

KAPITEL 2

Temperaturverteilung

2.1 Modellierung der Wärmeleitung

In der Arbeit wird die Wärmeleitung als Beispiel genommen, weil die Temperaturüberwachung eine wichtige Aufgabe in unserem täglichen Leben ist. Vom Automobil bis zur Luft- und Raumfahrt, von Wäldern bis zu den Ozeanen, von unseren Körpern bis zum Klima, ist die Temperaturmessung von großer Bedeutung. Die mathematische Beschreibung der Wärmeleitung ist das Diffusionsmodell. Das Diffusionsmodell ist eine partielle Differenzialgleichung. Im Folgenden werden wir zwei Ansätze zur Lösung dieser Gleichung verwenden, nämlich das Finite-Differenzen-Verfahren (FDM) und die Modalanalyse (MA).

2.1.1 Wärmeleitung in einem Draht

Das Diffusionsmodell für den 1D-Fall ist

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)}_{\text{Diffusionsgleichung}} = k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) + \underbrace{u(x, t)}_{\text{Anregung}} ,$$

wobei f für die Temperatur und k für die Wärmeleitfähigkeit steht. Die Randbedingungen beschreiben eine Isolation an den Enden (Neumann-Randbedingung), also

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right|_{x=L} = 0 .$$

Die Isolation bedeutet, dass der Wärmefluss an den Punkten auf der Oberfläche des Objekts null ist. Die Anfangsbedingung ist eine bekannte Temperaturverteilung $f(x, t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 .

2.1.2 Wärmeleitung in Platte

Das Diffusionsmodell für den 2D-Fall ist

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, t) \right) + u(x, y, t) .$$

Die Randbedingungen sind Isolation an den Rändern (Neumann-Randbedingung), also

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, t) \Big|_{x=0} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, t) \Big|_{x=L_x} = 0 , \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, t) \Big|_{y=0} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, t) \Big|_{y=L_y} = 0 . \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung ist eine bekannte Temperaturverteilung $f(x, y, t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 .

2.2 Numerische Lösung

Da der Computer die Differenzialgleichung nicht direkt lösen kann, müssen wir die Diffusionsgleichung numerisch lösen.

2.2.1 Modalanalyse

Die Modalanalyse wird zur Bestimmung der Eigenfrequenzen (Eigenfunktionen) und der Eigenformen (Gewichtung zu den Eigenfunktionen) in der Strukturdynamik verwendet. Die Modalanalyse wird auch Eigenwertanalyse genannt [12]. Bei der Modalanalyse werden die Variablen getrennt und separat gelöst. Z. B. beim Diffusionsmodell wird die Variable x als Eigenfunktionen und die andere Variable t als die Gewichtungen bezeichnet.

Zuerst betrachten wir den 1D-Fall ohne Anregung. Jetzt trennen wir die Temperaturverteilung $f(x, t)$ durch $f(x, t) =: X(x)T(t)$. Dann separieren wir die Variablen

$$\frac{1}{k} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} \stackrel{!}{=} C .$$

Wenn wir die Variable $X(x)$ mit den Nebenbedingungen lösen, können wir finden, dass die Lösung viele Cosinusfunktionen mit unterschiedlichen Frequenzen sind. D. h. die Lösung der Variable $X(x)$ hat viele Möglichkeiten, also:

$$X_i(x) = D_i \cos(\lambda_i x), \quad \lambda_i = i \frac{\pi}{L} \quad i = 0, 1, 2, \dots ,$$

wobei D_i Konstanten sind. Offensichtlich erfüllen $X_i(x)$ die Orthogonalitätsbedingung, d. h. nach einer Normalisierung bilden sie eine Basis (hier wird auch als Eigenfunktion bezeichnet), also

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= \sqrt{\frac{1}{L}}, \\ \psi_i(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\lambda_i x), \quad i = 1, 2, \dots.\end{aligned}$$

