

中图法分类号: TN911.72 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2012)01-0001-12

论文引用格式: 邵文泽, 韦志辉. 压缩感知基本理论: 回顾与展望 [J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(1): 1-12

# 压缩感知基本理论: 回顾与展望

邵文泽, 韦志辉

南京理工大学计算机科学与技术学院, 南京 210094

**摘 要:** 随着信息社会的迅速发展, 人们对数字信息的需求越来越大。同时, 人们对信号的采样速率、传输速度和存储空间的要求也变得越来越严格。如何在保持信号信息的同时尽可能地减少信号的采样数量? Candès 在 2006 年的国际数学家大会上介绍了一种称为压缩感知的新颖信号采样理论, 指出: 只要远少于传统 Nyquist 采样定理所要求的采样数即可精确或高概率精确重建原始信号。围绕压缩感知的稀疏字典设计、测量矩阵设计、重建算法设计这 3 个核心问题, 对其基本理论和主要方法进行了系统阐述, 同时指出了压缩感知有待解决的若干理论问题与关键技术。

**关键词:** 压缩感知; 稀疏逼近; 非相干性; 测量矩阵; 稀疏最优化

## Advances and perspectives on compressed sensing theory

Shao Wenze, Wei Zhihui

School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China

**Abstract:** In the past century, the Shannon sampling theorem has underlain nearly all the modern signal acquisition techniques. It claims that the sampling rate must be at least twice the maximum frequency present in the signal. One inherent disadvantage of the theorem, however, is the large number of data samples particularly in the case of special-purpose applications. The sampling data have to be compressed for efficient storage, transmission and processing. Recently, Candès reported a novel sampling theory called compressed sensing, also known as compressive sampling (CS). The theory asserts that one can recover signals and images from far fewer samples or measurements, not strictly speaking, as long as one adheres to two basic principles: sparsity and incoherence, or sparsity and restricted isometry property. The aim of this article is to survey the advances and perspectives of the CS theory, including the design of sparse dictionaries, the design of measurement matrices, the design of sparse reconstruction algorithms, and our proposal of several important problems to be studied.

**Key words:** compressed sensing; sparse approximation; incoherence; measurement matrix; sparse optimization

## 0 引 言

信号采样是模拟的物理世界通向数字的信息世界之必备手段。多年来, 指导信号采样的理论基础

一直是著名的 Nyquist 采样定理。定理指出, 只有当采样速率达到信号带宽的两倍以上时, 才能由采样信号精确重建原始信号。可见, 带宽是 Nyquist 采样定理对采样的本质要求。但是, 对于超宽带通信和信号处理、核磁共振成像、雷达遥感成像、传感器网

收稿日期: 2010-04-27; 修回日期: 2011-05-23

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863 计划) 基金项目(2007AA12Z142); 国家自然科学基金项目(60802039, 60672074); 教育部高等学校博士点基金项目(20070288050)

第一作者简介: 邵文泽(1981—), 男, 现为南京理工大学模式识别与智能系统专业博士, 主要研究方向为图像处理中的数学反问题、高维信号稀疏逼近、压缩感知、变量选择、计算机试验设计与分析等。E-mail: shaowenze1010@yahoo.com.cn

络等实际应用,信号的带宽变得越来越大,人们对信号的采样速率、传输速度和存储空间的要求也越来越高。为了缓解对信号传输速度和存储空间的压力,当前常见的解决方案是信号压缩,如基于小波变换的 JPEG2000 标准。图 1 给出了传统的信号采样与压缩过程示意图。但是,信号压缩实际上是一种严重的资源浪费,因为大量采样数据在压缩过程中被丢弃了(  $N \gg K$  ),它们对于信号来说是不重要的或者只是冗余信息。从这个意义而言,得到以下结论:带宽不能本质地表达信号的信息,基于信号带宽的 Nyquist 采样机制是冗余的或者说是非信息的。

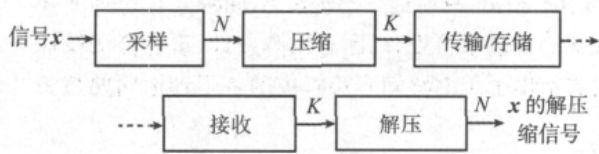


图 1 传统的信号采样与压缩/解压过程示意图

Fig. 1 Sketch map of traditional signal sampling and compression/decompression

一个很自然的问题是:是否存在或者能否提出一种基于信息的采样理论框架,使得采样过程既能保持信号信息,又能只需远少于 Nyquist 采样定理所要求的采样数目就可精确或近似精确重建原始信号?简言之,能否同时实现信号的采样与压缩?与信号带宽相比,稀疏性能够直观地而且相对本质地表达信号的信息。事实上,稀疏性在现代信号处理领域一直起着至关重要的作用,例如基于稀疏性的逼近、基于稀疏性的估计、基于稀疏性的压缩、基于稀疏性的降维等<sup>[1]</sup>。不同于 Nyquist 信号采样机制, Candes、Tao、Romberg、Donoho 等人<sup>[2-9]</sup>近年来基于信号稀疏性提出一种称为压缩感知或压缩采样的新颖采样理论,成功实现了信号的同时采样与压缩。压缩感知理论指出<sup>[2]</sup>:当信号在某个变换域是稀疏的或可压缩的,可以利用与变换矩阵非相干的测量矩阵将变换系数线性投影为低维观测向量,同时这种投影保持了重建信号所需的信息,通过进一步求解稀疏最优优化问题就能够从低维观测向量精确地或高概率精确地重建原始高维信号。在该理论框架下,采样速率不再取决于信号的带宽,而在很大程度上取决于两个基本准则:稀疏性和非相干性,或者稀疏性和等距约束性。图 2 给出了压缩采样理论框架的示意图。

虽然压缩感知理论只出现短短几年,但是一经

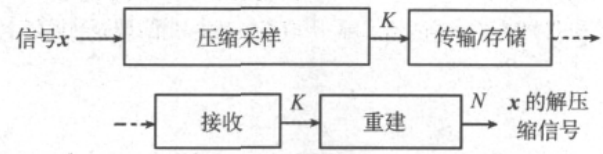


图 2 压缩采样理论框架示意图

Fig. 2 Sketch map of compressive sampling

报道立即引起了广泛关注,是近年来国际上迅速兴起的热门研究方向。目前,学者们已经在模拟-信息采样<sup>[10]</sup>、合成孔径雷达成像<sup>[11]</sup>、遥感成像<sup>[12]</sup>、核磁共振成像<sup>[13]</sup>、深空探测成像<sup>[14]</sup>、无线传感器网络<sup>[15]</sup>、信源编码<sup>[16]</sup>、人脸识别<sup>[17]</sup>、语音识别<sup>[18-19]</sup>、探地雷达成像<sup>[20]</sup>等诸多领域对压缩感知展开了广泛的应用研究。值得注意的是, Rice 大学<sup>[21-22]</sup>已经成功设计出了一种基于压缩感知的新型单像素相机,在实践中为取代传统相机迈出了实质性的一步。

压缩感知理论主要涉及 3 个核心问题: 1) 具有稀疏表示能力的过完备字典设计; 2) 满足非相干性或等距约束性准则的测量矩阵设计; 3) 快速鲁棒的信号重建算法设计。目前,压缩感知理论框架尚有很多亟待解决的问题,尤其是国内关于压缩感知理论的基础研究基本处于空白,因此有必要对压缩感知的相关基本理论和实现方法予以详细介绍。本文主要围绕稀疏字典设计、测量矩阵设计、重建算法设计 3 个核心问题,对压缩感知的基本理论和实现方法进行了系统地阐述,同时指出了压缩感知有待解决的若干理论推广和关键技术。

## 1 压缩感知理论的基本框架

### 1.1 信号的稀疏性

主要考虑实值有限长的离散信号空间  $\mathbf{R}^N$ 。假设  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  是  $\mathbf{R}^N$  的一组基向量,则任何信号  $x \in \mathbf{R}^N$  可以线性表示为

$$x = \sum_{i=1}^N s_i \psi_i$$

$$\text{或 } x = \Psi s \quad (1)$$

式中,  $s$  是  $x$  在  $\Psi$  域的变换向量,  $s_i = \langle x, \psi_i \rangle = \psi_i^* x$ ,  $\Psi = [\psi_1 | \psi_2 | \cdots | \psi_N]$  是  $N \times N$  的变换矩阵(  $\Psi$  可以不是正交矩阵)。

定义 1 稀疏信号<sup>[2]</sup> 称信号  $x \in \mathbf{R}^N$  在  $\Psi$  域是  $K$ -稀疏的,如果式(1)的线性表示只需不大于  $K$  个基向量  $\{\psi_i\}_{i \in \Omega}$ ,  $\Omega \subset \{1, 2, \cdots, N\}$ ,  $|\Omega| \leq K$ ;

