

Haider Santiago Calderon Rodriguez

Ejemplo 9.2 Ogata

Considere la siguiente representación en el espacio de estados de un sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones se escriben en una forma estandar como:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Donde :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de la matriz A son:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

Por tanto los tres valores propios son distintos. Si se define un nuevo conjunto de variables de estado

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

o bien

$$x = Pz$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Entonces substituyendo la ecuación, se obtiene: $P\dot{z} = APz + Bu$

Pre-multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por P^{-1} se obtiene:

$$\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & 0,5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & 0,5 \\ -3 & -4 & 1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

Al simplificar se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix} u$$

Que corresponde a una ecuación de estado que describe el mismo sistema definido mediante la ecuación inicial.
La ecuación de salida se modifica a:

$$y = Cp:$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz de transformación P definida mediante la ecuación modifica la matriz de coeficientes de z en la matriz diagonal. Como se aprecia en la ecuación, las tres ecuaciones de estado escalares no están acopladas. Observe también que los elementos de la diagonal principal de la matriz $P^{-1}AP$ en la ecuación son idénticos a los tres valores propios de A . Es muy importante señalar que los valores propios de A son idénticos a los de $P^{-1}AP$.