

## 动态压缩感知综述

荆楠<sup>1</sup> 毕卫红<sup>1</sup> 胡正平<sup>1</sup> 王林<sup>1</sup>

**摘要** 动态压缩感知 (Dynamic compressed sensing, DCS) 知由视频信号处理问题引出, 是压缩感知 (Compressed sensing, CS) 理论研究领域中新兴起的一个研究分支, 旨在处理信号支撑集随时间发生变化的时变稀疏信号, 较为成功的应用范例是动态核磁共振成像. 本文首先介绍动态系统模型, 给出时变稀疏信号支撑集缓慢变化的定义、时变稀疏信号的稀疏表示和感知测量的方法; 其次, 建立一个统一的时变稀疏信号重构模型, 基于该模型对现有算法进行分类, 简要综述时变稀疏信号的重构算法, 并且对比分析算法的性能; 最后, 讨论动态压缩感知的应用, 并对其研究前景进行展望.

**关键词** 动态压缩感知, 时变稀疏信号, 动态测量, 卡尔曼滤波, 视频压缩感知

**引用格式** 荆楠, 毕卫红, 胡正平, 王林. 动态压缩感知综述. 自动化学报, 2015, 41(1): 22–37

**DOI** 10.16383/j.aas.2015.c140087

## A Survey on Dynamic Compressed Sensing

JING Nan<sup>1</sup> BI Wei-Hong<sup>1</sup> HU Zheng-Ping<sup>1</sup> WANG Lin<sup>1</sup>

**Abstract** In video signal processing, dynamic compressed sensing (DCS) is a novel branch of compressed sensing (CS) theory for recovery of compressible, possibly with a slowly varying sparsity pattern, signal from a time sequence of noisy observations. Dynamic compressed sensing has been employed in dynamic magnetic resonance image reconstruction successfully. The system model for dynamic compressed sensing is first introduced, including definitions of slowly varying supports, sparse representations and stable measurement of the time-varying sparse signal. Then, a unified framework is formulated for reconstruction of the time-varying sparse signal. Based on the framework, classification is conducted for the existing algorithms whose main ideas, reconstruction procedures and performance are also commented briefly. Finally, the applications and future directions of dynamic compressed sensing are pointed out.

**Key words** Dynamic compressed sensing (DCS), time-varying sparse signals, dynamic measurement update, Kalman filter, video compressed sensing

**Citation** Jing Nan, Bi Wei-Hong, Hu Zheng-Ping, Wang Lin. A survey on dynamic compressed sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(1): 22–37

压缩感知 (Compressed sensing, CS) 理论自诞生以来, 一直是信号处理领域的研究热点之一<sup>[1]</sup>. 只要满足两个前提: 1) 信号是稀疏的, 或者通过某种正交变换可以稀疏表示 (例如小波变换、傅里叶变换); 2) 测量矩阵满足约束等距性条件, CS 理论就可以以极大概率准确重构稀疏信号. 现有压缩感知重建算法研究的是静态稀疏信号的重建问题, 即信号中非零元素的坐标和幅值, 以及测量矩阵不随时间的

变化而发生变化, 于是便可以通过最小  $\ell_1$  范数法等算法重建稀疏信号<sup>[2–4]</sup>. 然而, 在实际应用中, 稀疏信号不是固定不变的, 常呈现一种动态特性 (例如视频信号), 其支撑集及测量矩阵随时间动态变化, 因此称之为时变稀疏信号或者稀疏随机时间序列. 对于这种时变稀疏信号的重构, 上述静态 CS 重构算法需要显著增加测量工作量才能获得和静态情况下同样的重构精度, 这明显违背 CS 的初衷.

卡尔曼滤波器 (Kalman filter, KF)<sup>[5]</sup> 及其各种形式, 如扩展卡尔曼滤波器 (Extended Kalman filter, EKF)、无迹卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF) 和粒子滤波器 (Particle filter, PF) 是随机时间序列估计的有力工具, 在几乎所有的工程系统中均有广泛的应用. 受此启发, 美国爱荷华州立大学教授 Vaswani 于 2008 年首次提出一种基于降阶的卡尔曼滤波器的压缩感知 (Kalman filtered compressed sensing, KF-CS)<sup>[6]</sup> 方法, 该方法以一种支撑集缓慢变化的线性动态系统模型来描述时变稀疏信号的感知测量, 并通过图 1 所示的循环调用过

收稿日期 2014-02-14 录用日期 2014-08-06  
Manuscript received February 14, 2014; accepted August 6, 2014

国家自然科学基金 (61303233, 61201263, 61102110), 河北省高等学校科学技术研究青年基金 (QN20131058), 河北省自然科学基金 (F2014203062) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61303233, 61201263, 61102110), Natural Science Research Programs of Hebei Educational Committee for University Young Teachers (QN20131058), and National Natural Science Foundation of Hebei (F2014203062)

本文责任编辑 戴琼海

Recommended by Associate Editor DAI Qiong-Hai

1. 燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004

1. School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004

程完成对时变稀疏信号的动态更新. 随后一系列工作由此展开, 包括将 KF-CS 方法中的 KF 替换为最小二乘 (Least square, LS) 的最小二乘压缩感知 (Least squares CS-residual, LS-CS)<sup>[7]</sup> 方法、将 KF-CS 方法中的 DS (Dantzig selector) 替换为基追踪去噪 (Basis pursuit denoising, BPDN) 的修正 CS (Modified-CS)<sup>[8]</sup> 方法、基于拉格朗日乘子法的正则化修正 CS (Regularized modified-CS)<sup>[9]</sup> 方法等. 此外, Vaswani 等不但讨论这些方法的抗噪性能、误差界以及鲁棒性<sup>[8, 10–12]</sup>, 还给出几种典型的应用<sup>[13–15]</sup>.

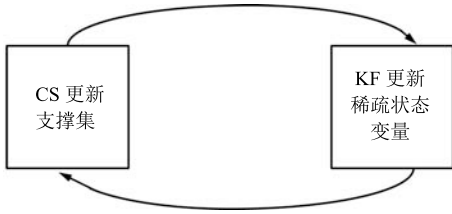


图 1 KF-CS 迭代更新稀疏随机序列  
Fig. 1 Iterative update of the sparse random sequence with KF-CS

鉴于 Vaswani 等<sup>[6–15]</sup> 开创性的研究工作, 近几年, 时变稀疏信号重构获得广泛的关注, 产生很多有价值的研究成果, 进而形成一整套比较完整的理论框架结构, 如图 2 所示, 本文称之为动态压缩感知 (Dynamic compressed sensing, DCS). 在理论上, DCS 主要包括搭建系统模型、时变稀疏信号的稀疏表示、测量矩阵的构造和重建算法的设计等问题的讨论; 在应用上, DCS 已经在视频信号处理、动态核磁共振成像、视频序列动态目标检测以及传感器网络数据融合等应用领域的测试平台上获得成功验证. 随着信号处理界顶级国际会议 ICASSP 为 DCS 开设专题讨论, IEEE 信号处理会刊等蜚声国际的著名期刊收录数量可观的文章, DCS 已经成为 CS 理论的一个重要研究分支, 并且成为近 5 年来的研究热点.

在讨论问题之前, 首先对一些概念作标注:  $\|\mathbf{x}_t\|_0$ ,  $\|\mathbf{x}_t\|_1 = \sum_{i=1}^N |\mathbf{x}_t(i)|$ ,  $\|\mathbf{x}_t\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_t^2(i)$  和  $\|\mathbf{x}_t\|_p = (\sum_{i=1}^N |\mathbf{x}_t(i)|^p)^{1/p}$  分别表示向量  $\mathbf{x}_t$  的  $\ell_0$  范数、 $\ell_1$  范数、 $\ell_2$  范数和  $\ell_p$  范数.  $T_t$  表示  $t$  时刻  $\mathbf{x}_t$  的支撑集, 即  $\mathbf{x}_t$  中非零元素坐标的集合, 支撑集中包含元素的数量是  $\mathbf{x}_t$  的稀疏度  $S_t$ ,  $S_t = \|\mathbf{x}_t\|_0$ .  $(\mathbf{x}_t)_{T_t}$  表示向量中的元素坐标从集合  $T_t$  中获取.  $T_t^c$  表示集合  $T_t$  的补集.  $\cup$  表示取并集,  $\cap$  表示取交集,  $\Delta$  表示集合的增量. 对于矩阵  $A$ ,  $\text{rank}(A)$  表示矩阵的秩,  $\text{tr}(A)$  表示矩阵的迹.

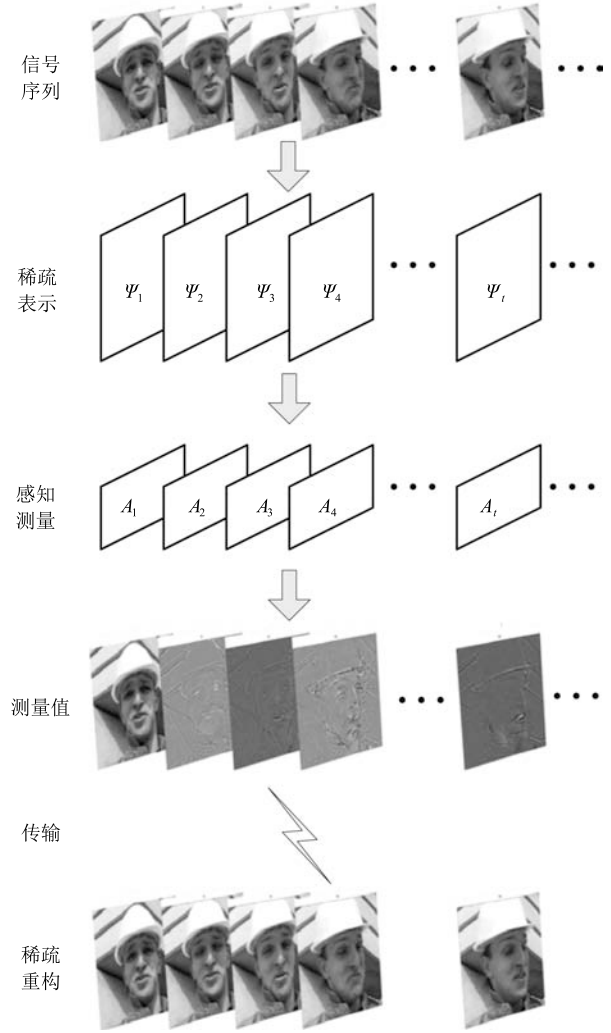


图 2 动态压缩感知理论框架  
Fig. 2 Theory frame of DCS

## 1 动态系统模型

假设  $\{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$  是一个  $N$  维离散的随机过程,  $\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}^N$  是  $t$  时刻的状态向量,  $\mathbf{x}_t$  是稀疏的或者通过某种正交变换可以稀疏表示, 其支撑集随时间的变化而缓慢变化. 根据  $N$  的取值,  $\mathbf{x}_t$  分成如下两种类型: 当  $N \gg 1$  时,  $\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}^N$ ,  $t = 1, \dots, \infty$  是  $N$  维时变稀疏信号; 当  $N = 1$  时,  $\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}$ ,  $t = 1, \dots, \infty$  是一个时域流信号. 第 1 种类型虽然信号  $\mathbf{x}_t$  的支撑集随时间缓慢变化, 但是其维度始终是一个固定的值, 因此可以按照静态 CS 系统建模方法, 对每一时刻的状态向量  $\mathbf{x}_t$  独立进行稀疏表示和感知测量. 第 2 种类型通过时域分块的方式将时域流信号转换成多个有限维的块信号进行稀疏表示和感知测量, 这里为了给出  $\mathbf{x}_t$  统一表达形式, 假设分块后信号的维度仍然为  $N \gg 1$ ,  $\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}^N$  表示  $t$  窗的状态向量, 则关于  $\{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$  的动态系统模型可统一用如下两个

方程来描述

$$\mathbf{x}_t = f_t(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{v}_t \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_t = A_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad (2)$$

其中, 式 (1) 用于描述系统的动态特性,  $f_t(\cdot)$  表示  $\mathbf{x}_t$  的状态转移函数,  $\mathbf{v}_t \in \mathbf{R}^N$  表示过程噪声 (也称为状态更新). 式 (2) 用于描述稀疏状态向量  $\mathbf{x}_t$  的感知测量,  $A_t \in \mathbf{R}^{M \times N}$  ( $M < N$ ) 是  $\mathbf{x}_t$  的观测矩阵,  $\mathbf{y}_t \in \mathbf{R}^M$  表示  $\mathbf{x}_t$  的观测向量,  $\mathbf{w}_t$  表示观测噪声. 如果过程噪声  $\mathbf{v}_t \sim N(0, Q_t)$  与观测噪声  $\mathbf{w}_t \sim N(0, R_t)$  均是高斯白噪声 ( $Q_t \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ,  $R_t \in \mathbf{R}^{M \times M}$  分别表示噪声的协方差矩阵), 同时状态转移函数是线性的 (可由  $f_t(x) = F_t x$  来表示,  $F_t \in \mathbf{R}^{N \times N}$  是状态转移矩阵), 则式 (1) 和式 (2) 描述的就是一个线性的动态系统模型. 为了简化问题的讨论, 现有的工作均假设  $\mathbf{x}_t$  的状态转移是一个线性的过程, 即式 (1) 由式 (3) 来替换.

$$\mathbf{x}_t = F_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t \quad (3)$$

$F_t$  可以是一个单位矩阵或者是一个常数<sup>[6, 16–18]</sup>. DCS 要解决的问题是基于式 (2) 和式 (3) 准确重建每一时刻的稀疏状态向量. 在介绍稀疏表示和感知测量之前, 首先给出支撑集缓慢变化的定义.

