

ANHANG

Anhang

A.1 Herleitung der Temperaturverteilung

A.1.1 Modalanalyse

Fangen wir zuerst mit dem 1D-Fall an.

Zunächst betrachten wir nur den homogenen Teil:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \quad (\text{A.1})$$

Bei der Modalanalyse wird die Gleichung in einen ortsabhängigen Teil $X(x)$ und einen zeitabhängigen Teil $T(t)$ zerlegt, also

$$f(x, t) =: X(x)T(t) . \quad (\text{A.2})$$

Durch Einsetzen von (A.2) in die DGL (A.1) erhalten wir

$$\dot{T}(t)X(x) = kT(t)\ddot{X}(x) .$$

Wir separieren nun die Variablen und erhalten

$$\frac{1}{k} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} \stackrel{!}{=} C .$$

Es ergeben sich zwei gewöhnliche Differenzialgleichungen (DGLs):

- örtliche DGL

$$\ddot{X}(x) - CX(x) = 0 .$$

- zeitliche DGL

$$\dot{T}(t) - kCT(t) = 0 .$$

Lösen wir zuerst die örtliche DGL.

Für $C = 0$ gilt

$$\begin{aligned}\ddot{X}(x) &= 0 , \\ \dot{X}(x) &= B , \\ X(x) &= Bx + D .\end{aligned}$$

Setzen wir die Gleichung in 1. Randbedingung ein, gilt

$$\dot{X}(0) = B = 0 ,$$

d. h. $X(x)$ ist konstant.

Für $C > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\ddot{X}(x) &= CX(x) , \\ X(x) &= B \exp \left\{ \sqrt{C}x \right\} + D \exp \left\{ -\sqrt{C}x \right\} , \\ \dot{X}(x) &= B\sqrt{C} \exp \left\{ \sqrt{C}x \right\} - D\sqrt{C} \exp \left\{ -\sqrt{C}x \right\} .\end{aligned}$$

Setzen wir die Gleichung in die erste Randbedingung ein, gilt

$$\dot{X}(0) = \sqrt{C} (B - D) = 0 ,$$

d. h. $B = D$. Dann gilt

$$X(x) = B \left(\exp \left\{ \sqrt{C}x \right\} + \exp \left\{ -\sqrt{C}x \right\} \right) .$$

Setzen wir die Gleichung in die zweite Randbedingung ein, gilt

$$\dot{X}(L) = B\sqrt{C} \underbrace{\left(\exp \left\{ \sqrt{C}L \right\} - \exp \left\{ -\sqrt{C}L \right\} \right)}_{>0} = 0 ,$$

d. h. $B = 0$, $X(x)$ ist konstant.

Für $C < 0$ gilt

$$\begin{aligned}X(x) &= B \sin \left(\underbrace{\sqrt{-C}}_{=: \lambda} x \right) + D \cos \left(\underbrace{\sqrt{-C}}_{=: \lambda} x \right) \\ &= B \sin (\lambda x) + D \cos (\lambda x) .\end{aligned}$$

Setzen wir die Gleichung in die erste Randbedingung ein, gilt

$$\dot{X}(0) = B\lambda = 0 ,$$

d. h. $B = 0$. Setzen wir die Gleichung in die zweite Randbedingung ein, gilt

$$\dot{X}(L) = -D\lambda \sin(\lambda L) = 0 .$$

Daraus folgt $D = 0$ oder

$$\lambda L = i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Schließlich erhalten wir

$$X_i(x) = D \cos(\lambda_i x), \quad \lambda_i = i \frac{\pi}{L} . \quad (\text{A.3})$$

Nun formen wir die zeitliche DGL um.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} &= C = -\lambda^2 \\ \Rightarrow \dot{T}_i(t) &= -k\lambda_i^2 T_i(t) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Setzen wir (A.3) und (A.4) zusammen, erhalten wir

$$f(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) X_i(x) . \quad (\text{A.5})$$

Um (A.5) zu verallgemeinern, normalisieren wir nun die Funktionen $X(x)$:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) X_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{T_i(t)}_{=:T_i(t)} \underbrace{\frac{X_i(x)}{E_{X_i}}}_{=: \psi_i(x)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) \psi_i(x) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

, wobei E_{X_i} der Energie der Funktion X_i entspricht

$$E_{X_i} = \sqrt{\int_{x=0}^L |X_i(x)|^2 dx} .$$

Die normalisierten Funktionen $\psi_i(x)$ lauten:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \sqrt{\frac{1}{L}} , \\ \psi_i(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\lambda_i x), \quad i = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Sie erfüllen die Orthogonalitätsbedingung:

$$\int_0^L \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Deswegen bilden ψ_i eine Basis. Wir bezeichnen die ψ_i als Eigenfunktionen. Dementsprechend bezeichnen wir die T_i als Koeffizienten zu den ψ .

