Ejemplo 9,5 Ogata

Andres Camilo Patiño Ariza - 20211005105

Obtengo tambien la transición de estados $\phi(t)^{-1}(t)$

$$A = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga tambien la inversa de la matriz de transición de estados $\phi^{-1}(t)$

Para este sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados $\phi(t)$ se obtiene mediante

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[sI - A]^{-1}]$$

Como

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

La inversa de $(sI - A)$ se obtiene mediante

$$sI - A = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Si se tiene en cuenta que $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ se obtiene la inversa de la matriz de transicion de estados del modo siguiente

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{2t} & e^{t} - e^{2t} \\ -2e^{t} + 2e^{2t} & -e^{t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$