HAOJIE LU et HAIFEI ZHANG

RO05 – TP 1A Evolution de la valeur d'un actif financier

Considérons une option européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps *t* est *S(t)* pour $0 \le t \le T$, où *T* est le temps de l'exercice de l'option. Notons $M \in \mathbb{N}^*$ le nombre de subdivision de l'intervalle [*0,T*] et *h = T/M*. Notons également $S_n=S(nh)$, pour n=0,1,...,*M*, les valeurs de l'actif aux instants *t = nh* .

L'équation d'évolution du prix de l'actif en temps discret en temps s'écrit comme suit :

$$S_{n+1}=S_n+\mu h S_n+\sigma h^{1/2} S_n \xi_n, n \ge 0, \qquad (1)$$

où $\xi_n, n \ge 0$ est une suite de v.a. iid de loi *N*(0,1) indépendante de S_0 .

1. Solution

Selon l'équation (1), on peut obtenir S_M par la méthode d'itération,

$$\begin{aligned} S_M &= S_{M-1}+\mu h S_{M-1}+\sigma h^{1/2} S_{M-1}\xi_{M-1} = S_{M-1}(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_{M-1}) \\ &= S_{M-2}(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_{M-2}) \ (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_{M-1}) \\ &= S_0(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_0) \ (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_1) \ \ldots \ (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_{M-1}) \\ &= S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n) \end{aligned}$$

Après, on déplace S_0 à gauche d'équation et fait le logarithme pour deux côtés d'équation,

$$\frac{S_M}{S_0} = \prod_{n=0}^{M-1} (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n) ,$$

Donc, $\ln(\frac{S_M}{S_0}) = \ln(\prod_{n=0}^{M-1}(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n)) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n)$.

2. Solution

$$\because \ h \to 0, \ \ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} ,$$

$$\begin{aligned} \therefore \ \ln(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n) &\approx (\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n) - \frac{(\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n)^2}{2} \\ &= \mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{\mu^2 h^2 + 2\mu\sigma h^{3/2}\xi_n + \sigma^2 h \xi_n^{\ 2}}{2} \\ &\approx \mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{\sigma^2 h \xi_n^{\ 2}}{2} \qquad (h^\alpha \to 0 \ quand \ \alpha > 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \ \ln(\frac{S_t}{S_0}) = \ln(\prod_{n=0}^{\frac{t}{h}-1}(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n)) = \sum_{n=0}^{\frac{t}{h}-1} \ln(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n)$$

$$\approx \sum_{n=0}^{\frac{t}{h}-1} \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{\sigma^2 h \xi_n^{\ 2}}{2}$$

$$= \sum E[\mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{\sigma^2 h \xi_n^{\ 2}}{2}] \quad avec\ la\ loi\ des\ grandes\ nombres$$

$$= \sum \{E[\mu h] + \sigma h^{1/2} E[\xi_n] - \frac{\sigma^2 h}{2} E[\xi_n^{\ 2}]\} \qquad (2.1)$$

$$\because\ \xi_n \sim N(0,1),\ E(\xi_n) = 0,\ E(\xi_n^{\ 2}) = \mathrm{var}(\xi_n) - (E[\xi_n])^2 = 1 - 0 = 1$$

$$\therefore\ \ln(\frac{S_t}{S_0}) \approx \frac{t}{h}(\mu h + 0 + \frac{\sigma^2 h}{2}) = (\mu + \frac{\sigma^2}{2})t$$

3. Solution

$$E[\ln(\frac{S_t}{S_0})] \approx E[(\mu + \frac{\sigma^2}{2})t] = (\mu + \frac{\sigma^2}{2})t$$

$$\mathrm{var}(\ln(\frac{S_t}{S_0})) = \mathrm{var}(\sum_{n=0}^{\frac{t}{h}-1} \ln(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n)) \approx \mathrm{var}(\sum_{n=0}^{\frac{t}{h}-1} \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{\sigma^2 h \xi_n^{\ 2}}{2})$$

$$= \sum \mathrm{var}(\mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{\sigma^2 h \xi_n^{\ 2}}{2}) = \sum (\mathrm{var}(\mu h) + \sigma^2 h\, \mathrm{var}(\xi_n) - \frac{\sigma^4 h^2}{4} \mathrm{var}(\xi_n^{\ 2}))$$

$$\approx \frac{t}{h}(0 + \sigma^2 h) = \sigma^2 t \qquad rejete\ le\ champ\ de\ h^2$$

En utilisant le théorème de la limite central, quand $h \to 0,\ \frac{t}{h} \to \infty$

$$\ln(\frac{S_t}{S_0}) \sim N((\mu + \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t)$$

4. Solution

Selon la relation précedente, on suppose $Y = \ln(\frac{S(t)}{S_0}) \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$ et après

noramlise **Y** en une loi normale centrée, $\frac{Y - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} = Z \sim N(0,1)$.

