

分 类 号: TN91  
研究生学号: 2008512025

单位代码: 10183  
密 级: 公 开



# 吉 林 大 学

## 硕士学位论文

基于压缩感知的信号重构算法研究

Research of Signal Reconstruct Algorithm  
Based on Compressive Sensing

作者姓名: 宁刚

专 业: 电路与系统

研究方向: 数字图像处理

指导教师: 郭树旭 教授

培养单位: 电子科学与工程学院

2010 年 05 月

基于压缩感知的信号重构算法研究

Research of Signal Reconstruct Algorithm Based on  
Compressive Sensing

作者姓名：宁刚

专业名称：电路与系统

指导教师：郭树旭 教授

学位类别：工学硕士

答辩日期：2010 年 06 月 03 日

未经本论文作者的书面授权，依法收存和保管本论文书面版本、电子版本的任何单位和个人，均不得对本论文的全部或部分内容进行任何形式的复制、修改、发行、出租、改编等有碍作者著作权的商业性使用（但纯学术性使用不在此限）。否则，应承担侵权的法律责任。

### 吉林大学博士(或硕士)学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交学位论文，是本人在指导教师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名： 宁刚

日期： 2010 年 6 月 3 日

## 内容提要

本文对压缩感知理论的理论框架和应用进行了系统概述。该理论针对稀疏信号，在对信号进行采样的同时完成数据压缩，从而大量节约了计算资源、存储资源和传输资源。它包括信号的稀疏变换、观测矩阵的设计和信号的重构三个方面的内容。这里将重点放在最为关键的信号重构方面。接下来对重构算法中的正交匹配追踪算法和梯度投影算法的实现原理，算法结构等进行具体的研究并做出信号仿真结果。最后，在正交匹配追踪算法的基础上，提出了一种改进方案。针对原有算法的重构速度比较慢和迭代次数需要给定的问题，利用最优正交匹配算法中的匹配原子的选择准则和后向投影思想进行迭代重构。分别应用一维信号和二维图像进行重构仿真，将得到的实验结果和原有算法的仿真结果对比，可以看出优化后的算法在降低采样点数要求的同时，能够比较精确的重构信号，算法性能得到提升。

# 目 录

<b>第 1 章 绪论 .....</b>	<b>1</b>
1.1 研究的目的和意义 .....	1
1.2 国内外相关领域的研究现状 .....	2
1.3 主要工作和结构安排 .....	3
1.3.1 主要研究工作 .....	3
1.3.2 结构安排 .....	3
<b>第 2 章 压缩感知的理论框架 .....</b>	<b>5</b>
2.1 压缩感知理论的原理 .....	5
2.2 压缩感知理论的主要内容 .....	6
2.2.1 信号稀疏变换 .....	6
2.2.2 设计观测矩阵 .....	7
2.2.3 信号的重构 .....	10
2.3 压缩感知理论的应用 .....	11
2.3.1 信息采样问题 .....	11
2.3.2 分布式压缩感知理论 .....	11
2.3.3 理论应用 .....	11
2.4 本章小结 .....	12
<b>第 3 章 基于压缩感知理论的信号重构算法 .....</b>	<b>13</b>
3.1 梯度投影法 .....	14
3.1.1 梯度投影算法及其几何构型 .....	14
3.1.2 算法性能分析 .....	15
3.2 正交匹配追踪算法 .....	18
3.2.1 匹配追踪 .....	18
3.2.2 正交匹配追踪算法 .....	20
3.2.3 性能分析 .....	22

3.3 其它算法 .....	27
3.4 本章小结 .....	28
<b>第 4 章 优化的正交匹配追踪算法 .....</b>	<b>29</b>
4.1 基于正交匹配追踪的算法优化方案 .....	29
4.2 算法描述 .....	32
4.3 结果与分析 .....	33
4.4 与正交匹配追踪算法的对比 .....	37
4.5 本章小结 .....	38
<b>第 5 章 总结与展望 .....</b>	<b>40</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>42</b>
<b>致 谢 .....</b>	<b>47</b>
<b>摘 要</b>	
<b>ABSTRACT</b>	

# 第 1 章 绪论

## 1.1 研究的目的是和意义

众所周知，传统的信号处理框架的基础是傅立叶变换，手段是频谱分析，准则为奈奎斯特采样定理，这是几乎所有的视听消费电子、医疗影像设备、收音机接收器、雷达通讯等系统所必须遵循的金科玉律。根据奈奎斯特采样定理的规定：信号的采样频率不得低于信号带宽的 2 倍，否则就会出现信息的丢失。因此在宽带模拟数字化过程中往往需要非常高的采样率，同时又要针对获取的大量原始采样信息进行数据压缩和传输，这就对存储资源、传输资源和计算资源都造成了极大程度的浪费。同时，由于在实际应用中电子器件（如 A/D 转换器等）的物理性约束问题，提高采样频率的代价极其巨大。另一方面，随着现代信息技术的高速发展和人们对信息数据量的需求的不断增加，对传统的信号处理框架要求的采样和处理速度都提出了更高的要求，于是我们提出一个新问题：能否建立一个新的信号处理框架，在保证信息没有损失的同时用远低于奈奎斯特采样定理所要求的采样速率对信号进行采样，并且能够精确的恢复信号？假如这个问题得到解决，就可以显著的减小数据处理、传输和存储的代价，进一步降低信号处理的时间成本和器件成本。

在 2004 年，D. Donoho<sup>[1]</sup>和 E. Candès、J. Romberg、T. Tao<sup>[2]</sup>针对稀疏性信号，在信号逼近和稀疏分解等理论的基础上建立了压缩感知（Compressive Sensing or Compressive Sampling, CS）理论框架，该理论在随后的几年间迅速发展，从而为解决上述问题奠定了坚实的理论基础。与传统方式不同，压缩感知理论框架是以空间变换为基础，以随机观测矩阵为手段，以优化求解作为信号恢复的方法。压缩感知理论可以用比传统方法更少的采样数目去精确恢复特定的信号或图像，避免了大量的数据集合而且能使我们在获取信息的同时直接建立数据压缩。

压缩感知理论指出，如果某个集合中只有少量的非零元素，我们就称这个集合具有稀疏性，如果一个自然信号在某个变换基上的分解表示结果呈现出稀疏性，我们就称这一信号具有稀疏性。只要信号在某个特定的变换域内具有稀疏性，

那么就可以通过一个与变换基不相干的观测基将信号投影到低维空间中, 然后通过对这个优化问题的求解就可以高精度重构出原始信号。换言之, 压缩感知理论是一种非常简单的信号采集协议, 可以在一个低频率上采样, 之后根据不完备的数据运用计算能力进行重建, 进而直接把数据压缩构造成数据采集。在这个理论体系中, 采样速率取决于信号内部的结构内容, 而非带宽。

如果一个信号在某个变换空间中具有稀疏表示形式, 那么我们就可以脱离奈奎斯特采样定理框架的限制。这不仅仅能降低系统设计和实现的难度, 也能降低对采样设备的要求。这样, 就可以解决信号处理中的瓶颈问题, 提高资源利用效率。

稀疏信号在现实世界中其实是广泛存在的, 例如: 当选取特定的小波基时, 分段平滑信号的分解也呈现一定的稀疏性; 平滑信号在傅立叶基下的分解结果呈现稀疏性; 国际编码标准如 JPEG2000 和 MPEG4 所针对的音视频信号, 天文遥感图像和医学图像等也均呈现一定的稀疏性。因此, 研究信号的稀疏分解和压缩感知理论具有重大的实用价值和应用前景, 极有可能带来信号处理领域基本思想的根本性变革。

## 1.2 国内外相关领域的研究现状

从 2004 年压缩感知理论提出至今, 该理论得到了飞速发展。现有的关于压缩感知理论的研究成果几乎都来自欧美的学者, 国内对于它的研究还处于起步阶段。作为一个新生的理论, 关于压缩感知的学术论文还主要侧重理论上的证明和完善。目前, 压缩感知理论在信号恢复优化问题求解, 信号稀疏变换和采样观测矩阵的设计等几个方面都取得了一定进展。

在信号重构方面, 人们最早采用的是传统的最小化  $l_2$  范数作为约束, 然而对于这个优化问题求得的解通常并不具备稀疏性。随后相关学者又将注意力转移到以最小化  $l_0$  范数作为约束, 但是实践证明对此求解是一个 NP 难问题。针对这一问题, 大家又提出各种次优求解的算法例如最小化  $l_1$  范数的优化求解, 迭代贪婪算法, 组合算法等。在算法的计算复杂度和性能上都各有优劣。



由于压缩感知理论有着广泛的应用前景,随之而来的是相关理论的完善和实践应用的成果,理论上涉及到图像视频压缩、信号恢复、分布式压缩感知理论<sup>[3]</sup><sup>[4]</sup><sup>[3]</sup>、医学影像系统、超宽带雷达系统和光谱图像处理等方面。在硬件层面上,美国的 Rice 大学已经研制出了“单像素相机”<sup>[6]</sup><sup>[7]</sup>,它具备传统的成像器件所不具有的对图像波长的自适应能力。

## 1.3 主要工作和结构安排

### 1.3.1 主要研究工作

本文所涉及的是近些年刚刚提出并正在逐步完善过程中的压缩感知理论框架,这是一种新生的理论。它对能够稀疏表示的信号同时进行数据采集和数据压缩。相对于传统方法,压缩感知理论有着无可比拟的优势,现在关于它的研究也正在如火如荼的展开。目前,在压缩感知理论所涉及到的领域中,有很多问题极具研究价值,这里所研究的主要内容是信号的重构算法。

本文主要研究了现有的纯贪婪算法中的正交匹配追踪算法和基于最小化 $l_1$ 范数优化的梯度投影算法,对这两种极具代表性的算法进行算法研究,并根据实验仿真结果进行分析总结,之后对其它相关算法进行概括介绍。

随后的侧重点主要放在正交匹配追踪重建算法的优化上,围绕原有的算法展开研究工作,分析存在的不足和算法的局限性,并基于此提出新的解决方案,最后对优化后的算法性能和结果进行总结分析。

### 1.3.2 结构安排

基于前文所述,本文内容主要分为五个章节,结构如下:

第一章:绪论。本章主要介绍了本文研究的目的和意义,同时从宏观角度介绍了压缩感知理论在国内外的研究现状,最后对本文主体内容和结构的安排进行详细说明。

第二章：压缩感知的理论框架。首先介绍了压缩感知理论的原理，进而对信号的稀疏变换、观测矩阵的设计和信号重构三个主要方面的内容进一步展开详述，最后，对该理论在应用层面进行详细介绍。

第三章：基于压缩感知理论的信号重构算法。本章对信号重构中现有的三大类算法进行综合概述，着重详细分析了梯度投影算法和正交匹配追踪算法的原理、内容和性能并应用 MATLAB 进行仿真，并分析结果。

第四章：优化的正交匹配追踪算法。针对传统的匹配追踪算法的局限和不足之处，进一步展开研究该算法。根据此算法存在的问题，提出了一种新的优化方案，并在 MATLAB 上进行实验仿真，得出实验数据。最后和原有的方案进行对比研究并做出总结分析。

第五章：总结与展望。对本文所作的研究工作进行总结，针对不足之处提出改进，并对未来的研究工作进行一系列的展望。

## 第 2 章 压缩感知的理论框架

### 2.1 压缩感知理论的原理

数字信号处理领域的理论基础是傅立叶变换，在此之后出现的小波变换和多尺度分析则将这一领域带到新的高度。然而随着现代电子和信息技术的飞速发展，人们所要求的信息量的海量增加和采样速度的飞速提高，传统方式在信号带宽、存储和采样器件等方面诸多的限制日渐显现。此时，压缩感知理论应运而生，该理论在不丢失原始信号信息的同时，将采样和压缩同步完成，既节约了存储和传输资源，又节约了大量的采样资源。图 2.1 和图 2.2 分别为传统的信号处理框架和压缩感知理论的框架。

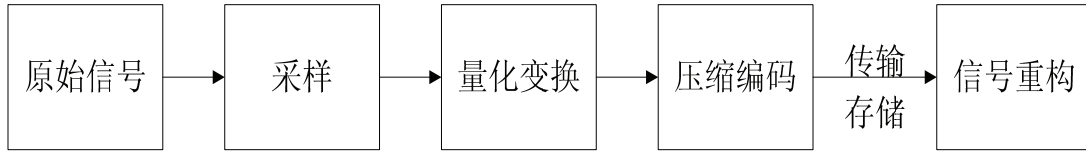


图 2.1 传统的信号采样压缩过程

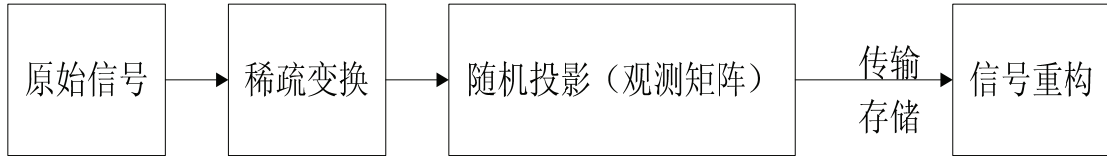


图 2.2 压缩感知理论框架

传统的信号压缩编码思想为：首先根据奈奎斯特采样定理对原始信号进行采样，然后将采样数据进行量化，将得到的量化数据进行编码压缩，去掉冗余，最后通过信道进行传输和存储。而在压缩感知理论中则不同，它将采样和压缩同步进行，仅仅通过很少的采样值，就可以精确的重构信号，同时又节省了大量的采样和存储资源。

压缩感知理论表示<sup>[1][8]</sup>：假设一个信号为  $X$ ，长度为  $L$ 。如果在一个正交基  $\Psi$  上有稀疏的系数，将这个系数投影到另一个与正交基  $\Psi$  不相干的观测基  $\Phi$ ： $M \times L$ ， $M < L$  上，就可以得到观测集合  $a$ ： $K \times 1$ 。即： $P_{CS} X = a$ ，此处  $P_{CS} = \Phi \Psi^T$ 。利用观测集合  $a$ ，通过完成如下的优化问题：

$$\min \|\Psi^T X_{CS}\| \quad \text{Subject to } P_{CS} X_{CS} = \Phi \Psi^T X_{CS} = a \quad (2.1)$$

