

电子科技大学

UNIVERSITY OF ELECTRONIC SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION



论文题目 稀疏模拟信号压缩采样与重构算法研究

学科专业 测试计量技术及仪器

指导教师 王厚军 教授

作者姓名 赵贻玖

学 号 200810701004

分类号_____密级_____

UDC^{注1}_____

学 位 论 文

稀疏模拟信号压缩采样与重构算法研究

(题名和副题名)

赵贻玖

(作者姓名)

指导教师姓名 王厚军 教 授

电子科技大学 成 都

(职务、职称、学位、单位名称及地址)

申请专业学位级别 博士 专业名称 测试计量技术及仪器

论文提交日期 2012.3 论文答辩日期 2012.5

学位授予单位和日期 电子科技大学

答辩委员会主席_____

评阅人_____

2012 年 月 日

注 1：注明《国际十进分类法 UDC》的类号。

Study on Compressive Sampling and Recovery Algorithm of Sparse Analog Signal

Major : Measurement Technology and Instrument

Advisor: Prof. Wang Houjun

Author: Zhao Yijiu

独 创 性 声 明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

签名： 赵贻玖 日期： 2012 年 6 月 26 日

论 文 使 用 授 权

本学位论文作者完全了解电子科技大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权电子科技大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后应遵守此规定）

签名： 赵贻玖 导师签名： 王厚子

日期： 2012 年 6 月 26 日

摘 要

随着电子信息技术的发展,以及人们对数据需求快速增长,以 Shannon- Nyquist 采样定理为指导协议的信号采集技术给信号处理能力与硬件带来了极大的挑战。然而, Shannon-Nyquist 采样定理是不失真重构原始信号的充分条件,而不是必要条件。近年来,压缩感知理论(Compressed Sensing, CS)的提出突破了传统采样定理对具有稀疏表示信号采集的限制。本文针对模拟信号的稀疏特性,提出了基于压缩感知理论的硬件可实现的模拟信号压缩采样方法与信号重构算法。本文的主要研究工作如下:

1、基于随机等效采样技术的压缩采样方法研究。作为传统均匀采样方法的补充,针对周期信号,随机等效采样技术提供了一种降低模拟/数字转换器 (Analog-to-Digital Convertor, ADC)工作频率的同时获取高等效采样率重构波形的解决方案。本文对随机等效采样技术的随机相位产生机理以及采样相对时间的非均匀分布特性对信号重构的影响进行了详细分析,结合随机等效采样技术与压缩感知理论对所处理信号的先验条件的要求,研究了通过压缩感知理论对随机采样信号重构算法改进的可行性。在对非均匀随机采样值序列和均匀待重构信号关系深入分析的基础上,推导出了适用于随机等效采样技术的压缩测量矩阵,并进一步提出了采样停止判决条件。与基于时间排序的传统随机采样信号重构方法相比较,基于压缩感知理论的随机采样信号重构方法不仅能够获得更加准确的重构信号,而且还能有效地减少随机采样次数,提高采样效率。

2、针对 ADC 输入带宽对测试信号范围的限制情况,本文对基于随机解调的并行压缩采样方法进行了研究。本文首先对基于随机解调的模拟信息转换器的基本结构及其数学模型进行了分析,在此基础上提出了并行模拟信息转换器与分段式并行压缩采样模型,并给出了它们的压缩感知矩阵。考虑到硬件实现的可行性与频谱稀疏信号的压缩采样,在随机解调技术基础上,本文提出了一种基于 Hadamard 结构的压缩采样模型,证明了 Rademacher 随机序列能够降低 Hadamard 结构压缩测量矩阵与稀疏表示基之间的相关性。在频域对压缩采样模型进行了分析,并推导出了该模型用于信号重构的压缩感知矩阵。由于所提出的采样模型是对积分器或低通滤波器输出信号进行采样,所以避免了 ADC 输入模拟带宽对压缩采样系统输入信号频率范围的限制。

3、频域稀疏表示基失配压缩信号重构算法研究。在对频域稀疏信号的稀疏表示基失配产生的原理及其对信号重构算法影响分析的基础上，提出了一种针对频域压缩采样信号的重构算法。与传统压缩采样信号重构算法不同，该算法在对信号频率的重构中采用了 root-MUSIC 频谱估计算法，而不是搜索残差与感知矩阵列向量最大内积的方法，从而避免了表示基失配问题对信号重构精度的影响。

4、基于小波系数统计特性的信号重构算法研究。本文就分段连续型信号的小波多尺度分析系数特性进行了深入的分析，提出具有大幅度值的多尺度分析小波系数构成一棵倒型结构子树，并在此基础上给出了一种适用于小波域压缩采样信号重构的改进型正交匹配追踪算法。在正交匹配追踪算法计算残差与压缩感知矩阵列向量内积过程中，对处于倒型子树上的列进行加权，加强重构信号的稀疏性。因此该算法更切合小波系数的统计特性。

关键词：压缩感知，稀疏表示，随机采样，表示基失配，小波多尺度分析

ABSTRACT

With the development of electronic information technology, as well as the rapid growth of data needs, as a guiding protocol for signal acquisition, the Shannon-Nyquist sampling theorem has brought great challenges to the signal processing capabilities and hardware equipment. However, to recover the original signal, the Shannon-Nyquist sampling theorem is sufficient but not necessary. In recent years, a new data acquisition theory called compressed sensing has been proposed, and it has the ability to break through the restriction of the Shannon-Nyquist sampling theorem for sparse signal. According to the sparsity of signal, this dissertation presents some hardware implementable compressive sampling methods and signal reconstruction algorithms based on compressed sensing. The main work is as follows:

1. Study on compressive sampling method based on random equivalent sampling. As an alternative approach to the traditional uniform sampling, for the periodic signal, the random equivalent sampling has the potential to obtain a high equivalent sampling waveform from low speed samples. This dissertation has analyzed the principle of the random phase and the impact of uneven sampling distribution on signal reconstruction. According to the requirement of prior information for the random equivalent sampling and the compressed sensing theory, the feasibility of applying compressed sensing to random equivalent sampling signal reconstruction has been studied. Based on the relationship between the non-uniform random samples and the uniform signal to be reconstructed, we present a compressive sampling matrix in the context of the random equivalent sampling and a stopping rule for sampling. Compared to the time alignment random samples reconstruction method, the proposed compressed sensing based signal reconstruction method can not only improve the reconstruction precision but also reduce the random samples for reconstruction.

2. Considering the input bandwidth barrier of analog-to-digital convertor (ADC), this dissertation has analyzed the random demodulation based compressive sampling method. First, we introduce the random demodulation based analog-to-information conversion (AIC), and then, a parallel AIC and a segmented parallel AIC are proposed,

and their compressed sensing matrixes are also suggested. Considering the implementation and the sparse signal with multibands, we present a Hadamard structured compressive sampling model based on random demodulation and prove that, a Rademacher random sequence can reduce the coherence between the Hadamard structured measurement matrix and the sparse representation basis. Based on the analysis of the proposed model in Fourier domain, a compressed sensing matrix is presented. In the above sampling models, since the samples are captured after the integrator or low pass filter, the models will not be subject to the input bandwidth barrier of ADC.

3. Study on the reconstruction for compressive samples with the mismatched basis. We introduce the principle of basis mismatching and its impact on the signal reconstruction. To address this problem, a reconstruction algorithm is suggested. Different from the classic reconstruction algorithms, the proposed algorithm estimates the frequencies contained in the signal using root-MUSIC approach. Since the proposed algorithm does not employ the representation basis in the reconstruction, it will not be subject to the problem raised by the mismatched basis.

4. Study on the signal reconstruction algorithm based on the statistic property of wavelet coefficients. Based on the study of the multiscale analysis of wavelet coefficient, this dissertation makes a conclusion that the wavelet coefficients with significant amplitude will construct an upside down structured subtree. Base on the conclusion, an improved orthogonal matching pursuit (OMP) for wavelet domain compressive signal reconstruction is proposed. In the computation of the inner product between the residuals and the column vectors of measurement matrix, the proposed algorithm will weight the columns on the subtree and enforce the solution to be sparse.

Keywords: compressed sensing, sparse representation, random sampling, basis mismatch, wavelet multi-scale analysis

目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景和意义.....	1
1.2 信号压缩采样技术的发展与现状.....	2
1.2.1 信号压缩采样技术的发展概况.....	2
1.2.2 目前常见模拟信号压缩采样方法.....	3
1.3 压缩感知理论概述.....	4
1.3.1 压缩感知理论.....	5
1.3.1.1 压缩感知理论基本原理.....	5
1.3.1.2 信号稀疏表示.....	6
1.3.1.3 压缩测量矩阵特性.....	7
1.3.1.4 信号重构算法.....	8
1.3.2 压缩感知理论的应用.....	9
1.4 本文研究内容及结构安排.....	10
1.4.1 本文研究思路及主要内容.....	10
1.4.2 本文结构安排.....	11
第二章 基于等效采样技术的压缩采样方法.....	14
2.1 随机等效采样系统.....	14
2.2 时间测量.....	17
2.2.1 时间展宽.....	17
2.2.2 时间校准.....	18
2.3 采样脉冲随机相位分析.....	19
2.4 基于压缩感知理论的随机等效采样信号重构.....	21
2.4.1 测量矩阵提取.....	21
2.4.2 非相关性分析.....	22
2.5 采样停止判决条件.....	24
2.6 实验验证.....	26
2.7 本章小结.....	33
第三章 基于随机解调的并行压缩采样方法.....	35

3.1 模拟信息转换器	35
3.1.1 信号模型	36
3.1.2 模拟信息转换器基本结构	37
3.1.3 数学模型	38
3.2 多通道并行压缩采样	40
3.2.1 并行压缩采样	40
3.2.2 分段式并行压缩采样	43
3.2.3 仿真实验验证	44
3.3 高频窄带信号压缩采样方法	46
3.3.1 基本模型	48
3.3.2 采样模型频域分析	50
3.3.3 仿真实验验证	54
3.4 本章小结	56
第四章 压缩采样信号重构与检测算法	58
4.1 凸松弛算法	58
4.1.1 最小 ℓ_1 范数算法	59
4.1.2 迭代加权最小 ℓ_1 范数算法	61
4.2 贪婪算法	64
4.2.1 匹配追踪算法	64
4.2.2 正交匹配追踪算法	66
4.2.3 正则化正交匹配追踪算法	68
4.2.4 压缩采样匹配追踪算法	71
4.3 基于模型的频域压缩采样信号重构	75
4.3.1 频域稀疏表示基失配	75
4.3.2 信号重构算法	77
4.4 本章小结	81
第五章 小波域稀疏压缩采样信号重构研究	83
5.1 多尺度小波变换结构	83
5.1.1 确定性信号模型	84
5.1.2 概率信号模型	85
5.2 隐马尔可夫树小波域压缩采样重构	88
5.3 小波系数倒树结构正交匹配追踪算法	92

5.3.1 小波树正交匹配追踪算法.....	92
5.3.2 基于小波系数倒树正交匹配追踪算法.....	94
5.4 本章小结	99
第六章 结束语	101
6.1 论文工作总结	101
6.2 研究展望	102
致 谢	104
参考文献	105
攻博期间取得的研究成果	115

第一章 绪论

1.1 研究背景和意义

随着电子技术的发展,传感系统获取信号的能力以及数字信号处理器处理信号的能力不断得到增强,以 Shannon-Nyquist 采样定理为指导协议的信号采集方法无疑给模拟/数字转换器(ADC)带来了极大的挑战。由于 ADC 的最高工作频率受到的分辨率、材料、芯片工艺等因素的制约,ADC 已经成为现代信号处理系统发展的瓶颈。为了在现有 ADC 技术条件下提高采集系统捕捉信号的能力,Papoulis 等提出了非均匀采样理论^[1],Black 等提出了时间交替并行采样理论^[2],Witte 等提出了随机采样理论^[3]等。然而,即使在被测信号稀疏先验的条件下,这些采样方法仍然受到 Shannon-Nyquist 采样定理与 ADC 输入带宽的限制。然而,我们知道 Shannon-Nyquist 采样定理是不失真恢复原始信号的充分条件,而非必要条件。

近年来,D. Donoho、E. Candès 及 T. Tao 等^[4-6]提出了一种全新的信息获取方法:压缩感知(Compressed Sensing, CS)理论,该理论利用被测信号的稀疏先验知识,以远低于信号 Nyquist 频率的采样率获取稀疏信号的非自适应线性投影,通过最优化稀疏重建算法仍能准确重构原始信号。该理论在对信号采样的同时对数据进行压缩,而传统的信号获取和处理过程主要包括采样、压缩、传输、解压缩四个部分,其采样过程必须遵循 Shannon-Nyquist 采样定理,这种信息获取方式对 ADC 要求高,采集数据量大,占用传输带宽和存储空间。相比之下,压缩感知理论针对可稀疏表示的信号,能够将数据采集和压缩合二为一。实际测试系统应用中,大多数被测信号具有稀疏特性,即:通过选择合适的变换基,信号中仅含少量的非零变换系数。如:周期信号在 Fourier 变换域具有稀疏特性;分段连续型信号具有稀疏的小波变换系数。压缩感知理论一经提出,在信息论、图像处理、医学成像、模式识别、无线通信等领域得到了广泛的研究与应用。

压缩感知理论是建立在数字信号处理理论基础之上,主要应用于维数有限的数字信号处理,J. Tropp、Y. Eldar 等人^[7-10]对压缩感知理论在模拟信息采集应用中的可行性进行了研究,然而对于具有无限维数的模拟信号压缩采样的应用研究却进展缓慢。美国国防部先进项目局(DARPA)专门对此立项,由加州理工大学、赖斯大学、杜克大学等课题组对模拟信息转换进行研究。在此项目资助下赖斯大学

Baraniuk 研究团队设计出了基于压缩感知理论的模拟/信息转换器 (Analog-to-Information Convertor, AIC) ^[11-15], 加州理工大学 E. Candès 研究团队在 AIC 基础上开发出了 RMPI 压缩采样芯片^[16-17]。作为压缩感知理论在模拟信号采集中最成功的应用, AIC 信号采集模型广泛应用于雷达、通信等领域的信号处理研究中^[18-20], 同时, 压缩感知理论研究学者也提出了 AIC 的变异模型, 如: 调制宽带转换器 (Modulated Wideband Conversion, MWC) ^[21-23]。另一方面, 大量信号重构算法可以用于模拟压缩采样信号重构^[24-28]。

由于压缩感知理论能够有效地突破 Shannon-Nyquist 采样定理对稀疏信号采样的限制, 因此, 压缩传感理论在模拟信号采样中的应用研究是非常具有实际应用价值, 同时也是极具挑战性的重要课题。

本文工作受国家自然科学基金项目 (No.60827001) 与国家留学基金委项目 (No.2009607046) 支持, 主要研究具有稀疏特性的模拟信号采样模型实现以及信号重构算法, 最终实现对信号的压缩采样, 并能通过信号重构算法准确恢复原始信号。论文研究成果可应用于雷达、通信、声纳等信息获取探测、信号与信息处理等领域, 同时也为压缩感知理论在其它非均匀信号采样方法中的应用以及通过信号的统计特性来改进信号重构算法提供了参考价值。

1.2 信号压缩采样技术的发展与现状

1.2.1 信号压缩采样技术的发展概况

压缩感知理论是一种全新的信息获取理论, 在对稀疏信号的采样中, 压缩感知理论能够显著降低信号采集频率, 并能通过算法准确重构信号。由于压缩感知理论具有突破性的创新力, 该理论一经提出, 在信号处理的相关领域得到高度关注与广泛应用, 成为数学领域和工程应用领域的一大研究热点。

虽然压缩感知理论 2006 年才提出, 但是将稀疏信号纳入压缩采样框架的信号处理思想早在 1795 年 Prony 就已经用在含噪采样信号参数估计中^[29]; Caratheodory 在 19 世纪初就证明了任意 K 个正弦信号的线性组合可以由它在初始时刻与其它任意 $2K$ 个时刻的值唯一确定^[30-31], 当 K 很小, 而信号中频率范围很大时, 可以通过远远少于 Shannon-Nyquist 采样定理所需的采样值对信号进行表示; 在 19 世纪 90 年代 Feng 等人对这种信号获取方式进行了推广, 提出了一个实际采样框架, 它能够对由 K 个窄带组成的信号进行采集, 并得到与 Caratheodory 相似

的结论^[32-36]；在 20 世纪初，Vetterli 等人提出了一种针对由 K 个参数决定的非带限信号采样框架，并证明信号可以由 $2K$ 个采样值重构^[37-39]。

压缩感知理论的提出正是基于以上的研究成果，压缩感知理论已经成为一种新的信号获取理论，它能够显著降低对稀疏或可压缩信号的采集成本。在压缩感知理论框架下，E. Candès, J. Romberg, T. Tao^[5] 与 D. Donoho^[4]证明了一个具有稀疏表示的信号可以由它的少量线性非自适应压缩测量值准确重构。压缩感知理论已经在信息论、图像处理、通信等领域得到广泛关注，并被美国科技评论为 2007 年十大科技进展。压缩感知理论出现时间短，却已经形成了 1-bit 压缩感知理论^[40-43]、分布式压缩感知理论^[44-49]、模拟信息压缩感知理论^[7-15]、贝叶斯压缩感知理论^[50-56]等。

国内学者对压缩感知理论的研究主要集中在压缩信号重构算法以及现有压缩感知模型的应用。西安电子科技大学石光明教授^[57-59]、湖南大学李树涛教授等人^[60]系统地阐述了压缩感知理论的理论框架以及其中的关键技术问题；燕山大学练秋生教授及其课题组^[61-63]、安徽大学方红等^[64-67]对压缩感知理论在图像信号处理算法进行了深入研究；中科院电子所方广有等^[68-69]对压缩感知理论在雷达成像中的应用进行了探索。绝大多数研究都是基于 Nyquist 采样信号的后期处理，对于模拟域直接到信息域的研究较少。虽然越来越多的研究学者加入到压缩感知领域中，但国内研究也仅仅是处于起步阶段，不管是对压缩感知的认识还是应用研究上和国外水平存在很大的差距。

1.2.2 目前常见模拟信号压缩采样方法

压缩感知理论提出时间短，但由于在对稀疏信号采集与处理中所具有的突破性创新，吸引了国内外大量学者的研究。特别是在对 Nyquist 采样数据的后处理中，提出了众多相关可行的理论与算法。然而，压缩感知理论的正真创新之处在于对信号采集过程中进行压缩，将采集与压缩合二为一。模拟信号压缩采样正是利用了压缩感知理论的这种创新，将信号从模拟域直接变换到信息域。目前，主要实现方法有以下 2 类：

(1) 随机滤波器压缩采样方法：该方法由 J. Tropp 等人^[70]提出，随机滤波器压缩采样方法是通过一个具有 h 阶的随机抽头滤波器与稀疏被测信号求卷积，然后对滤波器输出信号以低于信号 Nyquist 频率的采样率进行欠采样，利用非线性算法重构原始信号。以该采样模型获取的测量值具有时不变性和非自适应性，并

且可以通过控制滤波器的长度来实现对测量值序列长度的控制。该采样模型是一种理想的采样模型，具有推广到模拟信号采样中的可行性，但随机抽头滤波器电路实现困难。中科院电子所李镰林等人^[71-73]在 Romberg 的随机卷积理论^[74]基础上，结合信号在复杂电磁环境具有丰富的散射特性，设计出了基于随机滤波器的压缩采样系统。该采样系统采用微波电路实现，随机滤波器使用声表面波随机延时器实现，并通过实验验证了该系统能够实现对稀疏模拟信号的压缩采样重构。

(2) 随机解调压缩采样方法：该方法也是著名的模拟/信息转换器。随机解调压缩采样由赖斯大学 Baraniuk 研究团队提出(另外，该团队还根据压缩感知理论开发出了单像素相机^[75-78]，并在此基础上发展了 1-bit 压缩感知理论，为了方便压缩感知学者交流与学习，还建立了专门的网站，Baraniuk 研究团队为压缩感知理论的发展做出了巨大贡献)，并通过硬件电路实现了该采样模型^[14-15]。随机解调压缩采样的基本原理是采用具有信号 Nyquist 频率的随机序列与频域稀疏高频模拟信号相乘，在频域可理解为对信号进行随机解调，由于随机序列在 0 至 Nyquist 频率的整个频带上的频谱随机分布，经过调制以后，随机信号的整个频带上都将携带被测信号的频谱特征，采用低通滤波器将基带信号进行截取，滤波输出信号以 Nyquist 采样率进行采样，最后求解优化问题重构原始信号。随机解调压缩采样方法是模拟信息压缩感知理论最主要的实现方法，并且被广泛应用于雷达、通信等领域进行压缩采样相关研究，加州理工大学 E. Candès 研究团队在此基础上开发出了 RMPI 压缩采样芯片。在模拟/信息转换器基础上，以色列理工大学 Eldar 研究团队进行了更深入的研究，设计出了针对频谱稀疏的调制宽带压缩采样模型，并且提出了“模拟到有限(Continuous to Finite, CTF)”的信号重构算法。

1.3 压缩感知理论概述

压缩感知理论与传统的 Shannon-Nyquist 采样定理不同，以压缩感知理论为指导的信息获取方法在对信号采样的过程中进行压缩，将采样与压缩合二为一。压缩感知理论需要满足两个先验条件：稀疏性和非相关性。该理论指出：只要原始信号本身或者在某个变换域内具有稀疏性，那么可以通过一个与变换基不相关的观测矩阵将高维度原始信号投影到低维度域上，利用重构算法能够以高概率将原始信号从低维投影值中恢复出来。

1.3.1 压缩感知理论

1.3.1.1 压缩感知理论基本原理

假设信号 \mathbf{x} 为域空间 \mathbb{R}^N 中的 $N \times 1$ 维列向量, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, 并且 \mathbf{x} 可以表示为 \mathbb{R}^N 中的 N 个标准正交基的线性组合:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_i \quad \text{或者} \quad \mathbf{x} = \Psi \boldsymbol{\alpha} \quad (1-1)$$

其中 $\psi_i \in \Psi$, $\Psi \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 为表示基矩阵, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$ 为信号 \mathbf{x} 在 Ψ 上的线性投影系数。如果系数向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 中非零元素的数量为 K , 且 $K \ll N$, 即: (1-1) 式中只需 K 个线性组合就能准确表达信号 \mathbf{x} , 则 \mathbf{x} 在表示基 Ψ 上是稀疏的, K 为信号的稀疏度。

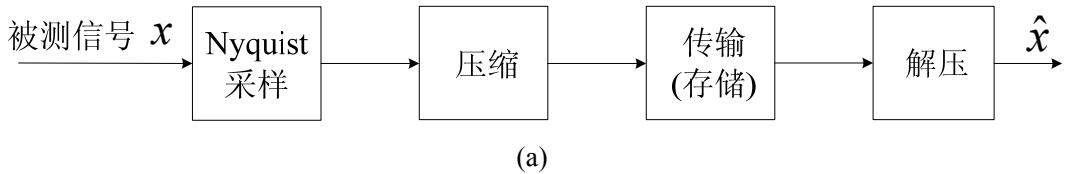
在传统 Shannon-Nyquist 采样定理中, 即使信号稀疏先验, 仍然采用 Nyquist 采样率对信号进行取样, 然后对高速采样获得的数据进行压缩、传输(存储)、解码等处理, 如图 1-1(a)所示。在压缩感知理论中, 对于(1-1)式中的稀疏信号, 通过设计一个与稀疏表示基 Ψ 不相关的观测矩阵 $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ($M \ll N$), 对信号 \mathbf{x} 直接进行压缩采样, 采样过程如图 1-1(b)所示, 矩阵-向量表达式为:

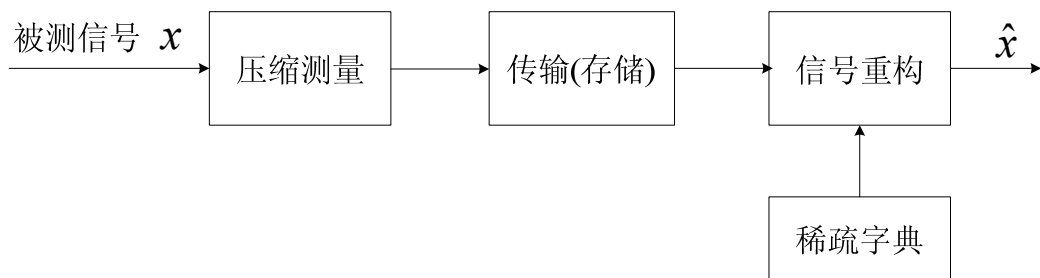
$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \boldsymbol{\alpha} \quad (1-2)$$

式中 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ 为压缩测量输出向量, $M = O(K \cdot \log_2(N))$, 由于 $M \ll N$, 采样过程中实现了对数据的压缩处理。最后通过最优化问题以少量的观测值 \mathbf{y} 准确重构原始信号 \mathbf{x} :

$$\min \|\hat{\boldsymbol{\alpha}}\|_0 \quad s.t. \quad \mathbf{y} = \Phi \hat{\mathbf{x}} = \Phi \Psi \hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (1-3)$$

其中 $\|\cdot\|_0$ 为 ℓ_0 -范数运算, 计算向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 中的非零元素的数量。由于 $M \ll N$, 满足 $\mathbf{y} = \Phi \Psi \hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 不唯一, 最小化 ℓ_0 -范数等效于在满足 $\mathbf{y} = \Phi \Psi \hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的所有 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 中选取具有最少非零元素个数的向量。





(b)

图 1-1 (a) Shannon-Nyquist 采样技术基本结构, (b) 压缩采样基本结构

通过上述内容分析, 压缩感知理论主要涉及信号的稀疏表示、压缩测量及重构算法三方面的内容:

(1) 根据待测信号特性选取合适的稀疏表示基, 使信号在表示基上具有最少的非零变换系数个数。

(2) 设计与表示基不相关的观测矩阵, 在实际应用中还必须考虑观测矩阵的硬件可实现性。

(3) 设计高效的信号重构算法, 减少准确重构原始信号所需的压缩测量值个数, 提高算法的鲁棒性。

1.3.1.2 信号稀疏表示

信号自身或在某个变换域具有稀疏特性是压缩感知理论的基础。稀疏性的含义为: 对于模拟信号, 信号的“信息率”远低于信号的带宽; 对于数字信号情况, 信号的自由度低于信号的长度。根据压缩感知理论, 信号的非零变换系数个数越少信号越稀疏, 准确重构原始信号所需的测量值个数越少, 选取合适的稀疏表示基是压缩感知理论应用的前提条件。

对于 N 维向量信号 \mathbf{x} , 如果信号中非零元素个数不超过 K , $\|\mathbf{x}\|_0 \leq K$, 那么信号称为 K -稀疏信号。通常情况下, 我们所处理信号自身并非稀疏的, 但是可以通过选取合适的基 Ψ 对信号进行稀疏表示, 如 $\mathbf{x} = \Psi\mathbf{a}$, 并且 $\|\mathbf{a}\|_0 \leq K$, 此时 \mathbf{x} 同样也称为 K -稀疏信号。实际信号处理中, 许多信号具有稀疏特性, 即: 信号可以通过有限个变换基向量的线性组合进行准确表示。傅立叶基^[79]、小波基^[80]、离散余弦基^[81]、以及 Gabor 基^[82]等均可作为稀疏表示基。如图 1-2 所示, 正弦型信号在 Fourier 基上稀疏, 分段连续型信号在小波基上稀疏。

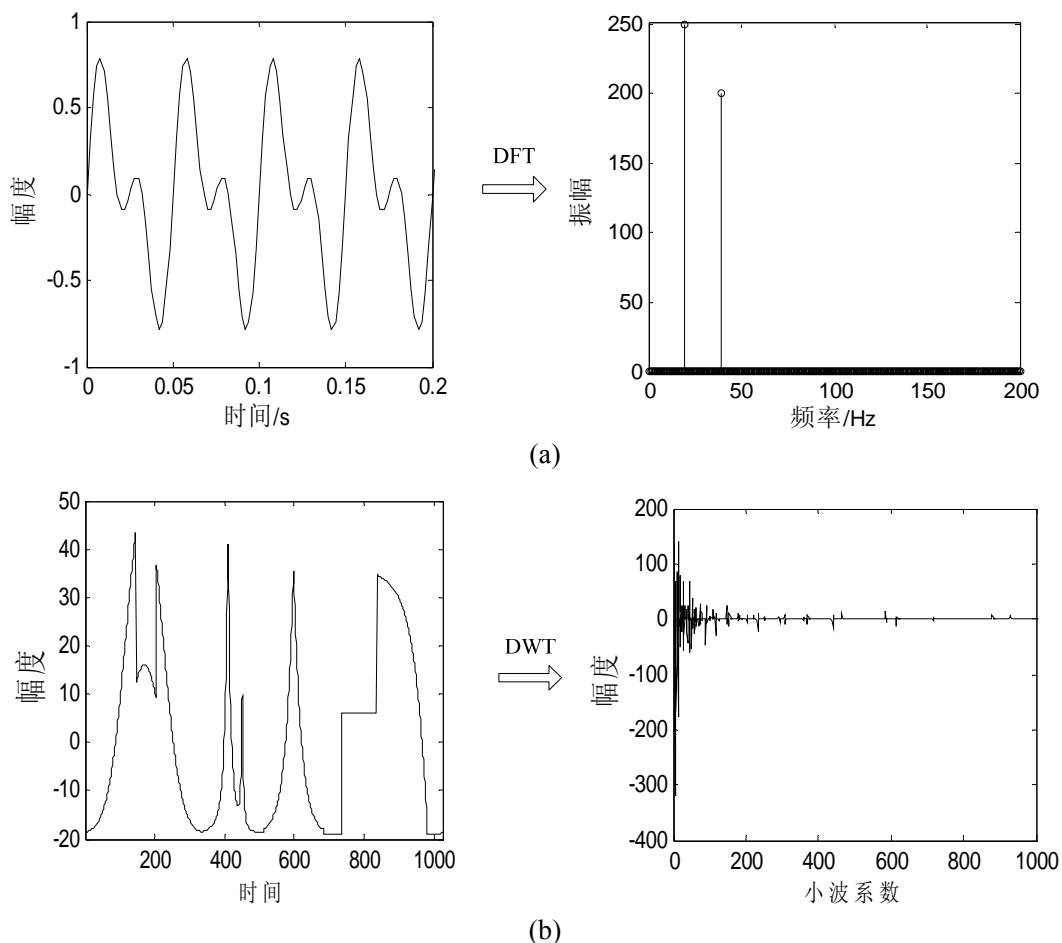


图 1-2 (a)正弦型信号在傅立叶基上的稀疏变换,

(b)分段连续型信号在小波基上的稀疏变换

信号稀疏分解是信号处理中的一类常见问题，如数据压缩，去噪等，在逼近理论中，信号稀疏分解是指根据目标函数特性选取合适的基底，并在选取的基底中挑选最优的 K 个线性组合对目标进行逼近。此外，信号稀疏分解还包括统计估计，机器学习，信号建模等问题。

1.3.1.3 压缩测量矩阵特性

压缩感知过程实际上是通过测量矩阵将信号从高维空间映射到低维空间的过程。为了能够从有限的测量值中恢复原始信号，E. Candès 和 T. Tao 证明了压缩感知矩阵必须满足约束等距性条件(Restricted Isometry Property, RIP) [83-86]。对于稀疏度为 K 的稀疏信号 α (K 个非零元素的位置未知)，约束等距性条件定义为：

$$(1 - \delta_K) \|\alpha\|_2^2 \leq \|\Theta\alpha\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\alpha\|_2^2 \quad (1-4)$$

其中矩阵 $\Theta (= \Phi \Psi)$ 为感知矩阵, δ_K 为 K 阶约束等距常数, 如果 $\delta_K \in [0,1)$, 则压缩感知矩阵满足约束等距性条件。

对于给定压缩感知矩阵, 通过数学证明其是否满足约束等距性条件困难, 作为约束等距特性的等价条件, Baraniuk 提出了压缩测量矩阵 Φ 与稀疏表示矩阵 Ψ 不相关(incoherence)。相关系数定义为:

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \cdot \max_{1 \leq i, k \leq N} |\langle \varphi_i, \psi_k \rangle| \quad (1-5)$$

相关系数定义了 Φ 与 Ψ 的列向量之间的最大相关性, 如果 Φ 与 Ψ 含有相关的列, 则相关系数越大, 反之相关系数越小, 相关系数范围为 $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{N}]$ 。相关系数越小, 压缩测量值携带的原始信号信息越多, 准确重构原始信号的概率越高。

约束等距性条件和相关特性均只能用于检验一个矩阵是否适合作为压缩测量矩阵, 而不能指导压缩测量矩阵的构造。常用压缩测量矩阵有: 输入满足独立同分布的高斯矩阵和贝努利矩阵、局部傅立叶矩阵以及随机托普利兹矩阵。

1.3.1.4 信号重构算法

重构原始信号需要求解(1-1)式优化问题, 由于 $M < N$, 从低维空间的压缩采样值恢复高维空间的原始信号是一个欠定问题(underdetermined problem), 求解(1-1)式的结果不唯一。压缩感知理论所研究信号具有稀疏性, 在这些求解结果中具有最稀疏特性的即为原始信号。然而最小 ℓ_0 -范数问题是一个 NP-hard 问题, 多项式求解困难, 通常情况下需要将问题进行转化^[24-26], 压缩感知理论研究学者提出了一系列求得次最优解的算法, 这些算法可以分为两类: 凸松弛算法和贪婪算法。

凸松弛法通过将最小 ℓ_0 -最优化问题转化为最小 ℓ_1 -范数最优化问题, 在满足问题 1-1 的结果中搜索向量幅度具有最小 ℓ_1 -范数的结果。凸松弛法算法通过将非凸问题转化为凸问题求解得到信号的逼近, 如基追踪(Basis Pursuit, BP)算法, 内点法以及迭代阈值法等。凸松弛法算法重构信号精度高, 但是计算复杂。

贪婪算法通过每次迭代选择一个局部最优解来逼近原始信号, 这些算法包括匹配追踪算法(Matching Pursuit, MP)、正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)、分段正交匹配追踪算法(Stagewise OMP, StOMP)以及正则化正交匹配追踪算法(Regularized OMP, ROMP)等。相比凸松弛算法, 贪婪算法实现难度低, 计算速度快, 广泛应用于工程应用中。

1.3.2 压缩感知理论的应用

压缩感知理论由 D. Donoho, E. Candès 及 T. Tao 等人于 2006 年提出, 作为一种全新的信息获取理论, 该理论一经提出, 在信号处理的相关领域得到高度关注与广泛应用, 并被美国科技评论为 2007 年度十大科技进展。压缩感知理论在信号获取的同时对信号进行压缩, 能够有效降低采集系统对传感元件、采集速率、信号传输信道、存储空间等的要求。目前压缩感知理论的研究虽然处于起步阶段, 但已发展了分布式压缩感知理论、1-bit 压缩感知理论、Bayesian 压缩感知理论等, 成为数学领域和工程应用领域的一大研究热点。在美国、以色列、英国、瑞士等国家的知名大学成立了专门的课题组对压缩感知理论进行研究。

压缩感知理论作为 Shannon-Nyquist 采样定理的一种替代, 具有广阔的应用前景, 主要包括压缩成像、信道编码、模拟/信息转换等。美国 RICE 大学 Barabiuk 等人利用压缩感知理论成功研制出单像素相机, 该相机首先通过光路系统将成像目标投影到一个数字微镜器件上, 其反射光由透镜聚焦到单个光敏二极管上, 光敏二极管两端的电压值即为一个测量值, 通过多次测量得到测量向量, 然后采用重构算法恢复具有高分辨率的原始图像, 单像素相机是压缩感知理论的第一个成功应用实例。压缩感知理论也可以应用于核磁共振成像(Magnetic Resonance Imaging, MRI)领域^[87-89], MRI 成像系统需要大量时间才能获取具有高分辨率的扫描图像。压缩感知理论利用 MRI 图像具有可压缩性, 可以显著降低扫描时间, 并且不降低成像图形的分辨率。MRI 设备主要生产厂商通用电气、西门子及飞利浦已经开始开发用于 MRI 图像重构的压缩采样软件。压缩采样理论在雷达成像中也得到了应用^[90-93], 与传统雷达成像技术相比, 压缩采样雷达对接收端进行了简化, 由于不是对信号进行直接采样, 降低了接收端对 ADC 输入带宽的要求, 设计重点由复杂的硬件设计转化为高效的信号重构算法。Bhattacharya 等人^[94-95]将压缩感知理论应用到合成孔径雷达图像数据采集上, 解决了海量数据采集和存储问题, 显著降低了卫星图像处理的计算代价。

在压缩编码应用中, Haupt 等人^[96]证明: 对于具有高可压缩性或信噪比充分大的图像信号, 在含噪声压缩测量值中, 仍能准确重构原始图像。Marcia 以及 Stankovic 等人分别对压缩感知理论应用于视频编码孔径重建与视频信号采样进行了研究^[97-98]; Gan 通过对图像进行基于块的压缩采样, 实现了对高位图像的快速重建^[99]; Cevher 等人研究表明, 与源图像相比, 源图像与背景图像之间差图像具有更加稀疏的性质, 通过对背景图像的抽取, 可以实现对图像中的目标进行成像^[100]。

对于带宽非常高的信号,例如雷达和通信信号处理系统涉及的射频信号,根据 Shannon-Nyquist 采样定理,要获得完整的信号信息,所采用的 ADC 的工作频率必须高于信号的 Nyquist 频率。Blu 指出信号的“信息速率(Information Rate)^[38]”远低于信号的最高频率,Shannon-Nyquist 采样定理是不失真重构原始信号的充分条件,而不是必要条件。Kriolos 等设计了基于压缩感知理论的模拟/信息转换器 AIC^[12],该转换器首先通过具有信号 Nyquist 频率的随机序列对信号进行随机解调,采用低速 ADC 对低通滤波输出信号进行采样,通过后端数字信号处理器对测量值进行重构得到原始信号。基于随机解调原理,Moshe 等设计了宽带信号多通道并行压缩采样器,该转换器通过多个低速 ADC 对随机解调后高频窄带信号进行采样,在频域对信号进行准确重构。由于 AIC 能够突破 Shannon-Nyquist 采样定理对稀疏信号采样的限制,具有极高的应用价值。基于压缩感知理论的 AIC 在雷达接收器、信道估计等领域中得到极高的关注,美国国防部先进项目局(DARPA)专门对此立项,由加州理工大学,赖斯大学等课题组对模拟信息转换进行研究。

由于压缩感知理论的研究在国内起步较晚,但作为一种全新的信息获取理论,国内越来越多的学者也加入到压缩感知理论研究队伍中。国内学者主要对压缩重构算法进行研究,以及对现有压缩采样实现模型应用领域进行探索,对压缩采样具体实现研究较少,特别是对模拟信息转换的研究。

1.4 本文研究内容及结构安排

1.4.1 本文研究思路及主要内容

本文主要围绕压缩感知理论在具有稀疏特性的模拟信号采样与重构这一主题展开。首先在对压缩感知理论理解的基础上提出新的信号压缩采样模型,其次对传统压缩信号重构算法的优缺点进行介绍与分析,提出新的信号重构算法。具体的研究内容包括:

- 1、基于随机等效采样的压缩采样方法研究。作为传统均匀采样方法的补充,针对周期信号,随机等效采样技术提供了一种降低 ADC 工作频率的解决方案。然而随机等效采样技术的实现需要对采样时钟施加扰动使其相位在一个采样周期内均匀分布,硬件实现困难。本文对压缩感知理论进行分析,研究了通过压缩感知理论改进随机采样信号重构方法的可行性,在对采样值序列和待重构信号关系深入分析的基础上,提出了适用于随机等效采样技术的压缩测量矩阵。

2、针对 ADC 输入带宽对测试信号范围的限制情况，本文对随机解调原理进行了研究，分析了基于随机解调的模拟信息转换器的基本结构及其数学模型，在此基础上提出了并行模拟信息转换器。考虑硬件实现的可行性，本文提出了一种基于 Hadamard 结构的压缩测量矩阵，首先利用 Rademacher 序列对信号进行随机解调，然后对 Hadamard 矩阵投影后的基带信号进行低速采样，证明了 Rademacher 序列能够降低压缩测量矩阵与稀疏表示基之间的相关性。在频域对解调过程进行了分析，在此基础上提取出了压缩传感矩阵，通过重构算法对低速采样值进行随机解调，重构原始信号。

3、频域稀疏表示基失配信号重构算法研究。对频率失配产生的原理以及它对传统信号重构算法的影响进行了分析，并提出了新的频域压缩采样信号重构算法：ILS-root-MUSIC。与传统压缩采样信号重构算法不同，ILS-root-MUSIC 信号重构算法不需要采用 DFT 表示基，因此不存在表示基失配问题，能够对具有小数频率成分的信号进行重构。

4、对于非平稳信号的压缩采样信号重构的情况，本文对该类信号的多尺度小波变换系数分布特性进行了分析，分别介绍两种小波域稀疏的压缩采样信号重构算法：基于隐马尔可夫树结构的小波域压缩采样信号重构算法和基于小波系数倒树结构的 OMP 算法。两种算法基于小波系数的不同树状结构，基于隐马尔可夫树结构的算法是对加权最小 ℓ_1 范数优化算法的改进，以小波系数的状态概率构造加权系数；基于小波系数倒树结构的 OMP 算法是对 OMP 算法的改进，在 OMP 算法对残差与传感矩阵各列向量求内积的过程中，对处于倒树上的小波系数所对应的列向量进行加权。在模型已知的情况下，基于隐马尔可夫树结构的小波域压缩采样信号重构算法具有更高的重构精度，而基于小波系数倒树结构的 OMP 算法易实现，计算量小，更适合工程应用。

