

基于压缩感知的信号重构算法研究

李锦秀

2015 年 1 月

中图分类号：TQ028.1

UDC 分类号：540

基于压缩感知的信号重构算法研究

作者姓名	<u>李锦秀</u>
学院名称	<u>数学学院</u>
指导教师	<u>李炳照 教授</u>
答辩委员会主席	<u>陈一宏 教授</u>
申请学位	<u>理学硕士</u>
学科专业	<u>数学与应用数学</u>
学位授予单位	<u>北京理工大学</u>
论文答辩日期	<u>2015 年 1 月</u>

Study on Signal Reconstruction Algorithms for Compressed Sensing

Candidate Name:	<u>Jinxiu Li</u>
School or Department:	<u>School of Mathematics</u>
Faculty Mentor:	<u>Prof.Bingzhao Li</u>
Chair,Thesis Committee:	<u>Prof.Yihong Chen</u>
Degree Applied:	<u>Master of Science</u>
Major:	<u>Applied Mathematics</u>
Degree by:	<u>Beijing Institute of Technology</u>
The Date of Defence:	<u>Jan, 2015</u>

研究成果声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是我本人在指导教师的指导下进行的研究工作获得的研究成果。尽我所知，文中除特别标注和致谢的地方外，学位论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得北京理工大学或其它教育机构的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的合作者对此研究工作所做的任何贡献均已在学位论文中作了明确的说明并表示了谢意。

特此申明。

签 名： 日期：

摘要

压缩感知理论是近年来兴起的一种新的采样理论，它提供了一种从少量的采样值中恢复原始信号的方法。针对稀疏信号和可压缩信号，压缩感知理论在采样的同时对信号进行压缩，将采样过程和压缩过程合二为一，突破了传统的奈奎斯特采样定律的束缚，节约了大量的存储、传输、计算等资源，在现代信号处理领域展现出突出的优势和广阔的应用前景。

本文首先以压缩感知理论中的三大关键步骤为主线，对压缩感知理论框架进行了系统的阐述。它包括信号的稀疏表示，测量矩阵的设计以及信号的重构三个部分。然后，对这三个部分分别进行了研究。在信号的稀疏表示方面，对信号的稀疏分解进行了综述；在测量矩阵的设计方面，对测量矩阵进行了分类并分析了一些常用的测量矩阵的优缺点。

信号的重构是压缩感知理论中最重要的部分，本文着重对信号的重构算法进行了研究，阐述了一些常见重构算法的实现原理，然后对基追踪算法及基追踪去噪改进算法进行了详细的研究，对改进算法进行了仿真和验证并与已有算法进行对比，证实了改进算法可以有效地提高重构的效果，使其在信号含有稀疏噪声(脉冲噪声)的情况下也有比较好的重构效果，扩展了其应用的范围，最后着重对贪婪类算法中的匹配追踪算法和正交匹配追踪算法进行了研究，对它们的时间复杂度和重构精度进行了比较和分析，并用离散实值信号进行了仿真和验证。

关键词：压缩感知；稀疏信号；测量矩阵；贪婪算法；基追踪算法

Abstract

Compressed sensing (CS) is a new sampling theory with a rapid development in recent years, and it provides a method to recover the original signal from a small amount of samples. CS makes the signal compression during the sampling for the sparse and compressible signal, thus, makes the compressible progress and the sampling process into one. CS breaks the shackles of Nyquist law and saves a lot of storage, transmission, and computing resources. CS demonstrates outstanding advantages and a broad application prospects in the field of modern signal processing.

Firstly, this paper presents an overview of the theoretical framework of CS. It includes three parts: sparse representation of the signal, the design of measurement matrix, and reconstruction of the signal. This thesis describes the history of the decomposition for the sparse signal and makes a in-depth research for measurement matrix .

For the part of signal reconstruction, the principle of some common reconstruction algorithm has been presented. Secondly, this paper focus on the basis pursuit algorithm (BP) and basis pursuit do-nosing algorithm and compares the improved algorithm with the original algorithm through simulation and verification. The results show that the proposed algorithm could effectively improve the reconstruction accuracy of the signal and BP algorithm could be used to the signal which contains impulse noise through the improvement to the algorithm, which extends the scope of its application. Finally, this paper briefly summarizes the classification of greedy algorithms and compared their time complexity and reconstruction accuracy between the matching pursuit algorithm and orthogonal matching pursuit algorithm.

Key Words: Compressed Sensing; Sparse Signal; Measurement Matrix; Greedy Algorithm; Basis Pursuit Algorithm

目录

第 1 章	绪论	1
1.1	研究目的和意义	1
1.2	国内外研究现状和发展趋势	4
1.3	本文的主要工作和结构安排	5
第 2 章	压缩感知理论概述	6
2.1	压缩感知的基本原理	6
2.1.1	基本概念解释	6
2.1.2	压缩感知的基本内容	7
2.1.3	信号的稀疏表示	9
2.1.4	观测矩阵的设计	11
2.1.5	稀疏重建过程	13
2.2	信号重构的性能评价标准	14
2.3	本章小结	15
第 3 章	压缩感知中的测量矩阵	16
3.1	测量矩阵的分类	16
3.1.1	随机测量矩阵	16
3.1.2	构造随机测量矩阵改进方法	17
3.1.3	确定性测量矩阵	18
3.1.4	结构随机测量矩阵	21
3.2	本章小结	22
第 4 章	压缩感知中的信号重构算法	23
4.1	信号重构算法的分类	23
4.1.1	最小 l_1 范数凸优化算法	23
4.1.2	贪婪追踪算法	24
4.1.3	其它算法	25
4.2	基于基追踪算法的改进	26
4.2.1	基追踪算法	26
4.2.2	基追踪算法的改进	27
4.3	匹配追踪类算法	30
4.3.1	匹配追踪算法	30
4.3.2	正交匹配追踪算法	32
4.4	本章小结	34
第 5 章	总结与展望	35
5.1	总结	35
5.2	展望	35
	参考文献	38
	致谢	42

第1章 绪论

1.1 研究目的和意义

传统的信号处理的基础是傅立叶变换，主要手段是频谱分析，重要原则是奈奎斯特采样定理。奈奎斯特采样定理表明：要想从离散信号中无失真的恢复信号，那么它的采样率必须为信号最高频率的两倍或以上。为了保证信号准确重建，采样频率必须大于或等于信号带宽的两倍。然而在实际运用中，高速率采样带来海量的数据存储及过高的硬件设备等挑战。通常为了降低传输的数据量，需要在进行传输前对采样得来的数据进行压缩。在传统理论的指导下，信号 X 的编解码过程如图1.1所示：编码端首先获得 X 的 N 点采样值，经变换后只保留其中 K 个最大的投影系数并对它们的幅度和位置进行编码，最后将编得的码值进行存储或传输，解压缩仅是编码过程的逆变换。

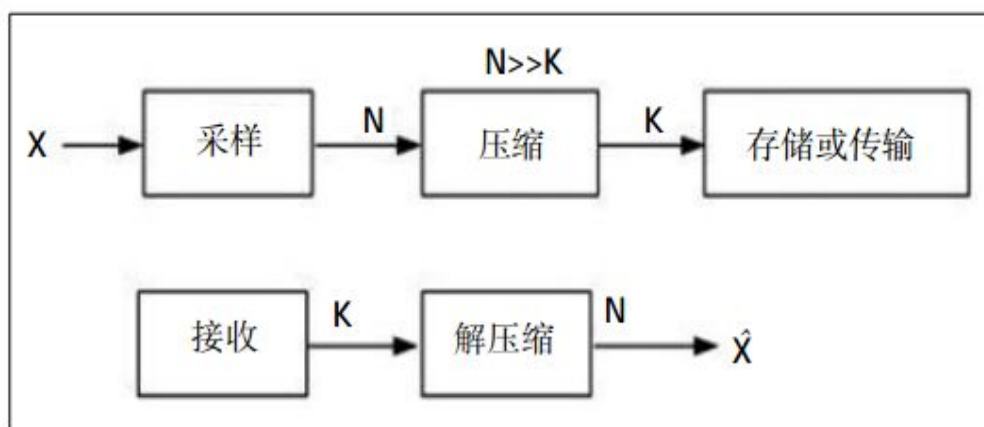


图1.1 传统信号处理过程

该理论框架有如下缺点：首先即使 K 值很小，但由于奈奎斯特采样定理的限制，采样点数 N 可能会非常大；其次是 N 个变换系数必须全部计算出，即使最后只需要其中的 K 个最大系数；最后要对 K 个最大系数的位置进行编码。这些都给信号的传输、存储及处理带来很大的压力，会加重很多硬件资源的负担，比如存储资源、传输资源和计算资源等。于是一些学者提出：能否创建一个全新的信号处理框架，在保证原有信息量的同时，采样频率可以小于传统的奈奎斯特采样频率，且能准确的恢复信号。如果可以解决这个问题，就可以减少信号的采样和处理的时间，降低存储和传输的数据量。

压缩感知理论是近几年来信号处理领域中诞生的一种新的信号处理理论，由

Donoho^[1]、Candes^[2,3]、Romberg^[4]及华裔科学家 Tao^[4]等人提出，其基本思路是从尽量少的数据中提取尽量多的信息。与传统的信号处理过程不同，压缩感知理论的基础是空间变换，手段是随机观测矩阵，重点环节是信号的稀疏重建方法。压缩感知理论可以用低于奈奎斯特的采样率去采集信号，并且在恢复端可以精确地恢复被观测的信号或图像，将采样和压缩同时进行，节省了存储空间。

作为一种全新的采样理论，压缩感知理论并不是对数据直接进行采集，而是将压缩与采样同时行。只要信号是可压缩的或在某个变换域是稀疏的，那么就可以用一个与变换基不相关的测量矩阵将变换所得高维信号投影到一个低维空间上，然后通过求解一个优化问题就可以从这些少量的投影中以高概率重构出原始信号，并证明这样的投影包含了重构信号所需的足够信息。在该理论框架下，采样速率不再取决于信号的带宽，而在很大程度上取决于两个基本准则：稀疏性和非相干性，或者稀疏性和约束等距性。因此，该理论指出了将模拟信号直接采样压缩为数字形式的有效途径。可压缩信号 X 通过一个线性观测过程获得 M 个观测值后直接进行存储或传输。在满足一定的条件下接收端可以根据这 M 个观测值通过一个非线性优化过程恢复出原始信号 X ，与传统的信号获取与处理过程相比节省了时间和存储空间。

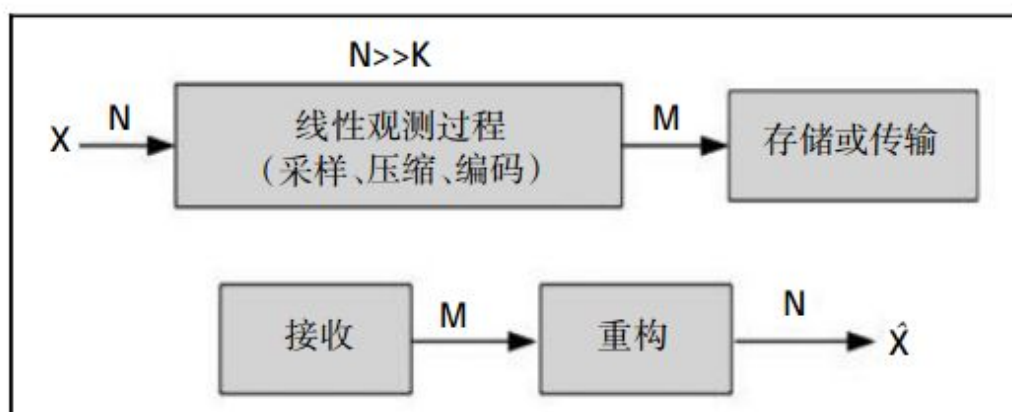


图 1.2 压缩感知理论框架

现实世界中很多的信号在一定的变换域内可以表示成为稀疏信号，例如：平滑信号在傅立叶基和小波基下都可以分解成为稀疏信号，一些医学图像信号、音频视频信号、天文遥感图像信号也在一定的变换域内具有稀疏性。因此，对于压缩感知理论这一领域的研究具有非常大的应用前景和实用价值。

(1) 压缩成像^[5,6]

美国 Rice 大学已经研制出“单像素相机”，该相机是一种全新的相机结构，使用数

字微镜阵列(Digital Micromirror Array)完全成像在伪随机的二值模型上的线性投影的光学计算。它可以利用单一的信号光子检测器采样得到比图像像素点数少的多的点来恢复得到一幅图像,并具有对图像波长自适应的能力,这种自适应能力是传统的电荷耦合元件(Charge-Coupled Device, CCD)和互补金属氧化物半导体(Complementary Metal Oxide Semiconductor, CMOS)成像器件所不具备的。

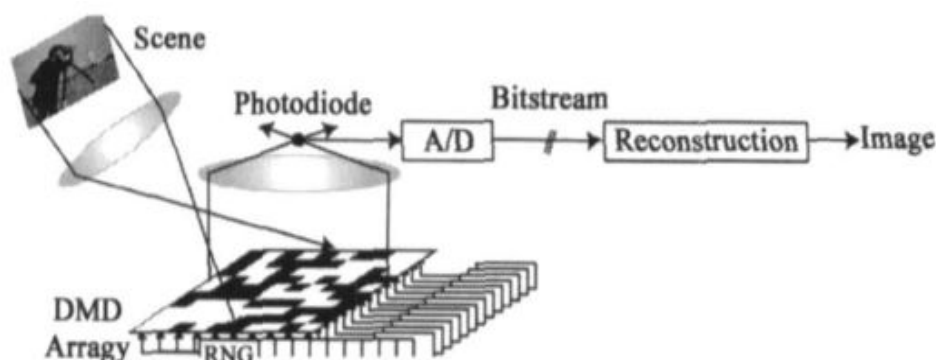


图 1.3 单像素相机的结构示意图

(2) 信道编码^[7,8]

压缩传感理论中关于稀疏性、随机性和凸优化的结论可以应用于设计快速误差校正编码,这种编码方式在实时传输过程中不受误差的影响。在压缩编码的过程中,稀疏表示所需的基对于编码器可能是未知的,然而在压缩传感编码的过程中,它只在译码和重构原信号时需要,并不需要考虑它的结构,所以可以用通用的编码策略进行编码。Haupt 等通过实验表明:如果图像是高度可压缩的或者信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)充分大,即使测量过程存在噪声,压缩传感方法仍然可以准确重构图像。