Jetzt leiten wir das Systemmodell aus der Modalanalyse her. Laut (A.4) und (A.6) und nach der zeitlichen und örtlichen Diskretisierung mit jeweils M und N Knoten sowie der Wahl von $i_{\max} = G$ (G -Grad-Approximation) erhalten wir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_1[k+1] \\ \vdots \\ T_G[k+1] \end{bmatrix}}_{=: \underline{T}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \Delta t k \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 - \Delta t k \lambda_G^2 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1[k] \\ \vdots \\ T_G[k] \end{bmatrix}}_{=: \underline{T}_k},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_1[k+1] \\ \vdots \\ f_N[k+1] \end{bmatrix}}_{=: \underline{f}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1[1] & \cdots & \psi_G[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1[N] & \cdots & \psi_G[N] \end{bmatrix}}_{=: \Psi} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1[k+1] \\ \vdots \\ T_G[k+1] \end{bmatrix}}_{=: \underline{T}_{k+1}}.$$

Also wir bekommen

$$\underline{T}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \underline{T}_k,$$

$$\underline{f}_{k+1} = \Psi \cdot \underline{T}_{k+1}.$$

Jetzt berechnen wir \underline{T}_0 . Da die ψ_i eine Basis bilden, können die Koeffizienten T_i durch das Innenprodukt (Projektion) von $f(x, t_0)$ und ψ_i berechnet werden, also

$$\begin{bmatrix} T_1[0] \\ \vdots \\ T_G[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1[1] & \cdots & \psi_1[N] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_G[1] & \cdots & \psi_G[N] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1[0] \\ \vdots \\ f_N[0] \end{bmatrix},$$

d. h.

$$\underline{T}_0 = \Psi^T \cdot \underline{f}_0.$$

Dann leiten wir die numerische Lösung für den inhomogenen Fall (mit Anregung u) her. Das Diffusionsmodell mit Anregung lautet

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) + u(x, t).$$

Analog stellen wir die Anregung durch die Koeffizienten $U_i(t)$ und Eigenfunktionen ψ_i dar, also

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} U_i(t) \psi_i(x) .$$

Es gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) \psi_i(x) \right) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) \psi_i(x) \right) + \sum_{i=0}^{\infty} U_i(t) \psi_i(x) ,$$

also

$$\sum_{i=0}^{\infty} \dot{T}_i(t) \psi_i(x) = k \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) \psi_i''(x) + \sum_{i=0}^{\infty} U_i(t) \psi_i(x) . \quad (\text{A.7})$$

Da

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}}, & i = 0 , \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\lambda_i x), & i = 1, 2, \dots , \end{cases} \\ \psi_i'(x) &= -\lambda_i \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_i x) , \\ \psi_i''(x) &= -\lambda_i^2 \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\lambda_i x) = -\lambda_i^2 \psi_i(x) , \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

gilt sich aus (A.7) und (A.8)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \dot{T}_i(t) \psi_i(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-k) \lambda_i^2 T_i(t) \psi_i(x) + \sum_{i=0}^{\infty} U_i(t) \psi_i(x) , \\ \sum_{i=0}^{\infty} \dot{T}_i(t) \psi_i(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-k \lambda_i^2 T_i(t) + U_i(t)) \psi_i(x) , \\ \dot{T}_i(t) &= -k \lambda_i^2 T_i(t) + U_i(t) . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Laut (A.9) erhalten wir das Systemmodell für den inhomogenen Fall, also

$$\begin{aligned} \underline{T}_{k+1} &= \mathbf{A} \cdot \underline{T}_k + \Delta t \underbrace{\begin{bmatrix} U_1[k] \\ \vdots \\ U_G[k] \end{bmatrix}}_{=: \underline{U}_k} \\ &= \mathbf{A} \cdot \underline{T}_k + \underline{U}_k , \\ \underline{f}_{k+1} &= \mathbf{\Psi} \cdot \underline{T}_{k+1} . \end{aligned}$$

Die Berechnung von \underline{U}_k ist analog wie die von T_0 , also

$$\underline{U}_k = \Delta t \begin{bmatrix} U_1[k] \\ \vdots \\ U_G[k] \end{bmatrix} = \Delta t \cdot \Psi^T \begin{bmatrix} u_1[k] \\ \vdots \\ u_N[k] \end{bmatrix} .$$

Nun Lösen wir die Temperaturverteilung in den 2D-Fall.

Das Diffusionsmodell für den 2D-Fall ist

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, t) \right) + u(x, y, t) . \quad (\text{A.10})$$

Separieren wir $f(x, y, t)$ in $f(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, erhalten wir

$$f(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{i,j}(t) \psi_i(x) \varphi_j(y)$$

und

$$X(x)Y(y)\dot{T}(t) = kT(t) \left(\ddot{X}(x)Y(y) + X(x)\ddot{Y}(y) \right) .$$

Dann ergibt sich

$$\frac{1}{k} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} + \frac{\ddot{Y}(y)}{Y(y)} \stackrel{!}{=} C . \quad (\text{A.11})$$

Um eine Lösung zu finden, setzen wir nun zunächst

$$\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = K \frac{\ddot{Y}(y)}{Y(y)}, \quad K = \text{Konst.}$$