1.4.2 本文结构安排

本文研究内容分为六章，针对具有稀疏特性的模拟信号采样实现与信号重构算法进行研究，本文的体系结构安排如下：

第一章 绪论

介绍本文的研究背景，模拟信号采样的主要方法，以及当前的解决方案和现有方法的不足；介绍了压缩感知理论的基本原理及其应用现状。

第二章 基于随机等效采样技术的压缩采样方法

介绍了随机等效采样技术的基本原理，分析了随机等效采样系统中随机相位产生的机理，以及现有随机等效采样信号重构方法存在的不足。对压缩感知理论在随机采样信号重构中应用的可行性进行了研究，通过 Whittaker-Shannon 插值公式建立了非均匀随机采样值序列与均匀重构信号之间的关系，并在此基础上推导出了适用于随机等效采样技术的压缩测量矩阵。通过实验对基于压缩感知理论的信号重构方法与现有方法进行了对比分析，以超声检测系统为例详细介绍了基于随机等效采样技术的压缩采样信号重构过程。

第三章 基于随机解调的并行压缩采样方法

介绍了随机解调的基本原理，对基于随机解调的模拟信息转换器的结构进行了分析，并给出了模拟信息转换器的数学模型。并在此基础上提出了具有更高压缩采样效率的并行结构模拟信息转换器以及更加灵活的分段式并行压缩采样模型，通过对模型工作原理进行分析，给出了它们的压缩测量矩阵。并行压缩采样方法以及分段式并行压缩采样方法适用与线谱信号，考虑高频多窄带频谱稀疏信号，本章提出了一种基于 Hadamard 矩阵的压缩采样方法。该方法的测量矩阵采用 Hadamard 矩阵的行向量构成，具有硬件可实现性。通过在频域对该模型的工作原理进行了详细的分析，推导了用于信号重构所需的压缩感知矩阵。

第四章 压缩采样信号重构与检测算法

对压缩采样信号重构的典型算法进行了介绍，分析了各种重构算法的优缺点。分析了频域稀疏表示基失配产生的原理以及对信号重构的影响，在此基础上提出了一种结合迭代最小二乘法与 root-MUSIC 频谱估计的信号重构算法，并给出了算法的具体实现步骤。实验验证了算法对表示基失配信号重构的可行性，通过与传统信号重构算法对比可以发现，本章提出的信号重构算法在稀疏表示基失配信号重构中具有更优的性能。

第五章 小波域稀疏压缩采样信号重构研究

选择合适的稀疏表示基能够提高压缩采样信号重构的性能。对于广泛使用的分段连续型信号，其小波变换系数具有可压缩稀疏性，为压缩感知理论的应用提供了条件。本章对信号小波变换多尺度分析系数进行了深入的分析，研究了小波系数的统计特性，介绍了基于隐马尔可夫树的小波域稀疏压缩采样信号的重构方法。在对小波系数统计特性研究的基础上，本章提出了一种基于倒树结构的改进型正交匹配追踪算法，给出了算法的具体实现，实验验证了算法的可行性，并通过与传统方法的比较，得出本章提出的信号重构算法具有更高的重构精度。

第六章 结束语。

总结全文并对后续工作进行展望。

全文总体结构框图如图 1-3 所示。

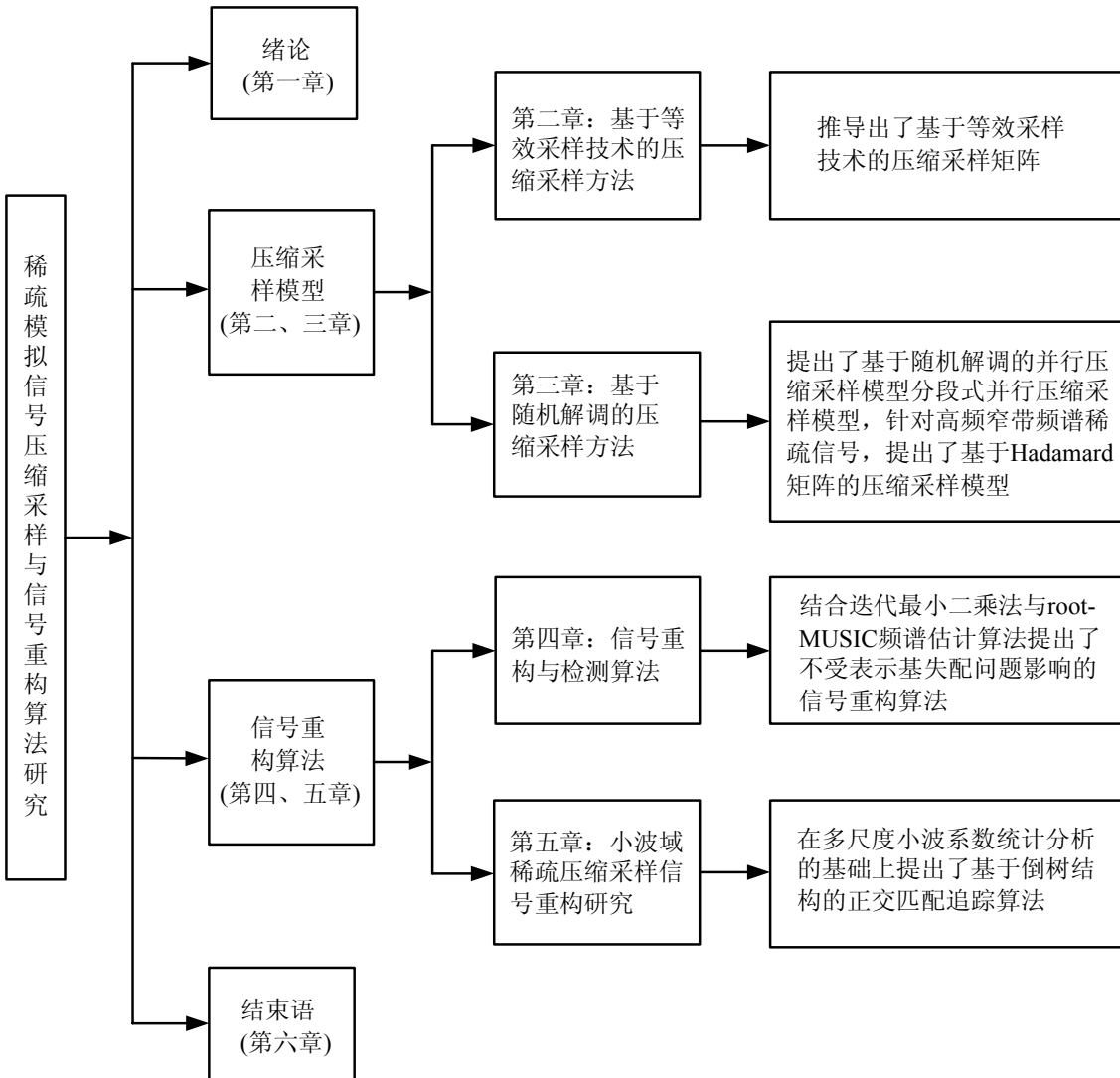


图 1-3 全文总体结构框架

第二章 基于等效采样技术的压缩采样方法

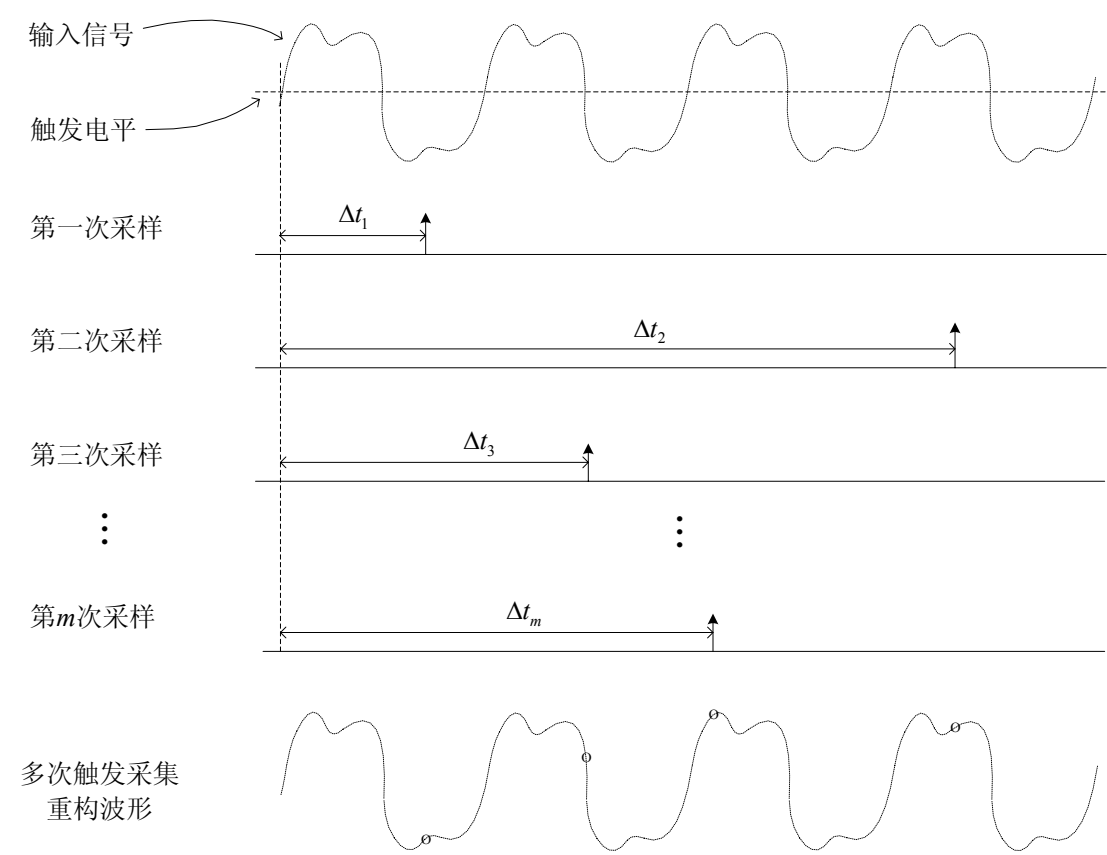
在实时采样中，ADC 以不低于信号最高频率两倍的速率对信号进行采样，实时采样技术在对非周期信号和瞬态信号的采集中具有不可替代性，随着电子技术的发展，以实时采样技术为基础的信号获取方式正成为数字处理系统的瓶颈。在许多应用场合，如雷达测距、超声检测等，被测信号具有重复性，随机等效采样技术对该类信号提供了一种更优的解决方案。随机等效采样技术利用产生被测信号的触发脉冲与采样脉冲相位之间的随机性，以远低于信号 Nyquist 频率的采样率对重复信号进行多次触发采样，按采样时间间隔对随机采样值进行排序，构成具有高等效采样率的波形。重构波形质量取决于触发信号与采样脉冲相位之间的随机性以及有效触发采集次数，采样效率低。压缩感知理论对具有稀疏特性的采样信号重构提供了一种全新的信号获取方法。由于随机等效采样技术所处理信号具有重复性，可以通过傅立叶变换对信号进行稀疏表示，这为压缩感知理论的应用提供了必要条件，采用 Whittaker-Shannon 插值公式构造压缩测量矩阵，可以实现对随机等效采样信号的重构方法的改进^[101]，提高采样效率与信号重构精度。

2.1 随机等效采样系统

根据 Shannon-Nyquist 采样定理，为了不失真地重构原始信号，ADC 的工作频率不得低于信号最高频率的两倍。由于分辨率、材料、芯片工艺等的限制，现有 ADC 的技术指标难以达到实际应用要求。随机等效采样技术指出，如果被测信号是周期信号或可重复信号，原始信号可以通过多次触发采样进行波形重构，避免采用单次触发采集进行波形重构所需的高采样率。由于随机等效采样技术能够有效地降低采样率，从而降低对 ADC 的要求，随机等效采样技术在电子测量领域得到广泛的应用^[102-104]。国外专业示波器生产厂商惠普(HP)公司 HP 54600 系列数字示波器、力科(LeCroy)公司 WaveMaster 系列数字存储示波器、泰克(Tektronic)公司 6604 数字存储示波器、安捷伦(Agilent)公司 54855A 数字存储示波器以及国内示波器生产厂商绿扬公司 YB4400 示波表均集成了随机等效采样技术。

随机等效采样技术基本原理如图 2-1 所示，采用电平触发电路对输入周期信号与触发电平进行比较，当输入信号穿越触发电平时产生一个触发脉冲，在触发脉

冲之后的第一个采样脉冲对信号进行取样。为了能够准确重构波形，触发电平的选取必须满足在每个信号周期内具有唯一性，因此触发脉冲具有与输入信号相同的频率。由于取样点为触发脉冲后的第一个采样脉冲，所以采样时间 $\Delta t \in (0, T_s]$ ，其中 T_s 为采样脉冲周期。如果采样脉冲与触发脉冲之间的相位具有随机性，即：采样时间 Δt 均匀分布在时间间隔 $(0, T_s]$ 上，那么经过足够多次采样，以采样相对时间为序对低速随机采样值进行排列，将构成具有高等效采样率的重构波形。随机等效采样技术的具体实现框图如图 2-2 所示。



Δt_1 : 第一次触发采样时间
 Δt_2 : 第二次触发采样时间
 Δt_3 : 第三次触发采样时间
 Δt_m : 第 m 次触发采样时间

图 2-1 随机等效采样示意图

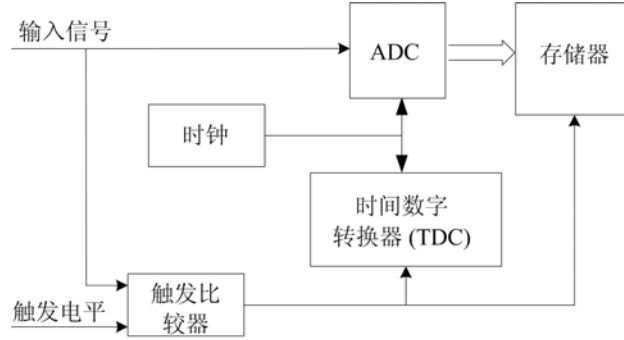


图 2-2 随机等效采样实现原理图

在实际应用中，需要对采样时间 Δt 进行量化，如：将时间间隔 $(0, T_s]$ 量化为 N 个时间段，则重构信号的等效采样率为 $f_e = N/T_s$ 。为了能够不失真地重构原始信号波形， N 的选取需要满足等效采样率 f_e 不小于两倍信号最高频率。

设输入模拟信号为 $x(t)$ ，其傅立叶变换为 $X(\omega)$ ，经随机等效采样排序后的输出信号等效于周期冲激串 $p(t)$ 与 $x(t)$ 相乘，冲激串为：

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \frac{T_s}{N}) \quad (2-1)$$

其傅立叶变换为：

$$P(j\omega) = \frac{2\pi N}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - kN\omega_s) \quad (2-2)$$

样本值序列的为：

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x(t)p(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \frac{T_s}{N}) \delta(t - n \frac{T_s}{N}) \end{aligned} \quad (2-3)$$

随机等效采样输出序列傅立叶变换为：

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)] \\ &= \frac{N}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - kN\omega_s)) \end{aligned} \quad (2-4)$$

其中： $*$ 表示卷积运算， ω_s 为采样角频率， $\omega_s = 2\pi/T_s$ 。

2.2 时间测量

随机等效采样技术是基于采样时间排序的方法重构原始信号波形，因此需要对采样相对时间进行测量。

2.2.1 时间展宽

由 2.1 节分析可知，采样相对时间 $\Delta t \in (0, T_s]$ ，可能取值很小，无法直接测量。在随机等效采样实现中， Δt 经展宽后间接测量，展宽电路可以采用快速充电慢速放电电路实现^[105]。图 2-3 所示为快充满放时间展宽的工作原理。

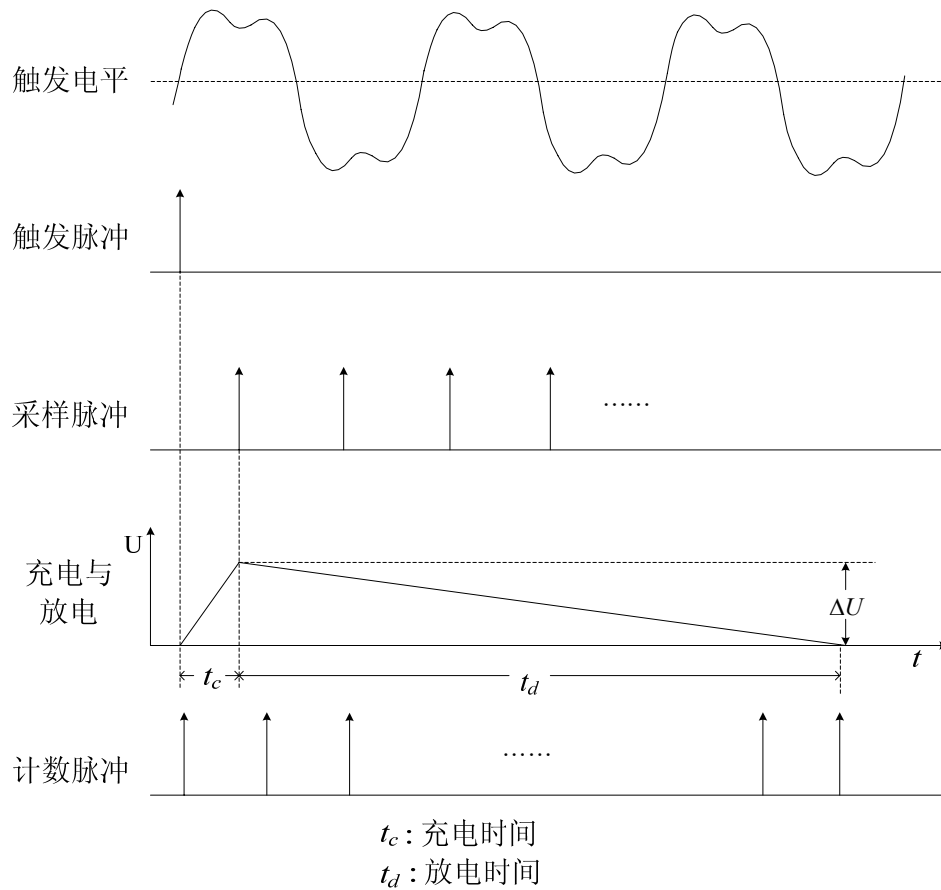


图 2-3 时间展宽原理

图 2-3 中充电时间 t_c 为采样相对时间，当被测信号波形幅度穿越触发电平时产生一个触发脉冲，此时充电电路开始快速充电，并等待第一个采样脉冲。当第一个采样脉冲出现时充电电路停止充电，同时放电电路开始慢速放电，放电时间为 t_d 。放电完成时完成一次随机采样，并且充电电压等于放电电压：

$$\Delta U = \frac{I_c \cdot t_c}{c} = \frac{I_d \cdot t_d}{c} \quad (2-5)$$

式中 c 为充放电电容容量, I_c 与 I_d 分别为充电电流与放电电流, 且 $I_c \square I_d$, 所以 $t_c \square t_d$, 实现了采样相对时间的展宽, 展宽倍率 $R = t_d / t_c$ 。可以通过计数器对 t_d 进行测量, 从而获取各个随机采样值的相对位置。

2.2.2 时间校准

为了避免采样相对时间太小导致充放电电路工作异常, 在采样相对时间进入展宽电路前通常需要叠加一个合适的时间间隔。在本章所采用的实验平台上, 采样相对时间 Δt 叠加了半个计数脉冲周期($T_c/2$)以后再进行展宽。

由于受到工作温度的影响, 充放电电路对时间展宽的倍率会发生变化, 为了避免降低信号重构精度, 需要对测量时间进行校准。校准过程包含三个步骤, 设置 $t_1 = T_c / 2$, $t_2 = 3T_c / 2$, 首先测量 t_1 与 t_2 , 然后测量叠加后的采样相对时间 $\Delta t_i + T_c / 2$ 。测量与校准步骤如下:

(1): 当 $t_c = t_1$ 时, 充放电完成后的展宽时间为 $K_1 T_c = t_c + t_d = (1 + R)t_1$, 计数器的计数值为:

$$K_1 = (1 + R) / 2 \quad (2-6)$$

(2): 当 $t_c = t_2$ 时, 充放电完成后的展宽时间为 $K_2 T_c = t_c + t_d = (1 + R)t_2$, 计数器的计数值为:

$$K_2 = 3(1 + R) / 2 \quad (2-7)$$

(3): 当 $t_c = \Delta t_i + T_c / 2$ 时, 充放电完成后的展宽时间为 $K_i T_c = t_c + t_d = (1 + R)(\Delta t_i + T_c / 2)$, 计数器的计数值为:

$$K_i = (1 + R)(\Delta t_i + T_c / 2) / T_c \quad (2-8)$$

结合(2-6)至(2-8)式可得采样时间间隔 Δt_i 为:

$$\Delta t_i = \frac{K_i - K_1}{K_2 - K_1} T_c \quad (2-9)$$

由(2-9)式可知采样相对时间 Δt_i 与展宽电路放大倍率 R 无关, 从降低了展宽电路对测量精度的影响。

2.3 采样脉冲随机相位分析

由于随机等效采样的采样率低于信号 Nyquist 频率, 为了避免重构波形产生混叠, 随机采样值应随机地分布在信号波形上, 即: 随机采样时间应均匀分布在 $[0, T_s]$ 上。设: ADC 的工作频率为 $f_s (= 1/T_s)$; 输入被测信号频率为 $f_0 (= 1/T_0)$, 且 $f_s \square f_0$ 。则采样频率与信号频率之间的关系可表示为^[106]:

$$T_s = Q \cdot T_0 + \delta \quad (2-10)$$

其中 Q 为正整数, δ 为 T_s 对 T_0 求模运算结果, $0 \leq \delta < T_0$ 。

定义 Δt 为触发脉冲与其后的第一个采样脉冲之间的时间差, 则 Δt 表示采样值在一个采样周期内的相对位置, $0 < \Delta t \leq T_s$ 。设 q 和 r 为正整数, 触发脉冲出现时间为 $r \cdot T_0$, 采样脉冲出现时间可表示为 $q \cdot T_s + \beta$, 其中 β 为采样脉冲的随机相位, $0 < \beta < T_s$ 。 Δt 的表达式为:

$$\begin{aligned} \Delta t &= (q \cdot T_s + \beta - r \cdot T_0) \bmod T_s \\ &= (\beta - (r \cdot T_0 \bmod T_s)) \bmod T_s \\ &= \begin{cases} \beta - (r \cdot T_0 \bmod T_s) & \text{if } \beta \geq (r \cdot T_0 \bmod T_s), \\ T_s - \beta + (r \cdot T_0 \bmod T_s) & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2-11)$$

式中 $(\cdot) \bmod (\cdot)$ 为求模运算, 能否根据随机采样值准确重构原始信号波形取决于 Δt 在 $[0, T_s]$ 上的分布特性。由(2-10)式可知, 对于给定采样时钟和被测信号, 他们之间的周期具有确定的关系, 采样脉冲将集中分布在 T_s 内的 Q 个区域, 最坏情况是当 $\delta = 0$ 时, 采样值将始终出现在 T_s 内的 Q 个固定的位置。为了避免这种采样时间的非均匀性出现, 在随机等效采样的实际应用中, 需要对采样时钟的相位施加一个随机的扰动, 如(2-11)式中的 β 。如果能够通过施加扰动使 β 均匀分布在 $[0, T_s]$ 上, 那么随机采样值也将均匀分布在信号波形上, 通过足够多次的随机采样将实现对原始信号的波形重构^[107]。

然而, 通过对采样时钟施加扰动, 使相位 β 均匀地分布在一个采样周期上非常困难, 并且会以增加采样次数为代价, 降低采样效率。图 2-4 为有效采样值个数和随机采样次数的关系。采样时钟施加扰动次数为 20 次, 采样周期被量化为 250 个时间间隔, 随着采样次数的增加, 有效采样值个数增加。然而, 即使进行 1500 次采样, 仍然还需要大约 40 个有效采样值才能构成完整波形。

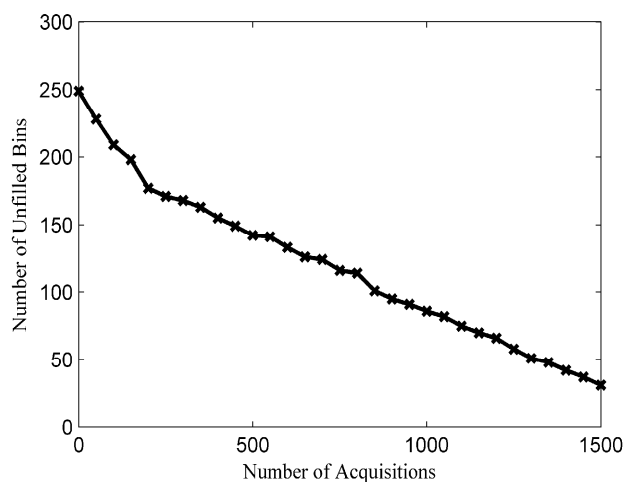


图 2-4 有效随机采样值个数与采样次数的关系

图 2-5 为采样相对位置的 Δt 实测分布图，图中 T_s 为采样周期，由于采样相对位置是一个非常小的时间间隔，在随机等效采样的实际应用中，需要通过电路对其进行放大后测量，假设电路的放大倍数为 R ，则采样相对时间的范围为 $\Delta t \in [0, RT_s]$ 。另一方面，为了避免 Δt 取值太小引起放大电路非正常工作，再对 Δt 展宽之前对其叠加一段时间 $T_c/2$ 。通过图 2-5 可以发现，在时间间隔 $[0, RT_s]$ 上，有大量时间段没有进行采样。

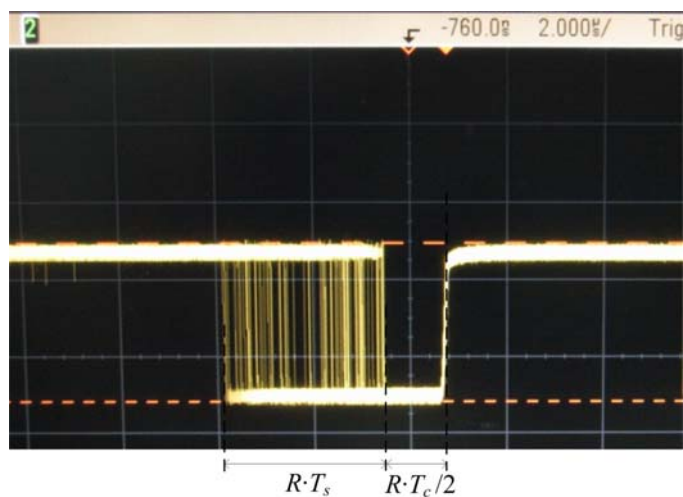


图 2-5 采样相对时间实测分布图

2.4 基于压缩感知理论的随机等效采样信号重构

随机等效采样能够降低 ADC 的工作频率，然而为了能够准确重构原始信号，随机等效采样需要大量的采样次数，采样效率低，同时信号重构过程中对随机采样值的采样位置进行了量化，存在量化误差。由压缩感知理论可知，对于具有稀疏特性的信号，可以通过少量的随机采样值进行准确重构。本文通过对压缩感知理论与随机等效采样技术的分析，提出一种基于压缩感知理论的随机采样信号重构方法(Compressed Sensing based RandomEquivalent Sampling, CS-RES)。

2.4.1 测量矩阵提取

随机等效采样所处理信号为周期信号，其 Fourier 变换仅含有少量非零系数，具有稀疏特性，这为压缩感知理论在随机等效采样信号重构中的应用提供了必要条件。

压缩感知理论应用的另一个先验条件是压缩测量矩阵满足 RIP 特性。矩阵是否满足 RIP 特性的数学证明复杂，RIP 特性的等价条件是测量矩阵和稀疏表示基不相关。E. Candès, T. Tao 等人已经证明：输入满足独立同分布的随机高斯变量或随机贝努利变量所构造的矩阵满足 RIP 特性。然而具有高斯分布或贝努利分布的测量矩阵无法应用于随机等效采样系统，需要对随机采样值与重构信号进行分析，并从中推导出适用于随机等效采样方法的测量矩阵。Shannon-Nyquist 采样定理指出：在特定条件下(采样值以 Nyquist 采样频率获取)，由采样值 $x(nT)$ 可以通过 Whittaker-Shannon 插值公式^[108]准确重构原始信号 $x(t)$ ：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (2-12)$$

其中 T 为采样周期， $\text{sinc}(\cdot)$ 为归一化的 sinc 函数。对于随机等效采样，设重构信号的等效采样率为 $f_e (= 1/ T_e)$ ，第 m 次随机采样相对位置为 Δt_m ，采样值为 $y(\Delta t_m)$ 。由(2-12)式可知，采样相对位置 Δt_m 有如下关系式：

$$y(\Delta t_m) = \sum_{n=1}^N x(nT_e) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Delta t_m - nT_e}{T_e}\right) \quad (2-13)$$

式中 $1 \leq m \leq M$ ， M 为重构具有长度为 N 的信号波形所需的随机采样采样值序列长度， $M \leq N$ 。 M 的取值与待重构信号所包含频率成分个数有关，具有 K 个频率成

分的信号需要 $M = c \cdot K \cdot \log(N)$ 个随机采样值才能准确重构， c 为正常数，其经验值为 5。

为了采用压缩感知理论对随机采样值进行重构，需要对非均匀随机采样值与均匀等效采样之间的关系进行矩阵-向量表示：

$$\begin{bmatrix} y(\Delta t_1) \\ y(\Delta t_2) \\ \vdots \\ y(\Delta t_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,N} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{M,1} & \phi_{M,2} & \cdots & \phi_{M,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(T_e) \\ x(2T_e) \\ \vdots \\ x(N \cdot T_e) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (2-14)$$

式中 Φ 为测量矩阵，其第 (m, n) 个输入为：

$$\begin{aligned} \phi_{m,n} &= \text{sinc}\left(\frac{\Delta t_m}{T_e} - n\right) \\ &= \text{sinc}(B_m - n) \end{aligned} \quad (2-15)$$

测量矩阵的构造取决于每次随机测量值的相对位置 Δt_m ，由于每次采样的相对位置具有随机性，在每次信号重构前均需要对测量矩阵进行重新计算，测量矩阵的计算将降低信号重构的效率。然而通过考察(2-15)式可以发现，测量矩阵的值由变量 B_m 的取值所决定，且 $0 \leq B_m = \Delta t_m / T_e \leq T_s / T_e = N$ ，可以通过以一定的分辨率对 B_m 进行量化，将所有的量化结果以(2-15)式进行计算，并将计算结果存于存储器中，每次随机采样结束后通过查找表的方式构造测量矩阵。这种以查找表方式构造测量矩阵是以通过增加存储器容量为代价减少测量矩阵的计算量，从而实现提高信号重构效率。

2.4.2 非相关性分析

由于待重构信号为周期信号，信号 \mathbf{x} 在频域具有稀疏性，采用离散傅立叶逆变换(Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)基向量构造周期信号 \mathbf{x} 的稀疏表示基矩阵 Ψ [109]：

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j2\pi/N} & \dots & e^{j2\pi(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j2\pi(N-1)/N} & \dots & e^{j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

根据压缩感知理论先验条件，测量矩阵需要满足约束等距特性或与稀疏表示基不相关。由于约束等距特性数学证明困难，我们通过非相关特性对测量矩阵进行检验。图 2-6 所示为测量矩阵 Φ 与稀疏表示基 Ψ 之间的相关系数随实验次数之间的变化关系，实验参数设置为： $M=64, N=128$ 。相关系数由公式(1-5)计算得到，由实验可知，其最大相关系数小于 2.5，远远小于 $\sqrt{N} (=11.3)$ ，测量矩阵 Φ 与稀疏表示基 Ψ 之间具有较小的相关系数，由 Whittaker-Shannon 插值公式所构造的测量矩阵能够对频域稀疏信号进行有效的压缩采样。

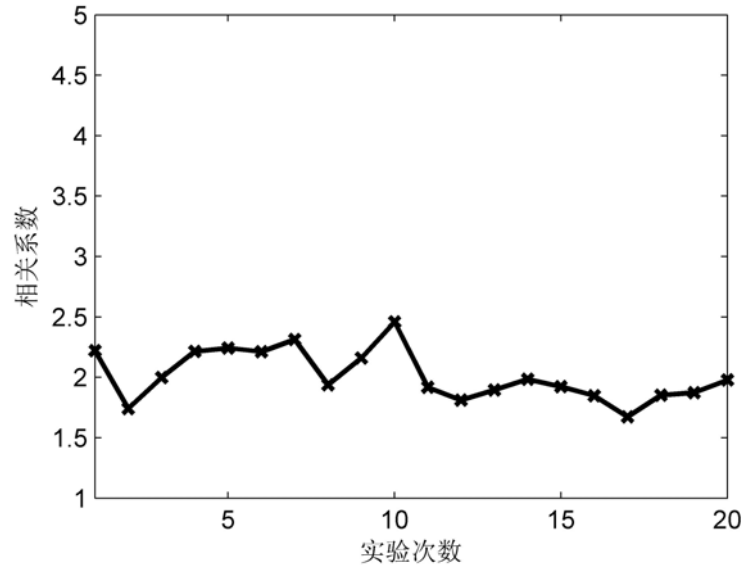


图 2-6 压缩测量矩阵与稀疏表示基之间的相关系数

(2-15)式可改写为：

$$y = \Phi x = \Phi \Psi \alpha \quad (2-17)$$

式中 α 为信号 x 的离散傅立叶变换系数向量。通过重构算法求解(2-17)式得到稀疏系数向量 α ，利用离散傅立叶变换得到原始信号 x 。

2.5 采样停止判决条件

压缩感知理论指出，可以通过少量的压缩测量值重构具有稀疏特性的原始信号，准确重构原始信号所需要的压缩采样值数量 M 由信号的稀疏度 K 和重构信号的长度 N 决定， $M = c \cdot K \cdot \log(N)$ ， c 为经验值常数。然而在实际信号采集中，虽然信号长度 N 已知，但被测信号的稀疏度 K 未知，无法根据经验公式决定用于信号重构的压缩采样值数量，通常情况是采集足够多的采样值进行重构。

另一方面，基于随机等效采样的信号获取方法每次获取一个测量值需要进行一次采样，考虑到每次采样所带来的时间、功耗等成本因素，以及采样值序列对传输带宽、存储资源的要求，我们希望能够通过最少的采样点重构原始信号。这就需要在采样序列中去除信息冗余，一旦采样序列值能够准确重构原始信号即停止采样。

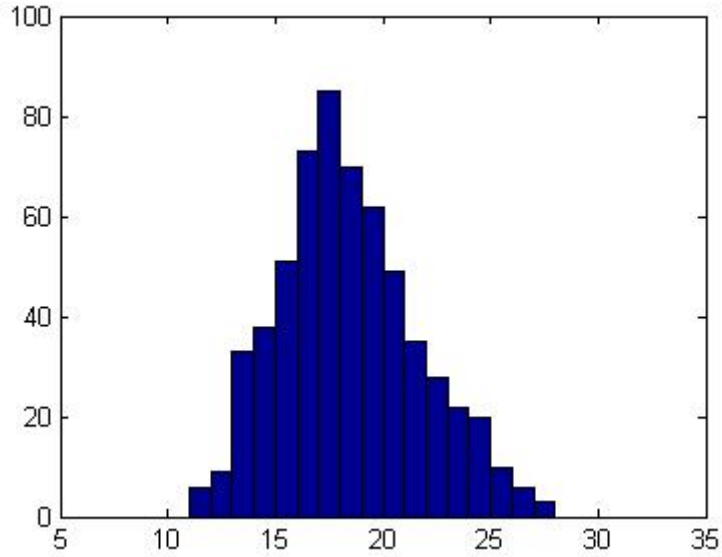


图 2-7 准确重构原始信号与所需采样值数量关系

对于基于随机等效采样技术信号获取方式的压缩采样信号重构，由于每次采样具有随机性，用于准确重构原始信号的采样值数量具有不确定性。图 2-7 所示为进行 600 次准确重构原始信号所需随机采样值序列长度分布特性，实验中的重构信号长度为 256，频域稀疏度为 5，定义重构信号信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)大于 15dB 为一次准确重构，信噪比 SNR 定义为：

$$SNR = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\| \mathbf{x} \|}{\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\#} \|} \right) \quad (2-18)$$

式中 \mathbf{x} 为原始信号, $\mathbf{x}^\#$ 为采用正交匹配追踪算法重构信号。通过实验可以发现, 用于准确重构原始信号的随机采样值数量具有较大的分散性, 最理想情况为通过 12 次随机采样即可准确重构, 最坏情况需要 28 次随机采样才能实现信号的准确重构。如果对随机采样值数量设定一个上界, 则绝大多数情况下用于信号重构的采样值存在较大的信息冗余。为了能够以最少的采样值准确重构原始信号, 最大化地降低采集数据中的信息冗余度, 在确保成功重构原始信号的前提下, 本文提出一种自适应的减少随机采样次数的方法。

基于随机等效采样的信号压缩感知方法可视为序列压缩采样, 我们可以通过判断当前采样值序列是否满足重构原始信号的条件, 根据判断结果来决定是否需要进行下一次采样。

定理 2.1^[110]: 重构信号为 $\mathbf{x}^\#$, M 次采样后采样值序列为 \mathbf{y}_M , 由 \mathbf{y}_M 重构信号为 $\mathbf{x}_M^\#$, $M+1$ 次采样后采样值序列为 \mathbf{y}_{M+1} , 由 \mathbf{y}_{M+1} 重构信号为 $\mathbf{x}_{M+1}^\#$, 如果 $\mathbf{x}_M^\# = \mathbf{x}_{M+1}^\#$, 则有 $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}_M^\#$, 即: 原始信号可以通过 M 次随机采样准确重构。

由定理 2.1 可知, 在每做一次停止判决前需要进行一次信号重构, 这将增加计算成本, 如果采用具有高速计算能力的数字信号处理芯片以及高效的信号重构算法将解决这一问题(如: 正交匹配追踪算法)。

基于定理 2.1 的采样停止判决准则的信号采集流程如下:

- ① 进行 d 次随机采样, 根据所获取采样值的相对位置构造压缩测量矩阵 $\Phi_d = [\phi_1, \dots, \phi_d]^T$, 由随机采样序列值 \mathbf{y}_d 进行信号重构得到 $\mathbf{x}_d^\#$ 。
- ② $i = d+1$, 进行第 i 次随机采样, 根据获取采样值的相对位置构造压缩测量矩阵 $\Phi_i = [\phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \phi_i]^T$, 并将采样值 y_i 添加到前 $i-1$ 个采样值中得到随机采样序列值 $\mathbf{y}_i = [y_1, \dots, y_{i-1}, y_i]^T$, 通过 \mathbf{y}_i 进行信号重构得到 $\mathbf{x}_i^\#$ 。
- ③ 如果 $\mathbf{x}_i^\# = \mathbf{x}_{i-1}^\#$, 则停止采样, 待重构信号 $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}_i^\#$, 否则重复执行步骤②。

由定理 2.1 实现算法可知, 通过停止判决条件可以判断当前采样序列是否能够重构原始信号, 从而决定是否需要进行下一次采样。在满足准确重构原始信号条件下, 随机采样序列值同样可能存在信息冗余, 基于定理 2.1, 我们提出一种去除采样序列值中信息冗余的算法。

引理 2.1: 重构信号为 $\mathbf{x}^\#$, $\mathbf{x}_M^\#$ 由采样序列 \mathbf{y}_M 重构, $\mathbf{x}_{M-1}^\#$ 由采样序列 \mathbf{y}_{M-1} 重构, 如果 $\mathbf{x}_M^\# = \mathbf{x}_{M-1}^\#$, 则 \mathbf{y}_M 中存在信息冗余, $\mathbf{x}^\# (= \mathbf{x}_{M-1}^\#)$ 可由 \mathbf{y}_{M-1} 重构。

根据定理 2.1 很容易证明引理 2.1。假设随机采样序列 \mathbf{y}_M 能够准确重构原始信号, 与其对应的压缩测量矩阵为 Φ_M , 通过引理 2.1 对这 M 个随机采样值去除信息冗余, 将引理 2.1 总结算法如下:

① 将随机采样序列 \mathbf{y}_M 中的第一个采样值去除得到 \mathbf{y}_{M-1} ，同样对压缩采样矩阵中与该采样值想对应的行向量去除构成新的压缩测量矩阵 Φ_{M-1} ，由 \mathbf{y}_{M-1} 与 Φ_{M-1} 进行信号重构得 $\mathbf{x}_{M-1}^\#$ 。

② 如果 $\mathbf{x}_{M-1}^\# = \mathbf{x}^\#$ ，则 \mathbf{y}_M 存在信息冗余，原始信号可由 \mathbf{y}_{M-1} 准确重构， $M = M - 1$ ，重复执行①，否则将在①中去除的采样值添加在采样序列的末端，同时将去除的行向量添加在压缩采样矩阵的最后一行，并重复执行①。当完成所有采样点的检查后执行③。

③ 随机采样序列 \mathbf{y}_M 中不存在信息冗余，并且能够准确重构原始信号。

2.6 实验验证

为了验证基于压缩感知理论的随机采样信号重构方法(CS-RES)，我们通过电路实验和仿真实验分别对 CS-RES 的可行性进行验证，并与传统随机采样信号重构方法进行对比。在随机等效采样原理图 2-2 基础上，我们设计了随机等效采样电路，电路实现如图 2-8 所示。

