

SY09 Printemps 2022

TD/TP 01 — Manipulation de données

1 Travaux pratiques

1.1 Chargement d'un jeu de données

Les jeux de données sont communément stockés dans des fichiers textes au format dit « csv » (*comma separated value*). Il s'agit d'un format décrivant un tableau individus-variables : une ligne liste les caractéristiques d'un individu, séparées par une virgule ; et une colonne liste les valeurs d'une variable pour tous les individus. Dans certains fichiers, la première ligne est parfois une ligne d'en-tête (ou **header**) spécifiant le nom de chacun des prédicteurs. Parfois, la première colonne n'est pas un prédicteur mais un identifiant ou un nom d'individu qui n'est pas un prédicteur. Les fichiers « csv » ont plusieurs variantes, le séparateur (la virgule pour le fichier « csv ») peut changer. La plupart du temps, le séparateur est une virgule, une espace, un point virgule ou une tabulation.

Pour charger des données représentant un tableau individus-variables, on utilise la bibliothèque **pandas**. On la charge avec l'instruction suivante

```
In [1]: import pandas as pd
```

Pour charger un fichier csv, on utilise la fonction `pd.read_csv` en spécifiant le chemin du fichier csv à charger.

1 Charger le fichier `data/sy02-p2016.csv` dans la variable `X`.

```
In [2]: X = pd.read_csv("data/sy02-p2016.csv")
```

Pour contrôler le bon chargement des données, on peut vérifier le nombre de caractéristiques ainsi que le nombre d'individus avec l'attribut **shape**, le type des caractéristiques avec la méthode **info**.

2 Vérifier qu'il y a 296 individus et 11 caractéristiques.

```
In [3]: X.shape
Out [3]: (296, 11)
In [4]: X.info()
```

```
Out [4]: <class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 296 entries, 0 to 295
Data columns (total 11 columns):
#   Column                                Non-Null Count  Dtype
---  -
0   nom                                   296 non-null    object
1   specialite                           296 non-null    object
2   niveau                               296 non-null    int64
3   statut                               296 non-null    object
4   dernier diplome obtenu               290 non-null    object
5   note median                           293 non-null    float64
6   correcteur median                    293 non-null    object
7   note final                           284 non-null    float64
8   correcteur final                     284 non-null    object
9   note totale                          284 non-null    float64
10  resultat                             296 non-null    object
dtypes: float64(3), int64(1), object(7)
memory usage: 25.6+ KB
```

- 3 En utilisant les options de chargement `sep`, `index_col` et `header`, charger les fichiers suivants :
- data/sy02-p2016-2.csv
 - data/sy02-p2016-3.csv
 - data/sy02-p2016-4.csv
 - data/sy02-p2016-5.csv

Vérifier qu'ils contiennent les mêmes informations que le premier jeu de données.

```
In [5]: X2 = pd.read_csv("data/sy02-p2016-2.csv", sep("&"))
        X3 = pd.read_csv("data/sy02-p2016-3.csv", sep="\t")
        X4 = pd.read_csv("data/sy02-p2016-4.csv", sep=";")
        X5 = pd.read_csv("data/sy02-p2016-5.csv", sep=" ", index_col=0)
        X2.shape; X3.shape; X4.shape; X5.shape

Out [5]: (296, 11)
         (296, 11)
         (296, 11)
         (296, 11)
```

1.2 Conversion de types

Lors du chargement d'un fichier texte, si le type de la colonne n'est pas spécifié avec l'argument `dtype`, Pandas essaie de deviner le type de chaque prédicteur. Les types les plus utilisés sont les suivants

- `np.float64` : Correspond à une variable quantitative continue
- `np.int64` : Correspond à une variable quantitative discrète (les entiers naturels)
- `bool` : Correspond à une variable binaire
- `object` : Lorsqu'aucune des classes ci-dessus ne convient, le type générique `object` est utilisé
- `category` : Correspond à une variable qualitative à plusieurs modalités. Pandas ne convertit jamais automatiquement vers ce type, il faut le faire *a posteriori*.

```
In [6]: from io import StringIO

        pd.read_csv(StringIO("0\n1.4"), header=None).dtypes
Out [6]: 0    float64
         dtype: object
In [7]: pd.read_csv(StringIO("0\n1"), header=None).dtypes
```

```

Out [7]: 0    int64
         dtype: object
In [8]: pd.read_csv(StringIO("T\nF"), header=None).dtypes
Out [8]: 0    object
         dtype: object
In [9]: pd.read_csv(StringIO("True\nFalse"), header=None).dtypes
Out [9]: 0    bool
         dtype: object
In [10]: pd.read_csv(StringIO("Vrai\nFaux"), header=None).dtypes
Out [10]: 0    object
          dtype: object

```

Lorsque le type n'est pas correctement détecté, on peut le corriger manuellement en faisant appel à la méthode `astype(<type>)`.

