

KAPITEL 4

Compressive-Sensing

4.1 Einleitung

In der Vergangenheit spielte das Shannon-Abtasttheorem [16] eine Hauptrolle bei der Signalgewinnung. Laut des Theorems muss die Abtastfrequenz größer als das Doppelte der höchsten Signalfrequenz sein. Nach der Signalgewinnung komprimieren wir die Signale mithilfe der Transformation z. B. der Fourier- oder Wavelet-Transformation in verschiedene Basisfunktionen sowie ihre Gewichtungen. Wie in der Abbildung 4.1 gezeigt.

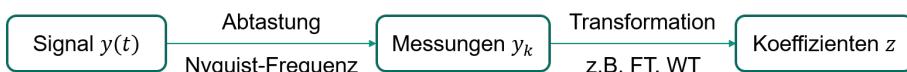


Abbildung 4.1: Ablauf traditioneller Signalverarbeitung.

Mit der kontinuierlichen Erhöhung der Signalbandbreite stehen Abtastung und Speicherung vor großen Herausforderungen. In den letzten Jahren beschäftigen sich immer mehr Wissenschaftler mit dem Compressive-Sensing (CS) [17]. Die grundlegende Idee ist, die Koeffizienten statt nach der Abtastung zu komprimieren, sondern aus der komprimierten Signale direkt zu gewinnen.



Abbildung 4.2: Ablauf des Compressive-Sensing.

Bei dem Compressive-Sensing ist eine Erfüllung der Nyquist-Frequenz nicht mehr nötig, und man macht normalerweise zufällige Abtastungen [18]. Nach der Abtastung bekommt man ein LGS

$$\tilde{\underline{y}} = \Phi \cdot \underline{x} + \underline{e}, \quad (4.1)$$

In der Formel (4.1) steht \tilde{y} für die komprimierte Messungen, Φ für die komprimierende Messabbildung, und \underline{e} für den Fehler. Außerdem gilt $\Phi \in \mathbb{R}^M$ mit $M \ll N$, d. h. das ist ein unterbestimmtes Problem. Normalerweise kann man eine eindeutige Lösung dieses Problems nicht finden. Aber wir konvertieren das LGS in ein Optimierungsproblem [21], also

$$\begin{aligned}\underline{x} &= \arg \min_{\underline{x}} \|\underline{x}\|_0 \\ \text{NB: } &\|\tilde{y} - \Phi \cdot \underline{x}\|_2 \leq \varepsilon.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Wenn die Messabbildung Φ einige Eigenschaften erfüllt, dann gibt es große Möglichkeit, dass man eine eindeutige Lösung finden kann [18]. Diese Eigenschaften werden im Kapitel 4.4 erklärt.

4.2 ℓ_p -Norm

Die Norm beschreibt die Länge eines mathematischen Objekts. Wir können die Norm des Fehlers zu verwenden, um die Größe des Fehlers zu beschreiben. Die ℓ_1 -, ℓ_2 - und ℓ_∞ -Normen werden häufig benutzt. Im CS führt man auch die ℓ_0 -Norm ein, wobei es wertvoll zu beachten ist, dass die ℓ_0 -Norm keine Norm ist, sondern sie die ähnliche Form wie eine Norm hat.

4.2.1 Definition der ℓ_p -Norm

Die Definition der ℓ_p -Norm eines Vektors [24] ist

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Die Definition der ℓ_0 -Norm eines Vektors ist

$$\|\underline{x}\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |x_i|^p.$$

Also die ℓ_0 -Norm eines Vektors entspricht der Anzahl der Nicht-Null-Elemente. Es ist offensichtlich, dass ℓ_0 -Norm keine Norm ist, weil sie die Homogenität nicht erfüllt, also $\|2\underline{x}\|_0 = \|\underline{x}\|_0 \neq 2\|\underline{x}\|_0$.

4.2.2 Vergleich von ℓ_0 -, ℓ_1 - und ℓ_2 -Norm

Als Beispiel approximieren wir nun einigen Datenpunkte $([x_i, y_i]^T, i = 1, \dots, N)$ mit Linien nach jeweils ℓ_1 - und ℓ_2 -Norm. D. h. wir lösen die folgenden Optimierungsprobleme.

