MT03-Algèbre linéaire 1

Chapitre 1 : Groupe, corps et espace vectoriel

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Septembre 2022

Chapitre 1
Groupe, corps et espace vectoriel

1.1 Notions de groupe et de corps

1.1.1 Introduction

> **Documents** :
> Document C.1.1
> Document C.1.2

Dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, vous connaissez deux **lois de composition interne** qui sont les opérations : addition et multiplication. On dit que ce sont des lois de composition interne car si

$$(x,y) \in E \times E \; (E = \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z})$$

le résultat de l'addition ou de la multiplication est aussi dans E.

Ainsi, dans $\mathbb{N}$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ n+m \in \mathbb{N}$ et $n \times m \in \mathbb{N}$. Par contre la loi "soustraction" n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$, en effet $2 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$ et $2-3 \notin \mathbb{N}$. C'est pour remédier à ce défaut que l'on a construit l'ensemble des **entiers relatifs** $\mathbb{Z}$, où la soustraction est une addition " déguisée " entre le premier nombre et l'opposé du second. L'addition dans $\mathbb{Z}$ vérifie alors les propriétés suivantes :

i/ elle est **commutative** :

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{Z},\ a+b = b+a,$$

ii/ elle est **associative** :

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{Z},\ \forall c \in \mathbb{Z},\ a+(b+c) = (a+b)+c,$$

iii/ elle a un **élément neutre** :

$$\exists e = 0 \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall a \in \mathbb{Z},\ a+e = e+a = a,$$

iv/ tout élément a admet un **opposé** :

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ \exists a' = -a \in \mathbb{Z}, \text{ tel que } a+a' = a'+a = e.$$

On remarquera bien la différence essentielle de sens entre $\exists e,\ \forall a$ (définition de l'élément neutre) et $\forall a,\ \exists a'$ (définition de l'opposé).

La loi "addition" possède les mêmes propriétés lorsqu'on la considère dans l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ ou l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ (voir le document référencé C.1.1). Quand est-il de la loi "multiplication" ?
On sait que la multiplication est i/ associative et ii/ commutative dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$, et

iii/ elle possède également un élément neutre :

$$\exists e = 1 \in \mathbb{N} \text{ (resp. } \mathbb{Z}) \text{ tel que } \forall a \in \mathbb{N} \text{ (resp. } \mathbb{Z})\ ,\ a \times e = e \times a = a,$$

Cependant, **l'élément inverse** pour la multiplication n'existe pas dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. D'où la nécessité de construire l'ensemble des rationnels (voir document référencé C.1.2) :

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q}\ ;\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Si $a = p/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, son inverse est $\frac{1}{a} = q/p$, par contre cet inverse n'existe pas pour tout a dans $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ ou dans $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

L'objectif de cette première section est de distinguer les différents ensembles $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ par leur structure algébrique.

1.1.2 Monoïde

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2

Définition 1.1.1. *Soit G un ensemble non vide, on dit que G est muni d'une loi de composition interne, s'il existe une application de G × G dans G.*
Dans ce cours, nous noterons cette loi $\hat{+}$ *:* $(x, y) \mapsto x\hat{+}y$.

Par exemple,
— l'union ∪ et l'intersection ∩, considérées dans l'ensemble des parties de ℝ, sont des lois de composition internes ;
— la composition " ∘ ", considérée dans l'ensemble des applications de ℝ dans ℝ, est une loi de composition interne.

Définition 1.1.2. *L'ensemble G est un* **monoïde** *si G est muni d'une* **loi de composition interne** *qui possède les propriétés suivantes :*
— *elle est* **associative** *:* $\forall x, y, z \in G, \quad (x\hat{+}y)\hat{+}z = x\hat{+}(y\hat{+}z)$,
— *elle admet un* **élément neutre** *:* $\exists e \in G$ *tel que ,* $\forall x \in G,\ e\hat{+}x = x\hat{+}e = x$.
On note $(G, \hat{+})$ *le monoïde pour préciser l'ensemble et sa loi de composition.*

On peut donc dire que $(\mathbb{N}, +)$ et $(\mathbb{R}_+, +)$ sont des monoïdes dont l'élément neutre est $e = 0$. Cette structure algébrique s'étend à bien d'autres objets mathématiques.

L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathscr{P}(E)$. Ainsi,
— $(\mathscr{P}(E), \cup)$ est un monoïde, dont l'ensemble vide est l'élément neutre.
— $(\mathscr{P}(E), \cap)$ est un monoïde, dont E est l'élément neutre.

Notons $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de ℝ dans ℝ. Alors,
— $(\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \times)$ est un monoïde, dont la fonction constante égale à 1 est l'élément neutre.
— $(\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$ est un monoïde, dont la fonction identité est l'élément neutre.

1.1.3 Groupe et morphisme de groupe

Exercices :	**Exemples** :	**Documents** :
Exercice A.1.3	Exemple B.1.1	Document C.1.3
Exercice A.1.4		
Exercice A.1.5		
Exercice A.1.6		

Définition 1.1.3. *L'ensemble G est un* **groupe** *si G est un* **monoïde** *muni d'une* **loi de composition interne** *qui possède la propriété supplémentaire suivante :*

— *tout élément admet un* **symétrique** *(ou* **opposé** *ou* **inverse** *qui est nécessairement unique) :* $\forall x \in G$, $\exists \tilde{x} \in G$ *tel que* $\tilde{x} \hat{+} x = x \hat{+} \tilde{x} = e$.

On dit que le groupe $(G, \hat{+})$ *est* **commutatif** *ou* **abélien** *(du nom du mathématicien norvégien Niels H.* **Abel** *(1802-1829)) si la loi de composition est commutative :* $\forall x, y \in G, x \hat{+} y = y \hat{+} x$.

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes commutatifs. On sait que l'addition "usuelle" est associative et commutative, 0 est évidemment l'élément neutre de l'addition et $-x$ est le symétrique de x.