Pour les variables catégorielles, le type n'est pas encore défini. Il faut donc d'abord le définir

```
ects_type = pd.CategoricalDtype(categories=["R", "G", "B"])
```

et l'utiliser ensuite avec `astype(<type>)`

```
X.col = X.col.astype(ects_type)
```

Si le type n'est pas réutilisé pour d'autres prédicteurs, on peut directement le créer en même temps que la colonne.

```
X.col = pd.Categorical(X.col, categories=["R", "G", "B"])
```

Si les modalités sont ordonnées, on peut le spécifier avec l'argument `ordered`.

4 Corriger le type de chaque prédicteur présent dans le fichier `data/sy02-p2016.csv`.

```

In [11]: X.specialite = pd.Categorical(X.specialite)
         X.statut = pd.Categorical(X.statut)
         X["dernier diplome obtenu"] = pd.Categorical(X["dernier diplome
         ↪ obtenu"])
         correcteur_type = pd.CategoricalDtype(
         pd.concat([X["correcteur median"], X["correcteur
         ↪ final"]]).dropna().unique()
         )
         X["correcteur median"] = X["correcteur median"].astype(correcteur_type)
         X["correcteur final"] = X["correcteur final"].astype(correcteur_type)
         X.resultat = pd.Categorical(
         X.resultat, categories=["ABS", "F", "Fx", "E", "D", "C", "B", "A"],
         ↪ ordered=True
         )
         X.info()

```

```

Out [11]: <class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 296 entries, 0 to 295
Data columns (total 11 columns):
#   Column                                Non-Null Count  Dtype
---  -
0   nom                                    296 non-null    object
1   specialite                            296 non-null    category
2   niveau                                296 non-null    int64
3   statut                                296 non-null    category
4   dernier diplome obtenu                290 non-null    category
5   note median                           293 non-null    float64
6   correcteur median                     293 non-null    category
7   note final                            284 non-null    float64
8   correcteur final                      284 non-null    category
9   note totale                           284 non-null    float64
10  resultat                              296 non-null    category
dtypes: category(6), float64(3), int64(1), object(1)
memory usage: 15.4+ KB

```

1.3 Transformation

Même lorsque le jeu de données est nettoyé et qu'il ne présente plus d'erreurs manifestes, il est souvent nécessaire de transformer certains prédicteurs voire la structure elle-même du jeu de données.

Lorsque la donnée sous-jacente est de type chaîne de caractères, Pandas fournit un nombre important de fonctions pour extraire l'information utile. On peut par exemple utiliser les *slices* :

```

In [12]: X = pd.read_csv("data/sy02-p2016.csv")
X.nom
Out [12]: 0      Etu1
          1      Etu2
          2      Etu3
          3      Etu4
          4      Etu5
          ...
          291    Etu292
          292    Etu293
          293    Etu294
          294    Etu295
          295    Etu296
          Name: nom, Length: 296, dtype: object
In [13]: X.nom.str[3:]
Out [13]: 0      1
          1      2
          2      3
          3      4
          4      5
          ...
          291    292
          292    293
          293    294
          294    295
          295    296
          Name: nom, Length: 296, dtype: object

```

Il faut utiliser la méthode `str` pour avoir accès à toutes ces fonctions d'extraction. Pour lister ces

fonctions, on pourra exécuter l'instruction

```
dir(X.nom.str)
```

5 Le prédicteur `Semestre` du jeu de données présent dans le fichier `data/effectifs.csv` contient des données de la forme `SemestreXXXXX`. En utilisant les *slices* extraire la donnée `XXXXX`.

```
In [14]: X = pd.read_csv("data/effectifs.csv")
X = X.assign(Semestre=X.Semestre.str[8:])
X
Out [14]:
```

	Semestre	SY02	SY09	SY19
0	P2019	220	75.0	NaN
1	A2019	180	NaN	82.0
2	A2018	200	NaN	78.0
3	P2018	210	76.0	NaN
4	A2017	189	NaN	69.0
5	P2017	230	102.0	NaN
6	A2016	213	NaN	52.0
7	P2016	242	93.0	NaN

La donnée est maintenant de la forme « `SDDDD` » avec `S` le semestre (« `A` » ou « `P` ») et `DDDD` l'année. Cependant, cette donnée n'est toujours pas exploitable.