Bei ℓ_1 -Norm lösen wir

$$\min_{a_1, b_1} \sum_{i=1}^N |a_1 x_i + b_1 - y_i| .$$

Und bei ℓ_2 -Norm lösen wir

$$\min_{a_2, b_2} \sum_{i=1}^N (a_2 x_i + b_2 - y_i)^2 .$$

Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.3 gezeigt.

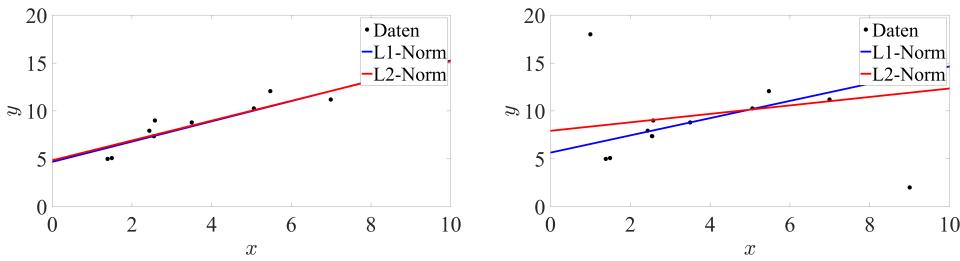


Abbildung 4.3: Lineare Approximationen.

Es ist anschaulich, dass ℓ_1 -Norm trifft mehr Datenpunkte während ℓ_2 -Norm nur wenige Datenpunkte trifft. Laut der Definition kann man davon ausgehen, dass bei ℓ_0 -Norm trifft die Linie die meisten Punkten. D. Donoho beweist im Paper [31], dass ℓ_0 -Norm durch den ℓ_1 -Norm gut approximiert werden kann. Als ein einfaches Beispiel stellen wir das folgende 2D-Optimierungsproblem

$$\underline{x} = \arg \min_{\underline{x}} \|\underline{x}\|_p$$

$$\text{NB : } \|x_1 + 3x_2 - 3\|_2 = 0 .$$

Die Nebenbedingung und der ℓ_p -Norm wird in der folgende Abbildung gezeigt, wobei $p = 0, 1, 2$.

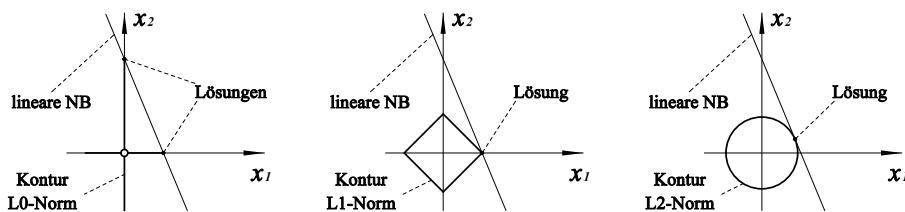


Abbildung 4.4: Vergleich ℓ_p Norm.

In der Abbildung 4.4 ist es offensichtlich, dass unter der linearen Nebenbedingung $y = \Phi \cdot \underline{x}$ eine Lösung von ℓ_0 -Norm identisch wie die Lösung von ℓ_1 -Norm ist. D. h.

bei den ℓ_0 -Norm-Optimierungsproblemen kann man als Alternative die Lösung von ℓ_1 -Norm-Optimierungsproblemen verwenden. Deswegen können wir den ℓ_0 -Norm in (4.2) durch ℓ_1 -Norm ersetzen [35; 36; 39], also

$$\underline{x} = \arg \min_{\underline{x}} \|\underline{x}\|_1 ,$$

NB : $\|\tilde{y} - \Phi \cdot \underline{x}\|_2 \leq \varepsilon$.

Der Grund für diese Alternative ist, dass ℓ_0 -Norm-Optimierungsproblem NP-Schwer und nicht-konvex ist [31].