Dann ergibt sich

$$\frac{1}{k} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = (1 + K) \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = C ,$$

also

$$\underbrace{\frac{1}{k(1+K)}}_{=:k'} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \underbrace{\frac{C}{1+K}}_{=:C'} .$$

Analog wie im 1D-Fall erhalten wir schließlich zwei DGL jeweils in x - und y -Richtung.

$$\begin{aligned} X(x) &= D_x \cos(\lambda_i x), & \lambda_i &= i \frac{\pi}{L_x} , \\ Y(y) &= D_y \cos(\sigma_j y), & \sigma_j &= j \frac{\pi}{L_y} . \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt K

$$K_{ij} = \frac{\ddot{X}_i(x)/X_i(x)}{\ddot{Y}_j(y)/Y_j(y)} = \frac{\lambda_i^2}{\sigma_j^2} .$$

Nun normalisieren wir die beiden örtlichen Funktionen:

- Eigenfunktionen in x -Richtung:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L_x}}, & i = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{L_x}} \cos(\lambda_i x), & i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- die Eigenfunktionen in y -Richtung:

$$\varphi_j(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L_y}}, & j = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{L_y}} \cos(\lambda_j y), & j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Setzen wir die Eigenfunktionen in (A.11) ein, erhalten wir

$$\dot{T}_{i,j}(t) = -k (\lambda_i^2 + \sigma_j^2) T_{i,j}(t) .$$

Betrachten wir nun die Anregung. Stellen wir die Anregung $u(x, y, t)$ durch Eigenfunktionen dar:

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U_{i,j}(t) \psi_i(x) \varphi_j(y)$$

Wegen (A.10) gilt dann

$$\dot{T}_{i,j}(t) = - \underbrace{k (\lambda_i^2 + \sigma_j^2)}_{=: \kappa_{i,j}} T_{i,j} + U_{i,j}(t) .$$

Bevor wir das Systemmodell beschreiben, nummerieren wir zuerst die Knoten. D. h. wir führen eine Umformung

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{G_x \times G_y} &\mapsto \underline{T} \in \mathbb{R}^{G_x G_y \times 1}, \\ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y} &\mapsto \underline{f} \in \mathbb{R}^{N_x N_y \times 1}, \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \underline{T}_{index} &= \mathbf{T}_{i,j}, \text{ mit } index := i + (j-1)G_x, \\ \underline{f}_{index} &= \mathbf{f}_{i,j}, \text{ mit } index := i + (j-1)N_x, \end{aligned}$$

wie gezeigt in der Abbildung A.1.

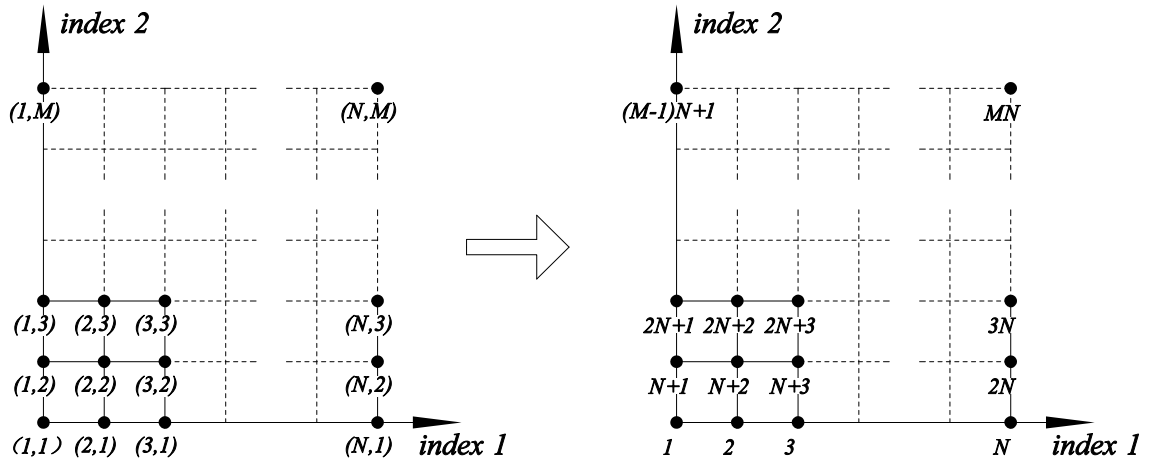


Abbildung A.1: Nummerierung

Schließlich erhalten wir nach der Diskretisierung das Systemmodell

$$\begin{aligned}\underline{T}_{k+1} &= \mathbf{A} \cdot \underline{T}_k + \underline{U}_k, \\ \underline{f}_{k+1} &= \Psi \cdot \underline{T}_{k+1}\end{aligned}$$

