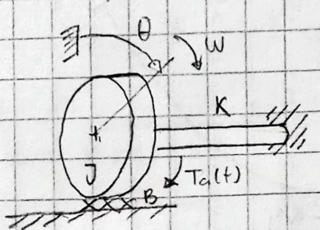
Haider Santiago Calderón Rodríguez 20211005075

1. Para el sistema rotacional en la figura, determine:
   a) Representación en espacio de estados
   b) Diagrama de bloques
   c) Diagrama de flujo de señal



$$\Sigma F = J\ddot{\theta}$$

$$T - k\theta - b\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{T}{J} - \frac{k}{J}\theta - \frac{b}{J}\dot{\theta} \quad (1)$$

Variables de estado

$q_1 = \theta$

$q_2 = \dot{\theta} = \dot{q}_1 \qquad \dot{q}_2 = \ddot{\theta}$

Remplazando en (1):

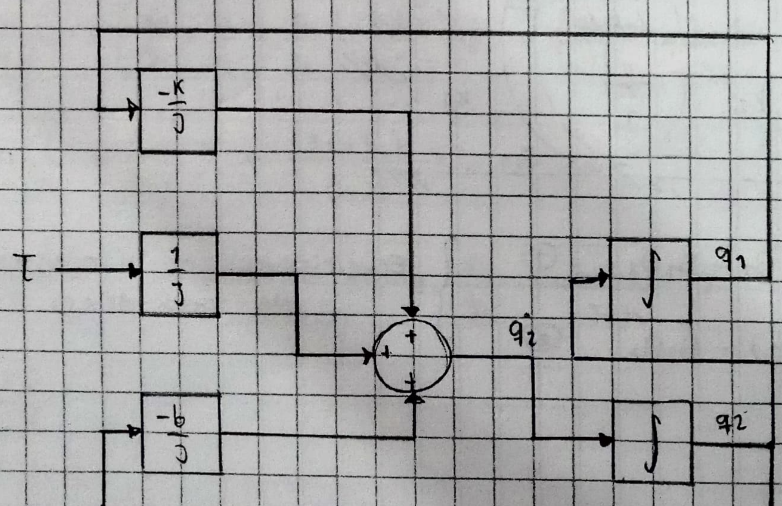
$$\dot{q}_2 = \frac{T}{J} - \frac{k}{J}q_1 - \frac{b}{J}q_2$$

a)

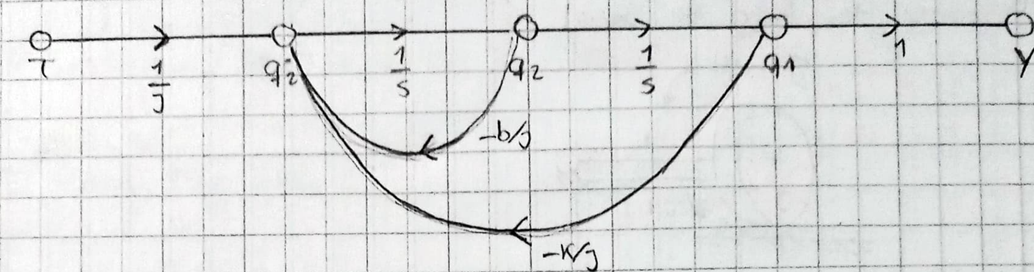
$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/J & -b/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix} T$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

b)



c)



d) $T - K\theta - b\dot{\theta} = J\ddot{\theta}$

$T = J\ddot{\theta} + K\theta + b\dot{\theta}$

$\mathcal{L}[T] = \mathcal{L}[J\ddot{\theta} + K\theta + b\dot{\theta}]$

$T(s) = Js^2\Theta(s) + bs\Theta(s) + K\Theta(s)$

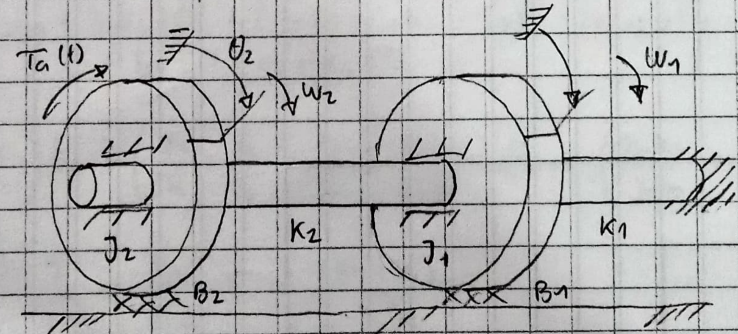
$T(s) = \Theta(s)\,[Js^2 + bs + K]$

$$\boxed{\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + K} = G(s)}$$

2 Para el sistema rotacional en la figura, asuma $\theta_2 > \theta_1$, y determine:

a) La función de transferencia relacionando θ_2 y T_a
b) La representación en espacio de estados
c) Así como el diagrama de flujo de señal
d) Diagrama de bloques

Todo en términos de θ_2.



$$\left.\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 &= K_2(\theta_2 - \theta_1) - K_1\theta_1 - B_1\dot{\theta}_1 \quad (1) \\ J_2\ddot{\theta}_2 &= T_a - K_2(\theta_2 - \theta_1) - B_2\dot{\theta}_2 \quad (2) \end{aligned}\right\}$$ Ecuaciones de movimiento de cada disco