Lorsque la loi est associative, les parenthèses sont inutiles et on peut noter sans ambiguïté $x \hat{+} y \hat{+} z$.

Dans un groupe, il est possible de "simplifier", c'est-à-dire :

$$x \hat{+} y = x \hat{+} z \Rightarrow y = z, \qquad y \hat{+} x = z \hat{+} x \Rightarrow y = z.$$

En effet

$$x \hat{+} y = x \hat{+} z \Rightarrow \tilde{x} \hat{+} (x \hat{+} y) = \tilde{x} \hat{+} (x \hat{+} z) \Rightarrow (\tilde{x} \hat{+} x) \hat{+} y = (\tilde{x} \hat{+} x) \hat{+} z \Rightarrow y = z.$$

Faire une démonstration similaire pour l'autre implication. En particulier, on a :

$$x \hat{+} y = x \Rightarrow y = e, \qquad x \hat{+} y = y \Rightarrow x = e$$

Attention! Il n'est pas possible de simplifier lorsque l'on n'a pas de structure de groupe. On a $0 \times 3 = 0 \times 5$ mais 3 n'est pas égal à 5! (On pourra vérifier que $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe)

Proposition 1.1.1. *Soit* $(G, \hat{+})$ *un groupe, l'inverse de tout élément* $x \in G$ *est unique.*

Démonstration – En effet, si x_1 et x_2 sont deux inverses de x, on a alors

$$x_1 \hat{+} x = x \hat{+} x_1 = e, \qquad x_2 \hat{+} x = x \hat{+} x_2 = e.$$

On a donc

$$x_1 = x_1 \hat{+} e = x_1 \hat{+} (x \hat{+} x_2) = (x_1 \hat{+} x) \hat{+} x_2 = e \hat{+} x_2 = x_2.$$

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sont donc des groupes abéliens, dont l'élément neutre n'est autre que 0, et l'opposé d'un entier a, noté $-a$, est simplement obtenu en changeant le signe de a. Ces notations sont utilisées couramment pour les groupes dont la loi est notée avec le signe d'addition (" + ") (on les appelle groupes *additifs*). Ce n'est pas le cas de $(\mathbb{N}, +)$. Cependant, dans le document référencé, vous verrez qu'on peut munir l'ensemble fini $[\![0, n]\!] = \{0; 1; \ldots; n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, d'une loi interne lui donnant une structure de groupe.

Pour tout autre loi interne il n'y a pas de raison particulière que l'élément neutre soit 0, et on utilise plutôt le terme " élément inverse " à la place de l'opposé.

— $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \times)$ et $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \times)$ sont des groupes abéliens, dont l'élément neutre n'est autre que 1, et l'inverse est noté $\frac{1}{a}$.
— L'ensemble des applications bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la loi de composition "$\circ$", est un groupe non abélien. L'élément inverse est appelé application réciproque (voir chapitre 2 de MT02).

On peut mettre en relation deux structures algébriques de même espèces de la façon suivante.

Définition 1.1.4. *Soit* $(G, \hat{+})$ *et* $(G', \star)$ *deux groupes d'élements neutres* e *et* e' *respectivement. Une application* $\varphi : G \to G'$ *telle que*
— $\forall (x, y) \in G \times G,\ \varphi(x \hat{+} y) = \varphi(x) \star \varphi(y)$,
— $\varphi(e) = e'$,
est appelée ***morphisme*** *de groupes.*
Si de plus φ *est bijective, on dit que* φ *est un* ***isomorphisme*** *(de groupes).*

Les exemples les plus connus sont les suivants.
— La fonction exponentielle est un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \times)$:
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b).$$
— Inversement, la fonction logarithme népérien est un isomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$:
$$\forall (a, b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

1.1.4 Corps commutatif

> **Exercices** :
> Exercice A.1.7

Soient deux lois de composition interne dans E, notées $\hat{+}$ et $\star$, on dit que la loi $\star$ est **distributive** par rapport à la loi $\hat{+}$ si

$$\forall a, b, c \in E,\ a \star (b \hat{+} c) = (a \star b) \hat{+} (a \star c).$$

Définition 1.1.5. *On appelle* **anneau** *(unitaire) un ensemble A muni de deux lois de composition* <u>*interne*</u>*, notées respectivement $\hat{+}$ et $\star$, telles que*

- *(i) $(A, \hat{+})$ constitue un groupe commutatif,*
- *(ii) la loi $\star$ est associative,*
- *(iii) la loi $\star$ est distributive par rapport à la loi $\hat{+}$:*

$$\forall x, y, z \in A \text{ on a } x \star (y \hat{+} z) = (x \star y) \hat{+} (x \star z) \text{ et } (x \hat{+} y) \star z = (x \star z) \hat{+} (y \star z).$$

- *(iv) la loi $\star$ admet un élément neutre.*

Pour que $(A, \star)$ soit un groupe il faudrait que tout élément admette un inverse pour la loi $\star$ (ceci sera (presque) vrai pour un corps). L'ensemble $(\mathbb{Z}, +, \times)$, l'ensemble des applications d'une partie $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $(\mathscr{A}(E, \mathbb{R}), +, \times)$ ont une structure d'anneau. Par ailleurs on dit que l'anneau est **commutatif** si la deuxième loi, c'est-à-dire $\star$, est commutative (si on remplace la multiplication par la composition, l'ensemble $(\mathscr{A}(E, \mathbb{R}), +, \times)$ constitue un exemple d'anneau non commutatif).