, wobei

$$\begin{aligned}\underline{T}_k &= \begin{bmatrix} T_1[K] & \cdots & T_{G_x G_y}[K] \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} T_{1,1}[K] & \cdots & T_{G_x,1}[K] & \cdots & T_{1,G_y}[K] & \cdots & T_{G_x,G_y}[K] \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 - \kappa_{1,1} & & & & & \underline{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 - \kappa_{G_x,1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 - \kappa_{1,G_y} & \\ & & & & & \ddots \\ \underline{0} & & & & & & 1 - \kappa_{G_x,G_y} \end{bmatrix}, \\ \underline{U}_k &= \Delta t \cdot \begin{bmatrix} U_1[K] & \cdots & U_{G_x G_y}[K] \end{bmatrix}^T \\ &= \Delta t \cdot \begin{bmatrix} U_{1,1}[K] & \cdots & U_{G_x,1}[K] & \cdots & U_{1,G_y}[K] & \cdots & U_{G_x,G_y}[K] \end{bmatrix}^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \begin{bmatrix} \psi_1[1]\varphi_1[1] & \cdots & \psi_{G_x}[1]\varphi_1[1] & \cdots & \psi_1[1]\varphi_{G_y}[1] & \cdots & \psi_{G_x}[1]\varphi_{G_y}[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1[N_x]\varphi_1[1] & \cdots & \psi_{G_x}[N_x]\varphi_1[1] & \cdots & \psi_1[N_x]\varphi_{G_y}[1] & \cdots & \psi_{G_x}[N_x]\varphi_{G_y}[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1[1]\varphi_1[N_y] & \cdots & \psi_{G_x}[1]\varphi_1[N_y] & \cdots & \psi_1[1]\varphi_{G_y}[N_y] & \cdots & \psi_{G_x}[1]\varphi_{G_y}[N_y] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1[N_x]\varphi_1[N_y] & \cdots & \psi_{G_x}[N_x]\varphi_1[N_y] & \cdots & \psi_1[N_x]\varphi_{G_y}[N_y] & \cdots & \psi_{G_x}[N_x]\varphi_{G_y}[N_y] \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1[1] & \cdots & \varphi_{G_y}[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1[N_y] & \cdots & \varphi_{G_y}[N_y] \end{bmatrix}}_{\Phi_y} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1[1] & \cdots & \psi_{G_x}[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1[N_x] & \cdots & \psi_{G_x}[N_x] \end{bmatrix}}_{\Psi_x} .
 \end{aligned}$$

Hierbei steht das Zeichen „ \otimes “ für das Kronecker-Produkt, mit dem wir die Messabbildung Ψ klarer und einfacher beschreiben können.

A.1.2 Finite-Differenzen-Verfahren

Beim Finite-Differenzen-Verfahren approximieren wir die partiellen Terme durch eine Taylor-Entwicklung, also

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial t}(x[n], t[k]) &\approx \frac{f(x[n], t[k]) - f(x[n], t[k-1])}{\Delta t} , \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x[n], t[k]) &\approx \frac{f(x[n-1], t[k]) - 2f(x[n], t[k]) + f(x[n+1], t[k])}{\Delta x^2} .
 \end{aligned}$$

In Kurzschreibweise:

$$\frac{\partial f_n^k}{\partial t} \approx \frac{f_n^k - f_n^{k-1}}{\Delta t} , \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial^2 f_n^k}{\partial x^2} \approx \frac{f_{n-1}^k - 2f_n^k + f_{n+1}^k}{\Delta x^2} . \tag{A.13}$$

Fügen (A.12) und (A.13) in das Diffusionsmodell ein, ergibt sich dann

$$\frac{f_n^k - f_n^{k-1}}{\Delta t} = k \frac{f_{n-1}^k - 2f_n^k + f_{n+1}^k}{\Delta x^2} + u_n^k .$$

Formen wir die Gleichung um, bekommen wir

$$-f_n^k + \underbrace{\frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + 2k\Delta t}}_{=:A} f_n^{k-1} + \underbrace{\frac{k\Delta t}{\Delta x^2 + 2k\Delta t}}_{=:B} f_{n-1}^k + \underbrace{\frac{k\Delta t}{\Delta x^2 + 2k\Delta t}}_{=:B} f_{n+1}^k = \underbrace{\frac{\Delta x^2 \Delta t}{\Delta x^2 + 2k\Delta t}}_{=:C} u_n^k .$$

D. h. für jede Knoten gibt es eine lineare Gleichung

$$-f_n^k + Af_n^{k-1} + Bf_{n-1}^k + Bf_{n+1}^k = Cu_n^k .$$

Die Randbedingungen sind gegeben durch

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right|_{x=L} = 0 .$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1^k}{\partial x} &\approx \frac{f_2^k - f_1^k}{\Delta x} - 0 , \\ \frac{\partial f_N^k}{\partial x} &\approx \frac{f_N^k - f_{N-1}^k}{\Delta x} - 0 , \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} -f_1^k + f_2^k &= 0 , \\ f_N^k - f_{N-1}^k &= 0 . \end{aligned}$$

Die Anfangstemperaturverteilung ist durch $f_n^1 := f_n^0$ gegeben.

Nach der Nummerierung wie in Abbildung [A.1](#)

$$[n, k] \mapsto n + (k - 1)N$$

erhalten wir schließlich ein lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & A & & B & -1 & B & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & A & & B & -1 & B \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{H}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^1 \\ \vdots \\ f_N^1 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ \vdots \\ f_{N-1}^K \\ f_N^K \end{bmatrix}}_{\underline{f}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^1 \\ \vdots \\ f_N^1 \\ 0 \\ Cu_2^2 \\ \vdots \\ Cu_{N-1}^{K-1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \underline{b}} .$$

Dann können wir die Temperaturverteilung nach der Lösung dieses LGS.