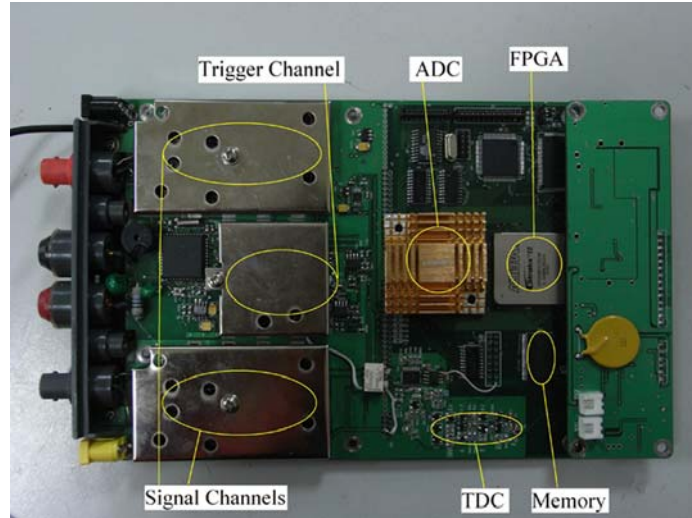


图 2-8 随机等效采样信号采集电路

信号采集系统主要有信号通道、触发通道、ADC、Field Programmable Gate Array (FPGA)、存储器、以及用于采样时间展宽的时间数字转换器(Time-to-Digital Convertor, TDC)，由具有快速充电慢速放电特性的充放电电路实现)。信号在 FPGA 的控制下进行采样，采样数据以及展宽后的采样时间通过 RS-232 串行口传输到电脑，采用 MATLAB 软件对信号进行重构。

采集系统在信号采样过程中的 ADC 的工作频率为 $f_s = 100\text{MHz}$ ，重构信号的等效采样率 $f_e = 25\text{GHz}$ ，重构信号长度为 $N = 250$ 。ADC 的时钟信号由 FPGA 提供，时钟信号在 FPGA 内部通过 20 条具有不同延时的路径后随机选择一路作为 ADC 的工作时钟，在每次采集前可以重新随机选取，实现对采样时钟的扰动，增加被测信号与采样时钟相位之间的随机性。

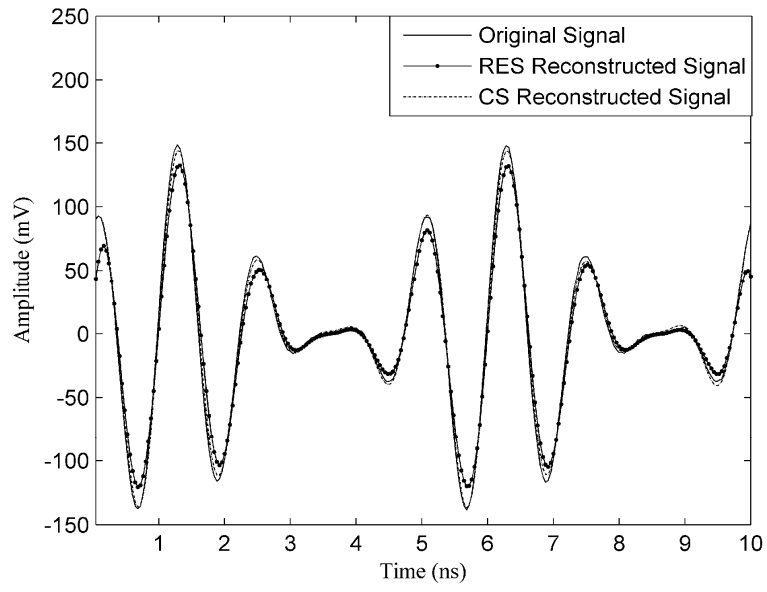
在使用传统等效采样信号重构(RES)方法对信号重构过程中，需要对采样相对位置进行量化，即将 T_s 量化为 250 个小的时间单元，我们对没有取得采样点的时间点上进行线性插值，同时对插值后的信号低通滤波处理。在基于压缩感知的信号重构方法中，根据量化前的采样相对位置利用(2-15)式构造压缩测量矩阵，通过正交匹配追踪算法对信号进行重构。以 SNR 为指标对重构信号进行评价，SNR 定义如(2-18)式所示。

首先我们对在频域具有稀疏特性的调幅 (AM) 信号进行随机采样重构，调幅信号具有如下表达式：

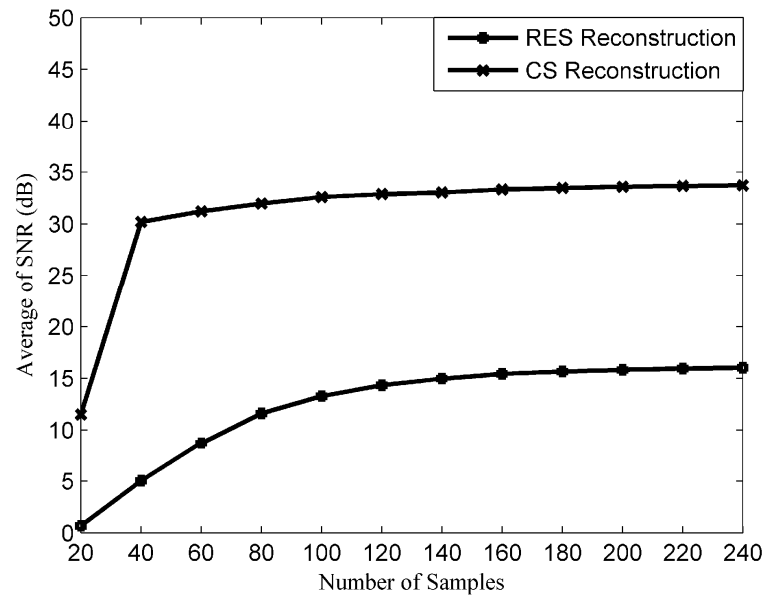
$$f_{\text{AM}}(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot (m(t) + C) \quad (2-19)$$

式中 $m(t)$ 为调制信息， f_c 为载波信号截至频率， A 和 C 为常数，调幅信号的频域稀疏度为 $2 \cdot K + 1$ ，其中 K 为 $m(t)$ 中的频率成分个数，在实验中 $K = 1$ 。图 2-9 所示为基于时间排序的 RES 重构信号与本文提出的 CS-RES 重构信号的对比。图 2-9(a) 中，118 个随机采样点用于 RES 信号重构，在这 118 个采样点中随机选取 64 个采样点用于 CS-RES 信号重构。基于时间排序的 RES 重构信号 $\text{SNR} = 14.56\text{dB}$ ，然而 CS-RES 重构信号的信噪比达到 $\text{SNR} = 31.51\text{dB}$ 。通过实验可知，CS-RES 信号重构方法具有可行性，其信号重构性能优于传统 RES 信号重构方法。

为了比较 RES 信号重构方法与 CS-RES 信号重构方法采用不同随机采样点序列长度的情况的重构波形，我们对 12 组序列长度的采样点分别采用 RES 与 CS-RES 方法重构，在每组长度的实验中进行 100 次采样重构，重构信号信噪比的平均值与方差分别如图 2-9(b)和 2-9(c)所示。由实验可知，当采样点序列长度达到 40 时，CS-RES 重构信号的信噪比达到 30dB，同时信噪比的方差小于 3dB。然而 RES 重构信号的平均信噪比显著低于 CS-RES 重构信号信噪比，即使采样点序列长度达到 240，平均信噪比也低于 18dB。



(a)



(b)

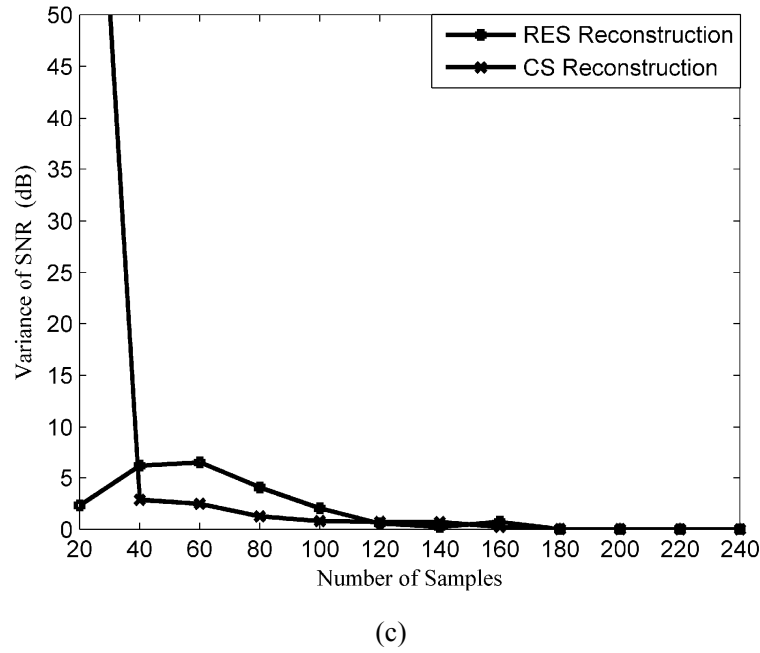
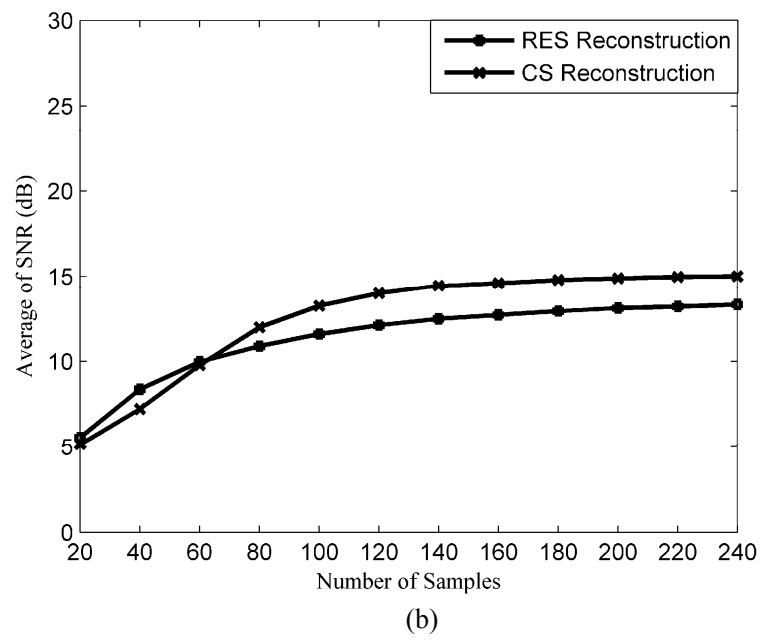
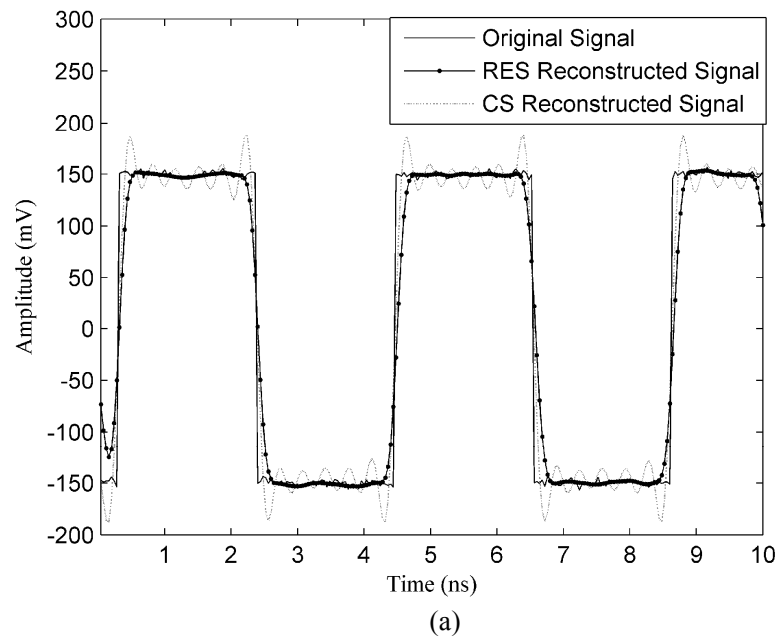


图 2-9 正弦型调幅信号分别采用 RES 与 CS-RES 重构信号对比

信号稀疏性是压缩感知理论的一个先验条件，信号越稀疏，重构信号所需的采样点数量越少。图 2-10 为分别采用 RES 和 CS-RES 对方波信号的重构效果。方波信号由基波分量和无穷多个高次谐波分量组成，当采用 Fourier 级数对方波信号进行变换时，由于对 Fourier 级数的截断，Fourier 反变换后的方波信号会出现吉布斯现象(Gibbs phenomenon)。

CS-RES 信号重构方法在每次重构迭代过程中对具有最大幅度的变换系数依次重构，图 2-10(a)为对方波信号重构波形，RES 与 CS-RES 均采用 118 个随机采样点对信号进行重构，基于时间排序的 RES 重构波形的信噪比为 $\text{SNR} = 12.71 \text{ dB}$ ，CS-RES 重构波形的信噪比为 $\text{SNR} = 14.35 \text{ dB}$ 。虽然 CS-RES 对方波信号的重构无法达到对调幅信号的重构效果，但还是比 RES 重构波形效果更好。

图 2-10(b)与图 2-10(c)为对方波信号重构性能的统计分析实验。我们对具有不同长度的采样值序列进行重构，对每组序列长度进行 100 次采样重构，图 2-10(b)为重构信号的平均信噪比，由图可知，当采样序列长度超过 60 时，CS-RES 重构效果优于 RES 重构效果。但两种方法对方波信号的重构效果都明显低于具有更稀疏的调幅信号重构效果。图 2-10(c)所示为重构波形信噪比的方差，在参与重构采样点数量低于 120 时，RES 重构效果更稳定，当参与重构采样点数量超过 120 时，RES 与 CS-RES 方法重构稳定性相当。



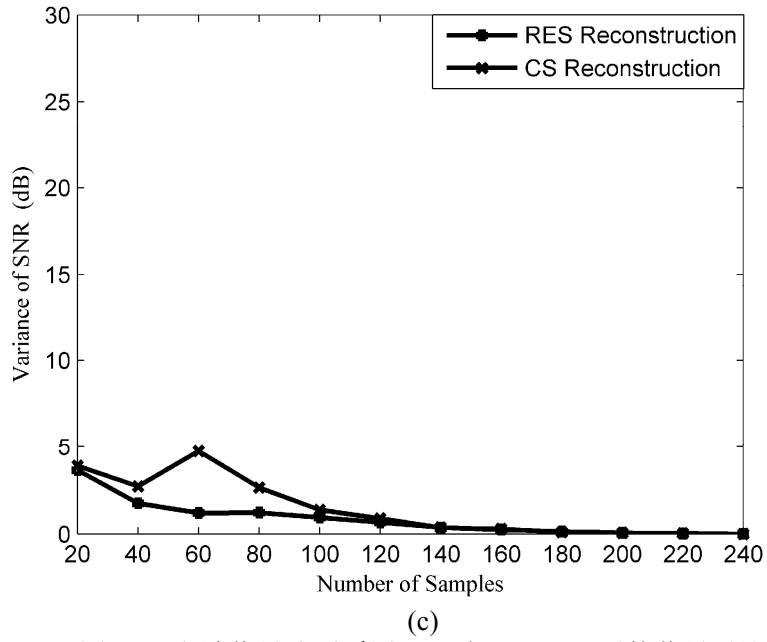


图 2-10 方波信号分别采用 RES 与 CS-RES 重构信号对比

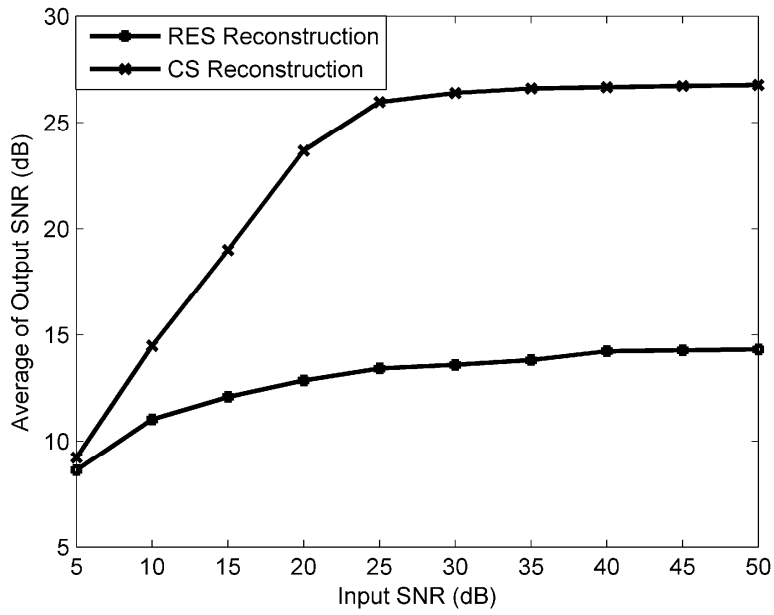


图 2-11 不同信噪比输入信号的重构性能比较

CS-RES 压缩测量矩阵由各随机采样点的相对时间位置构造，由于采样时间间隔的测量会受到采样时间抖动的影响，进而影响 CS-RES 信号重构性能。在实际 CS-RES 应用中，本章 2.2.2 节中的时间校准算法能够有效地降低时间抖动的影响，同时 CS-RES 还可以通过增加用于信号重构的随机采样点数量来提高信号重构精

度。在采样电路中，采样的时间抖动可以视为高斯白噪声，为了对 CS-RES 的抗干扰能力进行验证，在随机采样点中加入高斯白噪声。图 2-11 所示为不同信噪比的输入信号的 CS-RES 信号重构结果示意图。实验参数设置与前两个实验的参数设置相同，测试信号为具有 5 个频率成分的正弦型稀疏信号，用于信号重构的随机采样点数量为 128。输入信号的信噪比从 5 dB 至 50 dB 以 5 dB 为步进变化，在每组信噪比条件下进行 100 次实验，并将 100 次实验结果进行平均。由实验结果可知，CS-RES 抗干扰能力优于传统 RES 信号重构方法。

图 2-9 与 2-10 检验了 CS-RES 方法对在频域具有稀疏特性的信号压缩采样重构。然而在实际应用中，有些信号无法通过有限的基向量的线性组合进行表示，无法采用 Fourier 变换、小波变换等传统信号处理方法对其进行稀疏表示，如超声检测信号、脉冲雷达测距(定位)信号等。但这类信号的应用有个共同的特点，通过发生一个已知信号，对反射信号进行采样，脉冲反射信号如图 2-12 所示。



图 2-12 反射脉冲信号波形

如果将信号发射时刻作为触发点，可以采用随机等效采样的方法实现信号的欠采样。为了能够应用 CS-RES 方法对采样信号进行重构，我们需要对信号进行稀疏表示。通过对图 2-12 分析可以发现，反射信号 $x(t)$ 可以表示为多个发射信号 $s(t)$ 的幅度加权与相位延时^[111]：

$$x(t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k s(t - t_k) \quad (2-20)$$

式中 K 为反射信号中脉冲个数， α_k 为第 k 个脉冲的幅度， t_k 为第 k 个脉冲的延时。通过(2-20)式对反射信号进行表示后信号的受限制自由度为 $2K$ ，信号 $x(t)$ 可视为稀疏度为 K 的稀疏信号，稀疏表示基矩阵可表示为：

$$\Psi := \{\psi_n(t) | \psi_n(t) = s(t - n \cdot T_e)\} \quad (2-21)$$

式中 $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ ， N 为重构信号长度， $f_e (= T_e)$ 为重构信号等效采样率。

图2-13所示为分别采用RES与CS-RES方法对脉冲雷达反射信号重构仿真实

验。压缩测量矩阵采用(2-15)式构造，脉冲雷达发射信号稀疏表示基矩阵由(2-21)式构造。重构信号长度为 $N = 500$ ，信号中的脉冲个数为4，它们的相对位置为 $17T_e$ ， $123T_e$ ， $257T_e$ ；幅度分别为1.8，1.4，1，0.6，即：信号通过稀疏表示基矩阵变换后的非零系数分别为： $\alpha[17] = 1.8$ ， $\alpha[123] = 1.4$ ， $\alpha[257] = 1$ ， $\alpha[412] = 0.6$ 。RES重构信号信噪比为 $\text{SNR} = 23.86 \text{ dB}$ ，而CS-RES实现完全准确重构。

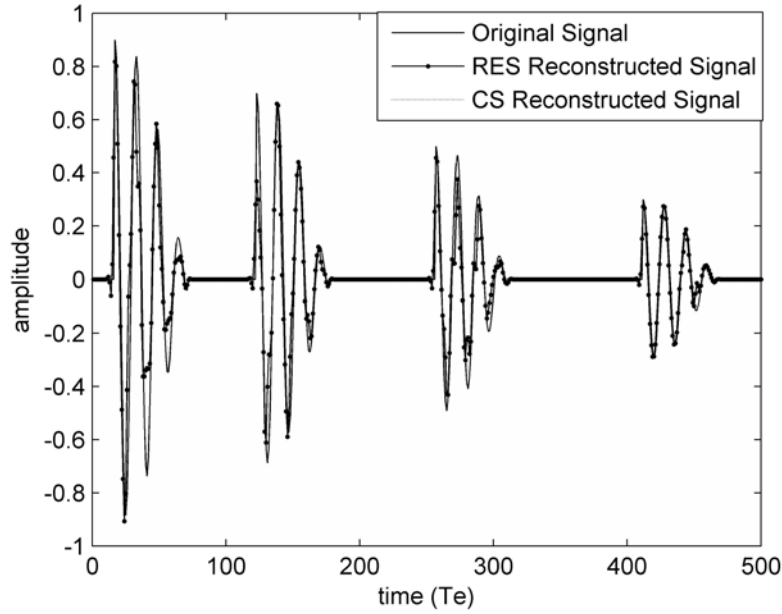


图 2-13 脉冲雷达反射信号 RES 与 CS-RES 重构信号对比

2.7 本章小结

本章主要是在对随机等效采样技术研究的结果基础上研究压缩感知理论信号重构问题。随机等效采样利用采样脉冲与被信号之间的相位非相关性，实现对信号的欠采样，并通过每次随机采样相对信号周期内的固定触发点的位置对采样值按时间排序，通过多次采样，实现具有高等效采样率波形的重构。

通过对采样脉冲与被测信号相位的分析可以发现，随机采样点的分布主要集中在采样周期内的几个点并逐步扩展，相当数量的长时间间隔上不能获取到有效的采样点。通过对采样脉冲施加随机扰动可以增加采样相对位置的随机性，当随机扰动以足够高的分辨率均匀分布在采样周期上时，随机采样技术可以获取到足够多的有效点对信号波形进行重构。然而这种通过改变采样时钟相位的方式实现困难，且增加系统成本。本章通过对压缩感知理论在随机等效采样技术中的应用

的可行性进行了分析，发现随机等效采样技术结构以及所处理信号特性满足压缩感知理论的两个先验条件，通过压缩感知理论对随机等效采样信号进行重构具有可行性。

在对随机采样信号与待重构信号之间的关系进行分析的基础上，通过 Whittaker- Shannon 插值公式建立了非均匀随机采样值与均匀待重构信号之间的关系。采用 Whittaker- Shannon 插值公式成功构造了压缩测量矩阵，且该压缩测量矩阵满足压缩感知理论对测量矩阵的要求，即：压缩测量矩阵与稀疏表示基矩阵不相关。给出了压缩采样停止判决条件，以及去除信息冗余的算法。

最后通过实验和仿真对本章提出的采样重构方法进行了验证。对在频域具有稀疏特性的调幅信号分别采用传统的 RES 重构方法和本章提出的基于压缩感知理论的 CS-RES 方法重构信号对比，通过实验可以发现 CS-RES 方法具有更好的重构效果。本章同时对脉冲雷达发射信号的稀疏表示方法进行了研究，通过实验可以发现，CS-RES 方法能够准确重构该信号。CS-RES 信号重构方法是在传统随机等效采样技术基础上提出，该方法不增加任何系统硬件成本，同时本章提出的方法也可作为压缩感知理论应用于其它非均匀采样信号重构中的一种参考^[112]。

第三章 基于随机解调的并行压缩采样方法

压缩感知理论通过将高维信号投影到低维信号进行采样，能够有效地降低采样时钟频率以及采样点数量。在第二章中所提出的 CS-RES 方法是利用压缩感知理论对现有随机等效采样信号重构方法的改进，在不改变现有随机等效采样系统的情况下通过算法提高信号重构精度。CS-RES 方法能够突破 Shannon-Nyquist 采样定理对稀疏信号采集的限制，但无法改变采集系统获取信号能力受到 ADC 模拟信号输入带宽限制的现状，因此构建一种能够只对低频滤波后的基带信号采样、并能通过基带采样值重构原始信号的压缩采样机制非常必要。

基于随机解调的模拟信息转换器 AIC 能够将被测高频模拟信号投影到低频基带进行采样，通过算法从基带采样值中重构原始信号，AIC 不仅能够实现对信号的欠采样，同时还能解决 ADC 模拟信号输入带宽限制问题。本章在对随机解调模拟信息转换器分析的基础上提出了并行模拟信息转换器，通过数学表达式对转换器进行了分析，并提取出了用于压缩采样信号重构的测量矩阵。针对模拟信息转换器的稀疏表示矩阵采用离散 Fourier 变换(Discrete Fourier Transform, DFT)基向量构成，重构信号有限长度对信号截断导致“频谱泄漏”的问题，本章提出了一种基于随机解调的高频多窄带压缩采样方法，在频域重点分析了压缩采样模型的基本工作原理，建立了压缩采样信号与待重构信号的频域表示关系，通过离散时间 Fourier 变换(Discrete Time Fourier Transform, DTFT)对信号模型的分析，构造了采样模型的压缩感知矩阵。

3.1 模拟信息转换器

模拟信息转换器是 S.Kirolos, J.Laska 等人^[11]于 2006 年首先提出，该项目受美国国防部先进项目研究局资助由赖斯大学、加州理工大学，德州农机校等美国高校参与。模拟信息转换器采用一组具有信号 Nyquist 频率的随机序列对待测试信号进行随机解调，将高频模拟信号投影到基带采样，通过算法重构原始信号。模拟信息转换器是压缩感知理论在模拟信号压缩采集中最成功的应用之一。

3.1.1 信号模型

美国联邦通信委员会(Federal Communications Commission, FCC)研究指出, 在大多数情况下, 通信信道的频谱利用率呈现一种稀疏特性^[113], 即: 在给定时刻, 仅有少量信道处于占用状态, 如图 3-1 所示。

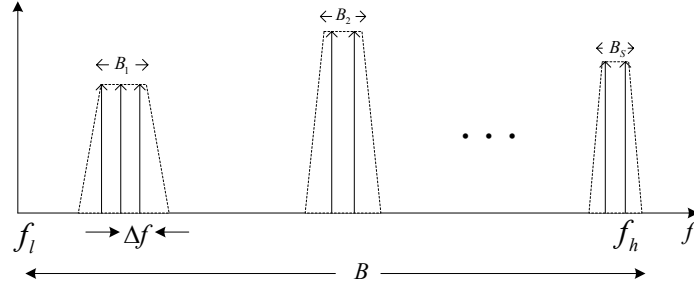


图 3-1 频域稀疏信号频谱特征图

假设信号 $x(t)$ 的频谱分布在 f_l 到 f_h 上, 信号带宽为 B 。在 f_l 与 f_h 之间, 具有有限个子带信号, 并且它们的位置是未知的, 不失一般性, 设信号为 $[0, f_h]$ 上带限信号, 则信号可以表示为:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_0^{f_h} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (3-1)$$

式中 $X(f)$ 为信号 $x(t)$ 的 Fourier 变换。如果采用 Shannon-Nyquist 采样定理对信号进行采集, 为了能够不失真恢复原始信号, 采样频率应不小于 $2f_h$, 当 f_h 很高时, 这将对 ADC 提出巨大的挑战。

时间连续模拟信号可以通过有限维的信号模型进行获取^[8-9], 采用有限维模型对信号 $x(t)$ 进行估计, 其表达式为:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n \cdot \Delta f) \cdot e^{j2\pi n \Delta f t} \Delta f, \quad t \in [0, T_s] \quad (3-2)$$

式中 T_s 为采样频率, $\Delta f = 1/T_s$ 为频域轴上的分辨率, $f_h = (N-1) \cdot \Delta f$ 。也就是说信号带宽在 $[0, f_h]$ 以内的信号 $x(t)$ 可以采用分辨率为 Δf 的有限个载波信号进行估计。然而在实际应用中, 信道频谱的使用具有稀疏特性, 大多数频带没有被占用, 即: $B_1 + B_2 + \dots + B_S \ll B$ 。假设信号 $x(t)$ 的频率可由 K 个载波信号进行估计, 则 $B_1 + B_2 + \dots + B_S = K \cdot \Delta f$, 且 $K \ll N$, (3-2)式可重新改写为:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{K-1} X(n_k \cdot \Delta f) \cdot e^{j2\pi n_k \Delta f t} \Delta f + n(t) \\
&= \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_{n_k} \cdot \Psi_{n_k}(t) + n(t)
\end{aligned} \tag{3-3}$$

式中 $n(t)$ 为加性高斯白噪声 (Additive White Gaussian Noise, AWGN), $n_k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $\Psi = [\Psi_0(t), \Psi_1(t), \dots, \Psi_{N-1}(t)]$, 为稀疏表示基矩阵, $\Psi_n(t) = e^{j2\pi n \Delta f t}$, $\alpha = [\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{N-1}(t)]$ 为系数向量, $\alpha_n(t) = \Delta f \cdot X(n \cdot \Delta f)$ 。

3.1.2 模拟信息转换器基本结构

模拟信息转换器基本结构如图 3-2 所示:

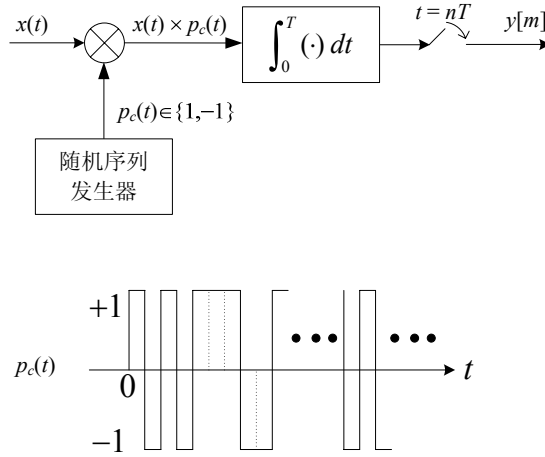


图 3-2 基于随机解调的模拟信息转换器基本原理图

模拟信息转换器由 4 部分组成: 宽带随机序列发生器、宽带随机解调器、积分器以及低速 ADC。

随机序列发生器生成满足贝努利分布取值为+1 与-1 的随机序列 $p_c(t) \in \{1, -1\}$, $p_c(t)$ 的带宽不得低于信号的 Nyquist 频率, 否则无法在频域对信号进行“感知”。采用取值为+1 与-1 贝努利分布随机序列有两个主要因素: (1) 输入满足+1 与-1 贝努利分布随机序列所构成的矩阵满足压缩感知理论先验条件, 即: 压缩测量矩阵必须满足约束等距特性或与稀疏表示基矩阵不相关; (2) 取值为+1 与-1 的随机序列硬件模拟电路可实现, 随机序列可以通过移位寄存器等电路产生。在硬件电路设计中, 相对设计高速 ADC, 设计高速随机序列实现难度更低。实际上采用这种通过随机序列对信号进行解调的机制广泛应用于宽带通信系统中, 如

Binary Phase Shift Keying (BPSK), Code Division Multiple Access (CDMA)等。

宽带解调器将 $p_c(t)$ 与信号 $x(t)$ 进行解调(或感知), 通过解调器作用以后的信号在整个频带将携带信号 $x(t)$ 的频谱信息, 随机解调器在时域和频域工作原理如图 3-3 所示。在时域, 信号 $x(t)$ 与宽带随机序列相乘, 在频域, 随机序列频谱对信号频谱进行卷积运算, 信号 $x(t)$ 的频谱将改变随机信号 $p_c(t)$ 的频谱, 在随机序列的整个频带上都将携带信号 $x(t)$ 的频谱特征^[7]。由于随机序列频谱分布在 0 到 Nyquist 频率上, 通过对基带信号进行采样, 采用信号重构算法在基带信号采样值中提取信号 $x(t)$ 的频域特征, 在频域重构原始信号 Fourier 变换系数, 采用 Fourier 反变换实现原始信号的重构。

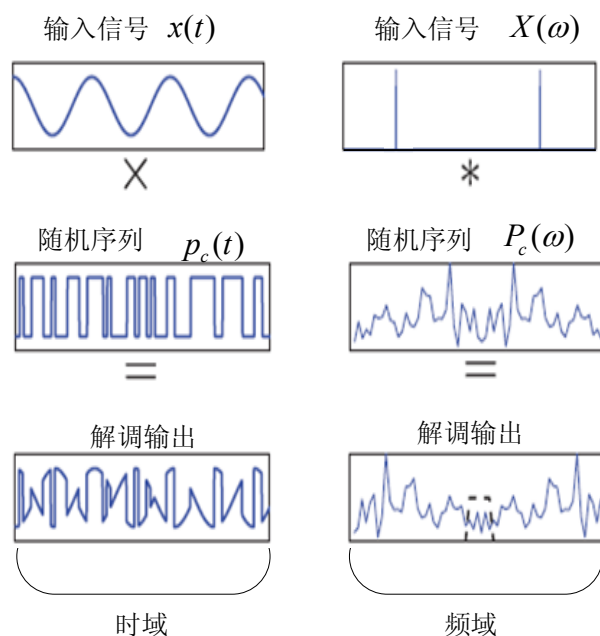


图 3-3 随机解调在时域与频域功能示意图

模拟信息转换器以时间 T 为周期对信号进行采集, 积分器对随机解调输出信号进行积分, 其功能等效于低通滤波器的作用。积分时间与 ADC 采样频率相同, 均为 T 。定义重构信号的长度为 N , 重构信号等效采样率为 T_e , 在时间 $N \cdot T_e$ 上进行 M 次均匀采样, 且 $M \ll N$ 。由于 $M \cdot T = N \cdot T_e$, 采样周期 T 大于重构信号等效采样周期 T_e , 从而实现对信号的压缩采样。

3.1.3 数学模型

虽然模拟信息转换器是对模拟信号进行压缩采样, 但是其功能可以视为首先使用随机序列 $p_c(t)$ 以 Nyquist 采样率对信号进行采样, 然后通过积分器对多个

Nyquist 采样值累加，最后以低速 ADC 进行采样，从而实现对信号的压缩。

随机序列 $p_c(t)$ 由 $p_c[n]$ 组成， $p_c[n]$ 取值为+1 与-1，

$$p_c(t) = p_c[n], \quad t \in [(n-1)T_e, nT_e], \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (3-4)$$

$p_c(t)$ 以 Nyquist 频率在+1 与-1 之间随机切换。混频器将输入模拟信号 $x(t)$ 与随机解调序列 $p_c(t)$ 相乘得到解调输出信号，

$$y(t) = x(t) \cdot p_c(t), \quad t \in [0, N \cdot T_e] \quad (3-5)$$

经积分器累加后，第 m 个采样序列值为：

$$\begin{aligned} y[m] &= \int_{mT_e}^{(m+1)T_e} p_c(t) \cdot x(t) dt \\ &= \sum_{n=m \cdot N/M}^{(m+1) \cdot N/M} p_c[n] \cdot \int_{mT_e}^{(m+1)T_e} x(t) dt \end{aligned} \quad (3-6)$$

为了能够采用压缩感知理论对信号进行重构，需要对(3-6)式是进行矩阵-向量表示。将模拟信号 $x(t)$ 表示为 Nyquist 采样序列值 $x[n]$ ，则(3-6)式可重新表达为：

$$y[m] = \sum_{n=m \cdot N/M}^{(m+1) \cdot N/M} p_c[n] \cdot x[n] \quad (3-7)$$

将(3-7)式表示为矩阵向量表达式：

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} \quad (3-8)$$

式中 $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_{M-1}]^T$ 为低速采样值序列， $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{M-1}]^T$ 为待测信号的 Nyquist 采样值序列， \mathbf{P} 为随机序列的矩阵表达形式，

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_c[0] & & & \\ & p_c[1] & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_c[N-1] \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

在数字域，图 3-1 中的积分器的作用等效于将 N/M 个连续 Nyquist 采样序列值进行累加，设 $N/M = 3$ ，则矩阵 \mathbf{H} 可表示为：

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

压缩测量矩阵为 $\Phi = H \cdot P$ ， $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 。如果信号在频域具有稀疏性，则 $N \times N$ 维稀疏表示基矩阵 Ψ 由 DFT 变换基向量构造，当压缩采样值序列满足(3-11)式时，压缩感知矩阵 $D = \Phi \Psi$ 以较高的概率满足约束等距条件，

$$M = O(K \cdot \log^2(N/K)) \quad (3-11)$$

式中 K 为信号 $x(t)$ 的稀疏度。也就是说，被测信号在表示基矩阵 Ψ 上稀疏或可压缩，那么我们可以通过随机解调器输出的采样值重构原始信号。J. Tropp 等人研究指出：如果采用 ℓ_1 最小范数优化算法，准确重构原始信号所需的压缩测量值为：

$$M \geq C \cdot K \cdot \log(N/K + 1) \quad (3-12)$$

式中常数 $C \approx 1.7$ 。

3.2 多通道并行压缩采样

模拟信息转换器采用单片 ADC 对信号进行采样，ADC 的工作频率为 $f_s = (M/N) \cdot f_e$ ， f_e 为重构信号等效采样率。为了进一步降低 ADC 的工作频率，在模拟信息转换器结构基础上，本节提出一种多通道并行模拟信号压缩采样模型。

3.2.1 并行压缩采样

并行模拟信息转换压缩采样模型原理框图如图 3-4 所示。并行模拟信号压缩采样模型的基本构成部件与模拟信息转换器相同，不同之处在于它采用多个 ADC 对信号采样，这与时间交替并行采样与均匀采样之间的关系类似，但是与时间交替并行采样存在两点不同：

(1) 时间交替并行采样值序列为周期非均匀，并行模拟信号压缩采样各个 ADC 在统一的采样脉冲驱动下工作，可视为均匀采样。

(2) 时间交替并行采样所需 ADC 的数量为 $N = f_e / f_s$ ，并行模拟信号压缩采样所需 ADC 的数量为 M ， $M \leq N$ 。

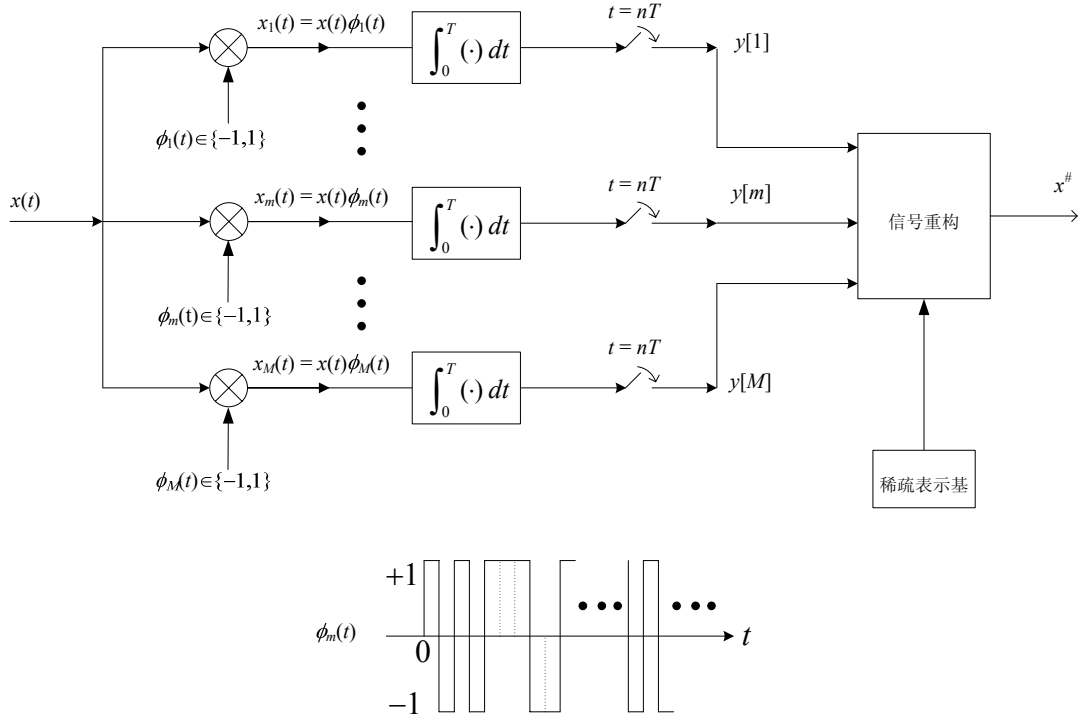


图 3-4 并行模拟信息转换压缩采样示意图

考虑在空间 Ψ 上具有稀疏特性的信号 $x(t)$ ， $x(t)$ 的 Nyquist 采样值序列为 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ ， Ψ 可由 Fourier 变换基，离散小波变换基等构成，如果信号的稀疏度为 K ，则信号可由 K 个 Ψ 中的基向量的线性组合进行表示，