4.3 Dünnbesetzte und komprimierbare Signale

Ein Signal ist dünnbesetzt (Eng. sparse), wenn $\|\underline{x}\|_0 \ll \dim(\underline{x})$ gilt. Eine schwächere Bedingung der Dünnbesetzung ist die Komprimierbarkeit. Ein Signal ist komprimierbar, wenn $|x_s| < C_1 \cdot s^q$ für nach absteigende Größe sortierte x_s und bestimmte Konstanten C_1 , $q > 0$ gilt [24; 25].

Wir können K -Terme-Approximation verwenden [24; 26], um zu beurteilen, ob ein Signal auf einer bestimmter Basis komprimierbar ist. Die Definition der „beste K -Terme-Approximation“ ist

$$\underline{y}_K := \Phi \cdot \underline{x}_K ,$$

wobei \underline{x}_K der Vektor aus \underline{x} ist, dessen K größte Elemente gehalten und die restlichen zu null gesetzt werden. Dabei ist der Fehler zwischen dem echten Signal und dem approxinierten Signal $\alpha_K(\underline{y})_p = \arg \min_{\underline{x} \in \Sigma_K} \|\underline{y} - \Phi \cdot \underline{x}\|_p$, wobei Σ_k die Menge aller Vektoren, deren ℓ_0 -Norm kleiner oder gleich K sind. Für komprimierbare Signale gilt $\sigma_K(\underline{y})_2 \leq C_2 K^{\frac{1}{2}-s}$, wobei C_2 eine bestimmte Konstante ist.

4.4 Messbasis

Messbasis ist eine Matrix, die die Zustandsgrößen in die Messungen abbilden. Normalerweise gilt für eine Messbasis $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ $M \geq N$, damit man das Problem mit dem LS-Verfahren lösen kann. Aber beim CS gilt $M \leq N$, d. h. das ist ein unterbestimmtes Problem. Um das Problem zu lösen, muss die Messbasis einige Eigenschaften erfüllen.

4.4.1 Anforderung auf der Messbasis

Die Anforderung an Φ für eine eindeutige Lösung der Signalrekonstruktion aus dem Compressive-Sensing werden in drei Situationen vorgestellt, jeweils für exakt dünn-

besetze Signale, komprimierbare Signale und rauschbehaftete Signale [28].

Für exakt dünnbesetzte Signale gilt das Theorem [29], dass für allen Vektoren $\underline{y} \in \mathbb{R}^M$ am meisten ein Signal $\underline{x} \in \Sigma_K$ existiert, das $\underline{y} = \Phi \underline{x}$ erfüllt, wenn $\text{spark}(\Phi) > 2K$ gilt. Die Definition von Spark ist die minimale Anzahl der linearen abhängig Spalten einer Matrix Φ [29].

Für komprimierbare Signale, wenn NSP (Eng. Null Space Property) erfüllt wird, gibt es die Rekonstruktionen Δ [30], wobei

$$\|\Delta(\Phi \underline{x}) - \underline{x}\|_2 \leq C \frac{\sigma_K(\underline{x})_1}{\sqrt{K}} \quad (4.3)$$

gilt. $\Delta(\cdot)$ ist eine Funktion zur Rekonstruktion des Signals und C ist eine bestimmte Konstante. Formel (4.3) garantiert eine obere Grenze des Rekonstruktionsfehlers [30]. Eine Matrix erfüllt K -Grad-NSP, wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, mit $\|h_\Lambda\|_2 \leq C \frac{\|h_{\Lambda^c}\|_1}{\sqrt{K}}$ für alle $h \in \mathcal{N}(\Phi)$ und $|\Lambda| < K$ halten, wobei $\Lambda \subset \{1, \dots, N\}$ und h_Λ ein Vektor ist, dessen Λ^c -te Elemente null gesetzt werden, mit $\Lambda^c = \{1, \dots, N\} \setminus \Lambda$. $\mathcal{N}(\Phi)$ ist Null-Space (Kern) von Φ , also $\mathcal{N}(\Phi) = \{\underline{x} : \Phi \underline{x} = 0\}$.

