

KAPITEL 3

Kalman-Filter

Das Kalman-Filter ist ein Zustandsschätzer [13; 14]. Es arbeitet mit einer Prozess- und Signaldarstellung im Zustandsraum und bildet den Prozess- und Signalzustand über eines lineares Systemmodell nach. Dabei wird ein neuer Schätzwert aus dem alten Schätzwert und den aktuell gemessenen Ausgangswerten rekursiv berechnet. Als Optimierungskriterium wird die Minimierung des Erwartungswertes der quadratischen Norm des Schätzfehlers verwendet. Ein Kalman-Filter besteht aus zwei Schritten, Prädiktion und Filterung.

Es wird so angenommen, dass das Systemmodell

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \mathbf{B} \cdot u_k + \underline{w}_k , \\ \underline{y}_{k+1} &= \mathbf{H}_{k+1} \cdot \underline{x}_{k+1} + \underline{v}_{k+1} ,\end{aligned}$$

bekannt ist. Die Systemrauschen \underline{w}_k und die Messrauschen \underline{v}_k sind Gauß'sche Verteilungen mit

$$\begin{aligned}E\{\underline{w}_k\} &= 0, & \text{Cov}\{\underline{w}_i, \underline{w}_j\} &= \mathbf{C}_k^w \cdot \delta_{i,j} , \\ E\{\underline{v}_k\} &= 0, & \text{Cov}\{\underline{v}_i, \underline{v}_j\} &= \mathbf{C}_k^v \cdot \delta_{i,j} .\end{aligned}$$

Dann ist der Prädiktionsschritt

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_{k+1}^p &= \mathbf{A}_k \cdot \hat{\underline{x}}_k^e + \mathbf{B}_k \cdot \underline{u}_k , \\ \mathbf{C}_{k+1}^p &= \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{C}_k^e \cdot \mathbf{A}_k^T + \mathbf{C}_k^w .\end{aligned}$$

Und der Filterungsschritt

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_{k+1}^e &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{y}_{k+1} , \\ \mathbf{C}_{k+1}^e &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}_{k+1}) \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p ,\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \mathbf{H}_{k+1}^T \cdot (\mathbf{H}_{k+1} \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{C}_{k+1}^v)^{-1} .$$

Die konkrete Herleitung wird in den Anhang aufgeführt.

3.1 Kalman-Filter für die Modalanalyse

In vielen Fällen ist die Anregung unbekannt, z. B. um die Temperaturverteilung eines Waldes zu erfassen, um einen Brand zu verhindern. In diesem Fall können wir die Anregung als Systemrauschen behandeln. In den folgenden Simulationen werden wir die folgenden Annahmen haben, dass

- die Anregung unbekannt ist,
- das System rauschfrei ist,
- die Messungen rauschenbehaftet sind.

Im Kapitel 2 haben wir das Systemmodell

$$\begin{aligned}\underline{T}_{k+1} &= \mathbf{A} \cdot \underline{T}_k + \underline{w}_k , \\ \underline{f}_{k+1} &= \mathbf{\Psi} \cdot \underline{T}_{k+1} + \underline{v}_k\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}E\{\underline{w}_k\} &= \underline{0}, \quad \text{Cov}\{\underline{w}_i, \underline{w}_j\} = \mathbf{C}_k^w \cdot \delta_{i,j} \\ E\{\underline{v}_k\} &= \underline{0}, \quad \text{Cov}\{\underline{v}_i, \underline{v}_j\} = \mathbf{C}_k^v \cdot \delta_{i,j}\end{aligned}$$

hergeleitet. Aber es ist unmöglich, dass wir die Temperatur an allen Knoten messen. Wir messen die Temperatur nur an M äquidistanten Stellen, also

$$x_{\lfloor i \frac{N-1}{M} + 1 \rfloor}, \quad i = 1, \dots, M .$$

Somit erstellen wir eine Delta-Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$, wobei

$$\Phi_{i,j} = \begin{cases} 1, & j = \lfloor i \frac{N-1}{M} + 1 \rfloor , \\ 0, & \text{sonst} . \end{cases}$$

Deswegen ist die Messabbildung im Kalman-Filter

$$\underbrace{\Phi f_{k+1}}_{=: \underline{y}_{k+1}} = \underbrace{\Phi \Psi \cdot \underline{T}_{k+1}}_{=: \mathbf{H}} + \underbrace{\Phi v_{k+1}}_{=: \tilde{\underline{v}}_{k+1}} .$$

Dann ergibt sich das Modell für das Kalman-Filter im 2D-Fall aus der Modalanalyse, also

$$\begin{aligned}\underline{T}_{k+1} &= \mathbf{A} \cdot \underline{T}_k + \underline{w}_k , \\ \underline{y}_{k+1} &= \mathbf{H} \cdot \underline{T}_{k+1} + \tilde{\underline{v}}_{k+1} .\end{aligned}$$

Dann ist das Verfahren des Kalman-Filters.