就可以精确恢复原始信号  $X_{CS}$ 。当信号是实信号时，式(1)求重构信号的过程就是求解一个凸优化问题的过程，可以表示成一个线性规划问题。虽然在这个过程中的采样点数远远小于奈奎斯特采样定理所要求的数目，我们依然可以把恢复误差控制在：

$$\|X_{CS} - X\| \leq C_Q \cdot R \cdot (M / \log(L))^{1/2-1/Q} \quad (2.2)$$

## 2.2 压缩感知理论的主要内容

压缩感知理论体系主要包括以下三个方面的内容：（1）对于信号  $f \in R^N$ ，需要能找到一个合适的正交基  $\Psi$ ，使该信号在  $\Psi$  上可以得到稀疏表示，即信号的稀疏分解；（2）需要设计一个与变换基  $\Psi$  不相干的平稳的观测矩阵；（3）需要设计一个重构算法，用来精确的恢复信号。

### 2.2.1 信号稀疏变换

利用压缩感知理论进行信号处理分析的前提是信号必须在某个特定的正交空间上具有稀疏性，信号的稀疏性与所选择的正交空间特性密切相关。对于一个特定信号，需要选择一个最合适的稀疏变换域，使其能够有最佳的稀疏表示。

设  $X = [X(1), X(2), \dots, X(L)]^T$  是一维离散信号组成的列向量，则任意的一组  $L$  维向量可以用一个  $L \times 1$  维的向量基表示： $\{\psi_t\}_{t=1}^L$ ，假设这个向量基正交，则通过矩阵  $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_L\}$ ，信号  $X$  可以表示成：

$$X = \sum_{t=1}^L \beta_t \psi_t, \quad \text{即 } X = \Psi \beta \quad (2.3)$$

式中， $\beta_t = \langle X, \psi_t \rangle$ ， $\beta$  和  $X$  是  $L \times 1$  维矩阵， $\Psi$  为  $L \times L$  维矩阵，如果  $\beta$  中仅仅有  $K$  ( $K \ll L$ ) 个非零的系数（或取较大的值），而其他  $N-L$  个系数全部为零（或

取值很小), 则称  $X$  是  $K$ -稀疏的,  $\Psi$  为信号  $X$  的稀疏基。

通常情况下, 信号无法满足严格稀疏的条件 (即信号在稀疏域中只有  $K$  个非零系数)。通过选择一个合适的稀疏基  $\Psi$ , 使稀疏系数的个数最大限度的减少, 这样可以提高信号采集速度, 降低存储资源的占用率。

从傅立叶变换开始, 以及后来陆续出现的  $K$ -L 变换、小波变换和目前正处于研究热点的超小波变换, 所有的这些变换都是根据信号的结构特性来稀疏的表示它。在压缩感知理论中, 衡量一个变换基稀疏表示能力的标准是变换系数的衰减程度。

光滑信号的傅立叶系数和小波系数, 震荡信号的 Gabor 系数, 有界变差函数的全变差范数等都具有良好的稀疏性, 通过压缩感知理论就可以很好的恢复信号。

后来, 人们发现信号可以通过加入冗余来实现稀疏化, 因而出现一种被称为过完备原子库的冗余系统。这个过完备原子库中的原子个数要远大于信号长度, 并且最大程度的符合被逼近信号的内在结构。因此, 从原子库中我们可以找到具有最佳线性组合的一系列原子来表示目标信号。这种方法的稳定性好, 计算复杂度得到降低。

## 2.2.2 设计观测矩阵

在压缩感知理论中, 我们并非直接测量稀疏信号  $X$  本身, 而是通过变换基得到稀疏系数。同时, 将这组系数向量投影到另一个与变换基  $\Psi$  不相干的观测基  $\Phi$  上, 从而得到测量值  $z = \langle X, \varphi_i \rangle$ , ( $i=1, 2, \dots, M$ ), 即

$$z = \Phi X \quad (2.4)$$

此处,  $X$  为  $L \times 1$  维矩阵,  $z$  是  $M \times 1$  维矩阵,  $\Phi$  则为  $M \times L$  维测量矩阵。将式 (2.3) 代入式 (2.4) 中, 得到:

$$z = \Phi X = \Phi \Psi \beta = P_{CS} \beta \quad (2.5)$$

对于给定的  $z$ , 由于  $M \ll L$ , 求解式 (2.4) 是一个欠定问题, 一般情况下没有确定解。对此, E. Candès 等提出了存在确定解的充要条件: 即随机投影矩阵

$P_{CS}$  需要满足有限等距准则 (Restricted Isometry Property, RIP) <sup>[9]</sup>。在压缩感知理论中, 要使观测向量包含能保证完全重构原始信号的足够信息, 随机投影矩阵必须要满足统一的不确定性原则 (Uniform Uncertainty Principle, UUP), 它的核心内容即为上述的有限等距准则。

对于任意长度为  $L$  的  $K$ -稀疏信号  $X$ , 若存在常数  $\varepsilon_K \in (0,1)$ , 使得:

$$(1 - \varepsilon_K) \|X_\Gamma\|_2^2 \leq \|P_{CS_\Gamma} X_\Gamma\|_2^2 \leq (1 + \varepsilon_K) \|X_\Gamma\|_2^2 \quad (2.6)$$

成立, 则称矩阵  $P_{CS}$  满足  $K$  阶有限等距准则<sup>[10] [11]</sup>。式中,  $\Gamma \subset \{1, 2, \dots, L\}$ ,  $P_{CS_\Gamma}$  为随机投影矩阵  $P_{CS}$  的列向量由索引  $\Gamma$  所指示的子矩阵,  $X_\Gamma$  则是信号向量中所抽取的对应于索引  $\Gamma$  的子向量。

在此我们可以选择一个  $M \times L$  的高斯随机矩阵作为随机投影矩阵, 其中每一个值都服从  $N(0, 1/M)$  的正态分布。高斯随机矩阵几乎与任何稀疏信号都不相关。其它能满足 RIP 准则的常见的随机投影矩阵还包括二值随机矩阵、哈达码矩阵、局部傅立叶基等<sup>[10]</sup>。有相关文献提出两种随机投影矩阵, 即高斯矩阵和伯努利矩阵。

高斯矩阵:

$$H \in \mathbb{R}^{M \times L}: H(i,j) = \frac{1}{\sqrt{M}} h_{ij}, \quad h_{ij} \sim N(0, 1) \quad (2.7)$$

伯努利矩阵:

$$G \in \mathbb{R}^{M \times L}: G(i,j) = \frac{1}{\sqrt{M}} g_{ij}, \quad g_{ij} \sim \begin{pmatrix} 1, -1 \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

在这两个式子中,  $M = S_0 K \log(L/M)$ , 此处的  $L$  为信号长度,  $K$  为稀疏度。

在保证观测数目恒定的前提下, 有学者对随机投影矩阵提出了改进方案, 引入了非常稀疏投影的概念<sup>[12] [13]</sup>。非常稀疏投影矩阵是一种服从亚高斯分布的随机矩阵。它在满足有限等距准则的同时也具备极为稀疏的矩阵结构, 提高了重建的精度和速度。作为稀疏随机投影的一种广义表示, 非常稀疏随机投影的随机变量分布为:

$$\mathbf{X} \sim \left( \frac{\sqrt{c}}{2c}, 0, -\frac{\sqrt{c}}{2c} \right) \quad (2.9)$$

当  $c > 3$  时，我们称  $\mathbf{X}$  服从非常稀疏投影分布，对于一个长度为  $L$  的信号，通常选取  $c$  为  $\sqrt{L}$  或者  $L/\log L$ 。

在此之后，D. Donoho 等提出的结构化随机矩阵<sup>[14]</sup>具备更优异的特性：它与几乎所有的正交矩阵都是非相干的，可以视为是融合了伯努利矩阵，随机高斯矩阵和局部傅立叶矩阵优点的混合模型。

然而，判断给定的随机投影矩阵是否符合约束等距准则是一个组合复杂度问题，能否找到一种新的替代方法，进一步降低问题的复杂度，是构造观测矩阵的关键所在。于是非相干性的概念被提出，即约束等距准则的等价条件是变换基  $\Psi$  与观测基  $\Phi$  非相干<sup>[15]</sup>。定义二者的相干性为：

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq k, j \leq n} |\langle \Phi_k, \Psi_j \rangle| \quad (2.10)$$

通常情况下，这种一致性测量了基  $\Phi$  和  $\Psi$  中任意两个元素之间的最大相关性，如果基  $\Phi$  和  $\Psi$  包含相关的元素，相干性就大，否则就小。至于到底有多大或者多小，就要看  $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{n}]$  的大小了。下文给出几种不相干的例子<sup>[8]</sup>：

(1)  $\Phi$  和  $\Psi$  分别是规范基和傅立叶基， $\varphi_t(t) = \delta(t - k)$ ， $\psi_t(t) = n^{-1/2} e^{j2\pi t/n}$ 。

$\Phi$  是在时域和空域上都符合经典采样方案的采样矩阵，故  $\mu(\Phi, \Psi) = 1$ ，得到最大的非相干性。进一步而言，二者不仅仅在一维中有最大的非相干性，在其它如二维三维中也是如此。

(2)  $\Phi$  和  $\Psi$  分别是噪声矩阵和小波基，噪声矩阵和 Haar 小波、D4 小波和 D8 小波之间的相干性分别约为  $\sqrt{2}$ ，2.2 和 2.9。事实上，噪声矩阵和任何的稀疏基都有最大的非相干性。

(3) 随机矩阵和任何一个固定基  $\Psi$  在很大程度上都是非相干的。

目前，在压缩感知理论中对观测矩阵的约束相对是比较宽松的，D. Donoho 提出了三个观测矩阵必须具备的条件<sup>[16]</sup>，具备这三个条件的一致分布的随机矩阵都可以作为观测矩阵，这与有限等距准则的结论基本一致。

### 2.2.3 信号的重构

信号重构是压缩感知理论框架中最为关键的部分。当随机投影矩阵  $P_{CS}$  满足有限等距准则时，可以通过对式 (2.5) 求逆解得到稀疏系数，然后代入到式 (2.3) 中，将  $K$ -稀疏的信号  $X$  从  $M$  维的随机投影值中精确的恢复出来。

定义一个向量  $X=[X(1), X(2), \dots, X(L)]$  的  $L$ -范数为：

$$\|X\|_l = (\sum_{i=1}^L |x_i|^l)^{1/l} \quad (2.11)$$

当  $l=0$  时得到 0-范数，表示向量  $X$  中非零项的数目。

信号重构最直接的方法就是在  $l_0$  范数下求解：

$$\min_{\beta} \|\beta\|_{l_0} \quad \text{s. t.} \quad z = \Phi\Psi\beta \quad (2.12)$$

但是，基于  $l_0$  范数的优化问题是一个 NP 问题，计算量大得根本无法直接求解。从数学角度分析，这和稀疏分解问题非常相似，所以现有的稀疏分解算法可以直接应用到信号重构中。通常情况下，我们将其转化为在  $l_1$  范数下求解，这就将一个非凸优化问题转化为凸优化的问题。

$$\min_{\beta} \|\beta\|_{l_1} \quad \text{s. t.} \quad z = \Phi\Psi\beta \quad (2.13)$$

最小化  $l_1$  范数的解具备唯一性和稳健性。利用  $l_1$  范数作为稀疏求解可以追溯到几十年前，最早的应用是反射地震学。常用的算法包括基追踪算法，凸集交替投影算法，梯度投影法<sup>[17]</sup>、内点迭代法<sup>[18]</sup>等。然而，最小化  $l_1$  范数并不是恢复稀疏结果的唯一方法，其他方法也已经提出，比如贪婪算法和组合算法。

贪婪算法是通过每次迭代过程中的局部最优解来实现对原始信号的逼近。包括匹配追踪算法，以及在此基础上发展起来的正交匹配追踪和改进算法。该算法在正交方向寻找非零系数，对于算法的收敛速度有很好的提高。此外，由此衍生而出的算法也层出不穷，但都是基于匹配追踪中的原子匹配准则，在算法性能上有不同程度的提高。组合算法则是要求对原始信号的采样可以支持快速分组测试重建，适用于针对大规模数据的问题，重构速度有时很快。



## 2.3 压缩感知理论的应用

### 2.3.1 信息采样问题

与传统的信号处理理论方法不同，应用压缩感知理论，在对信息进行采样的同时也完成了压缩，所以采样的信息量相对大量减少。目前，有相关学者提出了模拟-信息采样理论（Analog-to-Information）<sup>[5][19][20]</sup>。图 2.3 为模拟信息转换器（AIC）的系统设计框图。到目前为止，对该理论的研究仍处于初级阶段，研究内容涉及到了电路设计，滤波器设计等多个方面。

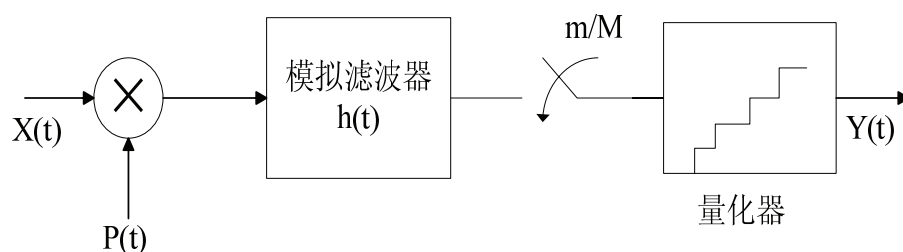


图 2.3 AIC 原理框图

### 2.3.2 分布式压缩感知理论

2006 年，国外学者研究并提出了分布式压缩感知理论，将压缩感知理论推广到多信号的应用环境中。通过利用信号的互相关性和内相关性对多信号完成重构，能够大量减少观测所需的样本。文献<sup>[4]</sup>和<sup>[5]</sup>详细阐述了该理论的系统框架，分析了相关的重构算法和重构误差。

分布式压缩感知理论为分布式信号处理领域提供了一种崭新的思维，从某种程度上讲，该理论是一种分布式信源的压缩框架，可以应用到各种复杂的传感器和传输网络当中。

### 2.3.3 理论应用

在系统成像方面，压缩感知理论的出现可能影响到精密昂贵的成像器件的设计和应用。在天文遥感图像和医疗影像图像<sup>[21][22]</sup>方面，有望采用更少的随机观测样本就可能高精度的重构目标信号。传统相机成像时所采集的大量像素也可

能不再需要，取而代之的是基于压缩感知理论的单像素相机。这种相机是由美国 RICE 大学研制，采用数字微镜阵列 (Digital Micromirror Array) 完成线性投影的光学运算，具备传统成像器件所没有的对图像波长的自适应能力。在宽带信号分析中，可以用远低于奈奎斯特率的采样速率采集信号，进而突破物理器件在性能上的限制。

