第四章 压缩感知在椒盐去噪中的应用

随着科技的进步，数字图像在获取和传输过程中会引入噪声。由于噪声会影响对原图像的识别，这就需要对含噪声的图像进行修复，恢复原图像，获取原图像的信息。通过去噪，可以提高图像的峰值信噪比，增强图像的可识别性。

### 4.1 图像去噪

图像在形成和传输过程中，不可避免受到各种噪声干扰，其中椒盐噪声是主要的噪声之一。椒盐噪声又称脉冲噪声，这种噪声表现的特点是噪声点总是黑点或者是白点，椒盐噪声是由采集设备的精度、图像传感器、传输信道和解码处理等产生的，类似于胡椒和盐粉的微粒，严重影响了图像的识别，因此，有效去除椒盐噪声具有重要理论和实际意义。由于椒盐噪声的特点是只破坏了噪声点的图像结构，其余大部分的结构都是完整的，而且噪声点是随机分布的，我们可以根据这部分精确的数据，利用其在变换域上的稀疏特性，求解一个优化问题，重构原图像，所以适用于压缩感知原理进行求解。

近年来，随着科技的发展和理论的逐步深入，产生了大量的新去噪算法，其中包括基于小波理论的去噪算法、基于神经网络的去噪算法和基于遗传算法的去噪算法等。

### 4.2 常见的去噪算法

到目前为止，已经有大量的关于图像去噪的论文，这些论文中的去噪算法大体上可以分为两类：在空间域去噪和在变换域去噪。空间域去噪是指在原图上直接进行数据运算，对像素的灰度值进行处理。而空间域去噪算法又可以分为两种：点运算和局部运算。点运算是指对图像进行逐点运算；局部运算是指在与处理像素点域有关的空间上进行运算。变换域去噪是指在变换域上进行处理，一般常用的变换域有频域、小波域等，变换域去噪是将原信号变换到变换域中进行处理，最后通过反变换到原信号，从而达到去噪的目的。

#### 4.2.1 空间域去噪算法

##### 1. 邻域平均去噪法

设一副图像  $f(x, y)$  为  $N \times N$  的阵列，去噪后的图像为  $g(x, y)$ ，它的像素值的灰度由包含

$(x, y)$  邻域的几个像素的灰度的平均值决定。

一般采用阈值法来减少邻域过大而造成图像模糊的现象，去噪准则如下：

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{(i,j) \in S} f(i, j), & \left| f(x, y) - \frac{1}{M} \sum_{(i,j) \in S} f(i, j) \right| > T \\ f(x, y), & \text{其它} \end{cases} \quad (4.1)$$

式中  $T$  是一个规定的阈值。

这种去噪算法实际上相当于低通滤波器，因此能够有效地去除由噪声引起的灰度值的尖锐变换，但是由于图像的细节和边缘也表现为图像灰度值的尖锐变换，所以算法在图像细节和边缘存在缺陷。

## 2. 中值滤波去噪法

中值滤波是一种非线性滤波，是将一个模板内的所有像素值进行排列，选取中间的像素值。它在实际运算中不需要图像的统计特性，所以比较方便。在一定的条件下，可以克服线性滤波所带来的图像细节模糊，保持图像中的细节部分。

中值滤波去噪就是在一个滑动的窗口中，选定某个像素位作为模板中心，将模板下对应的个像素灰度值按从小到大的顺序排列，用排序的中间值代替中心像素的灰度值。

设一个二维的大小为  $M \times N$  的图像，用大小为  $m \times n$  的窗口对该图像进行中值滤波，将窗口内的像素按灰度值从小到大排成序列  $\{X_{p1,q1}, X_{p2,q2}, \dots, X_{pm,qn}\}$ ，则输出值等于  $X_{(m+1)/2, (n+1)/2}$ 。

如果是对二维序列进行中值滤波去噪，滤波窗口可以有很多种不同的形状，如线状、方形、圆形、十字形等。二维数据的中值滤波可以用数学公式表示为：

$$Y_{ij} = \text{Med}_A \{X_{ij}\}, A \text{ 为滤波窗口} \quad (4.2)$$

例如，假设在一个  $3 \times 3$  的邻域内，像素的灰度值如下：(11, 21, 21, 16, 22, 26, 21, 21, 101)，将灰度值按从小到大的顺序排列：(11, 16, 21, 21, 21, 21, 22, 26, 101)，最后得到该邻域像素灰度值为 21，易知，中值滤波的主要功能就是使那些临近像素显著不同的像素具有与其临近像素更加相似的灰度值，从而可以消除图像的孤立点噪声。

在实际使用窗口时，其尺度大小一般先用  $3 \times 3$ 、 $5 \times 5$  或  $7 \times 7$  逐渐增大，直到其滤波效果到可以识别为止。与平均滤波相比，中值滤波从整体上来说，能较好地保留原图像中的尖锐部分。

### 4.2.2 变换域去噪算法

变换域去噪算法主要利用有用信号和噪声信号在变换域表现出的不同特征来去除噪声，将图像从空间域转换到变换域，再对变换域中的变换系数进行处理，再进行反变换将图像从变换域转换到空间域。进行变换后的信号系数特征分布明显，许多在空间域中没法去除噪声的信号，转换到变换域中可以有效地去除噪声。

常用的算法基于傅里叶变换的去噪算法、以及基于小波变换的去噪算法。

#### 1. 基于傅里叶变换的去噪算法

傅里叶变换的去噪算法，是利用图像经过傅里叶变换后，噪声主要分布于较小的系数中。通过设定阈值达到去噪的目的，该算法虽然能够有效地去除高频噪声但同时也模糊了图像的边缘和细节。

对于二维傅里叶变换，采用卷积定理，可以得到：

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \quad (4.3)$$

式中， $F(u, v)$  是含噪声图像的傅里叶变换， $G(u, v)$  是平滑后图像的傅里叶变换， $H(u, v)$  是低通滤波器传递函数。利用  $H(u, v)$  使  $F(u, v)$  的高频分量得到衰减，得到  $G(u, v)$  后再经过反变换就得到所希望的图像  $g(x, y)$  了。

常用的滤波器有巴特沃斯低通滤波器，它的通带与阻带之间没有明显的不连续性，因而空域响应没有“振铃”现象发生，一个  $N$  阶巴特沃斯的传递函数为：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}} \quad (4.4)$$

#### 2. 基于小波变换的去噪算法

由 Donoho 提出的小波阈值去噪算法<sup>[59,60,61]</sup>，小波阈值去噪是依据小波变换具有很强的相关性，信息经过小波变换后能量主要集中在较大的小波系数上，噪声小波系数的幅值要小于信号小波系数的幅值，所以可以认为幅值较小的系数是噪声。因此，可以设定一个阈值，保留较大的小波系数，而将较小的小波系数过滤掉，从而达到阈值去噪的目的。

假设原图像为  $S$ ， $Z$  为服从  $N(0, \sigma^2)$  的高斯白噪声，则含噪图像  $G$  为：

$$G = S + Z \quad (4.5)$$

目的是通过观察值  $G$  找出原始图像  $S$  的估计值  $\hat{S}$ 。

小波阈值去噪的步骤：

(1) 对含噪图像  $G$  进行二维小波变换, 得到小波系数矩阵  $W(G) = W(S) + W(Z)$ 。

(2) 利用阈值函数对小波变换后的矩阵  $W(G)$  进行阈值处理, 得到处理后的小波系数矩阵, 记为  $\hat{W}(G)$ 。

(3) 利用  $\hat{W}(G)$  进行小波重构, 得到变换后的图像  $\hat{S}$ , 即为去噪后的图像。

常用的阈值函数有硬阈值函数和软阈值函数两种<sup>[59,60]</sup>:

(1) 硬阈值函数定义为

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \omega_{j,k}, & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (4.6)$$

(2) 软阈值函数定义为

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{j,k}) (|\omega_{j,k}| - \lambda), & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (4.7)$$

### 4.3 阶梯观测矩阵的设计

观测矩阵的设计对信号的重构具有重要影响<sup>[9]</sup>, 在传统的压缩感知理论下, 观测矩阵与稀疏基的相关性越小, 进行压缩采样所需要的观测数越少, 一般的求解(2.2)式都是通过最优化  $l_1$  范数来重构信号, 但计算复杂度较高, 本文给出了一种最优化对偶内点法<sup>[62]</sup>, 采用了一种阶梯型的观测矩阵。

#### 4.3.1 非对称形式的对偶

将(2.2)式转化为具有等式约束的线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

为了利用对偶的定义, 先把(4.8)式写成等价形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中,  $c^T = (1, 1, \dots, 1)$ ,  $A = \Theta$ ,  $b = Y$ ,  $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 。根据非对称对偶的定义, 上式的对偶问题是:

$$\begin{aligned} \max \quad & ub - vb \\ \text{s.t.} \quad & uA - vA \leq c \\ & u, v \geq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

令  $w = u - v$ , 得到

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T w \\ \text{s.t.} \quad & A^T w \leq c \end{aligned} \quad (4.11)$$

### 4.3.2 对偶问题的最优解

对偶内点法<sup>[62]</sup>的基本思路是从内点  $w^{(0)}$  出发, 沿可行方向求出目标函数值的后继点, 再沿另外一个可行方向求使目标函数值上升的内点。重复这一步骤, 产生一个由内点组成的序列  $\{w^{(k)}\}$ , 使得:

$$b^T w^{(k+1)} > b^T w^{(k)} \quad (4.12)$$

当满足终止准则时, 则停止迭代。这种方法的关键是选择使目标函数值上升的可行方向。

首先引进松弛变量, 把线性规划(4.11)写成

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T w \\ \text{s.t.} \quad & A^T w + \theta = c \\ & \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