(3) 模拟到数字信息转换^[9,10]

传统的模数转换理论的依据是奈奎斯特采样定理,然而传统的处理方法不仅在各种场合受到了种种限制,后续的数据存储和处理也已经变成了现在的实时系统设计中的难点。对此, Kriolos 已经设计出了基于压缩感知理论的模拟/数字信息转换器。它首先用所得到的测量信息来代替完整的原始信号,然后再用后端的 DSP 算法来恢复出原始信息。

(4) 生物传感^[11]

生物传感中的传统 DNA 芯片能平行测量多个有机体,但只能识别有限种类的有机体, Sheikh 运用压缩传感和群组检测原理设计的压缩传感 DNA 芯片克服了 this 缺点,压缩传感 DNA 芯片中的每个探测点都能识别一组目标,从而明显地减少了所需

探测点的数量。而且基于生物体基因序列的稀疏特性, Sheikh 验证了可以通过置信传播的方法实现压缩传感 DNA 芯片中的信号重构。

(5) 天文学^[12]

许多天文现象(如脉冲星)具有多种频率震荡特性, 使其在频域上是高度稀疏也就是可压缩的。即使原始数据不完整或者干扰严重(原因可能是天气不佳, 或者就是因为地球自传使我们得不到全时序的数据), 压缩传感技术依然可以在时域内测量这些现象(即记录望远镜数据)并能够精确重建原始信号。

(6) 磁共振成像^[13]

在医学上, 磁共振的工作原理是做许多次(但次数仍是有限的)测量(基本上就是对人体图像进行离散拉东变换(也叫 X 光变换)), 再对数据进行加工来生成图像。由于测量次数必须很多, 整个过程对患者来说太过漫长。压缩传感技术可以显著减少测量次数, 加快成像。此外我们还可以以测量次数换图像质量, 用与原来一样的测量次数可以得到比较好的图像分辨率。

1.2 国内外研究现状和发展趋势

压缩感知理论从 2006 年建立以来, 取得了非常迅速的发展。欧美的许多学者对压缩感知的算法研究取得了非常大的进展, 国内学者对于压缩感知的研究也在积极地展开中。目前, 压缩感知理论在很多方面取得了进展, 比如信号重建算法的研究, 信号的稀疏变换和观测矩阵的设计等几个方面。在信号重构方面, 最开始人们采用的优化模型是传统的最小化 l_2 范数模型, 但最小化 l_2 范数的解不具有稀疏性, 所以研究者又把最小化 l_0 范数作为求解的条件, 该模型求出的解虽然是最稀疏的, 但是最小 l_0 范数优化模型是一个 NP 难问题(Non-deterministic Polynomial, NP)。针对这一问题, 研究者又提出一些次优化求解的算法等价地代替原来的求解条件, 使 NP 难问题能够等价的求解。例如迭代贪婪算法^[14], 最小 l_1 范数的凸优化算法^[15], Bayesian 统计优化算法^[16], 迭代阈值算法^[17], 最小权变分算法^[18]等等。这些算法在计算的时间复杂度和重构精度上各有优劣。

目前压缩感知的研究还主要集中在理论层面, 国内外对压缩感知的研究还主要集中在测量矩阵的设计以及信号重构算法的改进、分析等方面。总的来说, 目前对于压缩感知的研究还是处于初步的阶段, 信号的稀疏表示、观测矩阵的设计以及信号的优化重建算法这几个方面还有不少问题有待解决。此外, 压缩感知理论的研究与实际应

用还存在着脱节的现象，如何能够将压缩感知用到实际中也是我们需要解决的问题。

1.3 本文的主要工作和结构安排

本文将重点研究压缩感知中的信号重构算法，研究内容主要包括压缩感知的理论基础及其核心内容：测量矩阵的设计和信号重构算法。测量矩阵是信号采样和压缩的实现手段，而如何能快速准确的从少量测量值中重构原始信号，是将压缩感知应用于实际的关键问题。本文主要对压缩感知中的测量矩阵和重构算法进行了深入研究，论文的详细结构安排如下：

第一章：绪论

主要阐述了本文的研究背景和意义及国内外压缩感知的研究概况和发展趋势，并对压缩感知的应用进行了简单的综述。

第二章：压缩感知理论概述

阐述压缩感知的基础知识，包括本文涉及的重要的基本概念的解释、信号的稀疏表示理论、压缩感知的线性测量过程即如何构造一个合适的测量矩阵和信号的稀疏重建过程，最后对信号重构的性能评价标准进行了简要的概述。

第三章：压缩感知中的测量矩阵

本章从压缩感知理论的关键点之一的测量矩阵入手，对测量矩阵的基本理论进行了阐述，并从随机性和确定性两个方面对测量矩阵的构造进行了分类，着重阐述了随机性测量矩阵以及确定性测量矩阵的构造方法并分析其优缺点。

第四章：压缩感知中的信号重构算法

本章首先对信号重构算法的分类进行了阐述，然后研究了几种主流的稀疏重建算法，并在 MATLAB 上实现了这几种稀疏重建算法，给出了实验结果，并分析比较了一些常用重构算法的时间复杂度和重构精度。

第五章：总结与展望

总结了本文的工作，指出了有待解决的问题并对以后需要做的研究工作进行了展望。

第2章 压缩感知理论概述

2.1 压缩感知的基本原理

2.1.1 基本概念解释

香农奈奎斯特采样定理：已知连续时间信号 $X(t)$ 中的最高频率点为 f_{\max} ，当信号的采样频率 f_s 大于或等于信号中最高频率 f_{\max} 的 2 倍时，则采样之后得到的离散信号能够完全重建原始信号，且称频率为 $2f_{\max}$ 的采样频率为奈奎斯特频率。

稀疏信号^[2]：如果信号 X 在正交基 $\{\varphi_i | i=1,2,\dots,N\}$ 下的变换可以表示为 $\theta = \psi^T X$ ， $\psi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$ ，当 $0 < L < 2$ 和 $R > 0$ 时，向量系数 θ 满足下式：

$$\|\theta\|_L = (\sum_i |\theta_i|^L)^{1/L} \leq R$$

则称该信号的系数向量 θ 是具有稀疏性的。文献[2]还给出了另一种定义：如果变换向量 θ 中的分量 $\theta_i = \langle X, \psi_i \rangle$ 的非零个数小于等于整数 K ，则称说信号 X 的稀疏度为 K 。

可压缩信号^[2]：对于信号 X ，如果其在某个正交基 Ψ 中的变换系数仅有 K 个较大的分量，而其他的分量都很小时，或者说变换系数经过排序之后按一定量级呈指数级衰减，则称该信号为可压缩的。

范数定义：如果 V 是数域 K 上的线性空间，其中对于任何一个向量 X 对应一个实值函数 $\|X\|$ ，并且它满足以下三个条件：

- (1) 正定性：当 $X \neq 0$ 时， $\|X\| > 0$ ；当 $X = 0$ 时， $\|X\| = 0$ ；
- (2) 齐次性： $\|mX\| = |m| \|X\|$ ， $m \in K, X \in V$ ；
- (3) 可加性(或称三角不等式)： $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ $X, Y \in V$ ；

那么 $\|X\|$ 称为 V 上向量 X 的范数。

l_p -范数定义：设向量 $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ ，当 $p \geq 1$ 时关于向量 X 的 l_p -范数表示为：

$$\|X\|_p = (\sum_{i=1}^N |x_i|^p)^{1/p}$$

其中 $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$ ， $\|X\|_2 = (\sum_{i=1}^N |x_i|^2)^{1/2}$ ， $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \{|x_i|\}$ ，特别地当 $p=0$ 时，定义为： $\|X\|_0 = \sum_{i=1}^N |x_i|^0$ ，表示向量 X 中非零项的个数。虽然当 $p=0$ 时，该式不满足范数定义，但为了表述和使用方便称其为零范数。

相干性^[19]：假设矩阵 Φ 和矩阵 Ψ 都是大小为 $N \times N$ 的正交基矩阵，则矩阵之间的相干性定义为：

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max_{1 \leq i, j \leq n} |\phi_k^T \psi_j|$$

其中 ϕ_k^T 和 ψ_j 分别表示 Φ 中的第 k 行行向量和 Ψ 中第 j 列列向量。文献[6]得出 μ 的取值范围为 $1 \leq \mu(\Phi, \Psi) \leq \sqrt{N}$ ，当 μ 的取值较小时，可以认为矩阵 Φ 和矩阵 Ψ 是非相干的。

NP-hard定义^[20]：NP是指不确定性多项式(Non-deterministic Polynomial, NP)，运用一定数量的运算量去求解多项式，并且在一定的时间内可以解决的问题称它为不确定性多项式。如果问题求答案的正确性能够容易检测出来，那么这样的问题可以称为NP问题，即存在一个多项式检测算法去检验问题的解，相反NP困难问题都将转化图灵可归约。

2.1.2 压缩感知的基本内容

由于大数据量的数据传输模式涌入到信号处理领域，传统的压缩方法已经显得不是那么有效了，比如图片压缩方法 JPEG2000 或者音频压缩方法 MP3。这些方法都是利用信号的固有的本质特性，以 JPEG2000 图像压缩方法为例，它是利用图片在小波变换基中的系数的能量主要集中在小部分系数值中，然后主要对这些小部分系数进行消除冗余编码。这类压缩信号的方法都是对信号外在的特点进行处理，并没有深入到信号的本质特性。压缩感知理论则是对传统的压缩方法的突破，压缩感知理论的目的是希望从远小于传统方法压缩后的数据去恢复某一信号或者图像。

由于压缩感知理论是一种高效的获取信号的方式，所以先考虑图2.1中的线性观测过程，它可以用一个 $M \times N$ 的矩阵 Φ 示，对信号 X 观测得到的 M 个观测值为 $y_j = \langle X, \phi_j \rangle$ ， $j = 1, 2, \dots, M$ ，其中 y_j 是向量 Y 中的第 j 个元素， ϕ_j 是观测矩阵 Φ 的第 j 行向量，写成矩阵形式为：

$$Y = \Phi X \quad (2.1)$$

式中 $X \in R^N$ 是原始信号向量，测量矩阵 $\Phi \in R^{M \times N}$ ，线性测量值 $Y \in R^M$ 。式(2.1)通过内积的形式构造线性测量模型，该模型具有通用性，也即用式(2.1)来表达采样、数据压缩等问题。若观测函数是狄拉克函数，那么 Y 是信号 X 的时域或者频域采样值，也即是通常所说的模拟-数字信号采样模型。如果观测函数是像素的指针函数，这一模型又可以表示相机成像模型。如果观测函数是正弦函数，该模型又可以表示核磁共振图像采集模型。

压缩感知理论感兴趣的是欠定或者压缩条件下，也即是希望测量值个数远小于信号值个数，即 $M \ll N$ 。简单地来看，求解这个欠定系统是不可能的。但是压缩感知理论证明如果这个信号 X 是一个可压缩信号，也就是说信号的恢复主要依靠远少于原

信号维数的数值。比如说，如果信号可以表示成某类稀疏系数叠加的形式，那么这类问题就变得可能了。

假设长度为 N 的信号 X 具有某种正交基线性组合的形式，比如傅里叶变换或者小波变换，即可写成：

$$X = \sum_{i=1}^N \theta_i \varphi_i \quad \text{或} \quad X = \Psi \theta \quad (2.2)$$

其中 X, θ 为 $N \times 1$ 的列向量， Ψ 为 $N \times N$ 矩阵且 $\theta_i = \langle X, \varphi_i \rangle = \varphi_i^T X$ ， $\psi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$ ，那么利用正交基特性，其变换系数可写成如下所示矩阵形式：

$$\theta = \psi^T X \quad (2.3)$$

压缩感知理论认为对于一个稀疏特性的信号，直接利用一个与正交基不相干的观测矩阵对其欠采样，欠采样后仍然保留着原始信号的恢复信息。那么假设存在一个不相关的 $M \times N$ 维观测矩阵，结合式(2.1)和(2.2)可获得压缩感知理论中信息采样的基本表达式：

$$Y = \Phi X = \Phi \Psi \theta = A \theta \quad (2.4)$$

其中 $A = \Phi \Psi$ 是 $M \times N$ 的矩阵，形式如图 2.1：

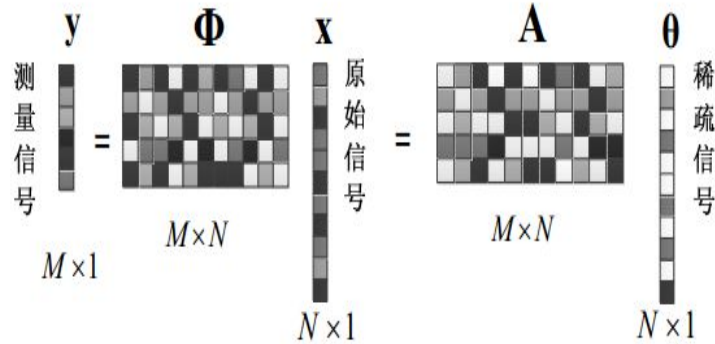


图 2.1 压缩感知的线性测量过程

若已知信号具有稀疏特性，也就希望利用 l_0 范数意义下的优化问题去解压缩获得原始信号：

$$\min \|\theta\|_0 \quad \text{s.t.} \quad A\theta = Y \quad (2.5)$$

由此，一个通过压缩感知完成的信号处理过程就完成了。

综上所述压缩感知理论主要包含以下几方面内容：

- (1) 信号的稀疏表达。一般来说信号 X 本身不是稀疏的，它就需要寻找某种正交基或紧框架，使信号 X 经过变换后是稀疏的。
- (2) 观测矩阵的设计。如何设计一个稳定的观测矩阵 Φ 使得在从 $X \in R^N$ 到 $Y \in R^M$ 降维

