

一种改进的压缩感知信号重构算法

李少东 杨 军 胡国旗
(空军预警学院, 湖北 武汉 430019)

摘 要: 针对支撑集未知且变化时的稀疏信号的重构问题, 本文基于卡尔曼滤波思想, 结合压缩感知算法, 给出了一种改进的卡尔曼-压缩感知(Modified Kalman Filter Compressive Sensing, MKFCS) 信号重构算法, 该算法首先利用 Kalman 滤波获得信号残差的有效估计, 然后根据残差突变情况, 用改进的 CS 算法估计突变位置以确定信号的新的支撑集, 最后用最小二乘方法重构信号, 从而自适应的实现支撑集未知且变化的稀疏信号的重构。最后对所改进的通过重构精度、重构误差、稳健性等方面进行了仿真, 仿真结果表明所提算法重构信号具有需要量测个数少、重构精度高、鲁棒性强等特点。

关键词: 压缩感知; 卡尔曼滤波; 稀疏信号重构; 最小 l_1 范数

中图分类号: TN957 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2012)05-0744-06

A Modified Signal Reconstruction Algorithm Via Compressive Sensing

LI Shao-dong YANG Jun HU Guo-qi
(Air Force Early Warning Academy , WuHan 430019 , China)

Abstract: Based on Kalman filter (KF) and compressive sensing (CS) theory ,we proposed a modified KF compressive sensing (MKFCS) algorithm which aims at reconstructing time sequences of spatially sparse signals with unknown and time varying sparsity supports. First ,the residual of the signal ,which could indicate the position of the new supports ,is estimated using KF. Then a new supports is decided by means of a modified CS algorithm. Finally ,the signal with unknown and time varying sparsity support is reconstructed using least square via the updated supports adaptively. And the MKFCS algorithm is performed through simulating reconstruction accuracy ,reconstruction error and its stability to validate the algorithm. Simulation results and theoretical anylasis show that the proposed method has many advantages such as needing fewer measurements than existing methods ,having higher reconstruct accuracy and better robust etc.

Key words: compressed sensing; Kalman filter; sparse signal reconstruction; l_1 norm minimization

1 引言

压缩感知(Compressed sensing ,CS) 是近年发展起来的建立在信号可稀疏表示和逼近理论基础上的新的研究领域^[1-2], 它充分利用目标信号结构的稀疏特性, 通过线性映射得到信号的量测值, 然后利用稀疏重构算法实现对信号的精确重构。CS 理论对处理大规模稀疏或可压缩数据具有巨大的吸引力和应用前景, 相关的研究成果已经涉及到众多领域。目前, 已有许多学者和研究机构陆续开展了 CS 理论应用于医学图像处理、单像素相机、雷达成像等领域, 且主要研究的是基于信号之间有强相关性, 信号支撑集是未知且缓变

的^[3-4]的问题。

根据雷达目标电磁散射特性, 在高频区, 雷达目标脉冲响应可由少数重要散射中心来刻画, 宽带雷达可得到的感兴趣散射中心数远小于识别这些散射中心所需的数据样本数^[5]。强散射中心可用于反映目标的轮廓信息, 而通常弱散射中心的回波信号对成像的贡献很小。在目标实际的运动当中, 由于目标的姿态、飞行速度调整等原因, 使得不同时刻的散射中心的强度发生变化, 可能会出现一些弱散射中心散射强度增强, 或者是一些强散射中心的强度变弱的情况。即回波信号支撑集是未知且缓变的。实时的跟踪目标散射中心强度的变化情况对目标的跟踪成像有很大的指导意义。

