INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Goiás

PEDRO HENRIQUE SILVA RODRIGUES

Métodos De Integração Numérica: Método do Trapézio

Anápolis - GO

Dezembro de 2017

PEDRO HENRIQUE SILVA RODRIGUES

Métodos De Integração Numérica: Método do Trapézio

Relatório apresentado como requisito parcial para obtenção de nota na disciplina de Matemática Computacional do curso Bacharelado em Ciência da Computação do Instituto Federal de Goiás, Câmpus Anápolis

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CAMPUS ANÁPOLIS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Anápolis - GO
Dezembro de 2017

Resumo

A integração numérica é uma operação matemática base e indispensável nas engenharias e ciências exatas. Entretanto em algumas ocasiões é impraticável ou até mesmo impossível fazê-lo. Sendo assim, é necessário fazer uso de métodos numéricos, que são técnicas aplicadas em algoritmos, para lidar com essa situação e outras que possuam as mesmas dificuldades.

Palavras-chave: integração numérica. métodos numéricos. algoritmo.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Os métodos numéricos são técnicas com as quais é possível trabalhar problemas matemáticos, desde os mais simples até aos mais complexos, cujo cálculo e inviável ou até mesmo impossível de ser feito(CHAPRA, 2011).

Embora um método seja o mais comum para lidar com um determinado problema, nem sempre este é apresentará melhor resultado, pois cada problema tem suas particularidades. O objetivo deste então é compreender, implementar e analisar, sob diversos aspectos, o método dos Trapézios, para integração numérica aproximada de funções de uma variável.

A integração numérica é uma operação matemática base e indispensável nas engenharias e ciências exatas. Sendo que o cálculo de área e volume, velocidade a partir da aceleração, trabalho da força e deslocamentos são apenas algumas de suas inúmeras aplicações(STEWART, 2013).

O objetivo principal dessa análise numérica é encontrar soluções aproximadas para a integração de uma função qualquer, que em certas ocasiões pode envolver uma grande quantidade de operações.

2 Fundamentação teórica

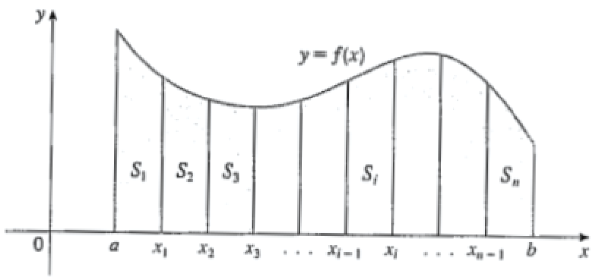
2.1 Integral

Intuitivamente a integral, ou área sob a curva de uma função $f(x)$ pode ser entendida como a soma de pequenos retângulos de base dx e altura $f(x)$, onde o produto $f(x)dx$ é a área deste retângulo.

Segundo Stewart (2013) dada uma função f contínua em $[a, b]$ e tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$, então a área da região compreendida entre o eixo x e o gráfico de f, para x variando em $[a, b]$, é dada por $A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$

Conforme aumenta-se a quantidade de retângulos mais o somatório se aproxima da área real, com a quantidade de retângulos tendendo ao infinito encontra-se a área real sob a curva. Conforme se vê na figura abaixo:

Figura 1: Exemplificação da Integral como área sob a curva. Fonte: (STEWART, 2013).



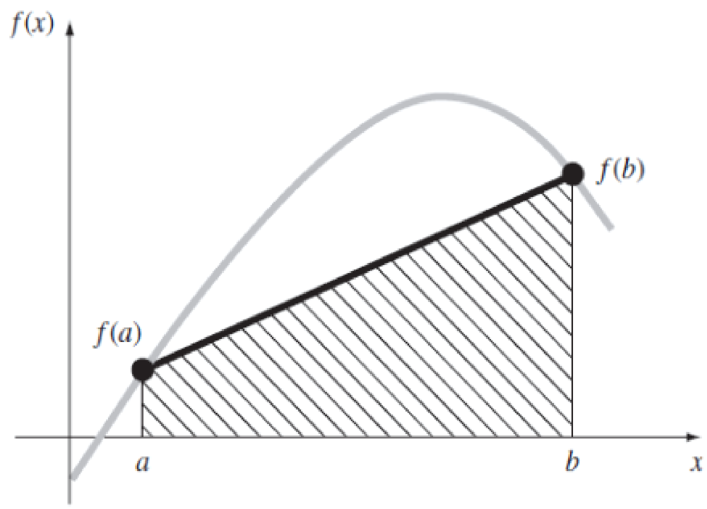
2.2 Método dos Trapézios

Por vezes é difícil representar uma função. Uma alternativa é tentar aproximar a integral a um polinômio que a represente (CHAPRA, 2011). O método dos Trapézios consiste em representar essa integral como o somatório de uma certa quantidade de trapézios sob a curva.