- Prädiktion

$$\begin{aligned}\hat{\underline{T}}_{k+1}^p &= \mathbf{A} \cdot \hat{\underline{T}}_k^e, \\ \mathbf{C}_{k+1}^p &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_k^e \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{C}_k^w.\end{aligned}$$

- Filterung

$$\begin{aligned}\hat{\underline{T}}_{k+1}^e &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}) \cdot \hat{\underline{T}}_{k+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{y}_{k+1}, \\ \mathbf{C}_{k+1}^e &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p,\end{aligned}$$

mit der Verstärkungsmatrix

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \mathbf{H}^T \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{C}_{k+1}^{\tilde{v}})^{-1}.$$

Analog können wir das Kalman-Filter für den 2D-Fall herleiten. Wählen wir zuerst $M_x \times M_y$ äquidistanten Sensorstellen, dann nummerieren wir sie in einen Vektor \underline{S} mit $\underline{S} \in \mathbb{R}^{M_x M_y \times 1}$. Dann können wir mit gleichem Verfahren eine Delta-Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{M_x M_y \times N_x N_y}$ erstellen. Danach ist das Kalman-Filter in demselben Form wie das Kalman-Filter in den 1D-Fall.

3.2 Kalman-Filter für die FDM

Zunächst wird das explizite Verfahren betrachtet. Laut Diffusionsmodell und Taylor-Entwicklung erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{\Delta t} &= k \frac{f_{n-1}^k - 2f_n^k + f_{n+1}^k}{\Delta x^2} \\ f_n^{k+1} &= \underbrace{\frac{k \Delta t}{\Delta x^2} f_{n-1}^k}_{=:P} + \underbrace{\left(1 - 2 \frac{k \Delta t}{\Delta x^2}\right) f_n^k}_{=:Q} + \underbrace{\frac{k \Delta t}{\Delta x^2} f_{n+1}^k}_{=:P} \\ &= P f_{n-1}^k + Q f_n^k + P f_{n+1}^k.\end{aligned}$$

Laut Neumann-Bedingung gilt

$$\begin{aligned}f_1^{k+1} &= f_2^{k+1} = P f_1^k + Q f_2^k + P f_3^k, \\ f_N^{k+1} &= f_{N-1}^{k+1} = P f_{N-2}^k + Q f_{N-1}^k + P f_N^k.\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ist es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_1^{k+1} \\ f_2^{k+1} \\ \vdots \\ f_{N-1}^{k+1} \\ f_N^{k+1} \end{bmatrix}}_{=: \underline{f}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} P & Q & P & & \\ P & Q & P & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & P & Q & P \\ & & P & Q & P \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^k \\ f_2^k \\ \vdots \\ f_{N-1}^k \\ f_N^k \end{bmatrix}}_{=: \underline{f}_k}.$$

Für die Messabbildung ist es analog wie in der Modalanalyse, also

$$\underline{y}_{k+1} = \Phi \cdot \underline{f}_{k+1} + \underbrace{\Phi \cdot \underline{v}_{k+1}}_{=: \tilde{\underline{v}}_{k+1}} .$$

Allerdings muss Q die folgende Eigenschaft erfüllen, um die Stabilitätsbedingung [15] zu halten. D. h.

$$Q = 1 - 2 \frac{k \Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2} ,$$

also

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{4k} .$$

Bei z. B. $\Delta x = 0.01$, $k = 0.1$ muss

$$\Delta t < 2.5 \times 10^{-4}$$

halten. Das ist aber nicht günstig und manchmal unmöglich. Deswegen ist ein implizites Verfahren nötig. Ein implizites Verfahren ist

$$\begin{aligned} \frac{f_n^{k+1} - f_n^k}{\Delta t} &= k \frac{f_{n-1}^{k+1} - 2f_n^{k+1} + f_{n+1}^{k+1}}{\Delta x^2} , \\ -Pf_{n-1}^{k+1} + \underbrace{(1+2P)f_n^{k+1} - Pf_{n+1}^{k+1}}_{=: Q} &= f_n^k . \end{aligned}$$