Également, $Y = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + Z * \sigma\sqrt{t}\ ou\ Z \sim N(0,1)$.

$$\because Y = \ln(\frac{S(t)}{S_0})$$

$$\therefore S(t) = S_0 e^Y = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + Z*\sigma\sqrt{t}} = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + Z*\sigma\sqrt{t}) \quad ou\ Z \sim N(0,1)$$

5. Solution

$$Si\ on\ definit\ x=\frac{S(T)}{S(0)},\ f(x)=\frac{d}{dx}P(X\le x)=\frac{d}{dx}P(\ln X\le x)$$

$$=\frac{d}{dx}\phi\left(\frac{\ln x-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)=\varphi\left(\frac{\ln x-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\bullet\frac{1}{x\sigma\sqrt{t}}$$

$$=\frac{1}{x}\bullet\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(\ln x-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t)^2}{2\sigma\sqrt{t}}\right),\ donc\ x\sim\ \log N\left(e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\frac{\sigma^2 t}{2}},(e^{\sigma^2 t}-1)e^{2(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma^2 t}\right)$$

6. Solution

En sachant que $\ln(\frac{S(t)}{S_0})\sim N((\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t,\sigma^2 t)$, pour un intervalle de confiance de *S(t), on calcule* $P(|\ln(\frac{S(t)}{S_0})|\le S)=1-\alpha$.

$$P(a\le\ln(\frac{S(t)}{S_0})\le b)=P\left(\frac{a-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\le\frac{\ln(\frac{S(t)}{S_0})-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\le\frac{b-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$=P\left(u_{\frac{\alpha}{2}}\le\frac{\ln(\frac{S(t)}{S_0})-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

Donc, on peut obtenir $a=(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \sigma\sqrt{t}\ \ et\ \ b=(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \sigma\sqrt{t}$

Car $S_0e^a\le S(t)\le S_0e^b$,

L'intervalle de confiance de S(t) est $IC=[S_0e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \sigma\sqrt{t}},S_0e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \sigma\sqrt{t}}]$.

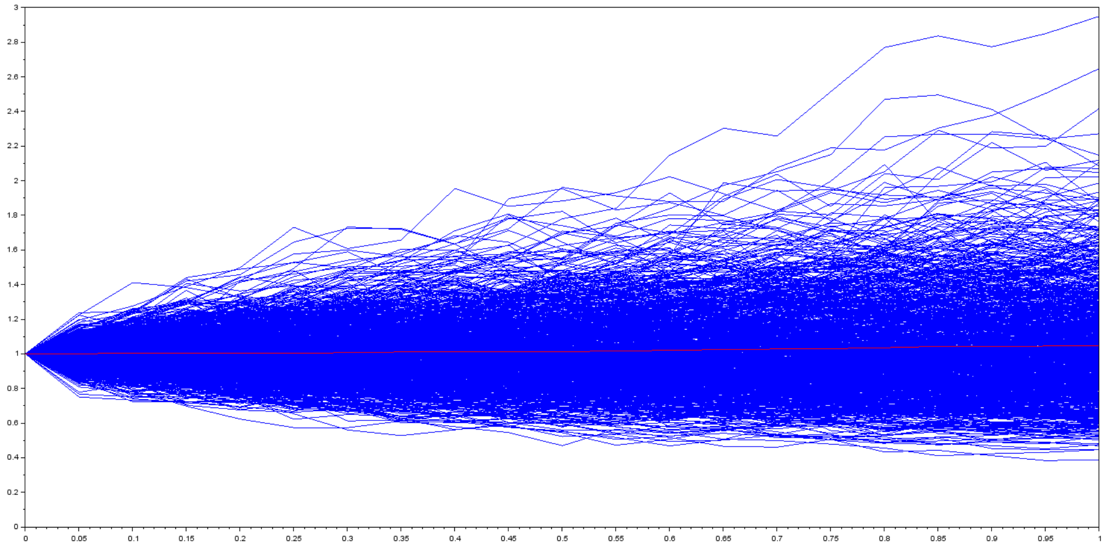
7. Solution

```
T=1;
h=0.05;
M=T/h;
S0=1;
miu=0.05;
sigma=0.3;
Sn=zeros(1000,M+1);   //generer une matrix zero de dimension 1000*(M+1)
Sn(:,1)=S0;   //initialiser la premiere colonne de Sn avec S0
for i=1:1000   // boucle pour 1000 realisations
    u=rand(M,1);  // generer M valeurs qui suivent la loi unif(0,1)
    v=rand(M,1);  // generer une autre suite de M valeurs qui suivent la loi unif(0,1)
    for j=2:M+1  // Pour calculer S(i,j), j=0,1,...M+1 dans chaque reaslisation
      ksi_n=sqrt(log(u(j-1))*-2)*cos(2*%pi*v(j-1));   // generer une variable qui suis la loi de N(0,1)
      Sn(i,j)=Sn(i,j-1)*(1+miu*h+sigma*sqrt(h)*ksi_n);
    end
end

moyenne_SM=zeros(1,M+1);
for n=1:M+1 //calculer la moyenne de SM de chaque temps
    moyenne_SM(n)=mean(Sn(:,n));
end
x=linspace(0,1,M+1);        // determiner les valeurs de coordonnees X
plot(x,Sn(:,:),col="b");    // tracer toutes les suites de Sn par rapport au temps
plot(x,moyenne_SM,col="r"); //tracer la trajectoire moyenne en rouge
```