### 1.1 支撑集缓慢变化

静态 CS 理论对稀疏的定义可以简单地描述为: 对于自然信号  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ , 大多数情况下, 信息是冗余的, 可以通过正交变换  $\mathbf{x} = \Psi \mathbf{s}$  获得信号  $\mathbf{x}$  的稀疏表示  $\mathbf{s}$ , 其中  $\Psi$  是正交变换矩阵, 满足  $\Psi \times \Psi^H = I$ , 如果向量  $\mathbf{s}$  中仅有很少的  $S$  个分量为大系数非零元素, 其余  $N - S$  个分量的系数近似为零, 则称  $\mathbf{s}$  为  $\mathbf{x}$  经过  $\Psi$  变换后的稀疏表示. 在整个重建过程当中, 稀疏信号  $\mathbf{s}$  的支撑集是不变的. 然而, 在实际应用当中, 稀疏信号的支撑集随时间动态变化, 任意相邻两个时刻的稀疏信号的支撑集具有较强的时间相关特性, 即  $T_t$  与  $T_{t-1}$  有较大部分重叠<sup>[6, 19]</sup>, 支撑集所对应的非零元素幅值也随时间动态变化. 现有的研究成果均假设支撑集随时间缓慢变化, 这包括两方面的含义: 一方面支撑集中元素的数量缓慢变化; 另一方面支撑集对应非零元素的幅值缓慢变化. Vaswani 等最早给出支撑集缓慢变化的数学描述<sup>[6–8]</sup>.

**假设 1.** 设  $S_{diff, \max}$  表示支撑集元素数量变化的最大值, 在任意时刻  $t$ ,  $S_{t, add}$  表示支撑集中新增元素的数量,  $S_{t, del}$  表示支撑集中删除元素的数量, 如果满足  $S_{t, add} \leq S_{diff, \max} \ll S_t$ ,  $S_{t, del} \leq S_{diff, \max} \ll S_t$ , 则表示支撑集元素数量是缓慢变化的.

**假设 2.** 任意相邻两个时刻的状态变量如果满足  $\|(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1})_{T_t}\|_2 \ll \|(\mathbf{x}_t)_{T_t}\|_2$ , 则表示支撑集对应非零元素的幅值缓慢变化.

此外, Ziniel 等和 Zachariah 等分别以转移概率的形式描述支撑集缓慢变化的过程<sup>[18, 20–21]</sup>. 其中, Ziniel 用  $\mathbf{x}_t(i) = \mathbf{b}_t(i) \times \boldsymbol{\theta}_t(i)$  表示  $\mathbf{x}_t$  的任意一个分量, 其中  $\mathbf{b}_t(i) \in \{0, 1\}$  用于表示该分量是否为 0, 如果  $\mathbf{b}_t(i) = 1$  该分量不为 0, 用  $\boldsymbol{\theta}_t(i) \in \mathbf{R}$  表示这个分量的幅值. 定义两个转移概率  $p_{10} = \Pr\{\mathbf{b}_t(i) = 1 | \mathbf{b}_{t-1}(i) = 0\}$ ,  $p_{01} = \Pr\{\mathbf{b}_t(i) = 0 | \mathbf{b}_{t-1}(i) = 1\}$ , 用于表示任意一个分量在相邻两个时刻发生变化的转移概率, 如果转移概率的值很小表示支撑集缓慢变化.

### 1.2 信号的稀疏表示

当  $\mathbf{x}_t$  为  $N$  维时变稀疏信号  $\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}^N$ ,  $t = 1, \dots, \infty$ , 可以按照静态 CS 稀疏表示方法, 对每一时刻的状态向量  $\mathbf{x}_t$  独立进行稀疏表示, 这使得稀疏表示矩阵之间是相互独立的, 这些矩阵相互串联起来便构成一种块对角的稀疏表示矩阵流, 如图 3(a) 所示.

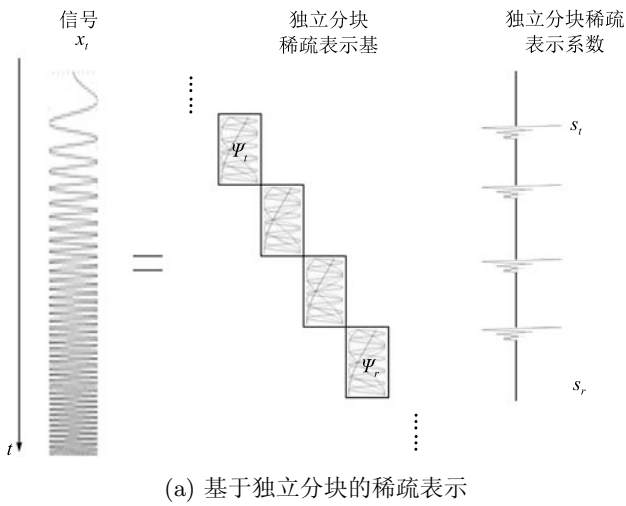
如果对时域流信号  $\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}$ ,  $t = 1, \dots, \infty$ , 进行如图 3(a) 所示分块操作, 每块的长度均为  $N$ ,  $\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}^N$  为第  $t$  块的块向量, 这样仍然可以采用静态 CS 方法对每一块向量  $\mathbf{x}_t$  独立进行稀疏表示. 然而, 这种简单的分块操作会引入块效应, 影响稀疏重建的效率, 针对这个问题, Salman<sup>[19]</sup> 在最新的研究成果中基于重叠的正交变换 (Lapped orthogonal transform, LOT) 方法构造正交基, 简单概括为将时间轴等分成多个首尾重叠的时隙, 通过这种重叠机制描述支撑集的时间相关特性. 在每个时隙内部用 LOT 基函数对信号进行稀疏表示, 这种 LOT 基函数构造的稀疏表示矩阵也是首尾相互重叠, 如图 3(b) 所示. Salman 还设计一个长度为  $N$  的观测窗口在时间轴上滑动, 窗口内包含一定数量的时隙, 重建算法仅在窗口内进行, 当有新时隙滑入或者旧时隙滑出窗口, 支撑集随之发生变化. 通过控制窗口滑动的速度可以实现支撑集慢变的过程.

AIC (Analog information convertor) 结构也可以用于这种时域流信号的数学建模<sup>[22]</sup>. AIC 结构使用有限长度的观测窗对信号进行观测, 由于每次窗口滑动的长度相对于窗口长度较小, 前后窗口内的信号具有较大的重复性, 因此可以认为支撑集缓慢变化. 在长度为  $N$  的窗口内, 信号是稀疏的或者可以通过正交变换获得其稀疏表示.

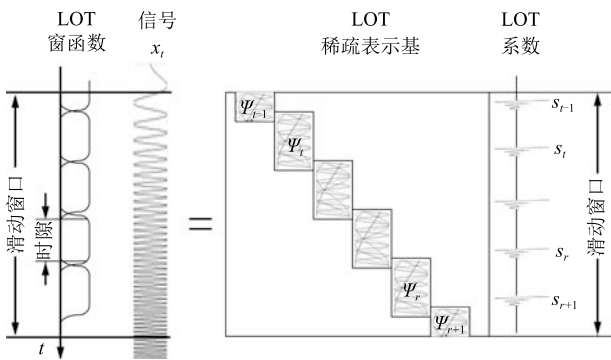
### 1.3 感知测量

对于任意时刻  $t$ , 测量方程 (2) 中的测量矩阵  $A_t$ , 如果  $M = N$  且  $\text{rank}(A_t) = M$ , 式 (2) 有唯一

解. 当  $M < N$  的时候, 即使  $\text{rank}(A_t) = M$ ,  $A_t$  是个扁阵, 式 (2) 是欠定的, 有无穷多个解, 很难重构原始信号. CS 理论的传奇之处在于, 如果原始信号的稀疏度是  $S$ , 对于任意  $\delta_S \in [0, 1)$ , 测量矩阵  $A_t$  满足  $(S, \delta_S)$  约束等距性条件 (Restricted isometry property, RIP), 只要测量值、信号长度和稀疏度存在关系  $M \geq S \log_2(N/S)$ , CS 理论就可以以极大概率完美重构原始信号<sup>[2]</sup>. 对于  $N$  维时变稀疏信号  $\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}^N$ ,  $t = 1, \dots, \infty$ , DCS 在构建测量方程的时候沿用静态 CS 思想, 即任意相邻两个时刻稀疏状态向量的感知测量矩阵是相互独立的, 将所有时刻的测量矩阵串联在一起构成一种块对角的测量矩阵流, 如图 4(a) 所示. 静态 CS 中满足 RIP 的测量矩阵, 如高斯随机矩阵、局部傅里叶矩阵和托普利兹 (Toeplitz) 矩阵等都可以直接应用到 DCS 的测量方程当中<sup>[23]</sup>.



(a) Independent blocking-based representation of a signal



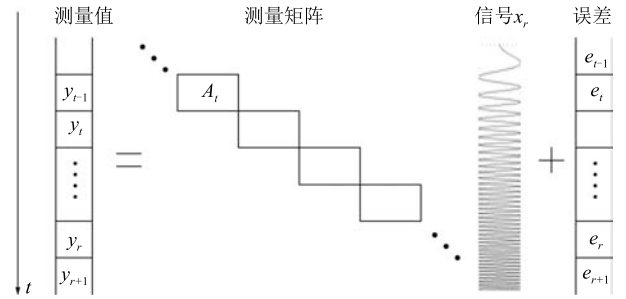
(b) LOT-based representation of a signal

图 3 支撑集慢变的时变稀疏信号的稀疏表示

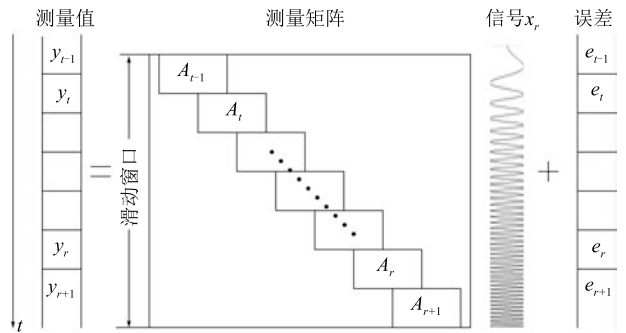
Fig. 3 Sparse representation for the time-varying sparse signal with a slowly varying sparsity pattern

与上述独立分块感知测量不同, Salman 基于

LOT 稀疏表示方法, 定义一种重叠的感知测量系统用于构造时域流信号的测量方程, 如图 4(b) 所示<sup>[19]</sup>. 与稀疏表示的过程相类似, 相邻两个时隙的测量矩阵是相互重叠的, 一个可以在时间轴上滑动的窗口控制新的测量加入、旧的测量移出, 进而完成时域流信号的动态测量.