在信号处理领域，观测矩阵  $\Phi$  是随机矩阵，每个测量值单独捕捉信号  $X$  信息中的一部分。根据统一的不确定原理 (UUP) 和有限等距准则 (RIP)，所有的测量量度在重构信号  $X$  时做出同样的贡献。换言之，每个测量值的重要性是一致的。这种独特的性质将会使得压缩感知理论在通信领域非常重要 (例如信道编码等)。

另外，压缩感知理论还有很多潜在的应用：

(1) 信源编码：应用压缩感知理论可以设计快速纠错码，对于通讯系统，雷达成像系统等具有重要意义

(2) 图像压缩：对具有稀疏性的原始信号进行有效压缩，从而减少冗余信息，提高存储、计算和传输资源的利用率。

(3) 基因科学：在该领域，运用压缩感知理论可能从很少的观测样本中来推断大量基因信息。

(4) 挖掘数据：在数码成像，扫描仪等数字成像系统中，有时候很难取得模拟信号在所有离散时间的全部采样值，应用压缩感知理论就可以在不完备数据的情况下完成精确重构。

可以预见，伴随着压缩感知理论不断发展，它必将广泛应用于越来越多的领域。

## 2.4 本章小结

本章首先介绍了压缩感知理论的原理，随后针对三个主要内容，即信号的稀疏变换、观测矩阵的设计和信号重构进行一一详细讲解，最后简述了该理论自问世以来的初步应用和潜在应用，为接下来的研究工作奠定理论基础。

### 第3章 基于压缩感知理论的信号重构算法

一种快速有效、性能可靠的信号重构算法是压缩感知理论的核心部分，对于这部分内容，许多卓有成效的研究工作正在陆续展开。从压缩感知理论提出至今，已经出现了多种稀疏信号的重构算法。重构算法主要可以归结为三大类：贪婪算法，凸松弛算法和组合算法。贪婪算法主要包括：匹配追踪算法（Matching Pursuit, MP）、正交匹配追踪算法<sup>[23]</sup>（Orthogonal Matching Pursuit, OMP）、树形匹配追踪（Tree Matching Pursuit, TMP）、分段式正交匹配追踪算法<sup>[24]</sup>（Stagewise Orthogonal Matching Pursuit, StOMP）、正则化正交匹配追踪算法<sup>[25]</sup>（Regularized Orthogonal Matching Pursuit, ROMP）、稀疏自适应匹配追踪算法<sup>[26]</sup>（Sparsity Adaptive Matching Pursuit, SAMP）等；凸松弛算法主要包括基追踪算法（Basis Pursuit, BP）、最小全变差法（Total Variation, TV）、梯度投影法<sup>[17]</sup>（Gradient Projection For Sparse, GPSR）、内点迭代法<sup>[18]</sup>、凸集交替投影算法（Projections onto Convex sets, POCS）等；组合算法主要包括：链式追踪算法（Chaining Pursuit, CP）、HHS 追踪算法等。表 3.1 给出了用于信号重构的一些相关算法的性能比较。

表 3.1 稀疏信号重构相关算法性能

信号重构算法	观测样本数目	算法的计算复杂度
最小化 $\mathbf{l}_0$ 范数	$K + 1$	NP 完全问题
最小化 $\mathbf{l}_1$ 范数	$K \log_2 \left(1 + \frac{N}{L}\right)$	$\mathbf{L}^3$
正交匹配追踪	$2K \log_2 L$	$\mathbf{LK}^3$
分段式正交匹配追踪	$K \log_2 L$	$L \log_2 L$
树形匹配追踪	$2K \log_2 L$	$2^b K^3$
链式追踪	$K \log_2 L$	$K \log_2^2 L \log_2^2 L$

下文我们将主要研究基于最小化 $\mathbf{l}_1$ 范数的梯度投影法和贪婪算法中的正交匹配追踪算法，并对其它算法做出简单介绍。

### 3.1 梯度投影法

重构信号的过程可以视为是求解一个优化问题的过程。从数学角度看，这和稀疏分解问题类似，所以现有的稀疏分解算法可以直接应用到信号重构中。而基于 $l_0$ 范数的优化问题是一个 NP 问题，一般情况下我们都将其转化为在 $l_1$ 范数下求解。基于最小化 $l_1$ 范数的优化问题实质上是一个凸优化问题，可以转换为一个线性规划问题进行求解，这里主要包括基追踪算法(BP)、梯度投影法(GPSR)、凸集交替投影算法(POCS)、内点迭代法等

梯度投影法是基于最小化 $l_1$ 范数求解的重构算法。它的重建效果相对良好，而且有着较快的运行速度。该算法的总体思路是从可行性的点出发，顺沿着下降方向进行可行性搜索，以此求出新的可行性点使目标函数值降低。当所选择的出发点在可行性区域内部的时候，搜索方向是负梯度。当所选择的出发点在可行域的边界时，则将此点所处的负梯度投影到矩阵空间。

#### 3.1.1 梯度投影算法及其几何构型

首先我们假设一个线性的矩阵方程：

$$M_0 x = y \quad (3.1)$$

则 $x$ 可以通过对下述问题求解得到：

$$\min_x L(x) = \frac{1}{2} \|M_0 x - y\|_2^2 \quad (3.2)$$

基于梯度算法可以写成：

$$x^{i+1} = x^i - u^i \nabla L(x^i) \quad (3.3)$$

式中， $u^i$ 为迭代步长且：

$$u^i \nabla L(x^i) = N_0^+ (N_0 x^i - y) \quad (3.4)$$

梯度法设置 $u^i$ 到一个小常数。最速下降法设置 $u^i$ 为：

$$u^i = \frac{\langle \nabla L(x^i), \nabla L(x^i) \rangle}{\langle \nabla L(x^i), N_0^+ N_0 \nabla L(x^i) \rangle + \varepsilon} \quad (3.5)$$

在每次迭代过程中， $R^i = N_0 x^i - y$  都最大限度地减少残留分量。此处， $\varepsilon$  是用来避免分母为零。对于牛顿法， $u^i$  是作为一个常数矩阵：

$$u^i = (N_0^+ N_0 + \varepsilon I)^{-1} \quad (3.6)$$

此处的  $\varepsilon$  是用来避免  $u^i$  接近奇异矩阵。

接下来假设  $y_{j,k}$  是一个  $M \times M$  的图像的像素，在第  $j$  行和第  $j$  列 ( $1 \leq j \leq M$  且  $1 \leq k \leq M$ )。稀疏图像的凸优化问题可以转换为：

$$\min_x H(y) \equiv L(y) + \lambda \|x\|_1 \quad (3.7)$$

式中， $\|x\|_1 = \sum_{j,k} y_{j,k}$ 。因为  $|y_{j,k}|$  在原点不可微，所以我们可以定义为一个新的梯度如下：

$$\nabla_{j,k} H(y) = \begin{cases} \nabla_{j,k} L(y) + \lambda \text{sign}(y_{j,k}), |y_{j,k}| \geq \varepsilon \\ \nabla_{j,k} L(y) + \lambda, |y_{j,k}| < \varepsilon, \nabla_{j,k} L(y) < -\lambda \\ \nabla_{j,k} L(y) - \lambda, |y_{j,k}| < \varepsilon, \nabla_{j,k} L(y) > \lambda \\ 0, |y_{j,k}| < \varepsilon, |\nabla_{j,k} L(y)| \leq \lambda \end{cases} \quad (3.8)$$

随即梯度投影算法可以写成：

$$y_{j,k}^{i+1} = y_{j,k}^i - u_k^i \nabla_{j,k} H(y) \quad (3.9)$$

其中  $j$  和  $k$  分别表示第  $i$  步迭代的行索引和列索引。对于最速下降法，参数  $\lambda$  可以作为一个小的常数 ( $\lambda = 0.001 - 0.01$ )。但对牛顿法，参数  $\lambda$  必须随着迭代步骤的增加逐渐减少 ( $\lambda^{i+1} = (0.99 - 0.999) \times \lambda^i$ )。

### 3.1.2 算法性能分析

这里我们应用梯度投影算法作为压缩感知理论中的图像重构算法。首先在观测矩阵的选择上我们使用高斯随机矩阵，随后利用离散傅立叶变换对图像进行处理。最后对图像进行重构，得到实验图像数据。

如图3.1表示对  $256 \times 256$  的 Camera man 图像进行重构的效果图，采样频率分别为 0.6、0.4 和 0.2；如图3.2表示对  $256 \times 256$  的 Lifting body 图像进行重构的效果图，采样频率分别为 0.6、0.4 和 0.2；如图3.3表示对  $256 \times 256$  的 Rice 图像进行重构的效果图，采样频率分别为 0.6、0.4 和 0.2。



Camera man原始图像



采样频率为0.6



采样频率为0.4

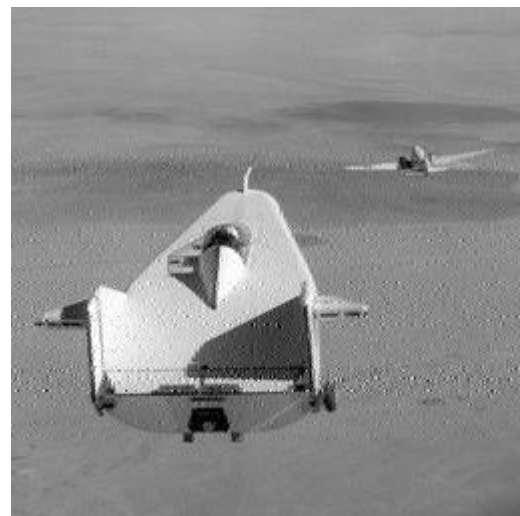


采样频率为0.2

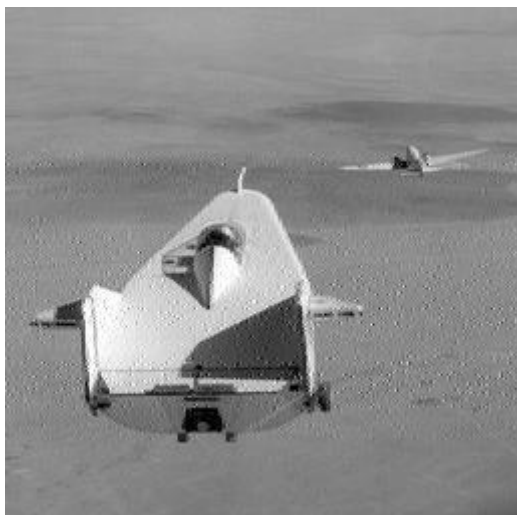
图3.1 梯度投影法的Camera man图像重构效果图



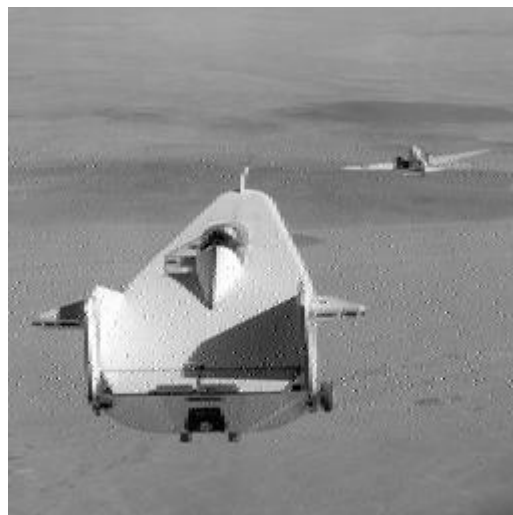
Lifting body 原始图像



采样频率为0.2

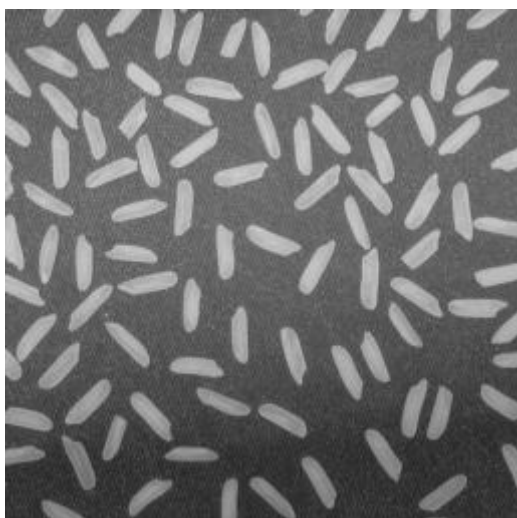


采样频率为 0.4

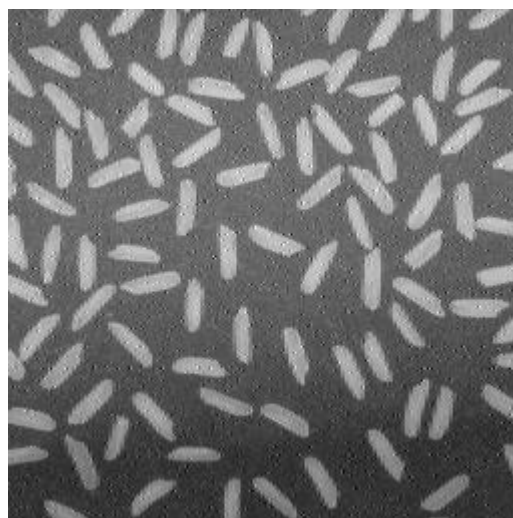


采样频率为 0.6

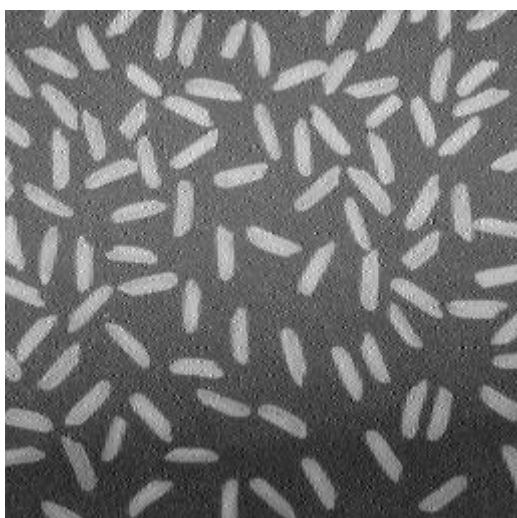
图3.2 梯度投影法的Lifting body图像重构效果图



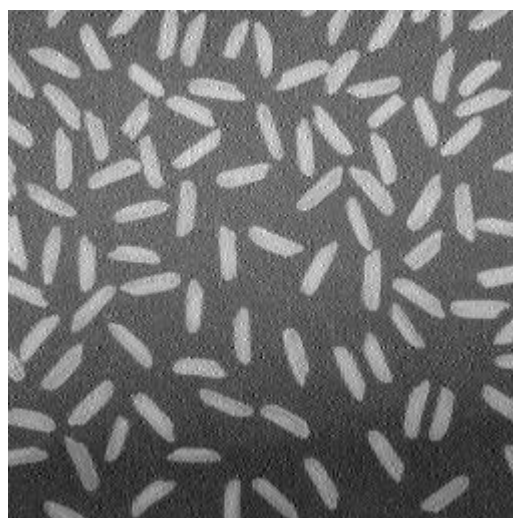
Rice 原始图像



采样频率为 0.6



采样频率为 0.4



采样频率为 0.2

图3.3 梯度投影法的Rice图像重构效果图

在表3.2中，给出了三种图像在不同采样频率下的峰值信噪比（PSNR）值，从这里我们可以对不同图像在不同采样频率下的重构效果有一个直观的认识。

表3.2 梯度投影法在不同图像、不同采样频率下的峰值信噪比

采样频率	0.6	0.4	0.2
256的Camera man	31.38	27.43	22.17
256的Lifting body	27.23	22.14	17.15
256的Rice	30.12	26.05	20.91