处理中可压缩信号的重要信息不被破坏。

(3) 信号的重构算法。信号的重构算法解决了从欠定线性观测值中恢复原始信号的问题，如何设计快速高效的恢复算法是压缩感知理论得以广泛应用的基础。

2.1.3 信号的稀疏表示

压缩感知是结合信号的稀疏表示理论提出的信号采样理论，即能够运用压缩感知进行采样和重构的信号要具有稀疏性，也就是说原始信号本身要具有能够被压缩的特性，幸运的是现实中的大部分信号都具有这种特性，只是它们很多时候并没有直接表现出这种稀疏的形式，信号的稀疏表示就是要为现实中的信号找到它们的稀疏形式。

考虑一个长度为 N 的一维离散实值信号 X ，可以看作是 R^N 空间中的一个 $N \times 1$ 维的列向量： $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ 。如果信号 X 仅有少量的非零分量，或者说非零分量的个数 $K \ll N$ ，就称信号 X 本身是稀疏信号。

对于本身并不稀疏的信号 X ，我们来寻找它的一个稀疏变换。给定 R^N 空间中的一组标准正交基： $\{\varphi_i | i=1, 2, \dots, N\}$ ，其中向量 φ_i 是 R^N 空间中的 $N \times 1$ 维的列向量， R^N 空间中的任意信号 X 都可以有 $\{\varphi_i | i=1, 2, \dots, N\}$ 线性表示为：

$$X = \sum_{i=1}^N \theta_i \varphi_i = \Psi \theta$$

其中变换系数 $\theta_i = \langle X, \varphi_i \rangle$ ， $i=1, 2, \dots, N$ ， $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T$ 是 R^N 空间的 $N \times 1$ 维的列向量， $\Psi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$ 是有 $\{\varphi_i | i=1, 2, \dots, N\}$ 作为列向量形成的 $N \times N$ 维的变换矩阵。显然，向量 θ 是信号 X 在变换域 $\Psi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$ 中的等价表示。若向量 θ 中仅有 $K \ll N$ 个非零系数，则称信号 X 是 Ψ 域中 K -稀疏信号。特别的，当信号 X 本身是稀疏时，相当于 $\Psi = I$ ，即标准单位变换。

下图给出了信号稀疏表示的实现图，图中原始信号 X 经过稀疏表示后有很多零值，得到变换域 Ψ 中的稀疏变换信号 θ 。

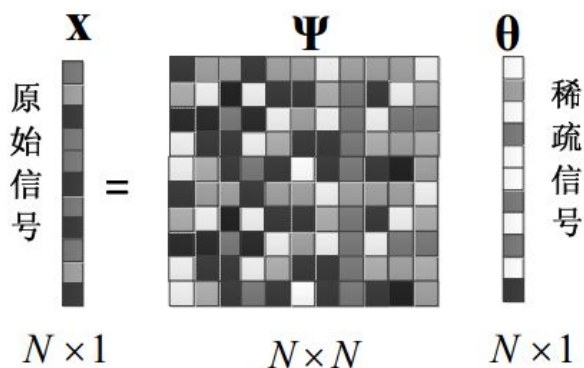


图 2.2 信号的稀疏表示

信号的稀疏性即是信号 X 在某个正交基 Ψ 下的变换可以表示为 $\theta = \psi^T X$ ，当向量系数 θ 满足下式：

$$\|\theta\|_L = (\sum_i |\theta_i|^L)^{1/L} \leq R$$

其中 $R > 0$ 和 $0 < L < 2$ ，则说明该信号系数向量 θ 是具有稀疏性的。文献[2]给出了信号稀疏性的另一种定义：如果变换向量 θ 中的分量 $\theta_i = \langle X, \psi_i \rangle$ 的非零个数小于等于整数 K ，则称信号 X 的稀疏度为 K 。若信号经过稀疏变换后仅有 $K \ll N$ 个非零系数，其他系数均为零，这样的信号称为严格稀疏信号，然而多数情况下，信号经过稀疏变换后，并不是严格稀疏的，但是仍具有可压缩性，即变换后的向量 θ 中的系数经过排序之后，可以呈指数级衰减趋于零。可压缩信号是指对于 N 维信号 X ，如果其在某种变换域 Ψ 中的变换系数仅有 K 个较大的分量，而其他的分量都很小时，或者说变换系数的分量经过排序之后按一定量级成指数级衰减趋于零，我们就说信号 X 为可压缩信号。 $\theta = \psi^T X$ 是 X 在正交基 Ψ 上的稀疏表示，信号的稀疏性决定了非自适应传感矩阵单位采样值的有效性，从而决定了信号重建的精度。

选取适当的稀疏基使其能极大化地稀疏表示信号，就能在同样采样数条件下获得更好的重构效果。由于稀疏变换的重要性，合理地选择稀疏基，使得信号稀疏变换后得到的非零系数尽可能的少，是现在的研究热点之一，因为这样不仅可以提高采样和压缩速度，减少传输带宽，还可以节省存储空间，使得后续的信号重建工作更加简单容易，使重建过程更加精确。比较常用的稀疏基有：离散余弦变换基、离散傅里叶变换基、离散小波变换基、Chirplet 基、Curvelets 基、Gabor 基和过完备字典库^[21]。过完备字典库是用过完备的冗余函数库代替基函数，形成的一种原子个数远大于信号长度的冗余字典库。字典库的构成没有任何的限制，通常选择尽可能符合被测量信号的结构原子，这样我们就可以在字典中寻找具有最佳线性组合的一组原子来逼近被测量信号。

国外对信号的稀疏分解研究起步比较早，1982 年 Huber 提出了投影追踪算法，并首次将其应用在统计回归领域。经过将近 20 年的发展，信号的稀疏算法可谓百花齐放，已经逐渐形成了多种新的算法。常用算法可以分为两大类：一类是吐故纳新类算法，另一类是竞争优化类算法。目前，在冗余字典下对信号进行稀疏分解是近几年来信号分解领域研究的热点，对此，国内外很多学者都做了相关的研究。

在确定性信号方面，目前研究的比较成熟也比较多的算法有：基本匹配追踪算法 (Basis Matching Pursuit, BMP)、顺序递归匹配追踪算法 (Order Recursive Matching

Pursuit, OMPM)、修正匹配追踪算法(Modify Matching Pursuit, MMP)、正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)、进化多分辨率匹配追踪算法、反向剔除算法和 Relax 算法以及高分辨率追踪算法, 以上这些算法为吐故纳新类算法, 都是通过逐步迭代来求得局部的最优解, 在很多情况下并不能得到信号的真实表示, 除了吐故纳新类的算法以外还有其他算法, 比如框架方法(Method of Frames, MOF)、基追踪算法(Basis Pursuit, BP)等等, 经过研究表明这些算法得到的信号更稀疏, 更能准确地表达原始信号, 但是也面临着计算量非常巨大的问题。

对随机信号采用的稀疏算法与确定性信号采用的随机算法基本上是相同的, 但是对于随机信号来说, 观测模型会发生变化, 所以信号的表示也会有所不同。随机信号方面主要会涉及到两个问题, 一个是模型定阶准则问题; 另一个问题就是正则化参数方面的选择问题。对于以 BMP 为代表的吐故纳新类算法来说, 一般都是使用残差控制的思想, 也就是说, 通过不断的迭代, 在每次迭代的过程中, 对门限进行判断, 如果低于这个门限的话, 迭代就会终止。此时, 就假设有效的信号已经抽取出来了, 剩下的都是噪声。但是上述过程的一个前提条件就是要事先知道噪声的电平(或者信噪比)。如果噪声的电平未知的话, 这就需要采用各种模型定阶准则决定什么时候停止迭代, 常用的模型定阶准则有 AIC(Akake's Information Criterion, AIC)、MDL(Minimum Description Length, MDL)、MAP(Maximum a Posterior, MAP)等, 这些准则都被看作是一个最优化问题, 该最优化问题以模型阶数作为变量、以模型的复杂性和拟合度加权的折衷值作为目标。

相比国外而言, 国内对稀疏分解的研究就显得比较晚, 研究成果也就比较少。最近几年, 国家自然科学基金对信号的稀疏研究方面多了一些资助。而国内对于图像的稀疏分解这方面的研究还是非常少的。对于完备原子库方面的研究, 国内这方面的文献比较少。

目前, 国内许多的研究所和高等院校在对信号的稀疏表示等方面展开了研究, 也取得了一些成果。比如说, 国防科技大学将信号的稀疏表示用于雷达成像以及图像的稀疏编码。西南交通大学则将信号的稀疏分解用于图像的压缩和去噪, 取得了一些成果。总的来说, 国内方面对于稀疏的研究还不是很多, 相关的论文数目比较少, 大多数论文还都停留在介绍一些国外的研究成果层面。

2.1.4 观测矩阵的设计

重建信号的其中的一个关键点是测量矩阵的构造, 它可由测量波形和采样方式来

决定。基于测量矩阵的普适性和实用性，Candes等研究出著名的约束等距条件 PIP(Restricted Isometry Principle, RIP)理论，RIP理论成为压缩感知的奠基理论。

定义矩阵 $A = \Phi \Psi$ ，对于稀疏度为 K 的信号 X ， $\delta_K \in (0,1)$ ，满足：

$$1 - \delta_K \leq \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2} \leq 1 + \delta_K$$

则称 A 满足 K 阶约束等距条件(RIP)^[3]。

Candes、Tao等人已经证明，若矩阵 A 对稀疏度为 K 的信号满足 K 阶RIP条件，那么采样值 Y 就能保证 X 在欧式空间上的等距性，原始信号的采样值中信息没有被破坏，此时我们就能根据方程(2.5)求其解。而且，已经证明，当 A 满足 $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$ 时，方程(2.5)求得的解 $\hat{\theta}$ 满足：

$$\|\theta - \hat{\theta}\|_2 \leq C_0 \frac{\|\theta - \hat{\theta}\|_2}{\sqrt{K}} + C_1 \sqrt{K} \sigma, \text{ 其中 } C_0 = 2 \frac{1 - (1 - \sqrt{2}\delta_{2K})}{1 - (1 + \sqrt{2}\delta_{2K})}, C_1 = \frac{4\sqrt{2}}{1 - (1 + \sqrt{2}\delta_{2K})}$$

RIP虽然为压缩感知理论的精确重建提供了关于感知矩阵的边界条件，但是判断一个矩阵是否满足RIP条件，则需要复杂的组合运算，而且RIP是一个充分条件而非必要条件。因此，文章[22, 23]给出更为实用的一个判断准则，称之为互相干系数。

首先假设 R^N 中的两组标准正交基 $\phi_{N1}, \phi_{N2}, \dots, \phi_{NN}$ 和 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ 分别构成的 $N \times N$ 正交矩阵 $\Phi_N = [\phi_{N1}, \phi_{N2}, \dots, \phi_{NN}]^T$ 和稀疏基矩阵 $\Psi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$ ，从 Φ_N 中随机抽取的 M 个行向量构成 $M \times N$ 的观测矩阵 Φ ，并定义 Φ_N 和稀疏基 Ψ 的相关度为：

$$\mu(\Phi_N, \Psi) = \sqrt{N} \max_{1 \leq i, j \leq n} |\phi_{Ni} \varphi_j|$$

当 μ 的取值较小时，可以认为矩阵 Φ_N 和矩阵 Ψ 是非相干的。该定义的实质是 Φ_N 的列与 Ψ 的行不能互相表示，此时 Φ 对 X 的采样不会包含重复的冗余信息，其信息量在此时也达到最大。并指出，若观测向量组 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ 是从正交基 $\phi_{N1}, \phi_{N2}, \dots, \phi_{NN}$ 中任取 M 个向量构成的子集，即观测矩阵 Φ 由正交矩阵 Φ_N 中任意取 M 行构成，当压缩观测值个数 M 与相关度 $\mu(\Phi_N, \Psi)$ 满足一定的关系时，原始信号能够精确的重构。

定理2.1: 若从正交矩阵 Φ_N 中任意取 M 行构成 $M \times N$ 维的观测矩阵 Φ ，则欠定方程组(2.1)能通过 l_1 范数完全重构的充分条件是

$$M \geq C \mu^2(\Phi_N, \Psi) K \log(N)$$

其中 C 为确定常数。从这个定理可以看出，相关度 $\mu(\Phi_N, \Psi)$ 越小，则 M 越小，信号能够完全重构所需要的压缩观测值越少。

现有的不相关性准则需假设观测向量组 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$ 是从标准正交基 $\phi_{N1}, \phi_{N2}, \dots, \phi_{NN}$

中任取 M 个向量构成的子集, 其中 $\phi_{Ni} \in R^N$, $i=1,2,\dots,N$, 而大多构造的观测矩阵并不满足正交性, 比如常用的高斯随机观测矩阵、随机 ± 1 构成的Rademacher矩阵。因此有必要把不相关性准则扩展到一般的情况, 即要求 $\phi_{N1}, \phi_{N2}, \dots, \phi_{NN}$ 是 R^N 中的一组基, 即矩阵 $\Phi_N = [\phi_{N1}, \phi_{N2}, \dots, \phi_{NN}]^T$ 是非奇异的。基于以上假设定义 Φ_N 和稀疏基 ψ 的相关度为:

$$\bar{\mu}(\Phi_N, \psi) = \sqrt{N} \max_{1 \leq i, j \leq n} |\bar{\phi}_{Ni} \varphi_j|$$

称该式为广义相关度, 其中 $\bar{\phi}_{N1}, \bar{\phi}_{N2}, \dots, \bar{\phi}_{NN}$ 是 $\phi_{N1}, \phi_{N2}, \dots, \phi_{NN}$ 通过Schmidt正交单位化后对应的一组标准正交基。

定理2.2: 若从正交矩阵 Φ_N 中任意取 M 行构成 $M \times N$ 维的观测矩阵 Φ , 则欠定方程组(2.1)能通过 l_1 范数优化问题完全重构的充分条件是

$$M \geq C \bar{\mu}^2(\Phi_N, \psi) K \log(N)$$

其中 C 为确定常数。

RIP准则是目前公认的一个充分条件, RIP准则并不是一个必要条件, 也就是说信号的稀疏重建条件可以在RIP准则的基础上进一步地降低。如何得到观测矩阵满足的必要条件, 或充要条件, 成为该领域的另一个难点。很多的研究者正在研究感知矩阵的必要条件, 但是还没有应用到实际中, 所以压缩感知与稀疏表示理论正处于一个成长时期, 还有很多的工作需要去完善。研究者期望找到性能较好的测量矩阵, 保证较好的测量性能的同时, 又能兼顾硬件的易实现性, 这样才可以在实际应用中普及。