或者说变换向量  $s$  中最多有  $K$  个非零项  $\{s_i \neq 0\}_{i \in \Omega}$ 。

**定义2** 可压缩信号<sup>[2]</sup> 称信号  $x \in \mathbf{R}^N$  在  $\Psi$  域是可压缩的, 如果变换向量  $s$  大部分分量的取值很小, 只有少部分分量的取值很大; 或者说只需要少部分取值大的分量就能很好地逼近原始信号  $x$ 。

图3给出了信号  $x$  在  $\Psi$  域的矩阵-向量稀疏表示示意图。例如, 尽管很多信号自身取值都是非零的, 但是在小波正交基下, 信号大部分小波系数的取值都很小, 只有少量的小波系数取值很大, 这些大系数承载了信号的绝大部分信息。小波变换的这种稀疏性或可压缩性已被成功地用于现代图像压缩标准——JPEG 2000。这种通过稀疏变换实现压缩的方法称为变换编码<sup>[3]</sup>。变换编码在现代数据获取系统中一直发挥着重要的作用, 例如数码相机、数码摄像机。但是, 这种采样再压缩的数据获取过程造成了严重的资源浪费, 尤其对于核磁共振成像、雷达遥感成像等特殊应用。例如, 百万级像素的传感器只使用了压缩后的几百 Kbyte 数据。

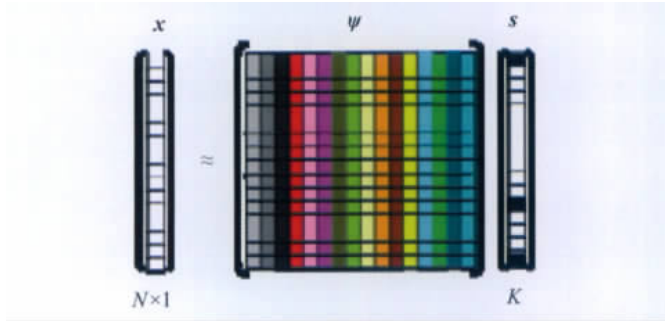


图3 信号的矩阵-向量稀疏表示示意图

Fig. 3 Sparse representation of signals in the form of matrix-vector

## 1.2 压缩感知问题描述

考虑一般的采样问题<sup>[23]</sup>

$$y_k = \langle x, \varphi_k \rangle \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

式中,  $x \in \mathbf{R}^N$  为原始信号,  $y_k$  为采样点,  $\varphi_k$  为采样向量(函数)。例如, 当  $\varphi_k$  取为脉冲(Delta)函数时,  $y_k$  为 Nyquist 采样模式中的采样点; 当  $\varphi_k$  取为区域指示函数时,  $y_k$  为图像的像素点; 当  $\varphi_k$  取为正弦波时,  $y_k$  为核磁共振成像中的 Fourier 系数采样点。特别地, 当  $M \ll N$ , 即从原始信号  $x$  直接获取少量的观测值  $y$ , 就是本文关注的压缩感知:

$$y = \Phi x \quad (3)$$

式中,  $x \in \mathbf{R}^N$  为原始高维信号,  $y$  为  $M \times 1$  的低维压

缩测量向量,  $\Phi = [\varphi_1 | \varphi_2 | \dots | \varphi_M]^*$  为  $M \times N$  的测量矩阵。当  $x = \Psi s$ , 式(3)转化为利用信息算子  $\Theta$  从变换系数获取少量的压缩测量, 即

$$y = \Phi \Psi s = \Theta s \quad (4)$$

式中,  $\Theta = \Phi \Psi$ , 称为  $M \times N$  的信息算子。图4给出了信号压缩采样的矩阵-向量表示示意图。特别地, 当信号  $x$  本身是稀疏的或可压缩的, 式(4)退化为  $y = \Theta x = \Phi x$ , 即  $\Theta = \Phi$ 。

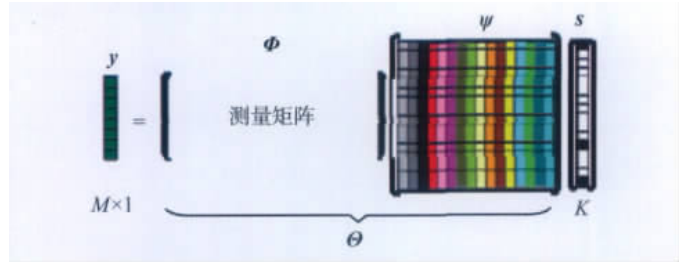


图4 信号压缩采样的矩阵-向量表示示意图

Fig. 4 Sketch map of compressive sampling in the form of matrix-vector

现在的问题是: 是否存在测量矩阵  $\Phi$  以使采样过程保持重建信号所需的足够信息? 是否可以利用  $M \ll N$  个测量值精确重建原始信号  $x$ ? 如何设计快速算法保证重建信号的精确性和稳定性? 由于  $M \ll N$ , 因而压缩感知是个不适定的数学反问题, 式(3)存在无数个可行解。但是, 当  $x$  在  $\Psi$  域是稀疏的或可压缩的, 压缩感知在理论上成为可能。

## 1.3 压缩感知基本理论

在压缩感知理论中, 采样速率不再取决于信号带宽, 而在很大程度上取决于两个基本准则, 即稀疏性和非相干性, 或者, 稀疏性和等距约束性。

### 1.3.1 基于稀疏性和非相干性准则的压缩感知理论

**定义3** 相干性<sup>[24]</sup> 假设  $(\tilde{\Phi}, \Psi)$  是  $\mathbf{R}^N$  的一对正交基, 即  $\tilde{\Phi}^* \tilde{\Phi} = \mathbf{I}$ ,  $\Psi^* \Psi = \mathbf{I}$ ,  $\tilde{\Phi}$  压缩测量信号  $x$ ,  $\Psi$  稀疏表示信号  $x$ 。令  $\tilde{\Theta} = \tilde{\Phi} \Psi$ ,  $\mu(\tilde{\Theta}) = \sqrt{N} \max_{1 \leq k, j \leq N} |\tilde{\Theta}_{k,j}|$ 。  $\tilde{\Phi}$  和  $\Psi$  的相干性定义为

$$\mu(\tilde{\Phi}, \Psi) = \sqrt{N} \max_{1 \leq k, j \leq N} |\langle \tilde{\varphi}_k, \psi_j \rangle| \quad (5)$$

由于  $(\tilde{\Phi}, \Psi)$  是正交基对, 因此  $\tilde{\Theta} = \tilde{\Phi} \Psi$  是正交矩阵。由于  $\tilde{\Theta}$  的每行或每列的  $L_2$  范数必然为 1, 因而  $1 \leq \mu(\tilde{\Theta}) \leq \sqrt{N}$ 。当  $\tilde{\Theta}$  的每行元素取值都等于  $1/\sqrt{N}$ , 即  $\tilde{\Theta}$  的每行元素是平坦分布的,  $\mu(\tilde{\Theta}) = 1$ ; 当  $\tilde{\Theta}$  的每行元素取值只有一个 1 其余

为 0, 即  $\tilde{\Theta}$  的每行元素是高度凝聚的,  $\mu(\tilde{\Theta}) = \sqrt{N}$ 。容易知道, 当  $\mu(\tilde{\Theta}) = \sqrt{N}$ ,  $M \ll N$  的压缩测量精确重建原始信号的概率为 0。特别地, 当  $\mu(\tilde{\Phi}, \Psi) = 1$ , 称  $\tilde{\Phi}$  和  $\Psi$  有最大非相干性, 或者是非相干的。显然, 此时  $\tilde{\Phi}$  和  $\Psi$  不能相互稀疏表示。定理 1 指出, 非相干正交基对  $(\tilde{\Phi}, \Psi)$  有利于高效的压缩采样和信号重建。