(a) Independent blocking measurement of a signal



(b) Overlapping measurement of a signal

图 4 支撑集慢变的时变稀疏信号的感知测量

Fig. 4 Measurement for the time-varying sparse signal with a slowly varying sparsity pattern

## 2 时变稀疏信号重构

静态 CS 的稀疏重构是在满足测量方程的所有情况中找到具有最稀疏特性的信号, 即求解如下  $\ell_0$  范数最优化问题.

$$P0: \quad \min \|\hat{\mathbf{x}}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = A\hat{\mathbf{x}} \quad (4)$$

然而,  $\ell_0$  范数最优化问题是一个 NP-hard 问题, 在多项式时间内难以求解<sup>[3]</sup>. 于是 Candés 等提出一种次最优的凸优化方法, 即最小  $\ell_1$  范数法来替换 P0 问题<sup>[4]</sup>.

$$P1: \quad \min \|\hat{\mathbf{x}}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = A\hat{\mathbf{x}} \quad (5)$$

针对 P0 或 P1 问题, 大量的次最优重建算法逐渐发展起来, 其中主要有 6 类算法<sup>[24]</sup>: 1) 凸松弛类算法, 如 LASSO<sup>[25]</sup>、DS<sup>[26]</sup>、基追踪去噪 (BPDN)<sup>[27]</sup> 等; 2) 贪婪算法, 如匹配追踪 (Matching pursuit,

MP)、正交匹配追踪 (Orthogonal matching pursuit, OMP)、压缩采样匹配追踪 (Compressive sampling matching pursuit, CoSaMP) 等<sup>[28]</sup>; 3) 迭代阈值法, 如置信传播 (Belief propagation, BP)<sup>[29]</sup>、硬阈值 (Hard threshold, HT)<sup>[30]</sup> 等; 4) 非凸优化算法, 如贝叶斯压缩感知 (Bayesian compressed sensing, BCS)<sup>[31]</sup>、平滑的  $\ell_0$  范数 (Smoothed  $\ell_0$  norm, SLO)<sup>[32]</sup> 等; 5) Bregman 迭代算法<sup>[33]</sup>; 6) 组合算法<sup>[34]</sup>. 国内学者<sup>1</sup> 也发表了大量有关 CS 的研究成果<sup>[23, 35–39]</sup>.

借鉴静态 CS 稀疏重构算法的思想, DCS 的稀疏重构算法是 P0 或者 P1 问题与状态转移方程 (3) 的联合优化过程. 针对不同的优化目标, DCS 重构算法的优化框架不尽相同. Charles 等<sup>[40]</sup> 以 P1 问题为例, 将 DCS 重构算法的优化框架概括为如下三种情况:

1) 如果优化目标是状态向量  $\mathbf{x}_t$ , 则联合优化框架可表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \arg \min_{\mathbf{x}_t} \left[ \|\mathbf{y}_t - A_t \mathbf{x}_t\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{x}_t\|_1 + \lambda_2 \|\mathbf{x}_t - F_t \mathbf{x}_{t-1}\|_2^2 \right] \quad (6)$$

2) 如果优化目标是过程噪声  $\mathbf{v}_t$ , 则联合优化框架可表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \arg \min_{\mathbf{x}_t} \left[ \|\mathbf{y}_t - A_t \mathbf{x}_t\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{x}_t - F_t \mathbf{x}_{t-1}\|_1 \right] \quad (7)$$

3) 如果优化目标是状态向量  $\mathbf{x}_t$  与过程噪声  $\mathbf{v}_t$ , 则联合优化框架可表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \arg \min_{\mathbf{x}_t} \left[ \|\mathbf{y}_t - A_t \mathbf{x}_t\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{x}_t\|_1 \times \lambda_2 \|\mathbf{x}_t - F_t \mathbf{x}_{t-1}\|_1 \right] \quad (8)$$

其中,  $\lambda_1$  是稀疏优化参数,  $\lambda_2$  表示测量噪声  $\mathbf{w}_t$  的协方差与过程噪声  $\mathbf{v}_t$  的协方差的比值.

此外, Carmi<sup>[41]</sup> 提出一种压缩自回归模型 (Compressive auto regressive, CAR), 其中, CAR 模型的系数是稀疏变量, 由模型的系数构造的状态转移矩阵  $F_t$  是稀疏矩阵, Carmi<sup>[41]</sup> 以  $F_t$  作为优化目标, 给出较为特殊的联合优化框架

$$\begin{aligned} & \min \|\hat{F}_t\|_1 \\ & \text{s.t.} \quad \text{tr} \left\{ \mathbf{E} \left[ \left( F_t - \hat{F}_t \right) \times \left( F_t - \hat{F}_t \right)^H \right] \right\} \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\varepsilon \in \mathbf{R}$  为一个充分小的常数. Gui 等基于最小二阶矩 (Least mean square, LMS) 和最小四阶矩

(Least mean fourth, LMF) 自适应算法估计时变稀疏信道, 其联合优化框架分别为<sup>[42–44]</sup>

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \arg \min_{\mathbf{x}_t} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{y}_t - A_t \mathbf{x}_t)^2 + \lambda_1 \|\mathbf{x}_t\|_1 + \text{系统状态更新} \right] \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \arg \min_{\mathbf{x}_t} \left[ \frac{1}{4} (\mathbf{y}_t - A_t \mathbf{x}_t)^4 + \lambda_1 \|\mathbf{x}_t\|_1 + \text{系统状态更新} \right] \quad (11)$$

除求解 P0 和 P1 问题之外,  $\ell_p$  ( $0 < p < 1$ ) 范数最优化也可以用于时变稀疏信号重建<sup>[42–44]</sup>. 综上所述, 本文将 DCS 重构时变稀疏信号的联合优化框架概括为

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \arg \min_{\mathbf{x}_t} [\text{约束条件} + \text{稀疏判罚} + \text{系统状态更新}] \quad (12)$$

式 (12) 给出 DCS 重构时变稀疏信号的关键问题: 1)  $\ell_0$  范数、 $\ell_1$  范数和  $\ell_p$  范数稀疏判罚函数的选择. 2) 约束函数的选择. 由式 (2) 给出的约束条件有多种, 常见的有等式约束、 $\ell_2$  范数约束、 $\ell_\infty$  范数约束<sup>[45]</sup> 和四阶矩约束<sup>[42]</sup>. 3) 系统状态更新方法的选择. 系统状态更新方法与 DCS 重构算法密切相关, 分为两类. 第一类方法直接求解由式 (3) 给出的状态转移方程. 此类方法中系统状态更新本质上由式 (3) 中过程噪声的性质来决定, 如果式 (3) 是线性的并且过程噪声是高斯白噪声, 系统状态更新可以采用基于最小均方误差 (Minimum mean square error, MMSE) 准则的 KF 或者自适应滤波器等经典的方法直接求解, 或者结合静态 CS 方法间接求解; 如果式 (3) 是非线性的并且过程噪声是非高斯白噪声, 可以选择 EKF、UKF 和 PF 等多种方法获得状态变量的更新值. 第二类方法令当前时刻状态变量  $\mathbf{x}_t$  的支撑集为  $T_t$ , 则  $(\mathbf{x}_t)_{T_t}$  可分解为

$$(\mathbf{x}_t)_{T_t} = (\mathbf{x}_t)_{T_{t-1}} + (\mathbf{x}_t)_\Delta \quad (13)$$

式 (13) 中,  $T_t = T_{t-1} \cup \Delta$ ,  $\Delta \ll T_{t-1}$  且  $\Delta \ll T_t$ ,  $\Delta$  表示相邻两个时刻系统状态变量支撑集的变化值. 由第 1.1 节的假设 1 和假设 2 可知状态变量的支撑集缓慢变化, 这表明相邻两时刻状态变量的绝大多数分量相同, 因此,  $(\mathbf{x}_t)_{T_{t-1}} = (\mathbf{x}_{t-1})_{T_{t-1}}$ , 将其代入式 (13), 得:

$$(\mathbf{x}_t)_{T_t} = (\mathbf{x}_{t-1})_{T_{t-1}} + (\mathbf{x}_t)_\Delta \quad (14)$$

当式 (3) 中  $F_t = I$  或为常数时, 式 (13) 可以转变为式 (14) 这种特殊情况. 式 (14) 指出当前时刻的系统状态  $(\mathbf{x}_t)_{T_t}$  由上一时刻系统状态  $(\mathbf{x}_{t-1})_{T_{t-1}}$

<sup>1</sup>http://blog.csdn.net/abcjennifer/article/details/7724360

及系统状态在相邻两时刻之间的变化值  $(\mathbf{x}_t)_\Delta$  构成,  $(\mathbf{x}_t)_\Delta$  也称为系统驱动噪声. 此类系统状态更新方法本质上是以  $(\mathbf{x}_{t-1})_{T_{t-1}}$  作为本时刻的先验知识, 采用静态 CS 方法更新  $(\mathbf{x}_t)_\Delta$ .

综上所述, 约束条件、稀疏判罚和系统状态更新方法三者不同组合形成不同的 DCS 重构算法. 与系统状态更新方法的分类相对应, DCS 重构算法根据是否采用状态滤波器 (State filtering methodologies, SFM)<sup>[46]</sup> 可以分成两大类: 1) 基于状态滤波方法的 DCS 稀疏重构, 对应第一类系统状态更新方法; 2) 非状态滤波方法的 DCS 稀疏重构, 对应第二类系统状态更新方法. 第一类方法按照是否通过状态滤波方法直接获取最稀疏解又分为混合型 and 自依赖型. 此外, 根据系统是否线性、观测噪声和过程噪声是否是高斯噪声, 状态滤波器的选择又可分为线性滤波器 (如 KF) 和非线性滤波器 (如 EKF、UKF、PF). 第二类方法按照  $(\mathbf{x}_t)_\Delta$  的求解方法分为最小  $\ell_1$  范数法、贝叶斯统计推断法和贪婪算法. DCS 重构算法的分类如图 5 所示.

## 2.1 基于状态滤波器的 DCS 稀疏重构

Carmi 等首次提出 SFM<sup>[46]</sup>, 其含义是按照某种最优准则对随时间变化的随机变量或随机向量做出估计的滤波方法, 常用的包括各种自适应滤波器、维纳滤波器、KF 及其各种形式.

### 2.1.1 混合方法

混合方法指的是状态滤波器结合诸如最小  $\ell_1$  范数法等优化算法重构时变稀疏信号.

Vaswani 最早提出的 KF-CS 算法属于此种类

型<sup>[6]</sup>. 如果只有假设 1 成立, 且上一时刻的支撑集  $T_{t-1}$  已知, 根据观测方程 (2) 和状态转移方程 (3), KF-CS 算法不但可以以极大概率重建  $\mathbf{x}_t$ , 而且能够准确重建本时刻支撑集  $T_t$ . 算法的大致过程如下:

**步骤 1.** 根据支撑集先验知识 (即  $T_{t-1}$  已知), 采用 KF 初步预测当前时刻稀疏状态向量  $(\hat{\mathbf{x}}_t)_{T_{t-1}}$ , 并获取 KF 滤波误差  $\tilde{\mathbf{e}}_t$ .

**步骤 2.** 基于广义似然比方法 (Generalized likelihood ratio test, G-LRT) 计算  $\|\tilde{\mathbf{e}}_t\|_2^2$ , 如果  $\|\tilde{\mathbf{e}}_t\|_2^2$  的值超出事先设定的门限值, 则表明支撑集发生变化, 采用 DS 方法估计支撑集的变化值  $\Delta$ , 当前时刻支撑集取上一时刻支撑集与本时刻支撑集变化值的并集  $T_t = T_{t-1} \cup \Delta$ . 支撑集更新后, 再次运行 KF, 获得当前时刻时变稀疏信号的估计值  $(\hat{\mathbf{x}}_t)_{T_t}$ .

步骤 1 与步骤 2 迭代进行, 直至低于门限值, 迭代后的估计值将送入步骤 3 进行纠错.