6 Créer deux autres colonnes contenant respectivement le semestre et l'année. On pourra utiliser la fonction `assign`.

```
In [15]: X = X.assign(
    Saison=X.Semestre.str[0],
    Annee=X.Semestre.str[1:]
)
X.drop(columns="Semestre", inplace=True)
X
Out [15]:
```

	SY02	SY09	SY19	Saison	Annee
0	220	75.0	NaN	P	2019
1	180	NaN	82.0	A	2019
2	200	NaN	78.0	A	2018
3	210	76.0	NaN	P	2018
4	189	NaN	69.0	A	2017
5	230	102.0	NaN	P	2017
6	213	NaN	52.0	A	2016
7	242	93.0	NaN	P	2016

Il est souvent souhaitable de factoriser plusieurs colonnes stockant des données ayant la même signification en deux colonnes seulement : une colonne stocke le nom de la colonne et l'autre la valeur correspondante. Un exemple classique est présent dans la table 1.

Pour réaliser cette opération avec `Pandas`, on utilise la fonction `melt`.

```
In [16]: X1 = pd.DataFrame(
    dict(
        Person=["Bob", "Alice", "Steve"],
        Age=[32, 24, 64],
        Weight=[128, 86, 95],
        Height=[180, 175, 165],
    )
)
X1.melt(id_vars=["Person"])
```

TABLE 1 – Représentation « wide » et « long »

(a) Format « wide »				(b) Format « long »		
Person	Age	Weight	Height	Person	Variable	Value
Bob	32	128	180	Bob	Age	32
Alice	24	86	175	Bob	Weight	128
Steve	64	95	165	Bob	Height	180
				Alice	Age	24
				Alice	Weight	86
				Alice	Height	175
				Steve	Age	64
				Steve	Weight	95
				Steve	Height	165

```
Out [16]: Person variable value
0      Bob      Age      32
1     Alice      Age      24
2     Steve      Age      64
3      Bob     Weight     128
4     Alice     Weight     86
5     Steve     Weight     95
6      Bob     Height     180
7     Alice     Height     175
8     Steve     Height     165
```

On peut renommer les colonnes `variable` et `value` en utilisant les arguments `var_name` et `value_name`.

7 Convertir le jeu de données précédent au format « long », enlever les effectifs inexistants et convertir en nombre entier.

```
In [17]: X = X.melt(id_vars=["Saison", "Annee"], value_name="effectif",
    ↪      var_name="UV")
X = X.loc[~pd.isna(X.effectif)]
X = X.assign(effectif=X.effectif.astype(int))
X
Out [17]: Saison Année   UV  effectif
0         P  2019  SY02      220
1         A  2019  SY02      180
2         A  2018  SY02      200
3         P  2018  SY02      210
4         A  2017  SY02      189
5         P  2017  SY02      230
6         A  2016  SY02      213
7         P  2016  SY02      242
8         P  2019  SY09       75
11        P  2018  SY09       76
13        P  2017  SY09      102
15        P  2016  SY09       93
17        A  2019  SY19       82
18        A  2018  SY19       78
20        A  2017  SY19       69
22        A  2016  SY19       52
```

8 Convertir le jeu de données iris en format « long ». On pourra charger le jeu de donnée iris avec les instructions suivantes.

```
import seaborn as sns
iris = sns.load_dataset("iris")
```

```
In [18]: import seaborn as sns
         iris = sns.load_dataset("iris")
         iris = iris.melt(id_vars=["species"])
```

9 Scinder la colonne des longueurs/largeurs des sépales/pétales en deux colonnes.

```
In [19]: iris = iris.assign(
         type=iris.variable.str[:5],
         dim=iris.variable.str[6:]
       )
         iris = iris.drop(columns=["variable"])
         iris
```

```
Out [19]:
```

	species	value	type	dim
0	setosa	5.1	sepal	length
1	setosa	4.9	sepal	length
2	setosa	4.7	sepal	length
3	setosa	4.6	sepal	length
4	setosa	5.0	sepal	length
..
595	virginica	2.3	petal	width
596	virginica	1.9	petal	width
597	virginica	2.0	petal	width
598	virginica	2.3	petal	width
599	virginica	1.8	petal	width

[600 rows x 4 columns]

On peut plus généralement utiliser la fonction `str.split` avec l'argument `expand=True`.