**定理 1** 稀疏信号的非相干压缩感知<sup>[6]</sup> 假设信号  $x \in \mathbf{R}^N$  在  $\Psi$  域是  $K$ -稀疏的。在  $\tilde{\Phi}$  域均匀随机选取  $M$  个压缩测量:  $y = Q\tilde{\Phi}x = Q\tilde{\Theta}s = \Theta s$ , 其中,  $Q$  为  $M \times N$  的坐标选取矩阵,  $\Theta = Q\tilde{\Theta}$  为  $M \times N$  的信息算子。如果

$$M \geq C\mu^2(\tilde{\Phi}, \Psi) K \log N \quad (6)$$

式中,  $C > 0$  为某个固定常数, 则压缩感知问题式 (3) 可以转化为约束最优化问题

$$\min_{s \in \mathbf{R}^N} \|s\|_1 \quad s. t. \quad \Theta s = y \quad (7)$$

且其解在很大概率上等于式 (3) 的精确解, 即  $\hat{s} = s$ 。

定理 1 显示了非相干正交基对  $(\tilde{\Phi}, \Psi)$  对于压缩感知的重要性。不等式 (6) 指出,  $\mu(\tilde{\Phi}, \Psi)$  越小, 压缩采样所需的测量个数就会越少, 意味着压缩测量  $\{y_k\}_{k=1,2,\dots,M}$  包含信号  $x$  的信息就会越多。特别地, 当  $\mu(\tilde{\Phi}, \Psi)$  趋近于 1 时, 压缩感知只需  $O(K \log N)$  个压缩测量就能以大概率精确重建原始信号。从信号重建过程来看, 只需求解约束的  $L_1$  范数最小化这个凸最优化问题; 从数值解的精度来看, 压缩采样的  $O(K \log N)$  个压缩测量在很大概率上没有损失原始信号的信息。定理 1 存在的不足之处是: 只适用于  $K$ -稀疏信号, 而实际信号如自然图像往往是可压缩的; 此外, 最优化问题式 (7) 的解有不精确的可能。

### 1.3.2 基于稀疏性和等距约束性准则的压缩感知理论

基于稀疏性和等距约束性准则, Candès 等人进一步给出了鲁棒的压缩感知理论。首先给出等距约束性的概念<sup>[23]</sup>。

**定义 4** 等距约束性 对于任意整数  $K = 1, 2, \dots$ , 定义矩阵  $\Theta$  的等距约束常数  $\delta_K$  为使得式 (8) 成立的最小值

$$(1 - \delta_K) \|s\|_2^2 \leq \|\Theta s\|_2^2 \leq$$

$$(1 + \delta_K) \|s\|_2^2 \quad (8)$$

式中,  $s$  为任意  $K$ -稀疏向量, 式 (8) 称为等距约束性 (RIP)。不严格地, 若  $\delta_K$  小于且不接近 1, 称  $\Theta$  满足 RIP。

假设: 存在等距常数  $\delta_{2K} < 1$  使得  $\Theta$  满足 RIP, 即  $\Theta$  的任意  $2K$  列组成的子矩阵  $\Theta_T$  是近似正交的 (其中,  $|T| = 2K$ ); 或者, 任何  $2K$ -稀疏向量不属于  $\Theta$  的 Null 空间, 即  $\{s_i \neq 0\}_{i \in \Xi, |\Xi| \leq 2K} \cap N(\Theta) = \{0\}$ 。当  $\Theta$  满足上述假设, 压缩测量  $y$  必定对应着唯一的  $K$ -稀疏向量  $s$ 。事实上, 假设存在  $K$ -稀疏向量  $s_1$ , 使得  $y = \Theta s_1$ , 则必定不存在  $K$ -稀疏向量  $s_2 (\neq s_1)$  使得  $y = \Theta s_2$ 。否则, 存在  $2K$ -稀疏向量  $s = s_1 - s_2$ , 使得  $\Theta s = \Theta(s_1 - s_2) = 0$ , 与存在等距常数  $\delta_{2K}$  使得  $\Theta$  满足 RIP 或者任何  $2K$ -稀疏向量不属于  $\Theta$  的 Null 空间相矛盾。由上可知,  $\Theta$  满足一定的等距约束性能够保证压缩感知信号重建的唯一性。不仅如此, 事实上, 基于稀疏性和 RIP 准则, 定理 2 将压缩感知问题转化为了约束  $L_0$  最小化的非凸最优化问题, 且在理论上同时保证了压缩感知信号重建的存在性、唯一性和精确性。

**定理 2**<sup>[23-24]</sup> 假设  $s$  是  $\mathbf{R}^N$  中的  $K$ -稀疏向量,  $\Theta$  的  $2K$  阶等距约束常数  $\delta_{2K} < 1$ , 则压缩感知问题式 (3) 可以转化为约束最优化问题

$$\min_{s \in \mathbf{R}^N} \|s\|_0 \quad s. t. \quad \Theta s = y \quad (9)$$

且其解是压缩感知的唯一精确解, 即  $\hat{s} = s$ 。

定理 2 显示了等距约束常数对于压缩感知的重要性。当  $\Theta$  的  $2K$  阶等距约束常数小于 1 时: 1) 保证了压缩采样的信息率, 压缩测量包含了重建信号所需的足够信息; 2) 保证了重建信号的唯一性; 3) 保证了重建信号的精确性; 4) 保证了压缩采样的稳定性, 原始信号的小扰动对应着压缩测量的小扰动。定理 2 存在的不足之处是:  $L_0$  范数的非凸性使得最优化问题式 (9) 是个需要组合搜索的 NP-hard 问题, 在数值计算上不可行。

**定理 3**<sup>[5,23]</sup> 假设  $s$  是  $\mathbf{R}^N$  中的任意向量, 且  $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$ , 则压缩感知问题式 (3) 可以转化为约束最优化问题

$$\min_{s \in \mathbf{R}^N} \|s\|_1 \quad s. t. \quad \Theta s = y \quad (10)$$

解  $\hat{s}$  满足

$$\begin{aligned} \|\hat{s} - s\|_2 &\leq C \|s - s_K\|_1 / \sqrt{K} \\ \|\hat{s} - s\|_1 &\leq C \|s - s_K\|_1 \end{aligned} \quad (11)$$

式中,  $C > 0$  为某个固定常数,  $s_K$  为  $s$  的  $K$  项逼近



(保留  $s$  的  $K$  个最大绝对值分量, 其他分量置为 0)。

定理 3 通过收紧等距约束常数的范围, 使得  $\Theta$  的任意  $2K$  列组成的子矩阵更趋于近似正交, 将压缩感知松弛转化为约束  $L_1$  范数最小化的凸最优化问题, 不仅保证了压缩感知的理论完备性, 而且在数值计算上保证了压缩感知的可行性。当信号  $x$  在  $\Psi$  域是  $K$ -稀疏的, 真实解  $s$  只有  $K$  个非零项, 则  $\hat{s} = s$ 。换句话说, 当  $\Theta$  的  $2K$  阶等距约束常数小于 0.414, 约束最优化问题式 (10) 能够利用  $M \ll N$  个压缩测量精确重建原始信号。定理 3 不仅适用于  $K$ -稀疏信号, 而且适用于可压缩信号。当信号是可压缩的, 式 (11) 给出了近似解与真实解的误差范围, 完全由某个固定常数  $C$  和  $s$  的  $N - K$  个最小绝对值分量决定。同时, 在下文的测量矩阵设计部分将指出, 测量次数  $M$  与稀疏性  $K$  和信号长度  $N$  之间的具体关系将由稀疏矩阵  $\Psi$  和测量矩阵  $\Phi$  共同决定。

与传统 Nyquist 采样相似, 压缩采样过程往往不可避免地受到随机噪声或其他干扰因素的影响。一般地, 给出噪声情形下的压缩感知问题<sup>[2,23]</sup>:

$$y = \Phi x + z \quad (12)$$

式中  $z$  为随机噪声或其他误差项。

定理 4<sup>[5,23]</sup> 假设  $s$  是  $\mathbf{R}^N$  中的任意向量, 且  $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$ , 则压缩感知问题式 (12) 可以转化为最优化问题

$$\min_{s \in \mathbf{R}^N} \|s\|_1 \quad s. t. \quad \|\Theta s - y\|_2 \leq \varepsilon \quad (13)$$

式中,  $\varepsilon$  为误差量, 且解  $\hat{s}$  满足

$$\|\hat{s} - s\|_2 \leq C_1 \|s - s_K\|_1 / \sqrt{K} + C_2 \varepsilon \quad (14)$$

$C_1 > 0, C_2 > 0$  为某个固定常数,  $s_K$  为  $s$  的  $K$  项逼近。

由式 (14) 知, 噪声情形下压缩感知问题 (12) 的重建误差主要由两部分组成。第一部分为无噪声情形下压缩采样的重建误差, 第二部分由随机噪声或其他因素决定的误差。可见, 定理 4 不仅适用于稀疏信号和可压缩信号, 而且适用于噪声等其他误差情形, 具有重要的理论价值和现实意义。同样地, 下文中的测量矩阵设计部分将指出, 测量次数  $M$  与稀疏性  $K$  和信号长度  $N$  之间的具体关系将由稀疏矩阵  $\Psi$  和测量矩阵  $\Phi$  共同决定。