Analog zum 1D-Fall können wir das LGS für den 2D-Fall herleiten.

Laut Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{m,n}^k}{\partial t} &\approx \frac{f_{m,n}^k - f_{m,n}^{k-1}}{\Delta t}, \\ \frac{\partial^2 f_{m,n}^k}{\partial x^2} &\approx \frac{f_{m-1,n}^k - 2f_{m,n}^k + f_{m+1,n}^k}{\Delta x^2}, \\ \frac{\partial^2 f_{m,n}^k}{\partial y^2} &\approx \frac{f_{m,n-1}^k - 2f_{m,n}^k + f_{m,n+1}^k}{\Delta y^2},\end{aligned}$$

ergibt sich dann für alle Knoten außer den Knoten an den Rändern, also

$$-f_{m,n}^k + Af_{m,n}^{k-1} + Bf_{m,n-1}^k + Bf_{m,n+1}^k + Cf_{m-1,n}^k + Cf_{m+1,n}^k = Du_{m,n}^k.$$

Für die Randbedingungen gilt

$$\begin{aligned}-f_{2,n}^k + f_{1,n}^k &= 0, \\ -f_{M,n}^k + f_{M-1,n}^k &= 0, \\ -f_{m,1}^k + f_{m,2}^k &= 0, \\ -f_{m,N}^k + f_{m,N-1}^k &= 0.\end{aligned}$$

Nach der Nummerierung wie gezeigt in der Abbildung [A.2](#)

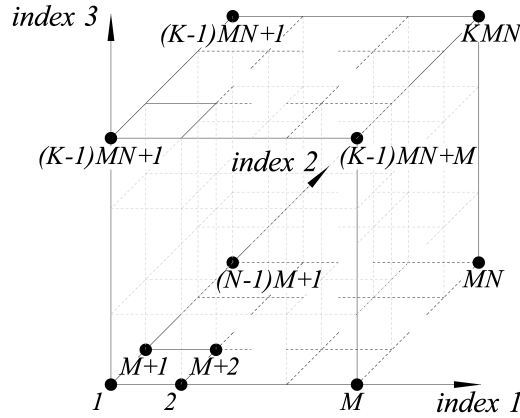


Abbildung A.2: Nummerierung

erhalten wir ein LGS in der Form von

$$\mathbf{H} \cdot \underline{f} = \underline{b}.$$

Dann können wir die Temperaturverteilung nach der Lösung dieses LGS.

A.2 Herleitung des Kalman-Filters

Es wird so angenommen, dass das Systemmodell

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \mathbf{B} \cdot u_k + \underline{w}_k \\ \underline{y}_{k+1} &= \mathbf{H}_{k+1} \cdot \underline{x}_{k+1} + \underline{v}_{k+1}\end{aligned}$$

bekannt ist. Die Systemrauschen \underline{w}_k und die Messrauschen \underline{v}_k sind Gaußsche Verteilungen mit

$$\begin{aligned}E\{\underline{w}_k\} &= 0, & \text{Cov}\{\underline{w}_i, \underline{w}_j\} &= \mathbf{C}_k^w \cdot \delta_{i,j} \\ E\{\underline{v}_k\} &= 0, & \text{Cov}\{\underline{v}_i, \underline{v}_j\} &= \mathbf{C}_k^v \cdot \delta_{i,j}\end{aligned}$$

1. Schritt: Prädiktion

Die Prädiktion ist Erwartungsstreuung, d. h.

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_{k+1}^p &= E\left\{\underline{x}_{k+1} | \underline{y}_k\right\} \\ &= E\left\{\mathbf{A}_k \cdot \underline{x}_k + \mathbf{B}_k \cdot \underline{u}_k + \underline{w}_k | \underline{y}_k\right\} \\ &= \mathbf{A}_k \cdot E\left\{\underline{x}_k | \underline{y}_k\right\} + \mathbf{B}_k \cdot E\left\{\underline{u}_k | \underline{y}_k\right\} + E\left\{\underline{w}_k | \underline{y}_k\right\} \\ &= \mathbf{A}_k \cdot E\left\{\underline{x}_k | \underline{y}_k\right\} + \mathbf{B}_k \cdot E\left\{\underline{u}_k | \underline{y}_k\right\} \\ &= \mathbf{A}_k \cdot \hat{\underline{x}}_k^e + \mathbf{B}_k \cdot \underline{u}_k\end{aligned}$$

Die Fehlerkovarianzmatrix nach der Prädiktion:

Da

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \cdot \underline{x}_k + \mathbf{B}_k \cdot \underline{u}_k + \underline{w}_k \\ \hat{\underline{x}}_{k+1}^p &= \mathbf{A}_k \cdot \hat{\underline{x}}_k^e + \mathbf{B}_k \cdot \underline{u}_k\end{aligned}$$

gilt

$$\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^p = \mathbf{A}_k \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e) + \underline{w}_k$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{k+1}^p &= E \left\{ (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^p) (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^p)^T | \underline{y}_k \right\} \\
&= E \left\{ (\mathbf{A}_k \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e) + \underline{w}_k) (\mathbf{A}_k \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e) + \underline{w}_k)^T | \underline{y}_k \right\} \\
&= E \left\{ (\mathbf{A}_k \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e) + \underline{w}_k) \left((\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e)^T \cdot \mathbf{A}_k^T + \underline{w}_k^T \right) | \underline{y}_k \right\} \\
&= E \left\{ \mathbf{A}_k \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e) \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e)^T \cdot \mathbf{A}_k^T + \underline{w}_k \underline{w}_k^T | \underline{y}_k \right\} \\
&= E \left\{ \mathbf{A}_k \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e) \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e)^T \cdot \mathbf{A}_k^T | \underline{y}_k \right\} + E \left\{ \underline{w}_k \underline{w}_k^T | \underline{y}_k \right\} \\
&= \mathbf{A}_k \cdot E \left\{ (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e) \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e)^T | \underline{y}_k \right\} \cdot \mathbf{A}_k^T + E \left\{ \underline{w}_k \underline{w}_k^T | \underline{y}_k \right\} \\
&= \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{C}_k^e \cdot \mathbf{A}_k^T + \mathbf{C}_k^w
\end{aligned}$$

2. Schritt: Filterung

Erwartungsstreuung

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{x}}_{k+1}^e &= \mathbf{K}_{k+1}^p \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{y}_{k+1} \\
E \left\{ \hat{\underline{x}}_{k+1}^e \right\} &= E \left\{ \mathbf{K}_{k+1}^p \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{y}_{k+1} \right\} \\
&= E \left\{ \mathbf{K}_{k+1}^p \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{H}_{k+1} \cdot \underline{x}_{k+1} + \underline{v}_{k+1}) \right\} \\
&= \mathbf{K}_{k+1}^p \cdot E \left\{ \hat{\underline{x}}_{k+1}^p \right\} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1} \cdot E \left\{ \underline{x}_{k+1} \right\} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot E \left\{ \underline{v}_{k+1} \right\} \\
&= (\mathbf{K}_{k+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot E \left\{ \underline{x}_{k+1} \right\} \\
&\stackrel{!}{=} E \left\{ \underline{x}_{k+1} \right\}
\end{aligned}$$

d. h.

$$\mathbf{K}_{k+1}^p = \mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}$$

also

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{x}}_{k+1}^e &= \mathbf{K}_{k+1}^p \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{y}_{k+1} \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{y}_{k+1}
\end{aligned}$$

Die Fehlerkovarianzmatrix nach der Filterung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^e &= \underline{x}_{k+1} - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{y}_{k+1} \\
&= \underline{x}_{k+1} - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p - \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{H}_{k+1} \cdot \underline{x}_{k+1} + \underline{v}_{k+1}) \\
&= \underline{x}_{k+1} - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1} \cdot \underline{x}_{k+1} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{v}_{k+1} \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \underline{x}_{k+1} - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{v}_{k+1} \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^p) - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{v}_{k+1}
\end{aligned}$$

dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{k+1}^e &= E \left\{ (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^e) (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^e)^T \right\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{C}_{k+1}^p (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}^v \mathbf{K}_{k+1}^T\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Bestimmung der Verstärkungsmatrix \mathbf{K}_{k+1} :

Es ist offensichtlich:

$$\begin{aligned}\text{Spur}(\mathbf{C}_{k+1}^e) &= \text{Spur} \left(E \left\{ (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^e) (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^e)^T \right\} \right) \\ &= E \left\{ \text{Spur} \left((\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^e) (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^e)^T \right) \right\} \\ &= E \left\{ \text{Spur} \left((\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^e)^T (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^e) \right) \right\} \\ &= E \left\{ \|\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1}^e\|_2^2 \right\}\end{aligned}$$

Deswegen können wir durch die Minimierung von $\text{Spur}(\mathbf{C}_{k+1}^e)$ die Verstärkungsmatrix \mathbf{K}_{k+1} bestimmen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_{k+1}} \text{Spur}(\mathbf{C}_{k+1}^e) \\ = -2(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \mathbf{H}_{k+1}^T + 2\mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{C}_{k+1}^v \stackrel{!}{=} \mathbf{0}\end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \mathbf{H}_{k+1}^T \cdot (\mathbf{H}_{k+1} \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{C}_{k+1}^v)^{-1} \quad (\text{A.15})$$

Setzen wir (A.15) in (A.14) ein, erhalten wir

$$\mathbf{C}_{k+1}^e = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p$$

Fassen wir nun das Kalman-Filter zusammen:

- Prädiktion

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_{k+1}^p &= \mathbf{A}_k \cdot \hat{\underline{x}}_k^e + \mathbf{B}_k \cdot \underline{u}_k \\ \mathbf{C}_{k+1}^p &= \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{C}_k^e \cdot \mathbf{A}_k^T + \mathbf{C}_k^w\end{aligned}$$