1.4 Jeu de données babies

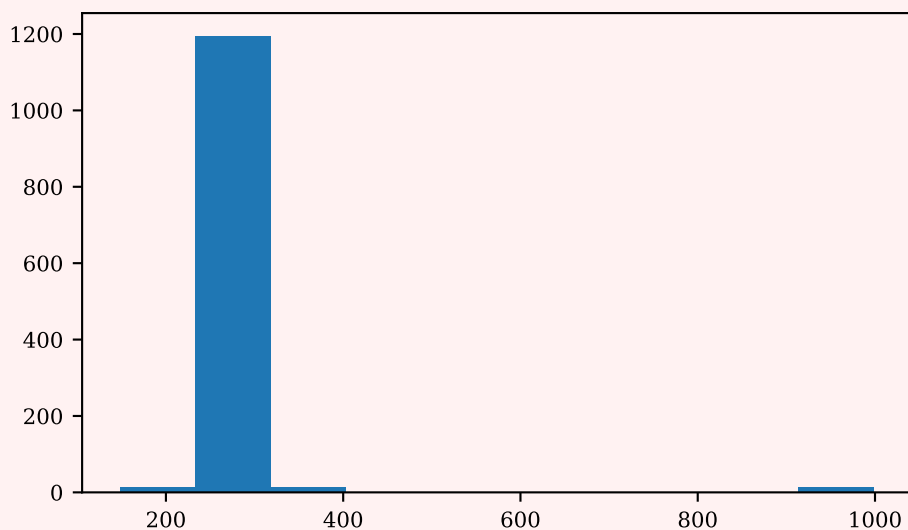
Le jeu de données contenu dans le fichier `babies23.data` est constitué de 1236 bébés décrits par 23 variables.

10 Charger le jeu de données et sélectionner les colonnes `wt`, `gestation`, `parity`, `age`, `ht`, `wt.1`, `smoke`, `ed` que l'on renommera en `bwt`, `gestation`, `parity`, `age`, `height`, `weight`, `smoke`, `education`. Lors du chargement, on pourra utiliser le séparateur `"\s +"` qui correspond un ou plusieurs espaces.

```
In [20]: babies = pd.read_csv("data/babies23.data", delimiter="\s +")
         babies = babies[["wt", "gestation", "parity", "age", "ht", "wt.1",
         ↪ "smoke", "ed"]]
         babies.columns = [
             "bwt",
             "gestation",
             "parity",
             "age",
             "height",
             "weight",
             "smoke",
             "education",
         ]
```

11 Faites l'histogramme des durées de gestation en jours. Que remarquez-vous ?

```
In [21]: plt.hist(babies.gestation)
plt.show()
```



Les valeurs voisines de 1000 sont des valeurs absurdes qui correspondent vraisemblablement à des valeurs manquantes.

D'une manière générale dans ce jeu de données, lorsque la valeur de certains prédicteurs est inconnue une valeur prédéfinie est utilisée :

- Pour la colonne `bwt`, on utilise 999
- Pour la colonne `gestation`, on utilise 999
- Pour la colonne `age`, on utilise 99
- Pour la colonne `height`, on utilise 99
- Pour la colonne `weight`, on utilise 999
- Pour la colonne `smoke`, on utilise 9
- Pour la colonne `education`, on utilise 9

12 Remplacer toutes ces valeurs prédéfinies par `np.nan`.

```
In [22]: babies.loc[babies.bwt == 999, "bwt"] = np.nan
babies.loc[babies.gestation == 999, "gestation"] = np.nan
babies.loc[babies.age == 99, "age"] = np.nan
babies.loc[babies.height == 99, "height"] = np.nan
babies.loc[babies.weight == 999, "weight"] = np.nan
babies.loc[babies.smoke == 9, "smoke"] = np.nan
babies.loc[babies.education == 9, "education"] = np.nan
babies.info()
```



```
Out [22]: <class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 1236 entries, 0 to 1235
Data columns (total 8 columns):
#   Column      Non-Null Count  Dtype
---  ---
0   bwt         1236 non-null   float64
1   gestation   1223 non-null   float64
2   parity      1236 non-null   int64
3   age         1234 non-null   float64
4   height      1214 non-null   float64
5   weight      1200 non-null   float64
6   smoke       1226 non-null   float64
7   education   1235 non-null   float64
dtypes: float64(7), int64(1)
memory usage: 77.4 KB
```

13 Pour la variable `smoke`, la documentation du jeu de données dit

```
smoke: does mother smoke?
0=never,
1=smokes now,
2=until current pregnancy,
3=once did, not now,
9=unknown
```