根据图3.1、图3.2和图3.3的图像对比，可见应用梯度投影算法进行图像处理时在总体上讲重构效果比较不错，保持较高采样频率时的重构质量也有所保证。另外，它在重构时间方面的表现非常出色，十几秒即可以重构出一幅 $256 \times 256$ 的图像。同时，梯度投影法可以很方便的运用于各种应用层面。然而它的缺陷在于随着采样频率的不断下降，重构的图像质量也急剧的下降。概括而言，它在图像的重构效果和运算时间上均有一定程度的可取之处，算法简单易用。

## 3.2 正交匹配追踪算法

### 3.2.1 匹配追踪

匹配追踪算法是一种迭代式的贪婪算法。该算法在每一次迭代的过程当中，从原子库中选择一个关于目标信号结构能最佳匹配的原子，进行迭代逼近。最后，经过有限次数的迭代后就可以收敛，只用少量原子就能够精确表示原始信号。算法流程如图3.1所示。



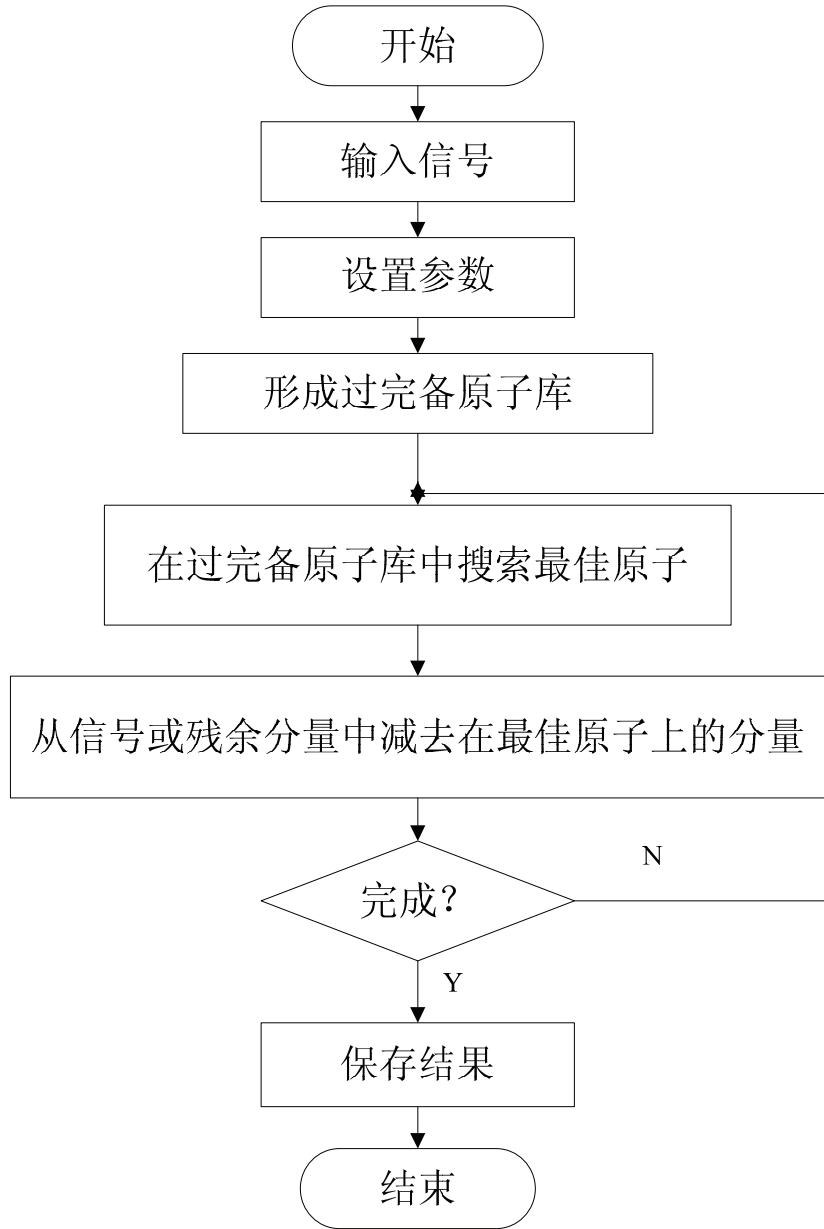


图 3.4 匹配追踪算法流程图

设  $\Gamma = \{s_y\}$  为一个过完备原子库，其中所有的原子范数均为 1，设定初始值  $B_0 = a$ ，接下来将该信号进行分解：

$$B_0 = \langle s_{y_0}, B_0 \rangle s_{y_0} + B_1 \quad (3.10)$$

式中， $\langle s_{y_0}, B_0 \rangle s_{y_0}$  是  $B_0$  对于  $s_{y_0}$  的投影值， $B_1$  为残余分量。由于  $s_{y_0}$  和  $B_1$  是正交的，因此得到下式：

$$\|B_0\|^2 = \left| \langle s_{y_0}, B_0 \rangle \right|^2 + \|B_1\|^2 \quad (3.11)$$

为了使残余分量  $B_1$  的能量尽可能最小，我们就必须令投影值  $\langle s_{y_0}, B_0 \rangle$  极大化。投影值  $\langle s_{y_0}, B_0 \rangle$  的极大化即表示  $s_{y_0}$  是信号所在空间和向量方向最为靠近的单位向量，也就是说， $s_{y_0}$  是过完备原子库中和信号最为匹配的单位向量，这就是所谓“匹配”的意思。我们对残余分量同样处理并规定：

$$\left| \langle s_{y_m}, B_m \rangle \right| = \sup \left| \langle s_y, B_m \rangle \right| \quad (3.12)$$

$$a_{m+1} = a_m + \langle s_{y_{m+1}}, B_{m+1} \rangle s_{y_{m+1}} \quad (3.13)$$

$$B_{m+1} = a - a_{m+1} \quad (3.14)$$

依次迭代到第  $N$  步时，得到如下的逼近：

$$a = \sum_{m=0}^{N-1} \langle s_{y_m}, B_m \rangle s_{y_m} + B_N \quad (3.15)$$

其中，残余分量的范数（即逼近误差）满足下式：

$$\|B_N\|^2 = \|a\|^2 - \sum_{m=0}^{N-1} \left| \langle s_{y_m}, B_m \rangle \right|^2 \quad (3.16)$$

### 3.2.2 正交匹配追踪算法

正交匹配追踪算法承袭了匹配追踪算法中的原子匹配准则，匹配追踪算法仅仅能够保证信号的残余分量与每步迭代所选择的原子正交，正交匹配追踪算法则对所选择的所有原子先利用施密特正交化方法进行处理，这就保证了每次迭代之后，信号残余分量都能与之前选择的原子正交，从而加快收敛速度。

正交匹配追踪算法的核心思想为：以迭代的方式选择观测矩阵的列向量，令每次迭代过程中选择的列向量与当前的残余向量尽可能相关，在测量向量中去掉这以相关部分，进行迭代运算直至达到精度要求。

正交匹配追踪算法的空间结构如图 3.2 所示。通过采用迭代式框架来实现正交匹配追踪能够获得比基本方式更快的运算速度。假设一个信号  $x$ ，它向观测矩阵的列向量集  $\phi_M$  正交投影得到投影集合  $P$ ，在  $M$  次迭代后得到近似信号  $x_{CS} = P(x)$ ，残余分量为  $b = x - x_{CS}$ ，正交匹配追踪的迭代框架如下式：

$$x_{M+1} - x_M = (\Phi_M \Phi_1) \begin{pmatrix} \Delta Y_M \\ Y_1 \end{pmatrix} = P_{(\Phi_M, \Phi_1)} B_M \quad (3.17)$$

此处， $\Phi_M$  为  $M$  次迭代选择的  $M$  个列向量组成的矩阵集合， $\Phi_1$  则为  $M+1$  次迭代所选择的列向量， $x_M$  代表  $N$  次迭代之后的近似信号， $B_M$  代表信号的残余分量。上式的意义为：每次迭代之后近似信号的增量和信号残余分量向所选择的原子的正交投影相等。式 (3.17) 同时表明，正交匹配追踪是一个逐次正交投影的算法框架。它通过代入每次迭代后更新的坐标，得到更新的近似信号：

$$x_{M+1} = (\Phi_M \Phi_1) x_{M+1} \quad (3.18)$$

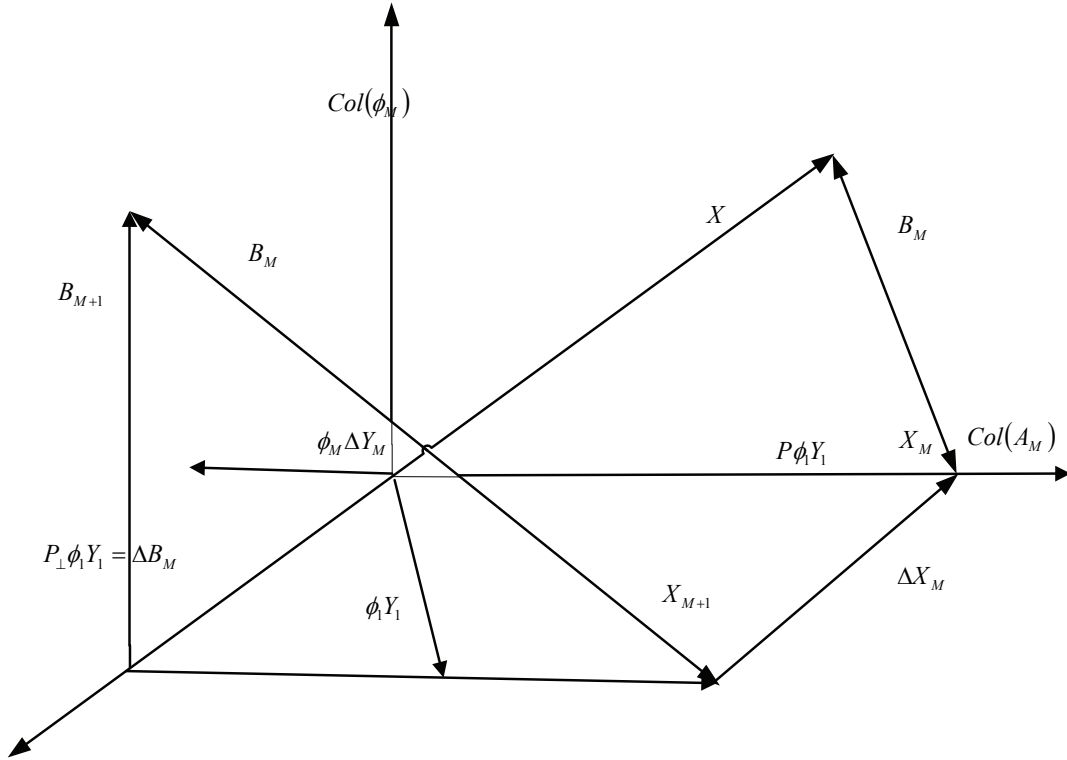


图 3.5 正交匹配追踪算法的空间结构

正交匹配追踪算法的具体描述如下：

首先设定一个输入信号  $X$ ，观测矩阵为  $\Phi$ ，稀疏度为  $K$ ；输出信号  $X$  的  $K$ -稀疏重构近似信号是  $x$ ；设定初始值  $B_0 = a$ ，迭代次数  $i=1$ ，索引集合为  $Q_i$ 。

(1) 找出残余向量 和观测矩阵的列向量内积最大值所对应的索引值，即

$$t = \arg \max_{j=1,2,\dots,n} \left| \langle B_{t-1}, \varphi_j \rangle \right|;$$

- (2) 根据索引值更新索引集合，记录搜索到得的重建原子集合；
- (3) 计算索引集合所张成空间的正交投影 P；
- (4) 更新残余向量  $B_t = a$ ， $i=i+1$ ；
- (5) 判断 i 是否大于 K，是则停止迭代，否则继续执行第一步；
- (6) 得到近似信号 x，算法结束。

### 3.2.3 性能分析

正交匹配追踪算法能够实现每次迭代的最佳原子选择，使收敛速度明显加快，作为一种基础的纯贪婪算法，该算法对于后来的各种改良算法和新提出的算法都具有重要的指导意义。

首先我们选取一组一维正弦信号，设：

$$y = 0.1\sin(2\pi \times 200t) + 0.3\sin(2\pi \times 50t) + 0.9\sin(2\pi \times 400t) + 0.6\sin(2\pi \times 100t)。$$

在 MATLAB 平台上，运用正交匹配追踪算法对该信号进行重构。图 3.6 为原始信号和重构信号的效果对比，图 3.7 则为二者的误差分析。如图所示，二者的相对误差在  $6.6397e-014$  左右，绝对误差可以控制在  $8 \times 10^{-14}$  以内，由此看出，在一位信号的重构处理方面，正交匹配追踪算法的性能稳定，重构质量很好。