在给出定理 3、定理 4 之前, Candès 等人还基于 RIP 准则提出了其他版本的压缩感知重建定理<sup>[2,24-27]</sup>。由于篇幅有限, 这里不予赘述。此外, 本文仅介绍了压缩感知的基础理论部分, 关于基础理论的引申、推广与变种, 感兴趣的读者可以阅读参考

文献 [2,28-41]。

## 2 压缩感知的核心问题

### 2.1 压缩感知的稀疏字典设计

信号  $x$  的稀疏性或可压缩性是压缩感知的重要前提和理论基础。因此, 压缩感知理论首要的研究任务就是信号的稀疏表示。稀疏字典设计是压缩感知的核心问题之一, 在于: 只有选择合适的稀疏字典, 才能保证表示系数具有足够的稀疏性或衰减性, 才能在减少压缩测量的同时保证压缩感知的重建精度。

目前, 稀疏字典主要包括正交基字典、紧框架字典、过完备字典。正交基字典主要是计算调和与分析中的正交变换系统, 如 Wavelet 变换<sup>[1]</sup>; 紧框架字典主要是以 Ridgelet、Curvelet、Bandlet、Contourlet 为代表的图像几何多分辨率表示或者称 Beyond Wavelet 变换<sup>[42-48]</sup>; 在过完备字典中, 用于稀疏表示的不再是“单一基”, 而是通过构造或学习得到的冗余原子库, 通过提高变换系统的冗余性增强信号逼近的灵活性, 提高对图像等复杂信号的稀疏表示能力<sup>[49-55]</sup>。例如, 自然图像往往含有平滑区域、屋顶边缘、阶跃边缘、振荡纹理等结构成分, 过完备字典中的原子应该能够匹配不同类型的结构。图 5 给出了图像中不同类型几何结构的 3 维示意图。

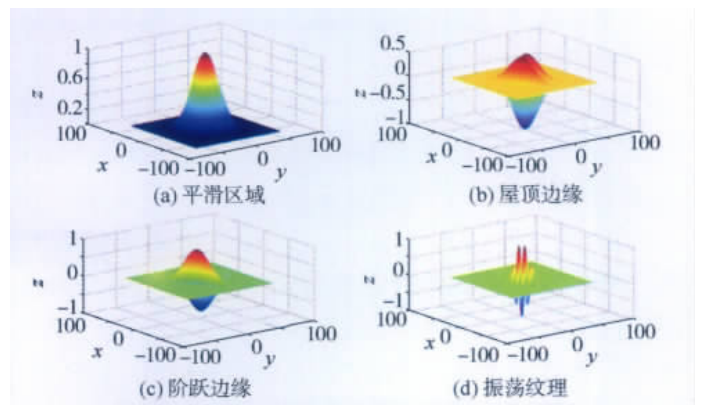


图 5 图像中不同类型几何结构的 3 维示意图

Fig. 5 3D sketch maps of different geometrical structures in images

1993 年, Mallat 和 Zhang<sup>[49]</sup> 首次提出了基于过完备字典的稀疏分解思想, 指出了过完备字典对于信号稀疏表示的必要性和重要性。基于过完备字典的稀疏分解依然是当前信号稀疏表示研究的热点和

难点。过完备字典由称为过完备原子库的冗余系统构成,原子不必再是“单一基”函数。过完备字典的构造或学习应遵循基本准则:字典中的原子应能尽量匹配信号本身固有的各种不同特征。在这种准则下,稀疏字典必定是非正交的且是冗余的,正是通过增加原子个数提高变换系统的冗余性来增强信号逼近的灵活性,进而提高图像等复杂信号的稀疏表示能力。当字典中的原子个数大于信号维数  $N$  且包含  $N$  个线性无关向量张成整个信号空间时,字典称为过完备的。基于过完备字典的稀疏分解使得信号能量集中在极少数原子上,正是这些具有非零系数的原子匹配了信号的不同特征。

设计适合特定信号的过完备字典,目前主要包括人工构造和训练学习两大类方法。基于构造方法的过完备字典设计是主流,主要包括 Wavelet 和局部 Cosine 函数的级联、各向同性的 Gabor 字典<sup>[50]</sup>、各向异性的 Refinement-Gaussian 混合字典<sup>[51]</sup>、各向异性的 Gabor 感知多成分字典等<sup>[52]</sup>。虽然 Wavelet 能够稀疏表示信号中的点奇异特征、局部 Cosine 函数能够有效表征纹理特征,但是由于 Wavelet 的可分离性与各向同性,Wavelet 和局部 Cosine 函数的级联不能有效刻画图像中的边缘轮廓等线奇异特征。各向同性的 Gabor 字典能够有效刻画纹理特征。但是,由于 Gabor 原子的各向同性和单频带宽,也不适于有效刻画图像中的边缘轮廓等线奇异特征。各向异性的 Refinement-Gaussian 混合字典采用 Gauss 函数及其二阶导数作为原子的生成函数,能够有效表征图像中边缘轮廓结构,但是没有能够有效刻画纹理特征的原子。各向异性的 Gabor 感知多成分字典基于视觉感知的“有效编码假设”<sup>[53]</sup>,以 2 维 Gabor 函数作为字典原子的生成函数,依据视觉皮层中神经元的响应特性和组织方式以及图像的多成分特性,约束生成函数中自由参数的取值范围,通过对生成函数进行平移、旋转、伸缩等几何变换生成一系列原子,遵循过完备字典构造应该遵循的基本准则。基于学习的过完备字典是过完备字典设计问题的难点和热点,涌现的典型学习算法主要有文献[54-56]。其中, K-SVD 这类学习算法具有代表性,稀疏表示效果好,计算复杂度低,但不足之处是缺乏严格的理论支撑。基于过完备字典的稀疏表示的另一个方面是设计快速有效的稀疏分解算法。由于压缩感知信号重建问题追求的同样是稀疏解,因此某种程度上这里的稀疏分解算法可以推广应用到

压缩感知问题。为了避免重复,稀疏分解的相关算法将在下文予以介绍。国内关于稀疏表示也展开了广泛的理论和应用研究<sup>[57-61]</sup>。例如,谢胜利等人<sup>[58]</sup>基于稀疏表示思想开展自适应的盲分离算法研究;尹忠科等人<sup>[59]</sup>利用快速傅里叶变换实现匹配追踪的快速算法研究。

## 2.2 压缩感知的测量矩阵设计

测量矩阵设计是压缩采样理论的核心,直接决定了压缩采样理论是否能够成功实现。由于压缩测量个数和信号重建精度以及信号稀疏性有着密切的联系,因此测量矩阵的设计应该与稀疏字典的设计统筹考虑。从原理的角度看,测量矩阵的设计要以非相干性或等距约束性为基本准则,既要减少压缩测量个数又要确保压缩感知的信号重建精度。从技术的角度看,测量矩阵的设计包括两个方面:一是测量矩阵的元素, Candès 等人给出了随机生成的设计策略;二是测量矩阵的维数,压缩测量个数  $M$  与信号稀疏性  $K$  和信号长度  $N$  应该满足一定的关系。

### 2.2.1 基于非相干性准则的测量矩阵设计

稀疏信号的非相干压缩感知定理要求非相干的正交基对  $(\tilde{\Phi}, \Psi)$ 。理想情况下,当正交基对具有最大非相干性,即  $\mu(\tilde{\Phi}, \Psi) = 1$ , 压缩感知信号重建问题式(7)只需  $O(K \log N)$  个压缩测量就能以大概率精确重建原始信号。典型的例子是,正交基对  $(\tilde{\Phi}, \Psi)$  由 Delta 基函数和 Fourier 基函数设计获得<sup>[2, 4, 6, 23]</sup>。由定理 1 知,若信号  $x \in \mathbf{R}^N$  本身是  $K$ -稀疏的,当  $\tilde{\varphi}_k$  取为 Fourier 基函数  $\tilde{\varphi}_k(j) = N^{-1/2} e^{-i2\pi kj/N}$ ,  $\psi_j$  取为 Delta 基函数  $\psi_j(k) = \delta(j - k)$ , 则只要在 Fourier 域任意随机均匀地选取  $M = O(K \log N)$  个变换系数  $s_{\Omega, 1\Omega} = M$  (即随机测量),就能保证很大概率地精确重建原始信号;如果信号  $x \in \mathbf{R}^N$  在 Fourier 基函数下是  $K$ -稀疏的,当  $\tilde{\varphi}_k$  取为 Delta 基函数  $\tilde{\varphi}_k(j) = \delta(j - k)$ ,  $\psi_j$  取为 Fourier 基函数  $\psi_j(k) = N^{-1/2} e^{i2\pi jk/N}$ , 则只要在时域任意随机均匀地选取  $M = O(K \log N)$  个信号值,就能保证很大概率地精确重建原始信号。