Laut Neumann-Bedingung gilt

$$\begin{aligned} f_1^k &= f_2^k = -Pf_1^{k+1} + (1+2P)f_2^{k+1} - Pf_3^{k+1} = (1+P)f_1^{k+1} - Pf_3^{k+1} , \\ f_N^k &= f_{N-1}^k = -Pf_{N-2}^{k+1} + (1+2P)f_{N-1}^{k+1} - Pf_N^{k+1} = -Pf_{N-2}^{k+1} + (1+P)f_N^{k+1} . \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ist es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1+P & 0 & -P \\ -P & Q & -P \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ -P & Q & -P \\ -P & 0 & 1+P \end{bmatrix}}_{=: \mathcal{D}^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^{k+1} \\ f_2^{k+1} \\ \vdots \\ f_{N-1}^{k+1} \\ f_N^{k+1} \end{bmatrix}}_{=: \underline{f}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^k \\ f_2^k \\ \vdots \\ f_{N-1}^k \\ f_N^k \end{bmatrix}}_{=: \underline{f}_k} .$$

Dann ergibt sich das Modell aus der impliziten FDM, also

$$\begin{aligned} \underline{f}_{k+1} &= \mathcal{D} \cdot \underline{f}_k + \underline{w}_k , \\ \underline{y}_{k+1} &= \Phi \cdot \underline{f}_k + \tilde{\underline{v}}_{k+1} . \end{aligned}$$

Das Kalman-Filter läuft dann die folgende Schritte durch, nämlich

- Prädiktion

$$\begin{aligned}\hat{\underline{f}}_{k+1}^p &= \mathcal{D} \cdot \hat{\underline{f}}_k^e, \\ \mathbf{C}_{k+1}^p &= \mathcal{D} \cdot \mathbf{C}_k^e \cdot \mathcal{D}^T + \mathbf{C}_k^w,\end{aligned}$$

- und Filterung

$$\begin{aligned}\hat{\underline{f}}_{k+1}^e &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \boldsymbol{\Phi}) \cdot \hat{\underline{f}}_{k+1}^p + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \underline{y}_{k+1}, \\ \mathbf{C}_{k+1}^e &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p,\end{aligned}$$

mit der Verstärkungsmatrix

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \boldsymbol{\Phi}^T \cdot (\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{C}_{k+1}^p \cdot \boldsymbol{\Phi}^T + \mathbf{C}_{k+1}^v)^{-1}.$$

Analog können wir das Modell für den 2D-Fall herleiten. Beim expliziten Verfahren gilt

$$f_{m,n}^{k+1} = Q f_{m,n}^k + A f_{m-1,n}^k + A f_{m+1,n}^k + B f_{m,n-1}^k + B f_{m,n+1}^k.$$

Und beim impliziten Verfahren gilt

$$Q f_{m,n}^{k+1} - A f_{m-1,n}^{k+1} - A f_{m+1,n}^{k+1} - B f_{m,n-1}^{k+1} - B f_{m,n+1}^{k+1} = f_{m,n}^k,$$

wobei

$$\begin{aligned}A &= \frac{k \Delta t}{\Delta x^2}, & B &= \frac{k \Delta t}{\Delta y^2}, \\ Q &= 1 - 2A - 2B, & & Q = 1 + 2A + 2B.\end{aligned}$$

Nach der Nummerierung

$$\underline{f}_{m,n}^k \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y} \mapsto \underline{f}_k \in \mathbb{R}^{N_x N_y \times 1}$$

können wir dann das Systemmodell in Matrixform schreiben, und das Kalman-Filter verwenden.

3.3 Simulation

Als die Anregung nehmen wir die punktförmige Anregung im Kapitel 1 für den 1D- und 2D-Fall. Außerdem wird die Anfangsbedingung gegeben, d. h. wir nehmen an, dass die sinusförmige Anfangsbedingung bekannt ist. Bei der Simulation wird $\Delta t = 0.1$ s gewählt.

3.3.1 1D-Fall

Wir haben 3 Fälle simuliert, jeweils mit 12, 24, und 36 äquidistanten Sensoren. Beim Kalman-Filter für Modalanalyse werden $\Delta x = 2^{-10}$ cm, $G = M$ gewählt, dann werden die Ergebnisse in folgenden Abbildungen gezeigt.