从个数较少、存在加性噪声的量测值中重构支撑集未知且变化的稀疏信号,目前主要有两种算法^[6],一种是批处理,即对信号存在的整个时间序列执行一次压缩感知来解决问题,这种处理的缺点是重构复杂度非常高,难以实现。另一种方法是常规的压缩感知算法,即分别在每一个时刻对稀疏信号进行压缩感知,这种处理方式是实时的,降低了重构复杂度。但是并未利用信号的先验信息,当量测值较少或存在噪声影响时,重构的误差会很大。基于此,文献[3]提出了基于最小二乘估计残差的压缩感知算法(least square compressive sensing, LSCS),该算法充分利用信号的支撑集的先验信息,因而重构精度得到提高;文献[6-7]相继又提出了卡尔曼-压缩感知算法(Kalman filter compressive sensing, KFCS),该算法利用信号以及信号支撑集的双重先验信息,重构精度进一步提高,且重构复杂度与LSCS相同。但是KFCS算法存在应用条件苛刻、在支撑集有移除量存在时算法稳定性差、对噪声容忍度低且运行速度慢等问题。

本文在KFCS算法的基础上,研究了一种改进的KFCS(modified KFCS, MKFCS)算法,该方法通过综合利用信号支撑集的先验信息和信号的估计值信息,同时对CS算法进行改进,以实现个数较少、存在加性噪声量测值中高精度稳定重构支撑集未知且变化的稀疏信号。该算法的基本思想是:信号的支撑集变化会引起残差相应位置出现突变,首先用卡尔曼滤波思想估计得到残差,然后通过改进的压缩感知算法^[8](l_1 Regularized least squares compressive sensing, l_1 CS),估计信号残差突变位置,进而自适应的更新信号的支撑集,最后利用最小二乘估计结合更新的支撑集对信号进行重构,以实现在支撑集未知且变化时的稀疏信号的重构问题。理论分析和数值仿真均表明算法重构信号具有需要测量个数少、重构精度高、计算速度较快、鲁棒性强等特点。

2 压缩感知原理

定义 $x \in \mathbb{R}^M$ 为一有限信号,长度为 M ,而通过压缩感知则可以直接得到 y ,长度为 N ($N \ll M$),它们的关系可表示为

$$y = \Phi x \quad (1)$$

其中 Φ 称为量测矩阵,大小为 $N \times M$ 。

若信号本身不稀疏,那么一定存在一组变换基 Y ,使得 x 在该变换基上的投影是稀疏的,表示为

$$x = Y\theta \quad (2)$$

其中 θ 为稀疏信号,于是量测过程可写为

$$y = \Phi Y\theta = \Theta^{CS}\theta \quad (3)$$

其中 $\Theta^{CS} = \Phi Y$ 是大小为 $N \times M$ 的矩阵,称为感知矩阵。

从 y 中恢复出原始信号 x 的过程,称为基于压缩感知的稀疏重构,相应的算法称为重构算法。文献[9]中证明了如下结论:当感知矩阵 Θ^{CS} 满足约束等距性时(Restricted isometry property, RIP)条件时,信号可以从 N 个量测值中完美的重构出来。CS信号重构等价于求解欠定方程(1)的问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^M} \|x\|_p, \text{ s.t. } y = \Phi x \quad (4)$$

其中, $\|x\|_p$ 是指对 x 求 p -范数,在CS中取值范围为 $0 \leq p \leq 1$,特别地,当 p 取0时,(4)含义为 l_0 范数最小化问题,由于量测维数远小于信号维数,求解需要组合搜索,随着维数的增加难以实现,求解成为一个NP问题。因此,直接求解 l_0 范数最小化问题不可行,需要寻求其他的方法,其中最典型的是将 l_0 范数最小化问题求解转化为 l_1 即 p 取1时范数最小化问题。对应的基于压缩感知的信号重构过程如图1所示。