**步骤 3.** 由于 DS 估计产生的误差而导致错误地删除或增加支撑集中的元素, 因此, 通过改变参数减小这种误差. KF 是基于 MMSE 准则的线性最优滤波器, 然而实际应用当中, 过程噪声和观测噪声可能是非高斯白噪声, 并且系统可能是非线性的, KF 方法将无法给出系统的最优估计. KF 有多种形式, 如 PF 可用于解决上述非高斯非线性状态估计问题<sup>[14]</sup>.

KF-CS 算法的优点在于估计支撑集的变化值  $\Delta$ , 而不是估计整个支撑集  $\Delta \ll T_t$ , 因此 DS 算法的计算复杂度将会大大降低. 然而, 从支撑集中剔除错误判决时, KF-CS 方法没有给出严密的数学方法, 仅从经验角度判断支撑集中的哪些元素需要删除, 使

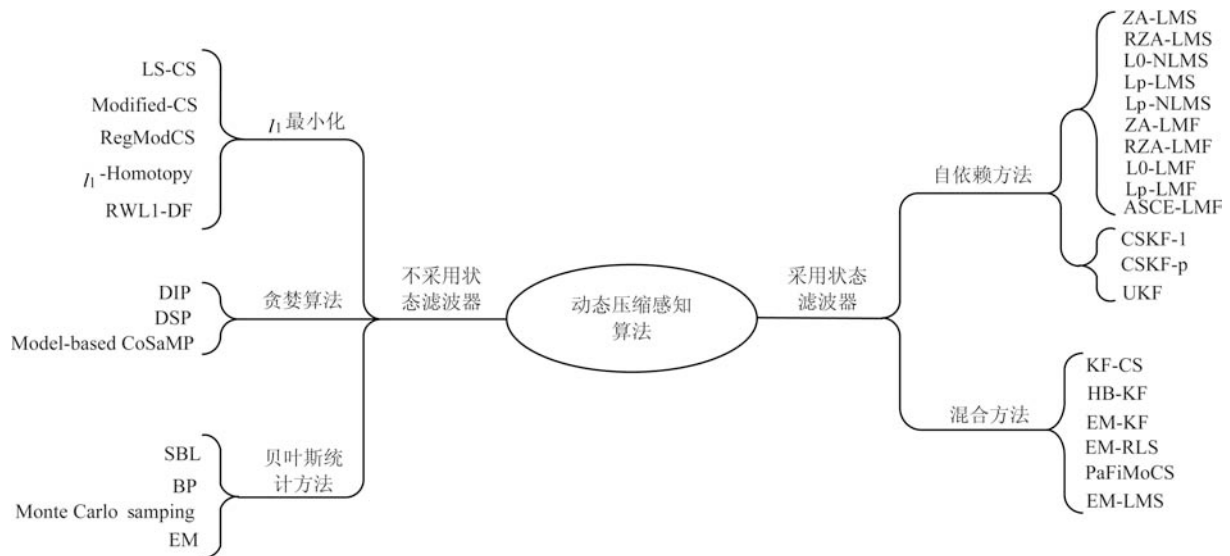


Fig. 5 Classification of DCS algorithms

得估计结果具有一定随机性. DS 需要测量矩阵严格满足 RIP 才能精确重构稀疏信号, 然而很多实际问题并不能满足上述条件, 因此 DS 算法的性能会变得很差, 导致较大判决误差. 为了解决上述问题, 研究人员还尝试将 KF 与性能较好的贝叶斯统计优化方法相结合, Karseras 等基于稀疏贝叶斯学习 (Sparse Bayesian learning, SBL)<sup>[47]</sup> 提出一种分层贝叶斯卡尔曼滤波 (Hierarchical Bayesian Kalman filters, HB-KF) 算法<sup>[16]</sup>, 该算法将式 (3) 中的过程噪声  $\mathbf{v}_t$  定义为一个稀疏的超参数  $\alpha_t$ , 用于状态变量  $\mathbf{x}_t$  的稀疏提升. 在 HB-KF 算法执行过程中, KF 用于更新系统状态向量  $\mathbf{x}_t$ , 而贝叶斯统计优化方法用于求解稀疏判罚函数. 此类基于贝叶斯方法的缺点是需要已知稀疏状态向量  $\mathbf{x}_t$ 、观测向量  $\mathbf{y}_t$ 、超参数  $\alpha_t$  等变量和参量之间概率分布的先验知识.

自适应滤波器也常用于时变稀疏信号重构. Angelosante 等基于 RLS 和  $\ell_1$  判罚函数, 提出一种时间-范数联合加权的重建算法<sup>[48]</sup>. Kalouptsidis 等将 KF、自适应滤波器和期望最大化 (Expectation maximization, EM) 算法相结合, 提出 EM-KF、EM-LMS 等多种自适应稀疏更新算法<sup>[17]</sup>.

### 2.1.2 自依赖方法

自依赖方法是指仅使用状态滤波器就可以直接获取信号的最稀疏解, 典型的代表工作是 Carmi 等提出的基于 KF 及其各种形式的 CSKF-1、CSKF-p 和 UCS (Unscented compressed sensing) 算法<sup>[41, 46, 49]</sup>. 本小节以 CSKF-1 算法为例介绍此类算法的基本原理. 如果考虑观测误差  $\mathbf{w}_t$ , P1 问题还可以等效地表示成如下形式

$$\min_{\mathbf{x}_t} \|\mathbf{x}_t\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{A}_t \mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t\|_2^2 < \varepsilon \quad (15)$$

根据对偶原理<sup>[49]</sup>, 在任意时刻  $t$ , 将式 (15) 中的优化部分  $\min_{\mathbf{x}_t} \|\mathbf{x}_t\|_1$  与约束部分  $\|\mathbf{A}_t \mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t\|_2^2 < \varepsilon$  交换位置, 可表示为

$$\min_{\mathbf{x}_t} \|\mathbf{A}_t \mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}_t\|_1 < \varepsilon' \quad (16)$$

因此, P1 问题便转化为一个非线性不等式约束 KF 问题. 此类问题的求解方法已经发展成熟<sup>[50]</sup>, Carmi 等基于其中的一种伪测量 (Pseudo measurement, PM) 方法来求解非线性不等式约束 KF 问题<sup>[49]</sup>. 首先, 用 KF 预测当前时刻的稀疏状态向量  $\hat{\mathbf{x}}_t$  及其协方差矩阵  $\hat{\mathbf{P}}_t$ ; 其次, 将  $\|\mathbf{x}_t\|_1 < \varepsilon'$  构造一个伪观测方程, 称之为 PM 方程,  $\tilde{\mathbf{H}} \mathbf{x}_t = \varepsilon'$ , 其中  $\tilde{\mathbf{H}}$  是 PM 矩阵; 最后, 将  $\hat{\mathbf{x}}_t$  和  $\hat{\mathbf{P}}_t$  作为本步骤的初始值, 再次运行 KF, 迭代更新这个 PM 方程的状态向量及其协方差矩阵, 迭代后得出的结果即为式 (15) 的最稀疏解. 如果系统是非线性的, Carmi

等将 KF 替换为 UKF 来完成 PM 方程的求解<sup>[46]</sup>. Gui 等基于 LMS、LMF 等自适应算法, 针对不同的稀疏判罚函数提出一系列自适应的时变稀疏信号重构算法<sup>[42-44]</sup>.

相对于混合方法需要已知某些参数的先验知识, 此类方法仅需要给出状态向量及其协方差的初始值就可以完成时变稀疏信号的重建, 并且只要协方差不为零, 初始值可以任意指定. 自依赖方法的缺点是需要多次迭代才能完成稀疏信号的求解, 如果迭代次数过大, 将严重增加算法的计算复杂度.

## 2.2 非状态滤波器的 DCS 重构

非状态滤波器的 DCS 重构方法对应第二类系统状态更新方法. 根据式 (13) 可知, 非状态滤波器的 DCS 重构算法将上一时刻状态向量的估计值  $(\mathbf{x}_{t-1})_{T_{t-1}}$  及其支撑集  $T_{t-1}$  作为本时刻状态估计的先验知识, 采用静态 CS 方法重构状态向量的变化值  $(\mathbf{x}_t)_\Delta$ , 由于支撑集缓慢变化, 重构  $(\mathbf{x}_t)_\Delta$  的计算复杂度要远低于重构  $(\mathbf{x}_t)_{T_t}$  的计算复杂度. 非状态滤波器 DCS 重构算法现有的主要研究成果分为如下三种.

### 2.2.1 最小 $\ell_1$ 范数法

自 KF-CS 提出之后, Vaswani 在随后的一系列研究成果中都沿用 KF-CS 算法中支撑集与状态变量分步更新的设计思想. LS-CS 算法是 KF-CS 方法的简单扩展, 将 KF-CS 算法中 KF 换成 LS, G-LRT 计算的是 LS 估计余差的  $\ell_2$  范数<sup>[7]</sup>. Vaswani 等还提出一种 Modified-CS 方法, 该方法已知本时刻支撑集部分先验知识 (由于支撑集是缓慢变化, 因此  $T_t \cap T_{t-1} \neq \emptyset$ ), 借助这些先验知识, 该方法能够以非常少的观测值精确重建原始信号, 其优化框架如下<sup>[8]</sup>

$$\min_{\mathbf{x}_t} \left\| (\mathbf{x}_t)_{T_{t-1}^c} \right\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t \quad (17)$$

Modified-CS 采用 BPDN 算法计算式 (17) 的解  $(\hat{\mathbf{x}}_t)_{T_t}$ , 随后通过  $\hat{T}_t = \{i \in [1, \dots, N] : (\hat{\mathbf{x}}_t)_{T_t} > \alpha\}$  计算当前时刻支撑集的估计值  $\hat{T}_t$ ,  $\hat{T}_t$  同时也是下一时刻支撑集的先验知识. 式 (17) 优化过程的物理意义指出, 如果上一时刻支撑集  $T_{t-1}$  已知,  $(\hat{\mathbf{x}}_t)_{T_t}$  的支撑集  $T_t$  由  $T_{t-1}$  和支撑集最小增量  $\Delta_{\min}$  取并集获得, 即  $T_t = T_{t-1} \cup \Delta_{\min}$ . 支撑集最小增量  $\Delta_{\min} \subset T_{t-1}^c$ , 或者说算法在  $T_{t-1}$  的补集  $T_{t-1}^c$  内寻找到式 (17) 的最稀疏解而不是在整个整数范围内的最稀疏解. 在此基础上, 做进一步假设, 如果不但已知上一时刻的支撑集  $T_{t-1}$ , 还已知上一时刻稀疏状态向量的估计值  $(\hat{\mathbf{x}}_{t-1})_{T_{t-1}}$ , Vaswani 等又提出一种正则化 Modified-CS (Regularized modified-CS, RegModCS) 方法进一步提高重构精度<sup>[9]</sup>, 该方法将相邻两个时刻稀疏状态向量在支撑集  $T_{t-1}$  中元素



的欧氏距离  $\|(\mathbf{x}_t)_{T_{t-1}} - (\hat{\mathbf{x}}_{t-1})_{T_{t-1}}\|_2^2$  加入到优化式 (17) 中, 如式 (18) 所示:

$$\min_{\mathbf{x}_t} \left\{ \gamma \left\| (\mathbf{x}_t)_{T_{t-1}^c} \right\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t\|^2 + \frac{1}{2} \lambda \left\| (\mathbf{x}_t)_{T_{t-1}} - (\hat{\mathbf{x}}_{t-1})_{T_{t-1}} \right\|_2^2 \right\} \quad (18)$$

式 (18) 中,  $\gamma$  和  $\lambda$  分别是优化参数. 由对式 (13) 和 (14) 的叙述可知, 支撑集缓慢变化使得相邻两个时刻的状态向量估计值的绝大部分分量相同,  $(\hat{\mathbf{x}}_t)_{T_{t-1}} = (\hat{\mathbf{x}}_{t-1})_{T_{t-1}}$ , 仅有  $\Delta$  对应的少量分量  $(\hat{\mathbf{x}}_t)_\Delta$  不相同. 式 (18) 中加入  $\|(\mathbf{x}_t)_{T_{t-1}} - (\hat{\mathbf{x}}_{t-1})_{T_{t-1}}\|_2^2$  后, 不仅保证最后求得的  $(\hat{\mathbf{x}}_t)_\Delta$  是在  $T_{t-1}^c$  内寻找到的最稀疏解, 而且尽可能保证  $(\hat{\mathbf{x}}_t)_{T_{t-1}} = (\hat{\mathbf{x}}_{t-1})_{T_{t-1}}$ , 从而使重构误差仅存在于支撑集的变化部分  $\Delta$  中. Vaswani 等有关 DCS 的所有研究成果可以参考文献 [51].