Les codes de Scilab :

Les trajectoires de 1000 realisations



Les valeurs de Sn (n=0,1,2,.....,20)

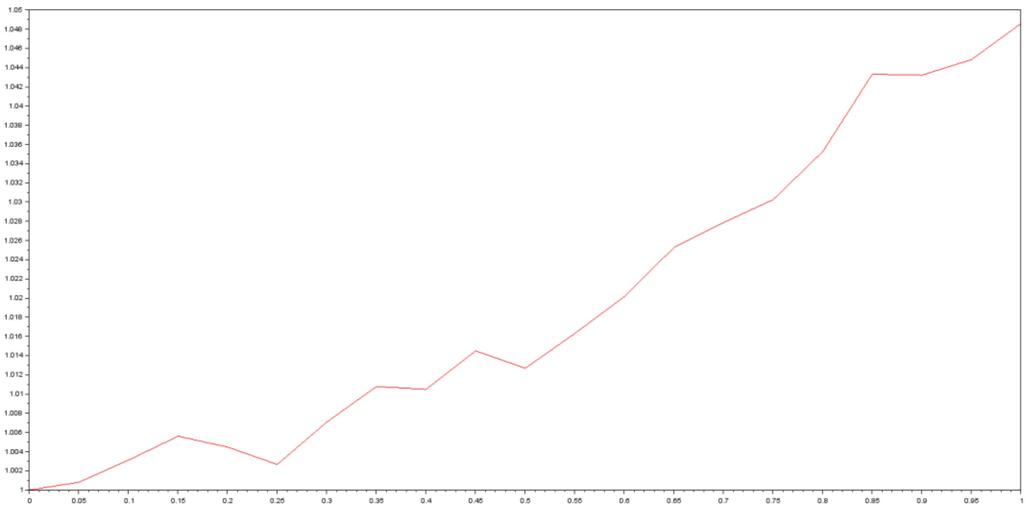
```
     column  1 to 14

 1.     1.0008069    1.0031238    1.0056072    1.0044718    1.0026664    1.0070924    1.0107755    1.0104958    1.0144985    1.0126892    1.0163113    1.0201559    1.0252776

     column 15 to 21

 1.0278705    1.0302574    1.0352658    1.043335    1.0432269    1.0448494    1.04861
```

La trajectoire moyenne de 1000 realisations



Avec T=1, h=0.05, S_0=1, μ=0.05 et σ=0.3, on calcule IC de SM en utilisant la formulaire

$$IC = [S_0 e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{t}}, S_0 e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{t}}].$$

On obtient le resultat IC=[0.558,1.809] au niveau de confiance significatif de 95% .

Le moyenne de SM empirique obtenu par 1000 realisation est 1.0571459 qui est inclus dans IC.