一般地,信号重建问题式(7)需要  $M = O(\mu^2(\tilde{\Phi}, \Psi) K \log N)$  个随机压缩测量才能很大概率地精确重建原始信号<sup>[2, 23]</sup>。例如,当  $\tilde{\Phi}$  取为 Noiselet,  $\Psi$  取为 Harr Wavelet,  $\mu(\tilde{\Phi}, \Psi) = \sqrt{2}$ ;  $\Psi$  取为 Daubechies D4 Wavelet,  $\mu(\tilde{\Phi}, \Psi) = 2.2$ ;  $\Psi$  取

为 Daubechies D8 Wavelet,  $\mu(\tilde{\Phi}, \Psi) = 2.9$ 。事实上, 当  $\Psi$  取为任意固定正交矩阵,  $\tilde{\Phi}$  取为某种随机正交矩阵,  $\tilde{\Phi}$  与  $\Psi$  在很大程度上是非相干的<sup>[23]</sup>。例如, 在单位球上随机均匀独立地选取  $N$  个正交单位向量, 通过这种随机方式获得的正交基  $\tilde{\Phi}$  与任意固定正交基  $\Psi$  的相干性大约为  $\sqrt{2\log N}$ ; 如果  $\tilde{\Phi}$  的所有元素都是独立同分布选取的, 例如服从 Gaussian 分布或 Bernoulli 分布,  $\tilde{\Phi}$  与  $\Psi$  的相干性也是非常小的。

但是, 定理 1 的不足之处在于, 它只适用于  $K$ -稀疏信号。这里, 假设信号  $x$  属于半径为  $R$  的弱- $L_p$  球, 即如果将  $x$  各项按降序排列:  $|x|_1 \geq \dots \geq |x|_N$ , 则第  $i$  最大项  $|x|_i$  满足:

$$|x|_i \leq Ri^{-1/p} \quad 1 \leq i \leq N \quad (15)$$

可知, 信号  $x$  满足一种幂律衰减性, 参数  $p$  控制着衰减速度。事实上, 这种衰减性与信号变换编码和可压缩性有着密切联系。对于如式 (15) 的非稀疏信号, 随机正交矩阵  $\tilde{\Phi}$  和任意固定正交基  $\Psi$  组成的非相干正交基对  $(\tilde{\Phi}, \Psi)$  依然适用。

**定理 5** 可压缩信号的非相干压缩感知<sup>[4]</sup> 假设信号  $x \in \mathbf{R}^N$  在正交基  $\Psi$  下满足式 (15) ( $0 < p < 1$ ), 或者  $\|x\|_1 \leq R$ , 且  $\alpha$  是充分小的正数。利用某种测量矩阵  $\tilde{\Phi}$  随机均匀获取  $M$  个压缩测量, 如果  $M \geq C \cdot \mu^2(\tilde{\Phi}, \Psi) K \log N$ , 其中,  $C > 0$  为某个固定常数, 则压缩感知问题式 (3) 可以转化为如下约束最优化问题:

$$\min_{s \in \mathbf{R}^N} \|s\|_1 \quad s. t. \quad \Theta s = y \quad (16)$$

式 (16) 概率为 1 且存在唯一解, 同时重建误差概率不小于  $1 - O(N^{-p/\alpha})$  且满足

$$\|s - \hat{s}\|_2 \leq C_{p,\alpha} R (K/\log N)^{-r} \quad (17)$$

式中,  $r = 1/p - 1/2$ ,  $C_{p,\alpha}$  只依赖于参数  $p$  和  $\alpha$ 。

### 2.2.2 基于等距约束性准则的测量矩阵设计<sup>[5,23]</sup>

由定理 3、4 知, 信息算子  $\Theta$  或者测量矩阵  $\Phi$  要满足 RIP 条件。在这些定理中,  $\Phi$  既可以是随机矩阵也可以是确定性矩阵。从这个意义上讲, 基于稀疏性和 RIP 准则的压缩感知理论具有一般性。这里主要介绍随机测量矩阵。

首先, 对于 2.2.1 部分中讨论的非相干正交基对  $(\tilde{\Phi}, \Psi)$ , 只要满足  $M \geq CK(\log N)^4$ , 其中,  $C$  为某个固定常数, 则  $\Theta = Q\tilde{\Phi}\Psi$  将很大概率地满足

RIP。如果希望信息算子不满足 RIP 的概率小于  $O(n^{-\beta})$ , 其中  $\beta > 0$ , 则要求  $M \geq CK(\log N)^5$ 。

其次, 2.2.1 节中随机产生正交基  $\tilde{\Phi}$  的方法同样适用于测量矩阵  $\Phi$ , 例如: 1) 在  $\mathbf{R}^M$  的单位球上均匀独立地选取  $N$  个正交单位向量生成  $\Phi$ ; 2) 独立同分布地从均值为零方差为  $1/M$  的正态分布生成  $\Phi$ ; 3) 独立同分布地从取值为  $\pm 1/\sqrt{M}$  对称的伯努利 (Bernoulli) 分布生成  $\Phi$ 。

对于任意固定的正交基  $\Psi$  和随机产生的测量矩阵  $\Phi$ , 如果  $M \geq CK \log(N/K)$ , 则  $\Theta = \Phi\Psi$  很大概率地满足 RIP。可见, 当  $\Psi$  为正交基时, 上述测量矩阵  $\Phi$  在某种意义上具有普适性。主要在于随机矩阵在正交变换下具有旋转不变性,  $\Theta = \Phi\Psi$  的随机性没有因为  $\Phi$  乘上  $\Psi$  而改变。

### 2.3 压缩感知的重建算法设计

作为不适定的数学反问题, 压缩感知信号重建在理论上存在着无数多个可行解。但是, 上文压缩感知相关定理指出, 非相干性或等距约束性准则为近似精确或精确重建提供了理论上的保证。压缩感知的第 3 个核心问题是重建算法的设计。重建算法的设计应该遵循如下基本准则: 算法应该利用尽量少的压缩测量, 并且快速、稳定、精确或近似精确地重建原始信号。

定理 2 指出, 当信号在变换域是  $K$ -稀疏的, 如果  $\Theta$  的  $2K$  阶约束等距常数小于 1, 那么压缩感知的信号重建可以转化为约束  $L_0$  范数最小化的非凸最优化问题求解。但是, 由于  $L_0$  范数的高度非凸性,  $L_0$  范数最小化是个需要组合搜索的 NP-hard 问题。当  $N$  很大时, 不仅在数值计算上无法有效实现, 而且抗噪能力很差。为此, 学者们陆续提出了多种近似等价的信号重建算法。虽然基于  $L_2$  范数的最小二乘算法计算简单, 易于实现, 但是不能获得真实的稀疏解  $s$ 。目前, 压缩感知稀疏重建算法主要包括 3 类, 即松弛方法、贪婪方法、非凸方法<sup>[62-65]</sup>。需要指出的是, 由于稀疏表示追求的同样是稀疏解, 因此这 3 类算法也适用于信号的稀疏表示问题。

第 1 类方法是松弛方法, 最典型的就是基于  $L_1$  范数最小化<sup>[66]</sup>。图 6 给出了基于  $L_2$ 、 $L_1$ 、 $L_0$  范数最小化重建稀疏信号的 2D 示意图。例如, 定理 3 显示, 当  $\Theta$  的等距约束常数满足收紧的 RIP 条件, 非凸  $L_0$  范数最小化与凸松弛的  $L_1$  范数最小化是等价的。典型的  $L_1$  凸范数最小化求解方法是基于线性

规划的基追踪算法 (BP)<sup>[6]</sup>。但是, BP 算法在实际应用中存在两个明显的问题<sup>[64,67]</sup>: 一方面, 当压缩测量个数  $M \geq cK$ ,  $c \approx \log(N/K)$  时, 计算复杂度的量级为  $O(N^3)$ ; 另一方面,  $L_1$  范数不能区分指示稀疏系数的位置, 将导致低尺度的能量迁移到高尺度的可能, 在高频区域出现震荡等伪人工现象。为了降低计算复杂度, 文献陆续报道了内点法<sup>[68-69]</sup>、LASSO<sup>[70]</sup>、最小角回归 (LARs)<sup>[71]</sup>、梯度投影 (GPSR)<sup>[72]</sup>、软/硬迭代阈值 (SIT/HIT)<sup>[24,73-74]</sup> 等多种稀疏重建算法。总地说来, 此类方法重建精度高, 需要的压缩测量个数少  $O(K \log(N/K))$ , 但是计算复杂度相对较高。