在第  $k$  次迭代中, 定义  $\theta^{(k)}$  为非负松弛变量构成的  $n$  维向量, 使得

$$\theta^{(k)} = c - A^T w^{(k)} \quad (4.14)$$

再定义对角矩阵

$$D_k = \text{diag} \left( \frac{1}{\theta_1^{(k)}}, \dots, \frac{1}{\theta_n^{(k)}} \right) \quad (4.15)$$

作仿射变换, 令

$$\sigma = D_k \theta \quad (4.16)$$

把线性规划问题改写成

$$\begin{aligned}
& \max \quad b^T w \\
& s.t. \quad A^T w + D_k^{-1} \sigma = c \\
& \quad \sigma \geq 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

在变换的空间中，选择搜索方向

$$d = \begin{bmatrix} d_w \\ d_\sigma \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

很容易知道， $d$  作为可行方向，它必是下列齐次方程的一个解

$$D_k A^T d_w + d_\sigma = 0 \tag{4.19}$$

对于(4.19)式的任一解，有

$$AD_k (D_k A^T d_w + d_\sigma) = 0 \tag{4.20}$$

由此得到

$$d_w = - (AD_k^2 A^T)^{-1} AD_k d_\sigma \tag{4.21}$$

每次迭代中，目标函数在  $d_w$  方向的方向导数是

$$b^T d_w \tag{4.22}$$

把(4.21)式代入(4.22)式，则有

$$b^T d_w = b^T \left[ - (AD_k^2 A^T)^{-1} AD_k d_\sigma \right] = - \left[ D_k A^T (AD_k^2 A^T)^{-1} b \right]^T d_\sigma \tag{4.23}$$

选择  $d_\sigma$ ，使得  $b^T d_w$  最大，则

$$d_\sigma = -D_k A^T (AD_k^2 A^T)^{-1} b \tag{4.24}$$

由(4.24)式确定  $d_\sigma$  后，可以得到(4.19)式的一个解，其中

$$d_w = (AD_k^2 A^T)^{-1} b \tag{4.25}$$

同时，对  $d_\sigma$  作逆仿射变换，可得到

$$d_\theta = D_k^{-1} d_\sigma = -A^T (AD_k^2 A^T)^{-1} b = -A^T d_w \tag{4.26}$$

搜索方向确定后，还需要确定沿此方向移动的步长。设后继点

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} + \lambda d_w \tag{4.27}$$

步长  $\lambda$  的取值应保证  $w^{(k+1)}$  为可行域的内点，即满足

$$A^T (w^{(k)} + \lambda d_w) < c \tag{4.28}$$



将(4.26)的结论代入可以得到

$$-\lambda d_\theta < \theta^{(k)} \quad (4.29)$$

令

$$\xi = \min \left\{ \frac{\theta_i^{(k)}}{-(d_\theta)_i} \mid (d_\theta)_i < 0, i \in \{1, \dots, n\} \right\} \quad (4.30)$$

取  $\lambda = \gamma \xi$ ，其中  $\gamma \in (0, 1)$ 。这样即可以从  $w^{(k)}$  出发沿方向  $d_w$ ，求使得目标函数上升的内点  $w^{(k+1)}$ 。

### 4.3.3 对偶内点法算法步骤

- (1) 给定初始内点  $w^{(0)}$ ，参数  $\gamma \in (0, 1)$ ，容许限  $\varepsilon > 0$ ，置  $k = 0$ 。
- (2) 计算  $\theta^{(k)} = c - A^T w^{(k)}$ 。
- (3) 置对角矩阵  $D_k = \text{diag} \left( \frac{1}{\theta_1^{(k)}}, \dots, \frac{1}{\theta_n^{(k)}} \right)$ 。
- (4) 计算可行方向  $d_w = (AD_k^2 A^T)^{-1} b$ 。
- (5) 作逆仿射变换，令  $d_\theta = -A^T d_w$ 。
- (6) 计算步长，令  $\lambda = \gamma \cdot \min \left\{ \frac{\theta_i^{(k)}}{-(d_\theta)_i} \mid (d_\theta)_i < 0, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$ 。
- (7) 设后继点  $w^{(k+1)} = w^{(k)} + \lambda d_w$ 。
- (8) 若  $\left| b^T w^{(k+1)} - b^T w^{(k)} \right| / \left| b^T w^{(k)} \right| < \varepsilon$ ，则停止计算， $w^{(k+1)}$  即为近似解。
- (9) 否则，置  $k = k + 1$ ，返回步骤(2)。

当可行域存在内点时，可用下列方法求初始内点。

首先，从原点出发，沿目标函数的梯度方向  $b$  取一点，令

$$w^{(0)} = (\|c\| / \|A^T b\|) b \quad (4.31)$$

如果  $\theta^{(0)} = c - A^T w^{(0)} > 0$ ，则取  $w^{(0)}$  作为初始内点。否则，解下列一阶段线性规划问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T w - M w_a \\ \text{s.t.} \quad & A^T w - w_a e \leq c \end{aligned} \quad (4.32)$$

其中  $M$  是大的正数， $e = (1, 1, \dots, 1)^T$  是分量全为 1 的  $n$  维列向量， $w_a$  是人工变量。

根据  $\theta^{(0)}$  的定义, 如果令

$$w_a^{(0)} > \left| \min \{ \theta_i^{(0)} \mid i = 1, \dots, n \} \right| \quad (4.33)$$

则有  $A^T w^{(0)} - w_a^{(0)} e \leq c$ 。因此  $(w^{(0)}, w_a^{(0)})$  必为线性问题(4.32)的可行域的内点, 这样, 可从此内点出发, 用上述算法求解对偶问题的近似解。

设该算法产生由内点组成的序列  $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(t)}$ 。有了对偶问题的解  $w^{(t)}$ , 就可以计算原始问题的解:

$$x^{(t)} = D_k^2 A^T (A D_k^2 A^T)^{-1} b \quad (4.34)$$

根据对偶理论, 若满足下列条件

$$\begin{cases} Ax^{(t)} = b \\ x^{(t)} \geq 0 \\ x_j^{(t)} \theta_j^{(t)} = 0, j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.35)$$

则  $x^{(t)}$  和  $w^{(t)}$  分别是(4.8)和(4.11)的最优解。

#### 4.3.4 阶梯观测矩阵的合理性

根据(4.9)式和(4.34)式, 有

$$\begin{pmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \end{pmatrix} = x^{(k)} = D_k^2 A^T (A D_k^2 A^T)^{-1} b \quad (4.36)$$

设  $s^*$  是原问题(4.8)的最优稀疏解, 由于  $D_k$  为对角矩阵, 可以令

$$D_k^2 = \begin{pmatrix} D_\alpha & 0 \\ 0 & D_\beta \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

则(4.36)式可以表示为

$$\begin{pmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\alpha & 0 \\ 0 & D_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta^T \\ -\Theta^T \end{pmatrix} (\Theta D_\alpha \Theta^T + \Theta D_\beta \Theta^T)^{-1} \Theta s^* \quad (4.38)$$

令对角矩阵

$$D_\eta = D_\alpha + D_\beta \quad (4.39)$$

则(4.38)式可以化简为

$$\begin{pmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\alpha \Theta^T (\Theta D_\eta \Theta^T)^{-1} \Theta s^* \\ -D_\beta \Theta^T (\Theta D_\eta \Theta^T)^{-1} \Theta s^* \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

令矩阵

$$E = \Theta^T (\Theta D_\eta \Theta^T)^{-1} \Theta \quad (4.41)$$

则有

$$\begin{pmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\alpha E s^* \\ -D_\beta E s^* \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

由(4.42)式可以知道, 重构系数  $\hat{x} = u^{(k)} - v^{(k)}$  与测量矩阵  $\Theta$  是密切相关的, 而测量矩阵  $\Theta$  又是由观测矩阵  $\Phi$  和稀疏基  $\Psi^{-1}$  构成, 由于图像在离散余弦基下近似稀疏的, 并且离散余弦基具有正交性, 在图像处理中经常选取 DCT 基作为稀疏基。从(4.42)式不难看出,  $D_\alpha$  和  $D_\beta$  都是对角矩阵, 如果要是  $E = \Theta^T (\Theta D_\eta \Theta^T)^{-1} \Theta$  也是对角矩阵的话, 那么最优稀疏解  $s^*$  中的 0 元素就和重构系数  $\hat{x} = u^{(k)} - v^{(k)}$  一一对应, 下面将讨论怎么使  $E$  为对角矩阵。

不失一般性, 特别地, 令  $D_\eta$  为单位阵, 由测量矩阵  $\Theta = \Phi \Psi^{-1}$ , 得

$$E = (\Phi \Psi^{-1})^T \left[ \Phi \Psi^{-1} (\Psi^{-1})^T \Phi^T \right]^{-1} (\Phi \Psi^{-1}) = (\Phi \Psi^{-1})^T (\Phi \Phi^T)^{-1} (\Phi \Psi^{-1}) \quad (4.43)$$

要使得  $E$  为对角矩阵, 要是

$$\Phi \Phi^T = I \quad (4.44)$$

则  $E = (\Phi \Psi^{-1})^T (\Phi \Psi^{-1})$ 。对(4.44)式分别左乘  $\Psi^T$  和右乘  $\Psi$ , 得到

$$\Phi^T \Phi = \Psi^T E \Psi \quad (4.45)$$

要使得能同时满足(4.44)式和(4.45)式, 当观测矩阵是单位矩阵  $\Phi = I$  时上式显然成立, 但是观测矩阵行数要远小于列数  $M < N$ , 在这一基础上, 上述方法设计一种阶梯观测矩阵, 即单位矩阵删掉某些行。