有别于 Vaswani 支撑集与状态向量分步更新, Salman 等提出一种基于同伦 (Homotopy) 算法的支撑集与状态向量一步更新解决方案, 该解决方案将 Homotopy 与最小  $\ell_1$  范数法中的各种优化方法相结合, 提出 LASSO Homotopy、DS Homotopy<sup>[52]</sup> 和 BPDN Homotopy<sup>[53]</sup> 等多种时变稀疏信号重建方法, 这些方法被统称为  $\ell_1$  Homotopy. 当有新的测量分量加入到测量矩阵中, 由于 RIP 准则不能严格得到保证, 这导致最小  $\ell_1$  范数法在迭代求解的过程中算法无法收敛, 震荡剧烈, 如果用 Homotopy 算法来完成迭代求解的过程便可以克服上述问题.  $\ell_1$  Homotopy 基于 Homotopy 算法将一个复杂的  $\ell_1$  优化问题分解成多个分段的线性方程迭代求解. Homotopy 算法通过一系列连续的 Homotopy 变化, 沿着同伦路径能够更有效、更快速地逼近非线性问题的解. 此外, 重加权最小  $\ell_1$  范数法 (Reweighted  $\ell_1$  norm) 也被用到时变稀疏信号重建当中, Salman 基于上述  $\ell_1$  Homotopy 思想, 提出一种加权的  $\ell_1$  Homotopy (Reweighted  $\ell_1$  Homotopy)<sup>[19]</sup> 算法.

最小  $\ell_1$  范数法虽然是应用最为广泛的一种稀疏重构算法, 但是除非满足一些严格的约束条件, 其全局最小点并不是真正的最稀疏解. 此外, 当测量矩阵列向量间相关性增强, 最小  $\ell_1$  范数法的重构性能会严重下降. 最后, 最小  $\ell_1$  范数法重建速度较慢. 相比之下, 只要已知稀疏状态向量、观测向量等变量和某些参量之间概率分布的先验知识, 贝叶斯统计推断方法具有显著的优势.

### 2.2.2 贝叶斯统计推断

基于贝叶斯框架的统计推断方法早期用于人工智能领域, 随后被 Ji 等<sup>[31]</sup> 和 Baron 等<sup>[29]</sup> 引入到 CS 领域, 提出贝叶斯压缩感知稀疏重构方法, 其核

心思想是根据稀疏信号  $\mathbf{x}_t$  的先验概率分布 (通常是高斯分布) 和观测向量  $\mathbf{y}_t$  的高斯似然函数获取  $\mathbf{x}_t$  的后验概率分布, 进而将 PO 问题转换为求解  $\mathbf{x}_t$  的最大后验估计. 求解  $\mathbf{x}_t$  最大后验估计主流的方法包括 SBL、置信传播 (BP)、EM 和蒙特卡罗采样 (Monte Carlo sampling, MCS) 等, 其中, SBL 以其简单、灵活、计算复杂度低、重建精度高等一系列显著优势在 CS 领域得到广泛的应用.

SBL 方法整个过程概括如下<sup>[47]</sup>: 假设观测方程 (2) 中的观测噪声服从  $\mathbf{w}_t \sim N(0, R)$ , 其中,  $R = \sigma^2 I$ ,  $\sigma^2$  为噪声的方差, 由此获得  $\mathbf{y}_t$  的高斯似然函数  $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t, \sigma)$ ; SBL 假设  $\mathbf{x}_t$  中的每一个分量都服从一个均值为 0、方差为  $\alpha(i)$  ( $i$  表示  $\mathbf{x}_t$  中的第  $i$  个分量) 的高斯分布, 则  $\mathbf{x}_t$  的先验概率分布为  $p(\mathbf{x}_t | \alpha)$ . 根据以上概率分布, 利用贝叶斯规则可以得到  $\mathbf{x}_t$  的后验概率分布  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_t, \alpha, \sigma)$ ,  $\mathbf{x}_t$  的最大后验估计由  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_t, \alpha, \sigma)$  的均值给出. 这个均值是参数  $\alpha$  的函数, 在算法运行过程中,  $\alpha$  的绝大多数分量均趋近于 0, 而仅有少部分不为 0, 相应的  $\mathbf{x}_t$  的绝大多数分量则为 0, 因此,  $\alpha$  与解的稀疏程度密切相关, 这就确定了  $\alpha$  的学习规则是 SBL 算法中最核心的部分. SBL 算法通过对  $\mathbf{x}_t$  求解对数似然函数  $\log[p(\mathbf{y}_t | \alpha, \sigma)]$  的边缘概率 (第二类最大似然估计), 进而得到  $\alpha$  的最大似然估计.

由第 1.1 节时变稀疏信号的稀疏表示可知, 相邻两个时刻稀疏信号的支撑集及支撑集元素对应的幅值具有相关特性, Zhang 等利用支撑集元素幅值的这种时间相关性, 提出一种基于稀疏解的结构信息的块稀疏贝叶斯学习方法 (Block sparse Bayesian learning, BSBL)<sup>[54]</sup>. 该方法将某种结构的解向量  $\mathbf{x}$  划分为  $g$  个块结构, 其中非零元素聚集在少数几个块内, 相应第  $i$  块  $\mathbf{x}(i)$  的先验概率分布也变为一种多元高斯分布  $p(\mathbf{x}_i) = N(0, \gamma_i B_i)$ ,  $i = 1, \dots, g$ , 其中  $B_i$  是一个未知的正定矩阵, 用于描述该块内的元素之间的相关结构,  $\gamma_i$  为一未知的参数, 用于决定该块是否为 0. 类似于 SBL 方法,  $\gamma_i = 0$ , 则  $\mathbf{x}_i = 0$ . 同样假设噪声服从高斯分布, 利用贝叶斯准则即得到  $\mathbf{x}$  的后验分布. 最后, 利用第二类最大似然估计可以估计出各种参数, 从而最终得到  $\mathbf{x}$  的最大后验估计值. 但是, BSBL 算法存在局限性, 该算法要求时变稀疏信号的支撑集固定不变, 仅支撑集对应的分量的幅值随时间发生变化, 这种前提假设不符合实际情况.

除 SBL 方法之外, Ziniel 等<sup>[18]</sup> 基于置信传播算法 (BP) 求解  $\mathbf{x}_t$  的最大后验概率. 首先, 用独立的贝努利 (Beinoulli) 概率模型来描述支撑集  $\{T_t\}_{t=1}^T$  的变化, 用高斯马尔科夫 (Gauss-Markov) 随机过程来描述非零元素幅值  $\{\theta_t\}_{t=1}^T$  的变化, 已知上述



两个随机变量的概率分布后,可获得状态向量  $\mathbf{x}_t$  和观测向量  $\mathbf{y}_t$  的先验概率分布,基于上述先验概率分布,建立  $\mathbf{x}_t$  的后验概率密度函数;其次,通过因子图分解来刻画各个先验概率分布与后验概率分布之间的逻辑关系,每一张因子图定义为一帧,相邻两帧因子图之间的相关性由  $\{T_t\}_{t=1}^T$  和  $\{\theta_t\}_{t=1}^T$  的概率分布给出;最后,在因子图中的每个节点和邻近节点传递消息 (Message passing, MP),进而得到  $\mathbf{x}_t$  的最大后验估计. Charles 等提出一种重加权  $\ell_1$  动态滤波器 (Reweighted  $\ell_1$  dynamic filtering, RWL1-DF)<sup>[55]</sup>,该方法采用 EM 算法求解  $\mathbf{x}_t$  的最大后验估计. Sejdinovic 等提出一种连续的蒙特卡洛重采样 (Sequential Monte Carlo resampling, SMCR) 方法求解  $\mathbf{x}_t$  的最大后验估计,通过适当控制采样点的数量可以大大降低计算复杂度<sup>[56]</sup>.

### 2.2.3 贪婪算法

贪婪算法是在 LS 框架下完成时变稀疏信号及其支撑集的检测和重建,在静态 CS 四类算法中,贪婪算法是重建速度最快的算法<sup>[28]</sup>.然而,贪婪算法在理论上假定稀疏信号的稀疏度  $S_t$  已知,但是在实际应用中  $S_t$  通常是未知,因此为了提高重建精度需要增加测量次数,但是这样又增加了计算复杂度.在计算精度和计算复杂度之间寻找平衡点成为贪婪算法的一个难题.在 DCS 优化框架下,上述问题可以得到缓解,以 OMP 算法为例,OMP 算法的测量次数为  $O(S_t \log N)$ ,由于相邻两个时间间隔内稀疏信号的支撑集具有相关特性,OMP 算法只需要追踪支撑集的变化值  $\Delta$ ,因此测量次数降为  $O(\Delta \log N)$ <sup>[57]</sup>.

Zachariah 等基于自回归模型 (Auto regressive, AR),提出两种动态的贪婪追踪算法:动态迭代追踪 (Dynamic iterative pursuit, DIP)<sup>[20]</sup>和动态子空间追踪 (Dynamic subspace pursuit, DSP)<sup>[21]</sup>.这两种方法的不同之处在于前者预测状态变量的核心算法是 OMP,而后者是子空间追踪 (Subspace pursuit, SP).利用状态变量的先验知识  $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ ,Zachariah 等构造了一个类似于 KF 的线性 MMSE 估计器 MMSE-rec,用 MMSE-rec 替换 SP 和 OMP 算法

中的 LS 估计器,进而提出改进的 OMP 和 SP 算法,即预测 OMP (Predictive orthogonal matching pursuit, PrOMP) 和预测 SP (Predictive subspace pursuit, PrSP). DIP 和 DSP 可以统一总结为算法 1.

#### 算法 1.

步骤 1. 初始化状态变量  $\hat{\mathbf{x}}_0^-$  及其协方差矩阵  $\hat{P}_0^-$ ;

步骤 2. 时间计数开始 for  $t = 1, \dots$ ;

步骤 3. 根据上一时刻的先验值  $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ ,用 PrOMP 和 PrSP 估计当前时刻状态变量的估计值  $\hat{\mathbf{x}}_t$  及其支撑集的估计值  $\hat{T}_t$ ;

步骤 4. 根据上一时刻的先验值  $\hat{P}_t^-$ ,计算当前时刻协方差的估计值  $\hat{P}_t$ ;

步骤 5. 基于式 (3) 计算下一时刻状态变量及其协方差的先验值  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^- = F_t \hat{\mathbf{x}}_t$ ,  $\hat{P}_{t+1}^- = F_t \hat{P}_t F_t^T + Q_t$ ;

步骤 6. 时间计数结束 end for.

Sankaranarayanan 等建立一种专门针对视频信号压缩感知的线性动态系统模型 (Compressive sensing linear dynamic system, CS-LDS),并采用基于模型的压缩采样匹配追踪 (Model-based compressive sampling matching pursuit, CoSaMP) 算法重构视频场景<sup>[58]</sup>.

表 1 以 KF-CS 等算法为例,定性比较几种有代表性的 DCS 算法的算法性能.其中,  $N$  表示信号的长度,  $M$  表示观测向量的长度,  $S$  表示信号的稀疏度,  $\Delta$  表示稀疏度的变化值,  $N_{\text{Iter}}$  表示算法迭代的次数.