Wir können auch so verstehen, dass wir durch die Wahl von bestimmten D_i die $X_i(x)$ in $\psi_i(x)$ normalisiert haben, was bedeutet, dass $X_i(x)$ und $\psi_i(x)$ äquivalent sind. Deswegen erhalten wir

$$f(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) \psi_i(x).$$

Betrachtet man $T_i(t)$ aus der obigen Gleichung als Zustandsgrößen, dann haben wir die Messabbildung, was in Matrixform

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_1[k+1] \\ \vdots \\ f_N[k+1] \end{bmatrix}}_{=: \underline{f}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1[1] & \cdots & \psi_G[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1[N] & \cdots & \psi_G[N] \end{bmatrix}}_{=: \Psi} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1[k+1] \\ \vdots \\ T_G[k+1] \end{bmatrix}}_{=: \underline{T}_{k+1}}$$

ist, wobei N für die Anzahl der räumlichen Knoten und k für die Zeitpunkt stehen. Für jeder $\psi_i(x)$ können wir eine entsprechende $T_i(t)$ durch

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} &= C = -\lambda^2 \\ \Rightarrow \dot{T}_i(t) &= -k\lambda_i^2 T_i(t)\end{aligned}$$

berechnen. Dann bekommen wir das Systemmodell

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_1[k+1] \\ \vdots \\ T_G[k+1] \end{bmatrix}}_{=: \underline{T}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \Delta t k \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 - \Delta t k \lambda_G^2 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1[k] \\ \vdots \\ T_G[k] \end{bmatrix}}_{=: \underline{T}_k}.$$

Für den inhomogenen Fall können wir die Anregungen auch durch die Eigenfunktionen beschreiben, dann bekommen wir das Systemmodell in den 1D-Fall mit An-

regungen, nämlich

$$\begin{aligned}\underline{T}_{k+1} &= \mathbf{A} \cdot \underline{T}_k + \Delta t \underbrace{\begin{bmatrix} U_1[k] \\ \vdots \\ U_G[k] \end{bmatrix}}_{=: \underline{U}_k} \\ &= \mathbf{A} \cdot \underline{T}_k + \underline{U}_k , \\ \underline{f}_{k+1} &= \Psi \cdot \underline{T}_{k+1} .\end{aligned}$$

Es gibt zwei Anmerkungen zur Herleitung des Systemmodells in den 2D-Fall.

Erstens, es gibt zwei Gruppen Eigenfunktionen jeweils für x - und y -Richtung, also

- die Eigenfunktionen in x -Richtung

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L_x}}, & i = 0 , \\ \sqrt{\frac{2}{L_x}} \cos(\lambda_i x), & i = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

- und die Eigenfunktionen in y -Richtung

$$\varphi_j(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L_y}}, & j = 0 , \\ \sqrt{\frac{2}{L_y}} \cos(\lambda_j y), & j = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Zweitens, da die Zustandsgröße $\underline{T}_{i,j}[k]$ und die Temperaturverteilung $\underline{f}_k(x, y)$ in den 2D-Fall Matrizen sind, müssen wir eine Nummerierung durchführen, um die Matrizen in Vektoren umzuformen, also

$$\begin{aligned}\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{G_x \times G_y} &\mapsto \underline{T} \in \mathbb{R}^{G_x G_y \times 1} , \\ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y} &\mapsto \underline{f} \in \mathbb{R}^{N_x N_y \times 1} ,\end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned}\underline{T}_{index} &= \mathbf{T}_{i,j}, \text{ mit } index := i + (j - 1)G_x , \\ \underline{f}_{index} &= \mathbf{f}_{i,j}, \text{ mit } index := i + (j - 1)N_x ,\end{aligned}$$

wie in der folgende Abbildung gezeigt.