下面以  $N = 8$  为例, 验证阶梯观测矩阵的合理性。

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

根据 DCT 基的定义,  $N=8$  时

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0.3536 \\ 0.4904 & 0.4157 & 0.2778 & 0.0975 & -0.0975 & -0.2778 & -0.4157 & -0.4904 \\ 0.4619 & 0.1913 & -0.1913 & -0.4619 & -0.4619 & -0.1913 & 0.1913 & 0.4619 \\ 0.4157 & -0.0975 & -0.4904 & -0.2778 & 0.2778 & 0.4904 & 0.0975 & -0.4157 \\ 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 \\ 0.2778 & -0.4904 & 0.0975 & 0.4157 & -0.4157 & -0.0975 & 0.4904 & -0.2778 \\ 0.1913 & -0.4619 & 0.4619 & -0.1913 & -0.1913 & 0.4619 & -0.4619 & 0.1913 \\ 0.0975 & -0.2778 & 0.4157 & -0.4904 & 0.4904 & -0.4157 & 0.2778 & -0.0975 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

很容易计算  $\Phi\Phi^T = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

再计算  $E = (\Phi\Psi^{-1})^T (\Phi\Psi^{-1})$

$$\begin{pmatrix} 0.7500 & 0 & 0.1353 & 0 & 0.2500 & 0 & -0.3266 & 0 \\ 0 & 0.8457 & 0 & 0.2724 & 0 & -0.0542 & 0 & -0.2310 \\ 0.1353 & 0 & 0.9268 & 0 & -0.1353 & 0 & 0.1768 & 0 \\ 0 & 0.2724 & 0 & 0.5190 & 0 & 0.0957 & 0 & 0.4077 \\ 0.2500 & 0 & -0.1353 & 0 & 0.7500 & 0 & 0.3266 & 0 \\ 0 & -0.0542 & 0 & 0.0957 & 0 & 0.9810 & 0 & -0.0811 \\ -0.3266 & 0 & 0.1768 & 0 & 0.3266 & 0 & 0.5732 & 0 \\ 0 & -0.2310 & 0 & 0.4077 & 0 & -0.0811 & 0 & 0.6543 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

从式(4.49)可以看出, 矩阵能量大部分集中在对角线元素上, 是一个弱对角占优矩阵(除最后一行元素外), 由对偶内点法迭代得到原问题解  $\begin{pmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\alpha Es^* \\ -D_\beta Es^* \end{pmatrix}$ ,  $D_\alpha$ ,  $D_\beta$  及  $D_\eta$  均为对角矩阵, 从而阶梯观测矩阵的设计能够很好地保证重构系数中 0 系数的准确性。

根据(2.7)式定义的相干性系数, 计算结果显示阶梯观测矩阵下的相干系数为 1.3870, 而随机观测矩阵下的相干系数为 6.7321, 远小于随机观测矩阵下的相干系数, 从而验证了阶梯观测矩阵的合理性。

## 4.4 椒盐去噪算法

设  $\tilde{x}$  是希尔伯特空间上的信号，

$$\tilde{x} = x + n \quad (4.50)$$

其中  $x$  是干净信号， $n$  是噪声。给定两个合适的稀疏表示基  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$ ，可以将  $\tilde{x}$  表示为

$$\tilde{x} = x + n = \Phi_1 c_1 + \Phi_2 c_2 = (\Phi_1 | \Phi_2)(c_1 | c_2)^T \quad (4.51)$$

那么问题就可以转化为求解一个欠定的线性系统，为了能精确重构原始向量  $(c_1 | c_2)^T$ ，由

$$x = \Phi_1 c_1, n = \Phi_2 c_2 \quad (4.52)$$

原问题转化为求解最小化

$$\min_{c_1, c_2} \|c_1\|_0 + \|c_2\|_0 \quad s.t. \quad \tilde{x} = (\Phi_1 | \Phi_2)(c_1 | c_2)^T \quad (4.53)$$

由于求解 (4.53) 式是一个 NP 问题，在一定的条件下<sup>[11]</sup>，可以转换为最小化  $l_1$  范数

$$\min_{c_1, c_2} \|c_1\|_1 + \|c_2\|_1 \quad s.t. \quad \tilde{x} = (\Phi_1 | \Phi_2)(c_1 | c_2)^T \quad (4.54)$$

假设  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  是帕斯维尔 (Parseval) 框架<sup>[76]</sup>，那么 (4.10) 式可以写为

$$x = \Phi_1 (\Phi_1^* x), n = \Phi_2 (\Phi_2^* n) \quad (4.55)$$

这导致了下面对  $l_1$  范数的分析，这个新的最小化问题可以被认为是混合  $l_1 - l_2$  问题<sup>[77]</sup>，这种在分析层面的最小化方法称为联合稀疏性<sup>[76]</sup>

$$\arg \min_{x, n} \|\Phi_1^* x\|_1 + \|\Phi_2^* n\|_1 \quad s.t. \quad \tilde{x} = x + n \quad (4.56)$$

利用阶梯型观测矩阵良好的 0 系数定位能力，给出基于正交匹配追踪算法<sup>[22]</sup>的椒盐去噪重构算法如下：

输入：含噪图像  $Z$ ，给定误差限  $\varepsilon$

- 1) 噪声数据检测采样  $y$ ，如果是检测为噪声点，则予以剔除，非噪声点则予以保留；
- 2) 根据 1) 中剔除的噪声点位置，设计阶梯型观测矩阵；
- 3) 使用正交匹配追踪法重构；
- 4) 初始化：  $r_0 = y$ ，索引集  $\Lambda_0 = \emptyset$ ，迭代次数  $t = 1$ ；
- 5) 找到索引集  $J_t$ ，使得  $J_t = \arg \max_{i=1,2,\dots,n} |\langle r_{t-1}, \Phi_j \rangle|$ ；
- 6) 令  $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{J_t\}$ ；

7) 通过求解最小二乘问题得到信号的近似解:  $\hat{b} = \arg \min_b \|y - \Phi b\|_2$ ;

8) 计算:  $r_t = y - \Phi \hat{b}$ ;

9)  $t = t + 1$ , 如果  $t < K$  或者  $\|r_t\|_2 \geq \varepsilon$ , 返回 2), 依次迭代。

输出: 索引集  $\Lambda_t$ , 重建信号  $\hat{b}$ , 余量  $r_t$ 。

## 4.5 基于压缩感知的椒盐去噪

椒盐噪声是图像处理中十分常见的一种噪声, 椒盐噪声是指两种噪声, 一种是白色盐噪声, 其像素值为 255, 另一种是黑色胡椒噪声, 其像素值为 0, 一般两种噪声同时出现, 呈现在图像上就是黑白杂点。椒盐噪声的特点是噪声点均匀分布于整幅图像, 由于椒盐噪声只破坏了部分的图像结构, 其他大部分的图像数据都是精确的, 可以利用这部分精确的数据, 通过求解最优化问题, 重构原图像, 分布于图像中的噪声个数占像素总数的百分比称为噪声密度。

在传统去噪模型  $\min \|X\|$  *subject to*  $\|\Phi X - Y\|_2 \leq \varepsilon$  下, 本文提出了一种椒盐噪声检测的采样, 利用阶梯观测矩阵良好的 0 稀疏定位能力。利用 OMP 算法的低复杂性和稳定性, 实验过程中使用 OMP 算法作为例子对信号进行重构, 其他算法重构类似。

算法步骤:

(1) 已知原始含噪图像  $Z$ 。

(2) 噪声检测采样, 设计阶梯观测矩阵, 首先检测  $Z$  中噪声所在位置, 然后删除对应的行作为阶梯观测矩阵  $\Phi_Z$ 。

(3) 利用 DCT 基作为稀疏变换基。

(4) 实验采用 OMP 算法作为例子进行重构, 其他算法类似。

算法流程图如下:

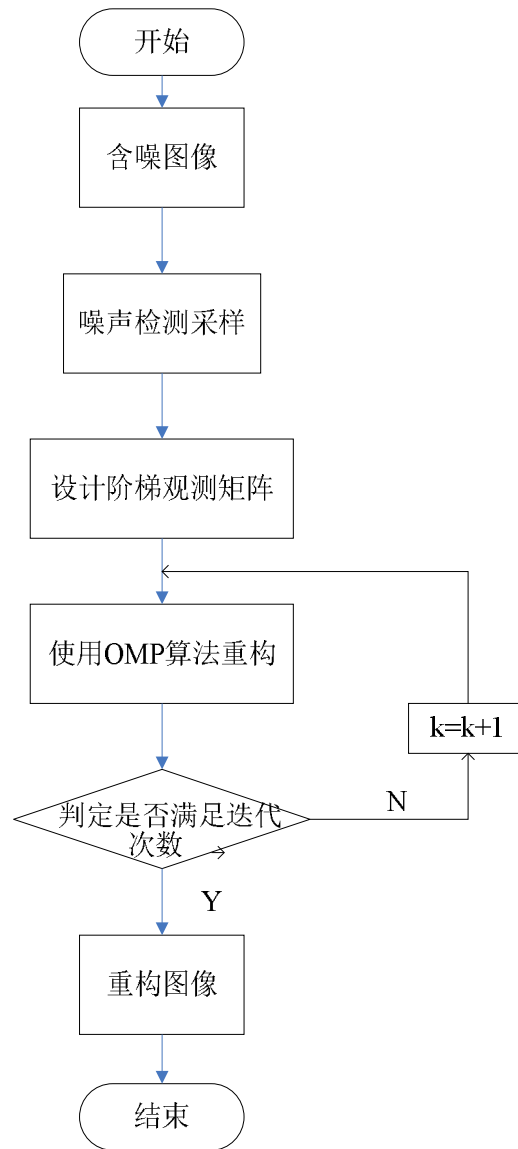


图 4.1 椒盐去噪算法流程图

## 4.6 仿真结果

为了验证算法的性能，选取大小为  $256 \times 256$  的 Lena、Baboo 和 Fishboat 图像进行实验。选取椒盐密度为 0.05 的椒盐噪声，重构图像的质量用峰值信噪比 PSNR 来衡量。

$$PSNR = 10 \times \log_{10} \left( \frac{255^2}{MSE} \right) \quad (4.57)$$

下面具体使用图像仿真来分析，首先，将  $256 \times 256$  的图像按列向量的方式进行重构，以消除列向量之间的相关性；然后再将图像按行向量的方式进行重构，以消除行向量之间的相关性。最后将按列重构图像和按行重构图像相加，求出平均值。