## 3 动态压缩感知的应用

### 3.1 视频成像

直接将静态 CS 方法用于视频成像存在两个挑战. 1) 视频场景不断变换,任意相邻两帧图像经过稀疏表示后,其支撑集仅有少量值发生变化,如果不考虑视频图像的这种时间相关特性,每帧图像单独采用静态 CS 算法完成重构,这需要增加测量矩阵的观测维度来克服这种方法造成的重构误差增大的问题.然而,增加测量维度会引起重构算法计算复杂度

表 1 主要 DCS 重构算法的性能比较

Table 1 Performance comparison of DCS algorithms

算法性能	KF-CS/LS-CS	HB-KF	CSKF-1	ZA-LMF <sup>[44]</sup>	Modified CS	ABP <sup>[18]</sup>	DSP
计算复杂度	$O(\max(M, N))$	$O(M^3)$	$O(N_{\text{Iter}})$	$O(N)$	$O(N^3)$	$O(MN)$	$O(\Delta MN)$
最小测量 $M$	$O(\Delta \log(N/\Delta))$	—	$O(S \log N)$	—	$O(\Delta \log N)$	—	$O(\Delta \log(N/\Delta))$
稳定性	是	是	是	不确定	是	是	是
准确性	是	是	不确定	不确定	是	是	是

变大. 此外, 无法获取这些新增的观测分量的先验知识, 因此, 无法证明这种含有未知测量分量的测量矩阵是否满足 RIP. 2) 相比于静态图像, 视频信号通常是高维信号, 重建算法的复杂度必然增加. 视频信号相邻两帧图像的支撑集仅有少量值不同, DCS 方法利用这种时间相关特性, 动态追踪其支撑集的变化值而不是整个支撑集, 因此, 将测量维度从  $O(S_t \log N)$  简化为  $O(\Delta \log N)$ , 进而重构算法的计算复杂度由  $O(S_t MN)$  降低为  $O(\Delta MN)$  (以 OMP 算法为例).

视频成像是 DCS 最为成功的实际应用之一[13, 58–59], 典型的例子是医学成像, 如动态核磁共振成像 (Dynamic magnetic resonance imaging, Dynamic MRI)[6–8, 15, 60–61]. Dynamic MRI 具有高软组织对比分辨率和无放射损伤的特点, 因此已被广泛应用于临床诊断. 其原理在于利用人体内的氢质子与外在磁场的共振, 获取 K 空间原始数据, K 空间为图像原始数据的填充存储空间格式, 填充后的数据需要经过傅里叶转换后才能重建 Dynamic MRI 图像. 张桂珊等[61]介绍 CS 理论在临床 MRI 应用中的研究热点, 诸如加速 MR 动态成像 (Accelerated dynamic MRI)、实时动态 MRI (Real-time dynamic MRI) 等, 同时讨论 CS 理论在临床 MRI 的应用中存在的问题. 其中, 静态 CS 方法批量处理连续观测的多个测量矩阵将增加算法的计算复杂度. 相比于 DCS 方法动态追踪支撑集的变化值, 静态 CS 方法不考虑 MR 图像帧间的时间相关性, 独立重构每帧图像, 因此磁共振数据的采集时间过长. k-t Focuss 是目前应用较为广泛的一种基于静态 CS 的 Dynamic MRI 重构算法, 该方法借助一种全采样参考图像重构帧间运动信息 (Inter-frame motion), 进而从欠采样的 K 空间数据中恢复高清的 Dynamic MRI[62].

Vaswani 以其提出的 KF-CS 和 LS-CS 算法为例, 通过连续重构 20 帧 Larynx 图像序列, 与 BPDN 和 k-t Focuss 这两种经典的静态 CS 重构算法进行对比分析, 分析结果见图 6<sup>2</sup>. 在图 6 中, Larynx 图像像素是  $256 \text{ 像素} \times 256 \text{ 像素} = 65536 \text{ 像素}$ , 测量率  $90 \times 90 = 8100$ , 达到 35% 左右, 稀疏度在 106 ~ 110 之间变化. 从图 6 可以看出, 在相同测量率情况下, KF-CS、LS-CS 算法的重构精度要优于 BPDN 和 k-t Focuss 这两种方法. 通过 CPU 时间粗略估算算法执行时间, k-t Focuss 优于其他三种方法, 虽然 k-t Focuss 算法有着收敛速度快、计算量低的特点, 然而其重构视频图像所需的参考图像的质量直接影响算法的重构性能. 为了摆脱这种束缚,

Salman 等[60]提出一种自适应帧间运动空时正则化算法 (Motion-adaptive spatio-temporal regularization, MASTeR), 该方法构造前向、后向两种状态转移方程, 用状态转移误差来描述 Dynamic MRI 的帧间运动信息, 无需借助参考图像, MASTeR 算法仅需要找到帧间运动信息的最小  $\ell_1$  范数解即可完成 Dynamic MRI 的重构. Salman 等对比分析了 MASTeR 算法与 k-t Focuss 算法的重构性能, 相关的实验结果及 Matlab 代码可参考其个人主页<sup>3</sup>.

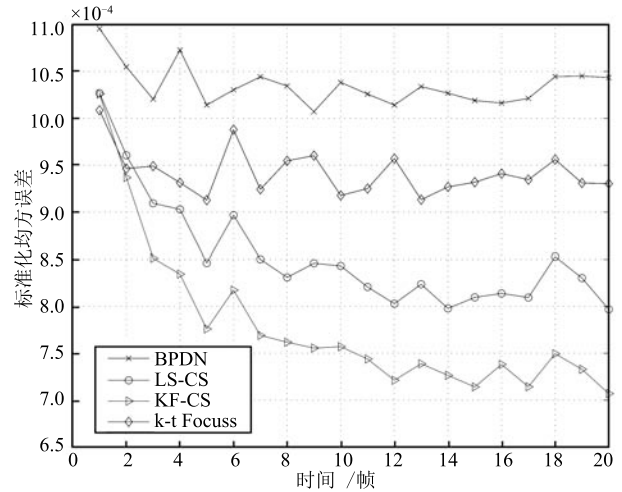


图 6 Larynx dynamic MRI 的标准化均方误差  
Fig. 6 Normalized mean square error of Larynx dynamic MRI

### 3.2 运动目标跟踪

运动目标跟踪在智能视频监控、军事领域武器制导、智能交通、气象分析等众多领域中有着广阔的应用前景, 存在大量的优秀研究成果. 刘也等[63]讨论 KF-CS 算法在弹道目标实时跟踪中的应用及存在的问题. Jong 等[64]采用多观测向量模型 (Multiple measurement vector, MMV) 描述运动目标追踪系统模型, 并将静态 CS 与阵列信号处理中的经典 Music 算法相结合, 提出一种压缩感知的 Music (CS-Music) 方法. Vaswani 等基于 PF 分别提出修正 CS 粒子滤波器 (Particle filter modified-CS, PaFiMoCS) 和递归投影 CS (Recursive projected CS, ReProCS) 两种方法用于视频序列中的运动目标追踪[13–14]. PaFiMoCS 和 ReProCS 两种方法用时变稀疏信号来描述前景运动目标, 将动态场景建模成一个结构化的强干扰背景信息, 由于相邻两帧视频图像间具有较强的时间相关特性, 因此背景信息具有稠密、低秩、并且随时间缓慢变化的特性, 同时, 背景信息的幅值要大于前景运动目标的幅值,

<sup>2</sup><http://www.ece.iastate.edu/~namrata/research/Software.html>

<sup>3</sup><http://users.ece.gatech.edu/~sasif/dynamicMRI/index.html>

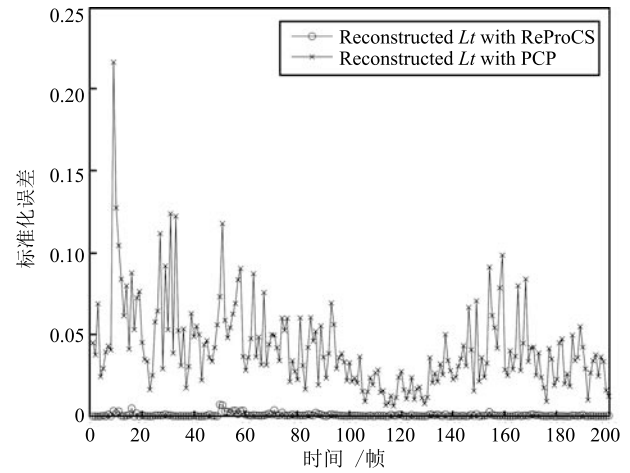
于是动态场景运动目标跟踪就转变成从结构化的强干扰背景信息中提取时变稀疏信号的问题. 图 7 给出了 ReProCS 算法的实验结果<sup>4</sup>. 实验采用的视频图像的分辨率为 32 像素  $\times$  32 像素, 视频序列长度为 200 帧, 原始图像  $M_t$  由背景  $L_t$  与动态目标  $S_t$  求和而来, 支撑集占图像总分辨率的 28.7%,  $t = 1, \dots, 200$ . 实验结果表明, 与经典的主成分追踪 (Principal components pursuit, PCP) 算法相比, ReProCS 重构误差比 PCP 小.

### 3.3 超宽带信道估计

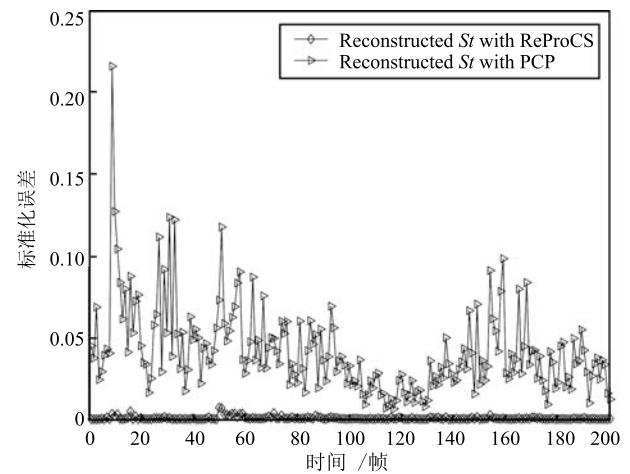
正交频分复用 (Orthogonal frequency division multiplexing, OFDM) 是新一代移动通信核心技术的解决方案之一, 目前, 主流的无线通信协议标准均采用 OFDM 调制技术作为物理层的标准, 如无线 802.11a, 802.11n, 802.11g, 802.16, 3GPP LTE. 在 OFDM 系统中, 接收端的相干解调需要信道状态信息 (Channel state information, CSI), 因此, 信道估计是 OFDM 系统的关键技术之一. 信道估计面临两个问题: 1) 导频的选择, 无线信道是衰落信道, 需要不断发送导频跟踪信道状态信息; 2) 既具有较低复杂度又有良好跟踪能力的信道估计算法设计. 目前, 很多超宽带 OFDM 系统, 如水声通信系统、数字电视系统以及本地超宽带系统, 其信道的等效基带脉冲响应呈现一种稀疏特性, 其大量多径的时域系数具有近似为零的幅值, 只有少量多径的时域系数具有很大的幅值<sup>[65]</sup>. 传统的基于静态 CS 的稀疏信道估计方法获得良好的重建效果基于两个前提假设: 1) 信道的等效基带脉冲响应的维度足够大, 以保证每个采样间隔内只有一个多径时延; 2) 稀疏信道的大系数多径的位置和幅值都不会随时间发生变化.

然而, 这两种假设在实际应用当中显然很难成立: 1) 重构信道的维度过大会增加重构算法的计算复杂度; 2) 移动台可能会随时间缓慢或者高速运动, 这使得不同时刻稀疏信道的大系数多径的位置和幅值均会随时间发生变化, 频繁的信道估计会降低系统通信效率. 为了解决上述两个问题, Hu 等提出一种基于 OMP 的自适应调整信道维度的信道追踪算法<sup>[57]</sup>, 该方法仅需要提高大系数多径所在位置的采样频率来降低信道维度, 进而降低重构算法的复杂度; 同时, OMP 算法仅用来追踪信道支撑集的变化值而不是整个支撑集, 进一步降低算法复杂度, 提高算法的追踪效率. 对于这种稀疏时变信道, 自适应滤波算法也可以获得良好的重构效果<sup>[17, 42–44]</sup>. 图 8 对比分析了 Gui 等<sup>[44]</sup> 基于 LMS 算法提出的四种时变稀疏信道估计算法的性能. ZA-LMS 等四个算法的收敛因子等仿真参数的取值可参考文献 [42–44].