2.1.5 稀疏重建过程

信号的重构是从 M 维的测量值 Y 中恢复 N 维的原始信号 X , 由于 $M \ll N$, 直接求解式(2.1)的逆问题是一个病态问题, 无法求解。但是如果信号 X 具有稀疏性, (2.3)式中的 θ 仅有 K 个非零系数, 只要满足了 $M \gg K$, 可以通过求解(2.4)式的逆问题得到变换稀疏信号 θ , 再代回式 $X = \Psi\theta$ 中, 就可以进一步恢复出原始信号 X 。文献[23]指出当存在 $2K$ 阶等距常数 $\delta_{2K} < 1$ 使得 A 满足RIP特性时, 压缩感知问题 $Y = A\theta$ 可以化为以下的最小 l_0 范数问题求解, 也即是:

$$\min \|\theta\|_0 \quad \text{s.t.} \quad A\theta = Y \quad (2.5)$$

从而得到稀疏系数 θ , 如果对于时域的稀疏信号, 即当信号 X 本身就是稀疏信号的前提下可以将式(2.5)转化为(2.6)式:

$$\min \|X\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \Phi X = Y \quad (2.6)$$

因为最小 l_0 范数问题的解具有最稀疏性的特性，所以人们在解决基于稀疏性的压缩感知问题时，最希望将其转化为最小 l_0 范数问题求解，但是求解式(2.5)中的最小 l_0 范数需要穷举 X 中非零值的所有 C_N^K 种可能性，是一个NP难问题，无法直接求解，而且其算法的时间复杂度非常大，随着 N 的增大以组合级数的形式增加，对硬件的要求也非常的高，不易于实现。于是很多学者将问题(2.5)转化为求最小 l_0 范数问题的次最优解问题，在此基础上出现了简单实用的贪婪算法，是目前应用非常广泛的压缩感知信号重构算法。贪婪算法允许一定的误差，是求解下式的最小 l_0 范数问题：

$$\min \|\theta\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|Y - A\theta\|_2 < \varepsilon \quad (2.7)$$

该方法通过 l_0 范数最小来完成信号的重建，它主要是以牺牲一定的精度为代价，大幅度地提高运算速度，所以应用的非常广泛。

贪婪算法主要包括匹配追踪算法(Matching Pursuit, MP)^[25]，正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^[26]以及一系列OMP算法的改进算法。

除了贪婪算法外，文献[23, 24]表明， l_1 范数最小问题在满足一定条件下和 l_0 范数最小问题等价。那么(2.5)式就可以转化为最小 l_1 范数的凸优化问题：

$$\min \|\theta\|_1 \quad \text{s.t.} \quad A\theta = Y \quad (2.8)$$

最小 l_1 范数问题又称为基追踪(Basis Pursuit, BP)^[15]算法，常采取的求解算法有最小角度回归法^[28]和梯度投影法^[29]。式(2.8)中的最小 l_1 范数问题是一个凸优化模型，可以得到精确的解，重构性能突出，但是随着信号维度的增高其算法计算量急剧增大，这在解决现代通信中的高维信号时较为困难。

以上考虑的都是等式约束，然而实际中，测量过程可能会引入噪声等不确定的因素，于是 $Y = \Phi X$ 中将其转化为 $Y = \Phi X + \varepsilon$ ，其中 ε 为高斯白噪声。因此，优化问题(2.8)中的约束条件需要用不等式来代替，即

$$\min \|\theta\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|A\theta - Y\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.9)$$

目前，解决压缩感知信号重构问题的重构算法主要有三大类，除了基于最小 l_0 范数的贪婪算法和基于最小 l_1 范数的凸优化算法之外，还有很多其他的算法如：Bayesian统计优化算法^[16]，迭代阈值算法^[17]，最小权变分算法^[18]等。算法的计算复杂度和性能上都各有优劣。

2.2 信号重构的性能评价标准

为了方便后续内容中对信号的重构算法做出客观的评判，我们在此对利用压缩感

知理论恢复出的重构信号提出以下的评判标准。目前对于传统的一维信号重构性能的衡量标准主要包括：均方误差、信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)、绝对误差和相对误差等。

假设原始信号为 X ，恢复信号为 \hat{X} ， M 为原始信号的行数， N 为原始信号的列数。上述衡量标准可以定义为：

$$(1) \text{ 均方误差: } MSE = \frac{\|X - \hat{X}\|_2^2}{M \times N}$$

$$(2) \text{ 信噪比: } SNR = 10 \lg\left(\frac{\|x\|_2^2}{MSE}\right)$$

$$(3) \text{ 绝对误差: } Absolut - error = \|X - \hat{X}\|_2$$

$$(4) \text{ 相对误差: } Relative - error = \frac{\|X - \hat{X}\|_2}{\|\hat{X}\|_2}$$

另外，考虑到压缩感知低速采样、测量值少、计算简单的特点，能够很好的解决超带宽信号的高速采样问题和海量数据之间的矛盾，所以人们希望利用压缩感知解决的多是超带宽信号、维数相对来讲比较高的信号，然而对于超带宽和高维数的信号而言，快速的计算能力应该是最基本的要求，所以要求压缩感知的信号重构算法在保证算法性能的基础上，计算复杂度应尽可能的低。甚至在一些对实时性要求高，对逼真度要求低的系统中，计算简单快速显得更为重要。所以算法的运行时间也是衡量一个重构算法的重要标准，运行时间的大小表征着重构算法的可操作性及其实现的复杂程度， t 越大，则说明该算法耗时越长，实现的代价越大。

2.3 本章小结

本章主要介绍了压缩感知的理论框架和主要内容。首先简单的介绍了压缩感知的理论框架，主要包括信号的稀疏表示、信号的线性测量和信号的重构算法，接着对压缩感知的三个核心内容都进行了详细的介绍，为后续内容的研究奠定了坚实的理论基础。然后，为了对信号的重构算法有客观的评判标准，给出了信号处理的性能评价标准，为后续研究内容中信号的重构算法的性能比较提供了统一的衡量标准。

第3章 压缩感知中的测量矩阵

压缩感知中的测量矩阵是实现信号采样和压缩的工具，设计合理的测量矩阵不仅能够减少测量次数，而且能够提高重构信号的准确率。

3.1 测量矩阵的分类

为保证能恢复稀疏或者近似稀疏的信号，我们需要构造RIP矩阵，我们希望对于 $M, N \in \mathbb{Z}$ ，构造一个 $M \times N$ 的矩阵 Φ ，使其尽量大的满足 K 阶的RIP条件。那么该如何构造此类矩阵，Donoho^[1]给出了测量矩阵的三个特征：

- (1) 测量矩阵的列向量组成的子矩阵的最小奇异值应大于一定的常数，即列向量满足一定的线性独立性；
- (2) 测量矩阵的列向量要体现出某种类似噪声的独立随机性；
- (3) 满足稀疏度的解是满足 l_1 范数最小的向量。

Donoho 证明了具有以上三个特征的矩阵都可以作为压缩感知的测量矩阵，当前构造测量矩阵的方法主要有三类：随机矩阵、确定性矩阵和结构随机矩阵。

3.1.1 随机测量矩阵

随机测量矩阵以高斯(Gauss)随机矩阵^[24,29]、贝努利(Bernoulli)随机矩阵^[24]为代表。Donoho和Candes等人在提出压缩感知理论之初，就指明随机矩阵作为压缩感知的测量矩阵有着先天的优势，作为测量矩阵能保证信息不丢失，恢复精度也高。随机测量矩阵的每个元素都服从相互独立的同分布，如高斯分布或是贝努利分布。文献[24,29]证明了高斯随机测量矩阵和贝努利随机测量矩阵都满足RIP特性，可以用较少的采样值获得精确的重建。

- (1) 高斯(Gauss)随机测量矩阵的构造方式：

矩阵中的元素 $\phi_{i,j}$ 是独立的随机变量且服从如下分布：

$$\phi_{i,j} \sim N(0, 1/M)$$

即服从期望为0，方差为 $1/M$ 的Gauss分布，其中 $i \in [1, M], j \in [1, N]$ ， $\phi_{i,j}$ 表示第 i 行第 j 列位置上的元素。

高斯随机矩阵是一个随机性非常强的测量矩阵，通过理论可以证明其满足RIP性质。高斯随机测量矩阵能够作为最常用的测量矩阵主要在于：它与绝大多数正交稀疏

矩阵不相关且当信号 X 是长度为 N ，稀疏度为 K 的可压缩信号时，高斯随机测量矩阵仅需要 $M \geq cK \log(N/K)$ 个测量值便能以极高的概率满足RIP性质，从而可准确重建出原始信号，其中 c 是一个很小的常数，其缺点是确定性不高。

(2) 贝努力(Bernoulli)随机测量矩阵的构造方式：

随机测量矩阵 Φ 中的元素以相同的概率取 $1/\sqrt{M}$ 或 $-1/\sqrt{M}$ ，也就是 $\Pr(\varphi_{i,j} = 1/\sqrt{M}) = \Pr(\varphi_{i,j} = -1/\sqrt{M}) = 1/2$ 。贝努力随机测量矩阵同样也是随机性非常强的测量矩阵，其中 $i \in [1, M], j \in [1, N]$ ， $\varphi_{i,j}$ 表示第 i 行第 j 列位置上的元素。

定理3.1：假定 $M \times N$ 的矩阵 Φ 是一个Gauss或者Bernoulli随机测量矩阵，那么当 $K \leq C_1 M / \log(N/K)$ ，矩阵 Φ 是一个 K 阶RIP矩阵的概率不小于 $1 - \exp(-C_2 n)$ ，此处常数 C_1, C_2 仅仅依赖于RIP常数 δ ^[30]。

该定理表明Gauss随机矩阵或Bernoulli随机矩阵满足 $K = o(M / \log(N/K))$ 阶的RIP性质。根据逼近论中的宽度理论，对于给定的 $M, N \in N^+$ ，这里的 K 已经达到了最佳阶。

(3) 稀疏随机测量矩阵的构造方式：

首先生成一个零元素矩阵 $R^{M \times N}$ ，在矩阵 R 中每一个列向量中随机抽取 d 个位置将其赋值为1， d 的取值为 $\{4, 8, 10, 16\}$ 。

(4) 正交测量矩阵的构造方式：

构造一个 $N \times N$ 的正交矩阵，随机抽取 M 行向量，对 $M \times N$ 阶矩阵的列向量单位化得到测量矩阵。

贝努力随机测量矩阵、高斯随机测量矩阵等这些随机测量矩阵都是随机性很强的矩阵，与高斯随机测量矩阵的性质类似，在实际应用中也经常用到。以上随机测量矩阵，虽然其性能好，但是因为其随机性，硬件实现困难，要求存储整个矩阵，而且实验有不确定性，需要大量实验求平均消除不确定性。

3.1.2 构造随机测量矩阵的改进方法

以上矩阵大多数是随机矩阵，随机矩阵在仿真实验中存在不确定性，需要很多后续处理才能消除这些不确定性，而且随机矩阵不容易硬件实现。

(1) 基于QR变化的改进^[31]

由Donoho给出的测量矩阵的特性可知，矩阵的最小奇异值与矩阵的线性相关性有着密切的关系，最小奇异值越大则矩阵的独立性越强，当最小奇异值趋于0时矩阵的奇异性趋于0，而矩阵的QR分解能增大矩阵的奇异值且不会改变测量矩阵的性质，通

过QR变换，可以使得列向量更加近似满足线性独立性的要求。

(2) 基于正交变换的改进^[31,32]

由矩阵论知识可知，如果两个基向量正交则这两个向量之间互相独立，相关性为零，由此我们可以将测量矩阵进行正交化处理来达到向量间的相互独立，再将变化后的矩阵在压缩感知过程中实用化。

3.1.3 确定性测量矩阵

由于随机测量矩阵带来的不确定性使人们开始着手研究确定性矩阵。常用的确定性矩阵有多项式测量矩阵^[33]、分块多项式测量矩阵^[34]、轮换矩阵^[35]、哈达玛矩阵^[24]、托普利兹矩阵^[35]等。

(1) 托普利兹矩阵的构造方式：

对于测量信号维数为 M ，原始信号维数为 N 的压缩感知过程，托普利兹矩阵的构造方式是先生成一个 $N+M-1$ 维的行向量 u ，向量元素的取值为1和-1，即 $u=[u_1, u_2, \dots, u_{N+M-1}]$ ，每个元素独立的服从对称的贝努利分布。利用向量 u ，采用向后循环的方式构造托普利兹测量矩阵，形式如下：

$$U = \begin{bmatrix} u_N & u_{N-1} & \cdots & u_1 \\ u_{N-1} & u_N & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N+M-1} & u_{N+M-2} & \cdots & u_M \end{bmatrix}_{M \times N}$$

托普利兹矩阵是通过一个行向量依次移位来生成整个矩阵的，这样的形式容易在硬件上实现。相比于高斯、贝努利等随机矩阵需要 $M \times N$ 个独立随机元而言，托普利兹矩阵仅需 $N+M-1$ 个独立随机元，在高维信号处理时具有存储简单的优势，能节省大量的存储空间。而且相比于高斯等随机矩阵相乘需 $M \times N$ 次运算，托普利兹矩阵的相乘运算可以运用快速傅里叶变换进行快速运算，需 $O(\log_2 N)$ 次运算就能实现。Bajwa 等研究证明了只要测量数 $M \geq CK^2 \log(N/\varepsilon)$ ，其中 ε 是一个很小的正数，则对应的托普利兹矩阵能够以至少 $1-\varepsilon$ 的概率精确重构出原信号。

(2) 轮换矩阵的构造方式：

先创建一个轮换矩阵，其形式为托普利兹的特殊形式，随机生成长度为 N ，元素为 $\{1, -1\}$ 的向量作为测量矩阵的第一行，采用依次循环方式获得第二行至第 M 行，如下式：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}_{M \times N}$$

轮换矩阵是托普利兹矩阵的特殊形式，其性能也和托普利兹相似，循环移位的构造方式易于硬件实现，运算过程中可以利用快速傅里叶变换进行快速运算，而且轮换矩阵的生成向量长度更短，更能节省空间。但是其存在以下方面的不足：矩阵元素都是1或-1，这样的元素值很容易重复出现，构造出的测量矩阵的列向量之间线性相关的概率很高且矩阵构造过程采用单一的循环移位方式使得其难以体现列向量之间的独立随机性，相比于高斯等随机测量矩阵，托普利兹矩阵和轮换矩阵的随机性不够突出。