图1 压缩感知过程框图

Fig. 1 Block diagram of the CS proceeding

从图1可知,基于压缩感知的信号重构包括变换基 Y 构建、感知矩阵 Φ 构建、支撑集(稀疏度 S)估计、重构算法等方面的内容。

本文主要对支撑集未知且变化时的支撑集估计问题进行研究,并给出相应的稀疏信号重构的MKFCS算法。

3 MKFCS 算法

支撑集未知且变化的稀疏信号模型通常采用高斯随机游动模型(Gaussian random walk model, GRWM)表示^[5]:GRWM的特点主要是独立同分布和支撑集是缓慢变化的。用 N_t 表示 t 时刻信号的支撑集, t_j ($j=1, 2, \dots$) 为支撑集变化的时刻, t_j 时刻新的支撑集增加或减少的个数分别用 S_{a,t_j} 和 S_{r,t_j} 表示,高斯随机游动模型需满足三个条件:一是在初始时刻($t=0$)信号 x_0 服从均值为0,方差为 σ_{sys}^2 的高斯分布。也就是说,若 x_0 的稀疏度 S ,支撑集为 N_0 ,则有 $x_0 \sim N(0, \sigma^2 I)$,其中 σ^2 为高斯方差, I 为大小为 $S \times S$ 的单位阵。二是在 t_j 时刻,支撑集发生变化(支撑集个数增加或减少);三是 t 时刻的支撑集 N_t 不大于最大的支撑集数目为 S_{max} ,即对每一个时刻都有 $|N_t| \leq S_{max}$ 。其中 S_{max} 是满足 $N = cS_{max}$

$\log(M/S_{\max})$ 的最大稀疏度值^[2]。

KFCS 算法中,CS 重构算法使用的是 Dantzig Selector(DS) 算法,其优点是重构依赖于支撑集的大小,而与支撑集的元素无关,但是只适用于稀疏度特别高的信号模型,对噪声容忍度低^[4]。

在高斯随机游动模型假设下,本文研究的 MKFCS 算法首先用卡尔曼滤波估计到信号的残差,然后通过改进的 l_1 范数压缩感知 (l_1 CS) 算法^[8] 代替文献[6]中求解 Dantzig Selector(DS) 的压缩感知算法,估计信号残差突变位置,进而自适应的更新信号的支撑集,最后利用最小二乘估计结合更新的支撑集对信号进行重构,以实现在支撑集未知且变化时的稀疏信号的重构问题。下面对 MKFCS 算法中的卡尔曼滤波估计信号残差以及 l_1 CS 算法进行分析。

3.1 信号残差估计

信号残差通过用卡尔曼滤波得到。过程如下:

首先,对算法进行初始化。在 $t=0$ 时刻, y_0 为初始时刻量测值,在 $y=y_0$ 的条件下,使用 l_1 CS 算法得到信号的估计值,记信号估计值为 \hat{x}_0 ,支撑集为 \tilde{T}_0 。

其次,当 $t>1$ 时,通过卡尔曼滤波(Kalman filter, KF) 获得残差 $\tilde{y}_{t, \text{res}}$ 估计。令 $T=\tilde{T}_{t-1}$, \tilde{T}_{t-1} 为 $t-1$ 时刻信号支撑集估计。利用 $\hat{Q}_t=\sigma^2 I_T$ 估计 $P_{t|t-1}$ 滤波公式为

$$P_{t|t-1}=P_{t-1}+\hat{Q}_t \quad (5)$$

$$K_t=P_{t|t-1}\Phi'(\Phi P_{t|t-1}\Phi'+\sigma^2 I)^{-1} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_t &= \hat{x}_{t-1} + K_t(y_t - \Phi\hat{x}_{t-1}) \\ &= (I - K_t\Phi)\hat{x}_{t-1} + K_ty_t \end{aligned} \quad (7)$$

$$\tilde{y}_{t, \text{res}} = y_t - \Phi\hat{x}_t \quad (8)$$

其中 $P_{t|t-1}$ 、 P_t 、 K_t 分别为在 t 时刻一步预测协方差矩阵、协方差更新矩阵和增益。 \hat{x}_t 为信号在 t 时刻的通过 kalman 滤波得到的估计值。