Définition 1.1.6. *On appelle* **corps commutatif** *un ensemble $\mathbb{K}$ qui, muni de deux lois de composition* <u>*interne*</u>*, constitue un anneau commutatif unitaire $(\mathbb{K}, \hat{+}, \star)$ et qui possède la propriété suivante : si on note e l'élément neutre de la loi $\hat{+}$, alors tout élément de $\mathbb{K}$, sauf précisément e, admet un inverse pour la loi $\star$.*

Les propriétés que nous connaissons sur l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}$, à savoir :

- i/ La loi d'addition est une loi de groupe abélien ;
- ii/ La multiplication est distributive par rapport à l'addition ;
- iii/ $\mathbb{Q}^*$ (i.e. l'ensemble moins l'élément neutre de l'addition) est un groupe abélien pour la multiplication.

donnent à $\mathbb{Q}$ une structure appelée struture de **corps commutatif** (contrairement aux groupes, on n'utilise pas le terme " abélien " pour un corps !). C'est pourquoi, dans la littérature (un peu spécialisée !), vous trouverez la terminologie “ le corps des rationnels ”. $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps car la propriété iii/ ci-dessus n'est pas vérifiée. Les exemples classiques de corps commutatifs sont donc : $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Il existe d'autres exemples de corps commutatifs comme l'ensemble fini $[\![0, p-1]\!] := \{0; 1; \ldots; p-1\}$, où p est un nombre entier naturel premier, muni de l'addition et de la multiplication congrues modulo p (voir le document référencé C.1.3). Pour $p = 5$, on peut aisément vérifier que les deux tables suivantes satisfont les propriétés de corps commutatifs :

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Dans ce cours on notera plus généralement $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque.

1.2 Espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$

1.2.1 L' espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Dans cette section, le corps commutatif $\mathbb{K}$ sera le plus souvent égal à $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ à partir du chapitre 2). Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

On note $+$ l'addition dans $\mathbb{K}$ et on n'utilise pas de symbole pour la multiplication dans $\mathbb{K}$: $\lambda+\mu$ et $\lambda\mu$ ont leur signification habituelle.

Définition 1.2.1. *On appelle n-**uplet** de scalaires de $\mathbb{K}$ la donnée de n éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $\mathbb{K}$. L'ensemble des $n-uplets$ est noté $\mathbb{K}^n$ et le scalaire x_i est appelé $i$ème composante du $n-uplet$ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On appellera **vecteurs** les éléments de $\mathbb{K}^n$ et il est commode de les noter avec une "flèche" : $\vec{x}$ au lieu de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

Opérations sur les n-uplets.

— Addition de deux vecteurs : si $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ alors on définit la somme de deux vecteurs, notée $\vec{u}+\vec{v}$, par
$$\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, \dots, u_n+v_n).$$

— Différence de deux vecteurs : si $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ alors on note $-\vec{v}$ le n-uplet $(-v_1, \dots, -v_n)$ et on définit la différence de deux vecteurs, notée $\vec{u}-\vec{v}$, par
$$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v}) = (u_1-v_1, \dots, u_n-v_n).$$

— Multiplication d'un n-uplet par un scalaire : si $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors on note $\lambda\vec{u}$ le vecteur défini par
$$\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n).$$

Par exemple, considérons le vecteur $\vec{x} = (-2, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$ de $\mathbb{R}^3$. On peut écrire (en ligne)
$$\vec{x} = -2(1,0,0) + \sqrt{3}(0,1,0) + \tfrac{1}{2}(0,0,1)$$
ou (en colonne)
$$\vec{x} = -2\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{i}} + \sqrt{3}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{j}} + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{k}}.$$

La famille des trois vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement, si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors on a
$$\vec{x} = x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,0,\dots,0) + \cdots + x_n(0,\dots,0,1).$$

On met en évidence n vecteurs particuliers
$$\vec{e}_i = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{ème composante}}}{1},0,\dots,0)$$

de telle sorte que
$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k.$$

Définition 1.2.2. *Le n-uplet de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est appelé **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.*

Propriétés de la base canonique.

— $\forall \vec{x} \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique n-uplet de scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ tel que $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$.
Le scalaire x_i est appelé **i-ème coordonnée de $\vec{x}$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.**

— On note $\vec{0}$ le vecteur de coordonnées nulles. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, n scalaires de $\mathbb{K}^n$, alors

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Définition 1.2.3. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$.*
*On appelle **famille de** p **vecteurs** de $\mathbb{K}^n$, la donnée de p-vecteurs de $\mathbb{K}^n$ $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$.*
*Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ alors le vecteur $\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_p \vec{u}_p$ est appelé **combinaison linéaire** de la famille $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$.*

Les règles de calculs définies sur l'ensemble des n-uplets $\mathbb{K}^n$ en font un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ dont une définition précise est donnée au paragraphe suivant.

1.2.2 Généralités sur les espaces vectoriels

Exemples :
Exemple B.1.2

Soit E un ensemble. On appelle également **vecteurs** les éléments de E et on continuera de les noter dans ce paragraphe avec une "flèche" : $\vec{x}$, sauf lorsque les objects mathématiques sont clairement identifiés.

On définit les deux lois de composition suivantes :
— une loi interne notée $\hat{+}$ de $E \times E$ dans E, c'est à dire une application :
$(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E \mapsto \quad \vec{x} \hat{+} \vec{y} \in E$,
— une loi externe notée "." de $\mathbb{K} \times E$ dans E , c'est-à-dire une application :
$(\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda.\vec{x} \in E$.

Par exemple, on définit $E = \mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Un vecteur est une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On peut définir :
— l'addition habituelle des éléments de E : $f \hat{+} g : x \mapsto f(x) + g(x)$ ($+$ est le symbole de l'addition entre deux nombres réels et $\hat{+}$ est le symbole de l'addition entre deux applications),
— le produit habituel d'une application par un scalaire (nombre réel) : $\lambda.f : x \mapsto \lambda f(x)$.