Na figura abaixo, vê-se que uma das bases do trapézio vale $f(a)$, enquanto a outra vale $f(b)$, a altura do trapézio é a distância entre a e b, portanto sua área A pode ser calculada como:

$$A = \frac{[f(a) + f(b)]}{2}$$

Figura 2: Trapézio sob a curva. Fonte: (CHAPRA, 2011).

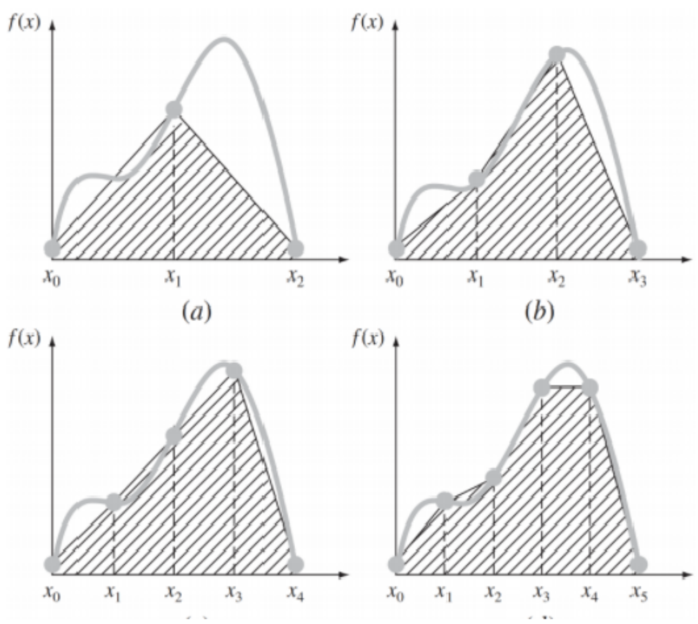


Basta então realizar o somatório de uma certa quantidade de trapézios num dado intervalo $[a, b]$ e obtêm-se um valor aproximado para a integral da função nesse intervalo.

$$\int_a^b f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Onde A_n é a área do i-ésimo trapézio sob a curva $f(x)$.

Figura 3: Aumento do número de trapézios sob a curva. Fonte: (CHAPRA, 2011).



Conforme se aumenta a quantidade de trapézios aumenta-se a proximidade com a função em si. Entretanto quando se realiza essas operações numa máquina haverá uma limitação da precisão da mesma e aumentar esse valor indefinidamente poderá ocasionar erros de aproximação.

Como não é possível se calcular a área de uma quantidade infinita de trapézios, têm-se um erro proveniente do método. Esse erro pode ser calculado como base para verificação da precisão do método em um problema que se queira resolver. Esse erro é calculo com base numa aproximação de primeira ordem da função ou, em outras palavras, utilizando derivadas de primeira ordem da função. O erro calculado é um erro absoluto e não percentual.

$$E_a = -\frac{(b-a)^3 F_m}{12n^2}$$

onde F_m é o valor médio da segunda derivada, definido como: $F_m = \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$, b e a são os limites superior e inferior do intervalo e n é quantidade de segmentos.

3 Problema

Utilizando a regra do trapézio, fazer um programa genérico que calcula a integral definida abaixo utilizando N segmentos, considerando $N = 1$, $N = 3$ e $N = 6$. Calcular a integral exata e a compará-la com os resultados obtidos. Encontrar a quantidade de segmentos necessários para se atingir a precisão de seis casas decimais.

$$\int_1^3 e^{-x} cos(x) dx$$

4 Resultados

Inicialmente quer-se encontrar o valor exato para $\int_1^3 e^{-x}cos(x)dx$. Segundo Stewart (2013):

$(uv)' = u'v + uv'$

$\int(uv)' = \int u'v + \int uv'$

$uv = \int u'v + \int uv'$

$\int u'v = uv - \int uv'$

Aplicando-se a equação acima pode-se chegar a Integral da função:

Fazendo:

$v = e^{-x} => v\prime = -e^{-x}$

$u\prime = cos(x)dx => u = sen(x)$

A equação fica: $\int e^{-x}cos(x)dx = e^{-x}sen(x) - \int[-e^{-x}sen(x)dx]$

Fazendo:

$v = e^{-x} => v\prime = -e^{-x}$

$u\prime = -sen(x)dx => u = cos(x)$

A equação fica: $\int e^{-x}cos(x)dx = e^{-x}sen(x) - \{e^{-x}cos(x) - \int[-e^{-x}cos(x)dx]\}$

Finalizando a equação utilizando as regras gerais de integração (STEWART, 2013):