图 4.2 噪声密度为 0.05 下的 Lena 重构图像

图 4.2 左上角为按列向量重构图像，右上角为按行向量重构图像，左下角为平均优化后的重构图像，右下角为原始含噪图像。实验结果显示，按列向量重构下的 PSNR 为 31.9094，按行向量重构下的 PSNR 为 28.8913，进行平均优化后的 PSNR 为 32.2452。实验结果表明通过按行和按列重构后求平均值，能有效消除行向量和列向量之间的相关性，提高重构图像的峰值信噪比。

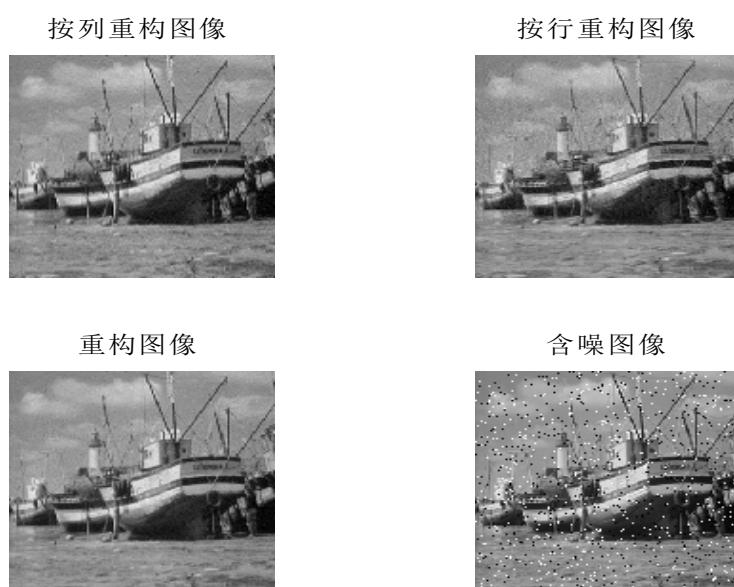


图 4.3 噪声密度为 0.05 下的 Fishingboat 重构图像



图 4.3 左上角为按列向量重构图像，右上角为按行向量重构图像，左下角为平均优化后的重构图像，右下角为原始含噪图像。实验结果显示，按列向量重构下的 PSNR 为 29.6278，按行向量重构下的 PSNR 为 28.2304，进行平均优化后的 PSNR 为 31.3436。

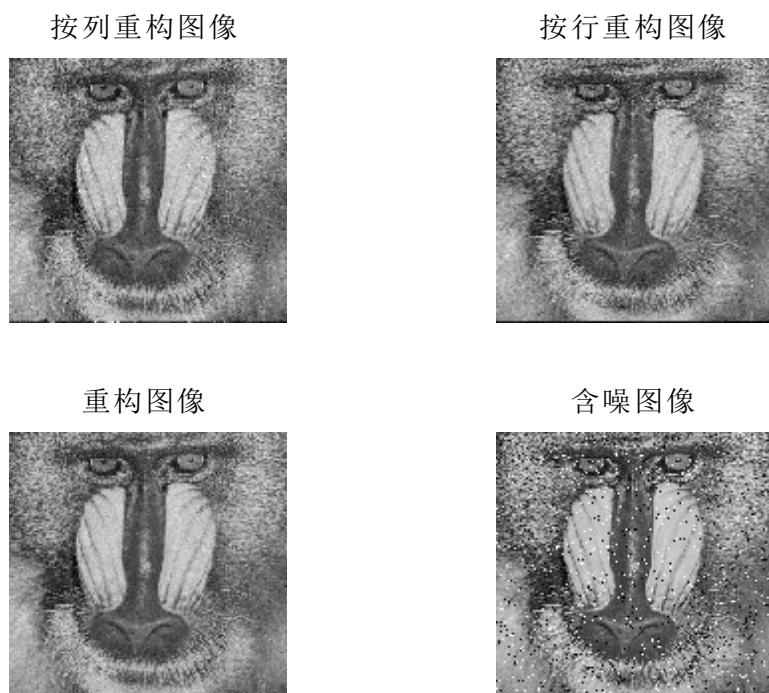


图 4.4 噪声密度为 0.05 下的 Baboo 重构图像

图 4.4 左上角为按列向量重构图像，右上角为按行向量重构图像，左下角为平均优化后的重构图像，右下角为原始含噪图像。实验结果显示，按列向量重构下的 PSNR 为 22.2237，按行向量重构下的 PSNR 为 23.1274，进行平均优化后的 PSNR 为 24.6451。



图 4.5 噪声密度为 0.22 下的 Lena 重构图像

图 4.5 左上角为按列向量重构图像，右上角为按行向量重构图像，左下角为平均优化后的重构图像，右下角为原始含噪图像。实验结果显示，按列向量重构下的 PSNR 为 28.9865，按行向量重构下的 PSNR 为 26.1390，进行平均优化后的 PSNR 为 29.5074。