Définition 1.2.4. *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $\hat{+}$ et d'une loi de composition externe de $\mathbb{K} \times E$ dans E notée "." E est un* ***espace vectoriel sur*** $\mathbb{K}$ *si :*
— *$(E, \hat{+})$ est un groupe commutatif (on note $\vec{0}$ l'élément neutre et $-\vec{x}$ le symétrique de $\vec{x}$),*
— *la loi externe possède les 4 propriétés suivantes : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$,*
- $(\lambda\mu).\vec{x} = \lambda.(\mu.\vec{x})$
- $(\lambda + \mu).\vec{x} = \lambda.\vec{x} \hat{+} \mu.\vec{x}$
- $\lambda.(\vec{x} \hat{+} \vec{y}) = \lambda.\vec{x} \hat{+} \lambda.\vec{y}$
- $1.\vec{x} = \vec{x}$ *(1 est l' élément unité de K).*

Exemples
— On a défini précédemment l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de nombres réels $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec les lois suivantes :
- $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \hat{+} \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda.\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

— L'ensemble $\mathscr{P}_n$ des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels muni de l'addition et du produit par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2.1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $\vec{x} \in E$ on a :*
1. $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$ *et* $0.\vec{x} = \vec{0}$,
2. $\lambda.\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ *ou* $\vec{x} = \vec{0}$,
3. $(-\lambda).\vec{x} = \lambda.(-\vec{x}) = -(\lambda.\vec{x})$

Démonstration–

1. $\lambda.\vec{0} = \lambda.(\vec{0} \hat{+} \vec{0}) \Rightarrow \lambda.\vec{0} = \lambda.\vec{0} \hat{+} \lambda.\vec{0}$. On simplifie par $\lambda.\vec{0}$ et on obtient $\vec{0} = \lambda.\vec{0}$
$\lambda.\vec{x} = (0 + \lambda).\vec{x} \Rightarrow \lambda.\vec{x} = 0.\vec{x} \hat{+} \lambda.\vec{x}$. On simplifie par $\lambda.\vec{x}$ et on obtient $\vec{0} = 0.\vec{x}$.

2. On sait que :

$$\{\lambda.\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \{\lambda=0 \text{ ou } \vec{x}=\vec{0}\}\} \Leftrightarrow \{\{\lambda.\vec{x}=\vec{0} \text{ et } \lambda\neq 0\} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}\}$$

   Si $\lambda.\vec{x}=\vec{0}$ et $\lambda\neq 0$, alors $\lambda^{-1}.(\lambda.\vec{x})=\lambda^{-1}.\vec{0}=\vec{0}$, d'où $(\lambda^{-1}\lambda).\vec{x}=\vec{0}$ d'où $1.\vec{x}=\vec{0}$, d'où $\vec{x}=\vec{0}$.

3. $(-\lambda).\vec{x}\hat{+}(\lambda).\vec{x}=(-\lambda+\lambda).\vec{x}=0.\vec{x}=\vec{0}$ donc $(-\lambda).\vec{x}=-(\lambda.\vec{x})$ car l'élément opposé est unique. De même on peut montrer que : $\lambda.(-\vec{x})=-(\lambda.\vec{x})$.

1.2.3 Notion de sous-espaces vectoriels

Exercices :
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9
Exercice A.1.10

Exemples :
Exemple B.1.3

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On note $\hat{+}$ et . les lois interne et externe de E.

Définition 1.2.5. *Soit F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un* **sous-espace vectoriel** *de E si F muni des lois $\hat{+}$ et . est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

L'ensemble P_3 des polynômes réels de degré inférieur ou égal à trois est un sous-espace vectoriel de l'ensemble P_4 des polynômes réels de degré inférieur ou égal à quatre puisque $P_3 \subset P_4$ et que ces ensembles ont une structure d'espace vectoriel pour les mêmes lois de composition (l'addition et la multiplication par un réel).

Proposition 1.2.2. *$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
- *$F \neq \emptyset$,*
- *(i) $\vec{x}, \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} \hat{+} \vec{y} \in F$,*
- *(ii) $(\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x} \in F) \Rightarrow \lambda.\vec{x} \in F$.*

On dit que F est stable pour les lois $\hat{+}$ et .

Démonstration – Les conditions (i) et (ii) sont nécessaires car $\hat{+}$ doit être une loi de composition interne sur F et . doit être une loi de composition externe sur F.

On montre que ces conditions sont suffisantes. Pour cela on suppose que (i) et (ii) sont vraies et on montre que F est un espace vectoriel.

Si (i) est vraie, alors la loi $\hat{+}$ est une loi interne sur F .

La loi $\hat{+}$ est associative et commutative sur E , donc loi $\hat{+}$ est associative et commutative sur F.

Les quatre propriétés de de la loi externe . (voir la définition 1.2.4) sont vraies sur E, donc elles sont vraies sur F.

On choisit $\lambda = -1$ dans (ii), on obtient $-\vec{x} \in F$, donc tout élément de F admet un opposé dans F.

On choisit $\vec{y} = -\vec{x}$ dans (i), on obtient $\vec{0} \in F$, donc l'élément neutre de $\hat{+}$ appartient à F.

On en déduit immédiatement la caractérisation fondamentale (très utile!) suivante :

Proposition 1.2.3. *F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est non vide et*
$$\vec{x}, \vec{y} \in F \text{ et } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda.\vec{x} \hat{+} \mu.\vec{y} \in F.$$

Proposition 1.2.4.
- *E et $\{\vec{0}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*
- *Le vecteur $\vec{0}$ appartient à tous les sous-espaces vectoriels*

La démonstration est à faire dans l'exercice A.1.5.

Proposition 1.2.5. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel. Par contre $F \cup G$ n' est pas un sous-espace vectoriel (en général).*

Démonstration –

— $\vec{0} \in F \cap G$ donc cet ensemble n'est pas vide.
En utilisant la définition de l'intersection, on montre facilement que si $\vec{x}, \vec{y} \in F \cap G$ alors $\lambda.\vec{x} \hat{+} \mu.\vec{y} \in F \cap G$.
$F \cap G$ est donc un sous-espace vectoriel.