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n(t) \\ &= \sum_{k=1}^K \alpha_{n_k} \psi_{n_k}(t) \end{aligned} \quad (3-13)$$

式中 $\psi_n \in \Psi$ ， $n_k \in \{1, 2, \dots, N\}$ ， $K \ll N$ ，假设 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$ 为信号 \mathbf{x} 在空间 Ψ 的系数向量，则有 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 = K$ 。

信号通过第 m 个支路的乘法器与随机序列 $\phi_m(t)$ 进行随机解调、积分器后采样输出 $y[m]$ 可以表示为：

$$\begin{aligned} y[m] &= \int_0^T x_m(\tau) d\tau \\ &= \int_0^T x(\tau) \phi_m(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-14)$$

式中 $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ ， M 为采集系统通道数量， T 为积分时间，同时也是各个 ADC

的采样周期。为了能够在频域对信号进行感知，随机序列的带宽不得低于信号的 Nyquist 频率。结合(3-13)式与(3-14)式，采样值可重新表示为：

$$y[m] = \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_0^T \psi_n(\tau) \phi_m(\tau) d\tau \quad (3-15)$$

假设 \mathbf{D} 为压缩感知矩阵，则压缩感知矩阵的第 (m, n) 个元素 $d_{m,n}$ 的表达式为：

$$d_{m,n} = \int_0^T \psi_n(\tau) \phi_m(\tau) d\tau \quad (3-16)$$

M 个通道的采样值序列 $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$ 与原始信号 \mathbf{x} 的矩阵-向量关系式为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{x} \quad (3-17)$$

如果随机解调序列取值满足 ± 1 的贝努利分布，则压缩感知矩阵满足约束等距性条件，由随机序列所构造的压缩测量矩阵 $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M]^T$ ($\phi_m \in \mathbf{R}^N$) 与任意稀疏表示基矩阵 Ψ 不相关，原始稀疏信号 \mathbf{x} 可以通过重构算法由欠采样值 \mathbf{y} 重构。图 3-5 所示为测量矩阵 Φ 与 Fourier 稀疏表示基 Ψ 之间的相关系数随实验次数之间的变化关系，实验参数设置为： $M = 64, N = 128$ 。相关系数由公式(1-5)计算得到，由实验可知，其最大相关系数小于 2.04，远远小于 \sqrt{N} ($= 11.3$)。

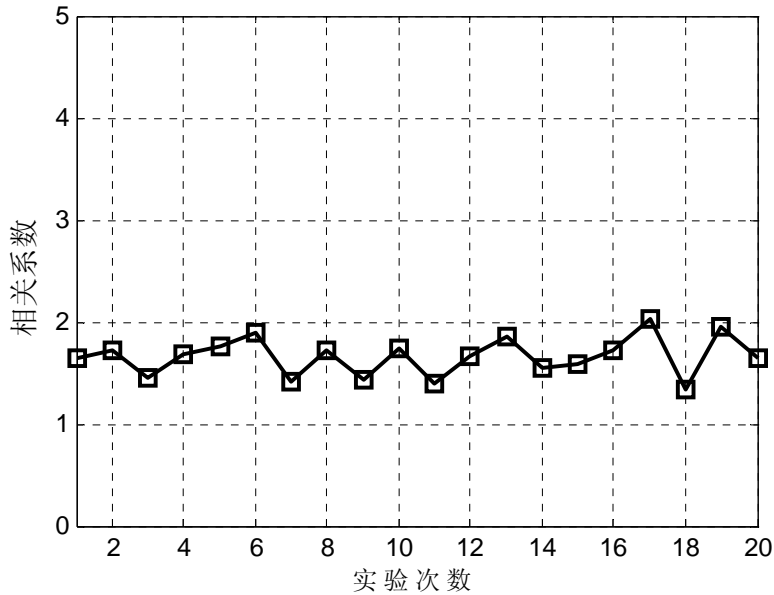


图 3-5 压缩测量矩阵与稀疏表示基之间的相关系数

在图 3-4 所示压缩采样系统中， M 个通道总的有效采样率为 $f_s = M/T$ 。另一方面，压缩采样流程可以理解信号通过 M 个通道，每个通道均采用具有 Nyquist

速率的采样率对信号进行采样，然后以时间 T 为单位进行压缩得到采样值 \mathbf{y} ，则重构信号等效采样率 $f_e = N/T$ 。由于 $M < N$ ， $f_s < f_e$ ，所以系统在采样的同时实现了对数据的压缩，有效地降低采样速率。

由压缩感知理论基本原理可知，准确重构原始信号所需的采样值数量 M 与重构信号长度以及信号的稀疏度成正比。例如，重构信号长度 $N = 1024$ ，信号稀疏度 $K = 4$ ，当采用正交匹配追踪算法重构原始信号时，所需通道数量 M 不得低于 $K \cdot \log(N/K) = 32$ 。

3.2.2 分段式并行压缩采样

从系统复杂度与成本考虑，我们对图 3-4 压缩采样系统进行改进，提出一种分段式并行压缩采样结构，其系统框图如图 3-6 所示：

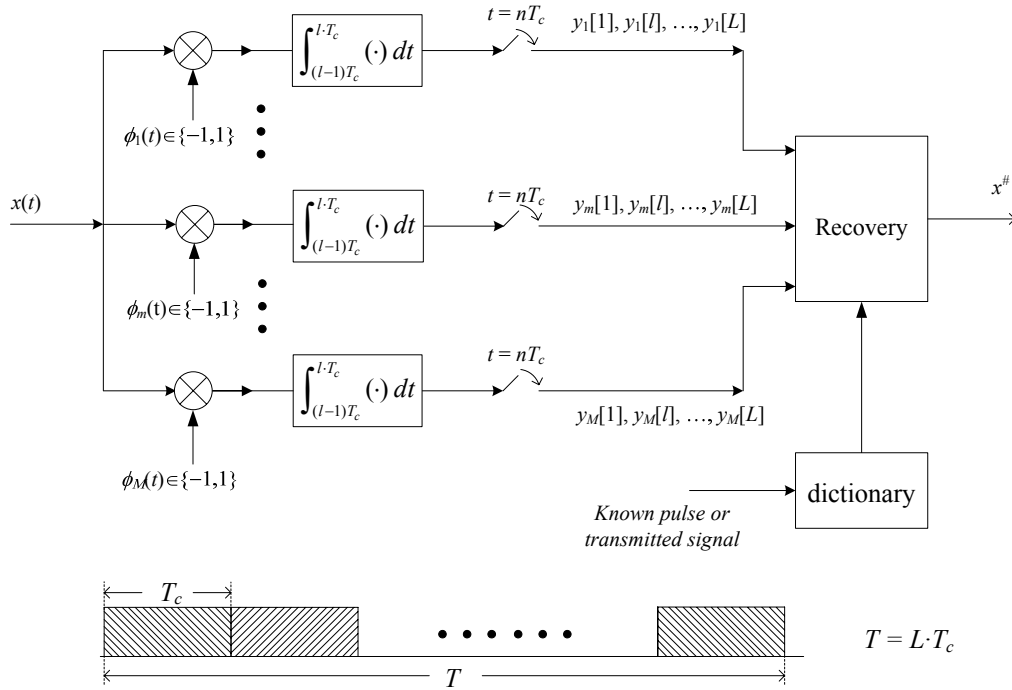


图 3-6 分段式并行模拟信息转换压缩采样示意图

分段式并行压缩采样模型与并行压缩采样模型的构成部件和工作原理相同，它们之间的不同之处在于：并行压缩采样模型每次重构过程只采用了每个通道的一个采样点，而分段式并行压缩采样模型中每个通道的多个连续采样点参与信号重构。如果每个通道获取 L 个采样点对信号进行重构，则 ADC 的工作频率为 $f_s = 1/T_c = L/T$ 第 m 通道的第 l 个采样点可表示为：

$$y_m[l] = \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_{(l-1)T_c}^{lT_c} \psi_n(\tau) \phi_m(\tau) d\tau \quad (3-18)$$

式中 $l \in \{1, 2, \dots, L\}$, T_c 为每次采样积分时间, 同时也是 ADC 的采样周期, $T_c = T / L$ 。压缩感知矩阵的第 $((m-1) \cdot L + l, n)$ 个元素表达式为:

$$d_{(m-1) \cdot L + l, n} = \int_{(l-1)T_c}^{lT_c} \psi_n(\tau) \phi_m(\tau) d\tau \quad (3-19)$$

第 m 路通道的采样序列为 $\mathbf{y}_m = [y_{m,1}, y_{m,2}, \dots, y_{m,L}]^T$, 用于信号重构的采样值序列为:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_M^T]^T \quad (3-20)$$

3.2.3 仿真实验验证

为了验证多通道并行压缩采样模型的有效性, 我们通过仿真实验将压缩采样模型应用于频域稀疏信号的采样与重构中, 信号频域稀疏表示基矩阵采用(2-11)式构造。仿真实验采用 MATLAB 软件实现, 通过正交匹配追踪算法对信号进行重构。

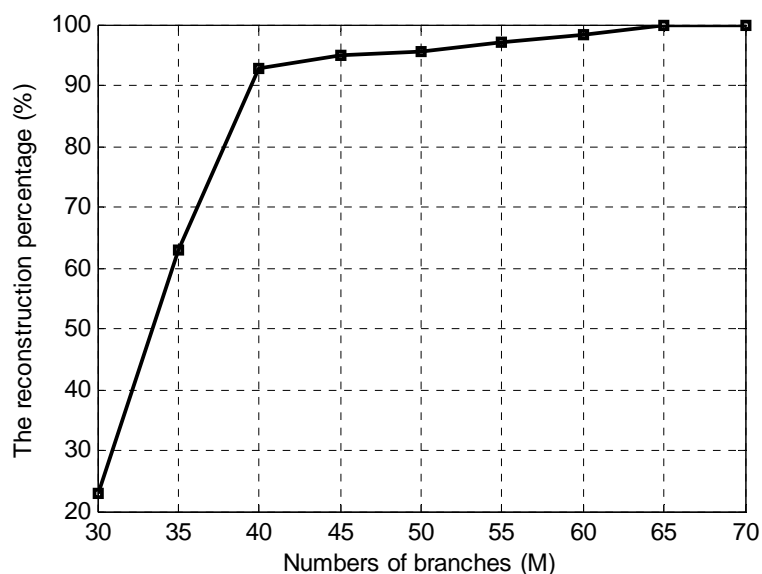
仿真信号长度设置为 $N = 1024$, 信号中包含 4 个频率成分, 即: 稀疏度 $K = 4$, 信号带宽为 B , 重构信号的等效采样率为 $f_e (\approx 4B)$, 重构信号等效采样率的选取必须不小于 2 倍信号的 Nyquist 频率。我们以仿真信号 Fourier 变换系数重构百分比为指标对本节提出的多通道并行压缩采样模型进行验证, 信号 Fourier 变换系数重构百分比定义如下:

$$P = \left(1 - \frac{\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^\# \|}{\|\boldsymbol{\alpha} \|} \right) \cdot 100\% \quad (3-21)$$

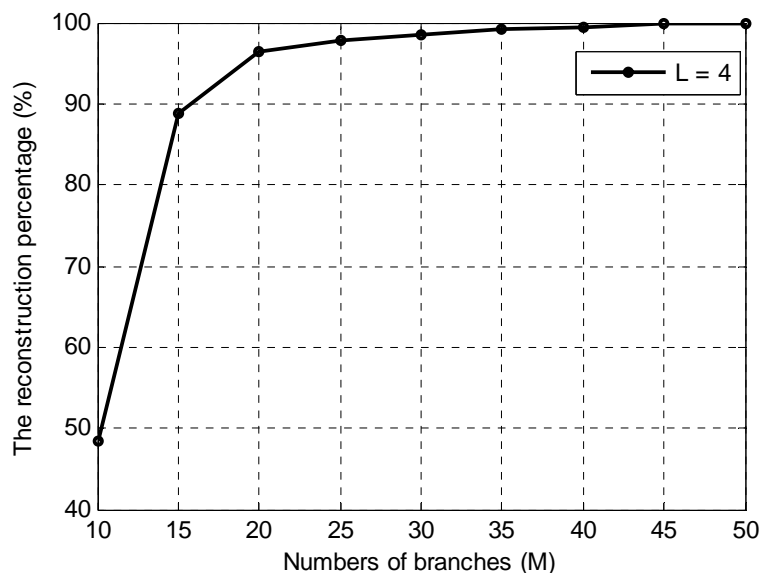
式中 $\boldsymbol{\alpha}^\#$ 为重构信号 Fourier 变换系数, $\boldsymbol{\alpha}$ 为原始仿真信号 Fourier 变换系数。

实验一, 用于验证并行压缩采样模型与分段式并行压缩采样模型对不含噪声信号的重构性能。对于并行压缩采样模型, 其有效采样率为 $f_s = M / T$ (M 为系统通道数, 单个 ADC 的采样率为 $1/T$), 重构信号等效采样率为 $f_e = N / T$, 压缩采样比例 $R = f_e / f_s = N / M$ 。图 3-7(a)所示为并行压缩采样信号重构百分比随系统通道数变化情况, 压缩感知矩阵采用(3-16)式构造。由实验结果可以看出, 随着系统通道数的增加, 信号重构百分比逐渐升高。当系统通道数为 40 时, 信号重构百分比达到 93%以上, 此时系统的压缩采样比例达到 25。由 3.2.2 小节可知, 分段式并行压缩采样模型能够通过适当提高采样速率的方式来减少系统通道数量, 图 3-7(b)所示为分段式并行压缩采样信号重构百分比随系统通道数变化情况, 在本实验中,

每次信号重构对每个通道获取 4 个连续采样点($L = 4$) (ADC 的采样率为 $4/T$)，压缩感知矩阵采用(3-19)式构造，各通道采样序列值按(3-20)式排列。由实验结果可知，当系统通道数为 20 时，信号重构百分比达到 96%以上，此时系统的压缩采样比例 $R \approx 12.5$ ，分段式并行压缩采样模型以通过牺牲压缩采样比例为代价实现采样通道数的减少。



(a)



(b)

图 3-7 (a) 并行压缩采样信号重构百分比, (b) 分段式并行压缩采样信号重构百分比

实验二，用于检验并行压缩采样(Parallel Compressive Sampling, PCS)模型与分段式并行压缩采样(Segmented Parallel Compressive Sampling, SPCS)模型对含噪声信号的重构性能。本实验中，仿真信号中加入满足独立同分布的高斯白噪声。对于并行压缩采样模型，采样通道数设置为 $M = 60$ ；对于分段式并行压缩采样模型，采样通道数设置为 $M = 30$ ，每个通道获取连续采样点数 $L = 4$ 。仿真输入信号的信噪比从 5dB 到 50dB 以 5dB 为步进逐步增加，对每组信噪比进行 100 次随机实验，每次实验随机生成压缩测量矩阵 Φ ，对所有信号重构百分比进行平均，信号重构平均百分比随输入信号信噪比关系如图 3-8 所示。由实验可知，并行压缩采样模型与分段式并行压缩采样模型均具有较强的鲁棒性。

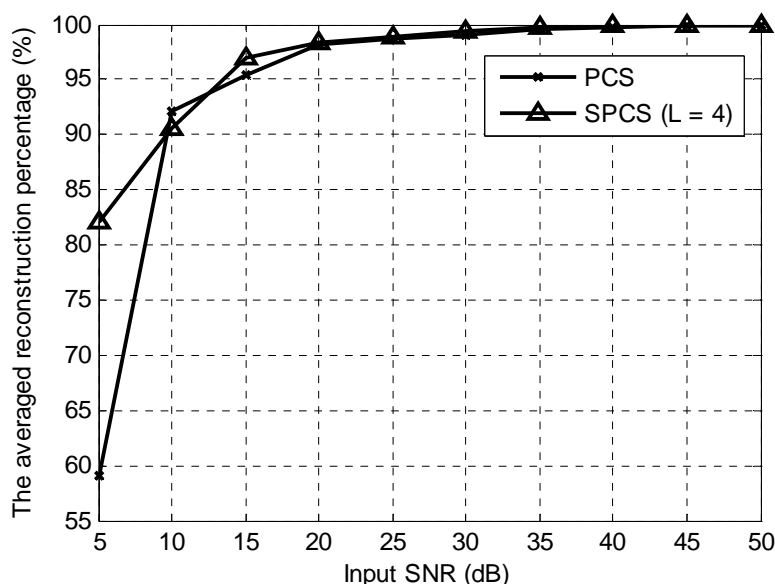


图 3-8 信号重构百分比随输入信号信噪比变化关系

3.3 高频窄带信号压缩采样方法

模拟信息转换器与并行压缩采样模型的信号稀疏表示基矩阵采用 IDFT 基向量构造，由于 DFT 变换是对 Discrete Time Fourier Transform(DTFT)的截断近似，这对信号模型提出了严格的要求：当且仅当信号中所含频率为 $k \cdot f_e / N$ 时信号经 DFT 变换系数才能具有与信号经 DTFT 变换系数相同的稀疏特性(N 与 f_e 分别为重构信号的长度和等效采样率， k 为整数，且 $k \in [1, N]$)，否则对信号的截断将会带来频谱泄漏^[114]，此时采用 DFT 变换系数对信号进行估计存在较大误差，如图 3-9 所

示为包含 20 个整数与非整数频率成分的信号估计。

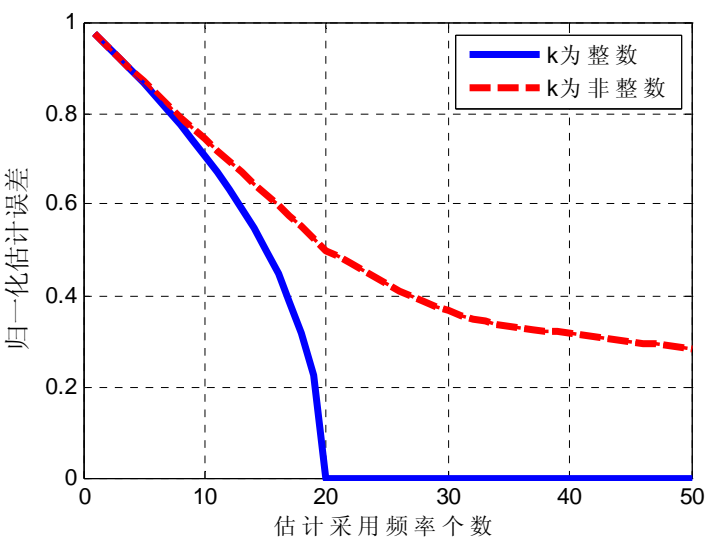


图 3-9 不同信号模型估计误差与估计采用频率个数之间的关系

针对 IDFT 稀疏表示基矩阵存在的问题，本节提出一种高频窄带信号压缩采样方法，通过在频域对采样模型进行分析，推导出信号的稀疏表示基矩阵以及模型的压缩测量矩阵，该模型不仅能够适用于具有线谱信号，同时也适用于具有窄带特性的高频信号。

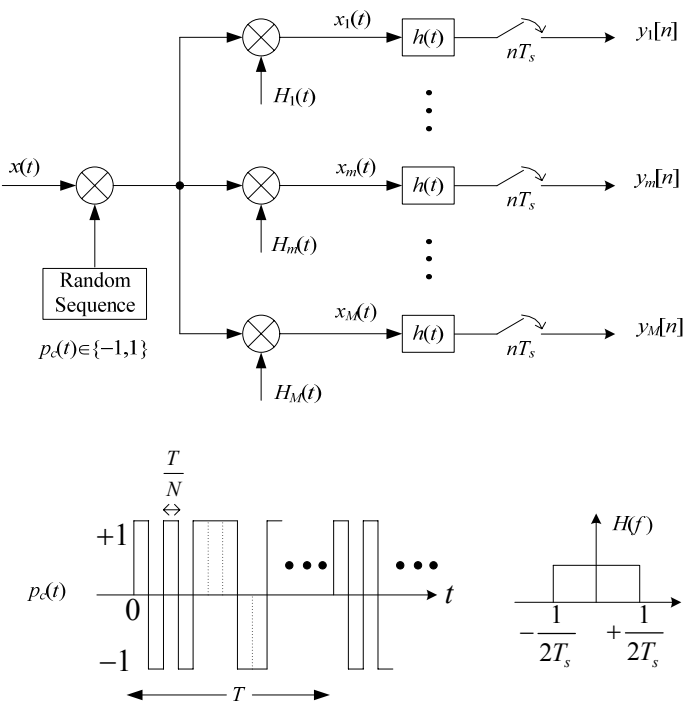


图 3-10 高频窄带压缩采样模型

3.3.1 基本模型

高频窄带信号压缩采样模型如图 3-10 所示。高频窄带信号压缩采样模型由四部分组成：随机解调器，Hadamard 投影矩阵，低通滤波器以及低速采样电路，其功能可以理解为以随机序列对信号进行采样，采用 Hadamard 矩阵对采样序列进行压缩。

为了能够在频域对信号进行感知，随机序列的频谱必须分布在 $[0, f_{Nyquist}]$ 上，在本系统中，随机序列采用取值为 ± 1 、概率密度为 $1/2$ 的 Rademacher 序列构造。信号经随机 Rademacher 序列解调后通过观察矩阵对其进行压缩，观察矩阵 \mathbf{H} 的行向量 $H_m(t)$ 由 Hadamard 矩阵的行向量构成，且各行向量不同。采用 Hadamard 矩阵的行向量构成观测矩阵的一个主要因素是其硬件可实现性，Hadamard 矩阵已经广泛应用于通信系统中，通过触发器便能产生。采用低通滤波器获取解调输出的基带信号，由于 ADC 只对基带信号进行采样，所以系统降低了对 ADC 模拟输入带宽和最高采样率的要求。由于基带信号采样值中含有被测高频信号的频谱信息，通过优化算法能够提取原始信号的频谱信息，实现信号在频域的重构。

在图 3-10 中，可以将随机 Rademacher 序列与观测矩阵 \mathbf{H} 合并视为等效压缩测量矩阵：

$$\Phi = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,N} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M,1} & h_{M,2} & \cdots & h_{M,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_N \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

其中 $H_m(t) = \{h_{m,1}, h_{m,2}, \dots, h_{m,N}\}$ ， $p_c(t) = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ 。

系统采用随机 Rademacher 序列与 Hadamard 矩阵相结合的方式而不是简单采用 Hadamard 矩阵作为测量矩阵的主要原因是由于 Hadamard 矩阵与频域稀疏表示基(如 IDFT 基矩阵)之间具有较强的相关性，而随机 Rademacher 序列能够有效地降低这种相关性^[115]。

为了证明随机 Rademacher 序列具有降低观测矩阵与稀疏表示基之间的相关性的能力，定义观测矩阵 \mathbf{H} 与稀疏表示基矩阵 Ψ 之间的互相关系数 $\beta(\mathbf{H}, \Psi)$ 为：

$$\beta(\mathbf{H}, \Psi) = \max_{1 \leq i, j \leq N} \sqrt{\sum_{k=1}^N |h_{k,i}^* \psi_{k,j}|^2} \quad (3-23)$$

式中 $h_{k,i}^*$ 为 $h_{k,i}$ 的共轭转置， $\psi_{k,j}$ 为稀疏表示基矩阵的第 (k, j) 个元素。

引理 3.1: 定义 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为对角矩阵，其对角元素由随机 Rademacher 序列构成，则引入随机 Rademacher 序列后观测矩阵 \mathbf{H} 与稀疏表示基矩阵 Ψ 之间的相关系数 $\mu = \max_{1 \leq i, j \leq N} \left| \langle h_i, \mathbf{C} \psi_j \rangle \right|$ 满足：

$$\mu \leq \beta(\mathbf{H}, \Psi) \sqrt{2 \cdot \log(2N^2 / \varepsilon)} \quad (3-24)$$

的概率为不低于 $1 - \varepsilon$ 。

证明： 将相关系数中的内积公式展开得到如下表达式：

$$\begin{aligned} \langle h_i, \mathbf{C} \psi_j \rangle &= \sum_{k=1}^N c_k \phi_{k,i}^* \psi_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^N c_k a_k^{ij} \end{aligned} \quad (3-25)$$

式中 $a_k^{ij} = \phi_{k,i}^* \psi_{k,j}$ 。由于 $c_k = \{-1, +1\}$ 的概率为 0.5，根据 Hoeffding 不等式，可以得到如下概率表达式：

$$\mathbb{P} \left(\left| \langle h_i, \mathbf{C} \psi_j \rangle \right| > u \right) \leq 2 \cdot \exp \left(- \frac{u^2}{2 \| \mathbf{a}^{ij} \|_2^2} \right) \quad (3-26)$$

其中

$$\| \mathbf{a}^{ij} \|_2^2 = \sum_{k=1}^N |a_k^{ij}|^2$$

式中 u 为大于 0 的常数， $1 \leq i, j \leq N$ 。概率的一致限为：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mu > u) &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq N} \mathbb{P} \left(\left| \langle h_i, \mathbf{C} \psi_j \rangle \right| > u \right) \\ &= 2 \sum_{1 \leq i, j \leq N} \exp \left(- \frac{u^2}{2 \| \mathbf{a}^{ij} \|_2^2} \right) \end{aligned} \quad (3-27)$$

由于

$$\beta^2(\mathbf{H}, \Psi) = \max_{1 \leq i, j \leq N} \sum_{k=1}^N |a_k^{ij}|^2 \quad (3-28)$$

则有 $\| \mathbf{a}^{ij} \|_2^2 \leq \beta^2(\mathbf{H}, \Psi)$ ，(3-27)式可改写为：

$$\mathbb{P}(\mu > u) \leq 2N^2 \cdot \exp \left(- \frac{u^2}{2 \cdot \beta^2(\mathbf{H}, \Psi)} \right) \quad (3-29)$$

设 $u = \sqrt{2 \cdot \beta^2(\mathbf{H}, \Psi) \cdot \log(2N^2 / \varepsilon)}$ ，则式(2-29)可改写为：

$$\mathbb{P}(\mu > u) \leq \varepsilon \quad (3-30)$$

所以引理得证：

$$P(\mu \leq u) \leq 1 - \varepsilon \quad (3-31)$$

图 3-11 为引入随机 Rademacher 序列前后的测量矩阵与稀疏表示基的相关系数比较示意图。实验参数设置为： $M = 64, N = 128$ 。稀疏表示基矩阵采用 IDFT 基向量构成，相关系数由公式(1-5)计算得到。由实验可知，对于无随机 Rademacher 序列解调的相关系数情况，由于观测矩阵(Hadamard 不变)，所以由每次实验得到相关系数恒定不变，均为 11.31。当采用随机 Rademacher 序列对信号进行解调时，随机 Rademacher 序列很大幅度地减小了观测矩阵与稀疏表示基矩阵之间的相关性，其最大相关系数为 2.83，远远小于无随机 Rademacher 序列解调的情况。

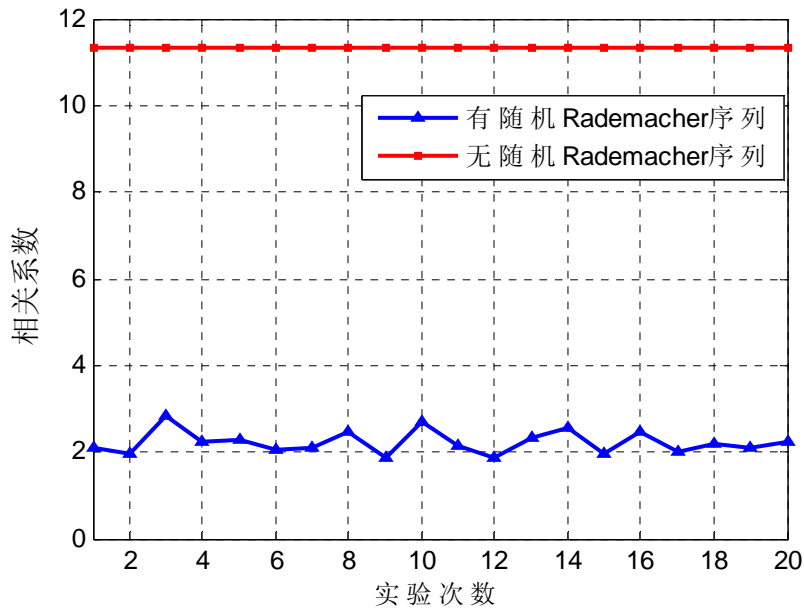


图 3-11 随机 Rademacher 序列对观测矩阵与稀疏表示基相关系数的影响

3.3.2 采样模型频域分析

为了在频域对图 3-10 的系统工作原理进行分析，我们定义如下参数：

K ：高频窄带信号模型中的有效频带数量，且各子带的载波频率未知(在通信系统中，可表示为信道中被占用子带的数量)，信号模型如图 3-12 所示；

B ：窄带信号的最大宽度；

f_e ：随机 Rademacher 序列的最高频率，同时也是重构信号序列的等效采样频

率；

f_s : 各路通道中 ADC 的工作频率(= $1/T_s$)，所有 ADC 相同采样脉冲驱动下工作；

T_p : 随机 Rademacher 序列的循环周期(= $1/f_p$)；

f_{Nyq} : 被测信号 $x(t)$ 的 Nyquist 频率；

M : 压缩采样系统通道数量；

N : 随机 Rademacher 序列长度；

$$F_s = [-f_s / 2, +f_s / 2] \quad (3-32a)$$

$$F_p = [-f_p / 2, +f_p / 2] \quad (3-32b)$$

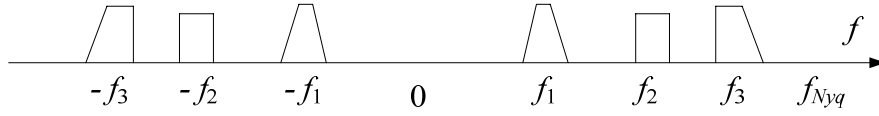


图 3-12 多窄带高频信号模型

设置 $f_e = N \cdot f_p$ ，观测矩阵 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ，则 $p_c(t)$ 为长度为 N 周期为 T_p 的随机 Rademacher 序列。考虑采集系统的第 i 路通道， $\phi_i(t)$ 为压缩感知矩阵的第 i 个行向量，其 Fourier 表达式为：

$$\phi_i(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_{i,l} e^{j2\pi lt/T_p} \quad (3-33)$$

其中

$$\alpha_{i,l} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \phi_i(t) e^{-j2\pi lt/T_p} dt \quad (3-34)$$

信号经 Rademacher 序列随机解调后，第 i 路通道信号经 Hadamard 观测矩阵投影输出 $\tilde{x}_i(t) = x(t)\phi_i(t)$ 的 Fourier 变换表达式为：

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_i(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_i(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi_i(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_{i,l} e^{j2\pi lt/T_p} \right) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_{i,l} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-l/T_p)t} dt \\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_{i,l} X(f-l \cdot f_p)
\end{aligned} \tag{3-35}$$

式中 $X(f)$ 为 $x(t)$ 的 Fourier 变换。由(3-35)第 5 式可知，低通滤波器 $H(f)$ 的输入信号是输入信号 $X(f)$ 以 f_p 为步进的移位线性组合($H(f)$ 为低通滤波器 $h(t)$ 的 Fourier 变换)。由于 $X(f)$ 为有限带宽信号，当 $f \notin [0, f_{Nyq}]$ 时， $X(f) = 0$ ，因此(3-35)第 5 式中所包含的最多非零求和运算项为 $\lceil f_{Nyq}/f_p \rceil$ 。由于定义 $H(f)$ 理想低通滤波器，其频率响应为理想的矩形窗，如图 3-10 所示，因此，经过理想低通滤波器以后所保留信号的频率在频率区间 F_s 上，均匀采样值序列 $y[n]$ 仅包含 F_s 上的频率成分，第 i 路通道采样值序列 $y_i[n]$ 的 DTFT 变换表达式为：

$$\begin{aligned}
Y_i(e^{j2\pi fT_s}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_i[n] e^{-j2\pi n f T_s} \\
&= \sum_{l=-L_0}^{+L_0} \alpha_{i,l} X(f-l \cdot f_p)
\end{aligned} \tag{3-36}$$

式中 L_0 的选择所需满足的条件是使得任意 $X(f-l \cdot f_p)$ ($f \in F_s$) 经线性移位后均包含在(3-36)第 2 式的求和项内。考虑信号为有限带宽， L_0 的取值为：

$$\begin{aligned}
-\frac{f_s}{2} + (L_0 + 1) \cdot f_p &\geq \frac{f_{Nyq}}{2} \\
\Downarrow \\
L_0 &= \left\lceil \frac{f_{Nyq} + f_s}{2f_p} \right\rceil - 1
\end{aligned} \tag{3-37}$$

在(3-35)式中，经 Hadamard 矩阵投影输出的第 i 路通道信号的 Fourier 变换由无限多个求和项构成，在(3-36)式中，通过理想低通滤波器的作用后，最终采样值输出的 Fourier 变换被转化为有限个求和项构成。

(3-36)式将已知采样序列 $y_i[n]$ 的 DTFT 变换与未知信号的 Fourier 变换联系起来，这是重构原始信号的关键。为了应用压缩感知理论重构原始信号，我们需要

对(3-36)式采用矩阵-向量形式进行表达。

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A}\mathbf{z}(f), \quad f \in F_s \quad (3-38)$$

式中 $\mathbf{y}(f)$ 为各通道采样值序列的 DTFT 变换向量表达式, $\mathbf{y}(f) \in \mathbb{C}^M$, $y_i(f) = Y_i(e^{j2\pi f T_s})$ 。未知向量 $\mathbf{z}(f) = [z_1(f), z_2(f), \dots, z_L(f)]^T$, 其中 $L = 2L_0 + 1$, 第 i 个元素表达式为:

$$z_i(f) = X(f + (i - L_0 - 1) \cdot f_p), \quad 1 \leq i \leq L, \quad f \in F_s \quad (3-39)$$

$M \times L$ 维矩阵 \mathbf{A} 的元素为 $\mathbf{A}_{m,l} = \phi_{m,-l} = \phi_{m,l}^*$ 。为了能够从各路通道采样序列中重构原始信号, 移位频率不得低于信号最宽子带带宽, $f_p \geq B$, ADC 的最低采样频率 $f_s \geq f_p$ 。

考虑(3-34)式中的 Fourier 变换系数 $\alpha_{i,l}$, 由于 $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$, Fourier 变换系数 $\alpha_{i,l}$ 可重新表示为:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,l} &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{i,k} e^{-j \frac{2\pi}{T_p} l \left(t + k \frac{T_p}{N} \right)} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{i,k} e^{-j 2\pi l \cdot k / N} \int_0^{T_p} e^{-j \frac{2\pi}{T_p} l \cdot t} dt \end{aligned} \quad (3-40)$$

对上式的积分项进行变量替换,

$$d_l = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} e^{-j \frac{2\pi}{T_p} l \cdot t} dt = \begin{cases} \frac{1}{N} & l = 0 \\ \frac{1 - \theta^l}{2\pi j \cdot l} & l \neq 0 \end{cases} \quad (3-41)$$

其中 $\theta = e^{-j2\pi/N}$, 可以将(3-40)式改写为:

$$\alpha_{i,l} = d_l \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{i,k} \theta^{l \cdot k} \quad (3-42)$$

设 $\bar{\mathbf{F}}$ 为 $N \times N$ 维 DFT 变换矩阵, 其第 i 个行向量为 $\bar{\mathbf{F}}_i = [\theta^{0 \cdot i}, \theta^{1 \cdot i}, \dots, \theta^{(M-1) \cdot i}]^T$, $0 \leq i \leq (M-1)$ 。设 \mathbf{F} 为 $N \times L$ 维矩阵, $\mathbf{F} = [\bar{\mathbf{F}}_{L_0} \dots, \bar{\mathbf{F}}_{-L_0}]$, (3-38)式可以重新表示为:

$$\mathbf{y}(f) = \Phi \mathbf{F} \mathbf{D} \mathbf{z}(f) = \mathbf{A} \mathbf{z}(f) \quad (3-43)$$

式中 \mathbf{D} 为(3-41)式中 d_l 构成的 $L \times L$ 维对角矩阵。为了对随机 Rademacher 序列长度进行确定, 我们引用如下定理:

定理 3.1^[23]: 采用图 3-10 压缩采样模型对多窄带高频信号进行采样, 准确重构原始信号频谱的条件为: $f_s \geq f_p \geq B$, $M \geq 2K$, $\Phi \mathbf{F}$ 任意 $2K$ 个列线性独立, $N \geq N_{min}$,

其中 N_{min} 定义为:

$$N_{min} = 2 \left\lceil \frac{f_{Nyq}}{2f_p} + \frac{1}{2} \right\rceil - 1 \quad (3-44)$$

为了重构原始信号,我们要求解(3-43)式,考虑到 $M < N$, 求解(3-43)式是一个 NP 难的问题。针对本节所研究的信号模型:多窄带高频信号,信号重构算法首先需要定位各子带的载波频率,然后对各个窄带信号(已通过随机 Rademacher 序列调制到基带)以载波频率进行调制重构原始信号。本节提出的采样模型可采用 Mishali 等人所提出的 CTF 算法进行重构^[23]。

3.3.3 仿真实验验证

通过仿真实验对本节提出的高频窄带信号压缩采样模型进行验证。在本小节所有仿真实验所使用相同的信号,其表达式如下:

$$x(t) = \sum_{i=1}^K E_i \cdot \text{sinc}(B_i(t - \tau_i)) \cos(2\pi f_i(t - \tau_i)) \quad (3-45)$$

式中 K 为子带数量, $K = 4$, E_i 为能量系数, f_i 为载波频率。设置重构信号等效采样率为 $f_e = f_{Nyq} = 5$ GHz, 随机 Rademacher 序列长度 $N = 191$, 子带频谱带宽 $B_i = 25$ MHz, $f_s = f_p = f_e / N = 26.12$ MHz, 在保证子带频谱宽度的情况下,在频率范围 $[0, (f_e - B_i)/2]$ 内任意选取载波频率。采用 CTF 算法对信号进行重构,以(3-21)式定义的重构百分比为指标对系统进行评估。

实验一:选取不同的通道数对信号进行采样重构。在每个通道中获取 100 个连续低速采样值,设置采样通道数 M 由 15 至 60 之间以 5 为步进递增,对每组通道数进行 100 次仿真实验。图 3-13 所示为平均重构百分比与通道数的关系。虽然 ADC 的采样率远低于信号的 Nyquist 频率,由仿真结果可知,当采样通道数为 25 时,信号重构百分比仍然达到 92% 以上。如果采用时间交替并行采样,所需通道数超过 190,远远超过本节提出的压缩采样模型所需的采样通道数。同时时间交替并行采样还要受到 ADC 信号输入带宽的限制。因此,对于在频谱上具有稀疏性的信号,采用基于压缩传感理论的压缩采样方法具有明显优势。

实验二,对高斯白噪声干扰的信号进行压缩采样重构。设置采样通道数 $M = 60$,每个通道获取 100 个连续采样点,设置输入信号信噪比 SNR 由 10dB 至 70dB 之间以 5 为步进递增,在每组 SNR 条件下进行 100 次仿真实验,信号重构百分比的均值与方差如图 3-14 所示。由实验结果可知,当输入信号的 SNR 超过 30dB 时,

信号重构百分比均值达到 90%以上，且方差低于 2%，实验表明，本节提出的压缩采样方法具有较强的抗干扰能力和较高的稳定度。

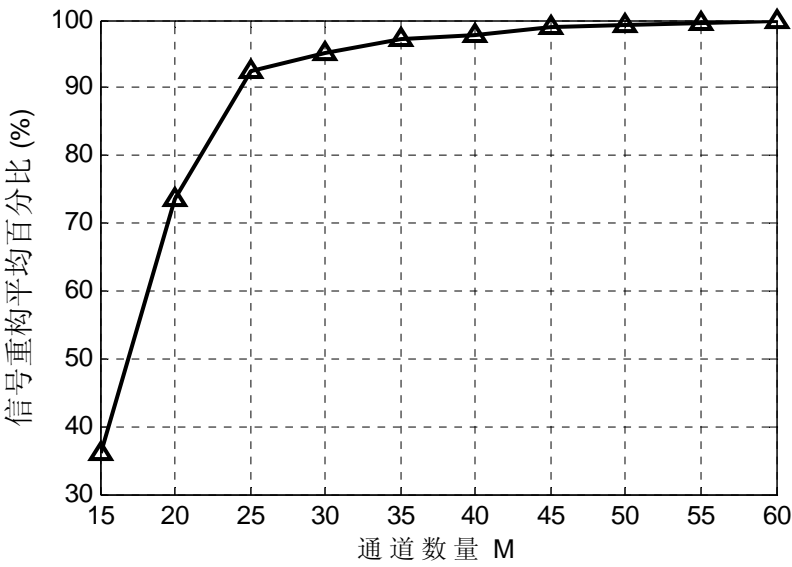
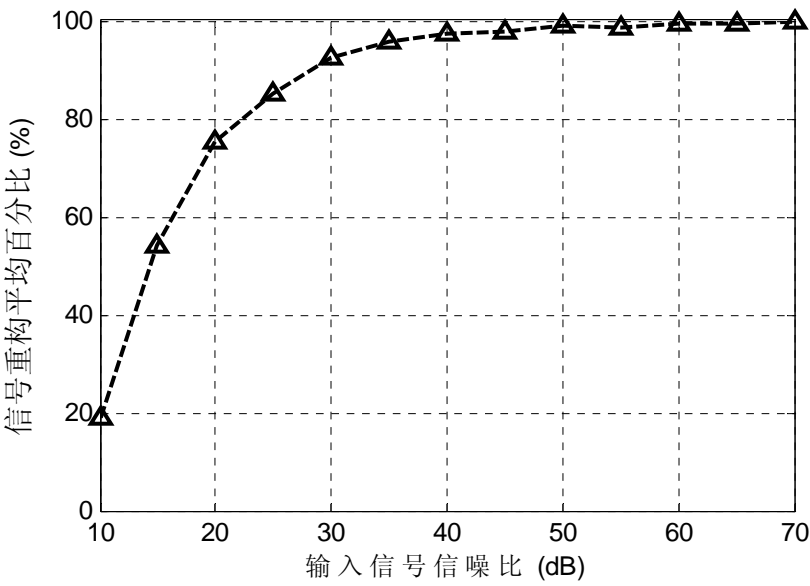