Für rauschbehaftete Signale brauchen wir eine stärkere Bedingung: die RIP (Eng. Restricted Isometry Property) um (4.3) zu garantieren [23]. Die Definition der $\text{RIP}(K, \delta_K)$ ist folgend. Eine Matrix Φ erfüllt die $\text{RIP}(K, \delta_K)$, wenn für alle $\underline{x} \in \Sigma_K$ gilt

$$(1 - \delta_K) \|\underline{x}\|_2^2 \leq \|\Phi \underline{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\underline{x}\|_2^2 .$$

Wenn die Messbasis Φ die $\text{RIP}(2K, \delta_{2K})$ Eigenschaft erfüllt, dann gibt es eine eindeutige Lösung für das Compressive-Sensing.

4.4.2 Anzahl der Messungen

Obwohl durch das CS das Signal mit sehr wenigen Anzahl der Messungen rekonstruiert werden kann, ist es klar, dass die Anzahl der Messungen größer oder gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Elemente in den Koeffizienten \underline{x} sein muss, sonst ist es ein unterbestimmtes Problem, falls wir kein weiteres Vorwissen dazu haben. In der Praxis erfordert das CS jedoch noch mehr Messungen als die Anzahl der Nicht-Null-Elementen in \underline{x} . Sie hängt auch von Faktoren wie der Dimension des Signals ab. R. Baraniuk hat in [24] bewiesen, wenn eine Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^M$ die $\text{RIP}(2K, \delta_{2K})$ mit der Konstante $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ erfüllt, dann soll die Anzahl der Messungen $M \geq C \cdot K \log \frac{N}{K}$ erfüllen, wobei $C \approx 0.28$.

Wenn die Elemente in Φ sub-Gauß'sche Verteilungen sind, also

$$E(\theta_{i,j}^2) = \frac{1}{M},$$

$$E(e^{\theta_{i,j}t}) \leq e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

z. B. Normalverteilung, Bernoulli-Verteilung usw., ist die Wahrscheinlichkeit, dass Φ die RIP($2K, \delta_{2K}$) erfüllt, höher als $1 - 2e^{-\kappa_2 M}$, wenn $M \geq \kappa_1 K \log \frac{N}{K}$ gilt, wobei $\delta \in (0, 1)$ gegeben wird, κ_1 beliebig und $\kappa_2 = \frac{\delta^2}{2\kappa_1}$ ist [27].

4.4.3 Kohärenz der Matrix

Es ist schwierig, durch die oben genannten Eigenschaften zu überprüfen, ob eine Matrix die RIP erfüllt, weil es NP-Schwer ist. Deswegen prüfen wir die RIP durch die Kohärenz der Matrix [29]. Die Definition der Kohärenz einer Matrix ist

$$\mu(\Phi) = \max_{i \neq j} \frac{|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|}{\|\varphi_i\|_2 \|\varphi_j\|_2}.$$

Es gilt das Theorem im Paper [29], dass für alle Vektoren $\tilde{y} \in \mathbb{R}^M$ am meisten ein Signal $\underline{x} \in \Sigma_K$ existiert, das $\tilde{y} = \Phi \cdot \underline{x}$ erfüllt, wenn

$$K < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(\Phi)} \right),$$

d. h. die Kohärenz der Matrix soll möglichst klein sein .

4.5 Basisfunktionen

Wenn ein Signal \underline{x} selbst nicht dünnbesetzt ist, aber es mit einer Basis Φ sowie dem entsprechenden dünnbesetzten Koeffizienten \underline{z} dargestellt werden kann, also

$$\tilde{y} = \Phi \cdot \underline{x} = \underbrace{\Phi \cdot \Theta}_{=: \tilde{\Theta}} \underline{z} = \tilde{\Theta} \cdot \underline{z}, \quad (4.4)$$

mit \underline{z} dünnbesetzt ist, und $\tilde{\Theta}$ die RIP erfüllt, können wir das Problem auch mit dem Compressive-Sensing lösen. Die Matrix Θ ist eine Basis, z. B. Fourier-, DCT-, Wavelet-Basis usw. Wie in Kapitel 4.4.3 diskutiert wurde, ist die RIP von der $\tilde{\Theta}$ nicht einfach zu überprüfen, deswegen verwenden wir auch die Kohärenz als Alternative, die Definition der Kohärenz zweier Matrizen [29] ist

$$\mu(\Phi, \Theta) = \max_{i \neq j} \frac{|\langle \varphi_i, \theta_j \rangle|}{\|\varphi_i\|_2 \|\theta_j\|_2}.$$

