وظيفة التحليل الرياضي 1

عمل الطلاب :

leen_348821_c20

alaa_345754_c20

hiba_350819_c

sama_sham_349977_c10

abdalrahman_350525_c10

السؤال الأول:

$$\frac{2x}{\mathrm{x}+2} \geq \frac{x}{\mathrm{x}-2}$$

$\frac{2x}{x+2}$ $-\frac{x}{x-2} \geq 0$

$$\frac{2x^2-4x-x^2-2x}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{x^2-6x}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{x(x-6)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

x=0أو X=6

x=-2 أو X=2

$\frac{x(x-6)}{(x+2)(x-2)}$	X-2	X+2	X-6	x	
+	-	-	-	-	$(-\infty,-2)$
-	-	+	-	-	(-2,0)
+	-	+	-	+	(0,2)
-	+	+	-	+	(2,6)
+	+	+	+	+	$(6,\infty)$

مجموعة الحل هي :

$]-\infty,-2[\cup[0,2[\cup[6,+\infty[$

B. $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\ldots(1-\frac{1}{n^2})=\sum_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})=\frac{\mathrm{n}+1}{2\mathrm{n}}$

نثبت صحة المتتالية من أجل n=2 :

$(1-\frac{1}{2^2})=\frac{n+1}{2n}$

$(1-\frac{1}{4})=\frac{2+1}{4}$

$\frac{3}{4}$ $=\frac{3}{4}$ صحيحة من أجل n=2

نفرض صحة المتتالية

:n=k

نفرض أن المتتالية صحيحة للعدد الصحيح

k>=2

$=\frac{k+1}{2k}\sum_{i=2}^{k}(1-\frac{1}{i^2})$

نثبت صحة العبارة عندما

نثبت صحة العبارة

n=k+1

=$(\sum_{i=2}^{k}(1-\frac{1}{i^2}))$.(i- $\frac{1}{(k+1)^2}$)$\sum_{i=2}^{k+1}(1-\frac{1}{i^2})$

- باستخدام فرض الاستقراء من

=$\frac{k+1}{2k}$.(1- $\frac{1}{(k+1)^2}$)

= .$(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2})\frac{k+1}{2k}$

=.$\frac{k^2+2k\,k+1}{(k+1)^2\ 2k}$

=.$\frac{k(k+2)k+1}{(k+1)^2\ 2k}$

= $\frac{k+2}{2(k+1)}$

وهو المطلوب عندما n=k+1

بما أن العبارة صحيحة عند n=2 وصحيحة عند n=k+1 بافتراض صحتها n=k فـأن العبارة صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة n>=2 بالاستقراء الرياضي

.c

Z=x+iy

Re[z]=x

Im[z]=y

$$|[x+iy]-2-2i|>2x$$

$$|[x-2]+i[y-2]|>2x$$

من الخاصة $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

اذن

=2x$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$

نربع الطرفين لنتخلص من الجذرالتربيعي

$$(x-2)^2+(y-2^2)=4^{x^2}$$

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4=4x^2$$

ننقل الحدودالى طرف واحد

$$4x^2-x^2+4x-y^2+4y-8=0$$

$$3x^2+4x-y^2+4y-8=0$$

$$3x^2+4x-y^2+4y-8=0$$

المحل الهندسي لمجموعةالنقاط هوالمنطقةالواقعةداخل قطع زائدمعادلته هي

$$\frac{(x+\frac{2}{3})^2}{\frac{16}{9}}-\frac{(y-2)^2}{\frac{16}{3}}=1$$

السؤال الثاني

a. تحديد نوع الدوال :فردية /زوجية

i) الدالة: $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

التحقق:

نحسب قيمة الدالة عند $-x$

$f(-x) = \sqrt[3]{(-x-1)^2} + \sqrt[3]{(-x+1)^2}$.

- ملاحظة جبرية: $(-x-1)^2 = (x+1)^2$ و $(-x+1)^2 = (x-1)^2$.

- بالتالي: $f(-x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

- بعد تبديل ترتيب الجمع $f(x)$ هذا يساوي نفس مجموع حدود.

الاستنتاج: $f(-x) = f(x)$ لذلك الدالة زوجية.

ii) الدالة: $y = \log_2(x + \sqrt{x^2+1})$

التحقق:

- نحسب $f(-x)$: $f(-x) = \log_2(-x + \sqrt{x^2+1})$.

- نستخدم الهوية التالية: $(x + \sqrt{x^2+1})\cdot(-x + \sqrt{x^2+1}) = 1$.

- من هذه الهوية نستنتج أن $-x + \sqrt{x^2+1} = 1 / (x + \sqrt{x^2+1})$.

- بأخذ اللوغاريتم (تحويل الأساس إلى 2 أو أي أساس):

$\log_2(-x + \sqrt{x^2+1}) = \log_2(1 / (x + \sqrt{x^2+1})) = -\log_2(x + \sqrt{x^2+1})$.

- إذاً: $f(-x) = -f(x)$ لجميع قيم x.

الاستنتاج: الدالة فردية.

(iii) حل البند

الصيغة التي سنعمل عليها (كسر متكرر من أربعة مستويات)

$$y = 1 / (x + 1/(x + 1/(x + 1/(x + 1))))$$

1: مجال الدالة

لا بد أن تكون كل المقامات مختلفة عن الصفر.

أول مقام نحذره هو **x+1** ، لذا يجب**:**

$$x \neq -1$$

بعد ذلك يجب التحقق من أن المقامات الداخلية غير صفرية أيضاً، أي ألا يتحقق أي من

$x + 1/(x+1) = 0$ أو. $x + 1/(x + 1/(x+1)) = 0$

بالتحليل: المعادلة $x + 1/(x+1) = 0$ تتبسط إلى $x^2 + x + 1 = 0$ ، وهذه لا تحتوي جذوراً حقيقية**.**

لذلك على المستوى الحقيقي الاستبعاد الوحيد الضروري هو $x = -1$**.** **)** على المستوى المركب يجب استبعاد جذور المعادلات الداخلية أيضاً**.(**

2) اختبار فردية/زوجية الدالة**:**

نريد معرفة ما إذا كانت $f(-x)=f(x)$ (زوجية) أو $f(-x)=-f(x)$ (فردية) أم لا**.**

الطريقة: نعرض حجة عددية تبين أن الخاصيتين لا تتحققان عمومًا**.**

حساب مثال عند**:** $x = 2$

نحسب المقامات الداخلية**:**

$$a0 = x + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$a1 = x + 1/a0 = 2 + 1/3 = 7/3$$

$$a2 = x + 1/a1 = 2 + 3/7 = 17/7$$

$$a3 = x + 1/a2 = 2 + 7/17 = 41/17$$

$$f(2) = 1 / a3 = 17/41 \approx 0.4146341463$$

حساب المثال عند**:** $x = -2$

$$a0' = x + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$a1' = x + 1/a0' = -2 + 1/(-1) = -3$$

$a2' = x + 1/a1' = -2 + 1/(-3) = -7/3$

$a3' = x + 1/a2' = -2 + 1/(-7/3) = -2 - 3/7 = -17/7$

$f(-2) = 1 / a3' = -7/17 \approx -0.4117647059$

:المقارنة

$f(2) \approx 0.414634$ و $f(-2) \approx -0.411765$.

نلاحظ أن **$f(-2) \neq f(2)$** و**$f(-2) \neq -f(2)$.**

لذلك الدالة ليست زوجية ولا فردية**.**

----

b. حساب النهايات

i) النهاية: $\lim_{x\to0} (1 + x/(1 - x))^{2/x}$

:الحل

- 1: تبسيط القاعدة داخل القوس + $x/(1 - x) = (1 - x + x)/(1 - x) = 1/(1 - x)$.
- إذًا التعبير يساوي: $(1/(1 - x))^{2/x} = (1 - x)^{-2/x}$.
- نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للحد: $\ln((1 - x)^{-2/x}) = -(2/x) \cdot \ln(1 - x)$.
- نستخدم تقريب سلسلة تايلور للوغاريتم عند الصفر: $\ln(1 - x) = -x + x^2/2 + o(x^2)$.
- بالتعويض نحصل: $-(2/x) \cdot \ln(1 - x) = -(2/x) \cdot (-x + O(x^2)) = 2 + O(x)$.
- عندما $x \to 0$ فإن هذا المقدار $\to 2$، وبالعودة بالأس نحصل على النهاية $= e^2$.

النتيجة: $\lim_{x\to0} (1 + x/(1 - x))^{2/x} = e^2$.

ii) النهاية: $\lim_{x\to0} (\csc x - \cot x) / x$

:الحل

- تحويل باستخدام الدوال المثلثية: $\csc x - \cot x = 1/\sin x - \cos x / \sin x = (1 - \cos x)/\sin x$.
- إذًا الكسر يصبح: $(1 - \cos x) / (x \sin x)$.
- 1: نستخدم تقريبات تايلور عند الصفر $- \cos x = x^2/2 + o(x^2)$ و $\sin x = x + o(x)$.
- بالتعويض نحصل: $(1 - \cos x) / (x \sin x) \approx (x^2/2) / (x \cdot x) = 1/2$.

النتيجة: $\lim_{x\to0} (\csc x - \cot x) / x = 1/2$.

iii) النهاية: lim_{x→π} tan(sin x) / sin x

الحل:

- عندما $x \to \pi$ تكون $\sin x \to 0$. نضع $u = \sin x$، إذًا $u \to 0$.

- الحد يصبح $\lim_{u\to 0} \tan u / u$.

- وبالمعلومة القياسية: $\lim_{u\to 0} \tan u / u = 1$.

النتيجة: $\lim_{x\to\pi} \tan(\sin x) / \sin x = 1$.

iv) النهاية: lim_{x→∞} (x + x sin x)

الحل:

- نكتب التعبير على صورة: $x(1 + \sin x)$.

- لأن $\sin x$ محصور بين -1 و $+1$، فإن $1 + \sin x$ محصور بين 0 و 2.

- لذلك توجد متتاليات $x_n \to \infty$ حيث تكون $\sin x_n = -1$ فتكون قيمة الدالة صفرًا،

ومتتاليات أخرى حيث تكون $\sin x_n = +1$ فتكون قيمة الدالة $\approx 2x_n \to \infty$.

- إذًا القيم لا تقارب قيمة واحدة بل تتقلب بين 0 وقيم تزداد بلا حد حسب المتتالية المختارة.

النتيجة

النهاية غير موجودة بسبب التقلب في القيم عندما $x \to \infty$:

السؤال الثالث :

استمرار التوابع واشتقاقها مع الرسم على برنامج جيوجبرا

(i) أوجد قيمة الثابتين a,b ليكون التابع الاتي مستمرا عند جميع قيم x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+6x+4}{3x^2-3} \,; x < -1 \\ ax + b \,; -1 \leq x \leq 3 \\ \frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} : x > 3 \end{cases}$$

أوجد مشتق التابع الاتي :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + x^{\ln x} + \sqrt{\log_{10}(x^2+1)} \qquad \text{(ii)}$$

الحل : (سندرس استمرار التابع عند (-1) و (3)) :

شرط الاستمرار عند $(x=-1)$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{2-6+4}{3-3} = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{2x^2+6x+4}{3x^2-3} = \frac{2(x^2+3x+2)}{3(x^2-1)} = \frac{2(x+1)(x+2)}{3(x+1)(x-1)} = -\frac{2(x+2)}{3(x-1)}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2(x+2)}{3(x-1)} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = a(-1) + b = -a + b \quad , \quad f(-1) = -a + b$$

بتطبيق شرط الاستمرارية : $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

نجد:

$$(1)\ldots\ldots\ldots \left(-a + b == -\frac{1}{3}\right)$$

شرط الاستمرار عند $(x=3)$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = a(3) + b = 3a + b = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3}\right) = \frac{6}{0} - \frac{1}{0}$$ غير معرفة

$$f(x) = \frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} = \frac{6}{x^2-9} - \frac{1(x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{3-x}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \frac{-1}{x+3}$$

$$f(x)=\frac{-1}{x+3} \;\rightarrow\; \lim_{x\to 3^+} f(x)=-\frac{1}{6}$$

بتطبيق شرط الاستمرارية نجد : $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$

(2) …… ($3a+b=-\frac{1}{6}$)

نحل جملة المعادلتين الخطيتين (1) و(2) :

$$\begin{cases} -a+b=-\frac{1}{3}\,....(1) \\ 3a+b=-\frac{1}{6}\,....(2) \end{cases}$$

نطرح المعادلة (1) من (2) :

$$(2)-(1)=4a=\frac{1}{6} \rightarrow a=\frac{1}{24}$$

نعوض a في (1) : $-\frac{1}{24}+b=-\frac{1}{3}$

$$b=-\frac{7}{24}$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)+x^{\ln x}+\sqrt{\log_{10}(x^2+1)} \qquad (iii)$$

f(x) مجموع ثلاث توابع :

$$A=\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right),\qquad B=X^{\ln X},\qquad C=\sqrt{\log_{10}(x^2+1)}$$

نشتق كلا منها على حدة ثم نجمع المشتقات :

$$A=\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)=\ln(e^x)-\ln(1+e^x)=x-\ln(1+e^x)$$

$$A''=1-\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$B=X^{\ln X}=e^{(\ln X)(\ln X)} \rightarrow B=\; e^{(\ln X)^{`2`}}$$

حولناه الى تابع الاسي لاشتقاقه ، ثم نعيده بعد ذلك :

$$B''=\frac{2\ln X}{X}e^{(\ln X)^2} \rightarrow\; B''=X^{\ln X}2\frac{\ln X}{X}$$

$$C''=\frac{\frac{2X}{(x^2+1)\ln 10}}{\sqrt[2]{\log_{10}(x^2+1)}} \rightarrow\; C''=\frac{X}{(x^2+1)\ln 10.\sqrt{\log_{10}(x^2+1)}}$$

$$f'(x) = A' + B' + C' = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} + x^{\ln x}.2\frac{\ln x}{x} + \frac{x}{(x^2+1)\ln 10\sqrt{\log_{10}(x^2+1)}}$$

السؤال الرابع:

(I) a = $\frac{e^5}{3- e^{2n}}$, n >=1

الحدود الخمس الأولى :

نعوض n =1,2,3,4,5

a = $\frac{e^5}{3- e^{2n}}$ = $\frac{e^5}{3- e^{2(1)}}$ = $\frac{e^5}{3- e^{2}}$

a = $\frac{e^5}{3- e^{2n}}$ = $\frac{e^5}{3- e^{2(2)}}$ = $\frac{e^5}{3- e^{4}}$

a = $\frac{e^5}{3- e^{2n}}$ = $\frac{e^5}{3- e^{2(3)}}$ = $\frac{e^5}{3- e^{6}}$

a = $\frac{e^5}{3- e^{2n}}$ = $\frac{e^5}{3- e^{2(4)}}$ = $\frac{e^5}{3- e^{8}}$

a = $\frac{e^5}{3- e^{2n}}$ = $\frac{e^5}{3- e^{2(5)}}$ = $\frac{e^5}{3- e^{10}}$

نقسم على e^{2n}

a = $\frac{e^5}{3- e^{2n}}$ = $\frac{e^{5n}/_{e^{2n}}}{3/_{e^{2n}-1}}$ = $\frac{e^{3n}}{3e^{-2n}-1}$

a = $\frac{e^{3n}}{-1}$ = -e^{3n}

$\lim_{n \to \infty} -e^{3n} = -\infty$

نستنتج ان المتتالية متباعدة وتتجه الى -∞ .

(ii) b = $\frac{(-1)^{n-2}n2}{4+ n^3}$, n>=0

أولا نبسط الشكل : بما ان

= $(-1)^n.(-1)^{-2} = -1^n(-1)^{n-2}$

يصبح :

B = $(-1)^n \frac{n^2}{4+n^3}$

الحدود الخمس الأولى : n = 0,1,2,3,4

حدود المتتالية : ننظر الى القيمة المطلقة

$$|b| = \frac{n^2}{4+n^3}$$

$0 \leq |b| \leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

ومنه المتتالية متقاربة ونهايتها صفر

(iii) $c = \frac{n^2-7n+3}{1+10n-4n^2}$, $n \geq 3$

الحدود الخمس الأولى : n = 3,4,5,6,7

$C = \frac{9-21+3}{1+30-36} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$C = \frac{16-28+3}{1+40-64} = \frac{9}{23}$

$C = \frac{25-35+3}{1+50-100} = \frac{7}{49}$

$C = \frac{-3}{-83}$

$C = \frac{3}{-125}$

البسط والمقام من الدرجة الثانية .. نقسم على اعلى درجة

$C = \frac{1-\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{10}{n}-4} \to \infty = \frac{1}{-4}$

ومنه المتتالية متقاربة ونهايتها $\frac{-1}{4}$

السؤال الخامس:

.2^{1-3n}=3^2.3^n.2.2^{-3n}:**1.**3^{2+n}

=$(\frac{3^n}{2^{3n}})$=18$(\frac{3}{8})^n$

S=$\frac{18}{1-\frac{3}{8}}$=18$\frac{\frac{1}{5}}{8}$=18$\frac{8}{5}$=$\frac{144}{5}$

2.

=$\frac{(-6)^n}{(-6)^3}$.$\frac{8^2}{8^n}$=$\frac{64}{-216}$$(\frac{-6}{8})^n$ =$\frac{-8}{27}$ $(\frac{3}{4})^n$$\frac{(-6)^{n-3}}{8^{n-2}}$

نعوض بدل n

a1=$\frac{-8}{27}$$(\frac{-3}{4})^1$=$\frac{2}{9}$

S=$\frac{a1}{1-r}$=$\frac{\frac{2}{9}}{1-(\frac{-3}{4})}$=$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{4}}$=$\frac{2}{9}$.$\frac{4}{7}$=$\frac{8}{63}$

3.

+7n+12=(n+3)(n+4)n^2

نحلل الى كسور

=$\frac{A}{n+3}$+$\frac{B}{n+4}$$\frac{3}{(n+3)(n+4)}$

=$\frac{3}{n+3}$ -$\frac{3}{n+4}$$\frac{3}{(n+3)(n+4)}$

$$\sum_{n=1}^{N}(\frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+4}) = 3(\frac{1}{4} - \frac{1}{N+4})$$

S=3.$\frac{1}{4}$=$\frac{3}{4}$

4.

=5^n.5^1.$\frac{49}{7^n}$=245$(\frac{5}{7})^n$$\frac{5^{n+1}}{7^{n-2}}$

a2=245$(\frac{5}{7})^2$=245.$\frac{25}{49}$=5.25=125

S=$\frac{a2}{1-r}$=$\frac{125}{1-\frac{5}{7}}$=$\frac{125}{\frac{2}{7}}$=125.$\frac{7}{2}$=$\frac{875}{2}$