Ejemplo Norman Nise

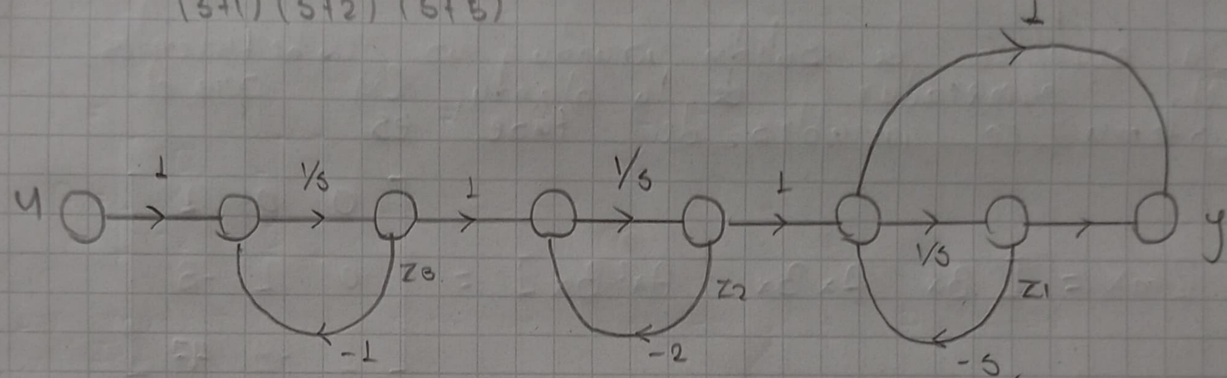
Controlador diseñado por transformación

Andrés Camilo Patiño Ariza - 20211005105

$OS\% = 20.8\%$

$T_s = 4s$

$$G(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$



$$\overset{\circ}{z} = A_z z + B_z u = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = C_z z = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad es evaluada como

$$C_{Mz} = \begin{bmatrix} B_z & A_z B_z & A_z^2 B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que $|C_{Mz}| = -1$ el sistema es Controlable

Ahora convertimos el sistema a variables de fase primero encontrando la ecuación característica

$\det(sI - A_x) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10 = 0$

$$\dot{x} = A_x x + B_x u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

La ecuación de salida usando los coheficientes del numerador de la planta, C_M para el sistema en variables de fase es

$$C_{mx} = \begin{bmatrix} B_x & A_x B_x & A_x^2 B_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 1 & -8 & 47 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$P = C_{mz} C_{mx}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora diseñamos el controlador usando la representación de variable de fase y usando la matriz P transformamos el diseño a la representación original

Para $OS\%$. $20,8\% x_0$ y $T_s = 4s$

El factor de la ecuación característica en lazo cerrado es $s^2 + 2s + 5$

El cero se encuentra en $s = -4$

$$D(s) = (s+4)(s^2+2s+5) = s^3 + 6s^2 + 13s + 20 = 0$$

La ecuación de estados para la forma de fase en retroalimentación es

$$\dot{x} = (A_x - B_x k_x)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(10+k_{1x}) & -(17+k_{2x}) & -(8+k_{3x}) \end{bmatrix}$$

$$y = [\,4 \quad 1 \quad 0\,]\,x$$

La ecuación característica es

$$\det(sI-(A_x - B_x k_x)) = s^3 + (8+k_3)s^2 + (17+k_2)s + (10+k_1) = 0$$

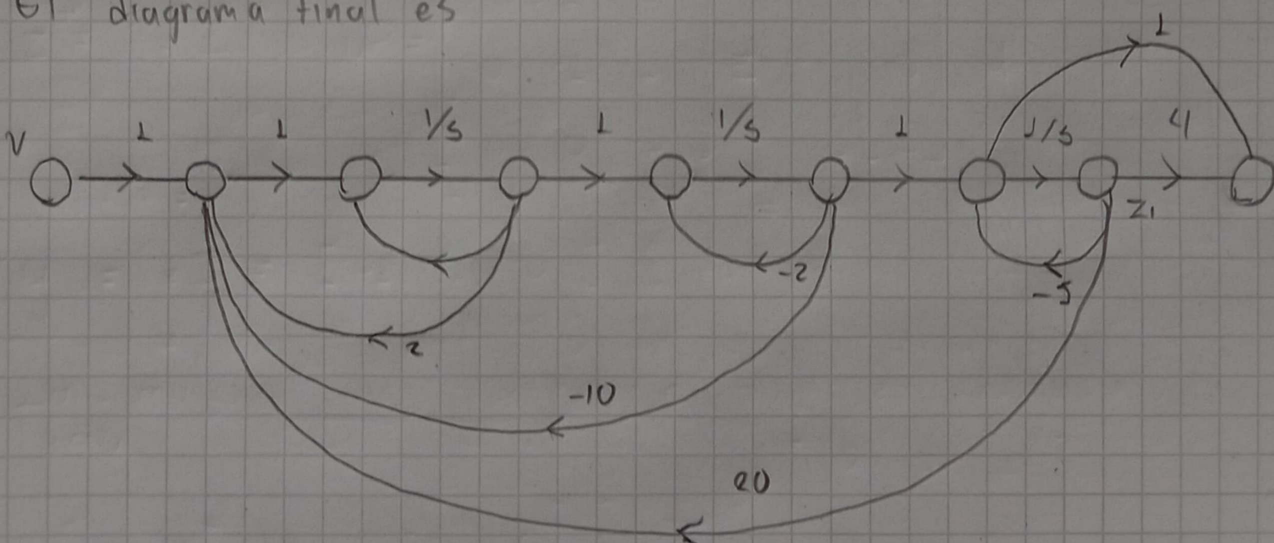
Vemos que

$$k_x = [\,k_1 \quad k_2 \quad k_3\,] = [\,10 \quad -4 \quad -2\,]$$

Podemos transformar el controlador de vuelta al original

$$k_z = k_x P^{-1} = [\,-20 \quad 10 \quad -2\,]$$

El diagrama final es



Verificamos el diseño

$$\dot{z} = (A_z - B_z k_z)z + B_z v = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$y = [\,-1 \quad 1 \quad 0\,]\,z$$

$$T(s) = \frac{(s+4)}{s^3+6s^2+13s+20} = \frac{1}{s^2+2s+5}$$

Simulando vemos que se cumplen los requisitos establecidos