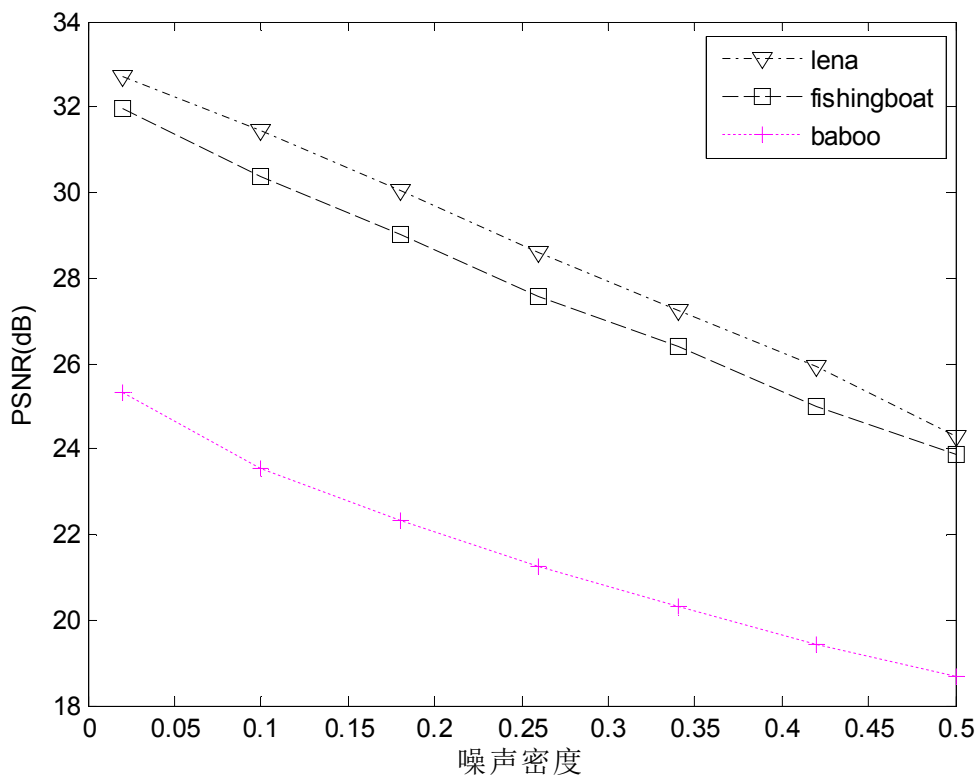


图 4.6 不同噪声密度下重构图像的 PSNR 比较

图 4.6 实验显示在相同的噪声密度下，使用压缩感知的去噪算法得到的结果，图像重构质量按 Lena、Fishingboat 和 Baboo 递减。

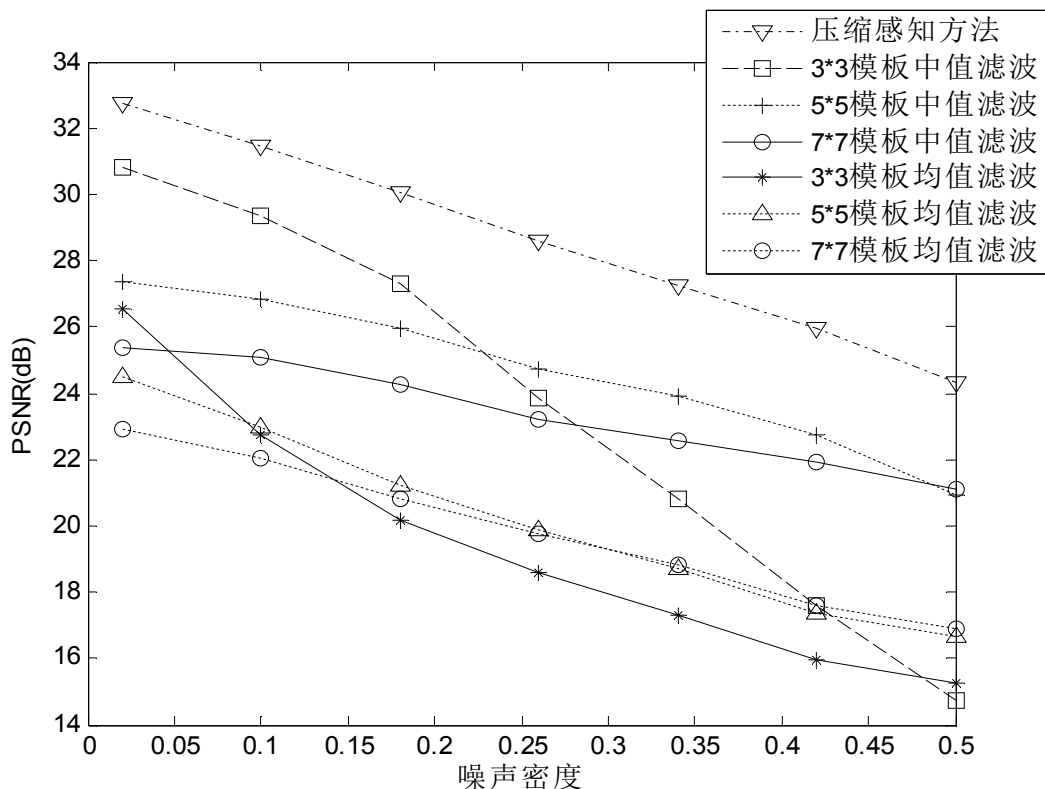


图 4.7 本文方法与传统空间域去噪方法效果比较

图 4.7 实验结果选取 Lena 图像, 在不同的噪声密度下, 将本文基于压缩感知的去噪算法和 4.2.1 中讨论的空间域去噪算法进行对比分析, 分析结果显示, 在相同的噪声密度下, 应用本文的去噪方法均优于传统的空间域去噪算法。

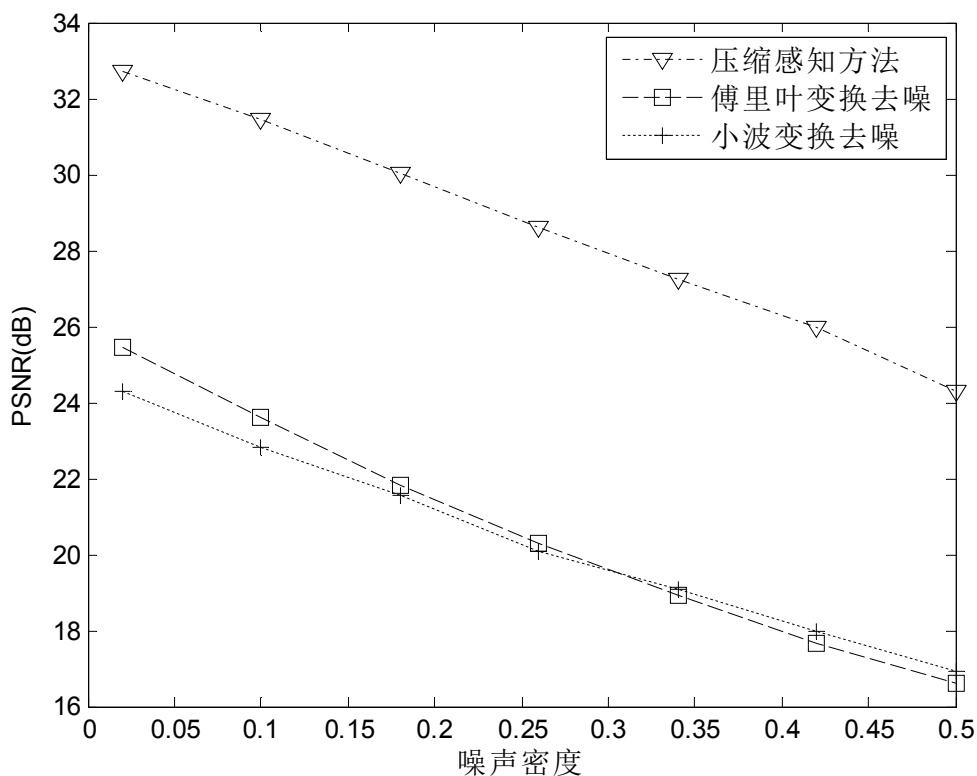


图4.8 本文方法与传统变换域去噪方法效果比较

图 4.8 实验结果还是选取 Lena 图像，小波变换采用的小波基为 ‘sym4’，分解层数为 3 层，在不同的噪声密度下，将本文基于压缩感知的去噪算法和 4.2.2 中讨论的变换域去噪算法进行对比分析，分析结果显示，在相同的噪声密度下，应用本文的去噪方法均优于传统的变换域去噪算法。

为了分析 GOMP 算法的性能，选取有代表性的 ROMP 算法，将 GOMP 算法应用于椒盐去噪中，下图是使用 GOMP 算法、OMP 算法和 ROMP 算法重构的图像，使用 Lena 图像，图 4.10 中迭代次数为 64 次。

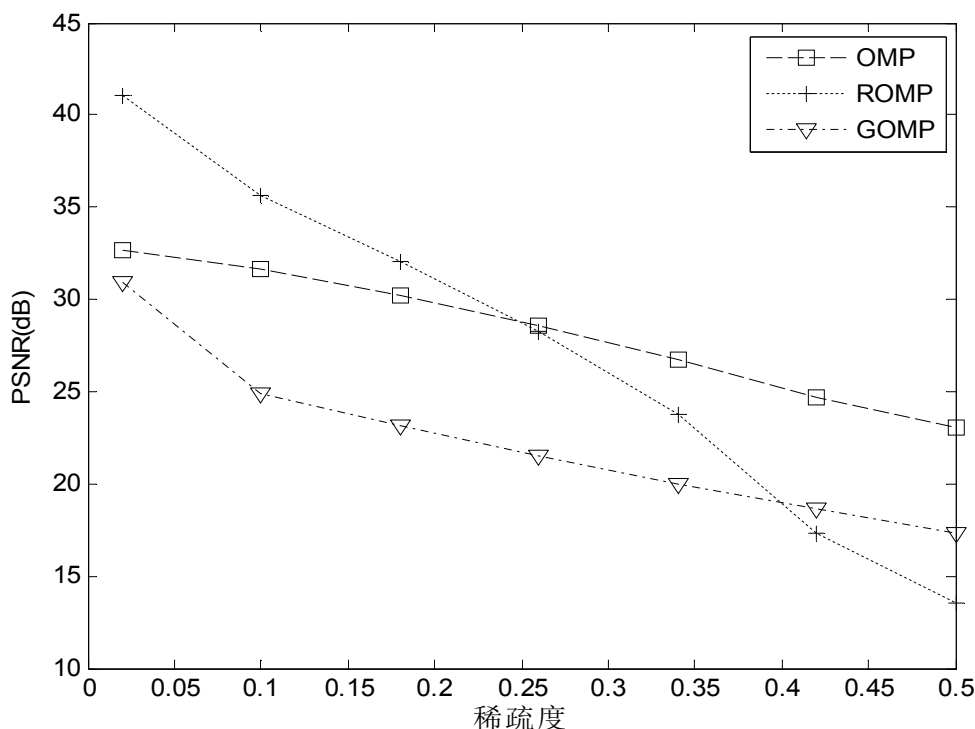


图 4.10 不同稀疏度下重构图像的 PSNR 比较

图 4.10 是在迭代次数为 64 的条件下，重构图像的 PSNR 比较，随着稀疏度的增加 ROMP 算法重构效果迅速下降，结果表明在图像很稀疏的情况下，GOMP 算法重构的图像 PSNR 值比 ROMP 算法高。

## 4.7 本章小结

本章分析了几种已有的去噪算法，包括空间域去噪算法和变换域去噪算法，提出了一种压缩感知椒盐去噪方法。为提高采样重建的效果，利用最优化对偶内点法原理分析阶梯观测矩阵的合理性，即其相干性系数比随机观测矩阵下的相干性系数小，能提高信号的恢复率。利用 Matlab 实验，比较了含椒盐噪声图像的重构特性。

## 第五章 压缩感知在丢失数据中的应用

数据丢失在实际问题中经常发生，如因地理位置和空间的限制导致采集到的地震数据不完整。这里我们提出一种基于压缩感知的方法，将已有的数据采集过程和重构结合起来，充分利用了数据的稀疏特性，更好地重构完整的数据。利用图像进行的数值实验验证了所提方法的可行性。

### 5.1 基于压缩感知的数据丢失重构算法

在数据丢失的情况下，虽然不知道整幅图像，但是知道图像在离散余弦变换下是近似稀疏的。在丢失数据的情况下，剔除丢失部分的数据后，大部分的数据都是精确的，根据部分数据解最稀疏解，就可以重构出原图像。

