RO05 - TP no 3A
Processus de risque en assurance

Le capital d'une compagnie d'assurance est décrit au cours du temps par le processus de risque de Cramér-Lunberg, $U = (U_t, t \geq 0)$:

$$U_t = u + c\,t - \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \quad t \geq 0,$$

où $u > 0$, $c > 0$, $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson homogène de paramètre $\lambda > 0$ et $(Y_k, k \geq 1)$ une suite de v.a. positives i.i.d. de fonction de répartition commune F, indépendante du processus (N_t).

1. Exprimer l'événement A_i = "la ruine de la compagnie ait lieu avant t lors du i-ème sinistre", avec $t > 0$ fixé, et $i = 1, 2$, en fonction du processus U et du temps T_1 du premier sinistre.
2. Démonter que
$$\mathbb{P}(A_1) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} \overline{F}(u + cs) ds,$$
où $\overline{F} = 1 - F$.
3. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(A_2)$.
4. Démontrer, par un calcul de l'espérance $\mathbb{E}[U_t]$, qu'une condition de viabilité de la compagnie est que : $c - \lambda \mathbb{E}[Y_1] > 0$.
5. Soit $r(t) := \mathbb{P}(U_t < 0)$ la probabilité de ruine dans $[0, t]$. Démontrer que
$$r(t) := \sum_{n \geq 0} e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \overline{F^{*n}}(u + ct).$$
6. Démontrer que si
$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{N_t} Y_k \longrightarrow \rho, \quad t \to \infty,$$
alors $\rho = \lambda \mathbb{E}[Y_1]$. La constante ρ est appelée *moyenne des indemnités par unité de temps.* La quantité $\eta := (c - \rho)/\rho$ est appelée *charge de sécurité.*
7. SIMULATION STOCHASTIQUE. Soient : $\lambda = 0.01$, F est la f.r. de la loi log-normale de paramètres $\mu = 1$ et $\sigma = 0.5$, $u = 100$ et $c = 1$.
   (a) Réaliser une trajectoire du processus U_t pour $0 \leq t \leq \min\{1000, T_{\text{ruine}}\}$. Faire une figure.
   (b) En réalisant N trajectoire de U_t, estimer par Monte Carlo le temps moyen de ruine de la compagnie d'assurance.
   (c) Calculer N pour que la précision soit $(\alpha, \theta) = (0,01; 0,01)$.
   (d) Partant d'une réalisation sans ruine de U_t, sur un intervalle de temps $[0, T]$, estimer ρ et η.