图 3-13 信号重构百分比与通道数量的关系



(a)

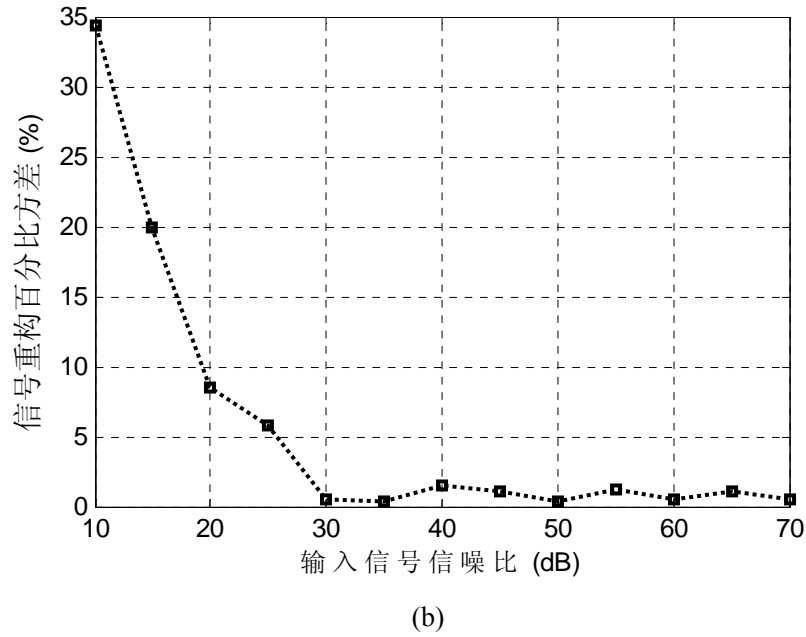


图 3-14 (a)信号重构平均百分比与输入信号信噪比关系，
(b) 信号重构百分比方差与输入信号信噪比关系

3.4 本章小结

本章主要是对基于随机解调技术的压缩采样方法进行研究。基于随机解调的压缩采样模型采用具有信号Nyquist频率的随机序列在频域对被测模拟信号进行感知，以积分器或低通滤波器作用以后采用低速ADC对经过预处理后的信号进行采样，通过重构算法对信号进行恢复。基于随机解调的压缩采样方法不仅能够降低ADC的采样频率，同时还能解决ADC模拟输入带宽对系统捕捉信号能力的限制。

通过在对模拟信息转换器的基本原理进行分析的基础上，本章提出了并行压缩采样模型和高频窄带信号压缩采样模型。并行压缩采样模型是基本模拟信息转换器的一种并行结构形式，它能够进一步降低采样频率。考虑到系统成本以及实现复杂度，我们对所提出的并行压缩采样模型进行了改进，在此基础上提出了分段式并行压缩采样模型，并通过仿真实验对模型进行了验证。考虑到采用积分器的并行压缩采样模型对信号模型的限制，本章同时也提出了一种高频窄带信号压缩采样模型。与模拟信息转换器和并行压缩采样模型解决稀疏线谱信号的压缩采样不同，高频窄带信号压缩采样模型不仅能够对线谱信号进行压缩采样，对于在频谱上具有稀疏特性的窄带信号也具有适用性(如通信系统中，各用户占用信道的一个子带，同时，信道的大部分子带处于空闲状态)。我们对系统模型在频域进行

了分析，得出用于信号重构的压缩感知矩阵，并通过仿真对系统进行了验证。

基于随机解调的压缩采样方法也存在一些不足，如：与第二章 CS-RES 相比，虽然基于随机解调的压缩采样模型具有更优越的性能，但需要对信号进行预处理，即：使用具有信号 Nyquist 频率的随机序列对信号进行解调。另一方面，并行压缩采样中使用积分器对信号进行累加，但每次取样后需要对积分器进行复位，当要连续获取多个采样时实现困难；高频窄带信号压缩采样模型采用理想低通滤波器对信号进行处理，实际电路实现困难。但这些方法却是对传统模拟信号 Shannon-Nyquist 采样定理的一种突破，具有较高的研究价值。

第四章 压缩采样信号重构研究

压缩感知理论的核心思想是将压缩与采样合二为一，为了能够从压缩采样值序列中恢复原始信号，信号重构算法是关键。压缩感知理论中需要由低维的已知采样值重构高维的未知信号，信号重构算法的思想是利用信号的稀疏特性求解信号在稀疏表示基上的表达式系数。国内外很多学者对压缩感知理论进行了研究，发表了大量关于信号重构算法的论文。这些算法可以分为两类：凸松弛算法和贪婪算法。凸松弛算法包括最小 ℓ_1 范数算法，最小加权 ℓ_1 范数算法等，凸松弛算法的信号重构精度高，但计算复杂。贪婪算法包括MP，OMP，CoSaMP等算法，相比凸松弛算法，贪婪算法易实现，计算速度快，广泛应用于工程应用中。

不管是凸松弛算法还是基追踪算法，它们所处理的信号都需要在一个特定的表示基上稀疏。在信号处理中，Fourier变换是最主要的信号处理方式之一，为了能够通过计算机实现对信号的Fourier变换，通常采用DFT变换对DTFT变换进行近似。然而，由于DFT变换是对DTFT变换的截断，DFT变换基所构成的字典不具有完备性。在压缩感知理论中，如果采样DFT变化对信号进行稀疏表示时，存在表示基失配问题。在这种情况下，如果采用传统信号重构算法对信号进行重构，则会产生较大的信号重构误差。在4.3节中，结合root-MUSIC频谱估计算法，针对表示基失配信号，我们提出了一种新的信号重构算法。

很多信号处理中，并不需要提取信号的全部信息，只需要对信号的某个特征信号进行提取或判断，在这种情况下，完全重构原始信号不仅增加了计算成本，同时也需要更多的压缩测量值。在本章中最后，我们分析了从压缩测量值中对原始信号进行检测的可行性。

4.1 凸松弛算法

E. Candès等人证明了信号重构问题可以通过求解(1-3)式中最小 ℓ_0 范数问题加以解决，因为最小 ℓ_0 范数等效于尽可能使求解得到的非零系数的个数最少，信号最稀疏。但是Donoho指出，最小 ℓ_0 范数的求解是一个NP难问题，需要穷举 α 中所有 C_N^K 种可能排列组合，无法直接求解。同时Donoho等人证明了 ℓ_1 范数为最接近 ℓ_0 范数的凸函数，基于线性规划问题的 ℓ_1 范数最优化能够得到同样的解。

为了证明求解最小 ℓ_1 范数最优化问题能够得到信号的稀疏解，我们在向量空间对信号进行分析。定义实信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ，定义 N 维Euclidean空间的 ℓ_p 范数如下 ($p \in [1, \infty]$):

$$\|\mathbf{x}\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p = [1, \infty) \\ \max_{i=1,2,\dots,N} |x_i|, & p = \infty \end{cases} \quad (4-1)$$

为了方便分析，定义 ℓ_0 ($p=0$)范数如下：

$$\|\mathbf{x}\|_0 := |\text{supp}(\mathbf{x})| \quad (4-2)$$

式中 $\text{supp}(\mathbf{x}) = \{i : x_i \neq 0\}$ ， $|\text{supp}(\mathbf{x})|$ 为 $\text{supp}(\mathbf{x})$ 的秩。

考虑信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ，我们用一维仿射空间 W 上的一个点对 \mathbf{x} 进行近似。如果采用 ℓ_p 范数对近似误差进行量化，则最优近似点 $\hat{\mathbf{x}}$ 应使得误差 $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_p$ 最小。如何选取 p 将会对近似误差结果产生较大的影响。如图4-1所示为分别采用 $p=1, 2, \infty$ 近似示意图。为了在一维仿射空间 W 上寻找最优近似点，以 \mathbf{x} 为中心，通过逐渐扩展 ℓ_p 范数，当 ℓ_p 范数与一维仿射空间 W 接触时，此时的交点 $\hat{\mathbf{x}}$ 即为 \mathbf{x} 的最优近似值。观察图4-1可以发现，只有采用 ℓ_1 范数的近似值具有稀疏特性，同理可以推广到 N 维空间信号。所以求解最小 ℓ_1 范数问题可是实现对稀疏信号的重构。

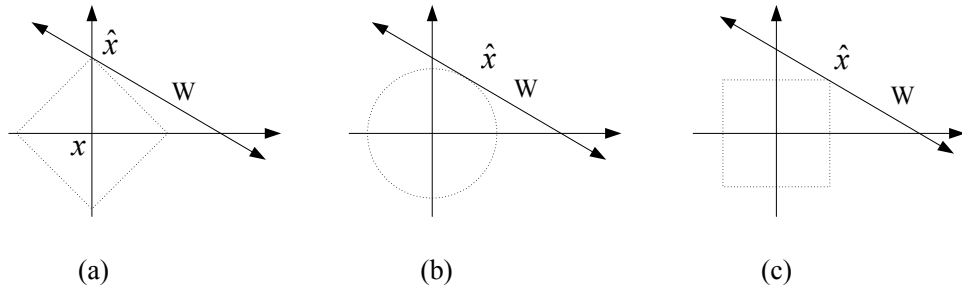


图4-1 (a)采用 ℓ_1 范数对信号进行近似, (b) 采用 ℓ_2 范数对信号进行近似,

(c)采用 ℓ_∞ 范数对信号进行近似

4.1.1 最小 ℓ_1 范数算法

给定压缩测量值 \mathbf{y} ，稀疏表示基矩阵 Ψ ，压缩测量矩阵 Φ ，可以通过求解如下 ℓ_1 最优化问题重构原始信号^[116],

$$\hat{\alpha} = \arg \min \|\alpha\|_1 \quad s.t. \quad \|\Phi\Psi\alpha - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon \quad (4-3)$$

式中 α 为信号 x 在稀疏表示基 Ψ 上的转换系数 $x = \Psi\alpha$ ， $\hat{\alpha}$ 为重构信号， ε 为重构误差。

E. Candès等证明^[117]：当压缩感知矩阵满足一定条件时，(4-3)式最小 ℓ_1 凸优化问题等效于(1-3)式中的非凸优化问题，且重构信号误差满足如下定理。

定理4.1^[118]：假设压缩测量矩阵 Φ 具有约束等距常数 $\delta_{2K} < \sqrt{2}-1$ ， x 为任意信号，其含噪声压缩测量值为 $\Phi x + e$ ，其中 $\|e\|_2 \leq \varepsilon$ ，则采用最小 ℓ_1 范数对 x 的近似估计值 \hat{x} 满足：

$$\|x - \hat{x}\|_2 \leq C\varepsilon + C' \frac{\|x - x_K\|_1}{\sqrt{K}} \quad (4-4)$$

$$\text{式中 } C = \frac{2\eta}{1-\rho}, \quad C' = \frac{2(1+\rho)}{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\sqrt{2}\delta_{2K}}{1-\delta_{2K}}, \quad \eta = \frac{2\sqrt{1+\delta_{2K}}}{\sqrt{1-\delta_{2K}}}.$$

最小 ℓ_1 范数最优化问题就是在满足限制条件 $\|\Phi\Psi\alpha - y\|_2 \leq \varepsilon$ 的情况下，寻找具有最小 ℓ_1 模的系数 α ，由图4-1(a)可知， $\hat{\alpha}$ 具有稀疏性。(4-3)式是一个凸优化问题，可以将其转化为线性规划(Linear Programming, LP)问题进行求解，其计算复杂度为 $O(N^3)$ ，这种方法也称为基追踪(Basis Pursuit, BP)算法。

当压缩感知矩阵满足约束等距性条件时，基追踪算法能够对所有具有稀疏特性的信号进行重构。研究表明，基追踪算法只需要 $O(K \log N)$ 的测维度就能重构 N 维 K 稀疏信号，然而，基追踪算法需要对其进行线性规划，计算量大。由于基追踪算法是求解全局最优解，所以算法具有高精度和高稳定性。

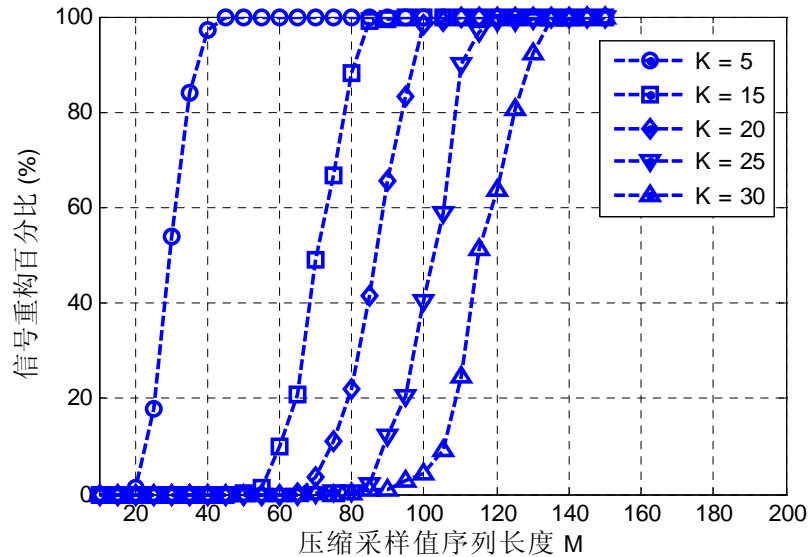


图4-2 不同稀疏度信号重构百分比与压缩采样序列长度关系

图4-2所示为稀疏度分别为 $K = 5, 15, 20, 25, 30$ 的信号采用不同长度的压缩采样值进行信号重构的重构百分比。压缩测量矩阵采用满足独立同分布随机高斯变量构造，信号为时域稀疏信号，稀疏表示基矩阵为单位矩阵，信号采用基追踪算法进行重构，重构信号长度 $N = 512$ ，在每个压缩采样序列长度下进行100次实验。由图4-2可以发现，随着信号的稀疏度增加，准确重构原始信号所需要的压缩采样序列长度增加。图4-3所示为在不同高斯白噪声强度下基追踪算法重构信号的平均归一化误差示意图。归一化误差定义为： $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_2$ ，其中 \mathbf{x} 为原始信号， $\hat{\mathbf{x}}$ 为重构信号。信号稀疏度 $K = 10$ ，信号幅度为2。高斯白噪声方差分别为 $\sigma = 0.2, 0.4$ ，图4-3表明，基于最小 ℓ_1 范数的基追踪算法相对高斯白噪声具有较好的稳定性。

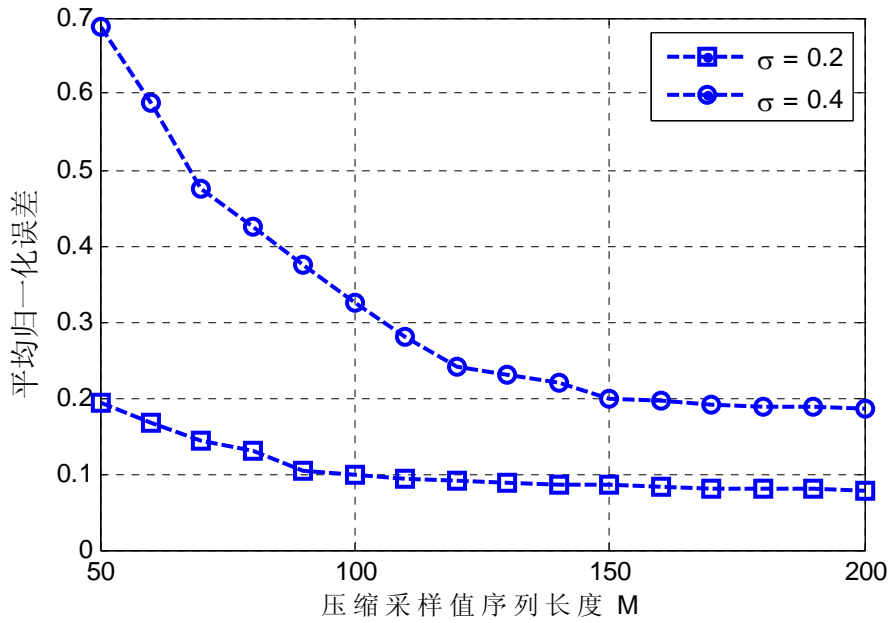


图4-3 归一化误差与高斯白噪声之间的关系

4.1.2 迭代加权最小 ℓ_1 范数算法

最小 ℓ_1 范数优化问题4-3与最小 ℓ_0 范数优化问题1-3的主要区别是最小 ℓ_1 范数优化问题取决于信号变换系数的幅度，而最小 ℓ_0 范数优化问题所有解中具有最少非零项的稀疏解。为了对最小 ℓ_1 范数优化问题改进，E. Candès等人提出了迭代加权最小 ℓ_1 范数(Iterative Reweighted ℓ_1 -norm Minimization, IRWL1)优化问题^[120]，即在每次迭代运算中，对待重构系数的各输入项赋予不同的权值：

$$\min_{\hat{\alpha} \in \square^N} \sum_{i=1}^N \delta_i \hat{\alpha}_i \quad s.t. \quad \Phi \Psi \alpha = \Phi \Psi \hat{\alpha} \quad (4-5)$$

式中 α 为原始信号变换系数， $\hat{\alpha}$ 为重构系数， δ_i 为加权值。

由(4-5)式可知，大的权值将会增加求解结果变量中的小幅度系数产生的可能性，而小的权值将会增加求解结果变量中的大幅度系数产生的可能性。实际上，如果 K 稀疏信号 α 已知，如果设置权值为：

$$\delta_i = \frac{1}{\alpha_i} \quad (4-6)$$

由(4-6)式容易得知，对于 α 支撑以外的指标位置上，权值为无穷大，这将强制使得这些指标上的系数取值为零，因此，如果信号 α 是 K 稀疏的，如果 $K < M$ ，则加权运算将会保证准确重构， $\hat{x} = x$ 。显然，当实际信号未知时，我们无法按照这种方式选取权值，但以上分析证明了通过加权方法可以提高最小 ℓ_1 范数优化算法。

由于无法采用(4-6)式来选取权值，因此需要在权值选取过程中引入“稳定性参数”(stability parameter)，迭代加权最小 ℓ_1 范数重构算法具体实现如下：

输入： 压缩测量值 $y \in \mathbf{C}^M$ ，

稀疏表示基矩阵 Ψ ，

压缩测量矩阵 Φ ，

稳定性参数 ξ 。

输出： 重构信号 $\hat{\alpha}$ 。

初始化： 设置权值 $\delta_i = 1$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ 。

逼近： 求解加权最小 ℓ_1 范数优化问题：

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in \square^N} \sum_{i=1}^N \delta_i x_i \quad s.t. \quad y = \Phi \Psi \alpha \quad \text{或} \quad \|\Phi \Psi \hat{\alpha} - y\|_2 \leq \varepsilon$$

更新： 更新权值：

$$\delta_i = \frac{1}{|\hat{x}_i| + \xi}$$

E. Candès等人对迭代加权最小 ℓ_1 范数算法进行了详细的分析，并通过实验证明了迭代加权最小 ℓ_1 范数优化算法信号重构性能优于标准最小 ℓ_1 范数优化算法。D. Needell等人对加权最小 ℓ_1 范数优化算法基础上，对定理3.1进行改进，获得了通过迭代加权最小 ℓ_1 范数优化算法对含噪声信号重构误差的上界，如定理3.2所述。

定理4.2^[119]: 假设压缩测量矩阵 Φ 满足约束等距条件, 约束等距常数 $\delta < \sqrt{2}-1$, \mathbf{x} 为 K 稀疏信号, 其含噪压缩测量值为 $\Phi\mathbf{x} + \mathbf{e}$, 其中 $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \varepsilon$ 。如果 \mathbf{x} 变换系数中的最小非零项 μ 满足 $\mu \geq \frac{4\eta\varepsilon}{1-\rho}$, 采用加权最小 ℓ_1 范数算法重构信号满足

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2 \leq C''\varepsilon \quad (4-7)$$

式中 $C'' = \frac{2\eta}{1+\rho}$, $\rho = \frac{\sqrt{2}\delta}{1-\delta}$, $\eta = \frac{2\sqrt{1+\delta}}{1-\delta}$ 。

D. Needell等人^[119]同时也提出了更加强保证的重构误差上界:

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2 \leq \frac{2\eta\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\eta\varepsilon}{\mu} - \frac{4\eta\varepsilon\rho}{\mu}}} \quad (4-8)$$

当 $\mu = \frac{4\eta\varepsilon}{1-\rho}$ 时, (4-7)式与(4-8)式相同。

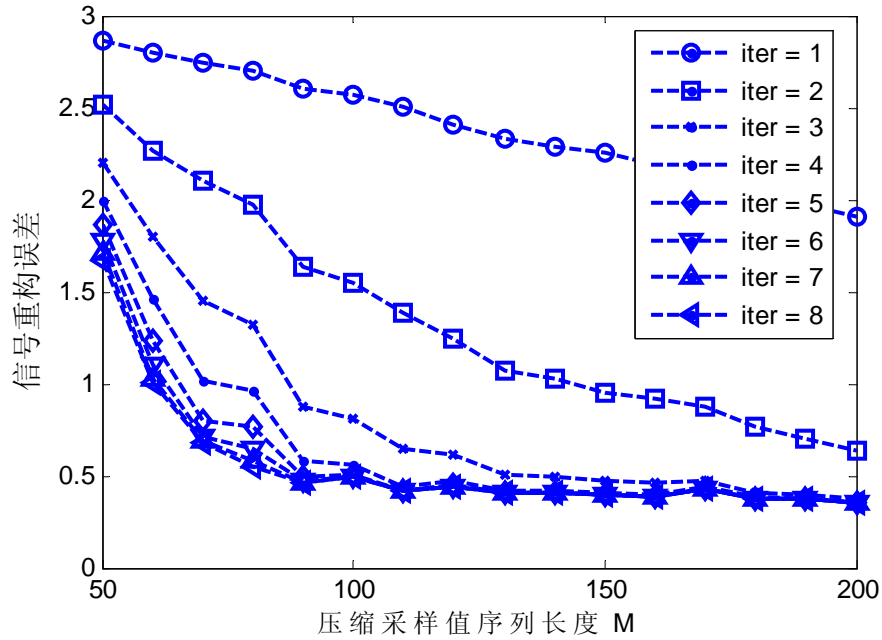


图4-4 信号重构误差与加权迭代次数的关系

图4-4所示为迭代加权次数对信号重构性能的影响。迭代次数分别设置为 $\text{iter} = 1, 2, \dots, 8$, 压缩测量矩阵采用满足独立同分布随机高斯变量构造, 信号为幅度为2的时域稀疏信号, 稀疏表示基矩阵为单位矩阵, 信号的稀疏度 $K = 10$, 信号采用迭代加权最小 ℓ_1 范数重构, 重构信号长度 $N = 256$, 在每个压缩采样序列长度下进行100次实验, 信号重构误差为在 ℓ_2 范数空间上定义, 并对多次实验

的误差进行平均。由图4-4可以发现：一方面：随着用于信号重构的采样值序列长度的增加，重构误差降低；另一方面，随着迭代次数的增加，信号重构精度增加，并且在最初的几次增加情况下，信号重构性能提高最明显。

显然，由于迭代加权最小 ℓ_1 范数算法需要进行多步迭代寻找最优权值，所以其计算量随着迭代次数的增加而成倍数增加，它是以牺牲计算效率为代价换取重构精度。

4.2 贪婪算法

由于基于线性规划方法的基追踪算法需要在所有的字典向量中极小化一个全局目标函数，其计算成本非常昂贵，信号重构效率低。稀疏信号重构的目的是重构能够对压缩测量值 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ 进行线性表示的原始信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ($M < N$)，也就是说，信号重构的目的是解决以下非凸问题：

$$\min_{\Gamma} \left\{ |\Gamma| : \mathbf{y} = \sum_{i \in \Gamma} a_i \mathbf{x}_i \right\} \quad (4-9)$$

式中 Γ 为支撑集， $i = 1, 2, \dots, N$ ， a_i 压缩感知矩阵 \mathbf{A} 的第 i 个列向量。压缩感知理论研究者提出了通过稀疏估计的方法进行信号重构，通过逐步选取对压缩测量值产生最大影响的列向量来实现对原始信号的最优估计，这类算法被称为贪婪追踪(greedy pursuit)算法。

4.2.1 匹配追踪算法

Mallat等人^[120]于1993年提出了匹配追踪 (Match Pursuit, MP) 算法，匹配追踪算法是贪婪算法的典型代表。匹配追踪是一种贪婪迭代算法，将信号在字典上进行线性分解。在压缩采样信号重构中，这个字典为采样矩阵 $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$ (当信号在变换空间 $\Psi \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 上稀疏时，字典为 $\Phi \cdot \Psi$)，信号重构的目的是在 $\Phi \cdot \Psi$ 中选取最少的列向量，以选取的列项量为基向量，以原始信号 \mathbf{x} 为系数，能够通过它们的线性组合对压缩采样值进行最优近似。

在匹配追踪算法中，残差 $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^M$ 是一个非常关键的参数，残差表示通过当前选取的列向量与原始信号的线性组合不能对压缩测量值进行表示的部分。在信号重构过程中，每次迭代都从字典剩余的列向量中选取一个与残差相关系数最大的列向量：

$$\lambda_k = \arg \max_i \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{a}_i \rangle a_i \quad (4-10)$$

式中符号 $\langle \square \square \rangle$ 为内积运算，向量 \mathbf{a}_i 为压缩感知矩阵 \mathbf{A} 的第 i 个列向量， $i=1,2,\dots,N$ 。由于 λ_k 所指示的列项量与当前残差值具有最大的相关性，所以，在包含 λ_k 的所有选取的列向量能够对信号进行更准确的估计，并且具有最小的残差值。对残差与估计值进行如下更新：

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \mathbf{a}_{\lambda_k} \quad (4-11a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_k} = \hat{\mathbf{x}}_{\lambda_k} + \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \quad (4-11b)$$

通过多次重复迭代，当残差的模小于预设误差值时完成信号的估计。

在匹配追踪算法中，字典 \mathbf{A} 中所有列向量具有归一化的模。考虑(4-11a)式，将等式两端对第 k 次所选列向量 \mathbf{a}_{λ_k} 求内积有：

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle &= \langle \mathbf{r}_{k-1} - \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \mathbf{a}_{\lambda_k}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \\ &\Downarrow \end{aligned} \quad (4-12)$$

$$\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle = \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle - \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \|\mathbf{a}_{\lambda_k}\|^2 = 0$$

\mathbf{r}_k 为上一次迭代后残差在当前迭代过程中所选列向量 \mathbf{a}_{λ_k} 上的投影，由(4-12)式可知， $\mathbf{r}_k \perp \mathbf{a}_{\lambda_k}$ 。再次考虑(4-11a)式，将等式两端对第 $k-1$ 次所选列向量 $\mathbf{a}_{\lambda_{k-1}}$ 求内积有：

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{a}_{\lambda_{k-1}} \rangle &= \langle \mathbf{r}_{k-1} - \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \mathbf{a}_{\lambda_k}, \mathbf{a}_{\lambda_{k-1}} \rangle \\ &\Downarrow \end{aligned} \quad (4-13)$$

$$\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{a}_{\lambda_{k-1}} \rangle = \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_{k-1}} \rangle - \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_{\lambda_k}, \mathbf{a}_{\lambda_{k-1}} \rangle$$

根据(4-12)第二式，可将(4-13)第二式改写为：

$$\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{a}_{\lambda_{k-1}} \rangle = -\langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_{\lambda_k}, \mathbf{a}_{\lambda_{k-1}} \rangle \quad (4-14)$$

由于(4-11a)式等式两端各自求内积为：

$$\|\mathbf{r}_k\|^2 = \|\mathbf{r}_{k-1}\|^2 - \left| \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \right|^2 \quad (4-15)$$

要使当前迭代后的残差最小，需要选择 λ_k 使 $\left| \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \right|^2$ 最大。考察式(4-14)，当字典 \mathbf{A} 中的列向量两两不正交时，由于 λ_k 的选取准则是使 $\left| \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \right|^2$ 最大，所以有：

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{a}_{\lambda_{k-1}} \rangle &= -\langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_{\lambda_k} \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_{\lambda_k}, \mathbf{a}_{\lambda_{k-1}} \rangle \\ &\neq 0 \end{aligned} \quad (4-16)$$

即：当前迭代更新所得残差与前一次所选列向量不正交，这将破坏匹配追踪算法的收敛性。所以当字典列向量不正交时，匹配追踪算法需要更多次迭代才能达到理想的重构精度。针对匹配追踪算法存在的不足，压缩感知理论研究学者对匹配追踪算法进行了改进，提出了许多匹配追踪算法的推广算法。

4.2.2 正交匹配追踪算法

正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法^[121-122]的基本原理与匹配追踪算法相同，以贪婪迭代的方法选取字典中与残差最相关的列向量，并从测量量中减去相关部分。与匹配追踪算法不同之处在于：在每次迭代过程中，通过对所有选择的列向量正交化以后再对信号进行估计。

OMP算法主要步骤如下：

输入：压缩感知矩阵(字典) $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{M \times N}$ ，压缩测量值 \mathbf{y} ，重构允许误差 e_0 。

输出：稀疏解 \mathbf{x} 。

初始化：初始化稀疏解 $\mathbf{x}_0 = 0$,

初始化残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}$,

初始化支撑集 $S_0 = \text{supp}(\mathbf{x}_0) = \emptyset$ 。

循环步骤：逐步增加 k ，循环执行如下步骤：

Step 1: 对所有 j ，计算误差 $e_j = \min_{z_j} \|\mathbf{a}_j z_j - \mathbf{r}_{k-1}\|_2^2$ ，其中 $z_j^* = \mathbf{a}_j^T \mathbf{r}_{k-1} / \|\mathbf{a}_j\|_2^2$

Step 2: 计算得到满足Step 1中最小化优化问题的指标 λ_j ，满足： $\forall j \notin S_{k-1}$ ， $e_{\lambda_j} \leq e_j$ ，更新支撑集： $S_k = S_{k-1} \cup \{\lambda_j\}$ 。

Step 3: 计算估计值 \mathbf{x}_k ， \mathbf{x}_k 满足最小优化问题： $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \text{ s.t. } \text{supp}(\mathbf{x}) = S_k$ 。

Step 4: 更新残差： $\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k$ 。

Step 5: 停止条件 $\|\mathbf{r}_k\|_2^2 < e_0$ ，或迭代次数达到压缩采样值序列长度，否则重复执行Step 1 – Step 4。

在Step 1中，误差具有如下表达式：

$$\begin{aligned} e_j &= \min_{z_j} \|\mathbf{a}_j z_j - \mathbf{r}_{k-1}\|_2^2 \\ &= \left\| \frac{\mathbf{a}_j^T \mathbf{r}_{k-1}}{\|\mathbf{a}_j\|_2} - \mathbf{r}_{k-1} \right\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{r}_{k-1}\|_2^2 - \frac{(\mathbf{a}_j^T \mathbf{r}_{k-1})^2}{\|\mathbf{a}_j\|_2^2} \end{aligned} \quad (4-17)$$

根据4-17可知，最小化误差 e_j 等效于最大化 \mathbf{a}_j 与 \mathbf{r}_{k-1} 的内积的绝对值。

在Step 3中，最小化关于 \mathbf{x} 的目标函数 $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2$ 。以 \mathbf{A}_{S_k} 表示 $M \times |S_k|$ 维矩阵，其 $|S_k|$ 个列向量为 \mathbf{A} 中选取，列指标在指标集 S_k 内。因此优化问题可转化为最小化 $\|\mathbf{A}_{S_k} \mathbf{x}_{S_k} - \mathbf{y}\|_2^2$ ，其中 \mathbf{x}_{S_k} 为 \mathbf{x} 中的非零项。最小化问题可以通过对目标函数求微分得到：

$$\mathbf{A}_{S_k}^T (\mathbf{A}_{S_k} \mathbf{x}_{S_k} - \mathbf{y}) = -\mathbf{A}_{S_k}^T \mathbf{r}_k = 0 \quad (4-18)$$

在(4-18)式中 $\mathbf{r}_k = \mathbf{y} - \mathbf{Ax}_k = \mathbf{y} - \mathbf{A}_{S_k} \mathbf{x}_{S_k}$ ，为了使(4-18)式成立，在 \mathbf{A} 中指标集 S_k 所指示的列向量需要与残差 \mathbf{r}_k 正交，这就是正交匹配追踪算法命名的来源。

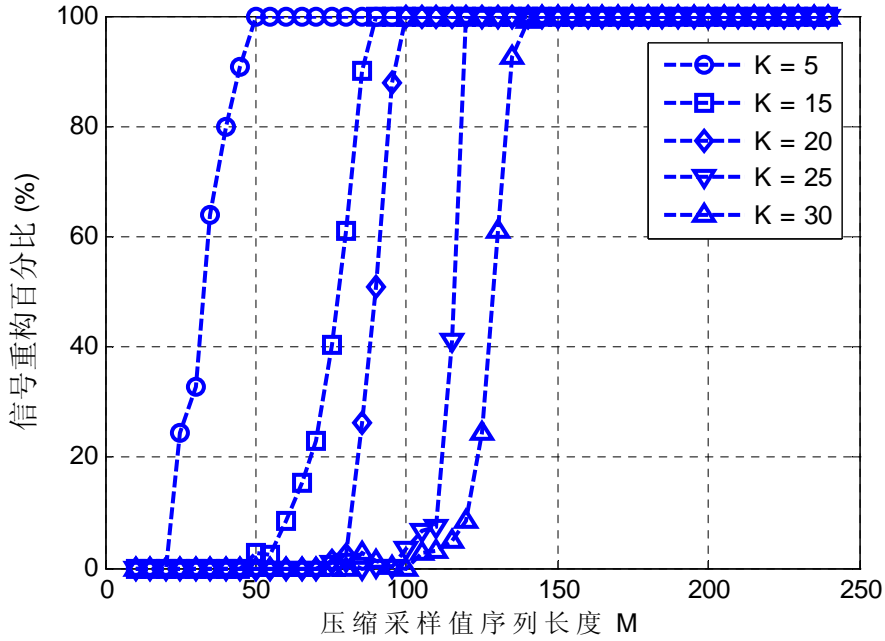


图4-5 不同稀疏度信号重构百分比与压缩采样序列长度关系

图4-5所示为时域稀疏度分别为 $K = 5, 15, 20, 25, 30$ 的信号采用不同长度的压缩采样值进行信号重构的重构百分比。压缩测量矩阵采用满足独立同分布随机高斯变量构造，稀疏表示基矩阵为单位矩阵，信号采用OMP算法进行重构，重构信号长度 $N = 256$ ，在每个压缩采样序列长度下进行100次实验，并将重构百分比进行平均。图4-6所示为在不同高斯白噪声强度下OMP算法重构信号的100次实验平均归一化误差示意图。信号稀疏度 $K = 10$ ，信号幅度为2。高斯白噪声方差分别为 $\sigma = 0.2, 0.4$ 。对比图4-2, 4-3与图4-5, 4-6可以发现，基追踪算法重构精度与OMP算法重构精度基本相同，但考察重构算法对高斯白噪声的抗干扰能力，基追踪算法具有更高的稳定性。

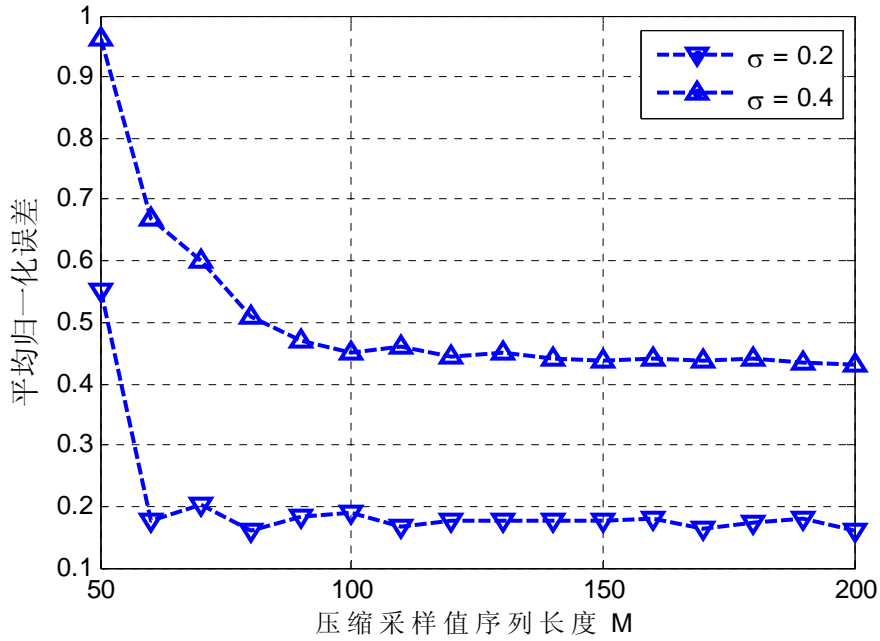


图4-6 不同噪声强度下平均归一化误差与压缩采样序列长度关系

与匹配追踪算法相比，OMP算法具有如下优缺点：

1. 由于每次迭代过程中对所选择的列向量与以选的列向量进行了正交化，对于非正交字典，OMP算法与匹配追踪算法相比具有更高的收敛速度，能够得到更佳的近似。
2. 由于引入正交化运算，OMP算法计算更加复杂，虽然能够通过递归迭代方式实现，但计算速度还是比匹配追踪算法慢。

由于OMP算法能够适用于非正交字典，并且实现简单，在工程中得到了广泛的应用。并且压缩传感理论研究学者以OMP算法为基础提出了大量的改进算法。

4.2.3 正则化正交匹配追踪算法

通过对基追踪算法和OMP算法分析可知，基于凸优化的基追踪算法具有较强的鲁棒性和稳定性，但与基于贪婪迭代的OMP算法相比，计算复杂，计算速度慢，信号重构效率效率低；另一方面，OMP算法却不具有基追踪算法所具有的鲁棒性。为了结合这两种算法的优点，D. Needell等人提出了改进算法：正则化正交匹配追踪(Regularized Orthogonal Matching Pursuit, ROMP)算法^[123]。

ROMP算法也是一种贪婪迭代算法，只要压缩感知矩阵满足约束等距条件，它就能从该矩阵获取的测量值中重构稀疏信号。由于压缩感知矩阵满足约束等距条

件，从矩阵中任意选取的 K 个列向量之间近似正交。与OMP算法不同，ROMP算法在每次迭代中选取 K 个列指标，而不是一个列指标。在每次迭代过程中所选取的 K 个列指标允许少量的错误项，为了保证在每次迭代过程中避免选择过多错误项，通过在迭代过程中引入正则化使每个所选的列向量包含同等的信息量。

ROMP算法主要实现步骤如下：

输入：压缩感知矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{M \times N}$ ，

压缩测量向量 $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ ($\mathbf{y} \in \mathbf{C}^M$ ， $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$)，

信号稀疏度 K 。

输出：指标集 $S \in \{1, 2, \dots, N\}$ ，重构信号 $\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega}$ 。

初始化： $S = \emptyset$ ，残差 $\mathbf{r} = \mathbf{y}$ 。

重复以下步骤至 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ：

识别：选择集合 J 为观测向量 $\mathbf{u} = \mathbf{A}^* \mathbf{r}$ 中 K 个具有最大幅度的列指标，或者所有非零值对应的列指标，选择的准则是使集合最小。

正则化：在所有子集 $J_0 \subset J$ 中，在满足如下条件下，

$$|u(i)| \leq 2|u(j)|, \quad i, j \in J_0$$

选择具有最大能量 $\|\mathbf{u}|_{J_0}\|_2$ 的子集 J_0 。

更新：将所选子集 J_0 添加到指标集 S 中， $S \leftarrow S \cup J_0$ ，更新残差：

$$\boldsymbol{\omega} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^S} \|\mathbf{y} - \mathbf{Az}\|_2$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}$$

与OMP算法一样，ROMP算法也需要用到信号稀疏度的先验信息。该信息可以通过以下方法获得：由于压缩测量值的长度 M 的需要满足： $M = O(K \log N)$ ，可以将 $M / \log N$ 作为 K 的粗略估计值；另一种方法是通过选取一系列的稀疏度，采用ROMP算法对信号进行重构，选择使得 $\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|$ 最小的 $\hat{\mathbf{x}}$ 作为重构信号输出。

显然，当待重构信号不是严格稀疏时，如信号为可压缩信号或测量值中含有噪声，那么以上算法无法达到停止条件。对于这种情况，可以通过设置迭代次数，当算法运行达到一定次数，且残差不为零，此时强制停止算法。