#### 5.1.1 数据丢失重构算法

令原始信号  $x = x_K + x_M \in W \oplus W^\perp$ ，其中  $W$  是  $R^n$  的子空间。假设  $x_K$  是已知的，现在的目标是重构出  $x$ ，这看起来是不可能的。尽管并不知道原始信号  $x$ ，但是知道它在正交基  $\Psi$  下是稀疏的，分别令  $P_W$  和  $P_{W^\perp}$  为在  $W$  和  $W^\perp$  上的正交投影，那么只需要解欠定方程

$$P_W \Psi C = P_W x \quad (5.1)$$

求解(5.1)式的最稀疏解  $C$ 。

从压缩感知的角度来说，就是要解下面的方程

$$\min_C \|C\|_1 \text{ s.t. } P_W \Psi C = P_W x \quad (5.2)$$

知道了稀疏解  $C$ ，那么原始信号可以通过  $x = \Psi C$  来重构。

根据第二章定理 2.3<sup>[11]</sup>，最稀疏解的唯一性，可以得到如果满足  $\|\Psi^T x\|_0 < \frac{1}{2}(1 + \mu(P_W \Psi)^{-1})$ ，那么能求出唯一解

$$\Psi^T x = \arg \min_C \|C\|_1 \text{ s.t. } P_W \Psi C = P_W x \quad (5.3)$$

基于正交匹配追踪算法<sup>[22]</sup>的丢失数据重构算法如下：

输入：丢失数据图像  $Z$ ，给定误差限  $\varepsilon$

- 1) 丢失数据检测采样  $y$ ，如果是检测为丢失值，则予以剔除，否则予以保留；
- 2) 根据1)中剔除的丢失元素位置，设计阶梯型观测矩阵；
- 3) 使用正交匹配追踪法重构；
- 4) 初始化：  $r_0 = y$ ，索引集  $\Lambda_0 = \emptyset$ ，迭代次数  $t = 1$ ；
- 5) 找到索引集  $J_t$ ，使得  $J_t = \arg \max_{i=1,2,\dots,n} |\langle r_{t-1}, \Phi_j \rangle|$ ；
- 6) 令  $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{J_t\}$ ；
- 7) 通过求解最小二乘问题得到信号的近似解：  $\hat{b} = \arg \min_b \|y - \Phi b\|_2$ ；
- 8) 计算：  $r_t = y - \Phi \hat{b}$ ；
- 9)  $t = t + 1$ ，如果  $t < K$  或者  $\|r_t\|_2 \geq \varepsilon$ ，返回 2)，依次迭代。

输出：索引集  $\Lambda_t$ ，重建信号  $\hat{b}$ ，余量  $r_t$ 。

### 5.1.2 丢失数据重构的方法

算法步骤：

- (1) 已知原始丢失数据图像  $Z$ 。
- (2) 数据丢失检测采样，设计阶梯观测矩阵，首先检测  $Z$  中数据丢失所在位置，然后删除对应的行作为阶梯观测矩阵  $\Phi_Z$ 。
- (3) 利用 DCT 基作为稀疏变换基。
- (4) 本文采用 OMP 算法作为例子进行重构，其他算法重构类似。

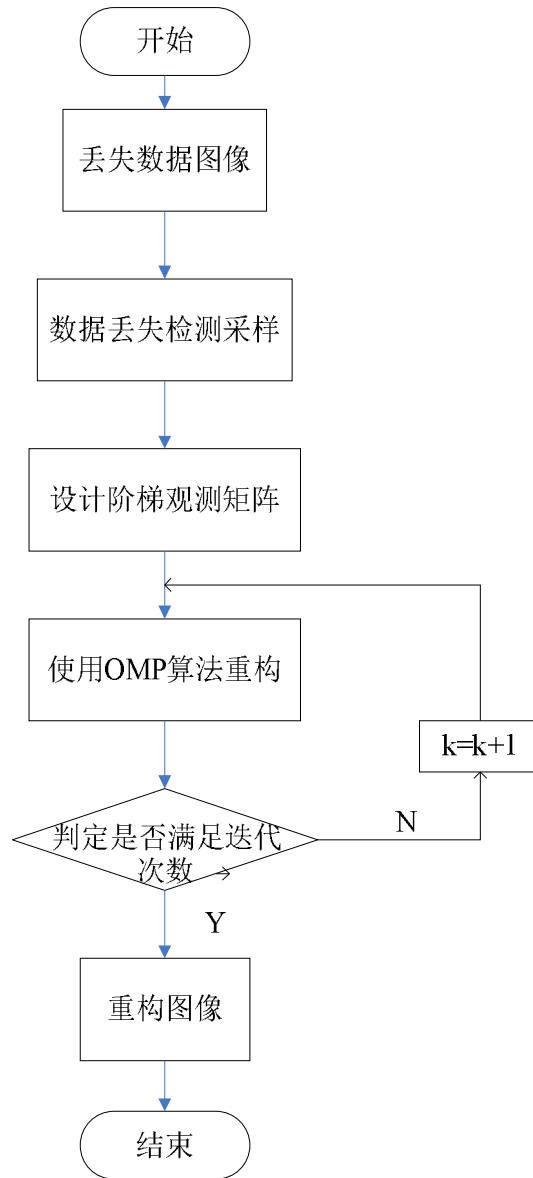


图 5.2 数据丢失下的算法流程图

## 5.2 仿真结果

在以上的理论分析下，由于地震波数据丢失都是整行或整列的数据有丢失，我们实验中均采用有整行的数据丢失，为了验证本文算法性能，实验结果采用 Lena 图像，由于正交匹配追踪算法的低复杂性，使用正交匹配追踪算法<sup>[22]</sup>算法，迭代次数均选取为 64 次，下面用具体的数据进行说明。