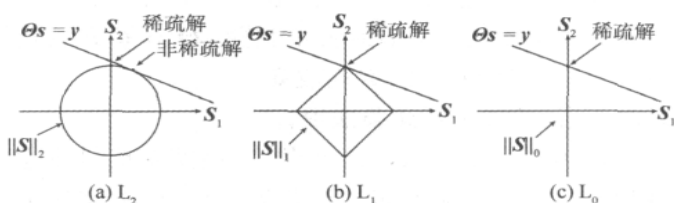


图 6 基于  $L_2$ 、 $L_1$ 、 $L_0$  范数最小化重建稀疏信号的 2D 示意图

Fig. 6 2D sketch maps of sparse signal reconstruction based on  $L_2$ ,  $L_1$ ,  $L_0$

第 2 类方法就是贪婪方法, 基本思想是通过每次迭代时进行局部最优化寻找各个非零系数。主要包括匹配追踪 (MP)<sup>[49]</sup>、正交匹配追踪 (OMP)<sup>[75-77]</sup>、近似 OMP 的梯度追踪 (GP)<sup>[78]</sup>、正则正交匹配追踪 (ROMP)<sup>[34]</sup>、树形匹配追踪 (TMP)<sup>[79]</sup>、分段匹配追踪 (StOMP)<sup>[32]</sup>、子空间追踪 (SP)<sup>[80]</sup>、压缩感知匹配追踪 (CoSaMP)<sup>[33]</sup>、稀疏性自适应匹配追踪 (SAMP)<sup>[81]</sup> 等。贪婪方法计算复杂度相对较低, 但是与松弛方法相比, 需要更多的压缩测量 ( $O(K \log N)$ ), 重建精度相对较低。例如, 当压缩测量个数满足  $M \geq cK$ ,  $c \approx 2 \log N$  时, OMP 能够以较高的概率重构信号, 计算复杂度为  $O(NK^2)$ 。因此, 与 BP 算法相比, OMP 是以较多的压缩测量换取较快的计算速度。又如, Donoho 等人提出的 StOMP 以牺牲计算精度为代价进一步提高 OMP 的计算速度。在上述 9 种贪婪算法中, 由于 SAMP 不需要稀疏度先验, 因此在实用性和有效性上优于其他贪婪算法。

第 3 类方法就是非凸方法。该类方法所需的压缩测量个数、计算复杂度、信号重构精度总体上介于松弛和贪婪两类方法之间。典型的算法有: 基于  $L_p$  ( $0 < p \leq 1$ ) 范数的 FOCUSS 算法<sup>[81,82]</sup> 和迭代重

新加权最小二乘算法<sup>[83-85]</sup>。特别地, Chartrand<sup>[83]</sup> 给出了等式约束  $L_p$  范数最小化精确重建稀疏信号时等距约束常数满足条件:  $\delta_{aK} + b\delta_{(a+1)K} < b - 1$  ( $b > 1, a = b^{p/(2-p)}$ ), 同时证明了定理 2 中  $\delta_{2K} < 1$  是上述条件的极限情形。此外, Ji 等人<sup>[40]</sup> 基于 Gaussian 先验和 Gamma 超先验、Babacan 等人<sup>[86]</sup> 基于 Laplacian 先验和 Jeffrey 超先验分别提出了多层 Bayesian CS 稀疏重建算法, 通过第 2 类最大似然估计法求解相关参数和稀疏系数。

### 3 有待研究的几个关键问题

压缩感知经过近年来的迅猛发展, 已基本形成了初步的理论框架, 包括基础理论、实现方法和实际应用。但是, 压缩感知理论还有很多亟待解决的问题, 压缩感知有待解决的几个关键问题如下:

#### 3.1 基础理论层面

##### 1) 非 $L_1$ 范数驱动的压缩感知信号重建理论

根据前面的讨论,  $L_1$  范数最小化已经成功应用于非相干性准则驱动的稀疏信号压缩感知理论和等距约束性准则驱动的可压缩信号压缩感知理论。具体表现在当要精确或近似精确重建原始信号时, 基于  $L_1$  范数最小化的相关定理对稀疏字典  $\Psi$ 、测量矩阵  $\Phi$ 、压缩测量个数  $M$ 、信号重建精度等都有了明确的界定。基于贪婪方法和非凸方法的信号重建虽然有很多优点, 但是在理论上一直存在诸多不完备之处。突出表现在在特定稀疏字典和测量矩阵下, 大多贪婪和非凸重建算法没有给出对应信号重建精度所需的压缩测量个数  $M$ 。

##### 2) 基于非正交稀疏字典的压缩感知信号重建理论

在等距约束性准则驱动的可压缩信号压缩感知定理中, 关于稀疏字典  $\Psi$  和测量矩阵  $\Phi$  仅要求两者乘积  $\Theta = \Phi\Psi$  满足 RIP。但是, 测量矩阵设计部分关于压缩测量个数  $M$  的界定还额外附加了假设条件, 即稀疏字典  $\Psi$  是正交基。当测量矩阵  $\Phi$  依然通过 3 种方式生成, 但是稀疏字典  $\Psi$  不再正交时,  $\Theta = \Phi\Psi$  是否满足 RIP? 压缩测量个数  $M$  的下限是否不变? 由于过完备的稀疏字典才能保证表示系数具有足够的稀疏性或衰减性, 进而能够在减少压缩测量的同时保证压缩感知的重建精度, 因此需要设计鲁棒的测量矩阵  $\Phi$  使之与过完备稀疏字典依然满足 RIP, 同时需要重新估计压缩测量个数  $M$  的下



限,这时所需的压缩测量定会减少。

### 3) 自然图像的自适应压缩感知信号重建理论

虽然基于线性投影的压缩感知理论能够直接应用于自然图像这样的复杂高维信号,但是由于没有考虑到自然图像的固有特性,诸如结构多成分性、高阶统计性等,对于自然图像压缩采样本身没有特殊的指导作用。事实上,相对于1维离散信号,自然图像的复杂性和高维性使之需要自适应的压缩采样和重建算法。例如,基于图像多成分性的特点能够提高重建图像的峰值信噪比和视觉效果<sup>[87]</sup>。注意到,压缩感知理论的大部分文献中,测量矩阵 $\Phi$ 都是线性的且设计好的,不需根据观测信号自适应地变化。对于自然图像,假如能够实现非线性自适应的压缩测量,压缩感知的压缩性能势必会获得大幅度的提高。目前,自然图像的自适应压缩感知信号重建理论基本空白。这项工作对压缩感知的理论推广和实际应用都具有重要意义。

## 3.2 实现方法层面

### 1) 基于学习的自然图像过完备字典设计

目前,基于构造方法的自然图像过完备字典设计具有很好的理论支撑,正则化几何方法、几何多尺度分析、基于信息论的“有效编码假设”为其奠定了坚实广阔的理论基础。但是,从国际上关于过完备字典设计的整体情况看,基于学习的自然图像过完备字典设计工作比较少,主要是由于设计难度大、性能要求高,同时缺乏严格的理论支撑。这项工作对于稀疏字典和压缩感知都将是重要的理论完善。

### 2) 硬件易实现的确定性测量矩阵设计

在等距约束性准则驱动的可压缩信号压缩感知定理3、定理4中,要求稀疏字典 $\Psi$ 和测量矩阵 $\Phi$ 的乘积 $\Theta = \Phi\Psi$ 满足RIP。其中,稀疏字典 $\Psi$ 可以是正交的也可以是非正交的,测量矩阵 $\Phi$ 可以是随机的也可以是确定的。但是,面向应用且硬件易实现的测量矩阵应该具有以下基本特点:满足等距约束性、压缩测量个数少、采样计算成本低、存储矩阵的空间小,以及测量矩阵最好是确定性的。设计出硬件容易实现的测量矩阵和快速稳定的重建算法是将压缩感知理论推向实用的关键。

### 3) 噪声情形大尺度问题的快速鲁棒重建算法设计

快速稳定的信号重建算法是将压缩感知理论推向实用的关键技术之一,特别适用于纠错编码、核磁

共振成像、NMR波谱研究等大尺度问题。通常,基于 $L_1$ 最小化松弛算法的计算复杂度相对较高。因而,在非 $L_1$ 范数最小化驱动的压缩感知理论完善工作的基础上,希望能够基于稀疏性自适应的贪婪迭代和基于多层先验建模的非凸迭代设计适于噪声情形大尺度问题的快速鲁棒重建算法。