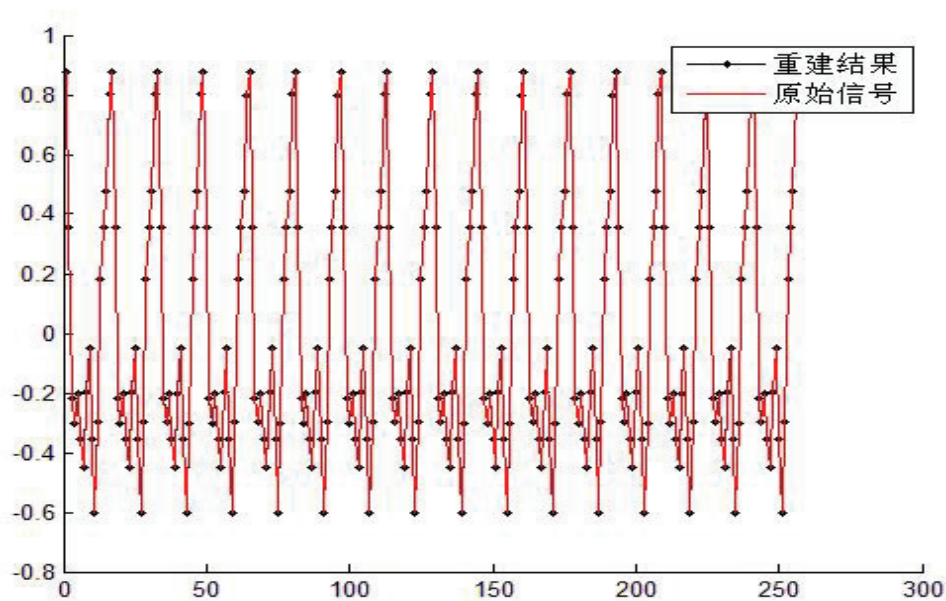


图 3.6 一维信号重构效果对比图

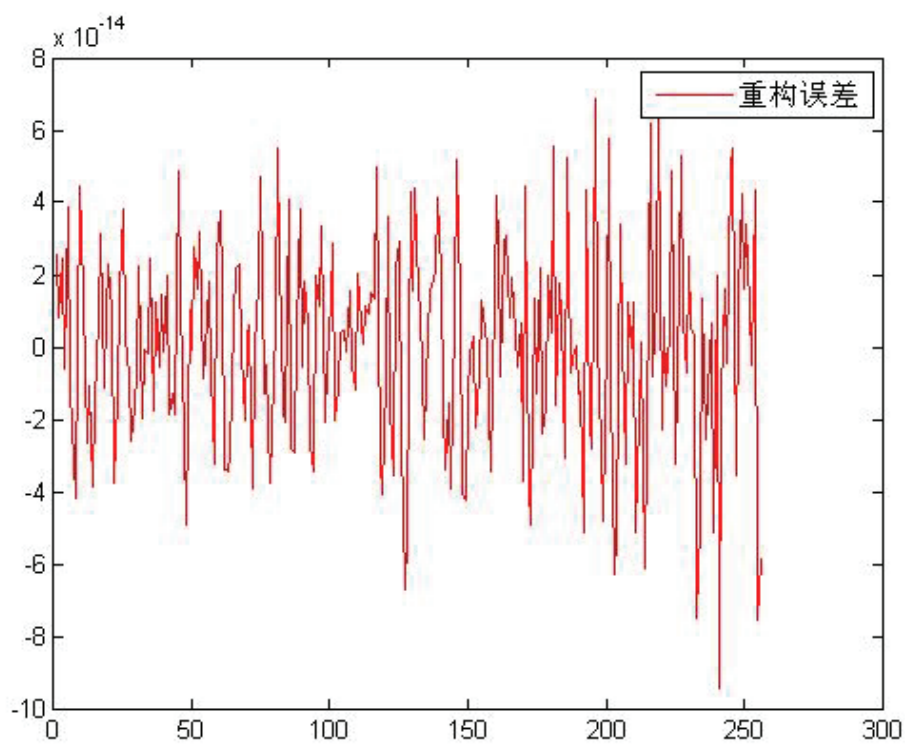


图 3.7 一维信号重构误差

对于二维图像的重构，首先我们应用离散傅立叶变换对目标图像进行处理，然后应用正交匹配追踪算法进行图像重构。

如图3.8表示对 $256 \times 256$ 的Camera man图像进行重构的效果图，采样频率分别为0.6、0.4和0.2；如图3.9表示对 $256 \times 256$ 的Lifting body图像进行重构的效

果图，采样频率分别为0.6、0.4和0.2；如图3.10表示对 $256 \times 256$ 的Rice图像进行重构的效果图，采样频率分别为0.6、0.4和0.2。



Camera man原始图像



采样频率为0.2



采样频率为0.4



采样频率为0.6

图3.8 正交匹配追踪算法的Camera man图像重构效果图



Lifting body 原始图像



采样频率为 0.6

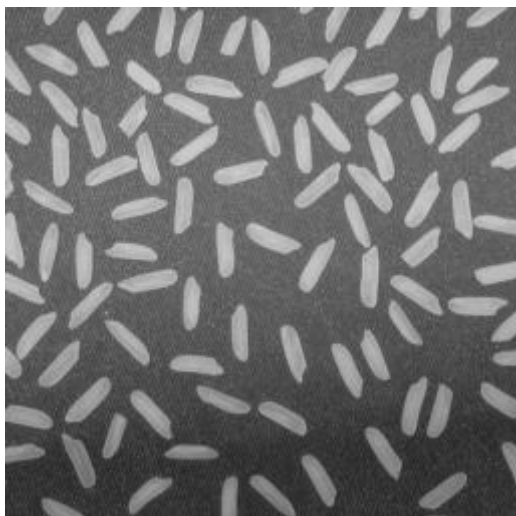


采样频率为 0.4

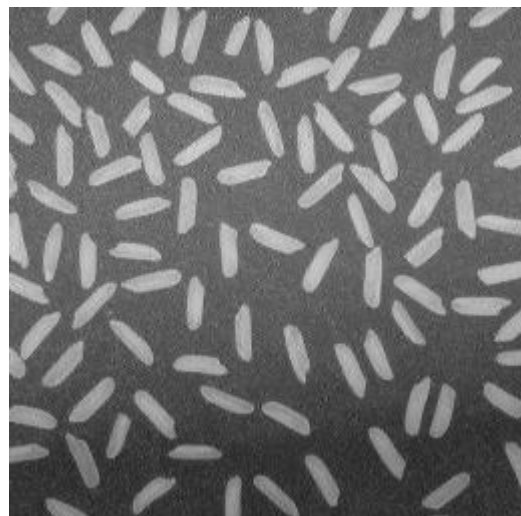


采样频率为 0.2

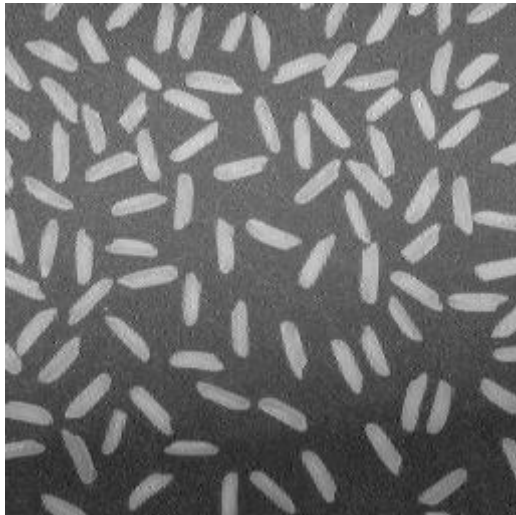
图3.9 正交匹配追踪算法的Lifting body图像重构效果图



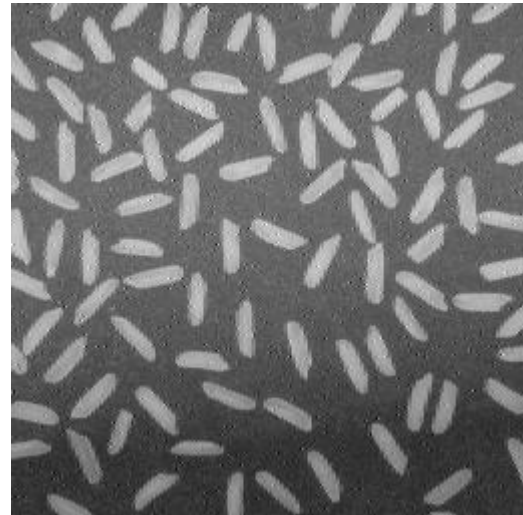
rice 原始图像



采样频率为 0.6



采样频率为 0.4



采样频率为 0.2

图3.10 正交匹配追踪算法的Rice图像重构效果图

如表3.2所示为正交匹配追踪算法在不同图像，不同采样频率条件下的重构图像的峰值信噪比情况。

表3.2 梯度投影法在不同图像、不同采样频率下的峰值信噪比

采样频率	0.6	0.4	0.2
256的Camera man	32.58	28.76	22.78
256的Lifting body	26.32	22.19	16.48
256的Rice	27.98	23.83	18.02

根据图3.8、图3.9和图3.10的图像对比，可见应用正交匹配追踪算法进行图像处理时效果比较理想，但是缺点同样突出，在较低的采样频率重构图像时，图像的质量无法得到保证。另外，该算法由于重构过程比较缓慢，耗时相对其他算法要大一些。正交匹配追踪算法所存在的这些问题我们会在下一章节中进行分析改进，提出一种优化方案。



### 3.3 其它算法

(1) 由于许多图像都具有梯度稀疏性，而衡量它的标准为全变差 (Total Variation, TV)，基于此，E. Candès 等提出了最小全变差算法，压缩感知理论用于图像重构的最小全变差法模型为：

$$\min \|x_{CS}\|_{TV} \quad \text{s.t. } y = \Phi x_{CS} \quad (3.19)$$

此处，

$$\|x_{CS}\|_{TV} = \sum_{i,j} \sqrt{|x_{CS}(i+1,j) - x_{CS}(i,j)|^2 + |x_{CS}(i,j+1) - x_{CS}(i,j)|^2} \quad (3.20)$$

相对于一维信号重构的最小化  $l_1$  范数约束，最小全变差算法应用于二维图像重构，可以精确重构图像但是算法运行速度不够理想。

(2) 稀疏自适应匹配算法 (SAMP) 依然应用了匹配追踪算法中的原子匹配规则，该算法的优越性在于能够在稀疏度未知的情况下，根据逐步迭代来逼近原始信号，具有自适应性。同时，稀疏自适应匹配算法不同于其它匹配追踪算法的地方还在于它引入了回溯思想，这就令算法的重建精度和稳定性更加优越。从实际角度看，该算法可以看作是正交匹配追踪算法的广义延伸，不同处就在于它在迭代过程中不断的更新支撑集合。

(3) 在匹配追踪算法的基础上，分段式正交匹配追踪算法可以降低算法复杂度，它将整个迭代过程划分为几个阶段，通过一次性搜索多个非零系数，提高算法重建速度。缺点在于需要选取合适的阈值来保证算法的正常运行。

(4) 此外，树形匹配追踪的思想也可以降低算法复杂度，它通过针对零系数设置特定的集合，而对非零系数另设一个集合，以达到树形匹配追踪的效果，缺陷为仅在分段平滑信号的重构方面性能优异。

(5) 在正交匹配追踪算法的思想基础上衍生出的正则化正交匹配追踪算法也具有优异的性能，可以精确的重构任何稀疏信号和满足有限等距准则的随机矩阵。

(6) 子空间追踪 (Subspace Pursuit, SP) 与稀疏自适应匹配算法 (SAMP) 一样需要引入回溯思想的，在稀疏度已知的前提下可以降低算法复杂度，提高重建质量。

(7) 链式追踪算法对于特定的超级稀疏信号重构性能效果比较好，随着信

号稀疏度的下降，所需的观测数据急剧增加，局限性显而易见。

### 3.4 本章小结

在本章中，针对压缩感知理论框架中的信号重构算法进行系统化研究，在众多算法中选择最小化 $l_1$ 范数优化方法中的梯度投影算法和贪婪算法中的正交匹配追踪算法重点展开研究，对算法的内容和性能进行细致的分析。在最后，对其它所涉及到的信号重构算法作概括性的总结。

## 第 4 章 优化的正交匹配追踪算法

正交匹配追踪算法是在匹配追踪算法基础之上发展起来的一种非线性的自适应算法，它们的区别之处是在每一次迭代过程中将所选取的原子首先利用施密特正交化方法进行正交处理。算法的收敛速度更快并拥有更高的精度。同时，该算法易于理解，原理相对简单，应用也最为广泛。

然而正交匹配追踪算法的缺点和优点同样比较明显，首先它关于信号的重构速度不甚理想，耗时比较多，而且对于观测矩阵的要求很严格。其次在于该算法需要给定迭代次数，所以观测值也就需要得更多。

现有的正交匹配追踪算法及其改进算法在进行图像重构的时候，迭代次数都已经限定住，即原始图像的稀疏度是已知的。因此，算法在运行的时候就需要获得更多的观测样本值，以达到高精度重构的目的。基于这些问题，文中提出一种改进的算法方案：首先利用最优正交匹配追踪算法（OOMP）约束最优匹配原子的选择，在每次迭代的过程当中，应用最优的正交化性来保证匹配原子的选择时最优的，也就是说，该原子可以令最小化每次迭代后的冗余误差的模值达到最小，随后引入了后向投影的理念，将信号的稀疏度视为迭代次数的标准，运用一种特定的原子匹配准则对迭代过后的向量值进行后向处理，以达到将多余原子去除的目的，这样就能使信号的残余分量迅速将少，使原始信号能够得到精确的重构。通过在 MATLAB 上的仿真实验结果表明，运用优化的正交匹配追踪算法能够在保证算法精度的同时，提高运算速度，并减少重构所需的观测样本值。

### 4.1 基于正交匹配追踪的算法优化方案

由于在冗余误差最小化方面，正交匹配追踪算法的表现并不理想，它所求得解并不是最优的，所以我们利用最优正交匹配追踪的思想，从匹配原子的选择系统角度着手。下文将对这个思想做简单的描述：

首先，我们假设存在一个完备的原子集合  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ ，从这个原子集合中选取一个原子  $\psi_1$ ，并对它进行初始化  $\psi_1 = V_1$ ，同时定义：  $V_{t+1} = V_t \oplus \psi_{t+1}$ 。

接下来定义空间  $W_{t+1}$  为空间  $V_t$  在空间  $V_{t+1}$  上的正交补空间，由此可以写出它在  $\psi_{t+1}$  上的正交投影算子为：

$$P_{W_{t+1}} = P_{V_t} + P_{W_{t+1}} \quad (4.1)$$

随后假设  $\phi_{t+1}$  是  $\psi_{t+1}$  在  $W_{t+1}$  上的正交投影向量，根据  $\psi_{t+1} = V_{t+1}$ ，可以得到：

$$\phi_{t+1} = P_{W_{t+1}} \psi_{t+1} = P_{V_{t+1}} \psi_{t+1} - P_{V_t} \psi_{t+1} = \psi_{t+1} - P_{V_t} \psi_{t+1} \quad (4.2)$$