Recoder la variable `smoke` de manière à ce que la modalité « 1 » soit recodée en `Smoking` et les autres modalités en `NonSmoking`.

```
In [23]: mask = babies.smoke == 1
babies.loc[mask, "smoke"] = "Smoking"
babies.loc[~mask, "smoke"] = "NonSmoking"
babies.smoke = babies.smoke.astype("category")
babies.smoke

Out [23]: 0      NonSmoking
1      NonSmoking
2       Smoking
3      NonSmoking
4       Smoking
...
1231   NonSmoking
1232   NonSmoking
1233     Smoking
1234   NonSmoking
1235   NonSmoking
Name: smoke, Length: 1236, dtype: category
Categories (2, object): ['NonSmoking', 'Smoking']
```



1.5 Dissimilarité et distance

On admet qu'une dissimilarité d est une distance si et seulement si

$$S_{ijk} = 2d_{ij}^2 d_{ik}^2 + 2d_{ij}^2 d_{jk}^2 + 2d_{ik}^2 d_{jk}^2 - d_{jk}^4 - d_{ik}^4 - d_{ij}^4 \geq 0,$$

pour tout triplet (i, j, k) d'éléments distincts appartenant à $\{1, \dots, n\}$.

Ainsi, on peut tester si une dissimilarité est une distance en vérifiant le signe de la quantité

$$S_{\min} = \min_{i, j, k \text{ distincts}} S_{ijk}.$$

14 Écrire une fonction calculant la quantité S_{ijk} puis une fonction calculant la quantité S_{\min} .

```
In [24]: def Sijk(d, i, j, k):
    return (
        2 * d[i, j] ** 2 * d[i, k] ** 2
        + 2 * d[i, j] ** 2 * d[j, k] ** 2
        + 2 * d[i, k] ** 2 * d[j, k] ** 2
        - d[i, j] ** 4
        - d[i, k] ** 4
        - d[j, k] ** 4
    )

    def S_min(d):
        N = d.shape[0]
        return min(
            Sijk(d, i, j, k)
            for i in range(N)
            for j in range(N) if j > i
            for k in range(N) if k > j
        )
```

On crée une dissimilarité quelconque avec le code suivant :

```
from numpy.random import default_rng
rng = default_rng()

N = 5
d = rng.exponential(scale=1, size=(N, N))
d = (d + d.T) / 2
d[range(N), range(N)] = 0
```

Symétrisation
Mise à zéro de la diagonale

À partir d'une dissimilarité quelconque d , on définit une autre dissimilarité d^γ comme suit

$$d_{ij}^\gamma = \begin{cases} d_{ij} & \text{si } i = j, \\ d_{ij} + \gamma & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $\gamma \geq -\min_{i \neq j} d_{ij}$.

15 Montrer expérimentalement qu'il existe un seuil γ_0 tel que

- d^γ est une distance pour $\gamma \geq \gamma_0$
- d^γ est une dissimilarité pour $\gamma < \gamma_0$

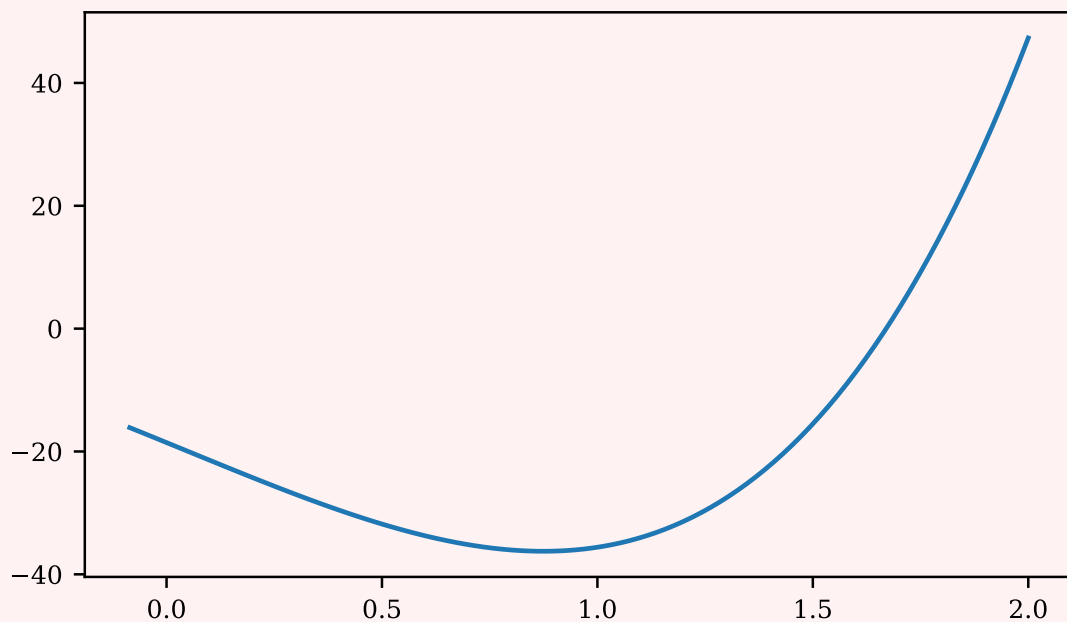
```
In [25]: def ndiagadd(d, e):
    "Ajoute la quantité `e` hors diagonale"
    d = d + e
    d[range(N), range(N)] = 0
    return d

N = 5

from numpy.random import default_rng
rng = default_rng(42)
d = rng.exponential(scale=1, size=(N, N))
d = (d + d.T) / 2
d[range(N), range(N)] = 0

val_min = -d[d > 0].min()
gammas = np.linspace(val_min, 2, 100)
S_mins = [S_min(ndiagadd(d, e)) for e in gammas]

plt.plot(gammas, S_mins)
plt.show()
```