De ①:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + K_2\theta_1 + K_1\theta_1 + B_1\dot{\theta}_1 = K_2\theta_2$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$J_1 s^2\theta_1(s) + B_1 s\theta_1(s) + (K_1+K_2)\theta_1(s) = K_2\theta_2(s)$$

$$\theta_1(s) = \frac{K_2\theta_2(s)}{J_1 s^2 + B_1 s + (K_1+K_2)} \quad ③$$

De ②:

$$J_2\ddot{\theta}_2 + K_2\theta_2 + B\dot{\theta}_2 = T_a + K_2\theta_1$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$J_2 s^2\theta_2(s) + B_2 s\theta_2 + K_2\theta_2(s) = T_a(s) + K_2\theta_1(s)$$

Sustituyendo 3:

$$J_2 s^2\theta_2(s) + B_2 s\theta_2(s) + K_2\theta_2(s) = T_a(s) + K_2\left(\frac{K_2\theta_2(s)}{J_1 s^2 + B_1 s + (K_1+K_2)}\right)$$

Simplificando:

$$\left(J_2 s^2 + B_2 s + K_2 - \frac{K_2^2}{J_1 s^2 + B_1 s + (K_1+K_2)}\right)\theta_2(s) = T_a(s)$$

$$G(s) = \frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + b_1 s + k_1 + k_2}{(J_2 s^2 + B_2 s + K_2)(J_1 s^2 + B_1 s + (K_1+K_2)) - K_2^2}$$

$$G(s) = \frac{J_1 s^2 + b_1 s + k_1 + k_2}{J_1 J_2 s^4 + (J_2 b_1 + J_1 b_2)s^3 + (J_2 k_1 + J_2 k_2 + J_1 k_2 + b_1 b_2)s^2 + (b_2 k_1 + b_2 k_2 + b_1 k_2)s + k_1 k_2}$$

$$J_1 J_2\ddddot{\theta}_2 + (J_2 b_1 + J_1 b_2)\dddot{\theta}_2 + (J_2 k_1 + J_2 k_2 + J_1 k_2 + b_1 b_2)\ddot{\theta}_2 + (b_2 k_1 + b_2 k_2 + b_1 k_2)\dot{\theta}_2 + k_1 k_2\theta_2$$
$$= J_1\ddot{\tau} + b_1\dot{\tau} + (k_1+k_2)\tau$$

$$\ddddot{\theta}_2 + \left(\frac{b_1}{J_1} + \frac{b_2}{J_2}\right)\dddot{\theta}_2 + \left(\frac{k_1}{J_1} + \frac{k_2}{J_2} + \frac{k_2}{J_1} + \frac{b_1 b_2}{J_1 J_2}\right)\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{b_2 k_1}{J_1 J_2} + \frac{b_2 k_2}{J_1 J_2} + \frac{b_1 k_2}{J_1 J_2}\right)\dot{\theta}_2 + \left(\frac{k_1 k_2}{J_1 J_2}\right)\theta_2$$

$$= \frac{\ddot{\tau}}{J_2} + \frac{b_1}{J_1 J_2}\dot{\tau} + \frac{(k_1+k_2)}{J_1 J_2}\tau$$

$$a_1 = \frac{b_1 + b_2}{J} \;;\; a_2 = \frac{k_1 + k_2}{J_1} + \frac{k_2}{J_2} + \frac{b_1 b_2}{J_1 J_2} \;;\; a_3 = \frac{b_2 k_1}{J_1 J_2} + \frac{b_2 k_2}{J_1 J_2} + \frac{b_1 k_2}{J_1 J_2}$$

$$a_4 = \frac{k_1 k_2}{J_1 J_2}$$

$$b_0 = 0 \; ; \; b_1 = 0 \; ; \; b_2 = \frac{1}{J_2} \; ; \; b_3 = \frac{b_1}{J_1 J_2} \; ; \; b_4 = \frac{(k_1 + k_2)}{J_1 J_2}$$

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = 0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = 1/J_2$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 = \frac{b_1}{J_1 J_2} - \left(\frac{b_1}{J_1} + \frac{b_2}{J_2} \right) \frac{1}{J_2}$$

$$= \frac{b_2}{J_2^2}$$

$$\beta_4 = b_4 - a_1 \beta_3 - a_2 \beta_2 = \frac{k_1 + k_2}{J_1 J_2} - \left[\frac{b_1}{J_1} + \frac{b_2}{J_2} \right] \left[\frac{b_1}{J_1 J_2} - \frac{1}{J_2} \left(\frac{b_1}{J_1} + \frac{b_2}{J_2} \right) \right] - \frac{1}{J_2} \left[\frac{k_1 + k_2}{J_1} + \frac{k_2}{J_2} + \frac{b_1 b_2}{J_1 J_2} \right]$$

Variables de estado:

$$q_1 = \theta_2$$

$$q_2 = \dot{q}_1 = \dot{\theta}_2 \quad \rightarrow \quad \dot{q}_1 = q_2 + \beta_1 u$$