— On utilise un exemple pour montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G tels que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$ est muni des lois habituelles $\hat{+}$ et ..
On définit $F = \{(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}, \quad G = \{(0, x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$.
On montre facilement que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Si l'on choisit $\vec{y} = (1,0)$, alors $\vec{y} \in F$ donc $\vec{y} \in F \cup G$. De même si l'on choisit $\vec{z} = (0,1)$, alors $\vec{z} \in G$ donc $\vec{z} \in F \cup G$. Or $\vec{y} \hat{+} \vec{z} = (1,1)$ n'appartient pas à $F \cup G$. $F \cup G$ n'est donc pas stable pour la loi $\hat{+}$.
On pourrait démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

1.2.4 Sous-espaces vectoriels engendrés

> **Exercices** :
> Exercice A.1.11
> Exercice A.1.12
> Exercice A.1.13
> Exercice A.1.14
> Exercice A.1.15

Définition 1.2.6. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ une famille de p vecteurs appartenant à E. On appelle* **sous-espace vectoriel engendré** *par la famille de vecteurs $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$, et on note* vect $< \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p >$ *l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille*

$$\vec{x} \in \text{vect} < \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p > \Longleftrightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{K},\ \vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_p \vec{x}_p.$$

Montrer en exercice que vect $< \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p >$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.2.7. *Dans un espace vectoriel E, une* **droite vectorielle** *est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non-nul. Un* **plan vectoriel** *est un sous-espace vectoriel engendré par une famille libre de deux vecteurs.*

Noter que
— l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\{\vec{0}\}$ est $\{\vec{0}\}$.
— l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille formée de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $\mathbb{K}^n$, et on peut écrire

$$\mathbb{K}^n = \text{vect} < \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n >$$

Vous pouvez vérifier que si $E = \mathbb{R}^3$ alors les sous-espaces vectoriels

$F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ et $G = \{\vec{x} \in E | x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$

sont respectivement une droite et un plan vectoriels.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre 1

Exercice A.1.1 Ch1-Exercice1

Montrer que la loi "soustraction" est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$. Montrer que la loi "division" n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ mais que cette loi est une loi de composition interne dans $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$.

Exercice A.1.2 Ch1-Exercice2

Montrer que les lois "addition" et "multiplication" ne sont pas des lois internes dans l'ensemble des nombres irrationnels.

Exercice A.1.3 Ch1-Exercice3

Montrer que dans un groupe $(E, \hat{+})$ l'élément neutre est unique, de même que l'élément inverse d'un élément quelconque de E. Enfin, montrer que la " règle de simplification " : si $a \hat{+} c = b \hat{+} c$, alors $a = b$, que vous connaissez bien pour l'addition dans $\mathbb{Z}$, s'applique dans un groupe quelconque.

Exercice A.1.4 Ch1-Exercice 4

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ représentent les ensembles des nombres entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, $+$ et $\times$ sont l'addition et la multiplication.

$(\mathbb{N}, \times)$, $(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{Q}, \times)$,$(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{Q}^*_-, \times)$, $(\mathbb{Q}^*_+, \times)$ ont-ils des structures de groupe ?

Exercice A.1.5 Ch1-Exercice 5

Soit $\mathscr{P}_n$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $(\mathscr{P}_n, +)$ est un groupe commutatif. Qu'en est-il pour $(\mathscr{P}_n, \times)$?

Exercice A.1.6 Ch1-Exercice 6

Montrer que le groupe $(\mathbb{R}^{n+1}, +)$ est isomorphe au groupe $(\mathscr{P}_n, +)$.

Exercice A.1.7 Ch1-Exercice 7

On définit l'ensemble des nombres décimaux de la façon suivante

$$x \in \mathbb{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ x = \frac{n}{10^p}\ .$$

Montrer que $(\mathbb{D}, +, \times)$ est un anneau commutatif. S'agit-il d'un corps ?

Exercice A.1.8 Ch1-Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, dire si F est un sous-espace vectoriel. Si oui, de quel espace vectoriel ?

1. F est l'ensemble des fonctions réelles, continues, positives ou nulles.

2. F est l'ensemble des fonctions réelles, continues.

3. F est l'ensemble des fonctions réelles vérifiant $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4. F est l'ensemble des éléments (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ solutions du système

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 0 \end{cases}$$

5. F est l'ensemble des réels solutions de l'équation $\cos x = 0$

6. F est l'ensemble des fonctions réelles continues vérifiant $f(\frac{1}{2}) = 0$.

7. F est l'ensemble des fonctions réelles continues vérifiant $f(\frac{1}{2}) = 1$.

8. F est l'ensemble des fonctions réelles impaires.

9. F est l'ensemble des fonctions réelles paires.

10. F est l'ensemble des polynômes réels de degré exactement n.

11. F est l'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré sept.

12. F est l'ensemble des fonctions réelles dérivables vérifiant $f' + f = 0$.

Exercice A.1.9 Ch1-Exercice 9

Montrer que :
- E et $\{\vec{0}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E
- Tous les sous-espaces vectoriels contiennent $\{\vec{0}\}$

Exercice A.1.10 Ch1-Exercice 10

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Montrer que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E dans les cas suivants :

1. F : ensemble des suites convergentes, E : ensemble des suites réelles et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
2. $F = \mathscr{D}(]0,1[,\mathbb{R})$ ensemble des fonctions définies et dérivables $]0,1[$, $E = \mathscr{A}(]0,1[,\mathbb{R})$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
3. F est l'ensemble des $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ de la forme : $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, 0, \ldots, 0)$, $p < n$, $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   On remarque que F peut être identifié à $\mathbb{R}^p$ par la bijection suivante : à tout $\vec{x} \in F$ on associe le vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^p$ par :
   $$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, 0, \ldots, 0),\ \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_p).$$
4. $F = \{\vec{y} \in E / \vec{y} = \lambda.\vec{x}, \lambda \in K\}$, où $\vec{x}$ est un vecteur non-nul de E (F est dit **droite vectorielle** engendrée par $\vec{x}$).