- Filterung

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_{k+1}^e &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{y}_{k+1} \\ \mathbf{C}_{k+1}^e &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \mathbf{H}_{k+1}^T \cdot (\mathbf{H}_{k+1} \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{C}_{k+1}^v)^{-1}$$

Literaturverzeichnis

- [1] Laska, Jason N., et al. "Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation." 2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. IEEE, 2007.
- [2] Herman, Matthew A., et al. "A higher-speed compressive sensing camera through multi-diode design." Compressive Sensing II. Vol. 8717. International Society for Optics and Photonics, 2013.
- [3] Wu, Dalei, Wei-Ping Zhu, and M. N. S. Swamy. "A compressive sensing method for noise reduction of speech and audio signals." 2011 IEEE 54th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS). IEEE, 2011.
- [4] Takhar, Dharmpal, et al. "A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression." Computational Imaging IV. Vol. 6065. International Society for Optics and Photonics, 2006.
- [5] Bobin, Jérôme, Jean-Luc Starck, and Roland Ottensamer. "Compressed sensing in astronomy." IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing 2.5 (2008): 718-726.
- [6] Dong, Xiao, and Yunhua Zhang. "A MAP approach for 1-bit compressive sensing in synthetic aperture radar imaging." IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters 12.6 (2015): 1237-1241.
- [7] Duarte, Marco F., et al. "Single-pixel imaging via compressive sampling." IEEE signal processing magazine 25.2 (2008): 83-91.
- [8] Laska, Jason N., et al. "Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation." 2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. IEEE, 2007.
- [9] Zelinski, Adam C., et al. "Sparsity-enforced slice-selective MRI RF excitation pulse design." IEEE transactions on medical imaging 27.9 (2008): 1213-1229.
- [10] Dai, Wei, et al. "Compressive sensing DNA microarrays." EURASIP journal on bioinformatics and systems biology 2009.1 (2008): 162824.

- [11] Levin, Anat, et al. "Image and depth from a conventional camera with a coded aperture." *ACM transactions on graphics (TOG)* 26.3 (2007): 70-es.
- [12] Seite "Modalanalyse". In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 17. Dezember 2019, 22:22 UTC. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Modalanalyse&oldid=194999069>
- [13] Kalman, Rudolph Emil. "A new approach to linear filtering and prediction problems." (1960): 35-45.
- [14] Kiencke, Uwe, Michael Schwarz, and Thomas Weickert. *Signalverarbeitung: Zeit-Frequenz-Analyse und Schätzverfahren*. Oldenbourg Verlag, 2009.
- [15] Mazumder, Sandip. *Numerical methods for partial differential equations: finite difference and finite volume methods*. Academic Press, 2015.
- [16] Shannon, Claude E. "A mathematical theory of communication." *The Bell system technical journal* 27.3 (1948): 379-423.
- [17] Davenport, Mark A., et al. "Signal processing with compressive measurements." *IEEE Journal of Selected topics in Signal processing* 4.2 (2010): 445-460.
- [18] Candes, Emmanuel J., Justin K. Romberg, and Terence Tao. "Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements." *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* 59.8 (2006): 1207-1223.
- [19] Donoho, David L. "Compressed sensing." *IEEE Transactions on information theory* 52.4 (2006): 1289-1306.
- [20] Haupt, Jarvis, and Robert Nowak. "Compressive sampling for signal detection." *2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing-ICASSP'07*. Vol. 3. IEEE, 2007.
- [21] Davenport, Mark A., Michael B. Wakin, and Richard G. Baraniuk. "Detection and estimation with compressive measurements." *Dept. of ECE, Rice University, Tech. Rep* (2006).
- [22] Mark A. Davenport, Petros T. Boufounos, Richard Baraniuk. *Compressive Domain Interference Cancellation*. SPARS'09 - Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations, Inria Rennes - Bretagne Atlantique, Apr 2009, Saint Malo, France. [ffinria-00369498f](#)
- [23] Candes, Emmanuel J., and Terence Tao. "Decoding by linear programming." *IEEE transactions on information theory* 51.12 (2005): 4203-4215.