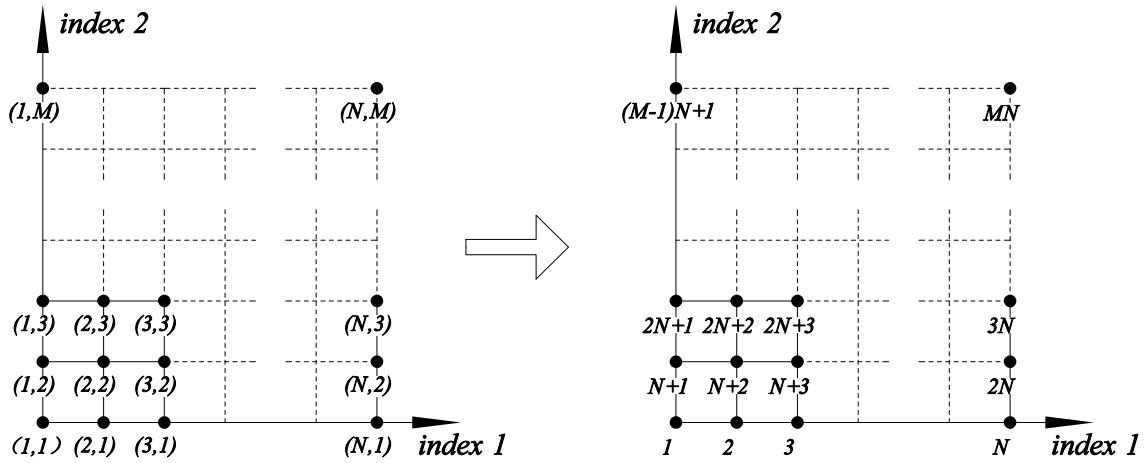


Abbildung 2.1: Nummerierung.

Dann können mit analogem Verfahren das Systemmodell in den 2D-Fall herleiten, also

$$\begin{aligned}\underline{T}_{k+1} &= \mathbf{A} \cdot \underline{T}_k + \underline{U}_k , \\ \underline{f}_{k+1} &= \Psi \cdot \underline{T}_{k+1} ,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\underline{T}_k &= \left[T_1[K] \quad \cdots \quad T_{G_x G_y}[K] \right]^T \\ &= \left[T_{1,1}[K] \quad \cdots \quad T_{G_x,1}[K] \quad \cdots \quad \cdots \quad T_{1,G_y}[K] \quad \cdots \quad T_{G_x,G_y}[K] \right]^T , \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 - \kappa_{1,1} & 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 & 1 - \kappa_{G_x,G_y} \end{bmatrix} , \\ \underline{U}_k &= \Delta t \cdot \left[U_1[K] \quad \cdots \quad U_{G_x G_y}[K] \right]^T \\ &= \Delta t \cdot \left[U_{1,1}[K] \quad \cdots \quad U_{G_x,1}[K] \quad \cdots \quad \cdots \quad U_{1,G_y}[K] \quad \cdots \quad U_{G_x,G_y}[K] \right]^T , \\ \Psi &= \begin{bmatrix} \psi_1[1]\varphi_1[1] & \cdots & \psi_{G_x}[1]\varphi_1[1] & \cdots & \psi_1[1]\varphi_{G_y}[1] & \cdots & \psi_{G_x}[1]\varphi_{G_y}[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1[N_x]\varphi_1[1] & \cdots & \psi_{G_x}[N_x]\varphi_1[1] & \cdots & \psi_1[N_x]\varphi_{G_y}[1] & \cdots & \psi_{G_x}[N_x]\varphi_{G_y}[1] \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \psi_1[1]\varphi_1[N_y] & \cdots & \psi_{G_x}[1]\varphi_1[N_y] & \cdots & \psi_1[1]\varphi_{G_y}[N_y] & \cdots & \psi_{G_x}[1]\varphi_{G_y}[N_y] \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1[N_x]\varphi_1[N_y] & \cdots & \psi_{G_x}[N_x]\varphi_1[N_y] & \cdots & \psi_1[N_x]\varphi_{G_y}[N_y] & \cdots & \psi_{G_x}[N_x]\varphi_{G_y}[N_y] \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1[1] & \cdots & \varphi_{G_y}[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1[N_y] & \cdots & \varphi_{G_y}[N_y] \end{bmatrix}}_{\Phi_y} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1[1] & \cdots & \psi_{G_x}[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1[N_x] & \cdots & \psi_{G_x}[N_x] \end{bmatrix}}_{\Psi_x} .$$

Hierbei steht das Zeichen „ \otimes “ für das Kronecker-Produkt, mit dem wir die Messabbildung Ψ klarer und einfacher beschreiben können.