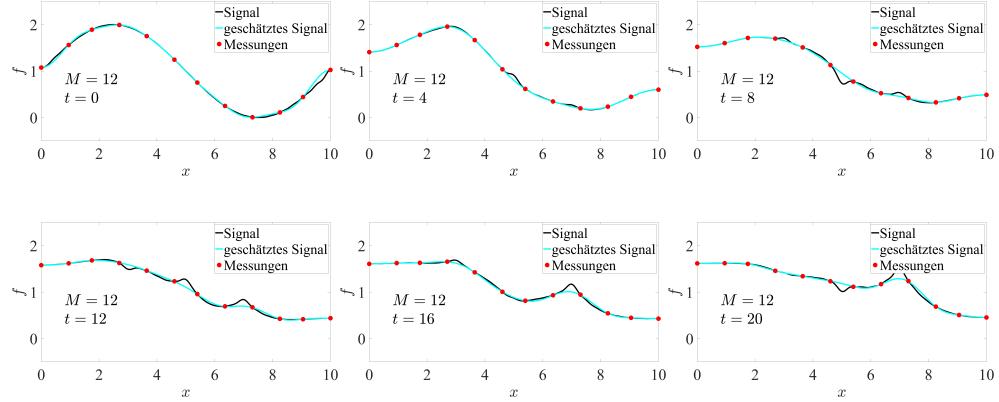


Abbildung 3.1: Kalman-Filter für die Modalanalyse mit 12 äquidistanten Sensoren.

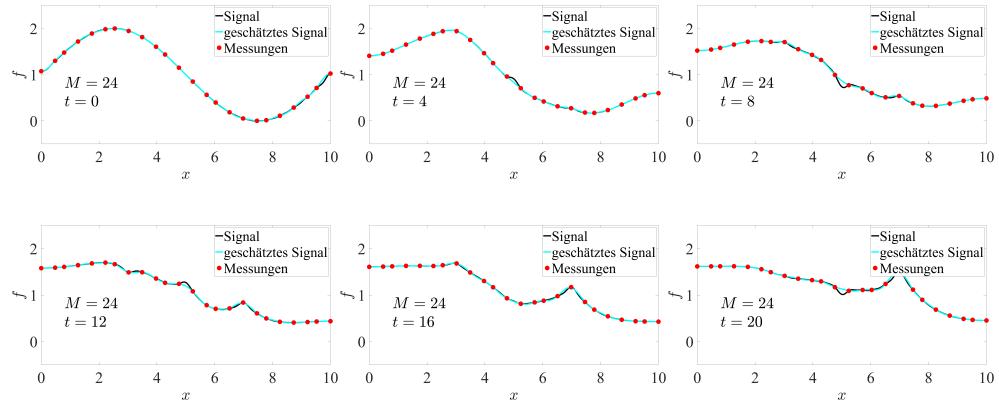


Abbildung 3.2: Kalman-Filter für die Modalanalyse mit 24 äquidistanten Sensoren.

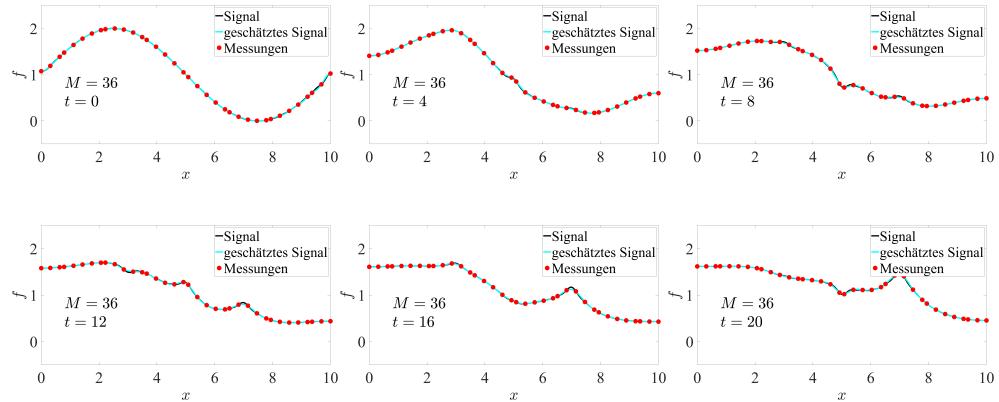


Abbildung 3.3: Kalman-Filter für die Modalanalyse mit 36 äquidistanten Sensoren.