Exercice A.1.11 Ch1-Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de l'addition de vecteurs pour loi interne et de la multiplication par un scalaire réel pour loi externe. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ Montrer que $\mathrm{Vect}\left\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p \right\rangle$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice A.1.12 Ch1-Exercice 12

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit $F = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\}$. Montrer que F est engendré par une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice A.1.13 Ch1-Exercice 13

Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
3. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice A.1.14 Ch1-Exercice 14

On suppose que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $\vec{u}' = 2\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v}' = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

1. Montrer que $6\vec{u}' - 5\vec{v}'$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Montrer que $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$.
3. Montrer que $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$.
4. Montrer que toute combinaison linéaire de $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
5. Montrer que toute combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$.

Exercice A.1.15 Ch1-Exercice 15

Soit E la partie de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $2x + 3y - z = 0$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $d \neq 0$. Montrer que la partie de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $2x + 3y - z = d$, n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ aux points de l'espace muni d'un repère d'origine O. Donner une description géométrique de E.

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD1-Exercice 1

1. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1).$$

   Montrer que $*$ est commutative, non associative et que 1 est élément neutre.

2. On munit $\mathbb{R}_+^*$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad x * y = \sqrt{x^2+y^2}.$$

   Montrer que $*$ est commutative, associative et que 0 est élément neutre. Montrer ensuite qu'aucun élément de $\mathbb{R}_+^*$ n'a de symétrique pour $*$.

Exercice A.2.2 TD1-Exercice 2

On appelle *permutation* une application bijective de $\{1,2,\ldots,n\}$ dans lui-même. Montrez que l'ensemble des permutations de $\{1,2,3\}$ est un groupe non commutatif pour la composition (si u et v sont des permutations, on note $u \circ v(x) = u(v(x))$). Ecrire la table de la loi.

Exercice A.2.3 TD1-Exercice 3

Soit $G =]-1,1[$ muni de la loi de composition

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

1. Justifier qu'il s'agit d'une loi de composition interne.
2. Montrer que $(G,*)$ est un groupe commutatif.

Exercice A.2.4 TD1-Exercice 4

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ muni de la loi interne

$$(x,y) * (x',y') = (xx', xy'+y).$$

Montrer que $(G,*)$ est un groupe non commutatif.

Exercice A.2.5 TD1-Exercice 5

On munit $\mathbb{R}_+^*$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3}.$$

1. Montrer que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe.
2. Montrer que $\varphi : x \mapsto x^3$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R},*)$ vers $(\mathbb{R},+)$.

Exercice A.2.6 TD1-Exercice 6

Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$ muni de la loi de composition interne max définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } y \le x \\ y & \text{si } x \le y \end{cases}$$

1. Justifier que la loi max est associative et commutative.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur E pour que $(E, \max)$ soit un monoïde.

Exercice A.2.7 TD1-Exercice 7

Soit E un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On définit la loi de composition interne Δ sur E suivante :

$$\forall A \subset E,\ \forall B \subset E, \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Pour $E = \{0,1\}$, expliciter $\mathscr{P}(E)$. Dresser la table de composition de la loi $\triangle$. La loi $\triangle$ est-elle associative ? commutative ? Peut-on dire que $(\mathscr{P}(E), \triangle)$ est un groupe ?
2. Soit E un ensemble quelconque. On considère l'application $\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{A}(E, \{0,1\})$ qui à une partie $A \subset E$ lui associe son indicatrice :

$$\varphi(A) = \mathbb{1}_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Montrer que $\varphi(A \Delta B) = 1 - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$. S'agit-il d'un isomorphisme de groupes ?

Exercice A.2.8 TD1-Exercice 8

On munit $\mathbb{R}^2$ de deux lois de composition interne $+$ et $*$ définies par :

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \qquad \text{et} \qquad (x,y) * (x',y') = (xx', xy' + x'y).$$

On sait que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif.

1. Montrer que la loi $*$ est commutative.
2. Montrer que la loi $*$ est associative.
3. Déterminer l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ pour la loi $*$.
4. Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.
5. S'agit-il d'un corps ?

Exercice A.2.9 TD1-Exercice 9

Soit G l'ensemble des applications $f :]0, +\infty[\mapsto]0, +\infty[$ telles qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = x^\alpha.$$

On indexera f par sa puissance α, soit f_α. On munit G de deux lois de composition interne : la multiplication $\times$ et la composition $\circ$ définies par :

$$(f_\alpha \times f_\beta) : x \mapsto f_\alpha(x) f_\beta(x) = x^{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad f_\alpha \circ f_\beta : x \mapsto f_\alpha(f_\beta(x)) = (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta}.$$

1. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que la loi $\circ$ est associative et commutative.
3. Déterminer l'élément neutre de G pour la loi $\circ$.
4. Montrer que $(G, \times, \circ)$ est un anneau commutatif.
5. S'agit-il d'un corps ?
6. Proposer une loi externe sur $\mathbb{R} \times G$ de sorte que $(G, \times)$ soit un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice A.2.10 TD1-Exercice 10

On définit l'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2}\,;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un corps commutatif et $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subsetneq \mathbb{R}$.

Exercice A.2.11 TD1-Exercice 11

1. On munit $\mathbb{R}^2$ des lois définies par :
   (i) $(x_1, x_2)\hat{+}(y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et (ii) $\lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

   Obtient-on ainsi un espace vectoriel ?
2. Même question si on remplace (ii) par (ii)' $\lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Exercice A.2.12 TD1-Exercice 12

Le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Répondre à cette question dans les cas suivants :

1. $F_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &=& 0 \end{array}\right\}\right\}$
2. $F_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_1 - x_2 = 0\right\}$.
3. $F_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$.
4. $F_4 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\right\}$.
5. $F_5 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |\, x_1 \,|=|\, x_2 \,|\right\}$.
6. $F_6 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0\right\}$.
7. $F_7 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\right\}$.

Exercice A.2.13 TD1-Exercice 13

Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques de la variable t définies sur l'intervalle $I =]0, 2[$. Le sous-ensemble $\mathscr{H}$ de $\mathscr{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ dans les cas suivants :

1. $\mathscr{H}_1$ est l'ensemble des applications de $\mathscr{F}$ s'annulant pour $t = 1$.
2. $\mathscr{H}_2$ est l'ensemble des applications de $\mathscr{F}$ prenant la valeur 1 pour $t = 1$.
3. $\mathscr{H}_3$ est l'ensemble des applications de $\mathscr{F}$ admettant une limite (à droite) finie en 0.
4. $\mathscr{H}_4$ est l'ensemble des applications de $\mathscr{F}$ qui tendent vers l'infini quand t tend vers 0 par valeurs supérieures.
5. $\mathscr{H}_5$ est l'ensemble des applications de $\mathscr{F}$ continues en $t = 1$.
6. $\mathscr{H}_6$ est l'ensemble des applications de $\mathscr{F}$ croissantes sur $]0, 2[$.
7. $\mathscr{H}_7$ est l'ensemble des applications de $\mathscr{F}$ monotones sur $]0, 2[$.

Exercice A.2.14 TD1-Exercice 14

Soit E l'ensemble des suites numériques à valeurs réelles. On munit E de l'addition classique de suites numériques et la multiplication par un scalaire réel. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

1. $F_1 = \{(u_n)_{n\geq 0}\,;\ (u_n)$ est majorée $\}$
2. $F_2 = \{(u_n)_{n\geq 0}\,;\ (u_n)$ est bornée $\}$
3. $F_3 = \{(u_n)_{n\geq 0}\,;\ (u_n)$ est monotone $\}$

4. $F_4 = \{(u_n)_{n\geq 0}\ ;\ (u_n) \text{ est convergente }\}$
5. $F_5 = \{(u_n)_{n\geq 0}\ ;\ (u_n) \text{ est divergente }\}$
6. $F_6 = \{(u_n)_{n\geq 0}\ ;\ (u_n) \text{ est arithmétique }\}$
7. $F_7 = \{(u_n)_{n\geq 0}\ ;\ (u_n) \text{ est géométrique }\}$
8. $F_8 = \{(u_n)_{n\geq 0}\ ;\ \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ converge }\}$

Exercice A.2.15 TD1-Exercice 15

Soit $E = \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de l'addition classique des fonctions numériques et de la multiplication par un scalaire réel. On note F l'ensemble des applications $f \in E$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f''(x) - xf'(x) - x^2 f(x) = 0.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice A.2.16 TD1-Exercice 16

F et G étant des sous-espaces vectoriels de E, montrer l'équivalence suivante :
$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si F est contenu dans G ou G est contenu dans F.

Exercice A.2.17 TD1-Exercice 17

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$. S'agit-il d'un plan vectoriel ? d'une droite vectorielle ?

Exercice A.2.18 TD1-Exercice 18

1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivant : $\vec{u} = (1,1,1)$ et $\vec{v} = (1,0,-1)$.
   Montrer que vect $<\vec{u}, \vec{v}> = \{(2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta)\ ;\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivant : $\vec{x} = (1,-1,1)$ et $\vec{y} = (0,1,a)$, où $a \in \mathbb{R}$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $\vec{u} = (1,1,2) \in$ vect $<\vec{x}, \vec{y}>$. Comparer alors vect $<\vec{x}, \vec{y}>$, vect $<\vec{x}, \vec{u}>$ et vect $<\vec{u}, \vec{y}>$.

Exercice A.2.19 TD1-Exercice 19

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivant : $\vec{u} = (1,-1,1,2)$ et $\vec{v} = (-1,2,3,1)$. Peut-on trouver deux scalaires réel x et y tels que

1. $(-6, x, y, 9) \in$ vect $<\vec{u}, \vec{v}>$?
2. $(0, x, y, 1) \in$ vect $<\vec{u}, \vec{v}>$?

Exercice A.2.20 TD1-Exercice 20

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivant : $\vec{u} = (1,2,3,4)$ et $\vec{v} = (1,-2,3,-4)$. Peut-on trouver deux scalaires réel x et y tels que

1. $(x, 1, y, 1) \in$ vect $<\vec{u}, \vec{v}>$?
2. $(x, 1, 1, y) \in$ vect $<\vec{u}, \vec{v}>$?

Exercice A.2.21 TD1-Exercice 21

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

On appelle E le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

1. Montrer que E est aussi le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. On considère la partie $F \subset \mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x - y - z = 0$. Montrer que
   (a) F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) $E = F$.
3. Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-il à E?

Exercice A.2.22 TD1-Exercice 22

Soit H l'ensemble des polynômes de la forme $ax^3 + (b-2a)x^2 - 2bx + 3a$ avec a et b réels. Montrer que, muni des lois usuelles, il s'agit d'un plan vectoriel et donner une famille de deux vecteurs générateurs.

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre 1

Exemple B.1.1

Le groupe des rotations dans le plan (de centre O, d'angle θ compris entre 0 et π) est une groupe commutatif pour la loi ($\circ$) de composition des applications :

$$rot_{\theta_1} \circ rot_{\theta_2} = rot_{\theta_2} \circ rot_{\theta_1} (= rot_{\theta_1+\theta_2}).$$

Vous vérifierez que la composition est associative, que $rot_0 = I_d$ est l'élément neutre et que $rot_{-\theta}$ est le symétrique de rot_θ.