2.2.2 Finite-Differenzen-Verfahren

Bei dem Finite-Differenzen-Verfahren wandeln wir die partielle Differenzialgleichung mithilfe von der Taylorentwicklung in ein lineares Gleichungssystem (LGS) um. Die Differenzialgleichungen werden dann durch das Lösen des linearen Gleichungssystems gelöst. Die Approximationen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n^k}{\partial t} &\approx \frac{f_n^k - f_n^{k-1}}{\Delta t}, \\ \frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x^2} &\approx \frac{f_{n-1}^k - 2f_n^k + f_{n+1}^k}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Dann können wir für jeden Knoten eine lineare Gleichung

$$-f_n^k + \underbrace{\frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + 2k\Delta t} f_n^{k-1}}_{=:A} + \underbrace{\frac{k\Delta t}{\Delta x^2 + 2k\Delta t} f_{n-1}^k}_{=:B} + \underbrace{\frac{k\Delta t}{\Delta x^2 + 2k\Delta t} f_{n+1}^k}_{=:B} = \underbrace{\frac{\Delta x^2 \Delta t}{\Delta x^2 + 2k\Delta t} u_n^k}_{=:C}$$

stellen. Und schließlich bekommen wir ein LGS

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & 1 \\ A & & B & -1 & B \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & A & B & -1 & B \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=:H} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^1 \\ \vdots \\ f_N^1 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ \vdots \\ f_{N-1}^K \\ f_N^K \end{bmatrix}}_{\underline{f}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ 0 \\ Cu_2^2 \\ \vdots \\ Cu_{N-1}^{K-1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=:b} .$$

Nachdem wir das LGS gelöst haben, bekommen wir die Temperaturverteilung. Und im 2D-Fall ist das Verfahren auch so. Die Approximationen für den 2D-Fall sind

also

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{m,n}^k}{\partial t} &\approx \frac{f_{m,n}^k - f_{m,n}^{k-1}}{\Delta t}, \\ \frac{\partial^2 f_{m,n}^k}{\partial x^2} &\approx \frac{f_{m-1,n}^k - 2f_{m,n}^k + f_{m+1,n}^k}{\Delta x^2}, \\ \frac{\partial^2 f_{m,n}^k}{\partial y^2} &\approx \frac{f_{m,n-1}^k - 2f_{m,n}^k + f_{m,n+1}^k}{\Delta y^2}.\end{aligned}$$

Dann können wir für jeden Knoten eine lineare Gleichung

$$-f_{m,n}^k + Af_{m,n}^{k-1} + Bf_{m,n-1}^k + Bf_{m,n+1}^k + Cf_{m-1,n}^k + Cf_{m+1,n}^k = Du_{m,n}^k,$$

mit

$$\begin{aligned}A &= \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + 2k\Delta t \Delta x^2 + 2k\Delta t \Delta y^2}, \quad B = \frac{k\Delta t \Delta x^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + 2k\Delta t \Delta x^2 + 2k\Delta t \Delta y^2}, \\ C &= \frac{k\Delta t \Delta y^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + 2k\Delta t \Delta x^2 + 2k\Delta t \Delta y^2}, \quad D = -\frac{\Delta t \Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + 2k\Delta t \Delta x^2 + 2k\Delta t \Delta y^2}.\end{aligned}$$

erstellen. Nach der Nummerierung und nachdem die Gleichungen in Matrizenform umgeformt und gelöst werden, erhalten wir schließlich die Temperaturverteilung in den 2D-Fall.

2.3 Simulationen

Nach der theoretische Herleitung simulieren wir die Temperaturverteilung in einigen Fällen.