将式(4)中的约束条件代入式(8)得到

$$\tilde{y}_{t, \text{res}} = \Phi(x_t - \hat{x}_t) = \Phi\beta_t \quad (9)$$

其中 $\beta_t = (x_t - \hat{x}_t)$, 其为信号发生变化的部分。

根据式(9),采用 l_1 CS 算法对残差进行压缩感知。

若 β_t 压缩感知重构结果为 $\hat{\beta}_t$, 则有

$$\tilde{x}_t = \hat{x}_t + \hat{\beta}_t \quad (10)$$

其中 \tilde{x}_t 为采用压缩感知重构残差之后对估计信号的修正结果。

根据式(10),以及支撑集的增加/减少情况,当支撑集增加时,可采用式(11)确定 t 时刻待重构序列的

支撑集 \tilde{T}

$$\tilde{T} = T \cup \{i \in T^c: |(\tilde{x}_t)_i| > \alpha_1\} \quad (11)$$

其中 α_1 为判断是否有新的支撑集增加的门限,从式

(11) 可以看出, t 时刻待重构序列的支撑集 \tilde{T} 由两部分构成:一部分是原来的支撑集 T 。另一部分为新增的支撑集。如果 $\tilde{T} = T$, 则 \hat{x}_t 即为信号估计值,否则说明存在新的支撑集,此时再利用 \tilde{T} 进行最小二乘估计^[6] 得到最新的信号估计值

$$\tilde{x}_t = \Phi_{\tilde{T}}^+ y_t, (\tilde{x}_t)_{\tilde{T}^c} = 0 \quad (12)$$

其中 $\Phi_{\tilde{T}}^+ = (\Phi_{\tilde{T}}' \Phi_{\tilde{T}})^{-1} \Phi_{\tilde{T}}'$, $(\cdot)'$ 表示转置, \tilde{T}^c 为 \tilde{T} 的补集。

当支撑集减少时,可采用式(13)确定对 t 时刻待重构序列的支撑集 \tilde{T}

$$\tilde{T} = T \setminus \{i \in T: |(\tilde{x}_t)_i| < \alpha_2\} \quad (13)$$

其中 α_2 为判断是否有支撑集减少的门限,此时再利用 \tilde{T} 进行最小二乘估计得到最新的信号估计值 \tilde{x}_t , 同时完成来量测协方差矩阵 P_t 的更新。

$$(\tilde{x}_t)_{\tilde{T}} = \Phi_{\tilde{T}}^+ y_t, (\tilde{x}_t)_{\tilde{T}^c} = 0 \quad (14)$$

$$(P_t)_{\tilde{T}, \tilde{T}} = (\Phi_{\tilde{T}}' \Phi_{\tilde{T}})^{-1} \sigma^2 \quad (15)$$

$$(P_t)_{\tilde{T}^c, [1:M]} = 0, (P_t)_{[1:M], \tilde{T}^c} = 0 \quad (16)$$

至此,通过残差估计以及对残差的 CS 处理得到 t 时刻的重构信号 \tilde{x}_t 。

对于下一时刻的信号估计,只需将 P_t 、 \tilde{x}_t 、 \tilde{T} 值分别代替式(5)、(7)、(11) 或(13) 中的 P_{t-1} 、 \hat{x}_{t-1} 和 T 完成更新,其余步骤类似处理即可。

对于支撑集增量和移除量的判定,门限设置有如下结论^[6]:若是在噪声影响不大的情况时,在保证错误的移除量都被删掉的情况之下,可以设置 $\alpha_2 > \alpha_1$,但是当噪声很强时,不管是支撑集的增量,还是移除量,都将会产生误差。为保证正确估计支撑集,在设置增量门限 α_1 时,应取较大值,此时,一般设置 $\alpha_2 = \alpha_1 = \zeta N / \log_2 M$, $\zeta \in (0.7 \sim 1.25)$ 。

3.2 l_1 CS 算法

在本文中,CS 重构算法采用 l_1 范数下内点法与预处理共轭梯度算法结合的方式,以克服内点法收敛速度慢和共轭梯度法对初始点选取的严格要求(即初始点非常靠近极值点时,迭代过程才能得到较为精确的近似解)的缺点。该算法首先利用具有快速收敛性的