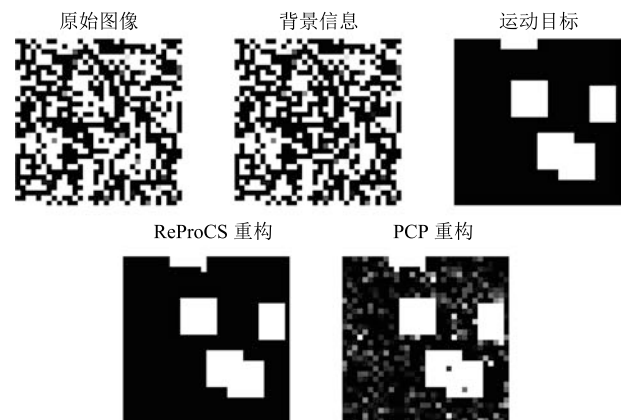
<sup>4</sup><http://www.ece.iastate.edu/~chenlu/ReProCS/ReProCSmain.htm>



(a) ReProCS 和 PCP 重构背景  $L_t$  标准化误差  
(a) Normalized error of recovering the ambient vector  $L_t$  with ReProCS and PCP



(b) ReProCS 和 PCP 重构动态目标  $S_t$  标准化误差  
(b) Normalized error of recovering the sparse vector  $S_t$  with ReProCS and PCP

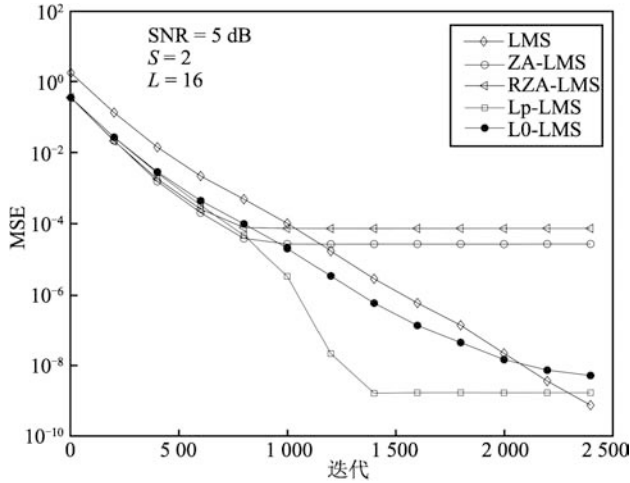


(c) ReProCS 和 PCP 对运动目标  $S_t$  的重建图像  
(c) Recovering  $S_t$  with ReProCS and PCP

图 7 ReProCS 和 PCP 算法性能对比

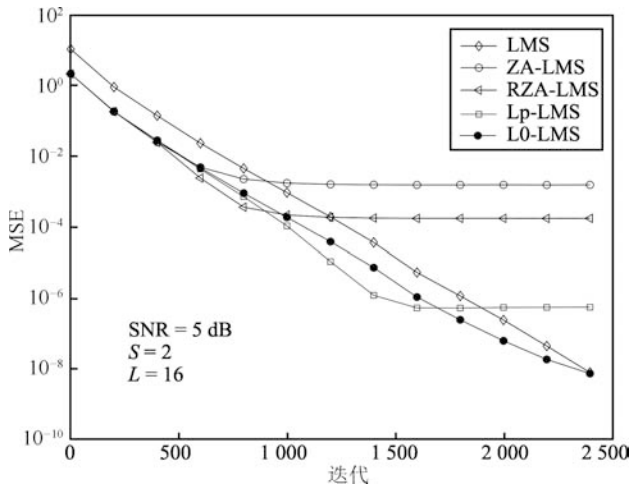
Fig. 7 Performance comparison for ReProCS and PCP

由图 8 可以看出,  $\ell_p$  和  $\ell_0$  判罚的 LMS 算法要优于  $\ell_1$  判罚的 LMS 算法, 这与 Carmi 等<sup>[49]</sup> 得出的结论是一致的. ZA-LMS 等四个算法虽然不满足静态 CS 方法的稳定重构条件  $M \geq S \log_2(L/S)$ , 但是在这种较弱的约束条件下仍然能够准确重构原始信道. ZA-LMS 等四个算法存在的问题是, 当信道长度超过 20 时算法性能将严重下降. 由图 8 还可以看出, 算法重构精度的增加是以增加计算复杂度为代价的.



(a) 信道稀疏度  $S = 2$

(a) Sparsity  $S = 2$  of the channel



(b) 信道稀疏度  $S = 8$

(b) Sparsity  $S = 8$  of the channel

图 8 自适应稀疏信道估计算法的 MSE 性能

Fig. 8 MSE performance of adaptive sparse channel estimation algorithms

除上述三个应用领域, DCS 还可以应用于无线传感器网络中节点的定位<sup>[66]</sup>、数字高清电视<sup>[52]</sup>、水声通信<sup>[67]</sup>、语音信号处理<sup>[68]</sup>等诸多领域.

## 4 总结与展望

自 2008 年首次被提出以来, DCS 理论及其应用已经引起业内学者的高度重视, 并有越来越多的研究人员加入其中. 它的提出开创了 CS 理论研究的一个新方向, 为时变稀疏信号处理及其相关研究领域提供了新思路. 与国际上对 DCS 的众多研究成果相比, 国内的研究成果较少, 还处于刚刚起步的阶段. DCS 作为一个新兴的时变稀疏信号求解方法, 虽然有广阔的应用前景, 但是还有很多难题需要解决. 本文对 DCS 的起源与发展进行了总结与分析, 在介绍 DCS 的系统模型、稀疏表示、编码测量、各种 DCS 重构算法的同时, 还探讨了 DCS 的一些应用实例, 希望能引起广大科研工作者对 DCS 的关注和兴趣. DCS 方兴未艾, 以下是本文对其进一步的研究和发展提出的一些看法.

1) 支撑集快变. 现有 DCS 方法稳定重建时变稀疏信号的前提是本文最初给出的两个假设: 支撑集中元素个数和幅值均缓慢变化. 如果不能保证这两个前提, 即支撑集是快速变化的情况, 现有方法是否能稳定重建时变稀疏信号将存在一定问题. 如果仅从支撑集元素个数的角度来考虑支撑集快变, 其含义指的是任意时刻  $t$ ,  $S_{diff,max} \approx S_t$ , 或者说相邻两个时刻信号的支撑集  $T_t$  和  $T_{t-1}$  的交集为空集. 由此引来的问题是, 支撑集变化直接导致测量矩阵发生变化, 如果还采用原有的测量矩阵的构造方法, 在支撑集快变的模式下, 测量矩阵是否还满足 RIP 有待进一步证明, 现有重构方法是否继续有效还是一个未知数. 因此, 构建一个通用的支撑集变化模型 (既适用于慢变情况, 又适用于快变情况) 显得尤为必要.

2) 现有算法改进及算法性能分析. Vaswani<sup>[7-8]</sup> 在其研究成果中讨论 LS-CS、Modified CS 等方法的抗噪性和鲁棒性, 给出严格的理论分析和证明过程, 但并没有分析算法的收敛性和计算复杂度等其他关键性能. 除此以外, 现有其他学者的研究成果只是以仿真或者实验的方法简单讨论算法的重建效果, 并没有从理论高度全面分析算法的收敛性、鲁棒性、抗噪性、误差界以及计算复杂度等算法性能. 研究人员在系统建模的过程中给出各种前提假设, 算法仅在这些特定的约束条件下才可以稳定重建时变稀疏信号, 如果去掉这些强约束条件, 或者将约束条件降低, 现有算法可能会失效. 因此, 对现有算法进行总结、归纳甚至改进, 进而对算法性能进行全面评价将是一项复杂而艰巨的任务.

3) 新算法设计. 目前 DCS 的工作重点仍然集中在时域系统建模, 建模的过程中将 DCS 转变成静态 CS 问题, 将现有的静态 CS 重建算法直接挪

用,或者略加修改,以实现时变稀疏信号重建.但是,如果将信号的时变稀疏特性扩展到二维的空域-时域,或者二维的时域-频域,又或者三维的空域-时域-频域,现有的系统建模方法是否能直接推广到上述三种情形当中仍然是一个有待进一步研究的问题.针对二维联合稀疏或者三维联合稀疏这种更为复杂的系统环境,稀疏表示矩阵、测量矩阵以及重建算法需要重新设计,算法性能的理论分析以及仿真,或者实验设计也将需要重新考虑.

4) 拓展新的应用领域. DCS 刚刚兴起,其应用主要还是集中在视频信号处理,尤其是用于 Dynamic MRI 获得良好的重构效果.今后,DCS 还可以扩展到其他视频信号处理的应用领域,如超声医学影像重建、视频脑电图、分布式摄像机智能监控等方面.除了第3节讨论的应用领域外,这种具有缓慢变化的结构化背景信息的动态稀疏前景检测与追踪在实际当中存在很多,如动态语音识别,在嘈杂的会场中用麦克风阵列追踪某一语音目标,或者在海底强背景噪声下采用超声追踪某个种群生物目标等.

## References

- Compressive sensing resources [Online], available: <http://dsp.rice.edu/cs>, August 17, 2014
- Baraniuk R G. Compressive sensing [Lecture notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, **24**(4): 118–121
- Donoho D L, Elad M, Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(1): 6–18
- Candés E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489–509
- Simon D [Author], Zhang Yong-Gang, Li Ning, Ben Yue-Yang [Translator]. *Optimal State Estimation — Kalman,  $H_\infty$ , and Nonlinear Approaches*. Beijing: National Defense Industry Press, 2013.  
(Simon D [著], 张勇刚, 李宁, 奔粤阳 [译]. 最优状态估计 — 卡尔曼,  $H_\infty$  及非线性滤波. 北京: 国防工业出版社, 2013.)
- Vaswani N. Kalman filtered compressed sensing. In: Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Image Processing. San Diego, California, USA: IEEE, 2008. 893–896
- Vaswani N. LS-CS-residual (LS-CS): compressive sensing on least squares residual. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(8): 4108–4120
- Vaswani N, Lu W. Modified-CS: modifying compressive sensing for problems with partially known support. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(9): 4595–4607
- Lu W, Vaswani N. Regularized modified BPDN for noisy sparse reconstruction with partial erroneous support and signal value knowledge. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(1): 182–196
- Zhan J C, Vaswani N. Time invariant error bounds for modified-CS based sparse signal sequence recovery. In: Proceedings of the 2013 IEEE International Symposium on Information Theory. Istanbul, Turkey: IEEE, 2013. 286–290
- Lu W, Vaswani N. Exact reconstruction conditions for regularized modified basis pursuit. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(5): 2634–2640
- Vaswani N. Stability (over time) of modified-CS for recursive causal sparse reconstruction. In: Proceedings of the 48th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Monticello, IL, USA: IEEE, 2010. 1722–1729
- Qiu C L, Vaswani N, Hogben L. Recursive robust PCA or recursive sparse recovery in large but structured noise. In: Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Vancouver, BC, Canada: IEEE, 2013. 5954–5958
- Sarkar R, Das S, Vaswani N. Tracking sparse signal sequences from nonlinear/non-Gaussian measurements and applications in illumination-motion tracking. In: Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Vancouver, BC, Canada: IEEE, 2013. 6615–6619
- Lu W, Vaswani N. Modified compressive sensing for real-time dynamic MR imaging. In: Proceedings of the 16th IEEE International Conference on Image Processing. Cairo, Egypt: IEEE, 2009. 3045–3048
- Karseras E, Leung K, Dai W. Tracking dynamic sparse signals using hierarchical Bayesian Kalman filters. In: Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Vancouver, BC, Canada: IEEE, 2013. 6546–6550
- Kalouptsidis N, Mileounis G, Babadi B, Tarokh V. Adaptive algorithms for sparse system identification. *Signal Processing*, 2011, **91**(8): 1910–1919
- Ziniel J, Potter L C, Schniter P. Tracking and smoothing of time-varying sparse signals via approximate belief propagation. In: Proceedings of Conference Record of the 44th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers. Pacific Grove, CA, USA: IEEE, 2010. 808–812
- Salman A M. Dynamic Compressive Sensing: Sparse Recovery Algorithms for Streaming Signals and Video [Ph.D. dissertation], Georgia Technology, USA, 2013.