## 4 结 论

压缩采样问题最初由美国威斯康星大学的Mistretta教授等人提出:能否通过减少采样数据缩短磁共振成像的时间并且能够利用这些有限量的数据重建原始图像。对于这个问题,威斯康星大学的研究人员最初采用传统图像重建算法进行实验。但是,传统方法的重建图像不仅分辨率低,而且边缘模糊,人工效应也很明显。完全出乎意料,加州理工学院的Candès教授及其团队仅仅基于全变差惩罚的思想即完美地重建出了原始图像,同时证明了:只需随机选取信号 $M \geq 2K$ 个Fourier表示系数,就能唯一精确重建原始图像<sup>[3,88]</sup>。正是这个意外发现成了压缩感知理论的思想来源。压缩感知的诞生,堪称世纪之作。在这里,向奠定压缩感知基础理论的3位科学家表示致敬,他们分别是:加州理工学院应用与计算数学系教授Emmanuel J. Candès、加州大学洛杉矶分校数学系教授Terence Tao、佐治亚理工学院电子与计算机工程系教授Justin Romberg。

压缩感知理论自诞生之日就有着极强的生命力,已经对信号处理、理论数学、计算数学、计算机科学、信息论、概率论、电子工程、光学工程等诸多领域产生了重要影响。压缩感知的新颖性在于:只需远少于传统Nyquist采样定理所要求的采样数就能精确或高概率精确重建原始信号。采样速率不再取决于信号带宽,而在很大程度上取决于稀疏性和非相干性准则,或者稀疏性和等距约束性准则。本文围绕压缩感知的稀疏字典设计、测量矩阵设计、重建算法设计三个核心问题,对其基本理论和主要方法进行了系统阐述。同时,在基础理论和实现方法两个层面提出了压缩感知有待解决的若干理论问题与关键技术,具体包括:1)非 $L_1$ 范数驱动的压缩感知信号重建理论;2)基于非正交稀疏字典的压缩感知信号重建理论;3)自然图像的自适应压缩感知信号重建理论;4)基于学习的自然图像过完备字典设计;5)硬件易实现的确定性测量矩阵设计;6)噪声情形

大尺度问题的快速鲁棒重建算法设计。

总之,不管是基础理论还是重建算法,都必须以把压缩感知理论推向实用为基本准绳。至于压缩感知理论能否应用于某种实际领域,要看是否有将大量信息蕴涵于少量采样数据的迫切需要,例如:提高应用系统的性能、缩短数据获取的时间、降低数据获取的耗能、减少数据的存储空间、提高数据的传输速度等。最后,需要指出的是:压缩感知理论不是普适的。对于随机信号或者噪声信号等非结构性信号,压缩感知理论肯定不适用。特别地,对于某些实际应用, Nyquist 采样还是有效的首选方法,因为目前压缩感知理论可能存在某些暂时不能解释或不能克服的局限性<sup>[8]</sup>。

志谢 感谢肖亮副教授和邓海松博士在本文撰写过程中给予的有益讨论和宝贵意见!

## 参考文献(References)

- [1] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing [M]. 2nd ed. New York: Academic Press, 1999. (Mallat S 著. 信号处理的小波导论 [M]. 2 版. 杨力华, 戴道清, 黄文良, 等译. 北京: 机械工业出版社, 1999.)
- [2] Candès E. Compressive sampling [C] // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Madrid, Spain: European Mathematical Society Publishing House, 2006, 3: 1433-1452.
- [3] Candès E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [4] Candès E, Tao T. Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies [J]. IEEE Trans. Info. Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [5] Candès E. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2008, 346(9-10): 589-592.
- [6] Candès E, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling [J]. Inverse Problems, 2007, 23(3): 969-985.
- [7] Candès E, Romberg J. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions [J]. Foundations of Computing Math, 2006, 6(2): 227-254.
- [8] Donoho D. Compressed sensing [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [9] Donoho D, Tsai Y. Extensions of compressed sensing [J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 533-548.
- [10] Laska J, Kirolos S, Duarte M, et al. Theory and implementation of an analog to information converter using random demodulation [C] // Proceedings of the IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems. Piscataway NJ, USA: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2007: 1959-1962.
- [11] Bhattacharya S, Blumensath T, Mulgrew B, et al. Fast encoding of synthetic aperture radar raw data using compressed sensing [C] // IEEE Workshop on Statistical Signal Processing. Madison, Wisconsin: IEEE Computer Society, 2007: 448-452.
- [12] Ma J. Single-pixel remote sensing [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 6(2), 2009, 199-203.
- [13] Lustig M, Donoho D, Pauly J. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58: 1182-1195.
- [14] Bobin J, Starck J, Ottensamer R. Compressed sensing in astronomy [J]. IEEE J. Sel. Topics Signal Processing, 2008, 2(5): 718-726.
- [15] Bajwa W, Haupt J, Sayeed A, et al. Compressive wireless sensing [C] // Proceedings of the V Int. Conf. Information Processing in Sensor Networks, IPSN'06. New York, USA: Association for Computing Machinery, 2006: 134-142.
- [16] Goyal V, Fletcher A, Rangan S. Compressive sampling and lossy compression [J]. IEEE Signal Process. Mag., 2008, 25(2): 48-56.
- [17] Yang A. Robust face recognition via sparse representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Recognition and Machine Intelligence, 2008, 31(2): 210-227.
- [18] Gemmeke J, Cranen B. Using sparse representations for missing data imputation in noise robust speech recognition [C] // Proceedings of European Signal Process. Conf. Lausanne, Switzerland: European Association for Signal Processing, 2008: 987-991.
- [19] Guo H Y, Yang Z. Compressed speech signal sensing based on approximate KLT [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2009, 31(12): 2948-2952. [郭海燕, 杨震. 基于近似 KLT 域的语音信号压缩感知 [J]. 电子与信息学报, 2009, 31(12): 2948-2952.]
- [20] Yu H M, Fang G Y. Research on compressive sensing based 3D imaging method applied to ground penetrating Radar [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2010, 32(1): 12-16. [徐慧敏, 方广有. 压缩感知理论在探地雷达三维成像中的应用 [J]. 电子与信息学报, 2010, 32(1): 12-16.]
- [21] Takhar D, Bansal V, Wakin M, et al. A compressed sensing camera: New theory and an implementation using digital micromirrors [C] // Proceedings of IV SPIE Electronic Imaging: Computational Imaging. San Diego, United States: International Society for Optical Engineering, 2006.
- [22] Baraniuk R. A lecture on compressive sensing [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-121.
- [23] Candès E, Wakin M. An introduction to compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, March 2008, 21-30.
- [24] Pope G. Compressive Sensing: a Summary of Reconstruction Algorithms [D]. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule,