预处理共轭梯度法 (predicted conjugate gradients, PCG) 来估计搜索的方向,使每一次搜索的方向都是沿着梯度最小的方向,然后将具有全局性且鲁棒性强的内点罚函数法用来判断步长因子,二者结合更新迭代值,以完成 CS 重构。 l_1 CS 算法理论分析如下:

内点法是求解 1 范数优化问题比较精确的算法^[10]。将初始点取在可行域的内部(不在可行域的边界上,这样的可行点称为内点或者严格内点),迭代过程始终在可行域内部进行,并在可行域边界设置一道“障碍”,使得迭代点在靠近可行域边界时,给出的新目标函数值迅速增大,从而使得迭代点始终留在可行域内部。整个处理过程是把 1 范数转化为不等式限制,再把不等式转化为门限阻碍函数以等效替换不等式。然后用迭代法进行求解。

当信号残差已知时,本文研究的算法可利用式(9)实现噪声存在时残差的重构问题,而式(9)可等价描述为

$$\min \|\Phi\beta_i - \tilde{y}_{i, res}\|_2^2 + 1 \|\beta_i\|_1 \quad (17)$$

在非线性约束下,为减小式(17)中 1 范数的影响,特引入松弛变量 u ,可得式(17)的等价形式

$$\min \|\Phi\beta_i - \tilde{y}_{i, res}\|_2^2 + 1 \sum_{i=1}^M |u_i|$$

$$s.t. \quad -u_i \leq \beta_{i,j} \leq u_i, j = 1, 2, \dots, M \quad (18)$$

其中 $\beta_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \beta_{i,3}, \dots, \beta_{i,M})$ 。

为将式(18)中不等式进行转化,通过此对数阻碍门限函数来代替不等式的限制,定义对数阻碍门限函数 $P(\beta_i, \mu)$ 为^[10]

$$P(\beta_i, \mu) = -\sum_{i=1}^M \log(\beta_{i,j} + u_i) - \sum_{i=1}^M \log(u_i - \beta_{i,j}) \quad (19)$$

从而有约束条件的二次规划问题式(18)变成无约束二次规划问题

$$\phi_a(\beta_i, \mu) = a \|\Phi\beta_i - \tilde{y}_{i, res}\|_2^2 + a \sum_{i=1}^M |u_i| + P(\beta_i, \mu) \quad (20)$$

参数 a 取值范围是 0 到正无穷。在常规的内点法处理中,通常选取 a 为固定的序列 $[a_0, \mu a_0, \mu^2 a_0, \dots]$, μ 的取值范围^[8]为 $[2, 50]$ 。

该算法中,参数 1 的选择决定计算速度和重构质量。由文献[8]可知 $\rho < 1 < 2 \|\Phi \tilde{y}_{i, res}\|_\infty$, 当 $1 \rightarrow 0$ 时,重构十分精确,但是计算时间会大大增加;当 $1 \rightarrow 2 \|\Phi \tilde{y}_{i, res}\|_\infty$ 时,计算速度大大提高,但是严重影响准确度。

参数 1 的选取依赖于稀疏度。而 $2 \|\Phi \tilde{y}_{i, res}\|_\infty$ 反映了问题的稀疏度,因此只需选择 $1 < 2 \|\Phi \tilde{y}_{i, res}\|_\infty$, 一般选择 $1 = 0.02 \|\Phi \tilde{y}_{i, res}\|_\infty$, 若稀疏性很差,则选取 $1 = 0.002 \|\Phi \tilde{y}_{i, res}\|_\infty$ 。

基于对数障碍函数 $\phi_a(\beta_i, \mu)$ 通过 $\phi_a(\beta_i, \mu)$ 对所有的变量的偏导数为 0,得到最优搜索方向。对应的结果式可转换为

$$H \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta u \end{bmatrix} = -g \quad (21)$$

其中 H 是海塞矩阵, $H = \nabla^2 \phi_a(\beta_i, \mu)$, $g = \nabla \phi_a(\beta_i, \mu)$ 是 t 时刻的梯度向量。

一般而言,采用常规的算法解决式(21)计算量是很大的,尤其是大尺度问题,可以说在计算上是很难以实现的。为此采用近似算法,在解决式(21)时使用 PCG 算法,使算法沿着梯度的方向搜索,这将会达到最快的搜索速度。为进一步提高算法的收敛速度,改变 a 的更新准则,即在每一次迭代过程中,当信号的重构相对误差小于允许的误差限时,对 a 进行更新,而不再采用固定值,更新公式为

$$a = \begin{cases} \max\{\mu \min\{2M/\eta, \rho\}, \rho\} & \rho > \rho_{\min} \\ a, & \rho < \rho_{\min} \end{cases} \quad (22)$$

其中 μ, ρ_{\min} 为常数, M 为信号维度, η 为一与信号估计值有关的差量^[7], ρ 为步长因子,一般取 $\mu > 1, \rho < \rho_{\min} \leq 1$ 。通常选取 $\mu = 2, \rho_{\min} = 0.5$ 。步长因子采用回溯步长搜索方法进行更新, $\rho = \nu^k$, 更新规则为

$$\phi_a(\beta_i + \nu^k \Delta \beta_i, \mu + \nu^k \Delta \mu) - \phi_a(\beta_i, \mu) \leq \nu^k \nabla \phi_a(\beta_i, \mu)^T [\Delta \beta_i; \Delta \mu] \quad (23)$$

k 为迭代次数, $\nu \in (0, 1)$, $\mu \in (0, 0.5)$ 。一般取 $\nu = 0.01, \mu = 0.5$ 。完成了搜索方向以及搜索步长的求解之后,利用 $(\beta_{i,j}, \mu) = (\beta_{i,j}, \mu) + (\Delta \beta_{i,j}, \Delta \mu)$ 对迭代值更新,直至满足算法精度要求^[8]。

4 仿真结果及分析

通过仿真验证 MKFCS 算法的性能。性能从重构结果、相对误差、算法稳定性、噪声方差对重构性能影响等方面和 KFCS 进行了比较仿真。

仿真参数设置如下:取 $M = 256$, 测量值 $N = 72$ 。初始时刻稀疏度为 $S = 8, S_{a, t_j} = 4, t_j = 11, 21, 31$ 时产生新的支撑集; $S_{r, t_j} = 2, t = 20, 30$ 时将旧的支撑集移除。

$\sigma = 1$, 量测噪声均方根误差为 0.16。蒙特卡罗仿真次数为 100。量测矩阵 Φ 的构造如下: 先得到一个大小为 $M \times M$ 的高斯随机矩阵, 它的每一个元素服从均值为零, 方差为 1 的高斯分布, 然后对该矩阵的每一列进行正交化处理, 再从 M 行中随机选取 N 列进行单位化得到。

仿真 1: 信号重构仿真与分析

根据上述仿真参数, 这里用本文改进的 MKFCS 算法对信号的重构进行仿真, 结果如图 2 所示。

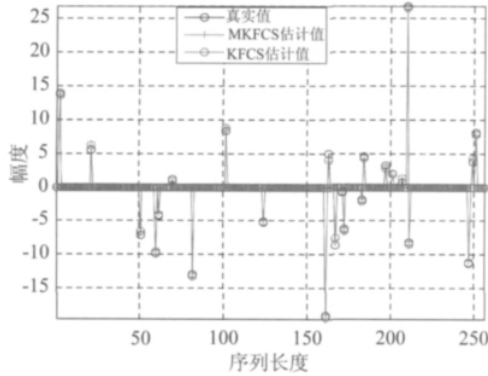


图2 重构结果

Fig.2 Signal reconstructing result with CS

由图 2 可以看出, 本文 MKFCS 算法与 KFCS 算法^[6]相比, 都能正确估计原始信号的位置和幅度, 具有较高的信号重构性能。

仿真 2: 重构精度仿真与分析

这里重构精度采用相对误差为 $rel_err = \|x - \hat{x}\|_2^2 / \|x\|_2^2$ 来表征, 设置量测噪声均方根误差为 0.4, 将 MKFCS 算法、KFCS 算法^[6]、常规 CS 算法 (regular compressive sensing, RegCS)^[6] 的重构相对误差进行比较, 结果如图 3 所示。

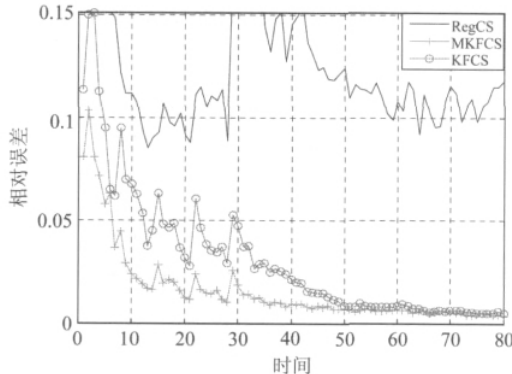


图3 算法相对误差

Fig.3 Relative error of the MKFCS

从图 3 可以看出, RegCS 算法与另外两种算法相比, 误差较大, 重构精度不高; 而 MKFCS 算法与 KFCS 算法相比, 相对误差明显减少; MKFCS 算法则在稀疏变化时刻, 估计误差略高于其他时刻, 主要原因在于: 由于信号支撑集发生改变时, 信号发生了改变, 在 MKFCS 算法中相当于在稀疏变化时刻对 KF 算法重新初始化, 而 KF 滤波器在起始时误差相对变大, 但是在之后的时刻很快又收敛到较小的误差, 说明算法的收敛性和自适应性好。从总体看, MKFCS 算法比 KFCS 算法平均相对误差低 47.7%。

仿真 3: 算法的稳定性仿真与分析

本文通过与 genieKF (Genie Kalman filter) 算法^[6] 的重构相对误差的对比来验证 MKFCS 算法的稳定性。genieKF 算法是指已知信号在每一个时刻 t 的支撑集的卡尔曼滤波器, 它是从量测值里重构 x_t 的最小均方误差估计, 由于其先验信息充分, 因而估计误差最小的且稳定的。并且在未知先验信息时, 算法性能不可能比 genieKF 好, 但和 genieKF 比较, 如果一种算法收敛且误差和 genieKF 一致, 则说明算法具有较强的稳定性。

为与原 KFCS 对比, 仿真中设置信号在 $t = 10, 20, 30$ 时刻产生新的支撑集, 其他参数不变。仿真结果如图 4 所示。

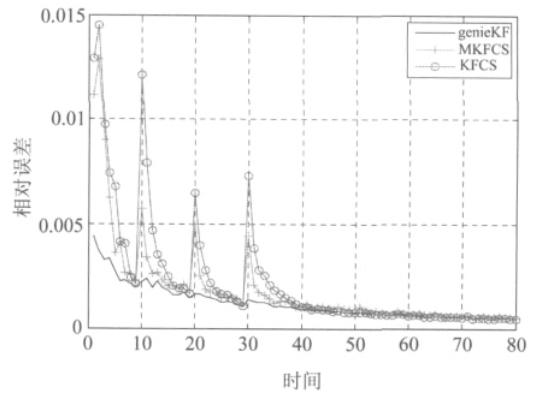


图4 算法稳定性对比结果

Fig.4 Stability analysis of the MKFCS

从图 4 中可以看出, 两种算法在信号支撑集稳定之后, 都将收敛于 genieKF 算法, 但 MKFCS 算法与 KFCS 算法相比, 在支撑集变化时刻重构误差明显减小, 证明了本文所研究算法是可以迅速稳定的。

仿真 4: 验证 MKFCS 算法的对噪声的鲁棒性

为说明噪声方差对重构的影响, 量测噪声均方根误差取值区间为 $[0.02, 0.4]$, 步进为 0.02 得到 20 个不同量测方差, 用量测噪声均相对误差, 即对所有时刻

的相对误差求均值来衡量不同噪声条件下的重构性能,计算公式为:

$$mean_mse = E\left(\frac{\|x - \hat{x}\|_2^2}{\|x\|_2^2}\right) \quad (24)$$

得到的仿真结果如图5所示。

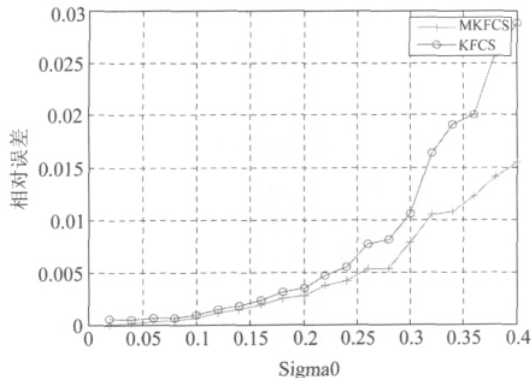


图5 算法均相对误差对比图

Fig. 5 Average relative error of the MKFCS and KFCS

从图5中可以看出,随着噪声方差的增大,两种算法重构的均相对误差亦随之变大,但MKFCS算法的重构误差总是小于KFCS,说明算法对噪声容忍度高。

5 结论

针对支撑集未知且变化时的稀疏信号的重构问题,本文提出了MKFCS算法。该算法在信号支撑集未知且变化的情况下,利用已知的含噪量测信息对信号以及支撑集进行估计,仿真表明,与现有的算法相比,改进后的MKFCS算法稳定性强,约束条件放宽,对噪声敏感度小,重构精度高。但是算法在量测值数目更少时,效果不理想,有待改进。

参考文献

- [1] Donoho D L and Y Tsaic. Extensions of compressed sensing. *Signal Processing*, 2006, 86(3): 533-548.
- [2] Donoho D L. Compressed Sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory* [J], 2006, 52(4): 1289-1306.
- [3] N. Vaswani, "LS-CS-residual (LS-CS): Compressive Sensing on Least Squares residual." <http://dsp.rice.edu/cs>.
- [4] C. Qiu, W. Lu and N. Vaswani, "Real-time dynamic MRI reconstruction using Kalman filtered CS." <http://dsp.rice.edu/cs>.
- [5] 刘记红,徐少坤,高勋章,黎湘,庄钊文. 压缩感知雷达成像技术综述[J]. *信号处理*, 2011, 27(2): 251-260.
Liu Jihong, Xu Shaokun, Gao Xunzhang, Li Xiang, Zhuang Zhaowen. A Review of Radar Imaging Technique based on Compressed Sensing [J]. *Signal processing*, 2011, 27(2): 251-260. (in Chinese)
- [6] Namrata Vaswani. KF-CS: Compressive Sensing on Kalman Filtered Residual. <http://www.computing.edu.au/~dsp/cs>.
- [7] N. Vaswani, Analyzing least squares and kalman filtered compressed sensing, in *ICASSP 2009*
- [8] An Interior-Point Method for Large-Scale ℓ_1 -Regularized Least Squares. <http://www.computing.edu.au/~dsp/cs>.
- [9] E. Candes and T. Tao, "Decoding by linear programming," [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [10] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge, U. K.: Cambridge University Press [M], 2004: 561-609.

作者简介



李少东(1987-)男,河北保定人,空军雷达学院硕士研究生,主要研究方向:现代雷达目标检测。
E-mail: liying198798@126.com



杨军(1973-)男,工学博士,副教授,硕士生导师。空军高层次人才,主要从事雷达系统、雷达信号处理与检测理、现代信号处理及其应用的研究。



胡国旗(1964-)男,工学硕士,副教授。主要从事雷达系统、雷达信号处理与检测理等方面。