- 20 Zachariah D, Chatterjee S, Jansson M. Dynamic iterative pursuit. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(9): 4967–4972
- 21 Zachariah D, Chatterjee S, Jansson M. Dynamic subspace pursuit. In: *Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Kyoto, Japan: IEEE, 2012. 3605–3608
- 22 Guo Wen-Bin, Li Hang. Adaptive Kalman filter based on compressed sensing. *Signal Processing*, 2012, **28**(6): 799–805  
(郭文彬, 李航. 基于压缩感知的自适应卡尔曼滤波. *信号处理*, 2012, **28**(6): 799–805)
- 23 Li Shu-Tao, Wei Dan. A survey on compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(11): 1369–1377  
(李树涛, 魏丹. 压缩传感综述. *自动化学报*, 2009, **35**(11): 1369–1377)
- 24 Qaisar S, Bilal R M, Iqbal W, Naurren M, Lee S. Compressive sensing: from theory to applications, a survey. *Journal of Communications and Networks*, 2013, **15**(5): 443–456
- 25 Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso: a retrospective. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 2011, **73**(3): 273–282
- 26 Candès E, Tao T. The Dantzig selector: statistical estimation when  $p$  is much larger than  $n$ . *The Annals of Statistics*, 2007, **35**(6): 2313–2351
- 27 Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, **20**(1): 33–61
- 28 Fang Hong, Yang Hai-Rong. Greedy algorithms and compressed sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(12): 1413–1421  
(方红, 杨海蓉. 贪婪算法与压缩感知理论. *自动化学报*, 2011, **37**(12): 1413–1421)
- 29 Baron D, Sarvotham S, Baraniuk R G. Bayesian compressive sensing via belief propagation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(1): 269–280
- 30 Yang Hai-Rong, Fang Hong, Zhang Cheng, Wei Sui. Iterative hard thresholding algorithm based on backtracking. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(3): 276–282  
(杨海蓉, 方红, 张成, 韦穗. 基于回溯的迭代硬阈值算法. *自动化学报*, 2011, **37**(3): 276–282)
- 31 Ji S H, Xue Y, Carin L. Bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(6): 2346–2356
- 32 Mohimani G H, Babaie-Zadeh M, Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed  $l^0$  norm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(1): 289–301
- 33 Wang J, Ma J W, Han B, Li Q. Split Bregman iterative algorithm for sparse reconstruction of electrical impedance tomography. *Signal Processing*, 2012, **92**(12): 2952–2961
- 34 Gilbert A C, Strauss M J, Tropp J A, Vershynin R. One sketch for all: fast algorithms for compressed sensing. In: *Proceedings of the 39th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. San Diego, CA, USA: ACM, 2007. 237–246
- 35 Dai Qiong-Hai, Fu Chang-Jun, Ji Xiang-Yang. Research on compressed sensing. *Chinese Journal of Computers*, 2011, **34**(3): 425–434  
(戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究. *计算机学报*, 2011, **34**(3): 425–434)
- 36 Shi Guang-Ming, Liu Dan-Hua, Gao Da-Hua, Liu Zhe, Lin Jie, Wang Liang-Jun. Advances in theory and application of compressed sensing. *Acta Electronica Sinica*, 2009, **37**(5): 1070–1081  
(石光明, 刘丹华, 高大化, 刘哲, 林杰, 王良君. 压缩感知理论及其研究进展. *电子学报*, 2009, **37**(5): 1070–1081)
- 37 Lian Qiu-Sheng, Zhang Jun-Qin, Chen Shu-Zhen. Single image super-resolution algorithm based on two-stage and multi-frequency-band dictionaries. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(8): 1310–1320  
(练秋生, 张钧芹, 陈书贞. 基于两级字典与分频带字典的图像超分辨率算法. *自动化学报*, 2013, **39**(8): 1310–1320)
- 38 Dai L L, Gui G, Wang Z C, Yang Z X, Adachi F. Reliable and energy-efficient OFDM based on structured compressive sensing. In: *Proceedings of the 2014 International Conference on Communications*. Sydney, Australia: IEEE, 2014. 3963–3968
- 39 Liu Fang, Wu Jiao, Yang Shu-Yuan, Jiao Li-Cheng. Research advances on structured compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(8): 1980–1995  
(刘芳, 武娇, 杨淑媛, 焦李成. 结构化压缩感知研究进展. *自动化学报*, 2013, **39**(8): 1980–1995)
- 40 Charles A, Salman A M, Romberg J, Rozell C. Sparsity penalties in dynamical system estimation. In: *Proceedings of the 45th Annual Conference on Information Sciences and Systems*. Baltimore, MD, USA: IEEE, 2011. 1–6
- 41 Carmi A Y. Compressive system identification: sequential methods and entropy bounds. *Digital Signal Processing*, 2013, **23**(3): 751–770
- 42 Gui G, Adachi F. Sparse least mean fourth algorithm for adaptive channel estimation in low signal-to-noise ratio region. *International Journal of Communication Systems*, 2013, DOI: 10.1002/dac.2531
- 43 Gui G, Adachi F. Stable adaptive sparse filtering algorithms for estimating multiple-input-multiple-output channels. *IET Communications*, 2014, **8**(7): 1032–1040

- 44 Gui G, Peng W, Adachi F. Improved adaptive sparse channel estimation based on the least mean square algorithm. In: Proceedings of the 2003 IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Shanghai, China: IEEE, 2003. 3105–3109
- 45 Candés E, Romberg J.  $l_1$ -MAGIC: recovery of sparse signals via convex programming [Online], available: <http://www.acm.caltech.edu/l1magic/downloads/l1magic.pdf>, August 17, 2014
- 46 Carmi A Y, Mihaylova L, Kanevsky D. Unscented compressed sensing. In: Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Kyoto, Japan: IEEE, 2012. 5249–5252
- 47 Tipping M E. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine. *Journal of Machine Learning Research*, 2001, 1: 211–244
- 48 Angelosante D, Bazerque J A, Giannakis G B. Online adaptive estimation of sparse signals: where RLS meets the  $l_1$ -norm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(5): 3436–3447
- 49 Carmi A Y, Gurfi P, Kanevsky D. Methods for sparse signal recovery using Kalman filtering with embedded pseudo-measurement norms and quasi-norms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(4): 2405–2409
- 50 Simon D. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(8): 1303–1318
- 51 Vaswani N, Lu W. Recursive reconstruction of sparse signal sequences. *Compressed Sensing and Sparse Filtering*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. 357–380
- 52 Salman A M, Romberg J. Dynamic updating for sparse time varying signals. In: Proceedings of the 43rd Annual Conference on Information Sciences and Systems. Baltimore, MD, USA: IEEE, 2009. 3–8
- 53 Salman A M, Romberg J. Dynamic updating for  $l_1$  minimization. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 421–434
- 54 Zhang Z L, Rao B D. Sparse signal recovery with temporally correlated source vectors using sparse Bayesian learning. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(5): 912–926
- 55 Charles S A, Rozell C J. Dynamic filtering of sparse signals using reweighted  $l_1$ . In: Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Vancouver, BC, Canada: IEEE, 2013. 6451–6455
- 56 Sejdinovic D, Andrieu C, Piechocki R. Bayesian sequential compressed sensing in sparse dynamical systems. In: Proceedings of the 48th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Monticello, IL, USA: IEEE, 2010. 1730–1736
- 57 Hu D, Wang X D, He H L. A new sparse channel estimation and tracking method for time-varying OFDM systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2013, 62(9): 4648–4653
- 58 Sankaranarayanan A C, Turaga P K, Chellappa R, Baraniuk R G. Compressive acquisition of linear dynamical systems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2013, 6(4): 2109–2133
- 59 Salman A M, Fernandes F, Romberg J. Low-complexity video compression and compressive sensing. In: Proceedings of the 2013 Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers. Pacific Grove, CA, USA: IEEE, 2013. 579–583
- 60 Salman A M, Hamilton L, Brummer M, Romberg J. Motion-adaptive spatio-temporal regularization (MASTeR) for accelerated dynamic MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2013, 70(9): 800–821
- 61 Zhang Gui-Shan, Xiao Gang, Dai Zhuo-Zhi, Shen Zhi-Wei, Li Sheng-Kai, Wu Ren-Hua. Compressed sensing technology and its application in MRI. *Chinese Journal Magnetic Resonance Imaging*, 2013, 4(4): 314–320  
(张桂珊, 肖刚, 戴卓智, 沈智威, 李胜开, 吴仁华. 压缩感知技术及其在 MRI 上的应用. *磁共振成像*, 2013, 4(4): 314–320)
- 62 Jung H, Sung K, Nayak K S, Kim E Y, Ye J C. k-t FOCUSS: a general compressed sensing framework for high resolution dynamic MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2009, 61(1): 103–116
- 63 Liu Ye, Yu An-Xi, Zhu Ju-Bo, Tang Ge-Shi. Survey of filter algorithms for ballistic target real-time tracking. *Journal of Astronautics*, 2013, 34(11): 1417–1426  
(刘也, 余安喜, 朱炬波, 唐歌实. 弹道目标实时跟踪中的滤波方法综述. *宇航学报*, 2013, 34(11): 1417–1426)
- 64 Jong M K, Ok K L, Jong C Y. Dynamic sparse support tracking with multiple measurement vectors using compressive music. In: Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Kyoto, Japan: IEEE, 2012. 2717–2720
- 65 Applebaum L, Bajwa W U, Calderbank A R, Haupt J, Nowak R. Deterministic pilot sequences for sparse channel estimation in OFDM systems. In: Proceedings of the 17th International Conference on Digital Signal Processing. Corfu, Greece: IEEE, 2011. 1–7
- 66 Shamaiah M, Vikalo H. Estimating time-varying sparse signals under communication constraints. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(6): 2961–2964
- 67 Sen G A, Preisig J. A geometric mixed norm approach to shallow water acoustic channel estimation and tracking. *Physical Communication*, 2012, 5(2): 119–128



- 68 Sainath T N, Kanevsky D, Nahamoo D, Ramabhadran B, Wright S. Sparse representations for speech recognition. *Compressed Sensing and Sparse Filtering*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. 455–502



**荆楠** 燕山大学信息科学与工程学院副教授. 2015 年获燕山大学电路与系统博士学位. 主要研究方向为时变稀疏信号估计及其应用, MIMO-OFDM 系统信道估计. E-mail: jingnan@ysu.edu.cn

(**JING Nan** Associate professor at the School of Information Science and Engineering, Yanshan University. She

received her Ph.D. degree from Yanshan University in 2015. Her research interest covers time-varying sparse signal processing and its application, and channel estimation for MIMO-OFDM systems.)



**毕卫红** 燕山大学信息科学与工程学院教授. 2003 年获哈尔滨工业大学仪器科学与技术博士学位. 主要研究方向为光电传感, 光通信和无线传感器网络. 本文通信作者.

E-mail: jingenna@hotmail.com

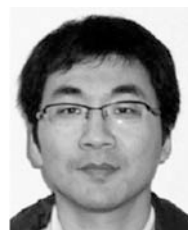
(**BI Wei-Hong** Professor at the School of Information Science and Engineering, Yanshan University. She received her Ph.D. degree in instrument science and technology from Harbin Institute of Technology in 2004. Her research interest covers

photonic sensing, optical fiber communications, and wireless sensor networks. Corresponding author of this paper.)



**胡正平** 燕山大学信息科学与工程学院教授. 2007 年获哈尔滨工业大学航天学院信息与通信工程博士学位. 主要研究方向为统计学习理论, 模式识别, 医学图像处理. E-mail: hzp@ysu.edu.cn

(**HU Zheng-Ping** Professor at the School of Information Science and Engineering, Yanshan University. He received his Ph.D. degree in information and communication engineering from the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology in 2007. His research interest covers statistical learning theory, pattern recognition, and medical image processing.)



**王林** 燕山大学信息科学与工程学院讲师. 2009 年获燕山大学计算机应用技术硕士学位. 主要研究方向为无线传感器网络, 移动计算, 基于位置服务, 分布式算法和社交网络.

E-mail: wlin@ysu.edu.cn

(**WANG Lin** Lecturer at the School of Information Science and Engineering, Yanshan University. He received his master degree from Yanshan University in 2009. His research interest covers wireless sensor network, mobile computing, location based service, distributed algorithms, and social network.)