ROMP算法能够对稀疏信号进行准确重构，并可以总结为如下定理。

定理4.2^[124]：假设压缩感知矩阵 \mathbf{A} 满足约束等距条件，且具有参数 $(2K, \varepsilon)$ ， $\varepsilon = 0.03\sqrt{\log K}$ ， $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ 为 K 稀疏信号，压缩测量值 $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ ，则ROMP算法最多经过 K 次迭代即可输出一个满足以下关系的指标集 S ：

$$\text{supp}(x) \subset S \text{ and } |S| \leq 2K$$

定理4.2证明ROMP算法能够准确重构稀疏信号，采用指标集 S ，我们可以从压缩测量值 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 中通过求解 $\mathbf{x} = (\mathbf{A}_S)^{-1} \mathbf{y}$ 得到原始信号， \mathbf{A}_S 为 \mathbf{A} 中采用指标集 S 所指示的列向量构成的矩阵。

在压缩感知矩阵满足约束等距条件下，定理4.2提供了ROMP算法准确重构稀疏信号的强保证，这是OMP算法无法提供的。另一方面，ROMP算法对于含噪声采样值序列的信号重构同样具有较好的性能，算法的稳定性可以通过以下定理得到保证。

定理4.3^[123]: 假设压缩感知矩阵 \mathbf{A} 满足约束等距条件，且具有参数 $(4K, \varepsilon)$ ， $\varepsilon = 0.01\sqrt{\log K}$ ， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 为 K 稀疏信号，压缩采样值中含有噪声， $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}$ ，其中 \mathbf{e} 为误差向量，则通过ROMP算法得到信号估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 值满足：

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2 \leq 104\sqrt{\log N} \|\mathbf{e}\|_2$$

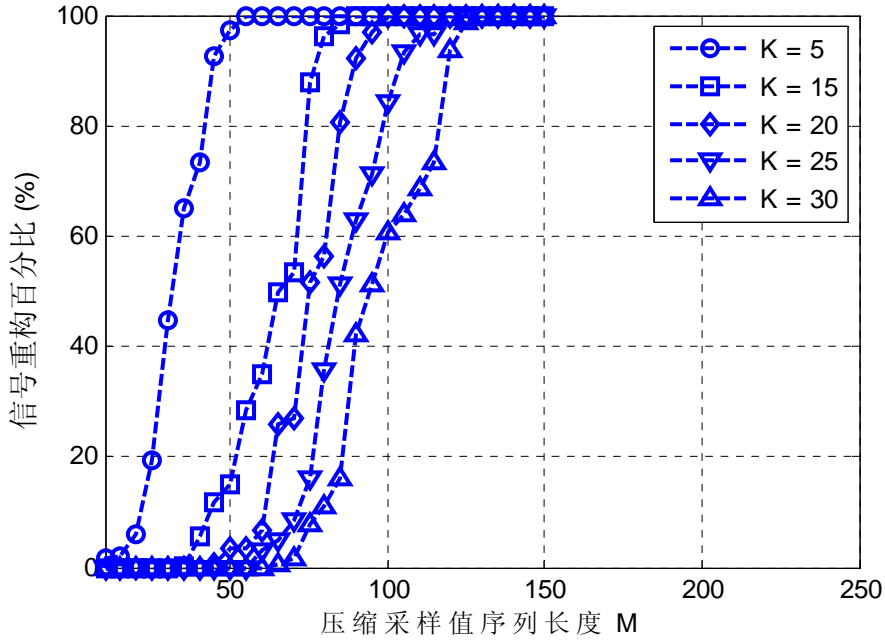


图4-7 不同稀疏度信号重构百分比与压缩采样序列长度关系

图4-7所示为时域稀疏度分别为 $K = 5, 15, 20, 25, 30$ 的信号采用不同长度的压缩采样值进行信号重构的重构百分比。压缩测量矩阵采用满足独立同分布随机高斯变量构造，稀疏表示基矩阵为单位矩阵，信号采用ROMP算法进行重构，重构信号长度 $N = 256$ ，在每个压缩采样序列长度下进行100次实验，并将重构百分

比进行平均。与图4-5对比可以发现，ROMP算法与OMP算法的信号重构性能基本相同。

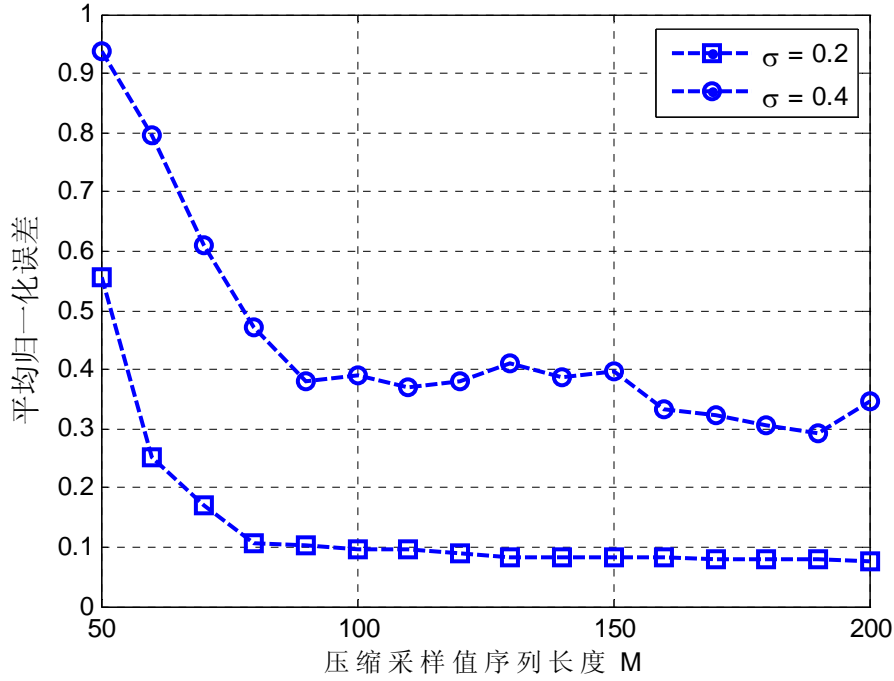


图4-8 不同噪声强度下重构信号平均归一化误差与压缩采样序列长度关系

图4-8所示为稀疏度为 $K = 10$ ，幅度为2的稀疏信号的压缩采样重构误差，压缩采样值含不同强度的高斯白噪声，高斯白噪声方差分别为 $\sigma = 0.2, 0.4$ 。在每组采样序列长度下进行100次ROMP算法信号重构，平均归一化误差如图4-8所示。对比图4-6可以发现，ROMP算法的抗干扰能力明显优于OMP算法，图4-8验证了该算法的稳定性。

4.2.4 压缩采样匹配追踪算法

ROMP算法同时具有贪婪算法的速度和凸优化算法的稳定性。然而相比凸优化算法，ROMP算法的压缩感知矩阵需要满足更加严格的约束等距条件，这将降低ROMP算法在对含噪声信号的重构中的误差上界。为了解决这个问题，D. Needell等人对ROMP算法进行了进一步改进，提出了压缩采样匹配追踪(Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP)算法^[124]。

ROMP算法与OMP算法之间的主要区别在于在每次迭代过程中，ROMP算法选择多个列指标添加到支撑集中，正是因为每次选择多个列指标，即使某些列指标

选择错误，ROMP算法仍然能够重构原始信号。因此ROMP算法会出现支撑集出错的情况，一旦选择了错误指标，就无法从支撑集中去除。

CoSaMP算法是OMP算法的一种变异，它具有与ROMP算法相同的可靠性。由于感知矩阵 \mathbf{A} 满足约束等距条件，因此在Euclidean范数空间上，观测向量 $\mathbf{u} = \mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ 中的任意 K 个项与信号 \mathbf{x} 的 K 个项对应。与ROMP算法类似，CoSaMP算法首先选择观测向量中最大的列指标，并将其添加到支撑集中。然后通过最小二乘法来得到信号的一个估计 \mathbf{b} 。

CoSaMP算法实现步骤如下：

输入： 压缩感知矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{M \times N}$,

压缩测量向量 $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} (\mathbf{y} \in \mathbf{C}^M, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^N)$,

信号稀疏度 K 。

输出： 重构信号向量 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{a}$ 。

初始化： 设置 $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{y}$, $k = 0$, 逐步增加 k , 重复执行以下步骤直至满足停止条件。

信号代理： 设置观测向量 $\mathbf{u} = \mathbf{A}^* \mathbf{v}$, $\Omega = \text{supp}(\mathbf{u}_{2K})$, 合并支撑集 $S = \Omega \cup \text{supp}(\mathbf{a}_{k-1})$

信号估计： 采用最小二乘法求解 $\mathbf{b}_S = \mathbf{A}_S^\dagger \mathbf{y}$, 其中 $\mathbf{b}_{S^c} = \mathbf{0}$ 。

裁剪： 获取估计值 $\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_K$ 。

更新样本： 更新当前样本 $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{a}_k$ 。

算法中 \mathbf{A}_S^\dagger 为 \mathbf{A}_S 的广义逆。

在识别过程中，算法根据当前样本值构造一个残差的代理向量，并计算得到代理向量中最大元素的位置，并将当前获得的位置指标合并到前一次估计值的支撑集中。算法通过求解最小二乘法在支撑集上计算待重构信号的估计值，保留估计值中最大的 K 个元素，并将其余位置上的元素置零，使估计值稀疏。最后通过最新的估计值更新样本，使残差反映信号的未被估计部分。

与ROMP和Stagewise Orthogonal Matching Pursuit(StOMP)^[125]一样，CoSaMP算法在每次迭代过程中选择多个列指标，V. Temlyakov, A. Gilbert, S. Muthukrishnan, J. Tropp等人也对这种指标选择方法进行了理论研究，这也是最新Fourier采样算法的主要思想。

对于任意满足约束等距条件的压缩感知矩阵，任何稀疏信号采用CoSaMP算法均能准确重构信号，可以通过以下定理得到保证：

定理4.4^[124]：假设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{M \times N}$ 为满足约束等距条件的压缩感知矩阵，约束等距常数 $\delta_{2K} \leq c$ ， $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ 为 K 稀疏信号，压缩测量值 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}$ ， \mathbf{e} 为噪声信号，对于给定精度参数 η ，通过CoSaMP算法所获得的估计值满足：

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq C \cdot \max \left\{ \eta, \frac{1}{\sqrt{K}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{K/2}\|_1 + \|\mathbf{e}\|_2 \right\}$$

式中 $\mathbf{x}_{K/2}$ 为 \mathbf{x} 的稀疏度为 $K/2$ 的最优估计。

CoSaMP算法不仅能够保证对稀疏信号重构的可行性，同时CoSaMP算法能够提供严格的误差上界。CoSaMP算法的理论分析主要是基于迭代次数对近似误差的影响。D. Needell, J. Tropp等人证明：当误差远大于某个基线值(baseline value)时，CoSaMP算法能够实现降低信号近似误差，基线值为信号中未能被重构部分的信号能量 ν ， ν 的定义如下：

$$\nu \triangleq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_2 + \frac{1}{\sqrt{K}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_1 + \|\mathbf{e}\|_2 \quad (4-19)$$

式中 \mathbf{x}_K 为 \mathbf{x} 的稀疏度为 K 的最优估计， \mathbf{e} 为压缩测量值中所含噪声。 ν 的存在主要是由于信号不是完全稀疏的或者测量值中含有噪声。对于不同的迭代次数 k ，以下定理给出了CoSaMP算法的误差上界：

定理4.5^[124]：对于迭代次数 $k \geq 0$ ， K 稀疏信号的估计 \mathbf{a}_k 满足：

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_{k+1}\|_2 &\leq 0.5 \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_k\|_2 + 10\nu \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_k\|_2 &\leq 2^{-k} \|\mathbf{x}\|_2 + 20\nu \end{aligned}$$

由定理4.5可知，经过 $k = \log_2(\|\mathbf{x}\|_2 / \eta)$ 迭代以后，估计值的误差小于 $\eta + 20\nu$ 。在参考文献[117]中，E. Candès等人证明了采用凸松弛算法的信号估计值 $\hat{\mathbf{x}}$ 满足：

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq C \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{K}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_1 + \varepsilon \right] \quad (4-20)$$

式中 $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \varepsilon$ ，压缩感知矩阵满足约束等距常数 $\delta_{4K} \leq 0.2$ 。D. Needell和J. Tropp证明，如果压缩感知矩阵满足约束等距常数 $\delta_{4K} \leq 0.2$ ，CoSaMP算法具有与4-20类似的误差上界。

图4-9所示为CoSaMP算法对时域稀疏信号重构性能示意图。信号的稀疏度分别为 $K = 5, 15, 20, 25, 30$ ，信号采用不同长度的压缩采样值进行信号重构。压

缩测量矩阵采用满足独立同分布随机高斯变量构造，稀疏表示基矩阵为单位矩阵，信号采用CoSaMP算法进行重构，重构信号长度 $N = 256$ ，在每个压缩采样序列长度下进行1000次实验。当重构信号绝对误差小于 10^{-4} 视为一次准确重构，在算法运行过程中，每次迭代次数不高于 $8K$ 。信号准确重构次数与压缩采样值长度关系如图4-9所示，由示意图可以看出，CoSaMP算法具有较高的信号重构概率。

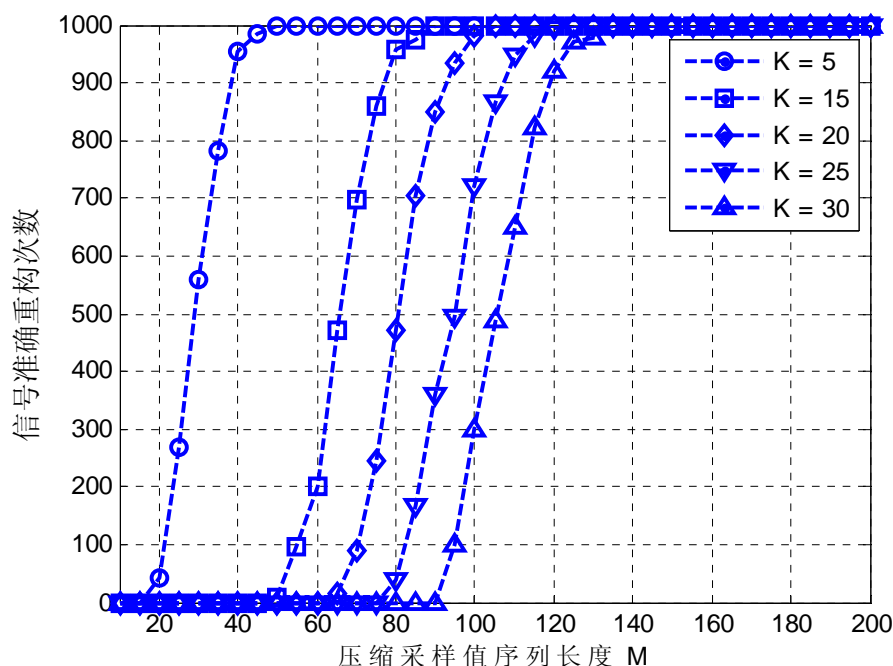


图4-9 不同压缩采样值序列长度与准确重构次数的关系

图4-10所示为迭代次数对误差的影响示意图。实验信号为稀疏度为15的时域稀疏信号，幅度为2，采用满足独立同分布随机高斯矩阵对信号进行采样，并在采样值中添加方差为0.2的高斯白噪声。信号采用CoSaMP算法进行重构，在每组设置参数下进行100次实验，重构信号平均归一化误差如图4-10所示。由图可知，CoSaMP算法具有很强的稳定性，随着迭代次数的增加，重构信号误差减小。

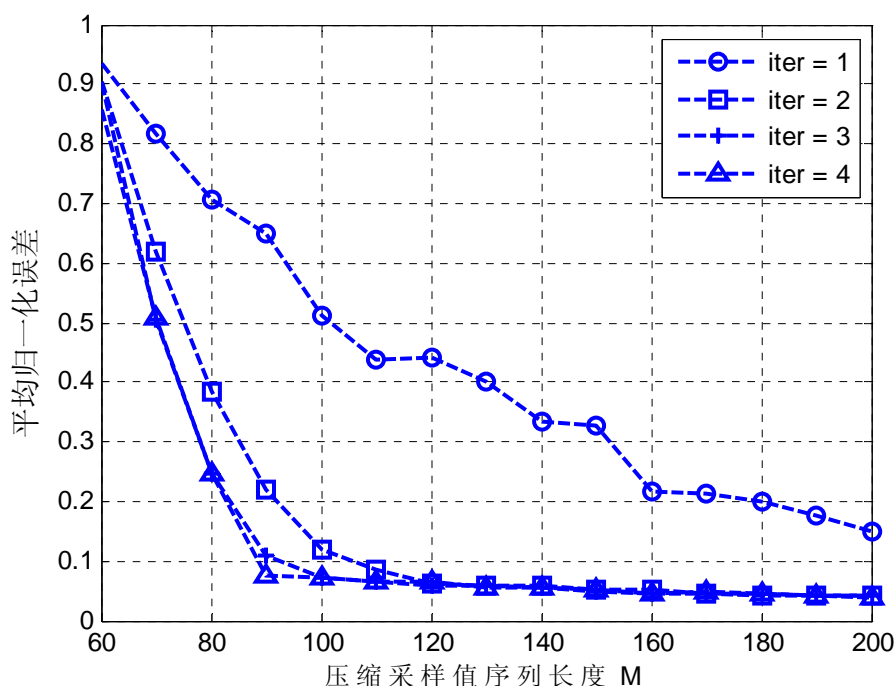


图4-10 不同噪声强度下重构信号平均归一化误差与压缩采样序列长度关系

4.3 基于模型的频域压缩采样信号重构

在频谱分析与处理中，大多数信号能够通过Fourier变换进行稀疏表示，在采用压缩感知理论重构算法对信号进行重构时，通常采用DFT表示基对Fourier变换进行近似。由于DFT变换是对DTFT变换的截断，这将造成信号频谱的泄漏，使得变换后的信号不是严格意义上稀疏。在本节中通过对压缩感知理论中频域稀疏表示基的失配问题进行分析，并在此基础上介绍了一种基于信号模型的频域稀疏信号重构算法。

4.3.1 频域稀疏表示基失配

DFT变换基向量是对DTFT变换基向量的截断，为了能够采用DFT变换对信号进行稀疏表示，信号频域分布需要满足更加严格的要求。然而，即使对DFT基的维数进行增加，但这也是一种以有限对无限的一种近似，当信号频率不处于DFT基向量的频率网格点($2\pi k / N, k \in \{1, 2, \dots, N\}$)上时，此时DFT基与DTFT基之间存在失配

问题，在传统压缩感知信号重构算法中，这种稀疏表示基失配问题将降低信号重构精度。

为了便于对稀疏表示基失配问题进行分析，定义两种信号模型：准确稀疏模型 $\mathbf{x} = \Psi_1 \boldsymbol{\theta}$ ，其中原始信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^N$ ，稀疏系数 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{C}^N$ ，准确稀疏表示基 $\Psi_1 \in \mathbf{C}^{N \times N}$ ；近似稀疏模型 $\mathbf{x} = \Psi_0 \boldsymbol{\alpha}$ ，稀疏系数 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{C}^N$ ，近似稀疏表示基 $\Psi_0 \in \mathbf{C}^{N \times N}$ (如DFT变换基)。在实际应用中 Ψ_1 由未知信号频率决定，并且这些频率不是严格处于 Ψ_0 的频率网格点上，即 $\Psi_0 \neq \Psi_1$ 。将两中稀疏模型结合可以得到如下信号表示形式：

$$\boldsymbol{\alpha} = \Psi \boldsymbol{\theta} \quad (4-21)$$

式中 $\Psi = \Psi_0^{-1} \Psi_1 \in \mathbf{C}^{N \times N}$ ， $\boldsymbol{\theta} = \Psi^{-1} \boldsymbol{\alpha}$ 。如果信号 \mathbf{x} 在 Ψ_1 中稀疏，那么系数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 在单位矩阵 \mathbf{I} 中也是稀疏的。结合关系式 $\Psi_0 \neq \Psi_1$ 与(4-21)式可知， $\boldsymbol{\alpha}$ 在未知基 Ψ 中稀疏，而不是 \mathbf{I} 中稀疏。

考虑 Ψ_0 为 $N \times N$ 维DFT基矩阵，其表达式为(2-11)式所示。不失一般性，假设 Ψ_0 与 Ψ_1 中第 l 个列向量失配量为 $\Delta\theta_l$ ($0 \leq \Delta\theta_l \leq 2\pi/N$)，则真实基矩阵为：

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\Delta\theta_0} & e^{j(2\pi/N+\Delta\theta_1)} & \cdots & e^{j(2\pi(N-1)/N+\Delta\theta_{N-1})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\Delta\theta_0(N-1)} & e^{j(2\pi/N+\Delta\theta_1)(N-1)} & \cdots & e^{j(2\pi(N-1)/N+\Delta\theta_{N-1})(N-1)} \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

失配基矩阵 $\Psi = \Psi_0^{-1} \Psi_1$ [117] 为：

$$\Psi = \begin{bmatrix} L(\Delta\theta_0 - 0) & L\left(\Delta\theta_1 - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) & \cdots & L\left(\Delta\theta_{N-1} - \frac{2\pi}{N}\right) \\ L\left(\Delta\theta_0 - \frac{2\pi}{N}\right) & L(\Delta\theta_1 - 0) & \cdots & L\left(\Delta\theta_{N-1} - \frac{2\pi \cdot 2}{N}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L\left(\Delta\theta_0 - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) & L\left(\Delta\theta_1 - \frac{2\pi(N-2)}{N}\right) & \cdots & L(\Delta\theta_{N-1} - 0) \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

式中 $L(\theta)$ 的表达式如下：

$$L(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\theta} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{\theta(N-1)}{2}} \frac{\sin(\theta N/2)}{\sin(\theta/2)} \quad (4-24)$$

由于 $L(\theta)$ 收敛很慢，稀疏Fourier系数 θ 中的非零元素通过失配基 Ψ 泄漏到所有其它输入元素上，使得 θ 不再具有严格意义的稀疏特性，从而降低信号重构精度。

考虑压缩采样系统 $y = A\theta + n$ ，其中 θ 为 K 稀疏信号， $A = \Phi\Psi_1$ 为压缩感知矩阵， n 为测量噪声，由于稀疏表示基失配，实际压缩采样系统为 $y = \hat{A}\alpha + n$ ，且 $A \neq \hat{A}$ 。求解以下优化问题重构信号 $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad s.t. \quad \|y - \hat{A}\alpha\|_2 \leq \varepsilon_{A,K,A\theta} \quad (4-25)$$

满足^[126]:

$$\|\hat{\alpha} - \theta\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{K}} \|\theta - \theta_K\|_1 + C_1 \varepsilon_{A,K,A\theta} \quad (4-26)$$

式中 θ_K 为 θ 的具有 K 个元素的最优估计， $\varepsilon_{A,K,A\theta}$ 为误差范围， $\varepsilon_{A,K,A\theta}$ 的取值取决与约束等距常数与真实压缩感知矩阵 A 的 ℓ_2 范数模， C_0 与 C_1 为常数。

4.3.2 信号重构算法

由 4.3.1 节分析可知，由于采用 DFT 变换基对 Fourier 变换基进行近似，DFT 变换基的非完备性造成信号频谱泄漏，从而破坏了信号的稀疏特性。因此基于 DFT 稀疏表示基的传统压缩采样信号重构算法的性能将大幅度降低。为了降低频谱泄漏对信号重构精度的影响，在本节中我们介绍一种基于信号模型的信号估计算法。

考虑以 Nyquist 采样率获取的信号 $x = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T \in \mathbf{C}^N$ 为 K 个正弦信号的线性组合， $K \ll N$ ，信号具有稀疏特性，其信号模型表达式如下：

$$x_n = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{-j\omega_k n} \quad (4-27)$$

式中 α_k 与 ω_k 分别为第 k 个正弦信号的幅度和频率， $\omega_k \in [0, 2\pi]$ ，将(4-27)式采用矩阵-向量形式进行表示为：

$$x = \Psi\alpha \quad (4-28)$$

式中 $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_K]^T$ ， $\Psi = [\psi(\omega_1), \dots, \psi(\omega_K)]^T$ ， $\psi(\omega_k) = [1, e^{-j\omega}, \dots, e^{-j(N-1)\omega}]^T$ 。信号压缩采样模型为：

$$y = \Phi x + n = \Phi\Psi\alpha + n \quad (4-29)$$

信号重构的主要任务是对(4-28)式中未知信号的幅度系数向量与频率进行估计，信号估计算法需要满足两个准则：估计误差最小化与估计信号满足信号的稀疏表示模型。估计信号 $\hat{\mathbf{x}}$ 的压缩估计误差为 $\|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2$ ，因此信号估计可以转化为以下优化问题：

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 \quad (4-30)$$

估计误差为凸函数，最小化(4-30)式可以通过迭代最小二乘法(Iterative Least Squares, ILS)进行求解：

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \Phi^T (\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}_{i-1}) \quad (4-31)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}_i$ 为第 i 次迭代的信号估计值。

(4-30)式是一个欠定方程，求解不唯一，为了使估计信号满足(4-28)式的信号模型，需要在 ILS 算法进行修正。将(4-31)式改写为 $\mathbf{x}_e = \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \Phi^T (\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}_{i-1})$ ，可以通过 root-MUSIC 算法^[127]估计得到 \mathbf{x}_e 中的频率 $\hat{\Omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K]^T$ ，由频率向量 $\hat{\Omega}$ 可以构造出变换基矩阵 $\hat{\Psi}$ 。

根据估计得到的基矩阵 $\hat{\Psi}$ ，原始信号可以表示为 $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\Psi} \alpha$ ，由于 α 未知，我们需要进一步对 α 进行估计。考虑到估计信号需要满足误差 $\varepsilon(\alpha) = \|\mathbf{y} - \Phi \hat{\Psi} \alpha\|_2^2$ 最小，可以通过求解以下问题对 α 进行估计：

$$\begin{aligned} \varepsilon(\alpha) &= \|\mathbf{y} - \Phi \hat{\Psi} \alpha\|_2^2 \\ &= (\mathbf{y} - \Phi \hat{\Psi} \alpha)^H \cdot (\mathbf{y} - \Phi \hat{\Psi} \alpha) \\ &= \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \Phi \hat{\Psi} \alpha - \alpha^H \hat{\Psi}^H \Phi^H \mathbf{y} + \alpha^H \hat{\Psi}^H \Phi^H \Phi \hat{\Psi} \alpha \end{aligned} \quad (4-32)$$

对 $\varepsilon(\alpha)$ 关于 α 求导，

$$\frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\partial \alpha} = -2 \hat{\Psi}^H \Phi^H \mathbf{y} + \hat{\Psi}^H \Phi^H \Phi \hat{\Psi} \alpha \quad (4-33)$$

所以满足最小估计误差的幅度向量为：

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \arg \min_{\alpha} \|\mathbf{y} - \Phi \hat{\Psi} \alpha\|_2^2 \\ &= (\hat{\Psi}^H \Phi^H \Phi \hat{\Psi})^{-1} \hat{\Psi}^H \Phi^H \mathbf{y} \end{aligned} \quad (4-34)$$

将估计基矩阵 $\hat{\Psi}$ 与幅度向量 $\hat{\alpha}$ 结合(4-28)式的信号模型，得到原始信号的估计值 $\hat{\mathbf{x}}$ 。信号重构算法如下：

ILS-root-MUSIC 信号重构主要步骤：

输入： 压缩测量矩阵 $\Phi \in \mathbf{C}^{M \times N}$,

压缩测量向量 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} (\mathbf{y} \in \mathbf{C}^M, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^N)$,

信号稀疏度 K ,

root-MUSIC窗长度 W 。

输出： 重构信号向量 $\hat{\mathbf{x}}$ 。

初始化： 设置 $\mathbf{x}_0 = 0, k = 0$ 。

逐步增加 k , 重复执行以下步骤直至满足停止条件。

Step 1: 采用LS算法估计信号代理:

$$\mathbf{x}_e = \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \Phi^T (\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}_{i-1})$$

Step 2: root-MUSIC频谱估计算法对信号代理的频率向量进行估计:

$$\hat{\Omega} = \text{root-MUSIC}(\mathbf{x}_e, 2K, W)$$

Step 3: 由估计频率向量构造基矩阵:

$$\hat{\Psi} = [\psi(\omega_1), \psi(\omega_2), \dots, \psi(\omega_K)]$$

Step 4: 估计幅度向量:

$$\hat{\alpha} = (\hat{\Psi}^H \Phi^H \Phi \hat{\Psi})^{-1} \hat{\Psi}^H \Phi^H \mathbf{y}$$

Step 5: 更新重构信号:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\Psi} \hat{\alpha}$$

图 4-11 所示为本节提出的 ISL-root-MUSIC 算法对非严格频域稀疏压缩采样信号的重构示意图, 重构迭代次数为 4, 窗长度 $W = 102$ 。实验信号为长度 $N = 1024$ 的单频信号, 根据 4.3.1 小结分析可知, 如果采用 DFT 表示基对信号进行稀疏表示, 信号的频率必须为 $2\pi k / N$, 并且 k 为整数。在本实验中, k 不为整数, 所以存在稀疏表示基失配问题, 设置频率失配度由 0.05 至 0.05 以 0.05 步进递增, 即: 信号的频率为 $\omega = 2\pi k / N + \Delta\omega$, 其中 $\Delta\omega = q \cdot 2\pi \cdot 0.05 / N$, q 为整数。采用满足独立同分布的随机高斯压缩测量矩阵对信号进行采样, 采样值序列长度 M 由 50 至 500 以 50 为步进递增。由实验结果可知, 虽然存在表示基失配问题, ILS-root-MUSIC 算法同样能够以较高的精度对信号进行重构。

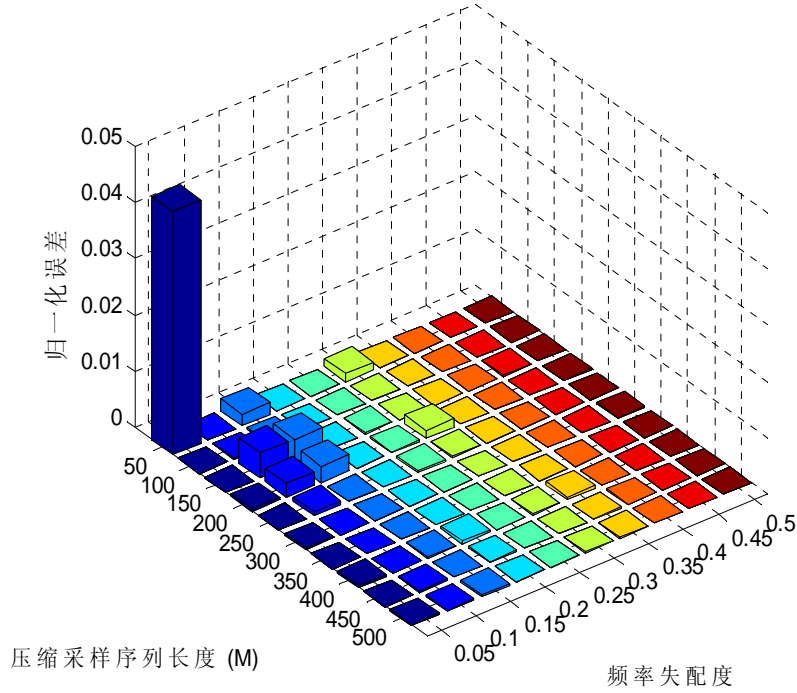


图 4-11 归一化误差与压缩采样序列长度、频率失配度的关系

当信号表示基失配的时候，信号波形幅度会在时域产生较大的误差，并且即使两个幅度相同的信号，如果频率不同，那么它们之间的波形也具有较大的差异。为了对ILS-root-MUSIC算法与它重构算法进行比较客观的比较，本实验采用重构信号频率为指标，而不是采用传统的SNR或归一化误差。由于压缩采样重构算法种类繁多，我们只将ILS-root-MUSIC算法与基于凸优化的IRWL1算法和基于贪婪迭代的CoSaMP算法进行比较。实验信号长度 $N = 1024$ ，压缩测量矩阵为满足独立同分布的高斯随机变量构成，压缩测量值的长度为 $M = 300$ 。对于IRWL1与CoSaMP，信号的稀疏表示基为DFT基向量构成。信号中包含4个频率成分，分别为： $2\pi k_1 / N$ ， $2\pi k_2 / N$ ， $2\pi k_3 / N$ 以及 $2\pi k_4 / N$ ，其中 $k_1 = 256.1$ ， $k_2 = 200.25$ ， $k_3 = 128.3$ ， $k_4 = 102.5$ 。显然，信号在DFT表示基上存在频率失配问题，频率失配度分别为： $2\pi \cdot 0.1 / N$ ， $2\pi \cdot 0.25 / N$ ， $2\pi \cdot 0.3 / N$ ， $2\pi \cdot 0.5 / N$ 。设置重构信号的采样率为1024 Hz，表4-1所示为ILS-root-MUSIC、IRWL1以及CoSaMP算法对DFT表示基失配的信号进行重构的比较结果，ILS-root-MUSIC与IRWL1算法的迭代次数均为4，信号的频率单位为Hz。由实验结果可知，ILS-root-MUSIC算法几乎不受表示基失配的影响，另一方面，由于IRWL1与CoSaMP算法都是基于DFT表示基，所以重构信号频率只能为整数，在IRWL1算法中，频率失配甚至使得某些频率无法

恢复(表中以“xxx”表示)。所以,对于频率失配信号的重构,相比IRWL1与CoSaMP算法, ILS-root-MUSIC算法具有更优的性能。

表 4-1 稀疏表示基失配对信号重构算法的影响

原始信号频率	256.1	200.25	128.3	102.5
CoSaMP	256	200	128	102
IRWL1	256	200	xxx	xxx
ILS-root-MUSIC	256.0988	200.2522	128.2955	102.5009

4.4 本章小结

本章对常用压缩感知信号重构算法进行了介绍。压缩感知信号重构算法主要分为两类:基于凸松弛的优化算法和基于贪婪迭代的匹配追踪算法。这两类算法各有优缺点,凸松弛算法具有很好的鲁棒性,然而由于需要将求解问题转化为线性规划问题,计算量大,信号重构效率低;贪婪算法虽然不具有强保证性,但实现简单,重构效率高,在工程应用中得到广泛使用,本章对这两类信号重构方法的典型算法进行了介绍。

虽然凸松弛算法和贪婪算法都具有各自的优点,但却存在一个共同的缺点,在重构算法中都需要采用稀疏表示基。然而对于频域稀疏信号的处理,传统信号重构算法都是基于DFT变换,由于DFT表示基构成的字典不完备,存在表示基失配问题。本章分析了表示基失配问题产生的原理以及对信号稀疏表示的影响,提出了基于迭代最小二乘法和root-MUSIC频谱估计的信号重构算法:ILS-root-MUSIC算法。与凸松弛算法和贪婪算法相比,该算法不受稀疏表示基分辨率的限制,能够对信号的小数频率成分进行重构。ILS-root-MUSIC算法在进行频域估计时采用了root-MUSIC算法,root-MUSIC算法的计算效率受到信号长度和窗长度的影响,其计算效率低于传统贪婪算法。

在传统压缩采样信号处理中,信号重构算法都是致力于完全重构原始信号。然而,在大多数情况下,信号处理的目的是为了从测量值中提取某种特定信息或者滤除不感兴趣的信息以备下一步处理。因此在压缩采样信号处理中,准确重构原始信号并非必须。Davenport等人^[128]对压缩采样信号处理方法提出了一种新的思路:在压缩采样值中对信号进行检查判断。该方法的优点是不需要对信号完全重

构，直接从压缩测量值中对原始信号进行判断。由于不需要获取信号的全部信息，采用更少的测量值就能实现高准确率的判断，所以能够显著降低信号采样成本，提高信号处理效率。这种压缩信号检测方法拓展了压缩感知理论的应用领域，丰富了压缩采样信号处理算法。

第五章 小波域稀疏压缩采样信号重构研究

压缩感知理论相比传统采样定理的优势在于能够从少量的随机采样值中准确重构原始信号。从低维采样值中恢复原始信号的前提是信号具有稀疏性，信号重构问题是一个欠定问题，信号重构算法正是利用信号的这种稀疏性进行重构。然而，某些信号在特定的变换空间上的转换系数不仅具有稀疏性，还具有其它结构化特征，如分段连续型信号在小波域上的多尺度小波变换系数不仅具有稀疏可压缩性，同时，小波系数中具有较大幅度的小波系数在多尺度结构上构成一个子树。本章对多尺度小波系数结构进行了详细分析，介绍了一种基于小波域压缩采样的凸松弛信号重构算法：基于隐马尔可夫树模型的加权最小 ℓ_1 范数算法。通过对多尺度小变换系数的统计特性分析的基础上，提出了基于倒树结构小波域正交匹配追踪算法，该算法不仅利用了小波系数的稀疏性，同时考虑了系数的结构特征，提高了信号重构精度。

5.1 多尺度小波变换结构

不失一般性，我们考虑对一维信号的小波变换。考虑信号长度为 $N = 2^J$ 的信号 \mathbf{x} ，给定带通小波函数 $\psi(t)$ ，低通尺度函数 $\phi(x)$ ，信号 \mathbf{x} 的多尺度分析小波表示为^[129]：

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{N_J-1} \nu_{J,i} \phi_{J,i} + \sum_{J=1}^J \sum_{i=0}^{N_J-1} \omega_{j,i} \psi_{j,i} \quad (5-1)$$

式中 ν 为信号离散小波变换(Discrete Wavelet Transform, DWT)的尺度系数， ω 为小波系数， J 为小波分析尺度， $N_j = N / 2^j$ 为分析尺度为 $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ 时的小波系数数量， $i \in \{1, 2, \dots, 2^j - 1\}$ 在尺度 j 上的小波系数位置。采用矩阵-向量形式对(5-1)式进行表示为 $\mathbf{x} = \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\theta}$ ，其中矩阵 $\mathbf{\Psi}$ 的列向量为尺度函数和小波函数构成， $\boldsymbol{\theta}$ 为信号 \mathbf{x} 的离散小波变换系数向量，其表示形式为：

$$\boldsymbol{\theta} = [\nu_{J,i}, \omega_{0,0}, \omega_{1,0}, \omega_{1,1}, \omega_{2,0} \dots]^T \quad (5-2)$$

5.1.1 确定性信号模型

M. S. Crouse 等人^[130]通过对信号小波变换系数统计分析后指出，信号小波系数具有如下 2 个特性：

可压缩性(Compression)：随着分析尺度变精细，实信号的小波变换系数幅度呈指数衰减，并趋近稀疏，如图 5-1(a)与 5-1(b)所示。

树状结构(Tree Structure)：具有大幅度小波系数在小波树上沿着尺度方向传播，同时这些小波系数构成一棵子树，如图 5-1(c)与 5-1(d)所示。

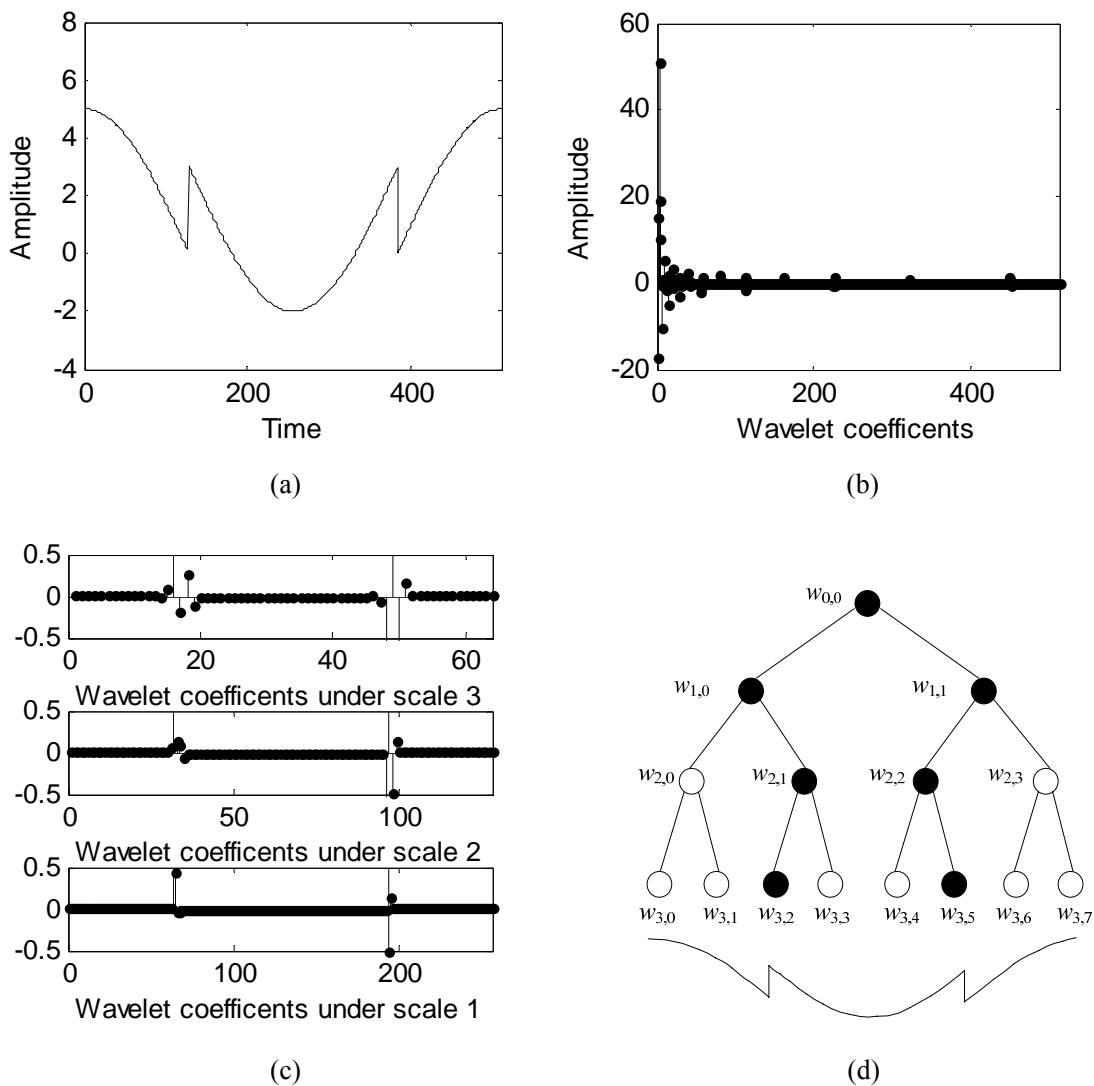


图 5-1 (a)分段连续信号，(b)小波变换系数，(c)小波系数多尺度表示，

(d)二进制小波树，黑点为具有大幅度小波系数，白点为小幅度小波系数

由图 5-1(b)所示，小波变换系数是可压缩的，考察图 5-1(c)多尺度小波系数，

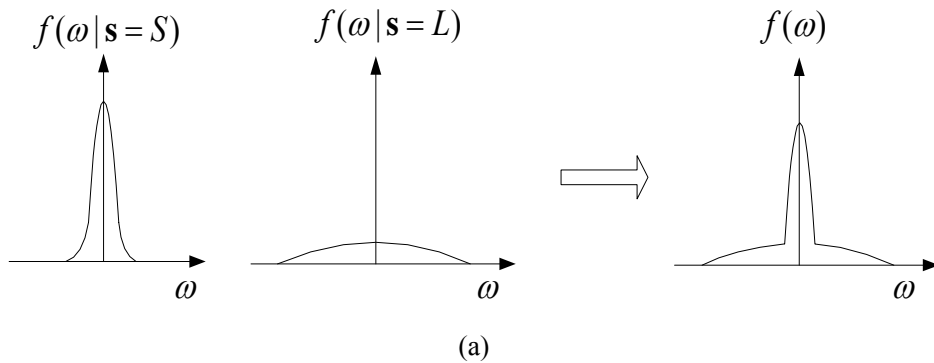
随着分析尺度变细(j 的值越大, 尺度越粗, j 的取值越小, 尺度越细), 具有大幅度值的小波系数数量变少, 具有稀疏特性, 这为压缩感知理论在小波域的应用提供了先验条件。