2.3.1 1D-Fall

Als das erste Beispiel für den homogenen Fall wird eine sinusförmige Anfangsbedingung genommen, wobei die Länge des Stabs $L = 10$ cm und die Wärmeleitfähigkeit $k = 0.1$ cm²/s sind. Die Ergebnisse aus der Modalanalyse und der FDM werden in der Abbildung 2.2 gezeigt. Der Grund für die unterschiedliche Aussehen besteht darin, dass die Abstände der Knoten von der MA und der FDM unterschiedlich sind.

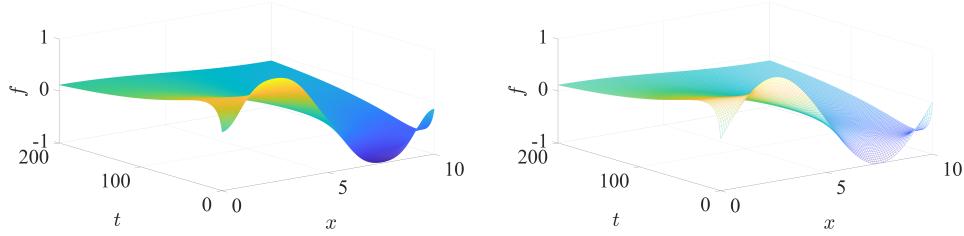


Abbildung 2.2: Temperaturverteilungen mit sinusförmiger Anfangsbedingung, links: MA mit $\Delta x = 0.01 \text{ cm}$, $\Delta t = 0.1 \text{ s}$, rechts: FDM mit $\Delta x = 0.1 \text{ cm}$, $\Delta t = 1 \text{ s}$.

Als das zweite Beispiel für den homogenen Fall wird eine treppenförmige Anfangsbedingung genommen. Die Ergebnisse aus der Modalanalyse und der FDM werden in der Abbildung 2.3 gezeigt.

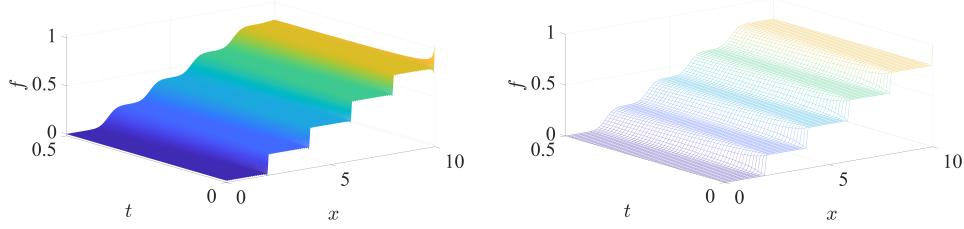


Abbildung 2.3: Temperaturverteilungen mit treppenförmiger Anfangsbedingung, links: MA mit $\Delta x = 0.001 \text{ cm}$, $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4} \text{ s}$, rechts: FDM mit $\Delta x = 0.1 \text{ cm}$, $\Delta t = 0.01 \text{ s}$.

Für den inhomogenen Fall haben werden auch zwei Fälle simuliert, jeweils mit Wärmeabstrahlung

$$u_{\text{WA}}(x, t) = -a \cdot f(x, t) ,$$

und punktförmiger Anregung

$$u_{\text{PA}}(x, t) = \sum_i u_i(t) \cdot \delta(x - x_i) .$$

Die Anfangsbedingung wird auch als die sinusförmige Anfangsbedingung angenommen. Die Ergebnisse aus der Modalanalyse und der FDM mit $a = 0.1$ werden in der Abbildung 2.4 gezeigt.

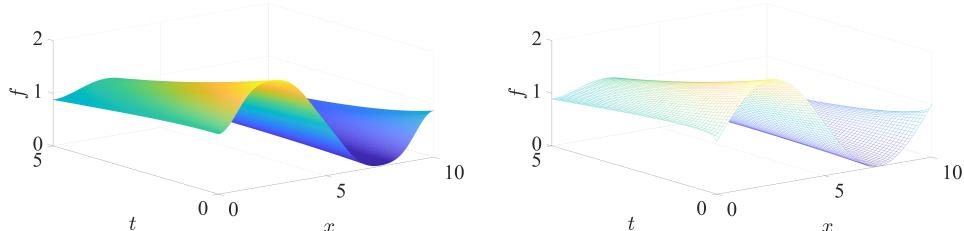


Abbildung 2.4: Temperaturverteilungen mit sinusförmiger Anfangsbedingung, links: MA mit $\Delta x = 0.01 \text{ cm}$, $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, rechts: FDM mit $\Delta x = 0.1 \text{ cm}$, $\Delta t = 0.1 \text{ s}$.