Außerdem gibt es hohe Möglichkeit, dass der Produkt von einer orthogonalen Matrix und einer Matrix, die die RIP erfüllt, die RIP auch erfüllt, z. B. Fourier-Matrix mit Delta-Matrix, Haar-Wavelet mit Noiselet-Matrix, usw [24; 28].

4.5.1 Fourier-Basis

Bei der Fourier-Basis werden Fourierfunktionen als Basisfunktionen gewählt, also

$$\Theta_{m,n} = \exp\left(j2\pi \frac{mn}{N}\right), \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Nach der Normalisierung gilt

$$\Theta_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(j2\pi \frac{mn}{N}\right), \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1.$$

z. B. für $N = 2$ gilt

$$\Theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

für $N = 4$ gilt

$$\Theta_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}.$$

4.5.2 DCT-Basis

Diskrete Cosinus-Transformation bracht im Prinzip weniger Punkte als Fourier-Basis, weil bei der DCT keine negative Frequenz gibt.

Basisvektoren der DCT sind

$$\theta_i[m] = \sqrt{\frac{2}{N}} \gamma_i \cos\left(\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \frac{i}{N}\right), \quad \gamma_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & i = 0, N \\ 1, & \text{sonst} \end{cases},$$

dann gilt DCT-Matrix

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2N} & \dots & \sqrt{2} \cos \frac{(2N-1)\pi}{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{2} \cos \frac{(N-1)\pi}{2N} & \dots & \sqrt{2} \cos \frac{(2N-1)(N-1)\pi}{2N} \end{bmatrix}.$$

4.5.3 Wavelet-Basis

Wavelet-Transformation (WT) ist unterschiedlich von DCT oder FT, weil WT viele Filterungen in vielen Schichten hat, wie in der Abbildung 4.5 gezeigt.

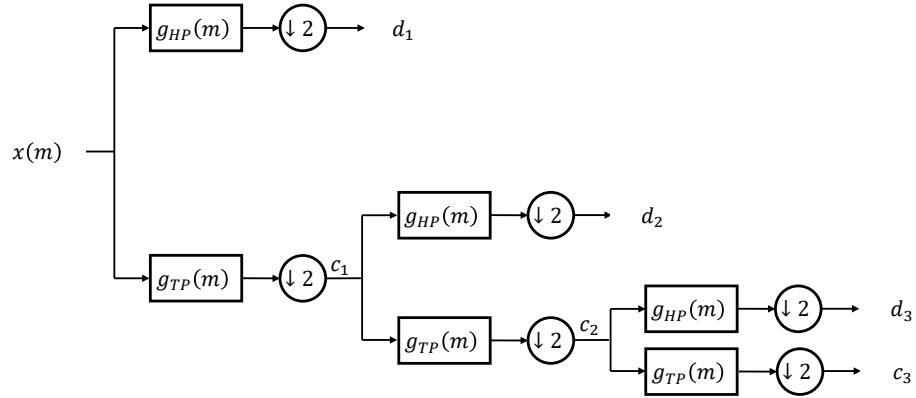


Abbildung 4.5: Verlauf der Wavelet-Transformation.

Wir müssen eine Matrix zu entwerfen, die die WT approximieren, um WT in Form von (4.4) zu bilden.

Erstens, wir berechnen die maximale Anzahl der Filterungsschichten. Nach jeder Filterung wird das Signal in zwei Teile gefiltert, also

$$c_i \rightarrow \begin{bmatrix} d_{i+1} \\ c_{i+1} \end{bmatrix} .$$

Die Länge wird auch halbiert, d. h. die maximale Anzahl der Filterungsschichten ist $Z = \lfloor \log_2 N \rfloor$.