多尺度小波分析的小波系数在尺度 j 上的数量为 $N_j = N / 2^j$, 当前尺度上的小波系数数量是上一级尺度的小波系数数量的 2 倍, 同时是下一级尺度上的小波系数数量的 1/2, 将这些系数由粗尺度至细尺度的上下节点连接起来, 这将构成一棵二进制树, 如图 5-1(d)所示, 统计分析表明, 具有大幅度值的小波系数还构成一棵子树。我们将处于粗尺度节点称为父节点, 将紧邻的下一级尺度上的节点称为子节点, 由图可知, 每个父节点与 2 个子节点相连, 同时它也是上一尺度节点的子节点。

5.1.2 概率信号模型

由 5.1.1 小节分析可知, 相比稀疏性, 小波系数的统计结构更能反映小波系数的特征。

对于大多数实信号, 其小波变换具有稀疏特性。这就意味着绝大多数小波系数的幅度非常小, 信号的能量主要集中在少量的系数上。因此, 信号小波系数 ω 的概率密度函数(probability density function, pdf)可以描述为尖峰长尾的非高斯概率密度, 且概率密度函数的中心点为 $\omega = 0$ 。在文献[130]中, M. S. Crouse 等人采用混合高斯模型对小波系数的概率特征进行了准确描述, 混合高斯概率模型分为两部分: 一部分对具有较大幅度的小波系数建模, 该模型具有大的方差; 另一部分对具有小幅度值的小波系数进行建模, 该模型具有小的方差值。如图 5-2 所示为混合高斯概率模型构成原理, 图 5-2(b)所示为 1 维实信号离散小波变换(Daubechies-8)系数幅度统计图, 对比图 5-2(b)可以发现, 混合高斯信号模型能够准确地描述实信号的小波变换系数的统计特征。



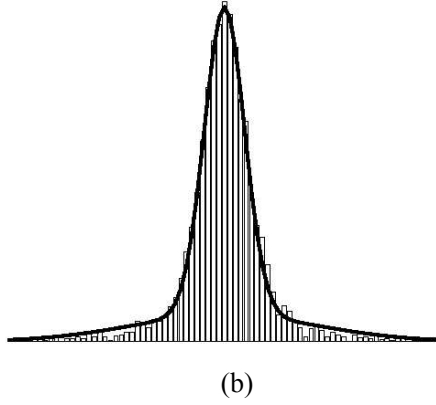


图 5-2(a) 2-状态混合高斯信号模型构成原理，
(b) 1 维实信号离散小波变换系数统计分布柱状图

针对小波系数的概率分布特征，隐马尔可夫树(Hidden Markov Tree, HMM) 模型提供了一种模型框架^[131]，这种模型框架能够准确地获取小波系数的统计结构。HMM 模型设置每个小波系数的概率密度函数为关于一个隐二进制状态的混合高斯概率密度，隐二进制状态决定了小波系数取值为大值或小值。为了区分这两种状态，设置与小波系数为 $\theta(n)$ 相关联的隐状态 $\mathbf{s}(n) \in \{S, L\}$ ， $\mathbf{s}(n)$ 的取值决定采用混合高斯概率模型哪一种模型来产生信号 $\theta(n)$ 。图 5-2(a)混合高斯概率模型的数学表示为：

$$\begin{aligned} \text{M1: } f(\theta(n)|\mathbf{s}(n)=S) &= N(0, \sigma_{S,n}^2) \\ \text{M2: } f(\theta(n)|\mathbf{s}(n)=L) &= N(0, \sigma_{L,n}^2) \end{aligned} \quad (5-3)$$

式中 $\sigma_{L,n}^2 > \sigma_{S,n}^2$ ，为了产生混合概率模型，设置： $P(\mathbf{s}(n)=S) = p_n^S$ ， $P(\mathbf{s}(n)=L) = p_n^L$ ，其中 $p_n^S + p_n^L = 1$ 。

采用与小波系数状态相关联的马尔可夫模型能够准确地对小波系数幅度的持续性建模，在马尔可夫树中，系数 $\theta(n)$ 的状态 $\mathbf{s}(n)$ 只受它的父节点 $P(n)$ 的状态 $\mathbf{s}(P(n))$ 的影响。因此，马尔可夫模型完全由处于尺度 $1 < j \leq J$ 上的小波系数 $\theta(n)$ 的状态转换矩阵决定：

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} p_n^{S \rightarrow S} & p_n^{S \rightarrow L} \\ p_n^{L \rightarrow S} & p_n^{L \rightarrow L} \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

式中 $p_n^{S \rightarrow L}$ 为小波系数状态由 $\mathbf{s}(n)=S$ 变为 $\mathbf{s}(n)=L$ 的概率。

小波系数持续性表明： $p_n^{S \rightarrow S}$ 与 $p_n^{L \rightarrow L}$ 显著大于 $p_n^{S \rightarrow L}$ 与 $p_n^{L \rightarrow S}$ 。如果在最粗尺度小波系数的隐状态为大值和小值的概率分别为 p_1^S 与 p_1^L ，那么任意隐状态的概率分布可以通过如下递归运算得到：

$$P(\mathbf{s}(n)=S) = p_{P(n)}^S p_n^{S \rightarrow L} + p_{P(n)}^L p_n^{L \rightarrow L} \quad (5-5)$$

HMM 模型参数包括每个小波系数 $\theta(n)$ 的：隐状态的概率 $\{p_1^S, p_1^L\}$ 、状态转移矩阵 \mathbf{T}_n 、以及高斯分布的方差 $\{\sigma_{L,n}^2, \sigma_{S,n}^2\}$ 。为了简化模型，设置在同一尺度上所有小波系数的与系数相关参数相等，也就是说，新的模型参数为 \mathbf{T}_j 和 $\{\sigma_{L,j}^2, \sigma_{S,j}^2\}$, $1 < j \leq J$ 。

为了促使小波系数幅度随着分析尺度变细而衰减，HMM 模型中方差 $\sigma_{L,j}^2$ 和 $\sigma_{S,j}^2$ 呈指数衰减^[131]:

$$\begin{aligned} \sigma_{L,j}^2 &= C_{\sigma_L} 2^{-j\alpha_L} \\ \sigma_{S,j}^2 &= C_{\sigma_S} 2^{-j\alpha_S} \end{aligned} \quad (5-6)$$

由于信号中断点处对应的小波系数比平滑部分对应小波系数的幅度衰减满，所以 $\alpha_S \geq \alpha_L$ 。

一般情况下，HMM 模型需要反映任何大幅度值父节点只包含一个大幅度值的子节点，因此如果父节点状态 $\mathbf{s}(P(n)) = L$ ，那么当前节点 $\mathbf{s}(n) = L$ 的概率大约为 0.5，转换矩阵的表达式可设置为：

$$\begin{aligned} p_j^{L \rightarrow L} &= \frac{1}{2} + C_{LL} 2^{-j\gamma_L}, p_j^{L \rightarrow S} = \frac{1}{2} + C_{LS} 2^{-j\gamma_L} \\ p_j^{S \rightarrow S} &= 1 - C_{SS} 2^{-j\gamma_S}, p_j^{S \rightarrow L} = C_{SS} 2^{-j\gamma_S} \end{aligned} \quad (5-7)$$

可以采用最大似然估计(Maximum Likelihood Estimation, MLE)算法对所有参数进行估计得到：

$$\Pi_{ML} = \arg \max_{\Pi} f(\theta | \Pi) \quad (5-8)$$

其中 $\Pi = \{p_1^S, p_1^L, \alpha_S, \alpha_L, C_{\sigma_L}, C_{\sigma_S}, \gamma_S, \gamma_L, C_{LL}, C_{SS}\}$ 。最大期望值(Expectation-Maximization, EM)算法可以有效对(5-8)式进行估计，我们可以利用 Viterbi 算法获取状态概率 $P(\mathbf{s}(n) = S | \theta, \Pi)$ ，给定小波系数的状态概率取决于小波树上父辈节点的状态和系数值。

在压缩采样信号重构中，利用小波系数的这种结构化特征可以提高信号重构效率，减少准确重构原始信号所需的测量值。在后续两节中，我们分别介绍两种小波域压缩采样信号重构算法：基于隐马尔可夫树的迭代加权最小 ℓ_1 范数信号重构算法和基于倒树结构的正交匹配追踪算法。

5.2 隐马尔可夫树小波域压缩采样重构

当采用最小 ℓ_1 范数对压缩采样信号重构的时候，我们是对信号的幅度进行最小化；相反，最小 ℓ_0 范数压缩采样信号重构是对信号向量的非零项进行最小化。最小 ℓ_0 范数不受信号幅度的影响，与最小 ℓ_1 范数算法相比，最小 ℓ_0 范数算法进行信号重构所需的测量值数量更少。

E. Candès 等人^[120]对最小 ℓ_1 范数的惩罚函数进行加权，改进后的算法能够矫正最小 ℓ_1 范数算法与最小 ℓ_0 范数算法惩罚函数之间非平衡性。最小化加权 ℓ_1 范数的目的是使惩罚函数 $\|\mathbf{W}\boldsymbol{\theta}\|_1$ 最小， \mathbf{W} 为加权对角矩阵，其对角元素 $\mathbf{W}_{n,n}$ 正比于 $1/\theta(n)$ ， $\boldsymbol{\theta}$ 待重构信号，这种构造惩罚函数的方法能够增强惩罚函数与信号幅度之间的独立性，减少信号幅度对算法的影响。虽然不能直接采用未知向量 $\boldsymbol{\theta}$ 构造加权系数矩阵，但是可以首先通过求解一个未加权的最小 ℓ_1 范数优化问题得到初始值 $\boldsymbol{\theta}_0$ ，然后在后续迭代过程中采用前一次获得的值构造加权矩阵，算法如下：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{W}_i \boldsymbol{\theta}\|_1 \quad s.t. \quad \mathbf{y} = \Phi \Psi \boldsymbol{\theta} \quad (5-9)$$

式中 \mathbf{W}_i 对角加权矩阵，其输入元素为：

$$\mathbf{W}_i(n, n) = \left(\left| \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}(n) \right| + \varepsilon \right)^{-1} \quad (5-10)$$

式中 $1 \leq n \leq N$ ， ε 为规划常数， $\varepsilon > 0$ ，设置规划常数是为了避免当 $\boldsymbol{\theta}$ 的某个输入为零时 \mathbf{W} 的输入出现无穷大的情况。

迭代加权算法能够能够提供灵活的惩罚因子，Duarte 等人^[131]在对多尺度小波系数统计特性分析的基础上，提出了一种基于隐马尔可夫树模型的迭代加权最小 ℓ_1 范数(Hidden Markov Tree-Based Weights for IRWL1, HMT+IRWL1)小波域压缩采样信号重构算法。

HMT+IRWL1 算法提供了一种新的加权方法，在压缩采样信号重构中，HMT+IRWL1 算法通过 HMT 模型加强小波系数结构化。HMT+IRWL1 算法的加权规则如下：

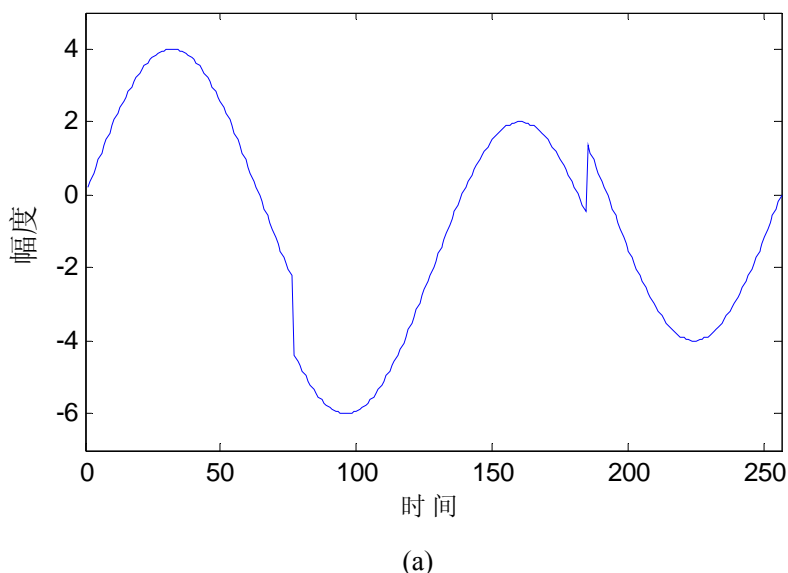
$$\mathbf{W}_i(n, n) = \left(p\left(\mathbf{s}(n) = L \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}, \Pi\right) + \varepsilon \right)^{-q} \quad (5-11)$$

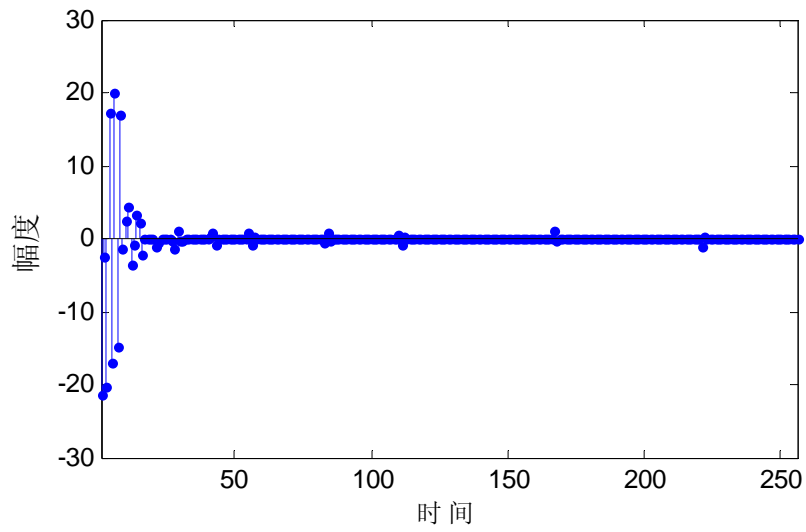
式中 Π 定义如(5-8)式所示， q 为用来调整惩罚强度的常数。在小波系数的当前估计过程中，所获取的概率为系数相关联的隐状态为大幅度值时的概率，在HMT+IRWL1 算法中，对该系数施加一个与概率成反比的权值。HMT+IRWL1 算

法的出发点是为了对那些具有大幅度值同时具有小的似然概率的系数进行抑制，这些系数通常是重构误差的主要来源。

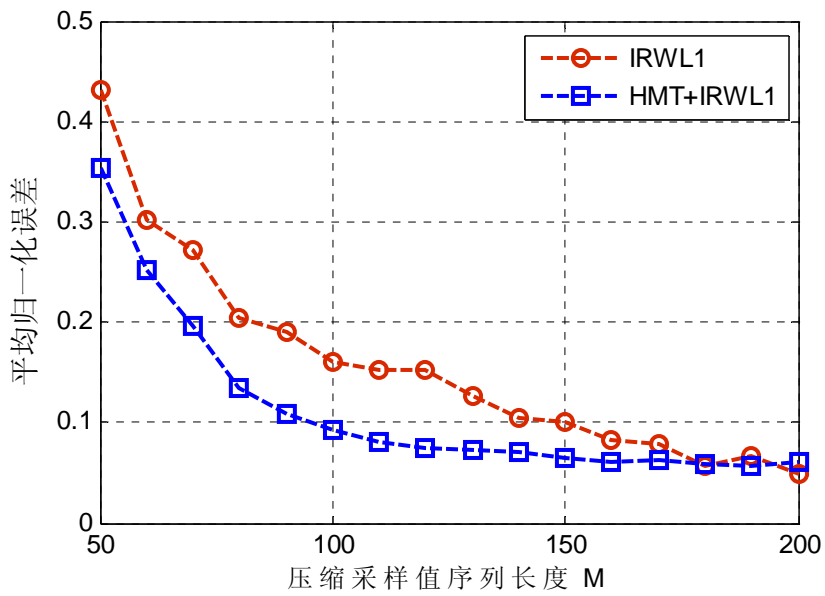
HMT+IRWL1 算法首先需要对模型进行训练，通过 EM 算法求解(5-8)式实现对模型参数的估计，通过标准 IRWL1 算法获取信号初始近似值 $\hat{\theta}_0$ 。其次，通过 Viterbi 算法计算 $\hat{\theta}_{i-1}$ 的状态概率，根据获得的状态概率更新权值矩阵，采用权值矩阵所构成的新的惩罚函数重构原始信号。如果当前重构信号满足精度要求，则停止算法，否则以当前的重构信号计算新的权值，如此反复迭代。

图 5-3(c)所示为 HMT+IRWL1 算法与 IRWL1 算法信号重构性能比较示意图。原始信号如图 5-3(a)所示的分段连续信号，其离散小波变换系数如图 5-3(b)所示，由图可知，信号的小波系数绝大多数幅度值都很小，信号的能量主要集中在少量系数上，信号具有可压缩稀疏性，可以通过重构算法从少量随机采样值中对信号进行重构。采用满足独立同分布随机高斯变量所构造压缩测量矩阵对信号进行随机采样，稀疏表示基矩阵采用 Daubechies-8 小波函数构造。随机测量值长度由 50 至 200 之间以 10 的步进递增，在每个压缩采样序列长度下各进行 100 次采样重构实验。HMT+IRWL1 算法与 IRWL1 算法各进行 10 次迭代，由对比示意图 5-3(c)可知，HMT+IRWL1 算法重构性能优于 IRWL1 算法。





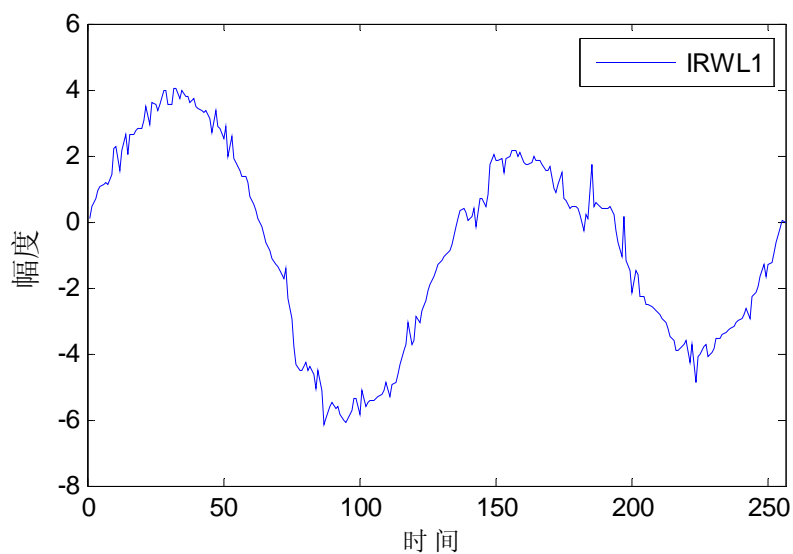
(b)



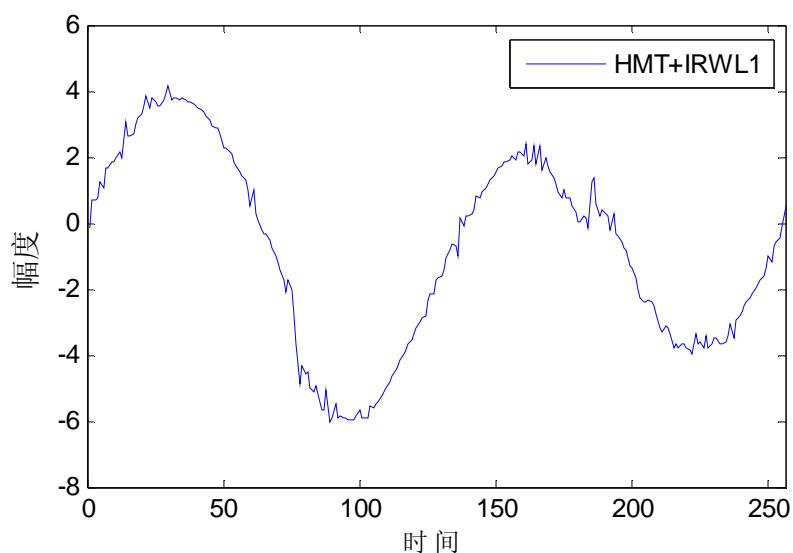
(c)

图 5-3 (a) 原始信号, (b) 信号离散小波变换系数,
(c) HMT+IRWL1 算法与 IRWL1 算法信号重构性能对比

图 5-4 所示为图 5-3(a)所示实验信号在采样序列长度为 150 时的重构波形对比示意图, HMT+IRWL1 算法与 IRWL1 算法均进行 10 迭代。其中 IRWL1 算法重构信号的均方误差(Mean Square Error, MSE)为 $MSE = 0.11$, HMT+IRWL1 算法重构信号的均方误差为 $MSE = 0.07$ 。



(a)



(b)

图 5-4 (a) IRWL1 重构信号波形 $MSE = 0.11$,

(b) HMT+IRWL1 重构信号波形 $MSE=0.07$

虽然 HMT+IRWL1 算法利用小波系数的统计特性对 IRWL1 算法进行了改进，提高了信号的重构精度，然而它同样是基于凸优化的方法，计算复杂。同时由于每次迭代运算过程中需要 HMT 模型进行训练，对模型参数进行估计，以获取最新的权值矩阵，这将极大地增加计算成本，算法运行效率低^[132]。针对小波系数的统计特征，我们对基于快速贪婪追踪的正交匹配追踪算法进行改进，提出了基于小

波系数倒树结构的正交匹配追踪算法。

5.3 小波系数倒树结构正交匹配追踪算法

在压缩采样信号重构中，传统贪婪算法利用信号的稀疏性实现对信号的快速重构，然而这些算法对小波系数的统计特性均未加考虑。Chinh La 等人^[133-134]首次提出了基于小波树的正交匹配追踪(Tree based OMP, TOMP)算法，TOMP 算法结合小波系数的稀疏特性和多尺度分析的统计特性对 OMP 算法进行改进，提高信号重构精度。本节对多尺度小波系数的统计特性做了进一步分析，得出在二进制小波树中，具有大幅度值的小波系数由粗尺度到细尺度方向构成一棵倒子树，我们将小波系数的这种特性结合到小波域压缩采样信号重构中，对 OMP 算法做了进一步改进，提出了基于倒树结构的正交匹配追踪(Upside-Down Tree-based OMP, UDT-OMP)算法。

5.3.1 小波树正交匹配追踪算法

TOMP 算法的核心思想是从压缩感知矩阵 \mathbf{A} 中选取与信号 \mathbf{x} 小波二进制树中具有大幅度节点相关联的列指标。设置集合 Λ 为包含 \mathbf{A} 中所有列 $\{a_i\}$ 指标的指标集， Λ_k 为前 k 次选择列向量所构成的指标集。TOMP 算法与 OMP 算法类似，通过计算当前残差与剩余列向量的内积来选取列指标。在第 k 次迭代过程中，TOMP 算法对压缩感知矩阵列指标选取过程如下：

$$c_i^{(k)} = \left| \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_i \rangle \right|, \quad i \in \Lambda \setminus \Lambda_{k-1} \quad (5-12)$$

$$c_i^{*(k)} = \max \left\{ c_i^{(k)} : i \in \Lambda \setminus \Lambda_{k-1} \right\} \quad (5-13)$$

在以上所获取的内积中，TOMP 算法将搜索目标限制在以下子集中：

$$S_k = \left\{ i : c_i^{(k)} \geq \alpha c_i^{*(k)} \right\} \quad (5-14)$$

式中 α 为常数， $0 < \alpha < 1$ 。

由第 5.1 节对小波系数统计特性的分析可知，在二进制小波树中，如果当前尺度上的小波系数幅度为大值，那么它的所有父辈节点幅度为大值的概率很大，因此这些父辈节点都应该被选中，以 F_i 表示 \mathbf{a}_i 与其所有父辈节点对应列所构成的指标集。

TOMP 算法从候选指标集 S_k 与 F_i 中选择一个列指标，列指标选择的准则为能

够最大程度地减小残差,

$$i_k = \arg \min_{i \in S_k} \left\{ \left\| \mathbf{y} - P_{\text{span}\{\mathbf{a}_l : l \in \Lambda_{k-1} \cup F_i\}} \mathbf{y} \right\|_2 \right\} \quad (5-15)$$

将所选列指标 i_k 及其它的所有父辈节点所构成的子集 F_{i_k} 添加到支撑集 Λ_k 中:

$$\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup F_{i_k} \quad (5-16)$$

将测量值中去除其在由 Λ_k 所构成的空间上的投影, 从而得到更新后的残差:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{y} - P_{\text{span}\{\mathbf{a}_l : l \in \Lambda_k\}} \mathbf{y} \quad (5-17)$$

与 OMP 算法类似, TOMP 算法也是采用 Gram-Schmidt 方法对最新选择的列进行正交化。(5-14)式至(5-17)式是 TOMP 算法与 OMP 算法的主要区别之处。在每次迭代过程中, OMP 算法只会依次选择剩余列向量与当前残差最相关的一个列指标添加到支撑集中, 与 OMP 算法不同, TOMP 算法依次选择一组列指标添加到指标集中, 这与 OMP 算法和 ROMP 算法之间的关系类似, 其选择方式主要是根据小波系数具有树状结构的统计特性, 即: 当前节点小波系数具有大的幅度值, 那么其所有父辈节点也具有大的幅度值。因此我们可以得出: 由于在列在标选择中, TOMP 算法考虑了更多的信息, 所以 TOMP 算法与 OMP 算法相比具有更好的鲁棒性。

TOMP 算法主要实现步骤如下:

输入: $M \times N$ 维压缩采样矩阵 Φ , $M < N$,

$N \times N$ 维离散小波逆变换矩阵 Ψ ,

长度为 M 的压缩测量序列 \mathbf{y} 。

输出: 长度为 N 的稀疏重构向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, 其中原始信号 $\mathbf{x} = \Psi \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{y} = \Phi \Psi \boldsymbol{\theta}$ 。

初始化: 压缩感知矩阵 $\mathbf{A} = \Phi \Psi$,

初始化残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$,

初始化选择指标集 $\Lambda_0 = \emptyset$,

构造包含 \mathbf{A} 中所有列指标的指标集 Λ ,

设置迭代计数器 $k = 1$ 。

循环执行以下步骤至满足停止条件:

Step 1: 搜索 Λ 中与当前残差具有较大内积的列指标:

$$c_i^{(k)} = \left| \left\langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_i \right\rangle \right|, \quad i \in \Lambda \setminus \Lambda_{k-1}$$

$$c_i^{*(k)} = \max \left\{ c_i^{(k)} : i \in \Lambda \setminus \Lambda_{k-1} \right\}$$

$$S_k = \{i: c_i^{(k)} \geq \alpha c_i^{*(k)}\}$$

Step 2: 对于 S_k 中的每个元素 i , 构造包含 i 与其所有的父辈节点对应的列指标的集合 F_i 。

Step 3: 搜索候选子集 S_k 中的元素 i , 使得观测值在 i 对应集合 F_i 与支撑集 Λ_{k-1} 所张成空间上的投影最大。

$$i_k = \arg \min_{i \in S_k} \left\{ \left\| \mathbf{y} - P_{\text{span}\{\mathbf{a}_l: l \in \Lambda_{k-1} \cup F_i\}} \mathbf{y} \right\|_2 \right\}$$

Step 4: 更新支撑集 $\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup F_{i_k}$

Step 5: 更新残差 $\mathbf{r}_k = \mathbf{y} - P_{\text{span}\{\mathbf{a}_l: l \in \Lambda_k\}} \mathbf{y}$

停止条件可以设置为迭代次数达到一定次数或残差在满足预设重构误差要求。 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 中非零元素的由支撑集 Λ_k 所指示, 其幅度值满足一下表达式:

$$P_{\text{span}\{\mathbf{a}_l: l \in \Lambda_k\}} \mathbf{y} = \sum_{\lambda \in \Lambda_k} \hat{\theta}_\lambda \mathbf{a}_\lambda \quad (5-18)$$

式中 \mathbf{a}_λ 为 \mathbf{A} 中的第 λ 个列向量。

5.3.2 基于小波系数倒树正交匹配追踪算法

相比 OMP 算法, TOMP 算法在每次列指标搜索中, 根据小波系数所构成的二进制树来加大了考察范围。在多尺度小波分析中, 通过图 5-1(c)我们可以发现, 具有大幅度值的小波系数构成一棵倒树(在传统二进制小波树中, 从粗尺度向细尺度方向考察)。在 OMP 算法中, 通过对倒树上节点所对应的列向量进行加权与残差求内积, 对 OMP 算法进行改进, 我们将这种改进算法称之为基于倒树结构的正交匹配追踪(Upside-Down Tree-based OMP, UDT-OMP)算法^[135]。

在 UDT-OMP 算法中, 压缩感知矩阵 $\mathbf{A} = \Phi\Psi \in \mathbf{C}^{M \times N}$, 其中 Φ 为压缩测量矩阵, Ψ 为离散小波逆变换矩阵, 压缩测量值 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$, 算法的目标是从 \mathbf{y} 中重构小波系数向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, 并通过离散小波逆变换得到原始信号 $\hat{\mathbf{x}}$ 。

与 OMP 算法类似, UDT-OMP 也是对 \mathbf{A} 中列向量与残差的內积进行考察, 不同之处在于 UDT-OMP 算法对处于倒树上节点所对应的列向量进行了加权。

在(5-2)式中, 可以发现小波变换系数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 依次由尺度系数和小波系数构成, 而通常情况下, 尺度系数的幅度都比较大, 如图 5-1(c)的前端。在 UDT-OMP 算法中, 我们对尺度系数和小波系数进行分别重构,

$$\theta = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \quad (5-19)$$

\boldsymbol{v} 与 $\boldsymbol{\omega}$ 分别为尺度系数和小波系数。在 UDT-OMP 算法中，默认所有尺度系数 \boldsymbol{v} 所对应的列指标选中，算法只需要对小波系数 $\boldsymbol{\omega}$ 进行重构。因此 UDT-OMP 算法所需要解决的问题为：

$$\min \|\boldsymbol{\omega}\|_1 \quad s.t. \quad \boldsymbol{y} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \quad (5-20)$$

UDT-OMP 算法分为两步，首先将尺度系数 \boldsymbol{v} 所对应的列指标添加到支撑集中，然后对小波系数 $\boldsymbol{\omega}$ 所对应的列向量进行考察。根据小波变换系数构成的方式，尺度系数 \boldsymbol{v} 在压缩感知矩阵中对应的列向量是确定的，因此可以对支撑集初始化为：

$$\Lambda_0 = \mathbf{A} \{\text{所有尺度系数对应的列向量}\} \quad (5-21)$$

集合 Λ_0 指示的列向量依次采用 Gram-Schmidt 方法正交化，并将这些正交化以后的向量存在矩阵 \mathbf{U}_0 中。残差初始值为：

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{y} - P_{\text{span}\{\Lambda_0\}} \boldsymbol{y} \quad (5-22)$$

其次，对具有统计特性的小波系数进行重构。设置 $\{S\}_{k=0}^K$ 为候选子集，其输入为 1 的权值构成，在考察向量与残差内积的时候，对权值所在的列向量以该权值进行加权。在初始迭代运算时，设置 S_0 的所有输入为 1，初始化迭代计数器 $k=1$ 。

在第一次迭代时，UDT-OMP 算法对当前残差在 \mathbf{A} 中小波系数对应的所有列向量的加权投影进行考察：

$$\alpha_i^k = S_{k-1}(i) \cdot \left| \langle \boldsymbol{r}_{k-1}, \boldsymbol{a}_i \rangle \right| \quad (5-23)$$

$$\lambda^k = \arg \max_i \{ \alpha_i^k \} \quad (5-24)$$

根据最大投影位置 i ，构造第 k 个具有深度为 l 的倒树 T_k (l 为大于 1 的整数， l 的取值必须小于当前尺度与总尺度的差值)。在细尺度上每 4 个连续的节点与最近的粗尺度上的 2 个节点相连，在其它尺度上依次类推至所构成的倒树深度为 l 。例如在 5-1(c)中，如果 $\omega_{3,2}$ 所对应列向量具有最大投影值，与其 4 个连续相邻节点 $\omega_{3,0}$ ， $\omega_{3,1}$ ， $\omega_{3,2}$ ， $\omega_{3,3}$ 相连的节点 $\omega_{2,0}$ ， $\omega_{2,1}$ 构成一棵倒树， $\omega_{2,0}$ ， $\omega_{2,1}$ 为子节点，且 $\omega_{1,0}$ ， $\omega_{1,1}$ 为下一级子节点。 $S_k = S_{k-1}$ ，且将倒树上的节点所对应的列指标构成权值集合：

$$S_k(i) = \{c : i \in T_k\} \quad (5-25)$$

由于 UDT-OMP 算法需要增大倒树上节点对应的列选中的概率, 所以 c 应该为大于 1 的常数。将最新获得的列指标添加到支撑集 Λ_k 中,

$$\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup \lambda^k \quad (5-26)$$

$$U_k = P_{GS}(\Lambda_k) \quad (5-27)$$

式 $P_{GS}(\cdot)$ 为 Gram-Schmidt 正交化算子。残差做如下更新:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{y} - P_{\text{span}\{\Lambda_k\}} \mathbf{y} \quad (5-28)$$

(5-23)式至(5-28)式进行 K 次迭代运算或当 \mathbf{r}_k 满足误差范围时停止算法。重构小波系数具有如下表示形式:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = U_k \mathbf{y} \quad (5-29)$$

由 $\boldsymbol{\theta}$ 进行离散小波逆变换得到原始信号:

$$\hat{\mathbf{x}} = \Psi \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (5-30)$$

UDT-OMP 算法主要实现步骤如下:

输入: $M \times N$ 维压缩采样矩阵 Φ , $M < N$,

$N \times N$ 维离散小波逆变换矩阵 Ψ ,

长度为 M 的压缩测量序列 \mathbf{y} ,

离散小波变换多尺度分析尺度 J ,

倒树深度 l , 迭代次数 K , 以及权值 c 。

输出: 长度为 N 的稀疏重构向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, 其中原始信号 $\mathbf{x} = \Psi \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{y} = \Phi \Psi \boldsymbol{\theta}$ 。

初始化: 压缩感知矩阵 $\mathbf{A} = \Phi \Psi$,

初始化选择指标集 $\Lambda_0 = \{1, 2, \dots, N_J (= N / 2^J)\}$, 包含所有尺度系数对应列指标,

初始化残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y} - P_{\text{span}\{\Lambda_0\}} \mathbf{y}$,

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = \{0\}$, 以及设置迭代计数器 $k = 1$ 。

循环执行以下步骤重构小波系数:

Step 1: $k = k + 1$

Step 2: $\theta_i^{(k)} = S_{k-1}(i) \cdot |\langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{a}_i \rangle|$

Step 3: $\lambda^k = \arg \max_i \{\theta_i^k\}, \quad i \in \text{supp}\{\theta\} \setminus \Lambda_{k-1}$

Step 4: 构造倒树 T_k

$$S_k = S_{k-1}$$

$$S_k(i) = \{c: i \in T_k\}$$

Step 5: 更新支撑集 $\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup \lambda^k$

Step 6: 对选中列向量正交化 $U_k = P_{GS}\{\Lambda_k\}$

Step 7: 更新残差 $r_k = y - P_{\text{span}\{\Lambda_k\}}y$

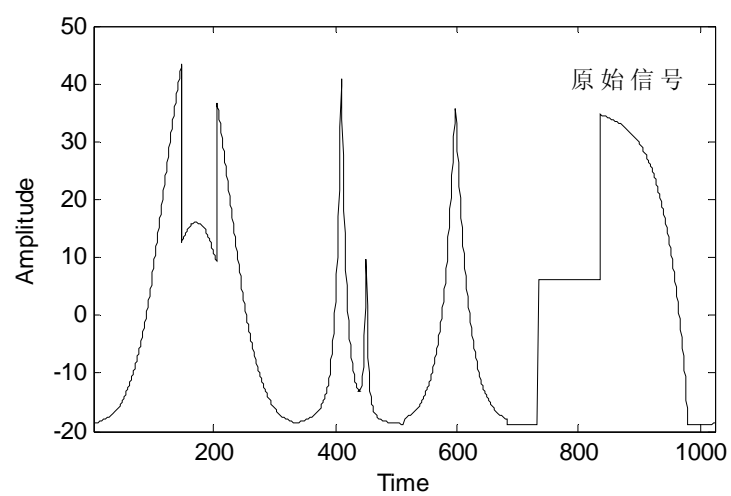
循环执行 **Step 1–Step 7** 至迭代次数或残差满足重构误差要求。重构小波变换系数为 $\hat{\theta} = U_k y$ ，原始信号为 $\hat{x} = \Psi \hat{\theta}$ 。

算法运行时间主要由内积运算产生，UDT-OMP 算法与 OMP 算法效率相当，而 TOMP 算法在每次迭代过程中进行了两步分内积运算(包括：残差在每个列向量上的投影和残差在候选支撑集所指示的每个列向量上的投影)，从计算成本考虑，UDT-OMP 算法优于 TOMP 算法。

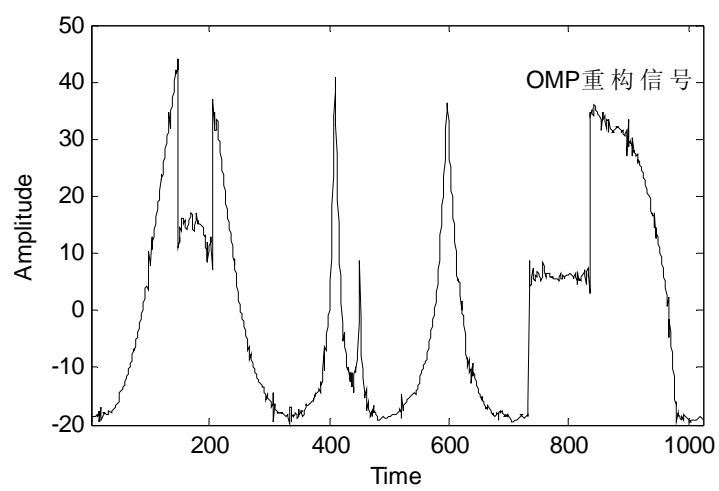
为了检验 UDT-OMP 算法对小波域稀疏采样信号重构的可行性和鲁棒性，我们将 UDT-OMP 算法和 OMP 与 TOMP 算法进行了对比实验。实验仿真信号采用长度 $N = 1024$ 的分段连续型信号，采用尺度 $J = 4$ 的 Daubechies-8 小波函数对测试信号进行稀疏化，构造的小波倒树深度 $l = 2$ ，权值 $c = e$ (自然数)，压缩采样矩阵输入满足独立高斯同分布。

实验一，对序列长度 $M = 300$ 的压缩采样值进行重构。图 5-5 所示为分别采用 OMP，TOMP 和 UDT-OMP 算法的重构信号。OMP 算法重构信号的信噪比 $\text{SNR} = 27.63 \text{ dB}$ ，TOMP 算法重构信号的信噪比 $\text{SNR} = 34.57 \text{ dB}$ ，而采用 UDT-OMP 算法重构信号的信噪比达到 $\text{SNR} = 39.62 \text{ dB}$ 。在本实验中，UDT-OMP 算法重构信号信噪比显著高于 OMP 与 TOMP 算法。