$$q_3 = \dot{q}_2 = \ddot{\theta}_2 \quad \quad \dot{q}_2 = q_3 + \beta_2 u$$

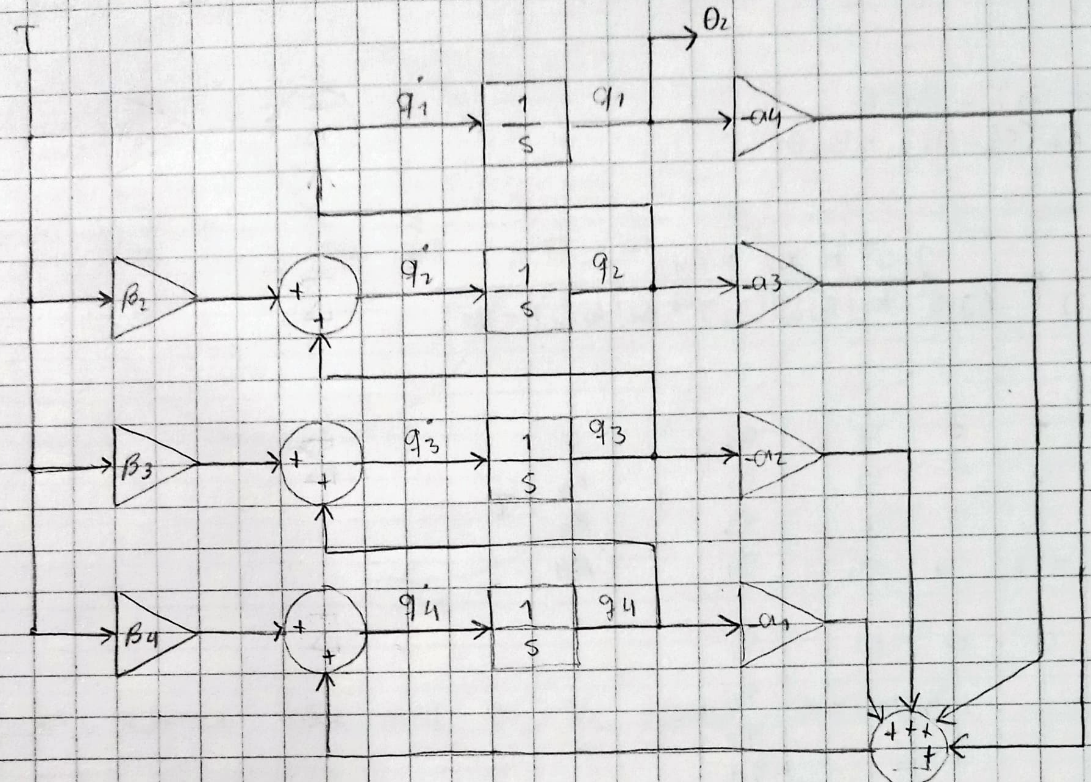
$$q_4 = \dot{q}_3 = \dddot{\theta}_2 \quad \quad \dot{q}_3 = q_4 + \beta_3 u$$

$$\dot{q}_4 = \ddddot{\theta}_2 \quad \quad \dot{q}_4 = -a_4 q_1 - a_3 q_2 - a_2 q_3 - a_1 q_4 + \beta_4 u$$

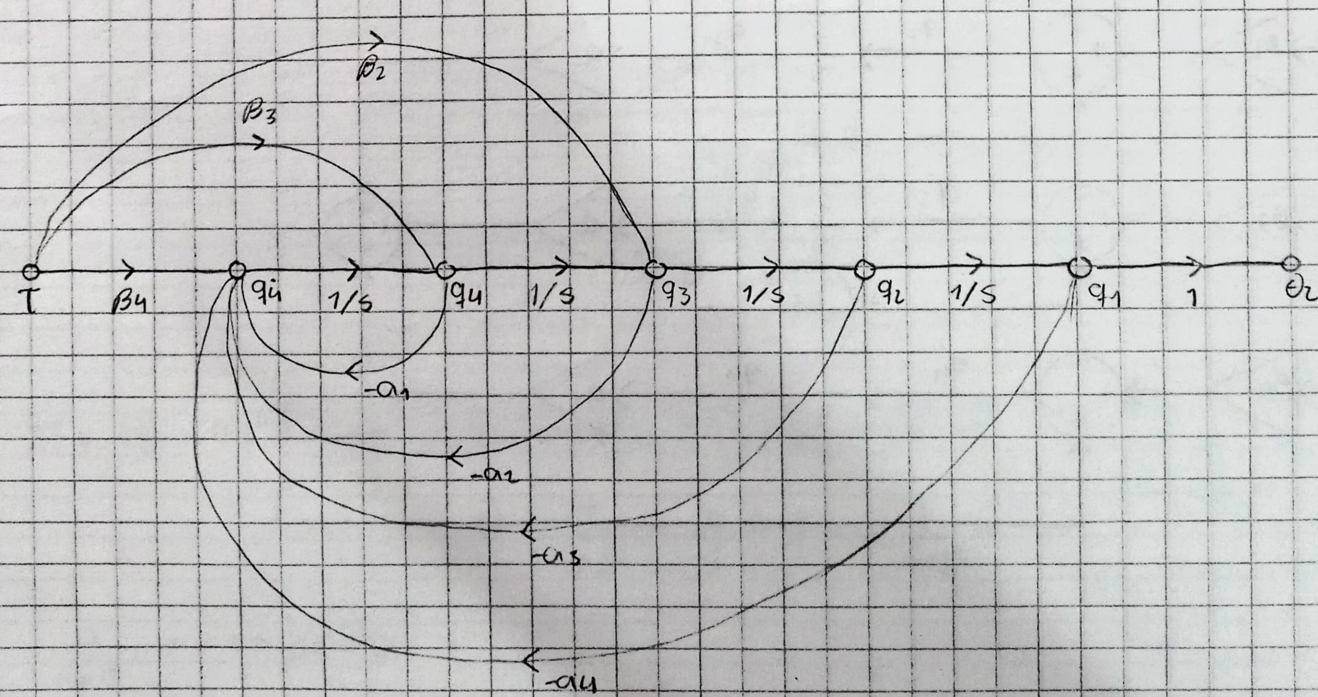
Espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \tau$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$