On recherche ici le changement de signe de S_{\min} qui a lieu aux alentours de $\gamma_0 \approx 1.6$.

16 Montrer expérimentalement que $\gamma_0 = \max_{i,j,k} d_{ij} - d_{ik} - d_{jk}$.

```
In [26]: max(
    d[i, j] - d[i, k] - d[k, j]
    for i in range(N)
    for j in range(N)
    for k in range(N)
)
```

Out [26]: 1.670187046638726

On retrouve l'antécédent de 0 de la courbe précédente.

17 Démontrer que lorsque la distance est en plus euclidienne, on a $S_{ijk} = 4A^2$ avec A l'aire du

triangle de longueur d_{ij} , d_{ik} , d_{jk} . On pourra utiliser la formule de Héron pour calculer l'aire d'un triangle avec la longueur de ses trois arêtes.

En notant les longueurs des trois arêtes, a , b et c , l'aire A vaut

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{formule de Héron})$$

avec p le demi-périmètre. Ce qui donne

$$\begin{aligned} 4A^2 &= (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ &= S_{ijk} \end{aligned}$$

On retrouve donc le fait que S_{ijk} est une quantité positive dans le cas d'une distance euclidienne (ce qu'on a admis pour une simple distance).

18 En utilisant la quantité S_{\min} , montrer expérimentalement les résultats suivants :

Si d est une distance alors les dissimilarités suivantes sont aussi des distances :

1. $d_{ij}^{(1/r)}$ avec $r \geq 1$,
2. $d_{ij}/(d_{ij} + c)$ avec $c > 0$.