设  $\phi_{t+1}$  的归一化函数是  $f_{t+1}$ ，有

$$f_{t+1} = \frac{\phi_{t+1}}{\|\phi_{t+1}\|} \quad (4.3)$$

由上所述，信号  $x$  在空间  $W_{t+1}$  上的正交投影算子可以改写为：

$$P_{W_{t+1}} x = f_{t+1} (f_{t+1}, x) \quad (4.4)$$

接下来给出  $V_{t+1}$  正交投影算子的函数描述形式为：

假设函数  $\beta_n^1 = \psi_1$ ，同时令  $\beta_n^{t+1} = \beta_n^t - \frac{f_{t+1}}{\|\phi_{t+1}\|} [\psi_{t+1}, \beta_n^t]$ ，  $n=1, 2, \dots, t$ 。

可得：

$$\beta_{t+1}^{t+1} = \frac{f_{t+1}}{\|\phi_{t+1}\|} \quad (4.5)$$

已知  $x$  在集合  $V_{t+1}$  上的正交投影向量是：

$$P_{V_{t+1}} x = \sum_{n=1}^{t+1} \langle \beta_n^{t+1}, x \rangle \psi_n \quad (4.6)$$

根据最优正交匹配追踪算法的原子匹配准则所规定：在第  $t+1$  次迭代过程中选择出最小的原子  $\psi_{t+1}$ ，使更新后的残余向量  $B_{t+1}$  的模实现最小化，公式框架表示为：

$$\|B_{t+1}\|^2 = \|x\|^2 - \langle P_{V_t} x, x \rangle = \|x\|^2 - \left[ \langle P_{V_t} x, x \rangle + \frac{1}{\|\phi_{t+1}\|^2} \left| \langle \psi_{t+1}, x \rangle - \langle P_{V_t} \psi_{t+1}, x \rangle \right|^2 \right] \quad (4.7)$$

由于在上一次迭代过程当中 $\langle P_{V_t} x, x \rangle$ 已经恒定不变，因此 $\|B_{t+1}\|^2$ 的最小化就可以表示为最大化的 $\rho_n$ ，数学表示如下：

$$\rho_n = \frac{|\langle \psi_n, B_t \rangle|^2}{1 - \langle \psi_n, P_{V_t} \psi_n \rangle}, n=1, 2, \dots, t \quad (4.8)$$

然后假设第  $t+1$  步迭代过程所获得的分解系数是 $c_n^{t+1}$ ，这个系数满足等式：

$P_{V_{t+1}} x = \sum_{n=1}^{t+1} c_n^{t+1} \psi_n$ 。根据代入后得到的计算结果为：

$$\begin{cases} c_n^{t+1} = c_n^t - \langle \beta_n^t, \psi_{t+1} \rangle \langle \frac{\psi_{t+1}}{\|\phi_{t+1}\|}, x \rangle \\ c_{t+1}^{t+1} = \langle \frac{\psi_{t+1}}{\|\phi_{t+1}\|}, x \rangle \\ c_1^1 = \langle \psi_1, 1 \rangle \end{cases} \quad (4.9)$$

根据最优正交匹配追踪算法，我们得到了原始信号  $x$  的初始系数估测向量集

$$c = \begin{bmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ \dots \\ \dots \\ c_L^L \end{bmatrix}, \text{它所对应的匹配原子集合为 } \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_L\}, \text{因为迭代次数的限制}$$

并没有给出，所以可能出现对原子的错误选择。在这里，我们引入后向投影(Back Projection)的概念，信号向所有被选择的原子的列向量正交投影，从而使信号残余迅速减少。并逐次向后去掉误选的原子，直至符合稀疏度的限制要求，最终就可以更加精确的重构原始信号。

## 4.2 算法描述

在匹配追踪算法的基础上，我们加入最优正交匹配追踪算法的原子匹配准则和后向投影的思想，最终得到正交匹配追踪算法的优化方案。算法的详细步骤如下所述：

设定一个输入信号  $x$ ，输出近似信号为  $x_{CS}$ 。首先对算法进行初始化：正交投影的函数向量为  $\psi_1 = \phi_1 = \beta_1$ ，迭代后的残余分量设定为  $b_0 = a$ ， $E_n = \psi_n$ ， $n = 1, 2 \dots d$ ，迭代步长为  $i=1$ 。索引集合设为  $Q$ ，令索引值为  $t = \operatorname{argmax}_{n=1,2\dots d} |\langle \psi_n, x \rangle|$ 。分解系数设定为  $c_1 = \langle \psi_1, x \rangle$ 。归一化分解系数值为

$$c', c' = \begin{bmatrix} c_1^L / |c| \\ c_2^L / |c| \\ \dots \\ \dots \\ c_L^L / |c| \end{bmatrix}。$$

(1) 分别在  $n=1, 2, \dots, d$  的情况下，计算得到：

$$B_n = B_n - \phi_i \langle \phi, \psi_n \rangle$$

$$D_n = D_n - |\langle \phi, \psi_n \rangle|^2$$

$$v_n = \langle B_n, x \rangle$$

$$\rho_n = |v_n|^2 / D_n$$

(2) 更新迭代步长  $i=i+1$ ，根据索引值来更新索引集合；使

$$\|b_i\|^2 = \|b_{i-1}\|^2 - \rho$$

$$\phi_i = \frac{B_i}{\sqrt{d_i}}, \quad \beta_i = \frac{B_i}{d_i}$$

(3) 令  $n=1, 2, \dots, i-1$ , 分别计算得到新的投影向量集合  $\beta_n$  和分解系数

$$\rho_n。$$

(4) 重复上述第一、第二和第三步, 直至  $\|B_i\|^2$  不大于一个特定的小的正数

$$\varepsilon。$$

(5) 在  $n=1, 2, \dots, L$  的情况下, 分别计算归一化分解系数  $c' = \begin{bmatrix} c_1^L / |c| \\ c_2^L / |c| \\ \dots \\ \dots \\ c_L^L / |c| \end{bmatrix},$

去掉  $(L-m)$  个最小系数和它所对应的原子, 从而得到原子集合  $\psi_j$  和更新的分解系数矩阵。算法结束。

### 4.3 结果与分析

在对算法进行优化后, 在 MATLAB 上进行仿真实验。

(1) 一维信号仿真实验: 设一个稀疏信号  $x$ , 长度为 256, 稀疏度为  $m$  (本实验中的  $m$  取值分别为 4, 8, 16 和 24)。观测矩阵应用的是高斯随机矩阵, 如式(2.7):

$$H \in \mathbb{R}^{M \times L}; H(i,j) = \frac{1}{\sqrt{M}} h_{i,j}, \quad h_{i,j} \sim N(0, 1)$$

式中,  $M$  代表观测样本数, 对每组数据分别进行 500 次实验, 得到不同的稀疏度的条件下, 优化后的算法进行信号重构时的重构百分比和观测次数的关系曲线, 如图 4.1 所示。

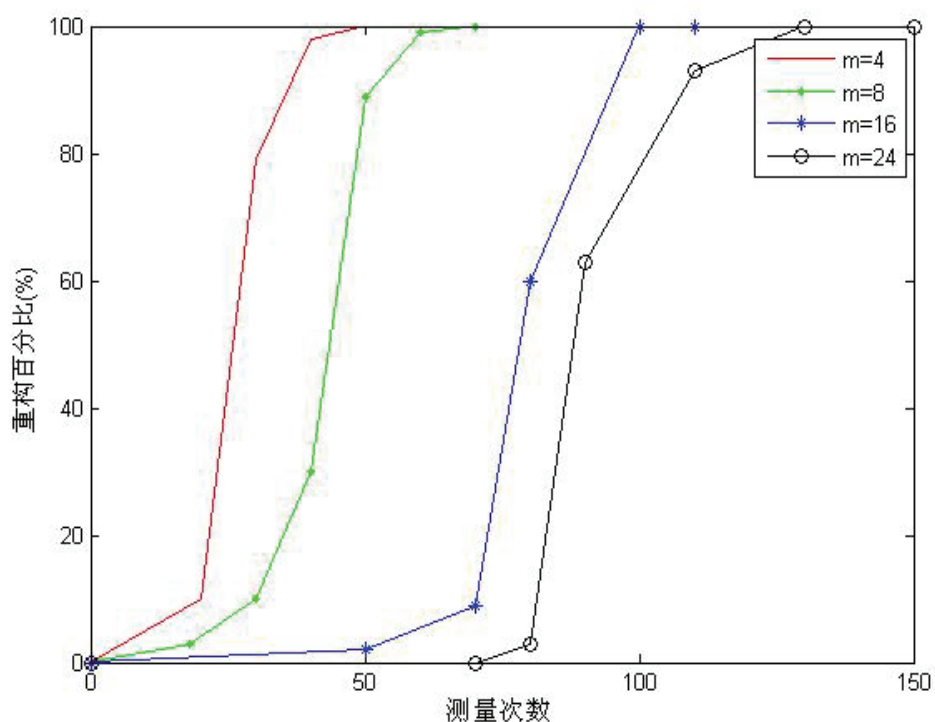


图 4.1 在不同稀疏度时，信号重构百分比与观测次数的关系曲线

由上图可见，优化后的方案可以用比原来的正交匹配追踪算法更少的观测样本数来重构信号。在这里，只要获得足够的观测次数就可以高精度的重构出原始信号。这就意味着，优化算法的重构百分比和观测次数具有一定的相关性。

(2) 二维图像仿真实验：选取一个灰度图像进行重构，大小为  $64 \times 64$ 。应用优化后的正交匹配追踪算法得到仿真结果如图 4.2 和图 4.3 所示：



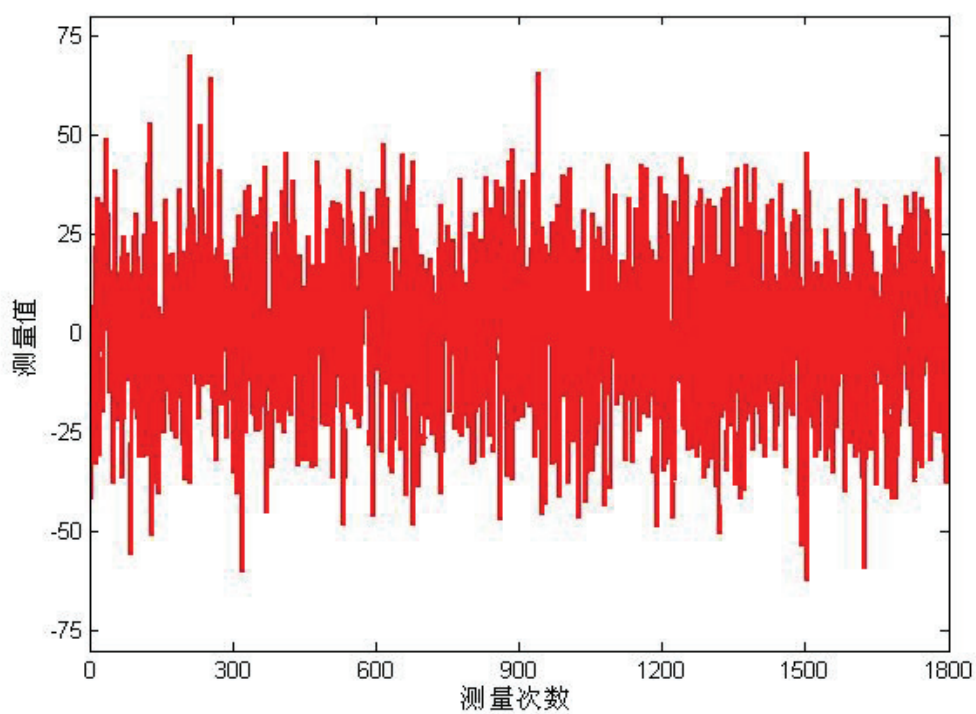


图 4.2 观测次数

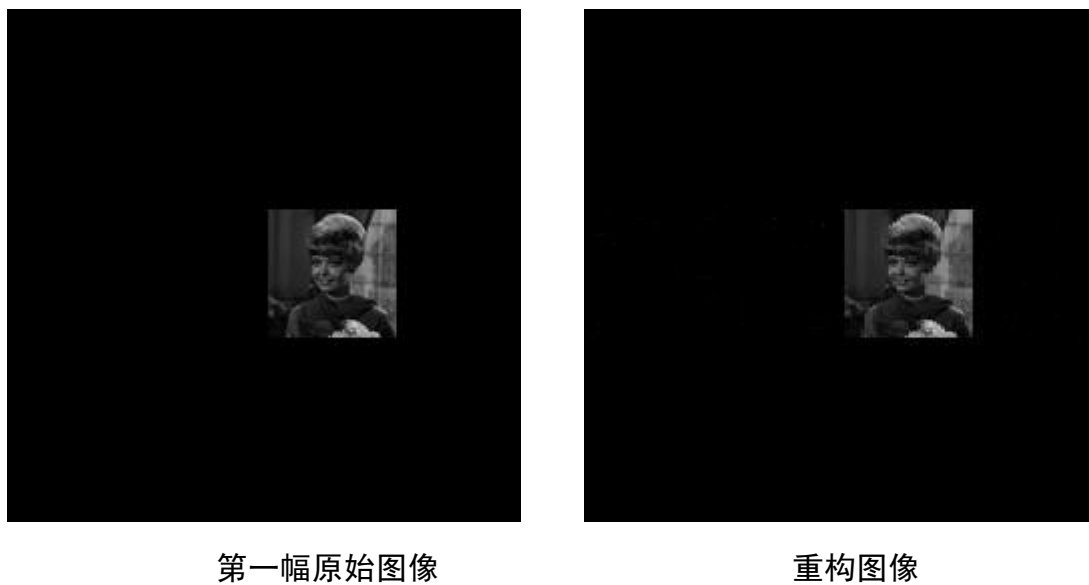


图 4.3 优化算法的重构效果对比

由图 4.2 和图 4.3 可以看出, 优化后的正交匹配追踪算法基本上可以完成精确的重建, 重构图像质量稳定。为验证算法的稳定性, 再选取另一幅同样是  $64 \times 64$  的灰度图像, 得到的仿真结果如图 4.4 和图 4.5:

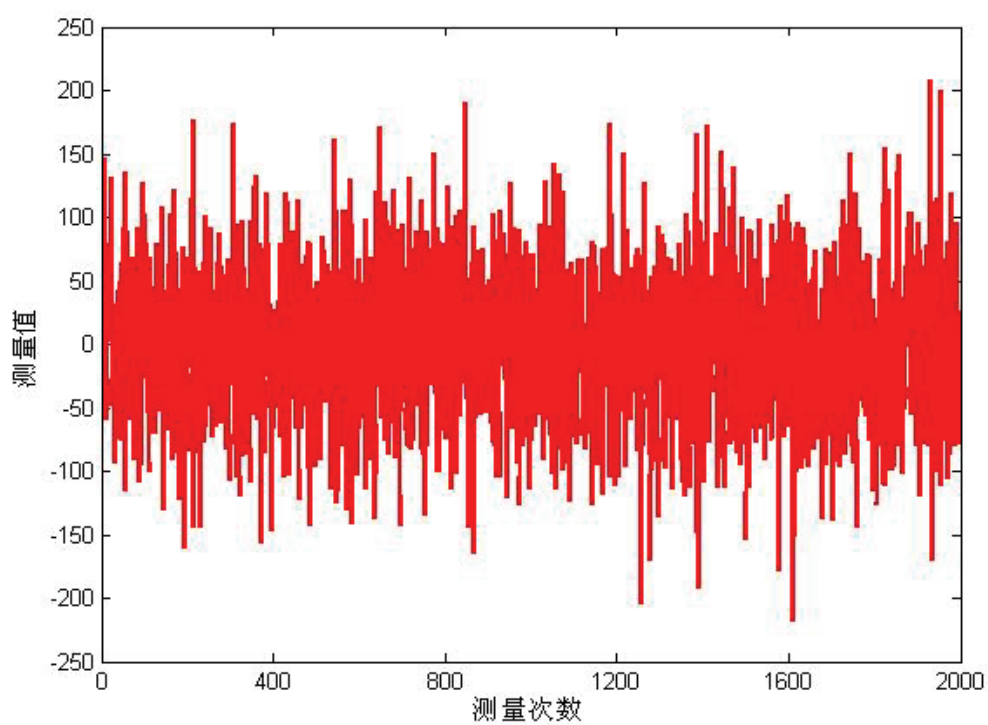


图 4.4 观测次数

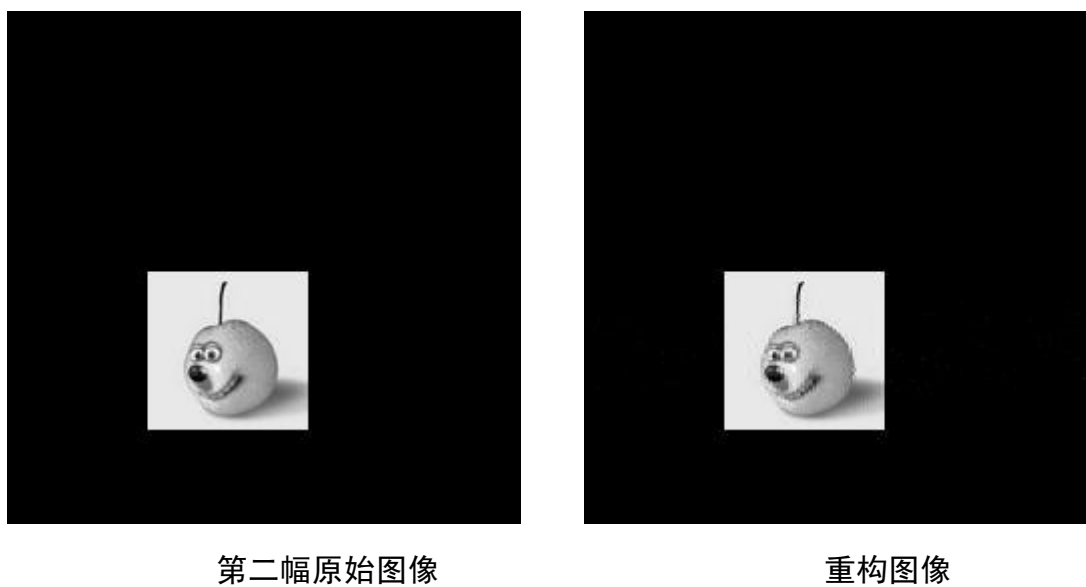


图 4.5 优化算法的重构效果对比

两次实验的结果充分验证，优化后的正交匹配追踪算法在图像重构方面性能卓越，能够基本精确的恢复原始图像，并减少所需要的观测样本值，加快运算速度。

## 4.4 与正交匹配追踪算法的对比

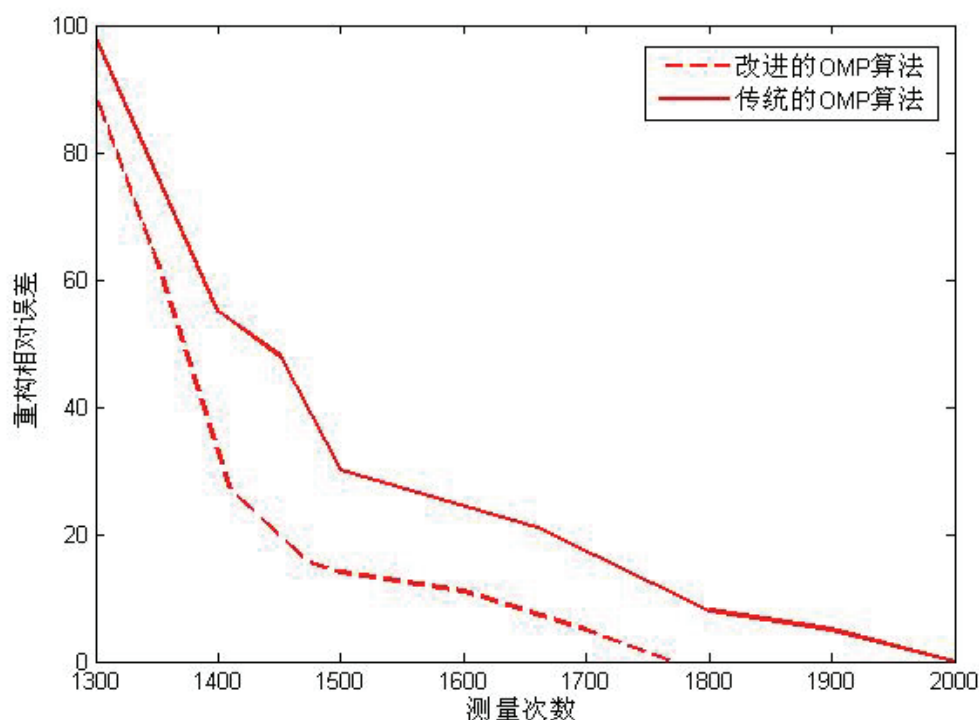


图 4.6 重构误差曲线图

如图 4.6 所示为传统的正交匹配追踪算法和优化后的算法的相对重构误差。它表明，在取得相同的观测次数时，优化算法的重构误差更小；同时，随着观测次数的不断提高，重构算法的相对误差也逐渐降低，即重构质量不断得到提高，在随机性的测量系统中，即便在意外的情况下丢失了某些数据，对整体的重构结果也不会造成大的影响。

随即根据前文所述的正交匹配追踪算法，采用 Camera man 和 Lifting body 两幅图像，应用优化的正交匹配追踪算法进行图像重构，得到的效果图如图 4.7 和图 4.8 所示。从直观的对比效果上可以看出，优化后的正交匹配追踪算法要比传统的正交匹配追踪算法重构效果更佳，无论是从重构图像的质量还是从稳定性方面都要更好。而且，算法的重构速度更快，耗时远比原算法少。



(a)



(b)

图 4.7 Camera man 图像的重构效果

其中：图（a）为优化算法的重构图像；图（b）为正交匹配算法的重构图像



(a)



(b)

图 4.8 Lifting body 图像的重构效果

其中：图（a）为优化算法的重构图像；图（b）为正交匹配算法的重构图像

## 4.5 本章小结

本章在正交匹配追踪思想的基础上提出了一种优化的正交匹配追踪算法。该算法首先利用最优正交匹配追踪算法在原子选择上的优势，在每步迭代的过程中保证原子匹配的最优性，在迭代过程中利用最优的正交化性来约束原子的选

择，以保证当次迭代后的冗余误差最小化；同时将稀疏度作为迭代次数的标准，引入后向投影的机理，能够向后去除多余的原子从而能精确的重构信号。在针对一维稀疏信号和多幅二维图像的实验结果表明，与传统的正交匹配追踪算法相比，应用优化后的算法进行重构的图像不仅仅在图像质量和重构速度上表现优异，更能够进一步的降低所要求的采样点数。

## 第 5 章 总结与展望

随着现代科技的飞速发展,人们对于信息数据量的海量需求和传统的信号处理框架的矛盾日益凸显,加上电子器件的物理性约束,这一切都随着压缩感知理论的诞生和发展而变得易于解决。作为近些年来新近兴起的理论思想,压缩感知理论正在突破奈奎斯特采样定理在信号采样压缩方面的诸多限制。从理论上讲,几乎所有的信号都可以在一定的变换空间内获得稀疏表示,只要观测矩阵设计合理,同时能够找到性能优异的重构算法,就可以将一个信号完全精确的重构,与此同时,却只需要很少的采样点数。

本文研究的重点是压缩感知理论框架中的信号重构算法方面。目前,该领域的研究工作正在深入展开。信号重构作为整个压缩感知理论体系中最重要的一环,直接关系到重构信号的精确度和重构的速度,因此人们一直致力于寻求一种快速有效,性能卓越的重构算法,来满足更高的信号处理需求。

全文主要的总结有下述几点:

(1) 对压缩感知理论的整体框架进行研究并作详细描述,在信号的稀疏变换、设计观测矩阵和信号重构三个方面进行深入的探讨研究,并对该理论现有的和潜在的应用一一详述。

(2) 对现有的各种信号重构算法进行概括性总结,再针对基于  $l_1$  范数最小化的梯度投影算法和纯贪婪算法中的正交匹配追踪算法进行重点研究。作为现在主流的两大类算法中最具代表性的两种算法,它们在算法内容,特性等方面都对后续的研究工作具有重要的指导作用。在这里,我们对这两种算法的核心思想、结构、内容和框架进行研究,并且在 MATLAB 上进行图像重构仿真,实验对象是比较具有代表性的 MATLAB 自带的几幅  $256 \times 256$  的图像,通过在不同的采样率上得到的重构图像和峰值信噪比等数据,分析算法的重构速度,重构精度和图像质量等性能,总结出算法优缺点和局限之处,为下文的后续研究铺平道路。

(3) 在前文所做研究工作的基础之上,根据正交匹配追踪算法和其他改进算法的思路,提出了一种新型的优化方案。传统的正交匹配追踪算法所存在的以下几点不足:信号的重构速度比较慢,算法耗时大;它在低频率采样时的重构图像效果不是很理想;它对观测矩阵的要求很严格,同时还需要给定迭代的次数。

这种优化后的算法可以在大幅度降低采样点数的同时精确的重构信号，另外算法的速度也有不小的提升。

优化后的正交匹配追踪算法首先利用最优正交匹配追踪算法的原子匹配选择准则，在每步迭代的过程当中保证原子匹配的最优性，并使得当前迭代后的冗余误差最小；引入后向投影的思想，能够快速减少信号残余。同时将稀疏度作为适应性迭代次数的标准，并向后去除多余的误选原子从而能精确的重构信号。最后，在针对一维稀疏信号和多幅二维图像的实验结果表明，与传统的算法相比，应用优化后的算法进行重构能够在保证精度的同时进一步的降低所要求的采样点数。算法的重构速度有所加快，性能稳定。

本文在研究已有的信号重构算法的同时，针对正交匹配追踪算法的优缺点，提出了一点改进的设想并对此进行实验分析。然而这个年轻的理论还处于起步阶段，还有大量亟待解决的问题需要大家共同研究，贡献智慧。在此针对压缩感知理论，提出几点问题和建议：

(1) 能否提出一个性能更加优越的基于正交匹配追踪算法的贪婪迭代法，使其在具备最少观测数目的同时，还能够实现重构图像质量和速度的最优化，可以考虑引入一些全新的思维，比如分段思想、迭代步长的自适应性、图像的预处理变换等等。

(2) 在观测矩阵的设计方面依然有很多的工作要做，现有的操作算子在减少计算量方面还有所欠缺。

(3) 在信号的稀疏变换这一方面，能否引入一些更合适的函数集合，甚至是组合变换域，能够让信号拥有更加稀疏的表达，为后续的步骤扫清障碍。

总之，压缩感知理论是一个具有划时代意义的里程碑式的理论，不仅仅是在信号处理领域，在其它工业工程、生产生活等方面的影响同样显著，它极有可能为信息科学带来一场新的变革。

## 参考文献

- [1]Donoho D. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.
- [2]Candès E, Romberg J, Tao J. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [3]Baraniuk R. Compressive sensing [J]. IEEE Signal Processing Magazine [J], 2007, 24(4): 118-121.
- [4]Wang W, Garofalakis M, Ramchandran K. Distributed sparse random projections for refinable approximation [A]. Proceedings of the Sixth International Symposium on Information Processing in Sensor Networks (IPSN2007) [C] . New York: Association for Computing Machinery ,2007. 3312339.
- [5]Baron D, Wakin M B, Duarte M, etc. Distributed compressed sensing [OL] . <http://www.dsp.rice.edu/~drorb/pdf/DCS112005.Pdf>.
- [6]Takhar D, Laska J, Wakin M etc. A new compressive imaging camera architecture using optical domain compression [A] . Proceedings of SPIE [C] . Bellingham WA: International Society for Optical Engineering. 2006, 6065.
- [7]Takhar D, Bansal V, Wakin W etc. A compressed sensing camera: New theory and an implementation using digital micro mirrors [A].Electronic Imaging: Computational Imaging [C] , 2006.
- [8]Candès E, Wakin B. “people hearing without listening.” An Introduction to Compressive Sampling [J]. Tech.Report, California Institute of technology, 2007:1-28.
- [9]Candes E, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling [J]. Inverse Problems, 2007, 23(3):969-985.
- [10] Candès E, Tao T. Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies. [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006,52(12): 5406-5425.