$\int e^{-x}cos(x)dx = e^{-x}sen(x) - e^{-x}cos(x) + \int[-e^{-x}cos(x)dx]$

$\int e^{-x}cos(x)dx = e^{-x}[sen(x) - cos(x)] - \int[e^{-x}cos(x)dx]$

$2\int e^{-x}cos(x)dx = e^{-x}[sen(x) - cos(x)]$

$\int e^{-x}cos(x)dx = \frac{e^{-x}[sen(x)-cos(x)]}{2}$

Sabe-se que a função possui uma raiz no intervalo (1,3). Utilizando o Método da Secante obteve-se para a raiz da função 1.570796, com uma precisão de seis casas decimais. Dessa forma é necessário realizar a integração em partes, aplicar o módulo nas partes e então somá-las. Portanto, $\int_1^3 e^{-x}cos(x)dx$, fica:

$\int_1^3 e^{-x}cos(x)dx = \int_1^{1.570796} e^{-x}cos(x)dx + \int_{1.570796}^3 e^{-x}cos(x)dx$

$\int_1^3 e^{-x}cos(x)dx = \frac{e^{-1.570796}[sen(1.570796)-cos(1.570796)]}{2} - \frac{e^{-1}[sen(1)-cos(1)]}{2} - \{\frac{e^{-3}[sen(3)-cos(3)]}{2} - \frac{e^{-1.570796}[sen(1.570796)-cos(1.570796)]}{2}\}$

$\int_1^3 e^{-x}cos(x)dx = 0.124325305896756$

Entretanto, pode ser inviável, ou até mesmo impossível, calcular a integral de algumas funções. Dessa forma é necessário realizar uma aproximação da integral dessa função. O método dos Trapézios anteriormente explicado foi aplicado a essa função, com a quantidade de segmentos propostos como problema. Os resultados obtidos foram os seguintes:

»Valores calculados para a Integral aproximada da função:

»1 segmento: 0.25508546 »erro absoluto:-0.18352962

»3 segmentos:0.13270378 »erro absoluto:-0.02039218

»6 segmentos:0.12719834 »erro absoluto:-0.005098045

»Com precisão de 6 casas decimais:

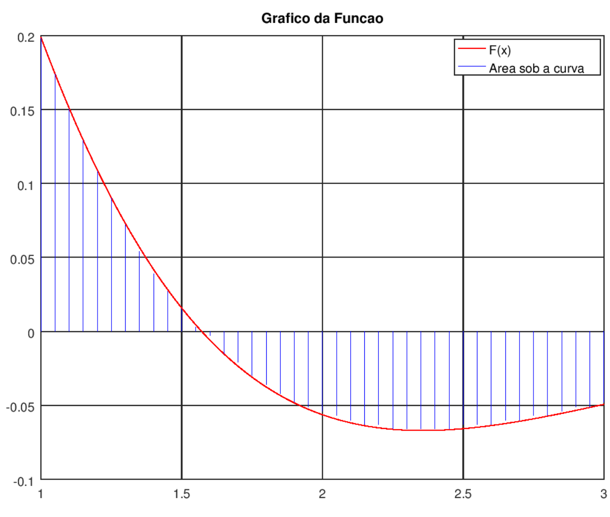
»222 segmentos: 0.124332869732014 »erro absoluto: $-3.72391890959942.10^{-6}$

Ao comparar o resultado obtido (0.124332869732014) com o resultado calculado (0.124325305896756) é possível notar a diferença menor que 10^{-5}. Na maior parte das aplicações comuns da matemática e da física essa precisão é muito maior que a necessária.

Em relação aos demais resultados pode-se perceber a importância da quantidade de segmentos para esse método, e a sua eficiência conforme se aumenta esse valor, chegando a diferenças inferiores a sexta casa decimal com cerca de 200 segmentos, de um modo geral pode-se dizer que esse método converge para a integral definida da função num dado intervalo(a, b);

Teoricamente uma quantidade de segmentos muito grande ocasionaria num erro mínimo tão próximo do zero quanto se queira, mas devido as limitações de máquina e aos erros de aproximação inerentes a ela uma grande quantidade de segmentos pode começar a afastar o resultado do valor exato.

Figura 4: Gráfico da função problema.



Conclusão

Ao analisar o método do Trapézio, pode-se perceber que esse possui uma grande usabilidade e aplicabilidade. Embora apresente um erro de aproximação, obteve-se uma precisão satisfatória para grande parte dos problemas aos quais é proposto a solucionar.

Com este trabalho foi possível então compreender, implementar e analisar, sob diversos aspectos, o método dos Trapézios, para integração numérica aproximada de funções de uma variável.

Mesmo os métodos mais eficientes podem ser melhorados. Dessa forma é sempre importante conhecer o problema a que se é proposto solucionar, e de forma igual os métodos que irão ser aplicados para sua solução.

Referências

CHAPRA, S. C. *Métodos Numéricos para Engenharia*. [S.l.]: Mc Graw Hill, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 3, 5, 6 e 7.

STEWART, J. *Cálculo Volume I*. [S.l.]: Pioneira, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 3, 5, 6 e 10.