T
θ2
q̇1
q1
1/s
-a4
q̇2
q2
-a3
β2
q̇3
q3
-a2
β3
q̇4
q4
-a1
β4



β2
β3
T
β4
q̇4
1/s
q4
q3
q2
q1
1
θ2
-a1
-a2
-a3
-a4

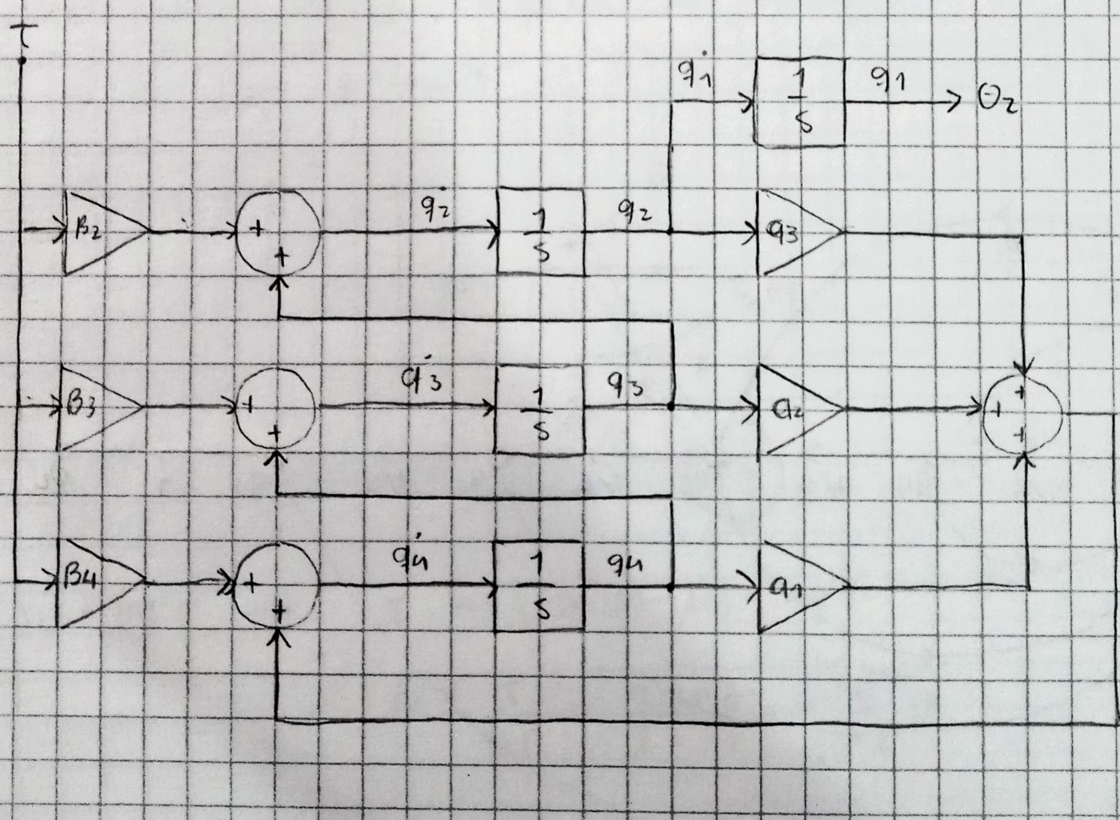
3) Para el sistema del item anterior, mismos requerimientos considerando $k_1 = 0$

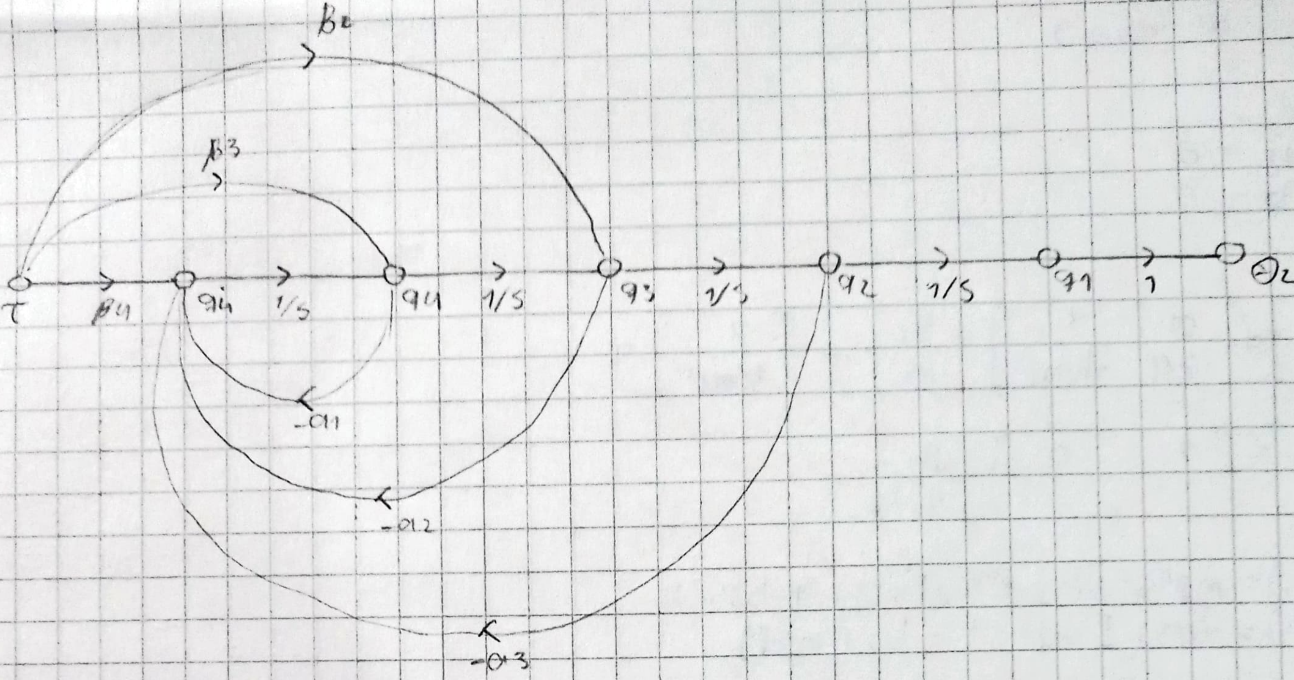
$$J_1\ddot{\theta}_1 = k_2(\theta_2-\theta_1) - B_1\dot{\theta}_1$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 = \tau_a - k_2(\theta_2-\theta_1) - B_2\dot{\theta}_2$$