改进的轮换矩阵-广义轮换矩阵的构造方式：它同样是采用由向量循环移位来构造整个矩阵的方式。为了减少存储空间的开销，直接构造 $M \times N$ 维的测量矩阵，即循环移位构造 M 行，且为了增加列向量之间的线性无关性，在构造剩余 $M-1$ 行时，每一次移位对移到最前端的元素都乘以一个固定的系数 $a(a > 1)$ ，这样就构造出如下形式的测量矩阵：

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ ac_n & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ ac_{n-1} & ac_n & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ac_2 & ac_3 & ac_4 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}_{M \times N}$$

其中 $c_1, c_2, c_3 \cdots c_n \in \{1, -1\}$ ，然后对列向量进行归一化后得到最终的测量矩阵。广义轮换矩阵中系数 a 的添加使得列向量之间的非相关性有了很大的提高，保证了列向量之间的相互独立性，但列向量应有的独立随机性却难以体现，此类矩阵不够稀疏，要重建信号需要较多的测量值，运算复杂度也比较高。

(3) 哈达玛矩阵的构造方式：

哈达玛矩阵是一种结构简单，性能突出的正交方阵，矩阵元素为1和-1，且矩阵的任意两个列向量和行向量都是正交的。哈达玛测量矩阵的构造方法是先生成一个 $N \times N$ 的哈达玛矩阵，然后从 $N \times N$ 的哈达玛矩阵中随机的抽取 M 行向量，构成 $M \times N$ 维的矩阵 Φ_0 ，为使测量矩阵满足RIP特性，对矩阵 Φ_0 的列向量进行单位化就得到最终的测量矩阵 $\Phi = (1/\sqrt{M})\Phi_0$ 。相比与其他测量矩阵，部分哈达玛测量矩阵重构信号需要的测量数较少，重构性能也较好。这是由于哈达玛矩阵有突出的正交特性，即任

意的两个列向量和行向量都是正交的，随机选取 M 行后得到的部分哈达玛测量矩阵的列向量也能很好的保持线性独立性。但是哈达玛测量矩阵的阶数只能取 $N=2$ 或 $N=4k$ ， $k=1,2,\dots$ ，要求被测量信号的维数与哈达玛矩阵的阶数相同，这很大程度上限制了部分哈达玛测量矩阵的应用范围。

(4) 多项式确定性矩阵的构造方式：

多项式测量矩阵是在一个元素个数为 p 的有限域 F 中，其中的元素由整数对 p 的模组成，即 $\{0,1,2,\dots,p-1\}$ ，利用最高次幂不高于 $r(0 < r < p)$ 的多项式 $Q(x)$ 来确定测量矩阵的每一列非零元素的个数和位置，其中 $Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_rx^r$ 。相比随机测量矩阵，确定性测量矩阵可以节省存储空间，易于硬件实现及设计快速算法，但是其重建效果较差，精确重建需要的测量值较多。其构造过程如下：在一个元素个数为 p 的有限域 F 中，对于任意给定的自然数 $r(0 < r < p)$ ，我们用 P_r 来表示最高次幂不高于 r 的多项式集合，即

$$P_r = \{Q(x) \mid Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_rx^r, 0 < r < p\}$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_r \in F$ ，当系数 a_0, a_1, \dots, a_r 取完所有可能的取值后，一共有 $N = p^{r+1}$ 个这样的系数组合，对应可得到 $N = p^{r+1}$ 个多项式。构造矩阵时先定义一个 $p \times p$ 维的零矩阵 E ，将矩阵中的位置记录为如下形式：

$$\begin{bmatrix} (0,0) & (0,1) & \cdots & (0,p-1) \\ (1,0) & (1,1) & \cdots & (1,p-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (p-1,0) & (p-1,1) & \cdots & (p-1,p-1) \end{bmatrix}$$

接下来要把矩阵 E 的每一列的某一位置的0置换为1，具体的位置由多项式 $Q(x)$ 来确定。插入的方法是将 $x \rightarrow Q(x)$ 看作 $F \rightarrow F$ 的一个映射，即 x 和 $Q(x)$ 的取值都在有限域 F 中。为了讨论的方便，我们第一次可将 a_0, a_1, \dots, a_r 都取为0，将 $(x, Q(x))$ 位置上的0置换为1。当所有 p 列对应的元素都置换完之后，将矩阵 E 的每一列首尾相接转换为一个 $M \times 1$ 维的列向量 v ，显然这 $M = p^2$ 。如此转化后的列向量 v 中前 p 个元素中有一个1，之后的每 p 个元素中也都有一个1，一共有 p 个1。将列向量 v 作为多项式测量矩阵的第一个列向量，然后改变系数 a_0, a_1, \dots, a_r 的值，重复上述构造过程，当系数依次取完所有 $N = p^{r+1}$ 个组合后，即取完所有的 $N = p^{r+1}$ 个多项式后，就可以得到一个 $M \times N$ 维的矩阵，记为 Φ_0 ，其中 $M = p^2$ ， $N = p^{r+1}$ ，对 Φ_0 进行列向量归一化后就可以得到符合条件的压缩感知测量矩阵 $\Phi = (1/\sqrt{p})\Phi_0$ ，文献[33]证明了 Φ 满足以 $\delta = (K-1)r/p$

为等距约束常数的RIP特性，其中 $K < p/r + 1$ ，但其局限是要求测量次数 $M = p^2$ ，信号的长度 $N = p^{r+1}$ 。

(5) 分块多项式测量矩阵的构造：

分块多项式测量矩阵是对多项式测量矩阵的改进，引入矩阵分块的思想，将维数较高的测量矩阵分成多个小的矩阵块。分块多项式测量矩阵构造过程是：首先构造较小的多项式测量矩阵，即取较小的 p 值，按照多项式测量矩阵的构造方法构造出一个小的测量矩阵 $\Phi_1 = (1/\sqrt{p})\Phi_0$ ，将 Φ_1 看作分块多项式测量矩阵中的一个矩阵块按对角线排列构造出最终的测量矩阵，形式如下：

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Phi_1 \end{bmatrix}_{M \times N}$$

假设上式中一共有 n 个 Φ_1 ，则可以得出测量数为 $M = np^2$ ，测量的信号维数为 $N = np^{r+1}$ 。按照如此方法构造的分块多项式测量矩阵满足以 $\delta = \max \delta_i$ 为等距约束常数，其中 $K < n(p/r - 1)$ ， $\delta_i = (K_i - 1)r/p$ ， $K_i < p/r + 1$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。分块多项式测量矩阵相比于原来的多项式测量矩阵，矩阵的构造时间大大降低，且对测量信号的维数要求为 p^2 的整数倍，被测量信号的维数要求为 p^{r+1} 的整数倍，即 $M = np^2$ ， $N = np^{r+1}$ 。

3.1.4 结构随机测量矩阵

由于Gauss矩阵与Bernoulli矩阵随机性较强，确定性矩阵难以证明具有阶数较好的RIP性质。结构随机矩阵是介于确定矩阵与随机矩阵之间的一种矩阵，与确定性测量矩阵相比，结构随机矩阵多了些随机性，因而可以证明其具有较好的RIP性质，同时结构随机测量矩阵的随机性较弱，一般仅具有行随机。更为重要的是，在很多实际应用中，观测矩阵为一结构随机矩阵。例如部分随机Fourier矩阵^[36]。假定 Ψ 为 $N \times N$ 的离散Fourier矩阵，也就是 Ψ 中的元素为：

$$\psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(-2\pi i j k / N), \quad j, k \in \{0, \dots, N-1\}$$

我们可在矩阵 Ψ 中随机选 M 行，得到一个 $M \times N$ 的矩阵 $\Psi_{M \times N}$ ，我们称之为部分Fourier随机矩阵。部分Fourier随机矩阵具有较强的应用背景。例如，很多时候人们观测到的是部分频率信息。这时候，观测矩阵就是一部分Fourier随机矩阵。文献[37]证明矩阵 $\Psi_{M \times N}$ 高概率的满足 $K = o(n / (\log N)^6)$ 阶RIP性质。在文献[38]中这个结果被改进为 $K = o(n / (\log N)^4)$ 。然而，人们相信这个结果并不是最优的。因而，证明矩阵 $\Psi_{M \times N}$ 高

概率的满足 $K = o(M / \log(N / K))$ 阶RIP性质，仍然是一挑战性问题。更多关于测量矩阵的介绍请参考文章[39]。

3.2 本章小结

本章从压缩感知的关键技术测量矩阵入手，从随机性和确定性两个方面介绍随机性测量矩阵和确定性测量矩阵的类型和构造方法，最后对介于随机测量矩阵和确定性测量矩阵的结构测量矩阵以局部的傅立叶矩阵为代表作了简要的介绍。随机类测量矩阵有着较好的重建效果，但如何将随机测量矩阵推广到实际应用中，是当前研究者所面临的挑战。确定性测量矩阵可以克服随机测量矩阵的不确定性，易于硬件实现，但是其重建效果不及某些常用的随机测量矩阵，优化基于确定性测量矩阵的压缩感知重建效果是当前的研究热点之一。

第4章 压缩感知中的信号重构算法

4.1 信号重构算法的分类

信号重构算法是压缩感知理论的核心内容之一，也最能体现压缩感知的优势。快速稳定的信号重构算法是将压缩感知推向实际应用的关键，也是当前压缩感知的研究热点之一。目前，已经有很多的国内外学者在信号重构领域取得了新的研究进展，提出了多种基于压缩感知的信号重构算法。这些算法大致可以分为三类：第一类是基于 l_1 范数的最小凸优化算法；第二类就是基于 l_0 范数最小的贪婪算法；最后一类就是组合算法，要求原始信号的采样要支持快速分组测试重建，重构速度快，主要包括链式追踪算法(Chaining Pursuit, CP)^[40]，HHS追踪算法(Heavy Hitters on Steroids, HHS)^[41]及傅里叶采样^[42]等。

除了上述三大类信号的重构算法之外，迭代阈值法(Iterative Thresholding Algorithms, ISA)^[18]算法也得到了广泛的应用。ISA主要有基于 l_0 范数的迭代硬阈值算法(Iterative Hard Thresholding, IHT)和基于 l_1 范数的迭代软阈值算法(Iterative Soft Thresholding, IST)。

另外还有基于 l_0 范数的最小SLO算法^[43,44]，该算法是利用一个光滑函数去逼近 l_0 范数，并结合凸优化方法来求解问题。该算法结合了贪婪算法的快速和凸优化的准确等优点，是一种性能较好的重构算法。

4.1.1 最小 l_1 范数凸优化算法

凸优化方法是基于 l_1 范数最小进行求解的方法，其计算量大，但是重建效果比较好，其求解的模型为：

$$\min \|\theta\|_1 \quad \text{s.t.} \quad Y = A\theta \quad (4.1)$$

文献[27, 28]证明了(4.1)与(2.5)的等价性，它是一个凸最优问题，凸优化问题可以转化为一个线性规划问题(Linear Programming, LP)进行求解。

以上问题也可以转化为无约束的问题：

$$\min \|\theta\|_1 + \lambda \|y - A\theta\|$$

上式中 λ 表示松弛因子，其作用就是用来控制信号稀疏度与重建误差之间的平衡。

该类算法主要包括基追踪算法(Basis Pursuit, BP)^[15]，梯度投影稀疏重构算法

(Gradient Projection for Sparse Reconstruction, GPSR)^[45], 最小绝对抽取和选择算法 (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator, LASSO)^[46,28]等。此类算法重构精度比较好, 时间复杂度比较大, 计算复杂度为 $O(N^3)$, 所以比较难应用在对时间要求比较高的环境中。

4.1.2 贪婪追踪算法

贪婪追踪算法计算速度快, 虽然相对基于 l_1 范数最小的优化模型来说其精度稍微差, 但是也能满足应用的要求。因此, 贪婪追踪算法非常的实用, 其在实际应用中也是非常的广泛。贪婪系列的算法仍然是对最小化 l_0 范数的问题来求解的, 但是该系列算法允许在重建过程中存在一定的误差, 其求解的模型如下式:

$$\min \|\theta\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|Y - \Phi\Psi\theta\|_2 < \varepsilon$$

其中 ε 是个非常小的常数。

贪婪算法最主要的算法包括匹配追踪算法(Matching Pursuit, MP)^[25]和正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^[26]。MP算法的基本思想是在每一次迭代过程中, 从测量矩阵 Φ 中选择与原始信号最匹配的原子来线性表示原始信号, 并且求出原始信号与线性表示的信号之间的残差, 然后继续在测量矩阵中选择与得到的残差最为匹配的原子, 最少经过 K 次迭代, 信号就可以用刚刚得到的原子线性表示出来, 并且残差就是重构的误差, 但是由于原始信号和其线性表示之间的残差与测量矩阵中所选的原子并不是完全正交的, 这就使得该算法的迭代次数并不是最少的, 即原子的选择并不是最优的。而OMP算法克服了这个问题, 该算法与匹配追踪算法中的原子选择准则是一致的, 也是每次找到和残差最相关的一个原子放入原子的集合中, 同时该方法在每次迭代中对已选择的原子进行正交化处理, 保证选择的原子的最优性, 从而减少了迭代次数, 实验表明, 当测量矩阵为高斯随机矩阵时, 对稀疏度为 K , 信号长度为 N 的信号 X , 满足条件 $M = O(K \log N)$, OMP算法将以极大概率准确重构信号, 而且该算法的时间复杂度非常低, 但是由于OMP算法的重构精度比最小 l_1 范数低, 并且对测量信号的要求比较高, 因此对于测量矩阵的要求非常严格。

在正交匹配追踪算法的基础上, Needell提出了正则正交匹配追踪(Regularize Orthogonal Matching Pursuit, ROMP)^[47]算法, 该算法对于满足RIP准则的矩阵都可以精确恢复, 而且对待测信号的要求很低。另外, 又有学者提出了分段匹配追踪算法(Stagewise Orthogonal Matching Pursuit, StOMP)^[48], 它将迭代过程划分为若干个阶段进行。ROMP和StOMP在每次迭代时并不像OMP算法一样选择一个原子, 而是选择一