Zweitens, wir machen die Filterung, also $d_1[n] = g_{HP} * x = \sum_{k=0}^{N-1} g_{HP}[n-k] \cdot x[k]$. In Matrzenschreibweise ist es

$$d_1 = \begin{bmatrix} d_1[0] \\ \vdots \\ d_1[N+M-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & \cdots & h[-N+1] \\ \vdots & & \vdots \\ h[N+M-2] & \cdots & h[M-1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} .$$

Nach jeder Filterung geben wir die erste und letzte $\frac{M}{2}$ Zeile auf, und dann machen wir ein Down-Sampling.

Drittens, wir machen das iterative Verfahren. Nach der ersten Filterung erhalten wir

$$\begin{bmatrix} [c_1]_{\frac{N}{2} \times 1} \\ [d_1]_{\frac{N}{2} \times 1} \end{bmatrix} =: [\mathbf{W}_1]_{N \times N} \cdot [x]_{N \times 1} . \quad (4.5)$$

Nach der zweite Filterung

$$\begin{bmatrix} [c_2]_{\frac{N}{4} \times 1} \\ [d_2]_{\frac{N}{4} \times 1} \end{bmatrix} =: [\mathbf{W}_2]_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} \cdot [c_1]_{\frac{N}{2} \times 1} . \quad (4.6)$$

Setzen wir (4.5) und (4.6) zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} [c_2]_{\frac{N}{4} \times 1} \\ [d_2]_{\frac{N}{4} \times 1} \\ [d_1]_{\frac{N}{2} \times 1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_2]_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} \cdot [c_1]_{\frac{N}{2} \times 1} \\ [d_1]_{\frac{N}{2} \times 1} \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} [\mathbf{W}_2]_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} & [\mathbf{0}]_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} \\ [\mathbf{0}]_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} & [\mathbf{I}]_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} \end{bmatrix}}_{=: [\mathbf{W}_2]_{N \times N}} \cdot \begin{bmatrix} [c_1]_{\frac{N}{2} \times 1} \\ [d_1]_{\frac{N}{2} \times 1} \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} [\mathbf{W}_2]_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} & [\mathbf{0}]_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} \\ [\mathbf{0}]_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} & [\mathbf{I}]_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} \end{bmatrix}}_{=: [\mathbf{W}_2]_{N \times N}} \cdot [\mathbf{W}_1]_{N \times N} \cdot [x]_{N \times 1} \\
 &= [\mathbf{W}_2]_{N \times N} \cdot [\mathbf{W}_1]_{N \times N} \cdot [x]_{N \times 1} .
 \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{bmatrix} [c_Z]_{1 \times 1} \\ [d_Z]_{1 \times 1} \\ \vdots \\ [d_1]_{\frac{N}{2} \times 1} \end{bmatrix} = \underbrace{[\mathbf{W}_Z]_{N \times N} \cdots [\mathbf{W}_1]_{N \times N}}_{=: [\mathbf{W}]_{N \times N}} \cdot [x]_{N \times 1} = [\mathbf{W}]_{N \times N} \cdot [x]_{N \times 1} .$$

Dementsprechende bekommen wir die Wavelet-Basis durch Inversion (oder Transposition) von $[\mathbf{W}]_{N \times N}$, also

$$\begin{aligned}
 \underline{z} &= [\mathbf{W}]_{N \times N} \cdot [x]_{N \times 1} =: \mathbf{W} \cdot \underline{x} , \\
 \underline{x} &= \mathbf{W}^{-1} \cdot \underline{z} =: \Theta \cdot \underline{z} .
 \end{aligned}$$

In der Abbildung 4.6 werden die Ergebnisse eines Signal $x(t) = \sin 2\pi t$ aus Wavelet-Matrix und aus Wavelet-Transformation im MATLAB verglichen. Die Ergebnisse stimmen überein.