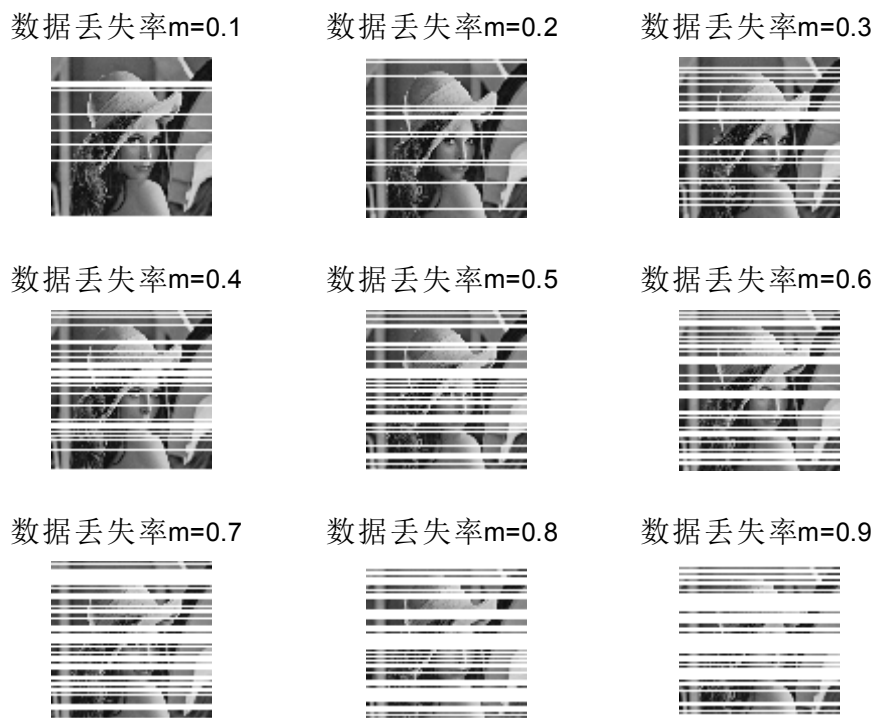


图 5.3 不同数据丢失率下的 Lena 图

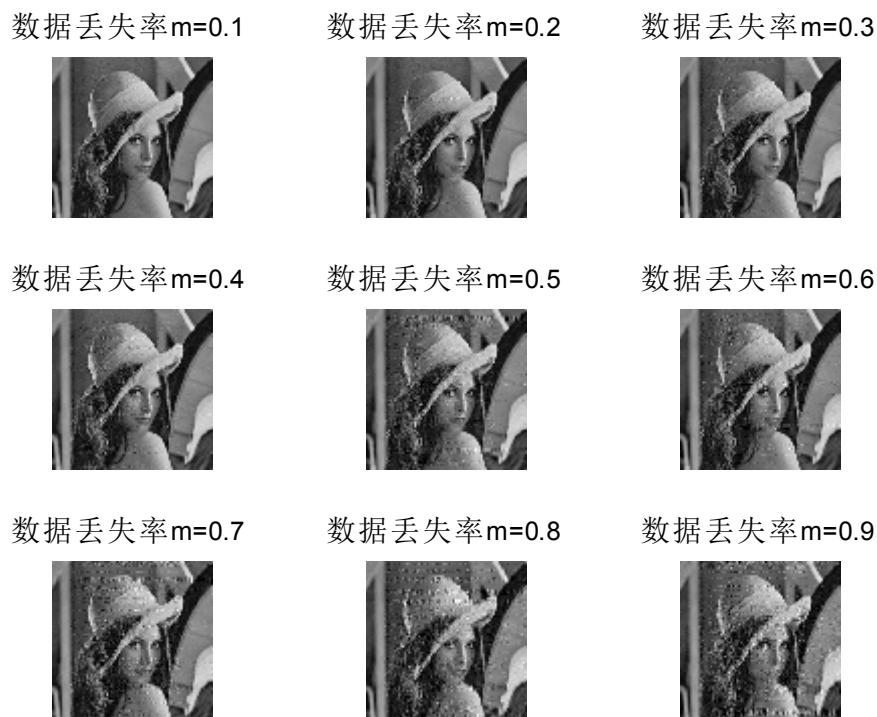


图 5.4 不同数据丢失率下的重构图像

图 5.3 是 Lena 图像在不同的数据丢失率下的图像，图 5.4 是使用本文方法得到的重构图



像，仿真结果显示在丢失数据率高达 90%的情况下，利用本文算法重构的图像仍然能够分辨出原图像。

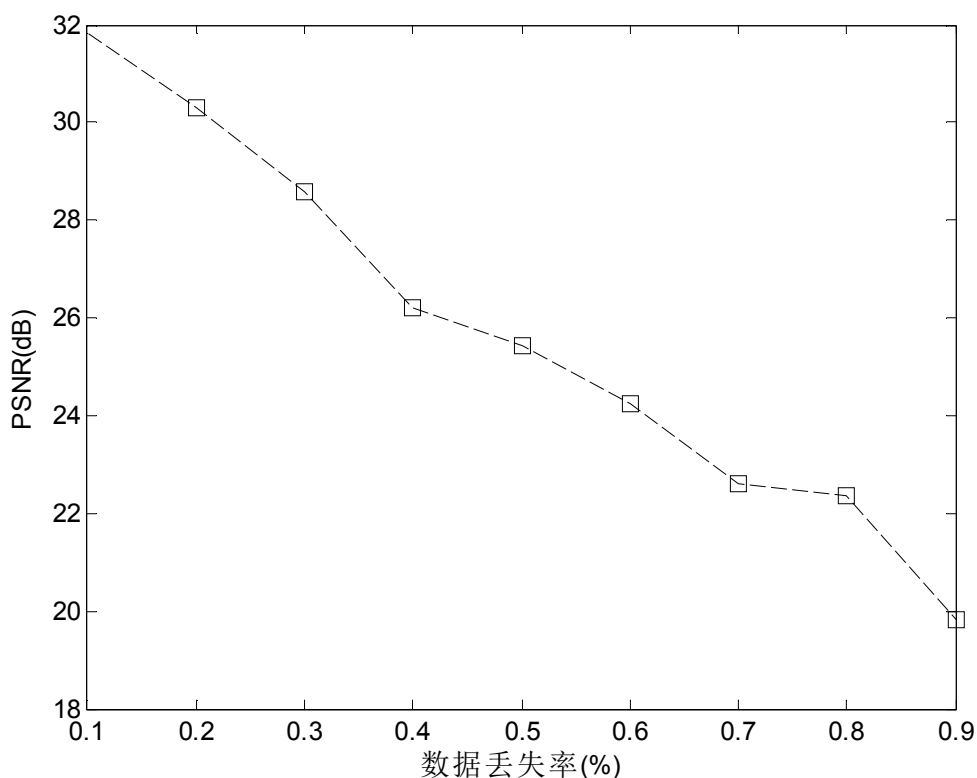


图 5.5 不同数据丢失率下重构图像 PSNR

图 5.5 是计算再不同数据丢失率下重构图像的 PSNR 值，图像重构质量随丢失数据率呈现出近似线性递减的趋势。



图 5.6 图像嵌入文字下重构图像



图 5.7 图像被污染下重构图像

我们还试验了图像中有文字嵌入和图像被污染的情况，为了去除向量之间的相关性，实验过程中，先以列向量的方式进行重构，然后以行向量的方式进行重构，最后将两种方式相加求平均值，图 5.6 显示了在图像中有文字嵌入的情况下，利用压缩感知算法重构出的原图像，图 5.7 是图像在被污染了情况下的重构图像。

### 5.3 结果分析

本章分析了图像的稀疏表示，实验了压缩感知算法在数据丢失中的应用，综合考虑图像的重构质量和程序的运行时间，本文仿真采用低复杂度正交匹配追踪算法。

在现代大数据时代，发生数据丢失的现象不可避免，为了避免不必要的损失，本文算法能提供一个良好的解决途径，仿真结果显示，在有较多数据丢失率的情况下，本文方法依然能够重构出可以分辨的图像，在图像中有文字嵌入和图像被污染的情况下本文方法也能取得较理想的结果。

本文方法还可以推广到其他信号处理领域，例如可以应用在有抓痕的数码图片重构、丢失数据的地震波图像重构等等。在传统的最小化  $l_1$  范数的方法下，本文的基于压缩感知理论的方法，充分使用了信号的稀疏性，得到了较好的重构结果。

## 5.4 本章小结

本章研究压缩感知在数据丢失信号的重构问题，给出一种数据丢失重建的压缩采样恢复算法。算法采样用阶梯型观测矩阵对图像在丢失部分情况下进行实验，结果显示所提出的方法能在有较大数据丢失的情况下能较好地重构出原图像。

## 第六章 总结与展望

### 6.1 总结

近年来,随着压缩感知的提出和研究,为信号处理注入了一股新的活力。压缩感知具有较为高效的压缩特性特点。和以往的压缩编码方法不同的是,压缩感知指出,当信号具有稀疏性或者可压缩性时,通过采集少量的信号投影值就可以以高概率重构出原图像。压缩感知理论指出,在采样的同时实现了信号的压缩,从而大大降低了采样的成本,该理论一经提出,就受到国内外专家和学者的广泛关注,出现了大量的研究成果。

稀疏信号的重构问题是压缩感知的关键,设计重构算法实现低维数据恢复出原高维数据,达到降低采样本数目、减少算法的运算时间,降低处理的复杂度。

本文所做的工作如下:

1. 主要对贪婪类的压缩感知算法重点概述。在此基础上,提出改进的 OMP 算法,即广义正交匹配算法,并对这类压缩感知算法的性能进行了数值分析。
2. 分析了几种已有的去噪算法,包括空间域去噪算法和变换域去噪算法,提出了一种压缩感知椒盐去噪方法。实验表明,本文的方法具有很大的优势。
3. 研究了压缩感知在数据丢失信号的重构问题,给出一种数据丢失重建的压缩采样恢复算法。本文的基于压缩感知的方法,在图像有较多数据丢失的情况下,在图像有文字嵌入和被污染的情况下,依然能够得到较好的重构结果。

### 6.2 展望

压缩感知其它的应用包括信息与编码理论、机械学习、高光谱成像、地球物理数据分析、计算机生物学、遥感、雷达分析、机器人理论与控制、模拟数字转换等等,莱斯大学的网站上有很多的应用。

本文的算法还可以应用到很多的方面。如可以应用在有抓痕的图片的重构和丢失数据的地震波数据重构,还可以推广到提高图像的分辨率等方向。

## 参考文献

- [1] D L Donoho.Compressed sensing[J].IEEE Trans.on Information Theory.2006, 52(4):1289 — 1306.
- [2] E Candès.Compressive sampling[A].Proceedings of the International Congress of Mathematicians[C], Madrid,Spain, 2006, 3:1433-1452.
- [3] E Candès and M Wakin. An introduction to compressive sampling[J].IEEE Signal Processing Magazine,March 2008,21-30.
- [4] E Candès and T Tao. Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies[J].IEEE Trans. Info. Theory,2006, 52(12): 5406-5425.
- [5] E Candès.The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J].C.R. Math.Acad.Sci.Paris,2008,346(9-10):589–592.
- [6] Wei Lu and Namrata Vaswani, Modified Compressive Sensing for Real-time Dynamic MR Imaging[J].IEEE Intl. Conf. Image Proc (ICIP), 2009.
- [7] Namrata Vaswani and Wei Lu. Modified-CS: Modifying Compressive Sensing for Problems with Partially Known Support[J].IEEE Transactions on Signal Processing,vol.58,NO. 9, September 2010.
- [8] S.Foucart and M.-J.Lai.Sparsest solutions of undetermined linear systems via  $\ell_q$ -minimization for  $0 < q \leq 1$ . Preprint, 2008.
- [9] 李炳杰,吕园,叶萌等基于非相干准则的压缩感知观测矩阵设计的极大极小方法[J].空军工程大学学报报,2011,10(12):5:81-84.
- [10] E. J. Candès, J. Romberg, T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics.2006, 59(8): 1207-1223.
- [11] D.L.Donoho,M.Elad.Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries svia  $\ell_1$  minimization[J].Proc.Natl.Acad.Sci.,2003, 100(5):2197-2202.
- [12] Cand'es,T.Tao.Decoding by linear Programming[J] .IEEE Trans.Info.Theory, 2005, 51(12):4203-4215.
- [13] Donoho D L, Elad M, Temlyakov V N.Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise[J].IEEETransactions on Information Theory, 2006, 52(1):6-18.
- [14] D.L.Donoho, Y.Tsaig, I.Drori,etc.Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise Orthogonal Matching Pursuit[OL].2007, <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports/2006/StOMP-20060403.pdf>
- [15] S. G. Mallat and Z. Zhang, Matching Pursuits with Time-Frequency Dictionaries[J], IEEE Transactions on Signal Processing, December 1993, pp. 3397–3415.
- [16] S Mallat 著.杨力华,戴道清,黄文良等译.信号处理的小波导引(第二版)[M].北京:机械工业出版社,2002.
- [17] T.Blumensath, M.Davies. Iterative hard thresholding for compressed sensing [J] .Computer Science Information Theory,2008:1-27
- [18] K.Engan, S.O.Aase, J.H.Husoy. Method of optimal directions for frame design. Acoustics, speech and signal processing [A].Proceedings of ICASSP'99 [C].1999: 2443-2446.
- [19] M.Elad, M.Aharon. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(12):3736-3745.
- [20] M.Aharon, M.Elad, A.Bruckstein. K-SVD:an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11):4311-4322.
- [21] 李小波. 基于压缩感知的测量矩阵研究[D]. : 北京交通大学硕士学位论文, 2010 年.
- [22] J.Tropp, A.Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12):4655-4665.