组原子，因此速度比OMP快。这些算法的重建时间复杂度比BP算法低，但是精度没有BP算法高，主要是因为优化方程的精度比较低。

Needell等人还提出了压缩抽样匹配追踪算法(Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP)^[49]算法，该算法引入回溯思想，在选择原子的同时，将一部分原子返回到观测矩阵中。它的理论保证比ROMP算法更强，并且对噪声具有鲁棒性，但是这些算法的前提条件都是稀疏度 K 是已知的。然而一般情况下，稀疏度 K 往往是未知的，故而又学者提出了稀疏自适应匹配追踪算法(Sparsity Adaptive Matching Pursuit, SAMP)^[50]，它可以对稀疏度 K 自适应，只是它需要通过固定步长来逐步完成信号的逼近，该算法可以在稀疏度 K 未知的情况下重建信号，时间复杂度比OMP低。

综上所述，匹配追踪类算法运算速度快，时间复杂度低，对于精度要求不高的应用场合和维数较低的小尺度信号问题能够非常快地恢复原信号，是一种效果较好的信号重建算法。

4.1.3 其它算法

(1) Bayesian统计优化算法^[16,27]

统计优化算法具有非常广泛的应用，其代表算法为Sparse Bayesian算法，统计优化类算法性能介于贪婪算法和凸优化算法之间，而且还可以和神经网络和模式识别等方法结合起来，非常有前景。

(2) 最小权变分法^[17,51]

上面所提到的算法主要应用在一维信号重构方面，由于自然图像的离散梯度大多是稀疏的，Candes、沙威等学者基于这一点提出了更适合二维图像重构的最小全变分算法，全变分模型如下：

$$\hat{x} = \min TV(x) \quad \text{s.t.} \quad Y = \Phi X$$

$TV(x)$ 为自然图像的离散梯度之和，即

$$TV(x) = \sum \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (x_{i,j+1} - x_{i,j})^2}$$

对全变分问题的求解与二阶锥规划问题是等价的，所以可以转化成二维线性规划问题。最小全变分模型主要用来解决图像的压缩重构问题，该算法重构精确高，对噪声具有很强的鲁棒性，所以非常适合含有噪声的图像的压缩和重构，但是该算法的时间复杂度比较高。

(3) 迭代阈值算法^[18,53]

Kingsbury等提出了迭代阈值算法，该算法直接对 l_0 范数问题(2.5)进行求解，而

不是将其转化为一个优化方程进行求解。但是由于问题(2.5)是一个非凸的问题，所以迭代阈值算法只能收敛到局部最优解，而不是全局最优解，同时该算法对初值非常的敏感，如果初值选择不好就会陷入局部最优，导致求解的误差很大，但是如果初值选择合适的话，该算法能收敛到全局最优解。因此该算法可以与其他算法如匹配追踪算法相结合，由这些算法提供初值，实验证明这种策略能够提供比单独匹配追踪算法更好的结果。

4.2 基于基追踪算法的改进

4.2.1 基追踪算法

在压缩感知理论中，由于观测数量远小于信号长度，因此信号重构时不得不面对求解欠定方程组的问题。表面上看，求解欠定方程组似乎是无望的。但是，由于信号是稀疏的或可压缩的，这个前提从根本上改变了问题，使得问题可解，而观测矩阵具有约束等距性质(Restricted Isometry Property, RIP)也为从观测值中精确恢复信号提供了理论保证。恢复含噪信号的最基本依据是信号在某个变换空间的分解系数是稀疏的，而噪声的存在则破坏了信号在空间中的稀疏性。经典的基追踪算法就是基于以上原理从而达到重构和对噪声去噪的目的。基追踪算法的主要目标是寻找欠定方程即下式的解：

$$Y = A\theta, \quad A \in R^{M \times N}, \quad Y \in R^M, \quad M \ll N$$

求解的最直接方法是通过 l_0 范数下，即求解下式的最优化问题：

$$\min \|\theta\|_0 \quad \text{s.t.} \quad A\theta = Y$$

由于上式的求解是个NP-hard问题^[54]，方程的解很难求得，所以根据最小 l_1 范数在一定条件下和最小 l_0 范数具有等价性，利用式(4.2)的约束条件，可以得出求解一个更加简单的线性规划问题^[15,55]：

$$\min \|\theta\|_1 \quad \text{s.t.} \quad A\theta = Y \quad (4.2)$$

但是，这种模型在含有噪声的情况下，不能够准确的恢复信号。

在含噪观测的情况下，考虑如下观测模型^[56]：

$$Y = s + n = A\theta + n$$

式中 $s = A\theta$ ， Y 为已知的观测信号，假定 n 为高斯白噪声，且 $\|n\|_2 < \varepsilon$ 。对(4.2)式作进一步的改进，沿用BP方法对噪声的抑制方法，即基追踪去噪算法(Basis Pursuit Do-Nosing, BPDN)方法，修改其约束条件，定义如下优化问题：

$$\min \|\theta\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|A\theta - Y\|_2 \leq \varepsilon \quad (4.3)$$

对最优化问题进一步求解，就可以重构出原始信号。BPDN致力于最小化信号重建误差，同时使得信号的表示最稀疏，参数 ε 控制着允许误差与稀疏性之间的平衡，其中 $\varepsilon \geq 0$ ，是噪声在信号中强度的定义。若 $\varepsilon = 0$ ，则BPDN算法等同于BP算法。经典的基追踪去噪算法尽管可行，但是它存在两个问题^[57]：

- (1) 基追踪去噪算法的计算复杂度很高，在采样点个数满足 $M \geq cK$ ， $c \approx \log_2(N/K+1)$ 时，重构计算复杂度的量级在 $O(N^3)$ ；
- (2) 基追踪去噪算法只对高斯白噪声去噪效果较明显，而现实世界中的噪声是多种多样的，对常见的脉冲噪声去噪效果并不明显。

针对以上的问题，提出了改进的基追踪去噪算法。

4.2.2 基追踪去噪算法的改进

经典的基追踪去噪算法对信号的稀疏性是建立在 l_1 范数意义下，而对噪声的抑制采用了 l_2 范数的约束形式。由于 l_2 范数不能体现信号的稀疏性，对稀疏噪声的抑制并不理想，恢复得到的信号的稀疏度无法精确达到真正的无噪信号的稀疏度，即经典基追踪算法对于含脉冲噪声的信号恢复效果较差，不能满足信号处理的要求。所以对经典的基追踪算法进行改进，使其能够适应重构含脉冲噪声的信号。

修改其对噪声的约束条件，改变其不适应稀疏噪声分布的 l_2 范数约束形式。考虑 l_p 范数($p > 2$)约束的条件，由于 l_p 范数的优化是一个非凸函数的优化问题，有很多数学问题有待解决，而 l_1 范数意义下的优化问题是一个凸优化问题，且 l_1 范数约束的噪声对应的先验分布应为拉普拉斯分布，它是一种典型的稀疏分布，适合抑制信号的稀疏噪声。所以将基追踪算法的噪声约束条件将式(4.3)由 l_2 范数改为 l_1 范数，如式(4.4)所示：

$$\min \|\theta\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|A\theta - Y\|_1 \leq \varepsilon \quad (4.4)$$

根据拉格朗日乘数法，式(4.4)可等价求解式(4.5)优化问题：

$$\min \lambda \|\theta\|_1 + \frac{1}{2} \|A\theta - Y\|_1 \quad (4.5)$$

式(4.5)即为改进算法的模型。由于 l_1 范数能够比较好的体现信号的稀疏性，对稀疏噪声的抑制较 l_2 范数理想。所以对脉冲噪声采用 l_1 范数抑制可以得到比较准确的结果^[57]。

若观测矩阵在很大概率上满足约束等距性质，可得重构信号 \hat{X} 与原信号 X 的误差在 l_2 范数情况下，如式(4.6)所示：

$$\|X - \hat{X}\|_2 \leq C_2 R K^{1/2-1/\rho} \quad (4.6)$$

其中 C_2 为正常数, R 是范数变化的半径, K 是稀疏度, ρ 控制式(4.6)的收敛速度, ρ 越小收敛速度越快。而 l_1 范数的情况下为:

$$\|\hat{X} - X\|_1 \leq C_1 R K^{1-1/\rho}$$

对于改进模型的求解, 因为梯度投影算法易于在MATLAB上实现仿真, 对经典基追踪算法求解的梯度投影法, 针对含噪观测情况下的改进模型式(4.5), 令 $\theta = a - b$, 其中 $a \geq 0$, $b \geq 0$, 且式中 $a_i = (\theta_i)_+$, $b_i = (-\theta_i)_-$, $i = 1, 2, \dots, N$, N 为向量的维数, 在这里 $(\cdot)_+$ 是对实部算子的定义, 即 $(\theta_i)_+ = \max\{0, \theta_i\}$, 则 $\|\theta\|_1 = la + lb$, 记 $u = [a, b]^T$, 则 $\|\theta\|_1 = lu$, 其中向量 $l = [1, 1, \dots, 1]$, 它的维数与向量 u 相同为 $2n$, 同理, 可以令 $Y - A\theta = c - d$, 其中 $c \geq 0$, $d \geq 0$, 且式中 $c_i = (Y_i - A\theta_i)_+$, $d_i = (-Y_i + A\theta_i)_+$, $i = 1, 2, \dots, M$, 记 $v = [c, d]^T$, 则 $\|Y - A\theta\|_1 = ev$, 其中向量 $e = [1, 1, \dots, 1]$, 它的维数与向量 v 相同为 $2m$ 。因此推出下式:

$$Y - A\theta = c - d$$

$$c - d + A(a - b) = Y$$

$$(I, -I, A, -A)(c, d, a, b)^T = Y$$

其中 I 为单位阵, 进一步定义 $x = [v, u]^T$, $D = (I, -I, A, -A)$, $f = (e/2, \lambda l)$, $b = Y$, λ 为正则化参数, 这里取经验值 $\lambda = \varepsilon \sqrt{2 \log p}$, p 为字典的势^[15, 52]。则模型式(4.5)问题和下述的线性规划问题等价:

$$\min f x \quad \text{s.t.} \quad Dx = b, \quad x \geq 0$$

式中 fx 是目标函数, $Dx = b$ 是等式约束集, $x \geq 0$ 是非负约束。这样, 问题的求解就可以转化为上述线性规划的算法求解。

为了验证改进的重构算法的去噪效果, 将分别对经典的基追踪算法和改进的基追踪算法进行仿真实验。利用MATLAB产生一个离散随机一维信号, 该信号的长度 $N = 1000$, 稀疏度 $K = 30$, 使用独立同分布的随机高斯矩阵作为测量矩阵, 矩阵的 M 值为200, 则测量系统的采样率为 $M/N = 0.2$, 对该信号运用BP算法来进行重建, 然后对该原始信号加入脉冲噪声, 利用BPDN改进算法来对加入了脉冲噪声的稀疏信号进行重建, 其重建结果分别如下图所示:

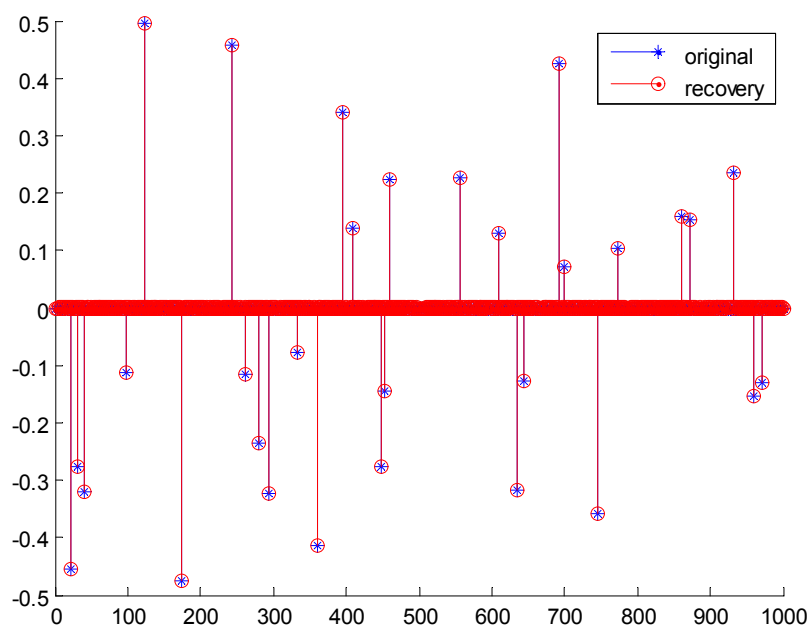


图4.1 信号不含噪声情况下的BP算法

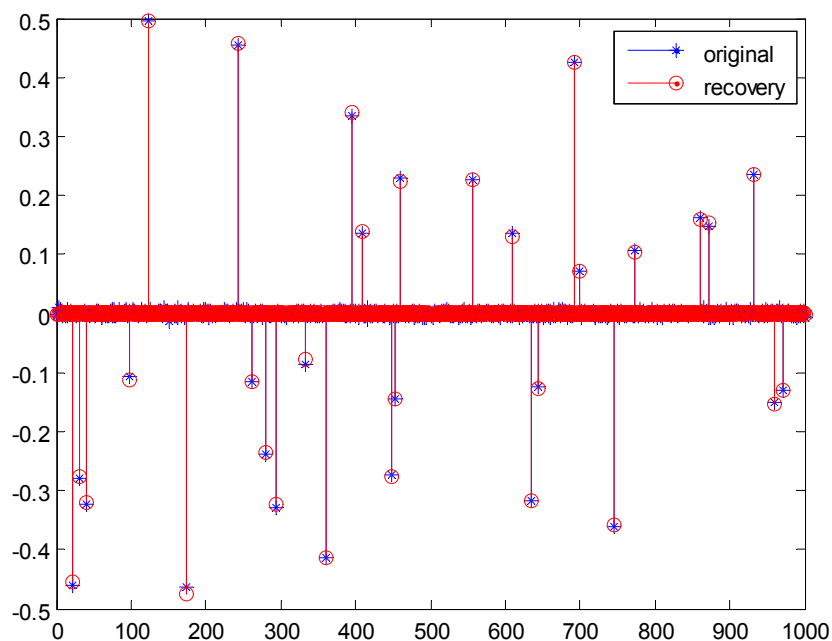


图4.2 信号含脉冲噪声情况下的BPDN改进算法

由上图可以得出BP能够有效的重建出一维信号，其重建误差为 $7.4859\text{e-}012$ ，改进的基追踪去噪算法对于含脉冲噪声的信号也能较为准确的重建，其相对误差为0.0119，显然重建误差相比于BP算法误差稍大些，然而改进算法在运算速度方面要快于经典算法。