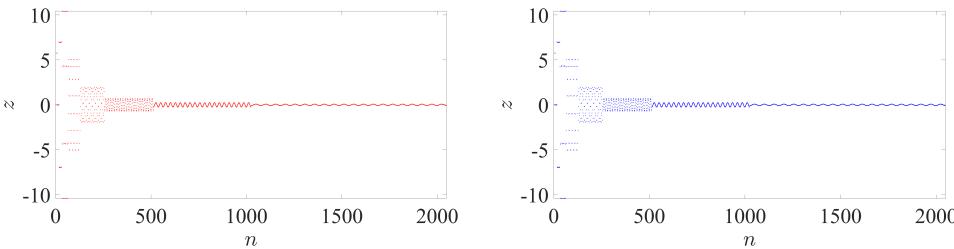


Abbildung 4.6: Koeffizienten, links: aus Wavelet-Matrix, rechts: aus Wavelet-Transformation.

Nach der Beschreibung von der WT mittels einer Matrix ist es möglich, die arithmetischen und inversen Prozesse günstiger in ein lineares Modell zu führen. Aber der Nachteil dabei ist, dass die Anzahl der Elemente zweier-Potenz sein muss.

4.6 Beispiele

In Folgenden werden zwei Beispiele gestellt, jeweils für 1D- und 2D-Signale. In den Beispielen werden wir die Signale erstellen, zufällig abtasten und schließlich durch das CS das Signal rekonstruieren.

4.6.1 1D-Signal-Rekonstruktion

Beispielsweise stellen wir nun eine Test-Funktion

$$x = 2 \sin(2\pi 10t) + \sin(2\pi 25t), \quad t \in [0, 3],$$

mit der Zeitdiskretisierung $\Delta t = 0.001$, wie in der Abbildung 4.7 gezeigt.

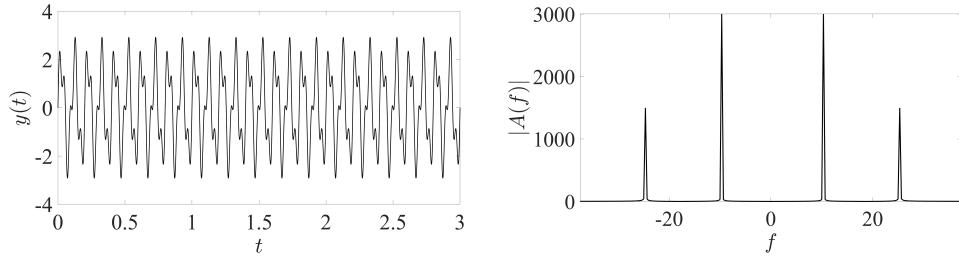


Abbildung 4.7: Signal und seine Spektrum.

Es ist anschaulich, dass das Signal mit der Fourier-Basis dünnbesetzt ist. Die Frequenzen liegen bei 10 Hz und 25 Hz. Laut Abtasttheorems muss die Abtastfrequenz f_A über $2f_G = 2 \times 25 = 50$ Hz sein, d. h. man muss mindestens $M = f_A \cdot (t_{\max} - t_{\min}) = 50 \times 3 = 150$ Messungen abtasten, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.

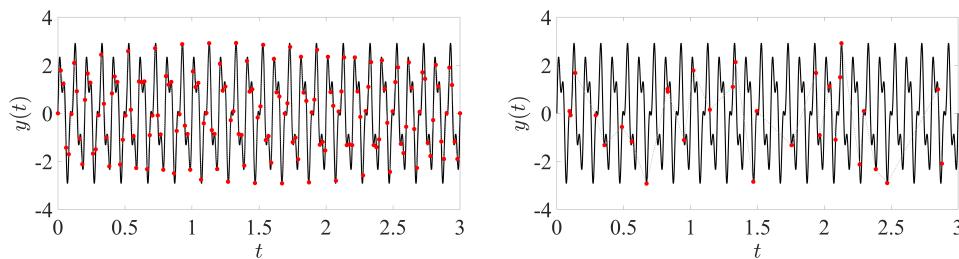


Abbildung 4.8: Messstellen, links: traditionelle Abtastung, rechts: CS-Abtastung.