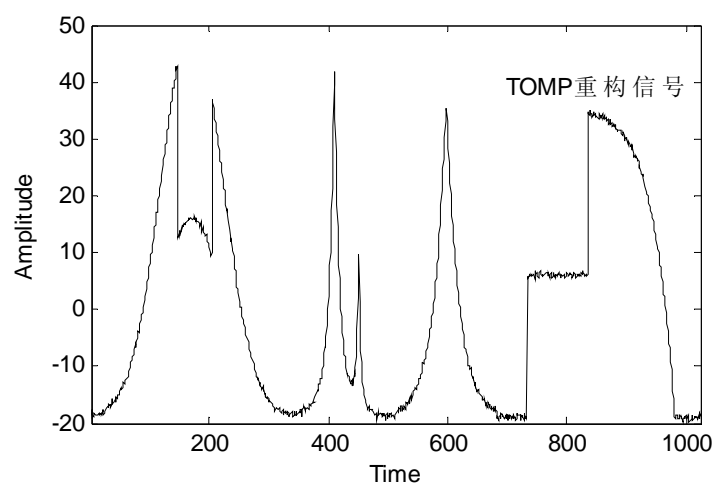
实验二，对不同长度的压缩采样信号分别采用 OMP，TOMP 以及 UDT-OMP 算法进行重构。采样值序列长度从 100 至 400 以 30 为步进递增，每组序列长度进行 100 次实验，图 5-6 所示为重构信号平均信噪比与序列长度 M 的关系示意图。



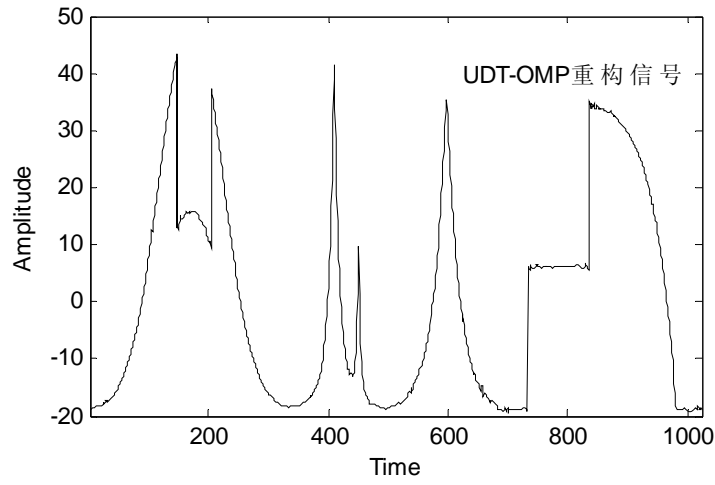
(a)



(b)



(c)



(d)

图 5-5 (a) 原始信号, (b) OMP 重构信号 SNR = 27.63 dB,
(c) TOMP 重构信号 SNR = 34.57 dB, (d) UDT-OMP 重构信号 SNR = 39.62 dB

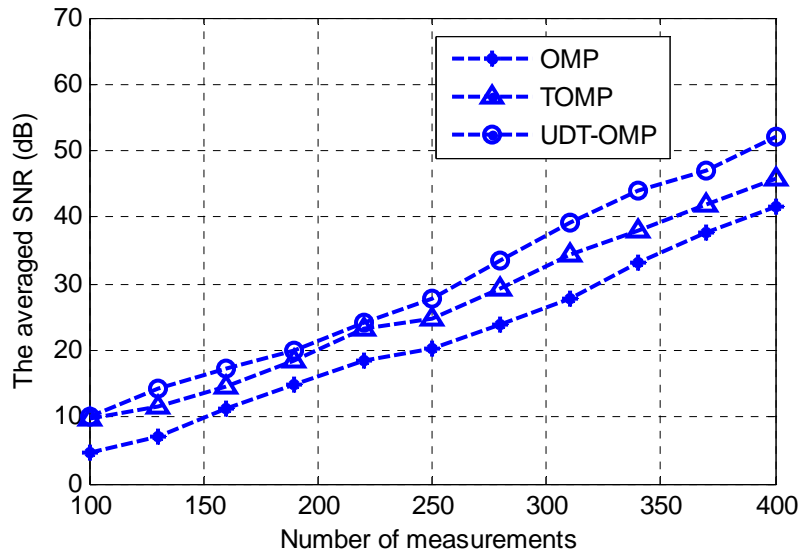


图 5-6 重构信号平均信噪比与压缩采样信号序列长度关系

5.4 本章小结

本章针对小波域的压缩采样信号重构方法进行了研究。在传统压缩采样信号重构方法中只考虑了信号的稀疏特性,而对信号的其它结构化特征未做任何考虑。然而,很多信号不仅具有稀疏性,同时还具有其它结构化或统计特征,如分段连

续型信号的离散小波变换不仅具有可压缩的稀疏特征，同时它的小波系数在采用多尺度分析的时候还构成二进制树。信号的断点处的小波系数具有大幅度值，并且这些系数在每个尺度上出现的相对位置基本相同，在二进制树上，这些具有大幅度值的小波系数还构成一棵连接的子树。

针对小波系数的这种统计特征，Chinh La 等人首先对 OMP 压缩采样信号重构算法进行了改进，提出了针对小波域的压缩采样信号重构方法：TOMP 算法。Duarte 等人也提出了适用于小波域的 HMT+IRWL1 算法，然而，HMT+IRWL1 是基于凸优化算法，计算成本高，信号重构效率低。本章在对多尺度分析小波系数研究的基础上提出了基于倒树结构的小波域压缩采样信号重构算法：UDT-OMP 算法。UDT-OMP 算法通过对位于倒树上的节点所对应的列向量进行加权求内积，对信号的稀疏化进行了加强，在计算效率方面，由于 UDT-OMP 算法没有带来额外的内积运算，它具有与 OMP 算法相当的计算效率。通过实验验证了 UDT-OMP 算法的可行性，得出在小波域稀疏的压缩信号重构中，UDT-OMP 算法能够得到更加准确的重构信号。

第六章 结束语

6.1 论文工作总结

模拟信号采样作为数字系统的前端，是数字信号处理的基础，由于信号采样技术受到 Shannon-Nyquist 采样定理的限制，使其成为数字系统发展的瓶颈。压缩感知理论的出现突破了 Shannon-Nyquist 采样定理对稀疏信号采样的限制，在对数字信号的压缩采样中，国内外学者进行了大量研究，并取得了一定成果，而对模拟信号压缩采样的研究还处于起步阶段。本文在对压缩感知理论理解的基础上，对压缩感知理论在稀疏模拟信号采样中的应用研究进行了初步尝试。针对采样模型和信号重构算法进行了深入研究，并得到一些新的，有实际应用价值的成果。本文的主要成果有：

- 1、信号稀疏性与压缩感知矩阵的非相关性是压缩感知理论的两个重要先验条件。选择合适的稀疏表示基对信号进行稀疏表示是压缩感知理论应用的前提，只有选择了合适的稀疏表示基，才能够使信号经变换后最稀疏，准确重构原始信号所需的压缩采样点最少。针对常见信号，给出了相应的稀疏表示基。非相干性是压缩感知理论实现的条件，只有当压缩测量矩阵与稀疏表示基满足一定条件时，才能重构原始信号，本文介绍了一种易于操作的判断准则，为稀疏模拟信号压缩采样模型的实现奠定了基础。

- 2、压缩感知理论作为一种全新的信号获取方法，其信号重构方法同样值得传统非均匀采样信号重构算法借鉴。RES 技术所处理信号为周期信号，利用采样脉冲与被测信号之间的相位非相关性，将随机采样值按采样相对位置排序重构信号。这种以时间排序的随机等效采样信号重构方法需要大量采样点才能实现，同时由于采样脉冲与被测信号相位关系存在确定性，这将显著降低 RES 采样效率。由于 RES 采样信号为周期性，在频域具有稀疏性，这为压缩感知理论的应用提供了先验条件。在对非均匀随机采样值与均匀重构信号关系分析的基础上，提出了基于 Whittaker-Shannon 插值公式的压缩测量矩阵，该矩阵与频域稀疏表示基之间具有非相关性。本文提出了一种 CS-RES 信号重构方法，通过实验验证了该方法优于基于时间排序的传统 RES 信号重构方法，同时也为压缩感知理论在其它非均匀采样

信号重构问题中的应用提供了新的思路。

3、以随机解调为基础，提出并行压缩采样模型与分段式并行压缩采样模型实现方法，并在系统工作原理分析的基础上给出了压缩采样矩阵。这两种压缩采样模型非常适用于具有线谱稀疏特性的信号采样。同时本文也考虑了高频窄带频谱稀疏信号的压缩采样，以Hadamard矩阵为基础构造了硬件可实现的压缩采样模型。本文提出的这三中基于随机解调的压缩采样模型由于在ADC前端引入了积分器或低通滤波器，因此信号采集能力均不受ADC模拟输入带宽的影响，非常具有实际应用价值。

4、稀疏表示基失配情况下，传统压缩采样信号重构方法无法准确重构原始信号。本文详细分析了频域稀疏表示基产生的原理以及对信号重构的影响，并在此基础上提出了一种基于迭代最小二乘法与root-MUSIC频谱估计算法的压缩采样信号重构算法：IRWL1-root-MUSIC算法。与传统压缩采样信号重构算法不同，由于在信号频率近似过程中，IRWL1-root-MUSIC算法不是通过测量值与压缩感知矩阵内积最大化来定位频率在表示基中的位置，而是通过root-MUSIC算法进行频率估计，从而避免了稀疏表示基失配的问题，能够有效地对任意频率信号进行估计。

5、信号的小波变换系数不具有严格意义的稀疏性，这将降低只考虑信号稀疏特性的传统重构算法的性能。本文对分段连续型信号小波变换系数的统计特性进行了详细的分析，得出其多尺度分析小波系数不仅具有可压缩稀疏性，还具有树状结构特性。更进一步得出具有大幅度值的小波系数构成一棵倒型的子树，信号中每个断点处对应一棵子树。在此基础上提出了基于倒树结构的正交匹配追踪重构算法，该算法通过对处于倒树上的小波系数加权，使重构信号更具稀疏性。同时采用在重构过程中对小波系数与尺度系数分别重构的策略，提高了计算效率与重构精度。

6.2 研究展望

压缩感知理论在稀疏模拟信号采样中的研究是一个具有挑战同时也具有重要理论研究和工程应用价值的课题，国内外对此的研究工作目前尚处于起步阶段，特别是采样模型的研究。随着数字系统所处理信号的频率变高，传统模拟信号采样方法难以达到实际应用要求，利用信号的稀疏特性对其进行压缩采样就更加具有研究意义。本文尝试将压缩感知理论用于稀疏模拟信号的采样研究，在采样模型与信号重构算法方面取得了一定成果，但也存在一些不足之处还待完善，以下

方面还需要进一步深入研究:

1、信号稀疏表示基的研究。虽然信号处理中有很多信号变换方法可以对信号进行稀疏表示,但信号只有在合适的变换空间上才具有稀疏特性,如何选择选择稀疏表示基值得进一步研究。另一方面,构造新的信号表示方法对其进行稀疏表示也是一个有意义的研究方向,如本文中提到的采用幅度与延时对超声信号进行表示,通过这种非传统的信号表示方法能够显著降低信号的自由度,提高压缩采样的性能。

2、压缩测量矩阵的研究。只有构造硬件可实现的压缩测量矩阵才能将压缩感知理论应用于模拟信号采样中。而目前已证明满足压缩感知理论先验条件的矩阵种类少,且绝大多数硬件不可实现。因此,研究与设计硬件可实现的测量矩阵对压缩感知理论的应用具有推广作用。

3、压缩感知理论对传统非均匀采样信号重构方法改进研究。一些传统非均匀采样方法实现简单,但采样效率低,波形重构精度不高。通过对这些采样方法进行研究,推导出非均匀采样值与待重构信号之间的关系,提取满足压缩感知理论先验条件的测量矩阵。本文对基于压缩感知理论的随机采样信号重构方法进行了初步尝试,具有可行性。该方法可以作为对其它非均匀采样信号重构方法改进的参考,同时非均匀采样技术中存在的时间抖动问题对压缩感知信号重构方法的影响也需要进一步研究。

4、基于随机解调的并行压缩采样硬件实现研究。本文在第三章提出了三种基于随机解调的压缩采样模型,虽然通过仿真实验验证了它们的可行性与稳定性,但这些方法在硬件实现中也会遇到一些问题,如:当重构信号很长或信号采样通道数很多的情况下,用于解调的随机序列产生电路将变得复杂,设计更优的随机序列产生电路非常必要。另一方面,模型中采用了低通滤波器,然而实际电路中的低通滤波是非理想的,对非理想低通滤波器的补偿方法有待进一步研究。

5、高效信号重构算法的研究。根据处理信号的统计特征设计信号重构算法也非常重要,结合信号的稀疏性与其它统计特征,有利于提高信号重构精度。

6、基于压缩感知理论的信号检测与信号估计研究。由于不需要完全重构原始信号,间接从压缩测量值中对原始信号的特征信息进行提取或判断,因此提高了对信号的压缩效率,同时也丰富了压缩采样信号处理方法,这也是下一步研究工作的重点。

致 谢

衷心感谢导师王厚军教授在我攻读博士学位期间给予的精心指导和悉心关怀，论文中所取得的成绩无不凝聚着王老师的智慧和心血。导师渊博的专业知识、严谨认真的治学态度、崇高的敬业精神以及对学术前沿的敏锐洞察力给予了我极大的启迪与引导。导师谦虚的人格魅力、诲人不倦的大师风范令我敬仰，这必将成为本人受益一生的宝贵财富。值此论文完成之际，谨向王老师致以崇高的敬意和最衷心的感谢！

衷心感谢联合培养导师美国威斯康星大学麦迪逊分校胡钰衡教授带领我进入压缩感知理论这一充满无限生机的研究领域。正是胡老师循序善诱的指导、无微不至的关怀，使我克服学术上和生活中的诸多困难。在此，谨向胡老师致以深深的敬意和诚挚的感谢！

感谢自动化工程学院黄建国教授、戴志坚副教授，他们的关心和支持是论文顺利完成的重要保证。

感谢浙江大学控制科学与工程学系王智副教授、西安石油大学电子工程学院高伟欣教授，与他们的探讨与交流中增长了我的知识、开阔了学术视野，使我深受启迪，收获良多。

感谢教研组王锂老师、杨万渝老师、黄诚惕博士生，与他们的切磋与交流丰富了博士生活，开拓了学术视野。

感谢我的父母与爱人，正是他们始终如一的关心、理解、默默支持与鼓励，才使我能够潜心完成博士阶段的学业。

感谢我的弟弟，正是有他对父母关心与照顾，我才能够放心完成学业。

感谢辛勤评阅本论文的各位专家。

感谢电子科技大学自动化工程学院测试技术及仪器研究所团队。

参考文献

- [1] Athanasios Papoulis. Generalized Sampling expansion. IEEE Trans. On circuit and systems, 1977, 24(11): 652-654.
- [2] Black W. C., Hodges D. A.. Time interleaved converter array. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 1980, 15(6): 1022-1029.
- [3] R. A. Witte. Sample Rate and Display Rate in Digitizing Oscilloscopes. Hewlett-Packward Journal, 1992, 43(1): 18-19.
- [4] D. Donoho. Compressed sensing. IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52: 1289-1306.
- [5] E. Candès, J. Romberg, T. Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52: 489-509.
- [6] E. Candès, M. Wakin. An introduction to compressive sampling. IEEE Sig. proc. Mag., 2006, 52(2): 21-30.
- [7] J. A. Tropp, J. N. Laska, M. F. Duarte, et al. Beyond Nyquist: Efficient sampling of sparse bandlimited signals. IEEE Trans. Inform. Theory, 2010, 56(1): 520-544.
- [8] M. Mishali, Y. C. Eldar. Blind multiband signal reconstruction: Compressed sensing for analog signals. IEEE Trans. Signal Process., 2009, 57(3): 993-1009.
- [9] Y. C. Eldar. Compressed sensing of analog signals in shift-invariant spaces. IEEE Trans. Signal Process., 2009, 57(8): 2986-2997.
- [10] M. Mishali, Y. C. Eldar. Spectrum-Blind Reconstruction of Multi-Band Signals. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2008), 2008: 3365-3368.
- [11] J. N. Laska, S. Kirolos, Y. Massoud, et al. Random sampling for analog-to-information conversion of wideband signals. In Proceedings of the IEEE Dallas Circuits and Systems Workshop (DCAS), 2006.
- [12] S. Kirolos, T. Ragheb, J. N. Laska, et al. Practical issues in implementing analog-to-digital converters. In Proc. International Workshop on System-on-Chip for Real-Time Applications, 2006: 141-146.
- [13] S. Kirolos, J. Laska, M. Wakin, et al, T. Ragheb, Y. Massoud, and R. Baraniuk. Analog-to-information conversion via random demodulation. In Proceedings of the IEEE Dallas Circuits and Systems Workshop (DCAS), 2006.

- [14] T. Ragheb, S. Kirolos, J. N. Laska, et al, A. C. Gilbert, R. G. Baraniuk, and Y. Massoud. Implementation models for analog-to-information conversion via random sampling. In IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems, 2007.
- [15] J. N. Laska, S. Kirolos, M. F. Duarte, et al. Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation. In IEEE Symposium on Circuits and Systems, 2007.
- [16] S. Becker, J. Bobin, E. J. Candès. NESTA: a fast and accurate first-order method for sparse recovery, SIAM J. Imaging Sci. 2011, 4 (1): 1-39.
- [17] S. Becker, E. J. Candès, M. Grant. Templates for convex cone problems with applications to sparse signal recovery, Tech. Report 1009.2065, arXiv, 2010.
- [18] M.A. Davenport, S.R. Schnelle, J.P. Slavinsky, et al. A wideband compressive radio receiver. in Proc. Military Communications Conference (MILCOM), San Jose, California, October 2010: 1193-1198.
- [19] John Treichler, Mark Davenport, Jason Laska, et al. Dynamic range and compressive sensing acquisition receivers. 7th U.S. / Australia Joint Workshop on Defense Applications of Signal Processing (DASP), Coolum, Australia, Jul. 2011.
- [20] John Treichler, Mark Davenport, Richard Baraniuk. Application of compressive sensing to the design of wideband signal acquisition receivers. 6th U.S. / Australia Joint Workshop on Defense Applications of Signal Processing (DASP), Lihue, Hawaii, Sep. 2009.
- [21] M. Mishali, Y. C. Eldar, J. A. Tropp. Efficient Sampling and Stable Reconstruction of Wide Band Sparse Analog Signals. Proc. of IEEE, 25th convention, 2008: 290-294
- [22] M. Mishali, A. Elron, Y. C. Eldar. Sub-Nyquist Processing with the Modulated Wideband Converter. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2010), 2010: 3626--3629.
- [23] M. Mishali, Y. C. Eldar. From Theory to Practice: Sub-Nyquist Sampling of Sparse Wideband Analog Signals. IEEE Journal of Selected Topics on Signal Processing, 2010, 4(2): 375-391.
- [24] Donoho D L. For most large underdetermined systems of linear equations, the minimal L1 norm solution is also the sparsest solution, Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(6): 797-829.
- [25] S. Boyd, L.Vandenberghe. Convex optimization. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [26] E. Candès, T. Tao. Decoding by linear Programming .Information Theory, IEEE Transactions

on, 2005, 51(12): 4203-4215.

- [27] J. A. Tropp. Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part II: Convex relaxation. *Signal Process.* (Special Issue on Sparse Approximations in Signal and Image Processing), 2006, 86: 589-602.
- [28] J. A. Tropp. Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part I: Greedy pursuit. *Signal Process.* (Special Issue on Sparse Approximations in Signal and Image Processing), 2006, 86: 572-588.
- [29] R. Prony. Essai experimental et analytique sur les lois de la Dilatabilite des uides elastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, a diferentes temperatures. *J. de l' Ecole Polytechnique, Floreal et Prairial III*, 1795, 1(2): 24-76.
- [30] C. Caratheodory. Uber den variabilitatsbereich der koezienten von potenzreihen, die gegebene werte nicht annehmen. *Math. Ann.*, 1907, 64: 95-115.
- [31] C. Caratheodory. Uber den variabilitatsbereich der fourierschen konstanten von positiven harmonischen funktionen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1911, 32: 193-217.
- [32] P. Feng, Y. Bresler. Spectrum-blind minimum-rate sampling and reconstruction of multiband signals. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Atlanta, GA, May 1996.
- [33] Y. Bresler, P. Feng. Spectrum-blind minimum-rate sampling and reconstruction of 2-D multiband signals. In *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing (ICIP)*, Zurich, Switzerland, Sept. 1996.
- [34] P. Feng. Universal spectrum blind minimum rate sampling and reconstruction of multiband signals. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Mar. 1997.
- [35] R. Venkataramani, Y. Bresler. Further results on spectrum blind sampling of 2-D signals. In *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing (ICIP)*, Chicago, IL, Oct. 1998.
- [36] Y. Bresler. Spectrum-blind sampling and compressive sensing for continuous- index signals. In *Proc. Work. Inform. Theory and Applications (ITA)*, San Diego, CA, Jan. 2008.
- [37] M. Vetterli, P. Marziliano, T. Blu. Sampling signals with finite rate of innovation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2002, 50(6): 1417-1428.
- [38] T. Blu, P. L. Dragotti, M. Vetterli, et al. Sparse Sampling of Signal Innovations, in *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 31-40.
- [39] I. Maravic, M. Vetterli. Sampling and Reconstruction of Signals with Finite Rate of Innovation in the Presence of Noise, in *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 2788-2805.

- [40] Petros Boufounos, Richard G. Baraniuk. 1-Bit compressive sensing. Conf. on Info. Sciences and Systems (CISS), Princeton, New Jersey, March 2008: 16-21.
- [41] Jason N. Laska, Zaiwen Wen, Wotao Yin, et al. Trust, but Verify: Fast and Accurate Signal Recovery from 1-bit Compressive Measurements. Signal Processing, IEEE Transactions on, 2011, 59(11): 5289-5301.
- [42] A. Gupta, B. Recht, R. Nowak. Sample complexity for 1-bit compressed sensing and sparse classification, in Proc. Intl. Symp. on Information Theory (ISIT), 2010: 1553-1557.
- [43] L. Jacques, J. N. Laska, P. T. Boufounos, et al. Robust 1-Bit Compressive Sensing via Binary Stable Embeddings of Sparse Vectors, <http://arxiv.org/abs/1104.3160>
- [44] D. Baron, M. F. Duarte, S. Sarvotham, et al. Distributed compressive sensing. 2005. Preprint.
- [45] S. R. Schnelle, J. N. Laska, C. Hegde, et al. Texas Hold 'Em Algorithms for Distributed Compressive Sensing, Proc. of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2010, Dallas, Texas.
- [46] L. W. Kang, C.-S. Lu. Distributed compressed video sensing. in IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP), (Taipei, Taiwan), Apr. 2009.
- [47] W. Wang, M. Garofalakis, K. Ramchandran. Distributed sparse random projections for refinable approximation. in Int. Workshop on Inform. Processing in Sensor Networks (IPSN), (Cambridge, MA), 2007, 331-339.
- [48] M. F. Duarte, M. B. Wakin, D. Baron, et al. Universal distributed sensing via random projections. in Int. Workshop on Inform. Processing in Sensor Networks (IPSN), (Nashville, TN), 2006, 177-185.
- [49] M. Aghagolzadeh, K. Oweiss. Compressed and distributed sensing of neuronal activity for real time spike train decoding. IEEE Trans. Neural Systems and Rehabilitation Eng., 2009, 17: 116-127.
- [50] Shihao Ji, Ya Xue, Lawrence Carin. Bayesian compressive sensing. IEEE Trans. on Signal Processing, 2008, 56(6): 2346 -2356.
- [51] David Wipf, Jason Palmer, Bhaskar Rao, et al. Performance evaluation of latent variable models with sparse priors. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Honolulu, Hawaii, May 2007.
- [52] D. P. Wipf, J.A. Palmer, B.D. Rao. Perspectives on Sparse Bayesian Learning. Neural Information Processing Systems (NIPS), Vancouver, Canada, December 2004.
- [53] S. D. Babacan, R. Molina, A.K. Katsaggelos. Bayesian Compressive Sensing using Laplace

- Priors. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(1): 53-64.
- [54] Nicolas Dobigeon, Alfred O. Hero, Jean-Yves Tournet. Hierarchical Bayesian sparse image reconstruction with application to MRFM. IEEE Trans. Image Processing, 2009, 18 (9): 2059-2070.
- [55] Zhilin Zhang, Bhaskar D. Rao. Sparse Signal Recovery with Temporally Correlated Source Vectors Using Sparse Bayesian Learning. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2011, 5(5): 912-926.
- [56] Xu J., Pi Y., Cao Z. Bayesian compressive sensing in synthetic aperture radar imaging, Radar, Sonar & Navigation, IET, 2012, 1(6): 2-8.
- [57] 刘丹华, 石光明, 周佳社. 一种冗余字典下的信号稀疏分解新方法. 西安电子科技大学学报(自然科学版) 2008, 35(2): 228-232.
- [58] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展. 电子学报, 2009, 37(5): 1070-1081.
- [59] Guangming Shi, Jie Lin, Xuyang Chen, et al. UWB echo signal detection with ultra-low rate sampling based on compressed sensing. IEEE Trans. Circuit and Systems-II, 2008, 55(4): 379-383.
- [60] 李树涛, 魏丹. 压缩传感综述. 自动化学报, 2009, 35(11): 1369-1377.
- [61] 练秋生, 陈书贞. 基于解析轮廓波变换的图像稀疏表示及其在压缩传感中的应用. 电子学报, 2010, 38(6): 1-6.
- [62] 练秋生, 孔令富. 圆对称轮廓波变换构造. 计算机学报, 2006, 29(4): 625-657.
- [63] 练秋生, 郝鹏鹏. 基于压缩传感和代数重建法的 CT 图像重建. 光学技术, 2009, 35(3): 422-425.
- [64] 方红, 章权兵, 韦穗. 基于亚高斯随机投影的图像重建方法. 计算机研究与发展, 2008, 45(8): 1402-1407.
- [65] 方红, 章权兵, 韦穗. 基于非常稀疏随机投影的图像重建方法. 计算机工程与应用, 2007, 43(22): 25-27.
- [66] 方红, 章权兵, 韦穗. 改进的后退型最优正交匹配追踪图像重建方法. 华南理工大学学报, 2008, 36(8): 23-27.
- [67] 方红, 王年, 章权兵, 等. 基于稀疏贝叶斯学习的图像重建方法. 中国图象图形学报 A, 2009, 14(6): 1064-1069.
- [68] 余惠敏, 方广有. 压缩感知理论在探地雷达三维成像中的应用. 电子信息学报, 2010, 32(1): 12-16.

- [69] 屈乐乐, 方广有, 杨天虹. 压缩感知理论在频率步进探地雷达偏移成像中的应用. 电子信息学报, 2011, 33(1): 21-26.
- [70] Joel Tropp, Michael Wakin, Marco Duarte, et al. Random filters for compressive sampling and reconstruction. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Toulouse, France, May 2006.
- [71] L. Li, W. Zhang, Y. Xing, et al. The compressed-sampling filter. Progress in electromagnetic research B, 2009, 17: 255-273.
- [72] L. Li, W. Zhang, Y. Xing, et al. The design of compressive sensing filter. Progress in electromagnetic research B, <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0811/0811.2637.pdf>
- [73] L. Li, W. Zhang, F. Li. Compressive Diffraction Tomography for Weakly Scattering, <http://arxiv.org/abs/0904.2695>
- [74] Romberg, J.. Compressive sensing by random convolution, Submitted to SIAM J. Imaging Science, 2008.
- [75] Marco Duarte, Mark Davenport, Dharmpal Takhar, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 83-91.
- [76] Dharmpal Takhar, Jason Laska, Michael Wakin, et al. A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression. Computational Imaging IV at SPIE Electronic Imaging, San Jose, California, Jan. 2006.
- [77] W. L. Chan, K. Charan, D. Takhar, et al. A single-pixel terahertz imaging system based on compressive sensing. Applied Physics Letters, 2008, 93(12): 121105-122207.
- [78] Abdorreza Heidari, D. Saeedkia. A 2D Camera Design with a Single-pixel Detector. Int. Conf. on Infrared, Millimeter and Terahertz Waves, Busan, South Korea, September 2009.
- [79] Jung, A., Taubock, G., Hlawatsch, F.. Compressive spectral estimation for nonstationary random processes. Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009. ICASSP 2009. IEEE International Conference on. 2009: 3029-3032.
- [80] Akcakaya M., Seunghoon Nam, Peng Hu, et al. Compressed sensing with wavelet domain dependencies for coronary MRI: A retrospective study. Medical Imaging, IEEE Transactions on, 2011, 30(5): 1090-1099.
- [81] 潘榕, 刘昱, 侯正信, 等. 基于局部 DCT 系数的图像压缩感知编码与重构. 自动化学报, 2011, 37(6): 674-681.
- [82] Matusiak E., Eldar Y. C.. Sub-Nyquist sampling of short pulse. Signal processing, IEEE Transactions on, 2012, 60(3): 1134-1148.

- [83] Emmanuel J. Candès. The restricted isometry ProPerty and its implications for compressed sensing, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2008, 346(9-10): 589-592.
- [84] Candès, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling. Inverse Problems, 2007, 23(3): 969-985.
- [85] Richard Baraniuk, Mark Davenport, Ronald DeVore, et al. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices. Constructive Approximation, 2008, 28(3): 253-263.
- [86] Jerrey D. Blanehard, Coralia Cartis, Jared Taimer. Compressed sensing: How sharp is the restrieted isometry property? [http://ecos.maths.ed.ac.uk/papers/RIP_BICaT a.Pdf](http://ecos.maths.ed.ac.uk/papers/RIP_BICaT_a.Pdf)
- [87] Kai Tobias Block, Martin Uecker, Jens Frahm. Undersampled Radial MRI with Multiple Coils. Iterative Image Reconstruction Using a Total Variation Constraint. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 57(6): 1086-1098.
- [88] Michael Lustig, David Donoho, John M. Pauly. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6): 1182-1195.
- [89] Yoon-Chul Kim, Shrikanth S. Narayanan, et al. Accelerated Three-Dimensional Upper Airway MRI Using Compressed Sensing. Magnetic Resonance in Medicine, 2009, 61:1434-1440.
- [90] Kush R. Varshney, Müjdat Çetin, John W. Fisher, et al. Willsky. Sparse representation in structured dictionaries with application to synthetic aperture radar. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(8): 3548-3561.
- [91] Xie Xiao-Chun, Zhang Yun-Hua. High-resolution imaging of moving train by ground-based radar with compressive sensing. Electron Lett, 2010, 46, (7): 529-531.
- [92] Budillon A., Evangelista A., Schirinzi G.. Three-Dimensional SAR Focusing From Multipass Signals Using Compressive Sampling. IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing, 2011, 49: 488-499.
- [93] Xiao Xiang Zhu, Richard Bamler. Tomographic SAR Inversion by L1 Norm Regularization-The Compressive Sensing Approach. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2010, (10): 3839-3846.
- [94] Bhattacharya S, Blumensath T, Mulgrew B, et al. Fast encoding of synthetic aperture radar raw data using compressed sensing. In: Proceedings of Statistical Signal Processing. Washington D. C., USA: IEEE, 2007. 448-452.
- [95] Sujit Bhattacharya, Thomas Blumensath, Bernard Mulgrew, et al. Fast encoding of synthetic aperture radar raw data using compressed sensing. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing, Madison, Wisconsin, Aug. 2007.

- [96] Haupt J. Nowak R.. Compressive sampling vs. conventional imaging. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing. Washington D. C., USA: IEEE, 2006. 1269-1272.
- [97] Stankovic V., Stankovic L., Cheng S.. Compressive video sampling. In: Proceedings of the European Signal Processing Conference. Lausanne, Switzerland: 2008.
- [98] Marcia R., Willett R.. Compressive coded aperture video reconstruction. In: Proceedings of the European Signal Processing Conference. Lausanne, Switzerland: 2008.
- [99] Gan L.. Block compressed sensing of natural images. In: Proceedings of the 15th International Conference on Digital Signal Processing. Washington D. C., USA: IEEE, 2007: 403-406.
- [100] Cevher V., Sankaranarayanan A., Duarte M., et al. Compressive sensing for background subtraction. In: Proceedings of the 10th European Conference on Computer Vision. Berlin, Germany: Springer, 2008: 155-168.
- [101] 赵贻玖, 戴志坚, 王厚军. 基于压缩传感理论的随机等效采样信号的重构. 仪器仪表学报, 2011, 32(2): 247-251.
- [102] Y. Zhao, X. Zhuang, L. Wang. The Research and Application of Random Sampling in Digital Storage Oscilloscope. IEEE Circuit and Systems International Conference, Chengdu, China, Apr. 28-29, 2009.
- [103] P. J. Pupaiaikis. Random Interleaved Sampling. [Online]. Available: http://www.lecroy.com/files/WhitePapers/WP_Ris_102203.pdf
- [104] Technique Primer. Sampling Oscilloscope Technique. Tektronix, 1989. [Online]. Available: http://www.cbtricks.com/miscellaneous/tech_publications/scope/sampling.pdf
- [105] 邱渡裕. 200 MHz 手持式示波器数字系统与电源模块的设计: [硕士学位论文]. 成都: 电子科技大学, 2006.
- [106] Yijiu Zhao, Yuheng Hu, Houjun Wang. Enhanced Random Equivalent Sampling Based on Compressed Sensing. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2012, 61(3): 579-586.
- [107] D. E. Toeppen. Acquisition clock dithering in a digital oscilloscope. Hewlett-Packard Journal, 1997, 48(2): 1-4.
- [108] M. Unser. Sampling – 50Years After Shannon. Proc. IEEE, 2000, 88(4): 569-587.
- [109] A. C. Gilbert, M. J. Strauss, J. A. Tropp. Improve time bounds for near-optimal sparse Fourier representation via sampling. in Proc. Wavelets XI at SPIE Optics and Photonics, San Diego, CA, 2005.
- [110] D. M. Malioutov, S. R. Sanghavi, A. S. Willsky. Sequential compressed sensing. IEEE Journal

- of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 435-444.
- [111] Gedalyahu K, Tur R, Eldar Y. C.. Multichannel Sampling of Pulse Streams at the Rate of Innovation. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2011, 59 (4): 1491-1504.
 - [112] Yijiu Zhao, Xiaoyan Zhuang, Houjun Wang, et al. Sub-Nyquist sampling of high-speed repetitive waveforms using compressed sensing. *Journal of Scientific & Industrial Research*, 2011, 70(2): 118-122.
 - [113] FCC (2002). Spectrum policy task force report, [http://hraunfoss.fcc.gov/ edocs_public/attachmatch/DOC-228542A1.pdf](http://hraunfoss.fcc.gov/edocs_public/attachmatch/DOC-228542A1.pdf)
 - [114] Y. Chi, L. L. Scharf, A. Pezeshki, et al. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing, signal processing, *IEEE Transaction on*, 2010, 59(5): 2181-2195.
 - [115] Gilles, P., Pierre, V., Rémi, et al, W.. Universal and Efficient Compressed Sensing Strategy through Spread Spectrum Modulation, http://infoscience.epfl.ch/record/163850/files/EURASIP-puyetal-Spread_spectrum_universality.pdf?version=1
 - [116] David L. Donoho, Yaakov Tsaig. Fast Solution of L1-norm Minimization Problems When the Solution May be Sparse, <http://dsp.rice.edu/sites/dsp.rice.edu/files/cs/FastL1.pdf>
 - [117] E. Candès, J. Romberg, T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements, *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207-1223.
 - [118] E. Candès, M. Wakin, S. Boyd. Enhanced sparsity by reweighted L1 minimization, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2008, 14: 877-905.
 - [119] D. Needell, Topics in Compressed Sensing, PhD thesis, University of California Davis, 2009.
 - [120] S. Mallat, Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionary, *IEEE Trans. Signal processing*, 1993, 41: 3397-3415.
 - [121] J. A. Tropp, A. C. Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666.
 - [122] Mark A. Davenport, Michael B. Wakin. Analysis of Orthogonal Matching Pursuit Using the Restricted Isometry Property. *IEEE Trans. Information Theory*, 2010, 56(9): 4395-4401.
 - [123] D. Needell, R. Vershynin. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit. *Found. Comput. Math.*, 2007. DOI: 10.1007/s10208-008-9031-3.
 - [124] D. Needell, J. A. Tropp. CoSaMP: Iterative signal recovery from noisy samples. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2008. DOI: 10.1016/j.acha.2008.07.002.
 - [125] David L. Donoho, Yaakov Tsaig, Iddo Drori, et al. Sparse Solution of Underdetermined Linear

Equations by Stagewise Orthogonal Matching Pursuit. <http://www.cs.tau.ac.il/~idrori/StOMP.pdf>

- [126] M. A. Herman, D. Needell. Mixed operators in compressed sensing. in Proc. 44th Ann. Conf. Inf. Sci. Syst. (CISS), Princeton, NJ, Mar. 2010.
- [127] Modern spectral estimation: Theory and application. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.
- [128] M. Davenport, P. Boufounos, M. Wakin, et al. Signal processing with compressive measurements, IEEE journal of selected topics in signal processing, 2010, 4(2): 445-460.
- [129] S. Mallat, A wavelet tour of signal processing. Academic Press, 1999.
- [130] M. S. Crouse, R. D. Nowak, R. G. Baraniuk. Wavelet-based statistical signal processing using Hidden Markov Models,” IEEE Signal Processing, 1998, 46(4): 886-902.
- [131] Marco F. Duarte, Michael B. Wakin, et al. Wavelet-Domain Compressive Signal Reconstruction Using a Hidden Markov Tree Model, Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Las Vegas, 2008: 5137-5140.
- [132] 赵贻玖, 王厚军, 戴志坚. 基于隐马尔科夫树模型的小波域压缩采样信号重构方法. 电子测量与仪器学报, 2010, 24(4): 314-318.
- [133] C. La, M. N. Do. Signal reconstruction using sparse tree representation. in Pro. Wavelets XI at SPIE Optics and Photonics, San Diego, CA, 2005.
- [134] C. La, M. N. Do. Tree-Based Orthogonal Matching Pursuit Algorithm for Signal Reconstruction. Image Processing. 2006 IEEE International Conference on, Atlanta, GA, Oct. 2005: 1277-1280.
- [135] Yijiu Zhao, Xiaoyan Zhuang, Zhijian Dai, et al. Wavelet compressive sampling signal reconstruction using Upside-down tree structure. Mathematical Problems in Engineering, 2011, vol. 2011, 1-10.

攻博期间取得的研究成果

- [1] Yijiu Zhao, Yu hen Hu, Houjun Wang. Enhanced Random Equivalent Sampling Based on Compressed Sensing. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2012, vol. 61, no. 3: 579-586 (SCI indexed)
- [2] Yijiu Zhao, Xiaoyan Zhuang, Zhijian Dai, Houjun Wang. Wavelet compressive sampling signal reconstruction using Upside-down tree structure. Mathematical Problems in Engineering. 2011, vol. 2011, 1-10 (SCI indexed)
- [3] Yijiu Zhao, Xiaoyan Zhuang, Houjun Wang, Zhijian Dai. Sub-Nyquist sampling of high-speed repetitive waveforms using compressed sensing. Journal of Scientific & Industrial Research. 2011, vol. 70, no. 2: 118-122 (SCI indexed)
- [4] Yijiu Zhao, Xiaoyan Zhuang, Houjun Wang, Zhijian Dai. Ultrasonic signal compressive detection using improved random equivalent sampling. IET Science Measurement Technology. Accepted (SCI indexed)
- [5] Yijiu Zhao, Xiaoyan Zhuang, Houjun Wang, Zhijian Dai. Model Based Multichannel Compressive Sampling with Ultra-Low Sampling Rate. Circuits, Systems and Signal Processing. Accepted (SCI indexed)
- [6] 赵贻玖, 戴志坚, 王厚军. 基于压缩传感理论的随机等效采样信号的重构. 仪器仪表学报, 2011, 32(2): 247-251 (EI 检索)
- [7] 赵贻玖, 王厚军, 戴志坚. 高速模拟信号压缩采样实现. 电子科技大学学报, 拟于 2012 年第 4 期发表 (EI 检索)
- [8] Yijiu Zhao, Yu hen Hu, Houjun Wang. Compressed Sensing Enhanced Random Equivalent Sampling. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP 2012), Kyoto, Japan. Accepted
- [9] 赵贻玖, 王厚军, 戴志坚. 基于隐马尔科夫树模型的小波域压缩采样信号重构方法. 电子测量与仪器学报, 2010, 24(4): 314-318
- [10] Yijiu Zhao, Xiaoyan Zhuang, Li Wang. The Research and Application of Random Sampling in Digital Storage Oscilloscope. Testing and Diagnosis, 2009. ICTD 2009. IEEE Circuits and Systems International Conference on, Chengdu, China, April 28-29, 2009

- [11] Xiaoyan Zhuang, Yijiu Zhao, Li Wang. The Research and Application of Sine Interpolation in Digital Storage Oscilloscope. Testing and Diagnosis, 2009. ICTD 2009. IEEE Circuits and Systems International Conference on, Chengdu, China, April 28-29, 2009
- [12] Li Wang, Xiaoyan Zhuang, Yijiu Zhao. A Case for Wide-Area Networks. Testing and Diagnosis, 2009. ICTD 2009. IEEE Circuits and Systems International Conference on, Chengdu, China, April 28-29, 2009

电子科技大学

UNIVERSITY OF ELECTRONIC SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

UESTC

博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION