Forzamientos

Miller Mendoza [1,2] y José Daniel Muñoz [1]

[1] Grupo Simulación de Sistemas Físicos, CEIBA-Complejidad
Departmento de Física, Universidad Nacional de Colombia,
Crr 30 # 45-03, Ed. 404, Of. 348, Bogotá D.C., Colombia

[2] ETH-Zürich, Computational Physics for Engineering Materials,
Institute for Building Materials,
Schafmattstrasse 6, HIF, CH-8093 Zürich, Switzerland

COLCIENCIAS

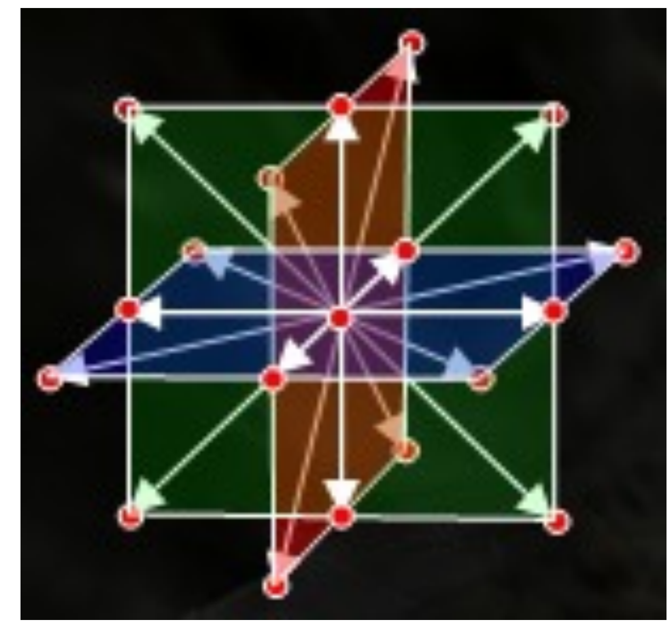
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

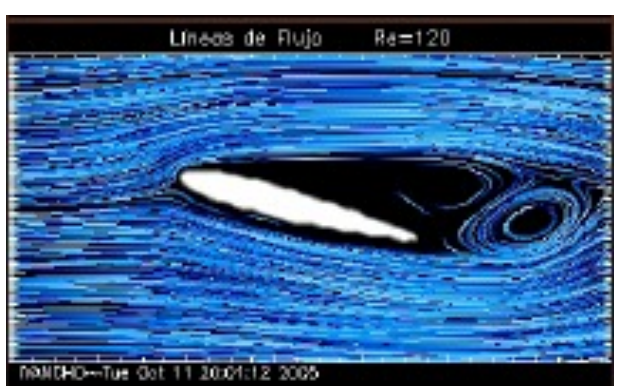
Forzamientos

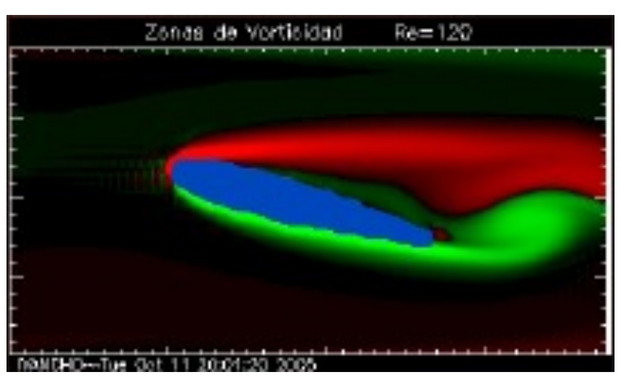
Miller Mendoza [1,2] y José Daniel Muñoz [1]

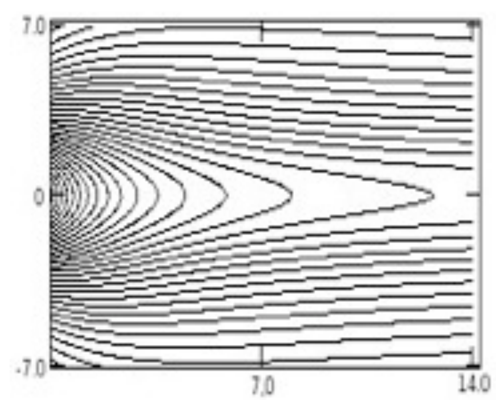
[1] Grupo Simulación de Sistemas Físicos, CEIBA-Complejidad
Departmento de Física, Universidad Nacional de Colombia,
Crr 30 # 45-03, Ed. 404, Of. 348, Bogotá D.C., Colombia

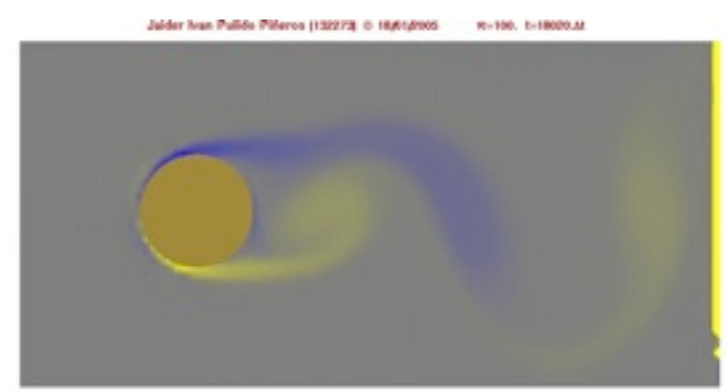
[2] ETH-Zürich, Computational Physics for Engineering Materials,
Institute for Building Materials,
Schafmattstrasse 6, HIF, CH-8093 Zürich, Switzerland

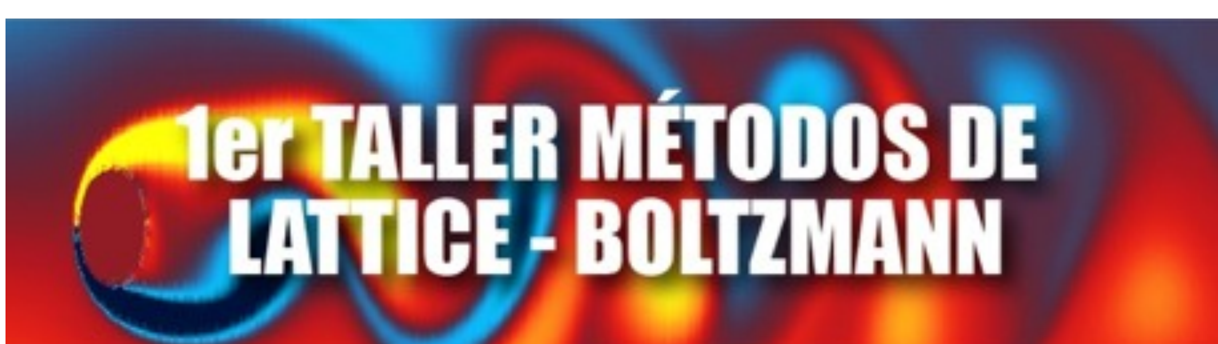












COLCIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

- Reemplazando y recombinando, obtenemos: (con τ =1/2, por simplicidad)

$$-\frac{1}{\tau\delta t}\left(\epsilon f_i^{(1)}+\epsilon^2 f_i^{(2)}\right)=\frac{\partial}{\partial t}f_i^{(0)}+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{v}_i f_i^{(0)}\right)$$

- Multiplicando tensorialmente por $\vec{v}_i$ a ambos lados, sumando sobre i y calculando el límite $\epsilon \longrightarrow 0$ se obtienen las leyes de conservación que el sistema cumple,

$$0=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{J} \qquad \rho=\sum_i f_i^{(0)}$$

$$0=\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}+\nabla\cdot\Pi^{(0)} \qquad \vec{J}=\sum_i \vec{v}_i f_i^{(0)}$$

$$0=\frac{\partial\Pi^{(0)}}{\partial t}+\nabla\cdot\Lambda \qquad \Pi^{(0)}=\sum_i \vec{v}_i\otimes\vec{v}_i f_i^{(0)}$$

Estas son las ecuaciones diferenciales que el sistema cumple

Una ley de conservación con fuentes

Escalar: $$\frac{\partial A}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{S} + \sigma$$

Vectorial: $$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{U} + \vec{F}$$

¿Cómo insertar esos términos fuente?

R= Forzamientos

Dos tipos de forzamientos:

1. cambiando las cantidades macroscópicas, o

$$\rho \vec{U} = \sum_i \vec{v}_i f_i + \frac{\delta t}{2} \vec{F}$$

$$f_i(\vec{x} + \delta t \vec{v}_i, t + \delta t) - f_i(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau}[f_i(\vec{x}, t) - f_i^{(\mathrm{eq})}(\vec{x}, t)]$$

2. Modificando el término de colisión

$$+ a \vec{v}_i \cdot \vec{F}$$

1. Cambiando las cantidades macroscópicas

Hacemos

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \sum_i f_i \\ A^* &= A + \tfrac{\delta t}{2}\sigma \end{aligned}}$$

y consideramos que la fuente es de 1er orden en ϵ

$$\sigma = \epsilon\sigma_1$$

Como la función de equilibrio se calcula con A^*, y σ es de primer orden en ϵ

$$f_i^{(\mathrm{eq})} = f_i^{(\mathrm{eq})(0)} + \epsilon f_i^{(\mathrm{eq})(1)} + \epsilon^2 f_i^{(\mathrm{eq})(2)}$$

1. Cambiando las cantidades macroscópicas

Luego, la expansión de Chapman-Enskog nos queda

$$\begin{aligned}
&\epsilon\delta t\left[\frac{\partial}{\partial t_1}+\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_1\right](f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{(1)})+\\
&\epsilon^2\left\{\delta t\left[\frac{\partial}{\partial t_2}\right]+\frac{\delta t^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}+\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_1\right]^2\right\}(f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{(1)})\\
= \quad & -\frac{1}{\tau}\left[(f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{(1)}+\epsilon^2 f_i^{(2)})-(f_i^{\mathrm{eq}(0)}+\epsilon f_i^{\mathrm{eq}(1)}+\epsilon^2 f_i^{\mathrm{eq}(2)})\right]
\end{aligned}$$

Igualando orden a orden

$$\begin{aligned}
Orden\ 0 \quad &: \quad f_i^{\mathrm{eq}(0)} = f_1^{(0)},\\
Orden\ 1 \quad &: \quad -\frac{1}{\tau}\left(f_i^{(1)}-f_i^{\mathrm{eq}(1)}\right)=\delta t\left[\frac{\partial}{\partial t_1}+\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_1\right]f_i^{(0)},\\
Orden\ 2 \quad &: \quad -\frac{1}{\tau}\left(f_i^{(2)}-f_i^{\mathrm{eq}(2)}\right)=\\
&\delta t\left[\frac{\partial}{\partial t_1}+\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_1\right]f_i^{(1)}+\frac{\delta t^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}+\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_1\right]^2 f_i^{(0)}+\delta t\left[\frac{\partial}{\partial t_2}\right]f_i^{(0)}
\end{aligned}$$

1. Cambiando las cantidades macroscópicas

Reemplazando el orden1 en el orden 2,

$$Orden\ 0 \quad : \quad f_i^{\mathrm{eq}(0)} = f_1^{(0)},$$

$$Orden\ 1 \quad : \quad -\frac{1}{\tau}\left(f_i^{(1)} - f_i^{\mathrm{eq}(1)}\right) = \delta t \left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_1\right] f_i^{(0)},$$

$$Orden\ 2 \quad : \quad -\frac{1}{\tau}\left(f_i^{(2)} - f_i^{\mathrm{eq}(2)}\right) =$$

$$\delta t \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_1\right] f_i^{(1)} + \delta t \left[\frac{\partial}{\partial t_2}\right] + \frac{\delta t}{2\tau}\left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_1\right] f_i^{eq(1)}$$

$$= \quad \delta t \left[\frac{\partial}{\partial t_2}\right] f_i^{(0)} + \delta t \left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_1\right] f_i^{eq(1)} \qquad \left(para \quad \tau = \frac{1}{2}\right) \quad .$$

Multiplicando el orden 1 por ϵ y el orden 2 por ϵ^2 , y sumando

$$-\frac{1}{\tau \delta t}\left[\left(\epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)}\right) - \left(\epsilon f_i^{\mathrm{eq}(1)} + \epsilon^2 f_i^{\mathrm{eq}(2)}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(f_i^{(0)} + \epsilon f_i^{eq(1)}\right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{v}_i \left(f_i^{(0)} + \epsilon f_i^{eq(1)}\right)\right]$$

1. Cambiando las cantidades macroscópicas

$$-\frac{1}{\tau\delta t}\left[\left(\epsilon f_i^{(1)}+\epsilon^2 f_i^{(2)}\right)-\left(\epsilon f_i^{\mathrm{eq}(1)}+\epsilon^2 f_i^{\mathrm{eq}(2)}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left(f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{eq(1)}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{v}_i\left(f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{eq(1)}\right)\right]$$

Sumando sobre i,

$$\frac{1}{\tau\delta t}\left(\epsilon\sum_i f_i^{\mathrm{eq}(1)}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[A+\left(\epsilon\sum_i f_i^{\mathrm{eq}(1)}\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{S}+\left(\epsilon\sum_i \vec{v}_i f_i^{\mathrm{eq}(1)}\right)\right]$$

1. Cambiando las cantidades macroscópicas
Ejemplo: Ondas

$$f_i^{(\mathrm{eq})} = \begin{cases} A^* \left[1 - 3c^2 (1 - w_0)\right] & \text{para} \quad i = 0 \\ 3w_i \left[c^2 A^* + \left(\vec{v_i} \cdot \vec{J}\right)\right] & \text{para} \quad i \neq 0 \end{cases}$$

Como $A^* = A + \frac{\delta t}{2}\sigma$ y $\sigma = \epsilon \sigma_1$

$$f_i^{\mathrm{eq}(1)} = \begin{cases} \frac{\delta t}{2}\sigma_1 \left[1 - 3c^2 + 3w_0 c^2\right] & \text{para} \quad i = 0 \\ 3w_i c^2 \frac{\delta t}{2}\sigma_1 & \text{para} \quad i \neq 0 \end{cases}$$

Luego,

$$\sum_i f_i^{\mathrm{eq}(1)} = 3c^2 \frac{\delta t}{2}\sigma_1 \sum_i w_i + \frac{\delta t}{2}\sigma_1 \left[1 - 3c^2\right] = \frac{\delta t}{2}\sigma_1$$

$$\epsilon \sum_i \vec{v}_i f_i^{\mathrm{eq}(1)} = \sum_{i \neq 0} \vec{v}_i 3 w_i c^2 \frac{\delta t}{2}\sigma = 3c^2 \frac{\delta t}{2}\sigma \sum_i w_i \vec{v}_i = 0$$

1. Cambiando las cantidades macroscópicas Ejemplo: Ondas

$$\sum_i f_i^{\text{eq}(1)} = \frac{\delta t}{2}\sigma_1 \qquad\qquad \epsilon \sum_i \vec{v}_i f_i^{\text{eq}(1)} = 0$$

Entonces

$$\frac{1}{\tau \delta t}\left(\epsilon \sum_i f_i^{\text{eq}(1)}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[A + \left(\epsilon \sum_i f_i^{\text{eq}(1)}\right)\right] + \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{S} + \left(\epsilon \sum_i \vec{v}_i f_i^{\text{eq}(1)}\right)\right]$$

se convierte en

$$\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\left[A + \frac{\delta t}{2}\sigma\right] + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

y, finalmente,

$$\boxed{\sigma = \frac{\partial A^*}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}}$$

Es decir, el que cumple la ecuación es A^*
Por lo tanto, éste es el campo real

2. Modificando el término de colisión

$$f_i(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_i\,,t+1)-f_i(\boldsymbol{r},t)=\Omega_i(\boldsymbol{r},t),$$

$$\Omega_i(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{\tau}[f_i(\boldsymbol{r},t)-\bar{f}_i(\boldsymbol{r},t)]+\frac{D}{bc^2}F_\alpha e_{i\alpha}$$

El único problema es que resulta ser de primer orden

3. Combinar las dos para lograr 2o Orden

Guo, Zheng & Shi (2002)

Fluidos

1) $$\rho \mathbf{u}^* = \sum_i \mathbf{e}_i f_i \boxed{+ \frac{\Delta t}{2}\mathbf{F}}$$

2) $$f_i(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i\Delta t, t+\Delta) - f_i(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{\tau}[f_i(x,t) - f_i^{(eq)}(x,t)] \boxed{+\Delta t F_i}$$

con $$F_i = \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right)\omega_i\left[\frac{\mathbf{e}_i - \mathbf{v}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{v})}{c_s^4}\mathbf{e}_i\right]\cdot\mathbf{F}$$

Nota: Observe que F_i se anula si $\tau = 1/2$

ssf+un

Gracias!

jdmunozc@unal.edu.co