INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS – CÂMPUS ANÁPOLIS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS
MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

PEDRO HENRIQUE SILVA RODRIGUES

Anápolis – GO
Outubro – 2017

INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS – CÂMPUS ANÁPOLIS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS
MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Trabalho apresentado, como exigência da disciplina Matemática Computacional, ao professor:
prof.: Hugo Vinícius Leão

Anápolis – GO
Outubro – 2017

1. MOTIVAÇÃO

Em diversas ocasiões nos deparamos com problemas que possuem n variáveis independentes, e precisamos lidar com eles. Quando precisamos encontrar soluções válidas para muitos problemas estamos tentando resolver algo muito trabalhoso ou até mesmo impraticável resolver sem auxílio de alguma ferramenta computacional.

E para tal são necessários métodos que possam nos dar uma aproximação do valor verdadeiro do zero desse conjunto de funções, ou ainda, desse sistema.

Um dos conjuntos mais simples para determinação de raízes são os métodos abertos, que a partir de uma estimativa inicial da raiz de uma função iterativamente aproximamos essa estimativa ao valor da raiz.

Entre os métodos abertos mais conhecidos estão o método Newton-Raphson normal e modificado, ponto fixo e método da secante normal e modificado, que iterativamente aproximam uma predeterminada estimativa da raiz da função.

Diferentemente dos métodos fechados para a busca de raízes, os métodos abertos não precisam de um intervalo inicial para a busca das raízes, sendo essa a principal vantagem desses em relação aos métodos fechados.

O método Newton-Raphson se baseia no conceito da derivada da função. Quando estamos lidando com múltiplas equações e cada equação tem n variáveis, precisamos calcular a derivada de cada função para cada variável, formando a matriz jacobiana do sistema, e a partir dessa e de uma estimativa é possível obter uma aproximação para o vetor que representa uma aproximação da solução do sistema.

É importante mencionar que esses métodos teoricamente convergem para a raiz. Em algumas situações especiais a convergência não ocorre como o esperado, ou o domínio da função se torna um problema durante os cálculos.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os métodos abertos para busca da raiz de uma função se baseiam no conceito da reta tangente a função num certo ponto, também conhecido como derivada da função no ponto. A derivada representa uma aproximação do comportamento da função naquela região, logo o zero dessa reta tangente representa uma aproximação bem próxima a raiz da função.

O método de Newton-Raphson para equações se baseia no conceito das derivadas parciais da função em relação as suas variáveis. No caso mais simples: Apenas uma variável o método calcula a reta tangente, para duas variáveis calcula-se um plano tangente, e assim sucessivamente.

Quando se trata de um sistema com m equações, e cada uma dessas equações possuem até n variáveis, precisamos lidar com todas as equações e todas as variáveis, buscando uma resposta válida para todas as equações, ou seja, buscamos a solução do sistema.

Podemos então realizar os cálculos de forma matricial, pois temos m funções e cada uma até n equações. Calculando a derivada parcial de cada combinação obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \nabla f_2(a) \\ \dots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Tal matriz é chamada Jacobiano de um sistema, e de forma bem simples é usada no método de Newton-Raphson para o cálculo da obtenção da nova estimativa, através da seguinte equação:

$$X_1 = X_0 - J^{-1} f$$

Em que X_1 é o vetor nova estimativa, X_0 é vetor estimativa anterior, J é a matriz jacobiana do sistema e f é o vetor com o sistema (nessas duas últimas os valores são calculados em cima da estimativa anterior).

Pode-se notar a semelhança com o método de Newton-Raphson para uma variável, o conceito é o mesmo e é necessário também uma estimativa inicial. A diferença se resume aos parâmetros, em vez de um valor, são necessários aproximações para cada uma das n variáveis.

Problemas do método de Newton-Raphson:

- Caso haja mais de uma raiz válida para as m funções apenas encontraríamos uma.
- Esse método pode não convergir rapidamente para a raiz, ou ainda pode divergir, nunca encontrando o resultado dependendo de como são as funções do seu sistema, por isso é importante analisar o comportamento das funções previamente para evitar erros.
- Pode ser muito trabalhoso resolver as derivadas parciais se a quantidade de equações ou a quantidade de variáveis for muito grande.
- As derivadas de algumas funções podem não apresentar um domínio com todos os números reais, sendo assim podem surgir complicações durante os cálculos: Como raízes de números negativos, divisões por zero (ou valores muito próximos a esse), que podem impactar diretamente a solução do sistema.
- Se houver duas raízes próximas não tem-se um controle sobre qual resultado o método resultará.