3.3. Simulation

Bei der Signalrekonstruktion aus dem Finite-Differenzen-Verfahren werden $\Delta x = 2^{-10}$ gewählt. Dann ergeben sich die folgenden Ergebnisse.

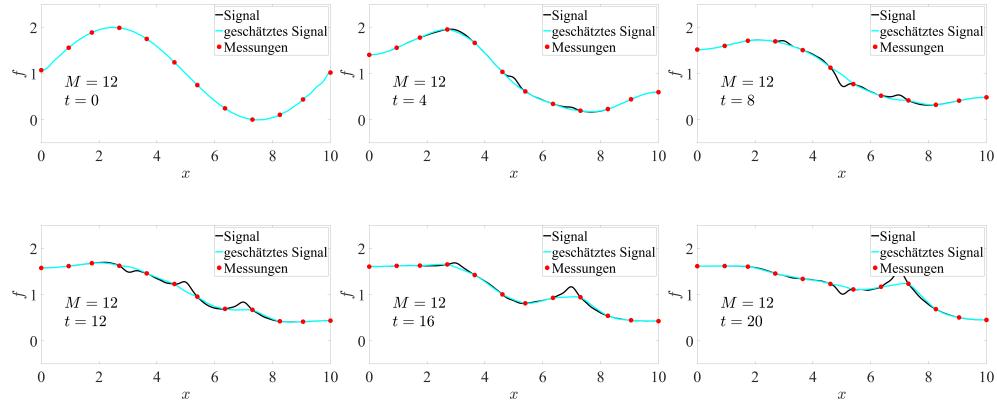


Abbildung 3.4: Kalman-Filter für die FDM mit 12 äquidistanten Sensoren.

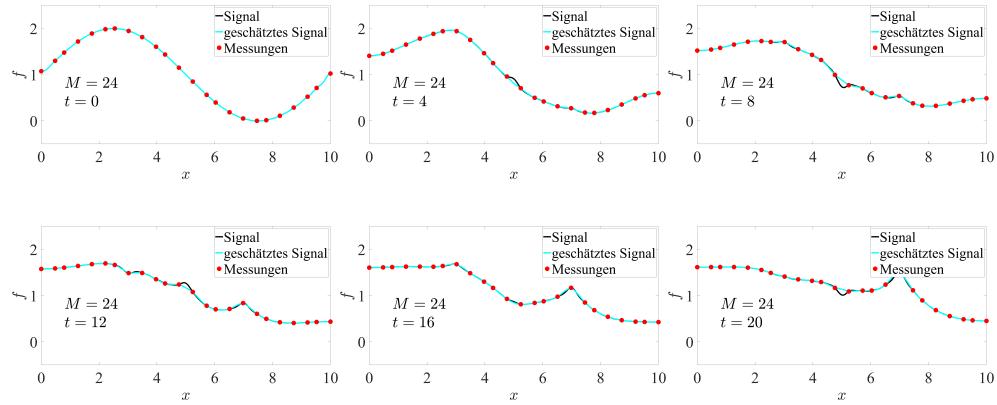


Abbildung 3.5: Kalman-Filter für die FDM mit 24 äquidistanten Sensoren.

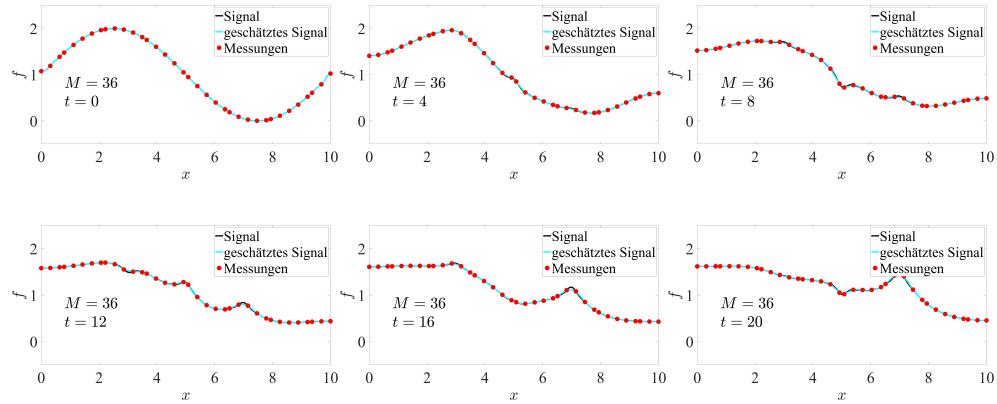


Abbildung 3.6: Kalman-Filter für die FDM mit 36 äquidistanten Sensoren.

3.3.2 2D-Fall

Für 2D-Fall werden $8 \times 8 = 64$ äquidistante Sensoren gewählt. Bei der Signalrekonstruktion aus der Modalanalyse werden $\Delta x = 2^{-7}$ cm, $\Delta y = 2^{-6}$ cm, $G_x = G_y = 8$ gewählt. Dann erhalten wir die Ergebnisse wie folgend.

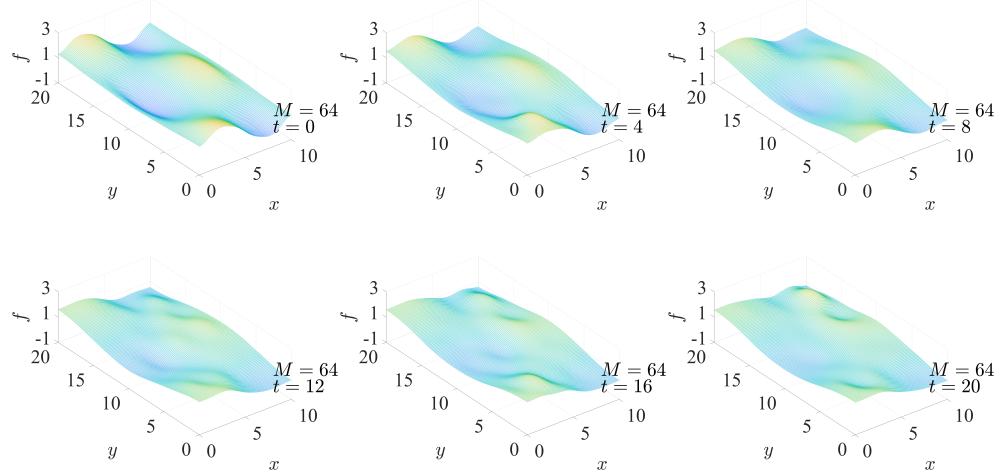


Abbildung 3.7: 2D-alman-Filter für die Modalanalyse mit 64 äquidistante Sensoren.

Und beim Finite-Differenzen-Verfahren wählen wir wegen des Rechenaufwands $\Delta x = 2^{-6}$ cm und $\Delta y = 2^{-5}$ cm.

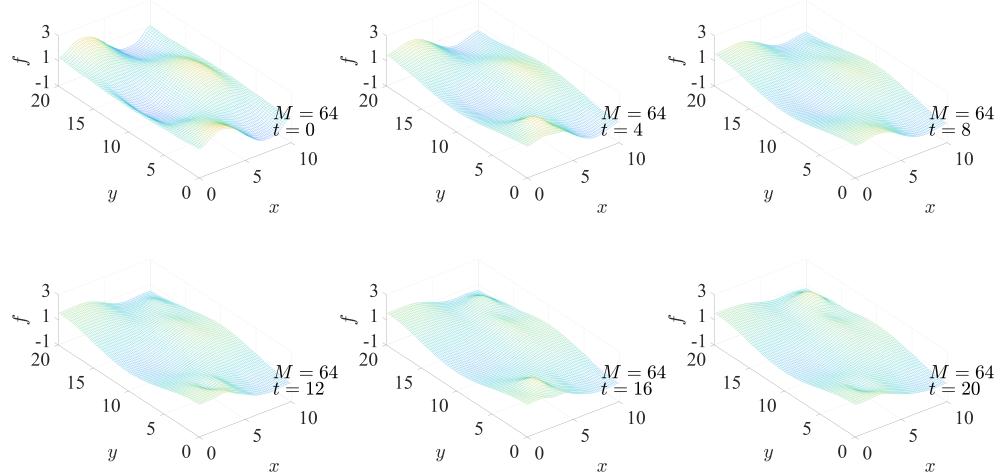


Abbildung 3.8: 2D-Kalman-Filter für die FDM mit 64 äquidistante Sensoren.