- [11]Candes E, Tao T. Decoding by linear Programmin [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51( 12):4203-4215.
- [12]Davenport M, Wakin M, Baraniuk R. Detection and estimation with compressive measurements, Technical Report TREE 0610, Department of Electrical Engineering, Rice University, USA, 2006.
- [13]Rauhut H, Schnass K V P. Compressed sensing and redundant dictionaries [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(5): 2210-2219.
- [14]Trany T, Gan L. Fast compressive sampling with structurally random Matrices [J] . In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Washington D.C., USA: IEEE, 2008, 3369-3372.
- [15]E. Cand`es and J. Romberg, Sparsity and incoherence in compressive sampling [J]. Inverse Problems, 2007: 969–985.
- [16]Donoho D, Y Tsaig. Extensions of compressed sensing [J]. Signal Processing. 2006, 86 (3) :533-548.
- [17]Figueiredo M A T, Nowak R D, Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 586-598.
- [18]Kim S, Koh K, Lustig M, Boyd S, Gorinevsky D. An interior-point method for large-scale  $\ell_1$  regularized least squares. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 606-617.
- [19]Kirolos S, Laska J, Wakin M, Duarte M,Baron D,Ragheb T, Massoud Y, Baraniuk R. Analog-to-information conversion via random demodulation [J].Design, Applications, Integration and Software, IEEE Dallas/CAS Workshop on, 71-74, Oct, 2006.
- [20]Laska J, Kirolos S, Massoud Y etc. Random sampling for analog-to-information conversion of wideband signals [A] . Proceedings of the IEEE Dallas Circuits and Systems Workshop (DCAS'06) [C] . Dallas, Texas, 2006.
- [21]Lustig M, Donoho D L, Pauly J M. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6):1182-1195.

- [22]Haupt J, Nowak R. Compressive sampling for signal detection. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Washington D. C., USA: IEEE, 2007, 1509-1512.
- [23]Tropp J, Gilbert A. Signal. recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [24]Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, Starck J L. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit (StOMP). Submitted for publication.
- [25]Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit. Found. Comput. Math. 2008.
- [26] Thong T Do, Lu Gan, Nam Nguyen and Trac D Tran. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing. Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, California, 2008.10.
- [27]Donoho D L. For most large underdetermined systems of linear equations, the minimal  $L_1$  norm near-solution approximates the sparsest near-solution Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(7): 907-934.
- [28]Baron D, Wakin M, Duarte M, Sarvotham S and Baraniuc R G. Distributed compressed sensing [J]. Preprint, 2005.
- [29]Chen S B, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1): 33-61.
- [30]Baraniuk R, Steeghs P. Compressive radar imaging [J]. In: Proceedings of the Radar Conference. Washington D.C., USA: IEEE, 2007, 128—133.
- [31]Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction. 2008 5th International Symposium on Turbo Codes and Related Topics, TURBOCODINq 2008, 402-407.
- 32]Laska J, Kirolos S, Duarte M etc. Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation [A] . Proceedings of the IEEE Int. Symp. On Circuits and Systems (ISCAS) [C] . Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. 2007. 1959-1962.
- [33]Qi D, Sha W. The Physics of Compressive Sensing and the Gradient-Based

Recovery Algorithms. <http://arxiv.org/abs/0906.1487,2009.4>

- [34]陈宝林.最优化理论与算法.北京:清华大学出版社, 2005
- [35]王建英, 尹忠科, 张春梅.信号与图像的稀疏分解及初步应用[M].成都: 西南交通大学出版社, 2006.
- [36]谢志鹏.迭代式正交匹配追踪及稀疏解[J].微电子学与计算机, 2009,26(10):
- [37]石光明, 刘丹华, 高大化, 等.压缩感知理论及其研究进展[J].电子学报, 2009,37(5):1070-1081.
- [37]练秋生, 郝鹏鹏.基于压缩传感和代数迭代法的CT图像重建[J].光学技术, 2009,35(5):422-425.
- [39]方红, 章权冰, 韦穗.基于非常稀疏随机投影的图像重建方法[J].计算机工程与应用, 2007,43(22):25-27.
- [40]方红, 章权冰, 韦穗.基于亚高斯随机投影的图像重建方法[J].计算机研究与发展, 2008,45(8):1402-1407.
- [41]方红, 章权冰, 韦穗.改进的后退型最优正交匹配追踪图像重建方法[J].华南理工大学学报, 2008,36(8):23-27.
- [42]高睿.基于压缩传感的匹配追踪重建算法研究[D].北京: 北京交通大学硕士论文, 2009.
- [43]郝鹏鹏.基于压缩传感原理的图像重建方法研究[D].秦皇岛: 燕山大学硕士论文, 2009
- [44]杨愚.图像稀疏分解快速实现与初步应用[D].成都: 西南交通大学硕士论文, 2004.
- [45]张跃飞, 姜玉亭, 尹忠科, 等.基于稀疏分解的图像压缩[J].系统工程与电子技术, 2006,28(4):513-537.
- [46]Needell D, Tropp J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. ACM Technical Report 2008-01, California institute of Technology, Pasadena, 2008.7.
- [47]Lobo M, Vandenberghe L, Boyd S, Lebre H. Applications of second-order cone programming. LinearAlgebra and its Applications, 1998, 284(1-3): 193-228.
- [48]Kingsbury N G Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals. Journal of

- Applied and Computational Harmonic Analysis, 2001, 10(3): 234-253.
- [49]Herrity K K, Gilbert A C, Tropp J A. Sparse approximation via iterative thresholding. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Washington D.C., USA: IEEE, 2006, 624-627.
- [50]Blumensath T, Davies M E. Iterative thresholding for sparse approximations. Journal of Fourier Analysis and Applications; 2007, 14(5-6): 629-654.
- [51]Ma J W. Compressed sensing by inverse scale space and curvelet thresholding. Applied Mathematics and Computation, 2008, 206(2): 980-988.
- [52]<http://www.dsp.ece.rice.edu/cs>.
- [53]Rebollo N L, Lowe D. Optimized Orthogonal Matching Pursuit Approach [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2002.4, 9: 137-140.
- [54]Zhao Ruizhen, Liu Xiaoyu, Li Ching-Chung, Sciabassi R J and Sun Mingui. A new denoising method based on wavelet transform and sparse representation. ICSP'08 Proceedings, 2008.10, 1:171—174.
- [55]Bajwa W, Haupt J, Raz G, Wright S J, Nowak R D. Toeplitz-structured compressed sensing matrices. In: Proceedings of the IEEE Workshop on Statistical Signal Processing. U}ashington D. C., USA: IEEE, 2007, 294-298.
- [56]Haupt J, Nowak R, Compressive sampling vs. conventional imaging. Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing. Washington D. C., USA: IEEE, 2006, 1269-1272.
- [57]Reblllo L, Lowe D. Optimised orthogonal matching pursuit approach [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2002, 9(4):137-140.

## 致谢

值此论文完成之际，首先要向在吉林大学攻读硕士学位这二年期间所有对我给予过关心、帮助和支持的老师、亲人和同学致以诚挚的感谢。

本论文是我在郭树旭教授的精心指导下完成的。在整个学习和研究阶段，郭老师给与了我非常大的帮助，他严谨求实的治学态度、平易近人的学者风范和朴实无华的作风给我留下了深刻的印象；他深厚的学术功底、敏锐的科学洞察力和诲人不倦的精神更使我受益匪浅。在此衷心的感谢郭老师在这两年的时间里对我在生活、学习和科研方面的悉心关怀和无私指导。

特别感谢我父母多年来的辛勤抚养和精心栽培，感谢他们二十五年来对我的鼓励和支持，这也一直是我不断前进的动力源泉。对月他们为我付出的一切，我将铭刻肺腑。

感谢在课题组和寝室和我朝夕相处的同学们以及所有的班级同学，他们的热情支持和帮助使我的论文得以顺利地顺利完成。感谢大家对我在生活上的关心和学习上的指导，和他们的探讨使我拓宽了思路，获得很多灵感，也正是因为他们的无私帮助，我的论文才能顺利完成，我将永远记住并珍惜这一段美好的研究生活。

最后，感谢吉林大学多年的培养。感谢曾经教育和帮助过我的所有老师，关心帮助过我的同学和朋友。衷心感谢从百忙中抽出时间参加论文评审和评议的各位专家学者，感谢他们为审阅本文所付出的辛勤劳动。

## 摘要

压缩感知理论是近年来兴起的一种理论，它能够在保证信息没有损失的前提下用远低于奈奎斯特采样定理所要求的采样频率对信号进行采样，同时能够精确的重构信号。相比于传统的以奈奎斯特采样定理为基准的信号处理方法，压缩感知理论的优势明显，它以空间变换为基础，以随机观测矩阵为手段，以优化求解作为信号处理方法。该理论仅仅需要很少的采样点数就可以同时完成数据采集和压缩，这就可以显著的减小数据存储和传输的代价，进一步降低信号处理的时间和器件成本。

压缩感知理论的核心内容有三个方面：（1）信号的稀疏变换，即对于一个非稀疏的自然信号，需要找到一个能够让它得到稀疏表示的合适变换域；（2）观测矩阵的设计，即需要设计一个与变换基不相干的随机平稳矩阵；（3）信号的重构，即利用一种数学算法在保证精度的同时完成对信号的重构，整个重构过程可以视为求解一个优化问题。

本文研究的主要内容是信号重构部分，作为压缩感知理论框架中的核心环节，算法的选择直接决定着重构信号的质量、重构速度和应用效果。信号的重构算法目前来看主要可以归结为三大类，即贪婪算法，凸松弛算法和组合算法。三种算法各有千秋，在文中我们选择梯度投影算法和正交匹配追踪算法这两种具有代表性的算法进行重点研究。作为基础的算法，它们对后来陆续提出和改良的算法都具有重要的指导意义。随后对现有的各种算法进行概括性总结。

梯度投影法是基于最小化  $l_1$  范数求解的重构算法，该算法的总体思路是从可行性的点出发，顺沿着下降方向进行可行性搜索，以此求出新的可行性点使目标函数值降低。根据仿真实验得到的结果分析，该算法在总体上讲重构效果比较不错，在保持较高采样频率时的重构质量很好，在重构时间方面的表现非常出色，然而随着采样频率的不断下降，重构的图像质量也急剧的下降。

正交匹配追踪算法是一种迭代式的贪婪算法。该算法在每一次迭代的过程中，从完备原子库中选择一个关于目标信号结构能最佳匹配的原子，并对其进行施密特正交化处理，在经过有限次数的迭代后就可以收敛，最终用少量原子就

能够精确的重构信号。文中我们针对一维信号和几幅二维图像进行仿真实验，从实验结果可以看出，应用正交匹配追踪算法进行图像处理时效果比较理想，但是缺点同样突出：在较低的采样频率重构图像时，图像的质量无法得到保证；重构过程比较缓慢，耗时相对大一些。另外由于该算法对观测矩阵的要求比较严格，同时还需要给定迭代次数，这就需要拥有更多的样本观测值以达到精确重构的目的，所以它的应用局限性很大。

基于上述这些问题和局限之处，我们提出了一种优化的正交匹配追踪算法。该算法利用最优正交匹配追踪算法中的最佳匹配原子的选择准则，在每次迭代时令冗余误差的模值达到最小。同时将原始信号的稀疏度作为适应性迭代次数的标准，并引入后向投影的思想，向后去除多余的误选原子，使信号的残余分量迅速减少，从而精确的重构原始信号。最后，针对一维信号和多幅二维图像在 MATLAB 上进行仿真实验，根据结果数据分析得知，运用优化后的正交匹配追踪算法可以在保证重构图像质量的同时，大大减少重构所需的观测样本值，并且能够明显提高运算速度。在和传统正交匹配追踪算法的重构图像对比可见，优化后的算法在同等采样点数条件下的重构效果更好，算法的性能稳定出色。

关键词：压缩感知 稀疏分解 重构算法 正交匹配追踪

## Abstract

Compressed sensing (CS) is a theory which has developed in recent years, it can using far less than the required sampling frequency of the Nyquist sampling theorem to sample the signal while there's no loss of information, and at the same time, it could be able to accurately reconstruct the signal. Compared with the traditional method of signal processing based on the Nyquist sampling theorem, Compressed sensing has obvious advantages. It is based on space transformation and use a random measurement matrix as a means, and then, to solve the optimization problem as a signal processing method. The theory requires only a few points can be simultaneously sampling data acquisition and compression, so it can significantly reduce the cost of data storage and transmission, to further reduce signal processing time cost and device cost.

Compressed sensing theory has three core elements: (1) Signal sparse transformation: for a non-sparse natural signals, we need to find a suitable transform domain which the signal has a sparse representation; (2) Design of observation matrix: we need to design a smooth random matrix which is irrelevant with the transformation base; (3) signal reconstruction: we use a mathematical algorithm to ensure the accuracy and simultaneously finish the signal reconstruction, the whole reconstruction process can be treat as the solve to a optimization problem.

The main content of this paper is signal reconstruction. As the core link of compressed sensing theoretical framework, the choice of algorithm directly determines the reconstructed signal quality, reconstructed speed and the results of application. For now, Signal reconstruction algorithm can be attributed to three main categories the greedy algorithm, convex relaxation algorithm and the combination algorithm. Three methods have their own characteristic. In this paper we choose representative algorithm such as gradient projection algorithm and orthogonal matching pursuit algorithm as the key research. They are the basal algorithm, and therefore they have important guiding significance to new algorithms and improved



algorithms. Then, we give a general summary of various existing algorithms.

Gradient projection algorithm is a reconstruction algorithm based on  $l_1$ -norm minimization. The general idea is to start from the feasible point, research feasibility along the direction of the drop, and then, we have a new feasible point calculated the target function decreases. According to the simulation analysis of the experimental results, the effect of the algorithm is very good. It could maintain a good quality at a high sampling frequency and has a good performance in the reconstruct time. But the quality of the reconstructed image has a sharp decline while the sampling frequency is declining.

Orthogonal matching pursuit algorithm is an iterative greedy algorithm. In every iterative step, the algorithm selects a atom from a complete dictionary which could be the best matching of the target signal and uses Schmidt orthogonal method, the algorithm could be constringency after a finite number of iterations, and eventually, we could accurately reconstruct the signal. In this paper, we make a simulation by using the two-dimensional images and one-dimensional signals. The results show that the orthogonal matching pursuit image processing results will be ideal, but also has some shortcomings: the quality of reconstructed image can't be guaranteed when the sampling frequency is low; reconstruction process is relatively slow and time-consuming is large. In addition, the algorithm has more stringent requirements on the observation matrix and need to set the number of iterations that it need more samples to achieve the purpose of accurate reconstruction, and so, the application is greatly limited.

According to the above issues and constraints in the context, we propose an optimized orthogonal matching pursuit algorithm. The algorithm uses the best matching atom selection criteria of the optimal orthogonal matching pursuit orthogonal. It minimizes the modulus value of the Redundancy errors in every iterative step. At the same time, let the sparse degree of the original signal to be the standards of the number of iterations. Then we add the idea of the back projection, backward selection to remove redundant wrong atoms, so that the residual vectors

could be reduced quickly and accurately reconstruct the original signal. Finally, we make a simulation on MATLAB. The results show that the optimization algorithm can guarantee the quality of the reconstructed image while reducing the samples, and also increasing the processing speed.

KEY WORDS: Compressed sensing, sparse decomposition, reconstructed algorithm, Orthogonal matching pursuit.