$$G(s) = \frac{\theta_2(s)}{\tau_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + k_2 + B_1 s}{(J_1 s^2 + k_2 + B_1 s)(J_2 s^2 + k_2 + B_2 s) - k_2^2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \tau$$

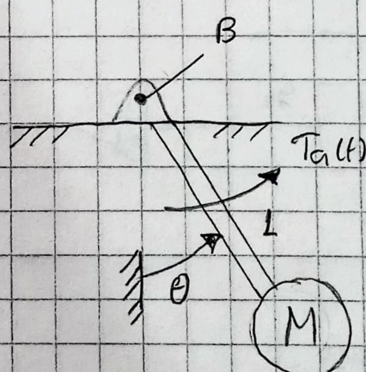
$$\theta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$





④ Para el sistema rotacional en la figura, determine:

a) La función de transferencia relacionando θ y Ta.
b) La representación en el espacio de estados
c) Diagrama de bloques
d) Diagrama de flujo de señal



$$\Sigma F = I\ddot{\theta} = ml^2\ddot{\theta} \rightarrow \quad \tau - mgl\,sen(\theta) - b\dot{\theta} = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{ml^2} - \frac{g}{l}sen(\theta) - \frac{b}{ml^2}\dot{\theta}$$

$\underset{\rightarrow 0}{\theta} \rightarrow sen(\theta) \approx 0$

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{ml^2} - \frac{g}{l}\theta - \frac{b}{ml^2}\dot{\theta}$$

Variables de estado

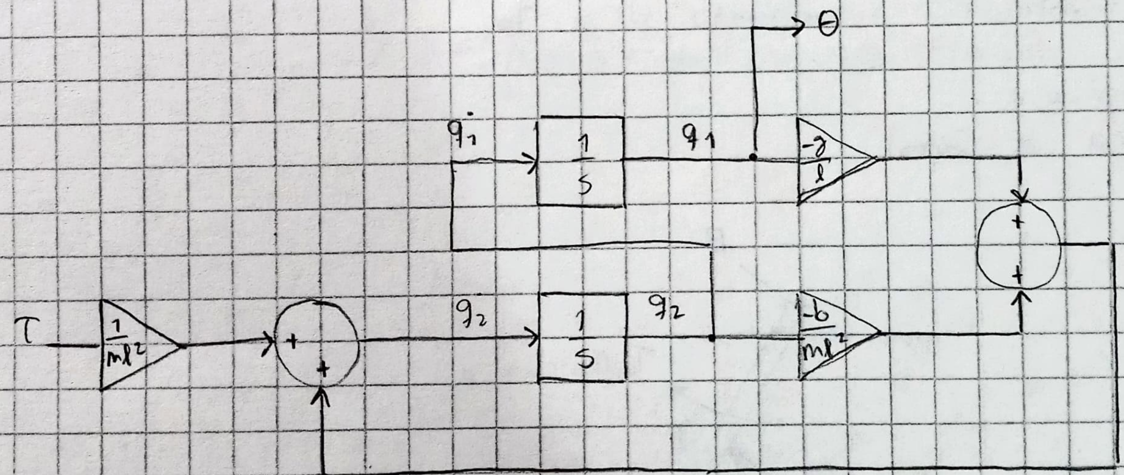
$$q_1 = \theta$$
$$q_2 = \dot{q}_1 = \dot{\theta}$$
$$\dot{q}_2 = \ddot{\theta}$$

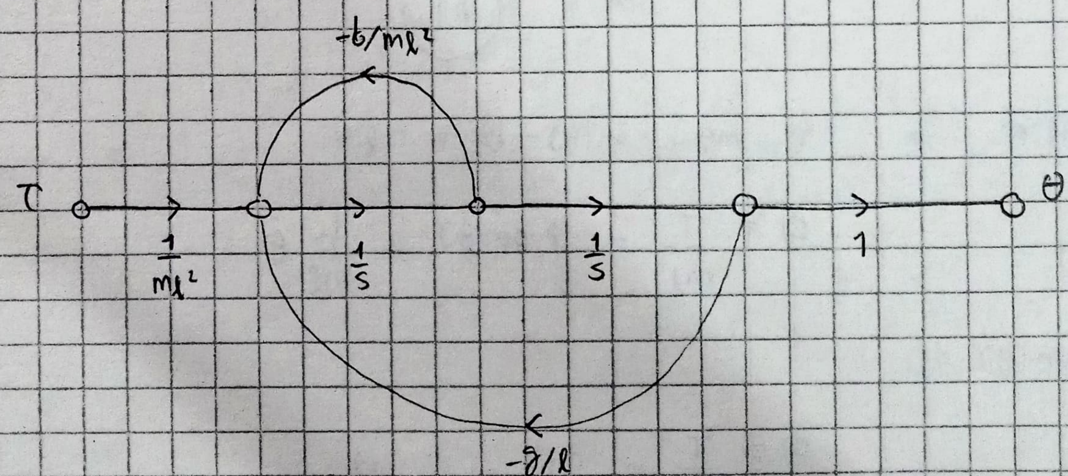
$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & -b/ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/ml^2 \end{bmatrix} \tau$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$\tau(s) = ml^2 s^2 \theta(s) + mgl\theta(s) + bs\theta(s)$$
$$\tau(s) = \theta(s)\left[ml^2 s^2 + bs + mgl\right]$$

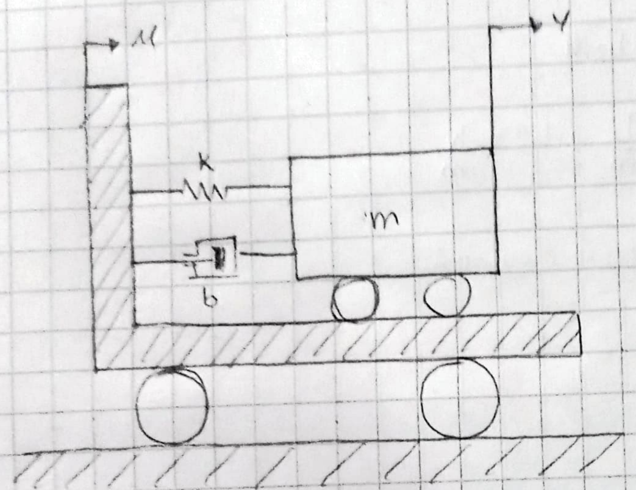
$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{ml^2 s^2 + bs + mgl}$$





Punto 1
Haider Santiago Calderón Rodríguez 20211005075

(1) Ejemplo 3.3



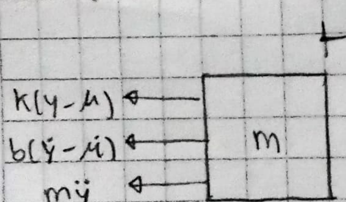
Se asume que el carro está inmóvil para $t<0$, igual que el sistema masa resorte amortiguador, $u(t)$ es el desplazamiento del carro y la entrada del sistema, en $t=0$ el carro se mueve a velocidad constante $\dot{u} = \text{constante}$, el desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida. Se asume que la fuerza de fricción es proporcional a $\dot{y}-\dot{u}$ y la fuerza del resorte proporcional a $y-u$

Por segunda ley de Newton $(ma = \Sigma F)$

$$\frac{md^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y-u)$$

$$\frac{md^2y}{dt^2} + \frac{bdy}{dt} + ky = \frac{bdu}{dt} + ku$$

Diagrama de cuerpo libre:



$$-k(y-u) - b(\dot{y}-\dot{u}) - m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku \quad (1)$$

Aplicando transformada de Laplace y asumiendo condición inicial cero

$$(ms^2 + bs + k)\,Y(s) = (bs + k)\,U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$ Función de transferencia

Obteniendo la expresion en espacio de estados del sistema

de (1) : $\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$

de forma estandar

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

$$a_1 = \frac{b}{m}, \quad a_2 = \frac{k}{m}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{b}{m}, \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

Por la derivada de la entrada (2-35) 4 ecuaci

$$B_0 = b_0 = 0$$
$$B_1 = b_1 - a_1 B_0 = \frac{b}{m}$$
$$B_2 = b_2 - a_1 B_1 - a_2 B_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

De la ecuacion (2-34)

$$x_1 = y - B_0 u = y$$
$$x_2 = \dot{x}_1 - B_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

De la ecuacion (2-38)

$$\dot{x}_1 = x_2 + B_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + B_2 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

Tenemos entonces:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b/m \\ k/m - (b/m)^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Diagrama de bloques

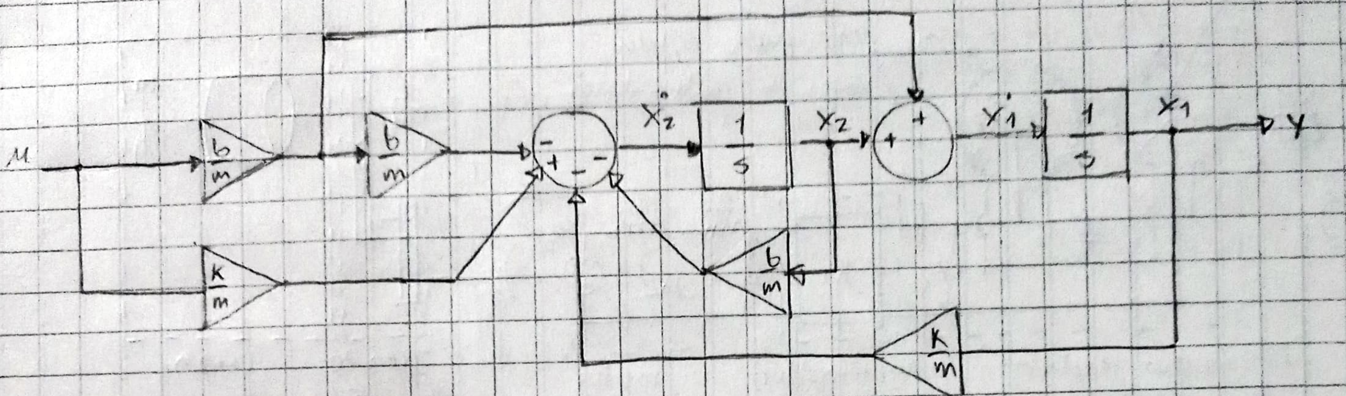
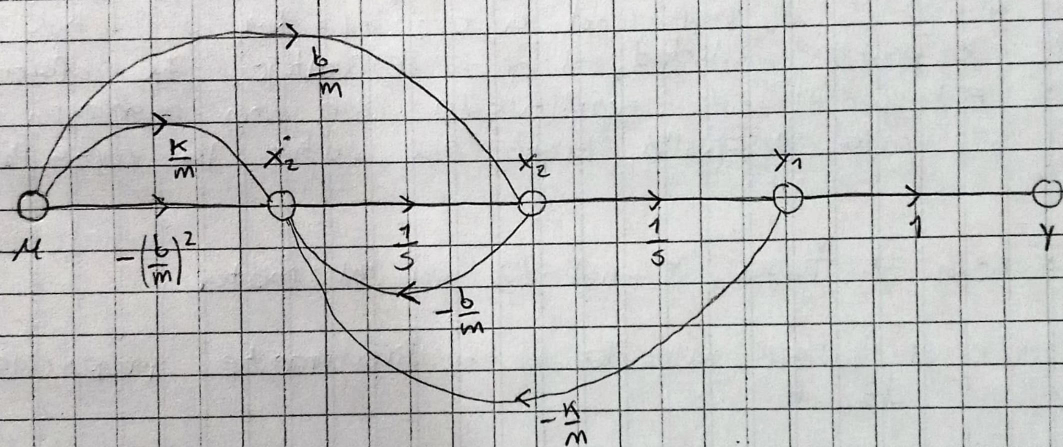
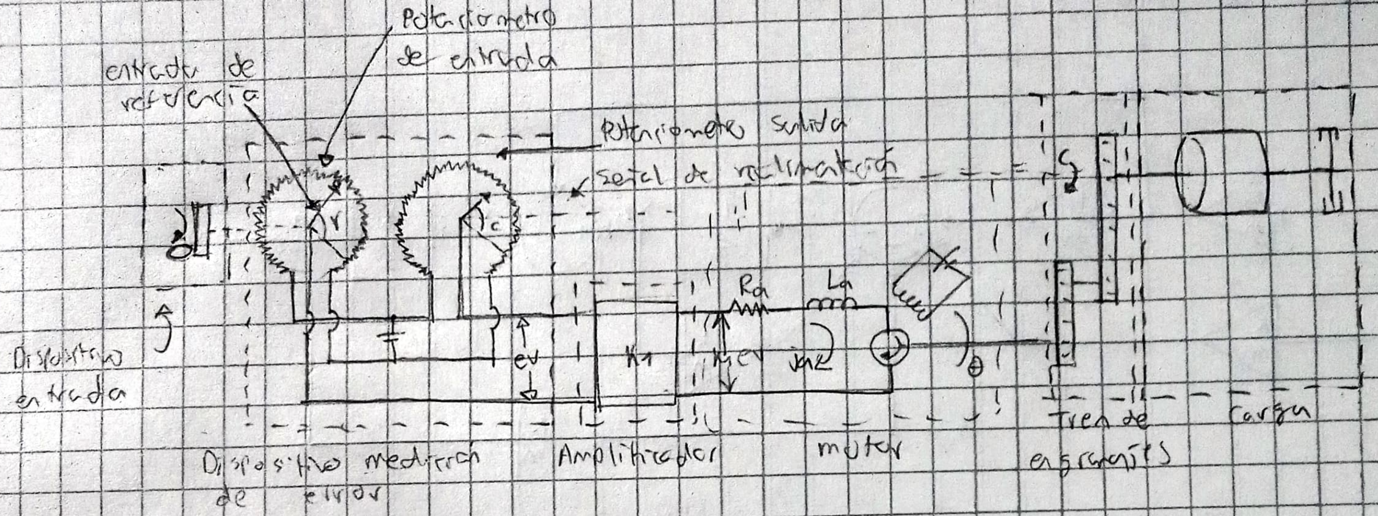


Diagrama de flujo de señal



② Ejercicio A-3-9

El motor mostrado es un servomotor, diseñado específicamente para usarse en un sistema de control, la operación del sistema es la siguiente: Un par de potenciometros actuan como dispositivo de medición de errores. Convierten las posiciones de entrada y salida en señales electricas proporcionales, la señal de entrada determina la posición angular r del brazo del potenciometro de entrada o la posición angular r es la entrada de referencia al sistema y el potencial electrico del brazo es proporcional a la posición angular del brazo. La posición del eje de salida determina la posición angular c del brazo del potenciometro de salida, la diferencia entre la posición angular de entrada r y la posición angular de salida c es la señal de error e : $e = r - c$



La diferencia de potencial $e_r - e_c = e_v$ es el error de voltaje donde e_v es proporcional a r y e_c es proporcional a c; $e_r = K_0 r$, $e_c = K_0 c$, K_0 es una constante de proporcionalidad, el error de voltaje que aparece en los terminales del potenciómetro es amplificado con una ganancia K_1. Si existe error el motor desarrolla torque para rotar la carga para reducir el error a 0.

$T = K_2 i_a$ → Torque desarrollado por el motor

Para flujo constante el voltaje inducido e_b es directamente proporcional a la velocidad angular $d\theta / dt$

$$e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

Obteniendo la función de transferencia entre el desplazamiento angular del eje y el voltaje de error e_v

Ecuación diferencial para el circuito de la armadura

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v \quad (1)$$

Ecuación para el equilibrio de torque

$$L_u \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_u \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \quad (2)$$

L_u es la inercia combinada del motor, carga y engranaje b_u es el coeficiente de viscosidad combinado, motor, carga y engranaje

Eliminando i_a de (1) y (2)

$$\frac{\theta(s)}{E_v(s)} = \frac{k_1 k_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + k_2 k_3 s} \quad (3)$$

Asumiendo que el radio del tren de engranajes es tal que el eje de salida rota n veces por cada revolución

$$C(s) = n\theta(s) \quad (4)$$

la relación entre $E_v(s)$, $R(s)$ y $C(s)$ es:

$$E_v(s) = k_0[R(s) - C(s)] = k_0 E(s) \quad (5)$$

El diagrama de bloques del sistema se puede construir a partir de (3), (4) y (5) y la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{C(s)}{\theta(s)} \cdot \frac{\theta(s)}{E_v(s)} \cdot \frac{E_v(s)}{E(s)} = \frac{k_0 k_1 k_2 n}{s[(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + k_2 k_3]}$$

Cuando L_a es pequeña se puede despreciar con lo cual la función se simplificaría a:

$$G(s) = \frac{k_0 k_1 k_2 n / R_a}{J_0 s^2 + \left(b_0 + \frac{k_2 k_3}{R_a}\right)s}$$

Simplificando la función de transferencia

$J = J_0/n^2$ = momento de inercia referido al eje de salida
$B = [b_0 + (k_2 k_3/R_a)]/n^2$ = coeficiente de viscosidad - fricción referido al eje
$K = k_0 k_1 k_2 / n R_a$

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs} \quad (6)$$

U otra forma sería:

$$G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \qquad K_m = \frac{K}{B}$$

$$T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + k_2 k_3}$$

Para la representación en espacio de estados:

A partir de ⑥:

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs} \qquad \text{con } E(s) = R(s) - C(s)$$

$$\therefore \frac{C(s)}{R(s) - C(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

Hallando $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$

$$C(s) = (R(s) - C(s))\left(\frac{K}{Js^2 + Bs}\right) = \frac{R(s)K}{Js^2 + Bs} - \frac{C(s)K}{Js^2 + Bs}$$

$$C(s) + \frac{C(s)K}{Js^2 + Bs} = \frac{R(s)K}{Js^2 + Bs} \rightarrow C(s)\left(1 + \frac{K}{Js^2 + Bs}\right) = \frac{R(s)K}{Js^2 + Bs}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(Js^2 + Bs)\left(1 + \frac{K}{Js^2 + Bs}\right)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} \qquad ⑦$$

Ahora a partir de ⑦

$$(Js^2 + Bs + K)C(s) = KR(s)$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$J\ddot{C} + B\dot{C} + KC = KR$$

$$\ddot{C} = -\frac{KC}{J} - \frac{B\dot{C}}{J} + \frac{K}{J}R \qquad ⑧$$

Variables de estado

$$x_1 = C$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{C} \qquad \dot{x}_2 = -\frac{K}{J}x_1 - \frac{B}{J}x_2 + \frac{K}{J}R$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{C}$$

Donde:

$$J = J_0/n^2, \quad B = [b_0 + (K_2K_3/R_a)]/n^2, \quad K = K_0K_1K_2/nR_a$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{K}{J}\end{bmatrix} R$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Diagrama de bloques

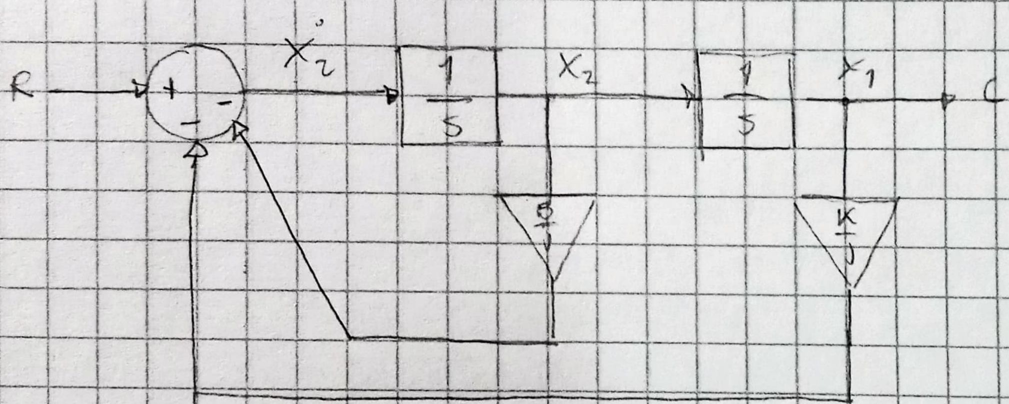


Diagrama de flujo de señal