- [23] D.Needell, R.Vershynin. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, 43(9):317-334.
- [24] D.Deedell, J.Tropp. COSAMP:iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, 26(3):301-321.
- [25] W.Dai, O.Milenkovic. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J].*IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(5):2230-2248.
- [26] M.A.T.Figueiredo, R.D.Nowak, S.J.Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems [J]. *IEEE Signal Processing Society*, 2007, 1(4): 586-597.
- [27] T.Blumensath, M.Davies. Iterative hard thresholding for compressed sensing[J].*Computer Science Information Theory*,2008:1-27
- [28] H.Mohimani, M.B.Zadeh, C.Jutten. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed  $\ell_0$  Norm [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(1):289-301.
- [29] 林婉娟, 赵瑞珍, 李浩. 用于压缩感知信号重建的 NSL0 算法 [DB/OL].(2011-05-13). [2012-02-22].<http://www.paper800.com/paper>.
- [30] 宁刚.基于压缩感知的信号重建算法研究[硕士学位论文], 吉林: 吉林大学, 2010.
- [31] 陆明海,沈夏,韩申生.基于数字微镜器件的压缩感知关联成像研究[J]. *光学学报*,2011 年,31(7):1-6.
- [32] 顾莹. 基于压缩感知的分布式视频编解码及其图像超分辨率重建研究[D].南京: 南京邮电大学硕士论文,2011 年.
- [33] H.Jung, K.Sung,K.S.Nayak,E.Y.Kim,J.C.Ye1.FOCUSS:a general compressed sensing framework for high resolution dynamic MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*. 2009, (61):103–116.
- [34] A.Divekar,O.Ersoy.Image fusion by compressive sensing [J].*Geoinformatics*,2009 17th International Conference.2009:1–6.
- [35] Xinpeng Zhang,Zhenxing Qian,Yanli Ren,Guorui Feng.Watermarking with flexible self-recovery quality based on compressive sensing and compositive reconstruction information forensics and security [J]. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*,2011, 6(4):1223-1232.
- [36] P.Tzagkarakis,G.Tsakalides.Sparse representation of medical images via compressed sensing using gaussian scale mixtures biomedical imaging [J]. *IEEE International Symposium*, 2010:744-747.
- [37] C.R.Berger,Zhaohui Wang, Jianzhong Huang, Shengli Zhou. Application of compressivesensing to sparse channel estimation [J]. *IEEE Communications Magazine*, 2010, 48 (11): 164-174.
- [38] 叶雷,杨震.基于压缩感知的语音压缩与重构[J]. *南京邮电大学学报*, 2010, 30(4):57-60
- [39] 刘旭.数字图像修复技术的研究 [D]上海: 上海交通大学硕士论文, 2009 年
- [40] M.Bertalmio, G.Sapiro, V.Caselles and C.Ballester, Image inpainting, In:*Computer Graphics Proceedings Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH*,New Orleans, 2000. 417-424
- [41] J.A.Tropp, “Greed is good: algorithmic results for sparse approximation,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.50, pp. 2231-2242, 2004.
- [42] D. L. Donoho, De-Noising by soft thresholding, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 41 (1995),pp. 613-627.
- [43] Ivar Ekeland and Roger T’emam.Convex analysis and variational problems, volume 28 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, english edition, 1999.Translated from the French.
- [44] Wotao Yin, Stanley Osher, Donald Goldfarb, and Jerome Darbon. Bregman iterative algorithms for  $\ell_1$ -minimization with applications to compressed sensing. *SIAM J. Imaging Sci.*, 1(1):143–168, 2008.
- [45] L.Bregman,The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex optimization , *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, 7 (1967),pp. 200–217.
- [46] Stanley Osher, Yu Mao, Bin Dong, and Wotao Yin. Fast linearized Bregman iteration for compressive sensing and sparse denoising. *Commun.Math. Sci.*, 8(1):93–111, 2010.

- [47] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 129-159.
- [48] R Baraniuk. A lecture on compressive sensing [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-121.
- [49] 石光明, 刘丹华, 高大化, 刘哲, 林杰, 王良君. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 5(37): 1070-1081.
- [50] 潘宗序, 黄慧娟, 禹晶等. 基于压缩感知与结构自相似性的遥感图像超分辨率方法[J]. 信号处理, 2012, 6(28): 860-871.
- [51] E. J. Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. Académie des sciences. 2006, 346(1): 598-592.
- [52] S S Chen, D L Donoho, and M A Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 129-159.
- [53] D L Donoho, Y Tsaig. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing. 2006, 86(3): 533-548.
- [54] R Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso[J]. The Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 1996, 58(1): 267-288.
- [55] M A T Figueiredo, R D Nowak, S J Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. Journal of Selected Topics in Signal Processing: Special Issue on Convex Optimization Methods for Signal Processing, 2007, 1(4): 586-598.
- [56] Deanna Needell and Roman Vershynin. Signal Recovery From Incomplete and Inaccurate Measurements via Regularized Orthogonal Matching Pursuit
- [57] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230-2249.
- [58] 颜七笙, 王士同. 基于 soft 形态学的椒盐噪声滤波器[J]. 微计算机信息, 2005, 21(23): 96-98.
- [59] Donoho D. L. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Trans. on IT, 1995, 41(3): 613-627
- [60] Donoho D. L. and J. Sotne I. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81, 425-455
- [61] Donoho D. L. and J. Sotne I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. Journal of American Stat. Assoc., 1995, 90(432): 1200-1224
- [62] I. Adler, M. G. C. Resende, G. Veiga, and N. Karmarkar. An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming[J]. Mathematical Programming, 44: 297-335, 1989
- [63] T. Blumensath and M. E. Davies. Iterative thresholding for sparse approximations[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 27(3): 265-274
- [64] T. Blumensath. Accelerated iterative hard thresholding[J]. IEEE Signal Processing Letters. preprint 2011
- [65] A. C. Gilbert, M. J. Strauss, J. A. Tropp, et al. Algorithmic linear dimension reduction in the  $l_1$  norm for sparse vectors[J]. The 44<sup>th</sup> Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. 2006
- [66] S. H. Ji, Y. Xue, and L. Carin. Bayesian compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2346-2356
- [67] S. Gleichman and Y. C. Eldar. Blind compressed sensing: Theory[J]. Latent Variable Analysis and Signal Separation-9<sup>th</sup> International Conference, LVA/ICA, St. Malo, France, 2010: 386-393
- [68] R. G. Baraniuk, V. Cevher, M. F. Duarte, and C. Hegde. Model-based compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(4): 1982-2001
- [69] Y. C. Eldar, P. Kuppinger, and H. Bolcskei. Compressed sensing of block-sparse signals: uncertainty relations and efficient recovery[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(6): 3042-3054
- [70] M. Elad, J.-L. Starck, P. Querre, and D. L. Donoho. Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA). Appl. Comput. Harmon. Anal., 19: 340-358, 2005.
- [71] Jun S. Liu, Monte Carlo Strategies In Scientific Computing[M]. Cambridge: Department of Statistics, Harvard University. 2001: 98-102.
- [72] A. C. Kokaram, R. D. Morris, W. J. Fitzgerald and P. J. Rayner, Interpolation of missing data in image sequences,

IEEE Transactions on Image Processing, November 1995, 1509-1519

[73] 汤颖, 纹理映射、合成和压缩[博士学位论文], 杭州, 浙江大学, 2005

[74] D. Baron, M.B. Wakin, M. Duarte, et al. Distributed compressed sensing. Rice University, <http://www.dsp.rice.edu/~drorb/pdf/DCS112005.pdf>

[75] E. J. King, G. Kutyniok, and X. Zhuang, Using clustered sparsity and microlocal analysis to analyze data recovery[J]. in preparation, 2011.

[76] S. Nam, M. Davies, M. Elad, and R. Gribonval, Cosparsity modeling - uniqueness and algorithms[J], in International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP 2011), IEEE, 2011

[77] M. Kowalski and B. Torrésani, Sparsity and persistence: mixed norms provide simple signal models with dependent coefficients[J], Signal, Image and Video Processing, pp. 251–264, 2009. 10.1007/s11760-008-0076-1.



## 附录 1 程序清单

第三章 贪婪类压缩感知算法仿真程序（test programme 文件夹）

cs\_omp: OMP 算法，画仿真图像的 OMP 曲线

cs\_romp: ROMP 算法，画仿真图像的 ROMP 曲线

cs\_CoSamp: CoSaMP 算法，画仿真图像的 CoSaMP 曲线

cs\_sp: SP 算法，画仿真图像的 SP 曲线

cs\_stomp: StOMP 算法，画仿真图像的 StOMP 曲线

cs\_GOMP: GOMP 算法，画仿真图像的 GOMP 曲线

第四章 压缩感知在椒盐去噪中的应用算法程序（test programme 文件夹）

main\_denoise: 椒盐去噪算法主程序

cs\_denoise: 椒盐去噪算法程序，作椒盐去噪仿真

第五章 压缩感知在数据丢失中的应用算法程序（test programme 文件夹）

main\_lost: 数据丢失算法主程序

cs\_lost: 数据丢失算法程序，作数据丢失仿真

## 附录 2 攻读硕士学位期间撰写的论文

(1) 屈冉, 基于部分支撑集已知的压缩感知在图像处理中的应用, 全国计算机新科技与计算机教育论文集 (第 19 卷), 2011.10;

## 致谢

在此论文完成之际，向在攻读硕士学位期间所有对我给予过关心、帮助和支持的老师、亲人和同学致以诚挚的感谢。

本论文是我在赵君喜教授的精心指导下完成的。在整个学习和研究阶段，赵老师给予了我非常大的帮助，他严谨求实的治学态度、平易近人的学者风范和朴实无华的作风给我留下了深刻的印象；他深厚的学术功底、敏锐的科学洞察力和诲人不倦的精神更使我受益匪浅。在此衷心的感谢赵老师在这段时间里对我在生活、学习和科研方面的悉心关怀和无私指导。

特别感谢我父母多年来的辛勤抚养和精心栽培，感谢他们多年来对我的鼓励和支持，这也一直是我不断前进的动力源泉。对他们为我付出的一切，我将铭刻肺腑。

感谢在课题组和寝室和我朝夕相处的同学们以及所有的班级同学，他们的热情支持和帮助使我的论文得以顺利地完成。感谢大家对我在生活上的关心和学习上的指导，和他们的探讨使我拓宽了思路，获得很多灵感，也正是因为他们的无私帮助，我的论文才能顺利完成，我将永远记住并珍惜这一段美好的研究生活。

最后，感谢南京邮电大学多年的培养。感谢曾经教育和帮助过我的所有老师，关心帮助过我的同学和朋友。衷心感谢从百忙中抽出时间参加论文评审和评议的各位专家学者，感谢他们为审阅本文所付出的辛勤劳动。