- 2008.
- [25] Candès E, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [26] Candès E, Rudelson M, Tao T, et al. Error correction via linear programming [C] // *Proc. of 46 Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. Pittsburgh, USA: IEEE Computer Society, 2005, 668-681.
- [27] Candès E, Tao T. Decoding by linear programming [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [28] Baraniuk R, Cevher V, Duarte M, et al. Model-based compressive sensing [J]. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2010, 56(4): 1982-2001.
- [29] Baron D, Wakin M, Duarte M, et al. Distributed Compressed Sensing [EB/OL] (2005-08-01) [2010-04-04]. <http://www.dsp.rice.edu/~drorb/pdf/DCS112005.pdf>.
- [30] Chartrand R, Staneva V. Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing [J]. *Inverse Problems*, 2008, 24: 035020-035033.
- [31] Foucart S, Lai M. Sparsest solutions of underdetermined linear systems via  $L_q$ -minimization for  $0 < q < 1$  [J]. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2009, 26(3): 395-407.
- [32] Donoho D, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse Solution of Underdetermined Linear Equations by Stagewise Orthogonal Matching Pursuit [R]. California: Stanford Univer., 2006.
- [33] Needell D, Tropp J. Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [J]. *Applied and Comput. Harmon. Anal.*, 2009, 26(3): 301-321.
- [34] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. *Foundations of Comp. Math*, 2000, 9(3): 317-334.
- [35] Rudelson M, Vershynin R. On sparse reconstruction from Fourier and Gaussian measurements [J]. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2008, 61(8): 1025-1045.
- [36] Blanchard J, Cartis C, Tanner J. The Restricted Isometry Property and  $l^q$ -Regularization: Phase Transitions for Sparse Representation [EB/OI]. (2009-05-02) [2010-04-05]. [http://www.math.utah.edu/~tanner/RIP\\_BICaTa.Pdf](http://www.math.utah.edu/~tanner/RIP_BICaTa.Pdf).
- [37] Elad M. Optimized projections for compressed sensing [J]. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2007, 55(12): 5695-5702.
- [38] Carin L. On the relationship between compressive sensing and random sensor arrays [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation Magazine*, 2009, 51(5): 72-81.
- [39] Baraniuk R, Davenport M, DeVore R, et al. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices [J]. *Constructive Approximation*, 2008, 28: 253-263.
- [40] Ji S, Xue Y, Carin L. Bayesian compressive sensing [J]. *IEEE Trans. on Signal Process.*, 2008, 56(6): 2346-2356.
- [41] Seeger M, Nickisch H. Compressed sensing and Bayesian experimental design [C] // *Proc. of 25 Int. Conf. Machine learning*. New York, USA: ACM Press, 2008: 912-919.
- [42] Candès E. Ridgelet: Theory and Application [D]. California: Stanford University, 1998.
- [43] Candès E, Donoho D L. Curvelets [R]. California: Stanford University, 1999.
- [44] Starck J, Candès E, Donoho D. The curvelet transform for image denoising [J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2002, 11: 670-684.
- [45] Pennec E, Mallat S. Sparse geometric image representations with bandelets [J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2005, 14(4): 423-438.
- [46] Do M N, Vertterli M. Framing pyramids [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, 14(9): 2329-2342.
- [47] Do M N, Vertterli M. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, 14(12): 2091-2106.
- [48] Jiao L C, Tan S. Development and prospect of image multiscale geometric analysis [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2003, 31(12A): 1975-1981. [焦李成, 谭山. 图像的多尺度几何分析: 回顾和展望 [J]. *电子学报*, 2003, 31(12A): 1975-1981.]
- [49] Mallat S G, Zhang Z F. Matching pursuit with time-frequency dictionaries [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [50] Bergeau F, Mallat S. Match pursuit of images [C] // *Proceedings of IEEE Signal Processing*. Philadelphia, USA: IEEE Computer Society, 1994: 330-333.
- [51] Ventura R, Vandergheynst P, Frossard P. Low-rate and flexible image coding with redundant representations [J]. *IEEE Trans. Image Processing*, 2006, 15(3): 726-739.
- [52] Sun Y B, Xiao L, Wei Z H, et al. Sparse representations of images by a multi-component Gabor perception dictionary [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(11): 1379-1387. [孙玉宝, 肖亮, 韦志辉, 等. 基于 Gabor 感知多成分字典的图像稀疏表示算法研究 [J]. *自动化学报*, 2008, 34(11): 1379-1387.]
- [53] Barlou H. Possible principles underlying the transformation of sensory messages [J]. *Sensory Communication*. Cambridge, MA: MIT Press, 1961, 217-234.
- [54] Elad M, Michael A. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(12): 3736-3745.
- [55] Michal A, Elad M, Alfred B. K-SVD: An algorithm for designing over-complete dictionaries for sparse representation [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4311-4322.
- [56] Monaci G, Jost P, Vandergheynst P, et al. Learning multimodal dictionaries [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(9): 2273-2283.
- [57] Liu D H, Shi G M, Zhou J S. New method for signal sparse decomposition over a redundant dictionary [J]. *Journal of Xidian University*, 2008, 35(2): 228-232. [刘丹华, 石光明, 周佳社. 一种冗余字典下的信号稀疏分解新方法 [J]. *西安电子科技大学学报(自然科学版)*, 2008, 35(2): 228-232.]
- [58] 谢胜利, 何昭水, 傅予力. 基于稀疏元分析的欠定混叠自适应盲分离方法 [J]. *中国科学 E*, 2007, 37(8): 1086-1098.

- [59] Yin Z K, Shao J. MP based signal sparse decomposition with FFT [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2006, 28(4): 614-618. [尹忠科, 邵君. 利用 FFT 实现基于 MP 的信号稀疏分解 [J]. 电子与信息学报, 2006, 28(4): 614-618.]
- [60] 张春梅, 尹忠科, 肖明霞. 基于冗余字典的信号超完备表示与稀疏分解 [J]. 科学通报, 2006, 51(6): 628-633.
- [61] Wang X L, Ran C Q, Wang Z M. Super-resolution processing of SAR images by basis pursuit method based on compacted dictionary [J]. Acta Electronics Sinica, 2006, 34(6): 997-1000. [汪雄良, 冉承其, 王正明. 基于紧致字典的基追踪方法在 SAR 图像超分辨中的应用 [J]. 电子学报, 2006, 34(6): 997-1000.]
- [62] Bruckstein A, Donoho D, Elad M. From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images [J]. SIAM Review, 2009, 51(1): 34-81.
- [63] Tropp J, Wright S. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems [J]. Proceedings of IEEE, 2010, 98(6): 948-958.
- [64] Shi G M, Liu D H, Gao D H, et al. Advances in theory and application of compressed sensing [J]. Acta Electronics Sinica, 2009, 37(5): 1070-1081. [石光明, 刘丹华, 高大化等. 压缩感知理论及其研究进展 [J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070-1081.]
- [65] Jin J, Gu Y T, Mei S L. An introduction to compressive sampling and its applications [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2010, 32(2): 470-475. (金坚, 谷源涛, 梅顺良. 压缩采样技术及其应用 [J]. 电子与信息学报, 2010, 32(2): 470-475.)
- [66] Chen S, Donoho D, Saunders M. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 129-159.
- [67] Candès E, Romberg J. Practical signal recovery from random projections [C] // Proceedings of SPIE Computational Imaging. San Diego, United States: International Society for Optical Engineering, 2005, 5674: 76-86.
- [68] Johnson C, Seidel J, Sofer A. Interior point methodology for 3-D PET reconstruction [J]. IEEE Trans. on Medical Imaging, 2000, 19(4): 271-285.
- [69] Kim S, Koh K, Lustig M, et al. A method for large-scale regularized least-squares [J]. IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing, 2007, 4(1): 606-617.
- [70] Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the LASSO [J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1996, 58: 267-288.
- [71] Efron B, Hastie T, Iain J, et al. Least angle regression [J]. The Annals of Statistics, 2004, 32(2): 407-499.
- [72] Figueiredo M, Nowak R, Wright S. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems [J]. Journal of Selected Topics in Signal Processing: Special Issue on Convex Optimization Methods for Signal Processing, 2007, 1(4): 586-598.
- [73] Daubechies I, Defrise M, Mol C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint [J]. Comm. Pure Appl. Math., 2004, 57(11): 1413-1457.
- [74] Beck A, Teboulle M. A fast iterative shrinkage-threshold algorithm for linear inverse problems [J]. SIAM Journal on Imaging Science, 2009, 2(1): 183-202.
- [75] Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans. Info. Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [76] Tropp J, Gilbert A, Strauss M. Algorithms for simultaneous sparse approximation. part I: greedy pursuit [J]. J. Signal Process., Special Issue on Sparse Approximations in Signal and Image Processing, 2006, 86: 572-588.
- [77] Tropp J. Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2004, 50(10): 2231-2242.
- [78] Blumensath T, Davies M. Gradient pursuits [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2008, 56(6): 2370-2382.
- [79] La C, Do M N. Signal reconstruction using sparse tree representation [C] // Proceedings of SPIE. San Diego, United States: International Society for Optical Engineering, 2005, 5914: 273-283.
- [80] Dai W, Milenkovic O. Subspace Pursuit for Compressive Sensing: Closing the Gap Between Performance and Complexity [EB/OL]. (2008-08-01) [2010-04-05]. <http://dsp.rice.edu/files/cs/SubspacePursuit.pdf>.
- [81] Do T, Lu G, Nguyen N, et al. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing [C] // Proceedings of 42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove: IEEE Computer Society, 2008, 581-587.
- [82] Gorodnitsky I, George J, Rao B D. Neuromagnetic source imaging with FOCUSS: A recursive weighted minimum norm algorithm [J]. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 1995, 95(4): 231-251.
- [83] Chartrand R. Exact reconstruction of sparse signals via nonconvex minimization [J]. IEEE Signal Process. Letter, 2007, 14(10): 707-710.
- [84] Daubechies I, DeVore R, Fornasier M, et al. Iteratively Reweighted Least Squares Minimization: Proof of Faster than Linear Rate for Sparse Recovery [EB/OL]. (2008-01-84) [2010-04-05]. [http://conf.ee.princeton.edu/ciss/2008\\_papers/daubechies.pdf](http://conf.ee.princeton.edu/ciss/2008_papers/daubechies.pdf).
- [85] Candès E, Wakin M, Boyd S. Enhancing sparsity by reweighted  $L_1$  minimization [J]. Journal of Fourier Anal. Appl., 2008, 14(5): 877-905.
- [86] Babacan S, Molina R, Katsaggelos A. Bayesian compressive sensing using laplace priors [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(1): 53-63.
- [87] Li X X, Wei Z H, Xiao L, et al. Compresses sensing image reconstruction based on morphological component analysis [C] // Proceedings of 16th International Conf. on Image Processing. Cairo, Egypt: IEEE Computer Society, 2009: 2129-2132.
- [88] Croker K. Rethinking signal processing [J]. Communications of the ACM, 2009, 52(5): 13-15.