

Ejemplo 9.5

Obtenga la transición de estados $\phi(t)^{-1}(t)$

$$A = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga también la inversa de la matriz de transición de estados $\phi^{-1}(t)$

Para este sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados $\phi(t)$ se obtiene mediante

$$\phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [sI - A]^{-1}$$

como

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

La inversa de $(sI - A)$ se obtiene mediante

$$sI - A = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\text{Por lo tanto } \phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [sI - A]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Si se tiene en cuenta que $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$ se obtiene la inversa de la matriz de transición de estados del modo siguiente:

$$\phi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$