Exemple B.1.2

1. L'ensemble des suites à valeur dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et du produit par un complexe est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. L'ensemble $\mathscr{C}^0[0,1]$ des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ muni de l'addition et du produit par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemple B.1.3

$\mathscr{P}_5$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}_9$ puisque $\mathscr{P}_5$ est un sous-ensemble de $\mathscr{P}_9$ et que $\mathscr{P}_5$ est un espace vectoriel avec les mêmes lois que $\mathscr{P}_9$. De façon plus générale l'ensemble $\mathscr{P}_m$ ($m \le k$) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des polynômes $\mathscr{P}_k$.

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre 1

Document C.1.1 Les irrationnels

L'ensemble $\mathbb{R}$ est plus riche que $\mathbb{Q}$, puisque les rationnels ne permettent pas de représenter tous les nombres "usuels" comme par exemple $\sqrt{2}$, π, e (base du logarithme népérien), ... Un réel qui n'est pas rationnel s'appelle **irrationnel**.

Ainsi, on peut démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, et tels que la fraction est irréductible (c'est-à-dire, les entiers p et q n'ont aucun diviseur commun autre que 1). On a alors

$$2q^2 = p^2$$

donc p^2 est pair donc p est pair, soit $p = 2p'$. On en déduit que

$$2q^2 = 4p'^2$$

donc q^2 est pair donc q est pair, soit $q = 2q'$, ce qui donne $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2p'}{2q'}$ ce qui est contraire à l'hypothèse d'irréductibilité de la fraction $\dfrac{p}{q}$.

Document C.1.2 Classes d'équivalence

Définition C.1.1. *On appelle **relation dans E** une partie de $E \times E$. Plus précisément, soit $\mathcal{R} \subset E \times E$, on dit que **x et y sont liés par la relation** $\mathcal{R}$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$. On écrit souvent $x\mathcal{R}y$ pour indiquer que x et y sont liés par la relation $\mathcal{R}$.*

Par exemple $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x \le y\}$ définit une partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et la relation associée est la relation (d'ordre) 'inférieur ou égal'. Autre exemple, $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathcal{R} = \{(p, q), (p', q')) \in E \times E \,|\, pq' = p'q\}$ définit un exemple de relation qui va être appelée relation d'équivalence.

Définition C.1.2. *On appelle **relation d'équivalence** une relation qui vérifie les trois propriétés suivantes :*
- *elle est **réflexive** : $(x, x) \in \mathcal{R}$,*
- *elle est **symétrique** : $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$,*
- *elle est **transitive** : $\{(x, y) \in \mathcal{R}$ **et** $(y, z) \in \mathcal{R}\} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$.*

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, on écrit souvent $\boldsymbol{x \equiv y}$, ou $\boldsymbol{x \sim y}$, au lieu de $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Dans un ensemble quelconque, la relation x 'est égal à' y est une relation d'équivalence. à partir d'une relation d'équivalence, on peut définir des classes d'équivalence (voir le document référencé).

La relation d'équivalence est d'ailleurs une généralisation de la relation d'égalité. Elle est présente partout en mathématiques. Elle permet, lorsque l'on étudie certains objets mathématiques, de n'en conserver que les propriétés pertinentes pour le problème considéré.

Définition C.1.3. *étant donnée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, on appelle **classe d'équivalence** de l'élément $a \in E$ la partie $\boldsymbol{\hat{a}} \in \boldsymbol{E}$ définie par :*

$$\hat{a} = \{x \in E \mid x\mathcal{R}a\}.$$

*Tous les éléments de $\hat{a}$ sont donc équivalents entre eux. On appelle **ensemble quotient de E par** $\mathcal{R}$, que l'on note $\boldsymbol{E/\mathcal{R}}$, l'ensemble constitué des classes d'équivalences des éléments de E.*

L'ensemble des classes d'équivalences constitue une **partition** de E, c'est-à-dire une famille de sous-ensembles de E deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à E. En effet tout élément $a \in E$ appartient à la classe $\hat{a}$. Par ailleurs s'il existe $x \in \hat{a} \cap \hat{b}$ alors on a $x\mathscr{R}a$ et $x\mathscr{R}b$ et donc, d'après la transitivité, $a\mathscr{R}b$ ce qui implique $\hat{a} = \hat{b}$. Donc $\hat{a} \neq \hat{b} \Rightarrow \hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$, ce qui correspond bien à une partition.

Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathscr{R} = \{(p,q),(p',q')) \in E \times E \,|\, pq' = p'q\}$, alors la classe d'équivalence de (p,q) avec $q \neq 0$ est l'ensemble des (p',q') , $q' \neq 0$, tels que $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$. On peut alors construire un ensemble, noté $\mathbb{Q}$, comme l'ensemble quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par la relation d'équivalence précédente. Un élément de $\mathbb{Q}$, qui est appelé nombre rationnel, est donc la classe d'équivalence d'un couple (p,q), $q \neq 0$ et on le note, par abus de langage, $\frac{p}{q}$.

Document C.1.3 Un groupe fini

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ par $x \sim y$ si et seulement si n divise $x - y$. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence.

La classe d'équivalence d'un entier x est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ formé des entiers de la forme $kn + x$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans la suite, on représentera la classe d'équivalence de x par le reste $r \in \{0;1;\ldots;n-1\}$ de la division euclidienne de x par n.

La loi de groupe sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est définie par $(x \bmod n) + (y \bmod n) = (x + y) \bmod n$. Cette addition ne dépend pas du choix de x et de y dans la classe d'équivalence. En général, on écrit : dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a $x + y = \ldots$

Exemple : Dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, on a $3 + 14 = 17 = 1$.

Muni de cette loi, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif.

Bien sûr, on peut définir une loi multiplicative sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant $(x \bmod n) \times (y \bmod n) = (xy) \bmod n$. L'ensemble $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ muni de cette loi n'est pas un groupe en général.

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.