- [24] Baraniuk, Richard, et al. "An introduction to compressive sensing." *Connexions e-textbook* (2011): 24-76.
- [25] Baraniuk, Richard G. "Compressive sensing [lecture notes]." *IEEE signal processing magazine* 24.4 (2007): 118-121.
- [26] Cohen, Albert, Wolfgang Dahmen, and Ronald DeVore. "Compressed sensing and best ℓ_1 -term approximation." *Journal of the American mathematical society* 22.1 (2009): 211-231.
- [27] Baraniuk, Richard, et al. "A simple proof of the restricted isometry property for random matrices." *Constructive Approximation* 28.3 (2008): 253-263.
- [28] Candès, Emmanuel J. "Compressive sampling." *Proceedings of the international congress of mathematicians*. Vol. 3. 2006.
- [29] Donoho, David L., and Michael Elad. "Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 100.5 (2003): 2197-2202.
- [30] Donoho, David L. "De-noising by soft-thresholding." *IEEE transactions on information theory* 41.3 (1995): 613-627.
- [31] Tsaig, Yaakov, and David L. Donoho. "Extensions of compressed sensing." *Signal processing* 86.3 (2006): 549-571.
- [32] Candes, Emmanuel J., and Terence Tao. "Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?." *IEEE transactions on information theory* 52.12 (2006): 5406-5425.
- [33] Olshausen, Bruno A., and David J. Field. "Sparse coding with an overcomplete basis set: A strategy employed by V1?." *Vision research* 37.23 (1997): 3311-3325.
- [34] Cai, Deng, Hujun Bao, and Xiaofei He. "Sparse concept coding for visual analysis." *CVPR 2011*. IEEE, 2011.
- [35] Mairal, Julien, et al. "Online dictionary learning for sparse coding." *Proceedings of the 26th annual international conference on machine learning*. 2009.
- [36] Bao, Chenglong, Jian-Feng Cai, and Hui Ji. "Fast sparsity-based orthogonal dictionary learning for image restoration." *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*. 2013.
- [37] Candes, Emmanuel, and Justin Romberg. "Sparsity and incoherence in compressive sampling." *Inverse problems* 23.3 (2007): 969.
- [38] Coifman, Ronald, F. Geshwind, and Yves Meyer. "Noiselets." *Applied and Computational Harmonic Analysis* 10.1 (2001): 27-44.

- [39] Tropp, Joel A., and Anna C. Gilbert. "Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit." *IEEE Transactions on information theory* 53.12 (2007): 4655-4666.
- [40] Candès, Emmanuel J., Justin Romberg, and Terence Tao. "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information." *IEEE Transactions on information theory* 52.2 (2006): 489-509.
- [41] Needell, Deanna, and Roman Vershynin. "Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit." *Foundations of computational mathematics* 9.3 (2009): 317-334.
- [42] Blumensath, Thomas, and Mike E. Davies. "Iterative hard thresholding for compressed sensing." *Applied and computational harmonic analysis* 27.3 (2009): 265-274.
- [43] Cohen, Albert, Wolfgang Dahmen, and Ronald DeVore. "Instance optimal decoding by thresholding in compressed sensing." *Proc. 8th Int. Int. Conf.*, Jun. 1620, 2010, El Escorial, Madrid, Spain. Vol. 505. 2008.
- [44] Needell, Deanna, and Joel A. Tropp. "CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples." *Applied and computational harmonic analysis* 26.3 (2009): 301-321.
- [45] Tropp, Joel A., et al. "Random filters for compressive sampling and reconstruction." *2006 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing Proceedings*. Vol. 3. IEEE, 2006.
- [46] Asif, Muhammad Salman. *Dynamic compressive sensing: Sparse recovery algorithms for streaming signals and video*. Diss. Georgia Institute of Technology, 2013.
- [47] Asif, M. Salman, and Justin Romberg. "Dynamic Updating for ℓ_1 Minimization." *IEEE Journal of selected topics in signal processing* 4.2 (2010): 421-434.
- [48] Vaswani, Namrata. "Kalman filtered compressed sensing." *2008 15th IEEE International Conference on Image Processing*. IEEE, 2008.
- [49] Vaswani, Namrata. "Analyzing least squares and Kalman filtered compressed sensing." *2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. IEEE, 2009.
- [50] Vaswani, Namrata. "LS-CS-residual (LS-CS): compressive sensing on least squares residual." *IEEE Transactions on Signal Processing* 58.8 (2010): 4108-4120.

- [51] Ji, Shihao, Ya Xue, and Lawrence Carin. "Bayesian compressive sensing." *IEEE Transactions on signal processing* 56.6 (2008): 2346-2356.
- [52] Baron, Dror, Michael B. Wakin, Marco F. Duarte, Shriram Sarvotham, and Richard G. Baraniuk. "Distributed compressed sensing." (2005).
- [53] Carmi, Avishy, Pini Gurfil, and Dimitri Kanevsky. "Methods for sparse signal recovery using Kalman filtering with embedded pseudo-measurement norms and quasi-norms." *IEEE Transactions on Signal Processing* 58.4 (2009): 2405-2409.
- [54] Karimi, Hazhar Sufi, and Balasubramaniam Natarajan. "Recursive Dynamic Compressive Sensing in Smart Distribution Systems." *2020 IEEE Power Energy Society Innovative Smart Grid Technologies Conference (ISGT)*. IEEE, 2020.
- [55] Vaswani, Namrata, and Jinchun Zhan. "Recursive recovery of sparse signal sequences from compressive measurements: A review." *IEEE Transactions on Signal Processing* 64.13 (2016): 3523-3549.
- [56] Karseras, Evripidis, Kin Leung, and Wei Dai. "Tracking dynamic sparse signals using hierarchical Bayesian Kalman filters." *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. IEEE, 2013.
- [57] Uwe D. Hanebeck, Benjamin Noack, et al. "Skriptum zur Vorlesung Informationsverarbeitung in Sensornetzwerken."