Als das zweite Beispiel wird punktförmige Anregung genommen. Die Ergebnisse aus der Modalanalyse und der FDM mit

$$u(x, t) = 0.1 \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \delta(x - 3) - 0.2 \sin(t) \cdot \delta(x - 5) + 0.01t \cdot \delta(x - 7)$$

werden in der Abbildung 2.5 gezeigt.

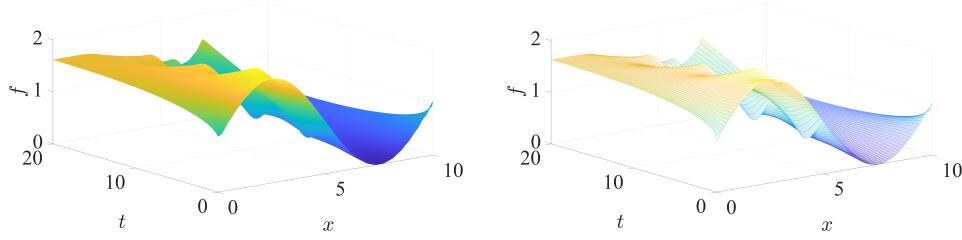


Abbildung 2.5: Temperaturverteilungen mit sinusförmiger Anfangsbedingung, links: MA mit $\Delta x = 0.01$ cm, $\Delta t = 0.01$ s, rechts: FDM mit $\Delta x = 0.1$ cm, $\Delta t = 0.1$ s.

2.3.2 2D-Fall

In den 2D-Fall wird sinusförmige Anfangsbedingung mit $L_x = 10$ cm, $L_y = 20$ cm, $k = 0.1$ cm²/s genommen. Die Ergebnisse werden in folgenden Abbildungen gezeigt.

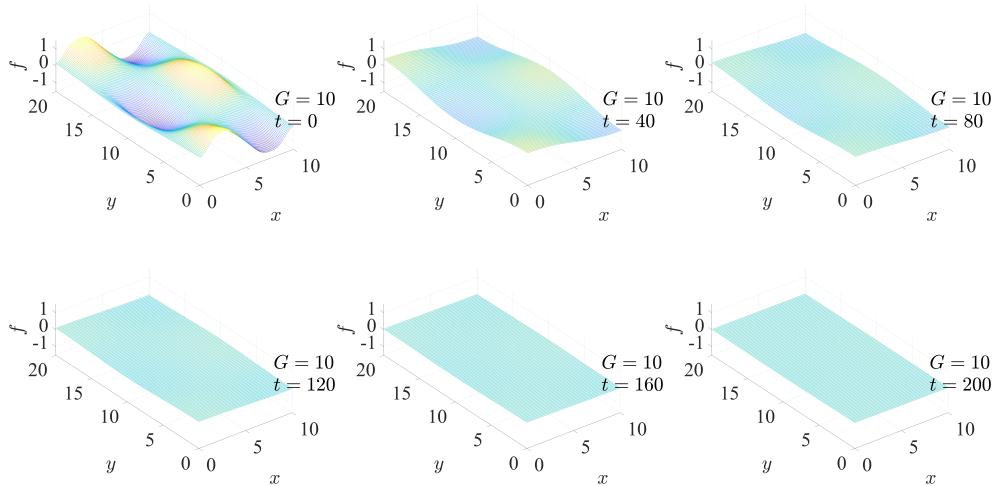


Abbildung 2.6: 2D-Temperaturverteilung aus der MA mit $\Delta x = 0.1$ cm, $\Delta y = 0.2$ cm, $\Delta t = 1$ s.