4.3 匹配追踪类算法

4.3.1 匹配追踪算法

匹配追踪算法^[25]是专门为了求解稀疏解而设计的，它的求解思路非常简单，通过迭代计算来求原始稀疏信号。匹配追踪算法是求解稀疏问题比较常用的算法。由于压缩感知的重建过程本质上也是求解稀疏问题，所以可以将匹配追踪算法应用到压缩感知理论，MP算法就是基于贪婪迭代算法的思路，首先从测量矩阵 Φ 中选择与信号有最大相关性的一个列向量，并且得到该向量与信号之间的误差值，然后继续求出与该误差最为匹配的列向量，按照这种方法运算数次，就可使用这些最大相关向量来线性表示原始信号。与以最小 l_1 范数为目标函数的求解最优化问题相比，该重建算法的计算复杂度较低且收敛性也较好。

通过研究可以发现匹配追踪算法是在已经选择的向量上构建空间使得重建信号的扩展性不可能达到最好，这是由于在选取的向量中构建的空间不是正交空间，所以匹配追踪算法要经过多次运算才能恢复出满足一定精度的信号，与BP算法相比其具有算法复杂度低以及渐进收敛的特性。但由于其在所选的原子(即测量矩阵的列向量)集合上的投影是非正交的，导致了每次迭代的过程中选取的解都是次优的，因此，要获得收敛需要经过很多次的迭代。

MP算法的本质是以贪婪迭代的思想来选择测量矩阵中的列向量，首先在测量矩阵中选出与原始信号向量具有最大相关性的列向量为原子向量，然后求出原始信号和该原子的误差向量，将误差向量代替原始信号，继续迭代计算最大相关性，进行数次迭代后，一直到迭代残差满足预先设置的阈值或迭代次数达到信号稀疏度 K ，则强行停止迭代计算。

MP算法的步骤如下：

输入： $M \times N$ 维测量矩阵 Φ ，采样信号 Y ，稀疏度 K ；

输出：索引集 Λ_t ，重建信号 \hat{X} ，余量 r_t ；

- (1) 初始化： $r_0 = Y$ ， $t = 1$ ；
- (2) 找索引集 Λ_t ，使得 $\Lambda_t = \arg_{i=1,2,\dots,N} \max | \langle r_{t-1}, \phi_i \rangle |$ ；
- (3) 计算： $b_t = \langle r_{t-1}, \Phi \rangle$ ， $r_t = Y - b_t$ ；
- (4) $t = t + 1$ ，如果 $t < K$ ，返回第(2)步。

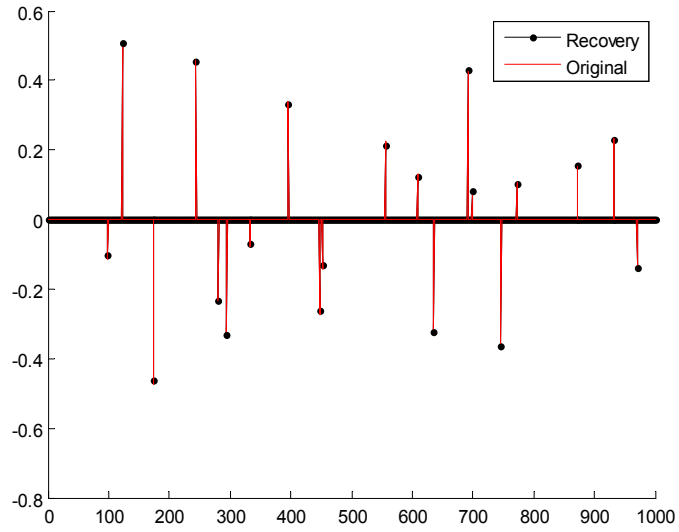


图 4.3 MP 算法对一维信号的重构效果图

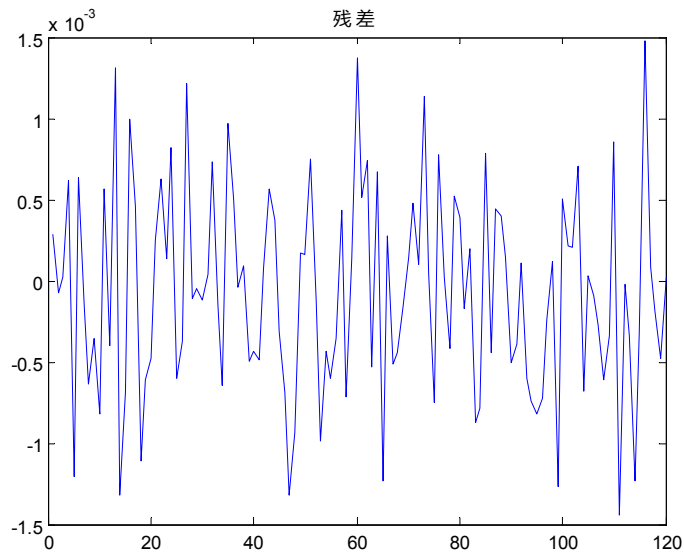


图 4.4 重构误差

图 4.3 中的原始信号的长度 $N = 1000$ ，其稀疏度 $K = 20$ ，使用独立同分布的随机高斯矩阵作为测量矩阵，矩阵的 M 值为 120，测量系统的采样率为 $M / N = 0.12$ ，设置迭代次数为 40。由以上两个图可以发现匹配追踪算法可以完美地重建原始信号，而且重建误差还是比较小的。

我们可以发现MP算法的执行步骤简单，编程非常容易实现，作为稀疏重建算法中的最基本的算法，它深刻影响着以后的各种重建算法，所以研究这种算法有着非常重要的意义。

4.3.2 正交匹配追踪算法

MP算法的运算复杂度不高而且该算法满足渐进收敛性，该算法是贪婪迭代算法中较为常用的算法。但是由于其重建算法中选择测量矩阵中的列向量组成的矩阵是非正交性的，所以每次计算的结果是次最优解的，要经过多次迭代运算才能得到最终结果，OMP算法就是针对匹配追踪算法这一缺点，对其进行了彻底改进。OMP算法^[26]是单阶段匹配追踪算法中最为经典的重构算法，此后的许多算法都是由OMP算法演变而来。它继承了MP算法的原子选择的思想，即每一次迭代选取原子库中与当前信号余量最为匹配的原子(通过计算原子库的原子与信号余量加入到逼近原信号的原子集中。当前信号余量由以下形式得到： $r_t = Y - \Phi \hat{X}$ ，这里的 \hat{X} 是由当前原子集中的原子得到原始信号的近似解，信号余量越小，说明近似解和原信号越接近。为了克服MP算法解的非最优性和因此造成的迭代次数较多等问题，OMP算法增加了对原子进行正交化的过程。在每次迭代更新原子集之后，对原子集中的原子进行施密特正交化，再将信号在这些正交化后的原子所张成的空间上进行投影，这就保证了得到的信号余量与支撑集中的所有原子都是正交的，保证了每次迭代解的最优性，减少迭代次数。该算法构建空间的选择向量方法仍然沿用MP算法的原理，即也是从测量矩阵中选择和测量信号或误差余量相关性最大的列向量，不同的是，OMP算法在找到对应的位置 j 后，根据最小二乘法 $X_j = (\phi_j^T \phi_j)^{-1} \phi_j^T Y$ ，就能计算出使 $\|Y - \Phi_t X\|_2$ 最小的那个 X_j ，仔细观察可以发现它在形式上Schmidt正交化。其中余量 r_t 始终同 ϕ_j 正交，这也是称该算法为正交匹配追踪的原因。正是由于对选择的列向量进行正交化，使得正交匹配追踪算法在下一次迭代时避免了重复选择向量。因而经过数次计算就能够得到稀疏解，并且信号恢复效果要优于匹配追踪算法，虽然正交匹配追踪算法重建图像恢复的时间要少于匹配跟踪算法所需的时间，但是每次迭代要对选择向量进行施密特处理，所以正交匹配追踪算法增加了计算的复杂度，同时延长了重建信号的时间。

OMP算法的迭代过程是首先按照匹配度选择最优的原子进入原子集，求出测量信号在原子集张成的正交空间上的投影，通过求解一个最小二乘问题来求得原信号的最优稀疏逼近解，更新信号余量，进入下一次迭代。

OMP算法的迭代步骤如下：

输入： $M \times N$ 维测量矩阵 Φ ，采样信号 Y ，稀疏度 K ；

输出：索引集 Λ_t ，重建信号 \hat{X} ，余量 r_t ；

(1) 索引集 $\Lambda_0 = \emptyset$ ，迭代次数 $t = 1$ ；

- (2) 找到索引集 J_t ，使得 $J_t = \arg \max_{i=1,2,\dots,n} |< r_{t-1}, \phi_j >|$;
- (3) 令 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{J_t\}$;
- (4) 通过求解最小二乘法问题得到信号的近似解: $\hat{X} = \arg \min_X \|Y - \Phi X\|$;
- (5) 计算: $r_t = Y - \Phi \hat{X}$;
- (6) $t = t + 1$ ，如果 $t < k$ ，返回第(2)步，依次迭代。

为了测试正交匹配追踪算法对信号的重建性能，使用该算法对一维信号进行信号恢复仿真测试。利用MATLAB产生一个信号 X ，该信号的表示如下：

$$X = 0.3 \cos(2\pi f_1) + 0.6 \cos(2\pi f_2) + 0.1 \cos(2\pi f_3) + 0.9 \cos(2\pi f_4)$$

信号的频率分别为 $f_1 = 50\text{Hz}$ ， $f_2 = 100\text{Hz}$ ， $f_3 = 200\text{Hz}$ ， $f_4 = 400\text{Hz}$ ，测量矩阵中的 $M = 64$ ，则采样率为 $M/N = 0.25$ ，抽样频率 $f_s = 800\text{Hz}$ ，采样点数 $N = 256$ ，经过傅立叶变换可知原始信号的稀疏度 $K = 7$ ，图4.5为该信号的频谱图：

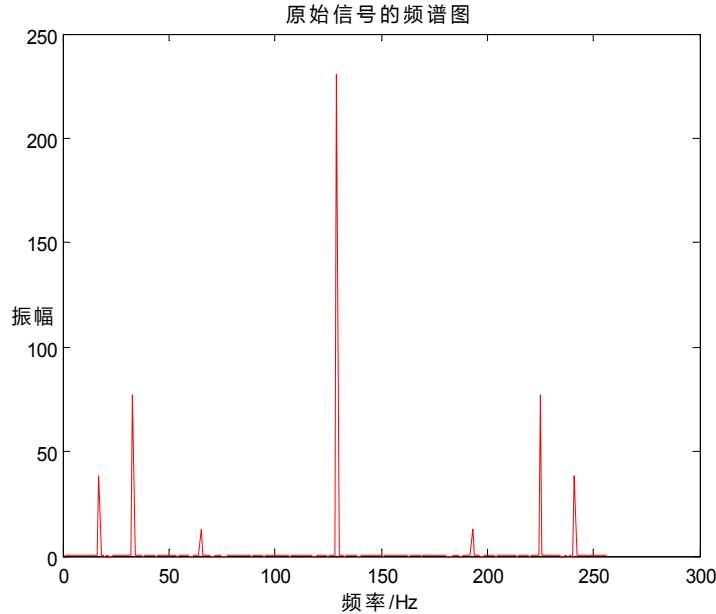


图4.5 原始信号的频谱图

由下图4.6可知运用正交匹配追踪算法所得重构信号和原始信号极其接近，它们的相对误差仅仅为 $3.8096\text{e-}015$ ，这表明OMP算法对一维信号处理的效果非常好，因为OMP算法对余量进行了正交化的处理，所以保证了每次迭代能找出最优化的原子，但由于每次迭代只选取了一个原子放入更新集中，且正交化的处理增加了时间复杂度，故而算法的运算时间必然会增加，同时，OMP算法对于压缩系数 M 非常的敏感，即当 M 减小时，重建误差非常大，因此之后出现了许多改进的匹配追踪算法。

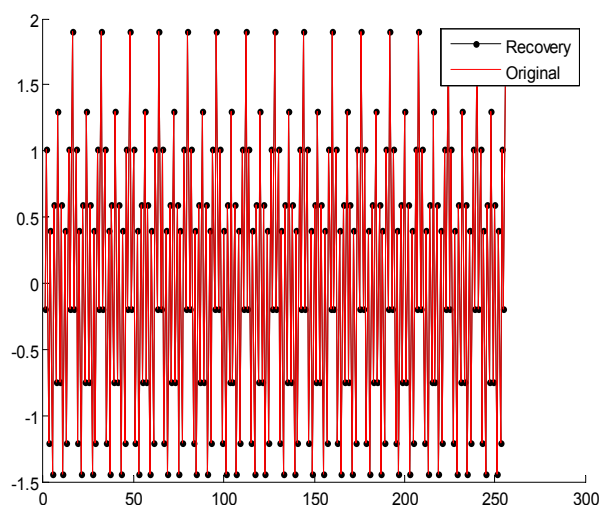


图4.6 OMP算法对一维信号的重构效果图

4.4 本章小结

本章详细地介绍了基于 l_1 算法的BP算法和贪婪算法中的MP算法和OMP算法，对于BP算法本身存在的问题，研究了BP算法的改进算法，并且使用一维稀疏信号利用MATLAB对这两类重建算法进行仿真验证。通过仿真发现两类算法在重建一维信号时，效果不错，但是MP算法在重建信号时花费的时间较长，仿真环境要求较高(主要包括仿真电脑内存配置要求较高)，而OMP算法相对于MP算法则性能较好，但重建信号的时间消耗还是比较大的。

第5章 总结与展望

5.1 总结

随着现代信息技术的飞速发展,传统信号采样理论和现实信号处理之间的矛盾日益凸显,而压缩感知这一新兴理论在解决这一矛盾方面表现出了突出的优势。本文正是基于这一背景对压缩感知进行了深入研究,总的来说,本文主要有三部分的内容:

第一,主要介绍了压缩感知理论的背景和研究意义,并详细的阐述了压缩感知的理论框架。针对压缩感知的核心内容:信号的稀疏表示,观测矩阵的设计和信号的重构及信号重构的性能评价标准都做了详细的研究和分析,为进一步的研究打下了坚实的理论基础。

第二,针对压缩感知中信号的测量矩阵做了进一步的研究。首先介绍了测量矩阵无失真采样的条件,给出了测量矩阵的特征。接着介绍了常用的三类测量矩阵,给出了矩阵的形式和特点,并分析比较了三类测量矩阵的优缺点。

第三,针对压缩感知中的信号重构算法做了深入的研究。首先介绍了目前存在的重构算法,包括基于最小 l_0 范数的贪婪算法、基于最小 l_1 范数的凸优化算法和组合算法等。接着对其中的基追踪算法和贪婪算法进行了进一步的研究,详细介绍了基追踪算法的改进算法及匹配追踪类算法的典型算法:MP算法和OMP算法。最后以一维离散随机信号为例进行了仿真实验,验证了算法的性能,比较了各个算法的优劣。

5.2 展望

压缩感知理论的提出极大地丰富了信号处理理论,并为其他相关领域的研究提供了新技术和新思路,研究前景广阔。然而目前压缩传感理论还不是很完善,相应的应用研究也刚刚起步,尚有较多问题需要在未来研究中得到突破:

(1) 测量矩阵的构造研究

在压缩感知理论中,测量矩阵需要满足约束等距性条件,目前所采用的测量矩阵大多为非确定性测量矩阵,即随机矩阵。例如在美国RICE大学单像素相机研制中,采用的就是较为简单的0-1伪随机矩阵。但是更复杂的非确定性测量矩阵在硬件实现上比较复杂,虽然它们在仿真实验中能够取得很好的效果,但是难以硬件实现,因此有必要对确定性测量矩阵进行深入研究。此外,压缩感知技术建立在非自适应线性测量基

础之上,不具有灵活性,因而有必要研究自适应压缩传感技术,即根据不同的信号类型采用不同的数据采样和重构策略。

(2) 测量矩阵的优化问题

当图像不能在正交基上稀疏表示时,可以将其扩展到冗余字典上来进行稀疏表示。例如对于某一类型的图像,用学习算法如K-SVD等得到的字典通常可以使图像信号更加稀疏。然而在压缩传感技术中,利用冗余的字典代替标准正交基,虽然可以更好地重构图像,但由于在相应传感矩阵中会出现较多相关列,这些相关列对于图像重构没有任何价值,增加了算法的存储和计算的成本,因此,如何平衡冗余字典的冗余度与传感矩阵中相关列的数量,即找到最优的冗余字典及其对应的传感矩阵是值得研究的。

(3) 测量值的应用研究

许多图像处理的最终目并不是重构图像,而是为了得到有关目标的信息。由压缩传感理论可知,在一定条件下,通过少量的测量值就可以准确重构出原始图像,也就是说少数的测量值能够保持原始信号的结构和足够多信息。因此,少量的测量值可以直接用于实现各种图像处理任务,如图像分类、特征提取、目标检测以及信息融合等等,并且由于测量值数目较少,信息密度高,可以大大减少相关算法的时间和存储代价。

(4) 图像超分辨率重构

图像的超分辨率重构是指从一幅或者多幅低分辨率图像产生或者构建高分辨率图像的过程,本质上属于维数增加的问题,具有不适定性。在压缩感知中,从测量值到原始信号也是一个从低维到高维的维数增加问题,与超分辨率图像重构类似。由于低分辨率图像通常决定了高分辨图像的结构和大部分信息,因此借鉴压缩感知的相关思想实现新型的超分辨率图像重构算法也是值得研究的。例如,如果将低分辨率图像看成是在某种测量矩阵(或者字典)下的测量值,则超分辨图像重构问题便转换为如何构建测量矩阵的字典构建问题。

(5) 运动目标提取

基于图像序列的运动目标提取是计算机视觉领域的一个核心问题,广泛应用在视频监控、视频分析、视频检索、基于运动信息的身份识别等方面。当把背景看成不变量时,运动的目标可以更加稀疏地表示,符合压缩传感理论对信号的稀疏性要求。因此,如何在压缩传感框架内,利用图像序列运动目标稀疏特性设计测量矩阵,然后对

图像序列的背景差进行线性测量，最后精确重构出运动目标也是值得注意的研究方向。

(6) 实时压缩传感成像系统研制

相对于压缩传感的理论研究进展，其硬件实现还处于起步阶段。目前已取得成功的例子主要有美国RICE大学研制的单像素数码相机，ARI-ZONA大学Baheti和Neifeld设计的具有特定功能的结构成像设备，以及DUCK大学研制的单景光谱成像装置，然而由于压缩重构算法的计算量比较大，难以达到实时性要求，因此实时高性能的压缩传感成像系统是未来重要的研究方向。

除了构建高分辨成像系统，压缩传感还可应用于音频采集设备、节电型音频和图像采集设备、天文学观测、军事侦察、资源探测、超声图像以及数字减影血管造影技术等诸多方面。

总的来说，压缩感知还是一门新兴的理论，其理论和应用有待于更深入的研，而且我们的研究进一步说明压缩感知在现代信号处理中有突出的优势和广阔的前景，我们有理由相信，基于压缩感知的理论和应用研究一定可以得到快速的发展。

参考文献

- [1] D.Donoho. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] E.Candès. Compressive sampling[A]. //Proceedings of the International Congress of Mathematic[C], Madrid,Spain: IEEE, 2006. 1433-1452.
- [3] E.Candès, T.Tao. Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [4] E.Candès, J.Romberg, T.Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489–509.
- [5] M.F.Duarte, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling [Building simpler, smaller, and less-expensive digital cameras]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 83-91.
- [6] Zhang Yifu, et al. A multiple description image/video coding method by compressed sensing theory. //Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Seattle, Washington, 2008, 1830- 1833.
- [7] 李树涛, 魏丹. 压缩感知综述[J]. 自动化学报, 2009, 35(11): 1-7.
- [8] M.Wakin, J.Lastka, M.F.Duarte, et al. An architecture for compressive imaging[A]. //Proceeding of IEEE International Conference on Imaging[C]. Washington D.C, USA, 2006, 1273-1276.
- [9] S.Kirollos, J.Laska, M.Wakin, et al. Analog-to-information conversion via random demodulation [A]. //Proceedings of the IEEE Dallas Circuits and Systems Workshop[C]. Washington D.C, USA, 2006, 71-74.
- [10] T.Ragheb, S.Kirollos, J.Laska. Implementation models for analog-to-information conversion via random sampling[J]. The 50th Midwest Symposium on Circuits and Systems, 2007, 325-328.
- [11] M.Sheikh, R.Baraniuk. Designing compressive sensing DNA microarrays[A]. //Proceedings of the IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-sensor Adaptive Processing[C]. Washington D.C, USA: IEEE, 2006, 119-112.
- [12] G.Peyre. Best basis compressed sensing[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2007,4485: 80-91.
- [13] M.Lustig, et al. Compressed sensing MRI. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 72- 82.
- [14] J.Tropp, A.Gibert. Signal recovery from random measurement via orthogonal matching pursuit.

- Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [15] S.Chen, D.Donoho and M.A.Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. SIAM Journal of Scientific Computing, 1998, 20(1): 33-61.
- [16] H.Zayyani, M.Babaie-Zadeh and C.Jutten. Bayesian pursuit algorithm for sparse representation. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing(ICASSP), Taipei, Taiwan, 2009, 4.
- [17] M.Lustig, D.Donoho, J.M.Pauly. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MRI imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6): 1182-1195.
- [18] T.Blumensath, M.E.Davies. Iterative thresholding for sparse approximations. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2007, 14(5-6): 629-653.
- [19] I.Daubechies, M.Debrise, and C.De.Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint [J]. Comm. Pure Appl. Math, 2008, 57: 1413-1457.
- [20] G.Ausiello. On the structure and properties of NP complete problems and their associated optimization problem[U]. Proc. 6th International Symposium on MFCS, 2008.
- [21] 张春梅, 尹忠科, 肖明霞. 基于冗余字典的信号超完备表示和稀疏分解[J]. 科学通报, 2006, 51(6):628-633.
- [22] E.Candes, J.Romberg. Sparsity and incoherence in compressive sampling[J]. Inverse Proc. 2007, 23(3): 969-985.
- [23] E.Candes, M.Wakin. An introduction to compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-121.
- [24] E.Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. C.R. Math. Acad. Sci. Paris, 2008, 346(9-10): 589-592.
- [25] S.Mallat, Z.Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [26] J.Tropp, A.Gilbert. Signal recovery from random measurement via orthogonal matching pursuit[J]. Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [27] D.Baron, S.Sarvoham, R.G.Baraniuk. Bayesian compressive sensing via belief propagation, 2008.
- [28] P.J.Garrigues, E.I.Laurent. An homotopy algorithm for the lasso with online observation. Neural Information Processing Systems, Vancouver, Canada, 2008.
- [29] D.Donoho, Y.Tsaig. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 553-548.
- [30] R.Baraniuk, M.Davenport, R.Devore. A simple proof of the restricted isometry property for random

- matrices[J]. *Constructive Approximation*. 2008, 28(3): 253-263.
- [31] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [32] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [33] V.Devore. Deterministic constructions of compressed sensing matrices[J]. *Journal of Complexity*, 2007, 23(4-6) 918-925.
- [34] 李小波. 基于压缩感知的测量矩阵研究[D]. 北京: 北京交通大学硕士学位论文, 2010.
- [35] H.Rauhut. Circulant and Toeplitz matrices in compressed sensing[J]. In *Processing SPARS*, 2009, 2(13): 1124-1132.
- [36] M.A.Iwen. Simple deterministically constructible RIP matrices with sublinear fourier sampling requirements[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 1024-1029.
- [37] E.Candes, T.Tao. Near-optimal signal recovery from random projections and universal encoding strategies. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52: 5406–5425.
- [38] M.Rudelson, R.Vershynin. On sparse reconstruction from fourier and gaussian measurements. *Comm. Pure Appl. Math*, 2008, 61: 1025–1045.
- [39] H.Rauhut. Compressive sensing and structured random matrices. In: Fornasier M, ed. *Theoretical Foundations and Numerical Methods for Sparse Recovery*, vol. 9 of *Radon Series Comm. Pure Appl. Math*, Berlin: de Gruyter, 2010, 1-92.
- [40] A.Gilbert, M.Strauss, et al. Algorithmic linear dimension reduction in the norm for sparse vectors.<http://www.math.ucdavis.edu/vershynin/papers/algorithmic-dim-reduction.pdf>.
- [41] A.Gilbert, M.Strauss, J.Tropp, et al. One sketch for all: Fast algorithms for compressed sensing[A]. // *Proceedings of the 39th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*[C]. New York: Association for Computing Machinery. 2007, 237-246.
- [42] A.Gilbert, S.Muthukrishnan, M.Strauss. Improved time bounds for near-optimal sparse fourier representation[A]. // *Proceedings of SPLE, Wavelets XI*[C]. Bellingham WA: International Society for Optical Engineering, 2005, 5914: 1-15.
- [43] H.Mohimani, M.Babaie-Zadeh, C.Jutten. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed norm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(1): 289-301.
- [44] D.Donoho, M.Elad, V.Temlyakov. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(1): 6-18.
- [45] M.Figueiredo, R.Nowak, S.J.Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to

- compressed sensing and other inverse problems. *IEEE Journal of Selected Topics Signal Processing*, 2007, 1(4): 586-598.
- [46] B.Efron, T.Hastie, I.Johnstone, R.Tibshirani. Least angle regression. *The Annals of Statistics*: 2004, 32(2): 407-499.
- [47] D.Needell, R.Vershynin. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit. *Found. ComPut. Math.* 2008, 6.
- [48] D.Donoho, Y.Tsaig, Droril, J.L.Starek. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit(StOMP). *Applied Mathematics And Computation*, 2006, 103(2): 430-481.
- [49] D.Needell, J.Tropp. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *ACM Technical Report 2008-01*, California Institute of Technology, Pasadena, 2008.7.
- [50] T.Do.Thong, Lu Gan, Nam Nguyen and Trac D Tran. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing. *Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove, California, 2008.10.
- [51] Qi.D, W.Sha. The physics of compressive sensing and gradient based recovery algorithms. <http://arxiv.org/abs/0906.1487>, 2009.4.
- [52] N.G.Kingsbury. Complex wavelet for shift invariant analysis and filtering of signals. *Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2001,10(3): 234-253.
- [53] K.Herrity, A.Gilbert, J.Tropp. Sparse approximation via iterative thresholding. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Washington D.C,USA, IEEE, 2006, 624-627.
- [54] R.Baraniuk. A lecture on compressive sensing[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(4): 118-121.
- [55] 戴琼海, 付长君, 季向阳. 压缩感知的研究, *计算机学报*, 2010, 3(3).
- [56] 石光明, 刘丹华, 高大化, 刘哲, 林杰, 王良君. 压缩感知理论及其研究进展, *电子学报*, 2009, 5(5).
- [57] 芮国胜, 王林. 一种基于基追踪压缩感知信号重构算法的改进, *电子测量技术*, 2010, 4(4).

致谢

本论文是在我的导师李炳照教授的悉心指导下完成的，在整个论文的研究阶段都离不开李老师对我的教导，李老师严谨的治学态度、渊博的学术功底、诲人不倦的精神、平易近人的生活作风对我的影响非常大，使我受益终生，在两年多的研究生学习和生活中，李老师不仅在学习上对我严格要求，还教会了我很多做人的道理，使我受益匪浅，在此向李老师致以最真诚的感谢。

另外，还要感谢同课题组的所有同学，是大家一起的努力使得课题组氛围非常愉快宽松，提高了学习的效率，特别要感谢课题组的师兄师姐们的指导和帮助。还要感谢多年来我的父母对我的栽培和教导，我要继续努力报答他们。

同时特别感谢和我朝夕相处的室友们，是他们的支持和关心，帮助我顺利完成科研任务，还有我的学校，北京理工大学对我的培养，我会再接再厉，继续努力的。