3.4 Fehlermaß und Bewertung

Um den Fehler quantitativ zu bewerten, müssen wir ein Fehlermaß bilden. Wir verwenden den relativen RMSE (Engl. Root Mean Square Error) als das Fehlermaß,

also

$$\epsilon(t) = \frac{\|\underline{f}(t) - \hat{\underline{f}}^e(t)\|_2}{\|\underline{f}(t)\|_2},$$

wobei $\underline{f}(t)$ die echte Temperaturverteilung zum Zeitpunkt t ist und $\hat{\underline{f}}^e(t)$ die geschätzte Temperaturverteilung aus dem Kalman-Filter zum Zeitpunkt t ist.

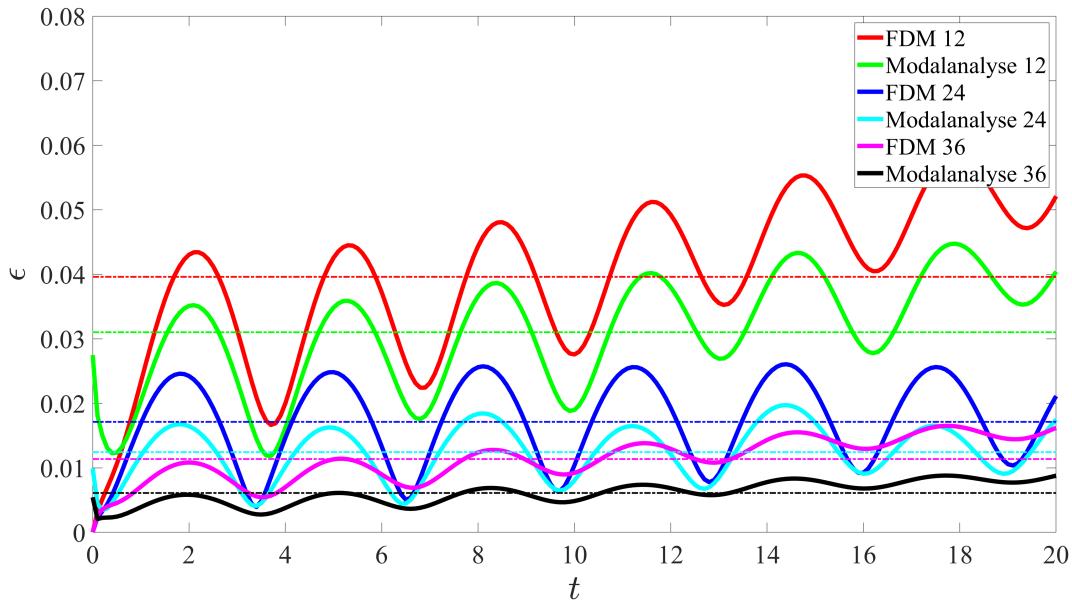


Abbildung 3.9: Vergleich aller Schätzungen.

Nach der Abbildung 3.9 können wir davon ausgehen, dass die Modalanalyse in diesem Fall besser als die FDM funktioniert. Je mehr Sensoren wir benutzen, desto besser ist das Ergebnis. Es ist wichtig zu beachten, dass die FDM eine weitverbreitete Methode ist, um partielle Differenzialgleichungen zu lösen. Daher werden wir in der folgenden Analyse die Ergebnisse des Kalman-Filters mit der FDM mit anderen Verfahren vergleichen.

3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir das Kalman-Filter vorgestellt. Es besteht aus zwei Teilen: Prädiktion und Filterung. Im Wesentlichen handelt es sich um eine Informationsfusion durch die Kombination vom Systemmodell und den Messungen zur Zustandsschätzung. Dann haben wir das entsprechenden 1D- und 2D-Kalman-Filter durch das Systemmodell aus der Modalanalyse und der FDM hergeleitet. Nachdem wir sie simuliert haben, analysieren wir den Fehler des Kalman-Filters in diesen Fällen, indem wir ein Fehlermaß festlegen. Wir stellen aus der Abbildung 3.9 fest,

dass die Schätzungen umso genauer sind, je mehr Sensoren verwendet werden. Aufgrund der breiten Anwendung der FDM fokussieren wir uns nach wie vor auf die Ergebnisse aus der FDM statt der Modalanalyse, obwohl die Ergebnisse aus der Modalanalyse ein bisschen besser sind. Im nächsten Kapitel werden wir über das Compressive-Sensing besprechen, das eine der wichtigsten Grundlagen dieser Arbeit darstellt.