Aber mithilfe des Compressive-Sensing kann man die Anzahl der Abtastungspunkte stark senken. Z. B. wählen wir nun Fourier-Basis und Delta-Messbasis, und tasten $M = 30$ Punkte an t_a^1, \dots, t_a^M zufällig ab, wie in der Abbildung gezeigt 4.8. Dann

erstellen wir die Basis

$$\Theta = \begin{bmatrix} \sin(2\pi f_0 t_0) & \cdots & \sin(2\pi f_N t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(2\pi f_0 t_N) & \cdots & \sin(2\pi f_N t_N) \end{bmatrix},$$

und Messbasis Φ

$$\Phi_{i,j} = \begin{cases} 1, & j = t_a^i, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also $\underline{y}_a = \Phi \cdot \Theta \cdot \underline{z} =: \tilde{\Theta} \cdot \underline{z}$. Nach der Lösung des Optimierungsproblems s

$$\underline{z} = \arg \min_{\underline{z}} \|\underline{z}\|_1,$$

NB: $\|\underline{y}_a - \tilde{\Theta} \cdot \underline{z}\|_2 \leq \varepsilon$,

rekonstruieren wir das Signal.

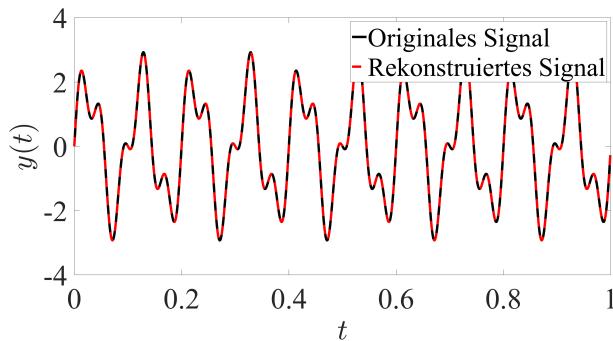


Abbildung 4.9: Rekonstruiertes Signal.

4.6.2 2D-Signal-Rekonstruktion

Nehmen wir nun ein Bild in Größe von 3024×4032 als Beispiel.



Abbildung 4.10: Originales Bild.

Um den Rechenaufwand zu sparen, machen wir zunächst ein Down-Sampling zu $N_x \times N_y = 48 \times 63 = N = 3024$. Und wählen wir zufällig 50% Punkte, also $M = \lfloor 48 \times 63 \times 50\% \rfloor = 1512$ Punkte $[x_a^1, y_a^1]^T, \dots, [x_a^M, y_a^M]^T$, sowie ihre Grauwerte g^1, \dots, g^M .



Abbildung 4.11: links: Bild nach Down-Sampling, rechts: Abtastung.

Nach der Nummerierung transformieren wir das 2D-Signal ins 1D-Signal, und wählen wir DCT-Funktionen in jeweils x und y Richtungen als Basisfunktionen, also

$$\Theta = \Theta_y \otimes \Theta_x .$$

Analog können die Delta-Messbasis Φ erstellen. Nach dem Lösen des Optimierungsproblems können wir das Bild rekonstruieren.



Abbildung 4.12: Rekonstruiertes Bild.

Wir können finden, dass das Ergebnis nicht perfekt ist. Der Grund dafür ist, dass die Dünnbesetztheit des Bilds auf DCT nicht stark ist. Wenn wir eine bessere Basis

finden können, auf der das Bild dünnbesetzt dargestellt wird, wird das Ergebnis besser als die Abbildung 4.12.

4.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel stellen wir das Modell für das Compressive-Sensing, ℓ_1 -Norm Optimierung und die Anforderungen an die Messbasis vor. Dann folgt die Einführung einiger grundlegender Basisfunktionen, und die Ableitung der Wavelet-Transformation in Matrixform. Schließlich zeigen wir zwei Beispiele des CS in Signalreduktion für jeweils 1D- und 2D-Signale. Wir können sehen, dass bei den dünnbesetzten Signalen die Anzahl der Messungen viel weniger benötigt werden. Im nächsten Kapitel, das der Hauptteil dieser Arbeit darstellt, werden wir die Anwendung vom CS auf nicht-dünnbesetzte Signale diskutieren. Mithilfe des Systemmodells können wir die Anforderung nach Dünnbesetztheit stark abschwächen.