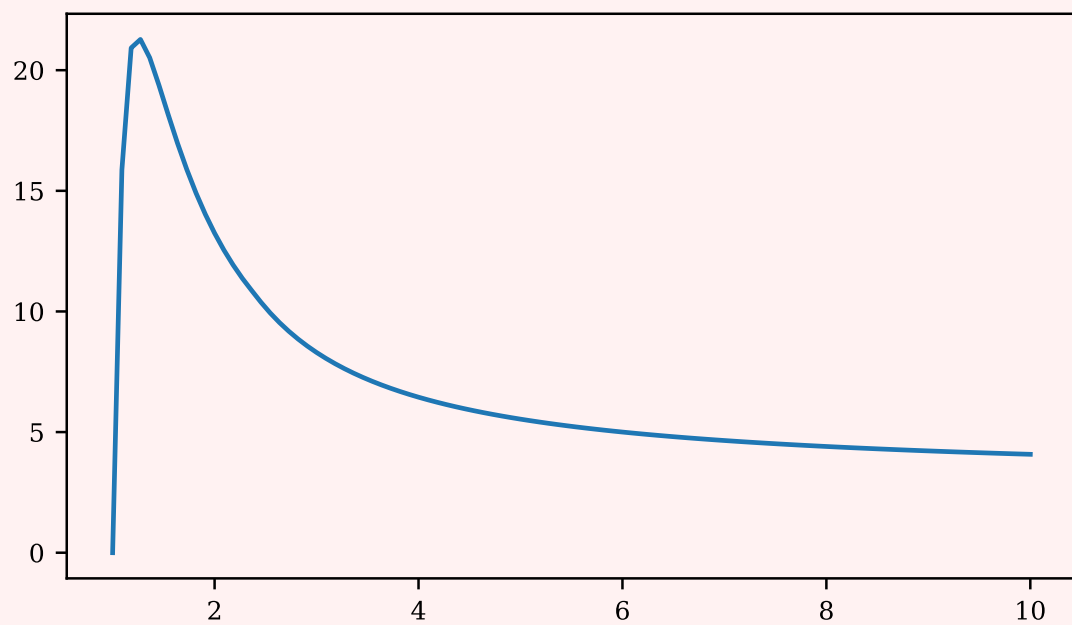
In [27]: N = 5

```
from numpy.random import default_rng
rng = default_rng(42)
d = rng.exponential(scale=1, size=(N, N))
d = (d + d.T) / 2
d[range(N), range(N)] = 0

# Génération d'une distance avec  $\gamma_0$ 
gamma0 = max(
    d[i, j] - d[i, k] - d[k, j]
    for i in range(N)
    for j in range(N)
    for k in range(N)
)
d = ndiagadd(d, gamma0)

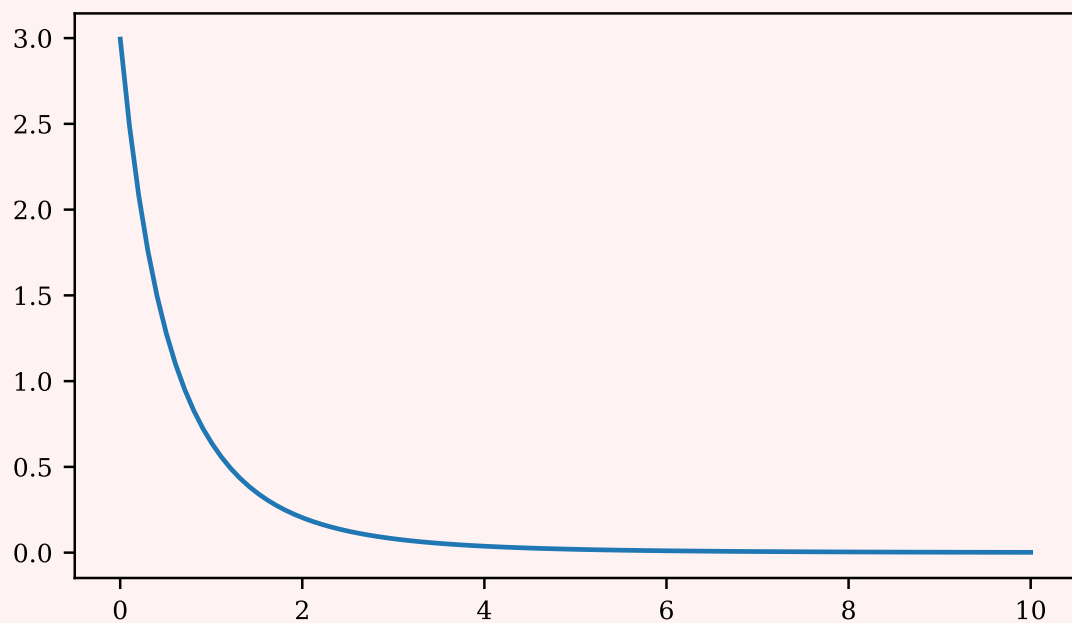
# Calcul des  $S_{\min}$ 
rs = np.linspace(1, 10, 100)
Smins = [S_min(d**(1/r)) for r in rs]

plt.plot(rs, Smins)
plt.show()
```



```
In [28]: cs = np.linspace(0.001, 10, 100)
         Smins = [S_min(d / (d + c)) for c in cs]

         plt.plot(cs, Smins)
         plt.show()
```



Dans les deux cas, $S_{\min} \geq 0$ pour $r \geq 1$ et $c > 1$ ce qui montre que les dissimilarités correspondantes sont des distances.

2 Exercices

2.1 Proximités

[19] On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 4 & 10 & 5 \\ -1 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Lesquelles sont des matrices de proximité, et de quel type de proximité s'agit-il ?

- A n'est pas une proximité car une entrée est négative.
- B n'est ni une similarité ni une dissimilarité car la diagonale n'est pas dominante ni égale à zéro.
- C est une matrice symétrique à diagonale nulle, c'est donc une dissimilarité. C'est en fait aussi une distance, une ultramétrique et une distance euclidienne.
- D est une matrice à diagonale nulle mais pas symétrique.
- E est une matrice de similarité car positive, symétrique à diagonale constante et dominante.
- F est une matrice positive, symétrique, à diagonale constante et dominante : c'est donc une similarité.
- G a une diagonale non constante, ce n'est donc pas une similarité.
- H n'est pas une proximité car une entrée est négative.

2.2 Indice de Rand

On suppose que X_1, \dots, X_n sont n caractéristiques binaires d'une population Ω . On note x_i la i -ième caractéristique de l'individu x , et on considère la similarité suivante entre deux individus x et y :

$$s(x, y) = \frac{a + d}{a + d + b + c},$$

où

$$\begin{aligned} a &= \text{card}\{i, x_i = 1, y_i = 1\}, & d &= \text{card}\{i, x_i = 0, y_i = 0\}, \\ b &= \text{card}\{i, x_i = 0, y_i = 1\}, & c &= \text{card}\{i, x_i = 1, y_i = 0\}. \end{aligned}$$

On pose $d = 1 - s$.

[20] Montrer que

$$d(x, y) = \frac{b + c}{n}$$

Il suffit de remarquer que $a + b + c + d = n$.

[21] Montrer que d vérifie les propriétés de séparation et de symétrie.

L'expression $b + c$ est symétrique en x et y d'où la symétrie de d . Pour la séparation,

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\iff b = c = 0 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

22 On note

$$\begin{aligned} A &= \text{card}\{i, x_i = 0, y_i = 0, z_i = 0\}, & B &= \text{card}\{i, x_i = 0, y_i = 0, z_i = 1\}, \\ C &= \text{card}\{i, x_i = 0, y_i = 1, z_i = 0\} & D &= \text{card}\{i, x_i = 0, y_i = 1, z_i = 1\}, \\ E &= \text{card}\{i, x_i = 1, y_i = 0, z_i = 0\}, & F &= \text{card}\{i, x_i = 1, y_i = 0, z_i = 1\}, \\ G &= \text{card}\{i, x_i = 1, y_i = 1, z_i = 0\}, & H &= \text{card}\{i, x_i = 1, y_i = 1, z_i = 1\}. \end{aligned}$$

22 a Exprimer $d(x, y)$, $d(y, z)$ et $d(x, z)$ en fonction de A, B, C, D, E, F, G et H .

On trouve

$$d(x, y) = \frac{C + D + E + F}{n}, \quad d(x, z) = \frac{B + D + E + G}{n}, \quad d(y, z) = \frac{B + C + F + G}{n}.$$

22 b En déduire que d est une distance.

Des trois inégalités précédentes, on déduit

$$d(x, y) + d(y, z) - d(x, z) = 2 \frac{D + E}{n} \geq 0,$$

d'où l'inégalité triangulaire. La proximité d vérifie les propriétés de symétrie, de séparation et l'inégalité triangulaire, c'est donc une distance.

2.3 Ultramétrie

23 Montrer que la distance qui vaut tout le temps 1 sauf pour deux éléments identiques où elle vaut 0 est une distance ultramétrique.

La distance d est donc définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. La distance est ultramétrique si elle vérifie les propriétés de symétrie, de séparation, et l'inégalité ultramétrique. Bien que l'énoncé suppose implicitement que d est une distance (et vérifie donc les deux premières propriétés), nous les démontrerons à nouveau.

1. On a bien évidemment $d(x, y) = d(y, x)$ dès que $x = y$. Si $x \neq y$ on a alors $d(x, y) = 1 = d(y, x)$. La distance d est donc symétrique.
2. Par définition, on a

$$d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

ce qui est exactement la propriété de séparation.

3. Soit x, y et z trois éléments de Ω . Dès que les éléments ne sont pas tous distincts, l'inégalité ultramétrique est trivialement vérifiée. Dans le cas contraire, si x, y et z sont distincts, on a $d(x, y) = d(y, z) = d(x, z) = 1$ d'après la définition. L'inégalité ultramétrique est encore vérifiée.

En conclusion, la distance d est ultramétrique. □

2.4 Ultramétrie et géométrie

24 Soit Ω un ensemble muni d'une ultramétrie d . Montrer que tout triangle dont les sommets sont des points de Ω est soit équilatéral, soit isocèle avec une petite base.

Soit x, y, z trois points de Ω . On pose $a = d(x, y)$, $b = d(y, z)$ et $c = d(x, z)$. Sans perte de généralité on peut supposer que $a \leq b \leq c$. En appliquant l'inégalité ultramétrique à deux reprises :

$$\begin{aligned}d(x, z) &\leq \max(d(x, y), d(y, z)) &\iff c &\leq \max(a, b) = b \\d(y, z) &\leq \max(d(y, x), d(x, z)) &\iff b &\leq \max(a, c) = c\end{aligned}$$

On a donc $b = c$. Si $a < b$, le triangle est isocèle avec une petite base. Si $a = b$, le triangle est équilatéral.