3. PROBLEMA:

Encontrar a solução para o sistema não linear abaixo:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2x_1 - 4x_1x_2 - x_2^2 = 0 \\ 3x_2^2 + 6x_1 - x_1^2 - 4x_1x_2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Utilizando o Método de Newton-Raphson, levando em consideração uma estimativa inicial $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, uma tolerância para a diferença entre as estimativas de 10^{-5} e a quantidade máxima de iterações como 1000. Verificar se a solução encontrada corresponde a uma aproximação da solução do sistema supracitado. Exibir o gráfico da convergência do vetor solução e mostrar a solução encontrada num gráfico da função.

4. RESULTADOS

Após introduzir os dados no algoritmo que implementa o método de Newton-Raphson foram obtidos os seguintes resultados, para o sistema já apresentado. Observações:

Em relação aos resultados que serão apresentados: x representa x_1, y representa x_2, função1 representa a primeira equação do sistema e função2 representa a segunda equação do sistema.

- Saída via console do algoritmo:

>>Solução obtida do sistema linear: x = 1.07588, y = 1.36161
>>Valor calculado para a primeira função: 7.10543e-015
>>Valor calculado para a segunda função: 6.21725e-015
>>Quantidade de iterações ate a convergência: 5

Ou seja, foram necessárias apenas 5 iterações até que o módulo da diferença entre a estimativa corrente e a estimativa anterior fosse menor que 10^{-5}. Para a solução retornada pelo algoritmo (que são os valores x_1 e x_2) o valor calculado do sistema apresentou resultados na ordem de 10^{-15}, valores estes muito próximos a 0, evidenciado que o método convergiu para uma solução correta, conforme o esperado.

Entretanto, esse sistema apresenta múltiplas raízes e para testar o algoritmo com valores de entrada diferente para o mesmo sistema fez-se o exemplo $x_1 = -1$ e $x_2 = -1$, e a saída via console foi:

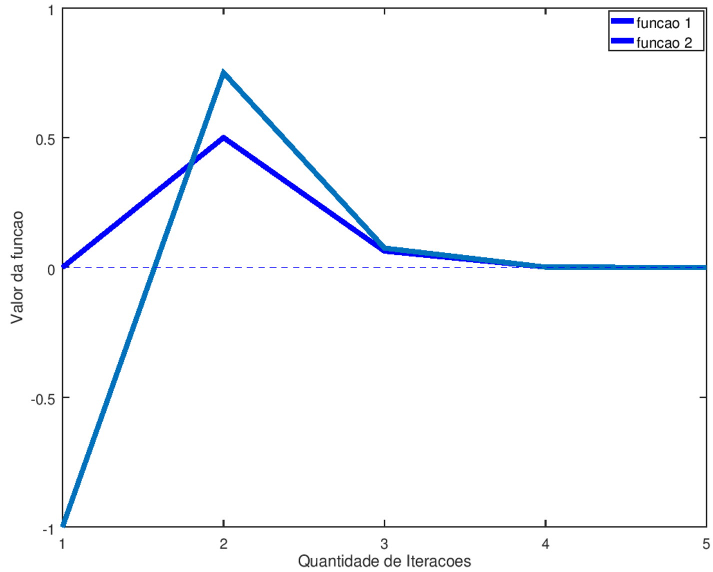
>>Solução obtida do sistema linear: x = -1.69089, y = -3.82396
>>Valor calculado para a primeira função: 0
>>Valor calculado para a segunda função: -3.55271e-015
>>Quantidade de iterações ate a convergência: 6

Verificando os resultados obtidos para essa diferente entrada, percebe-se que esse também convergiu para uma solução, solução essa diferente da apresentada com a outra entrada.

Isso evidencia a eficácia do método em encontrar a raiz desse sistema não linear nas proximidades de uma estimativa inicial, e a importância de se conhecer a função que se quer analisar.

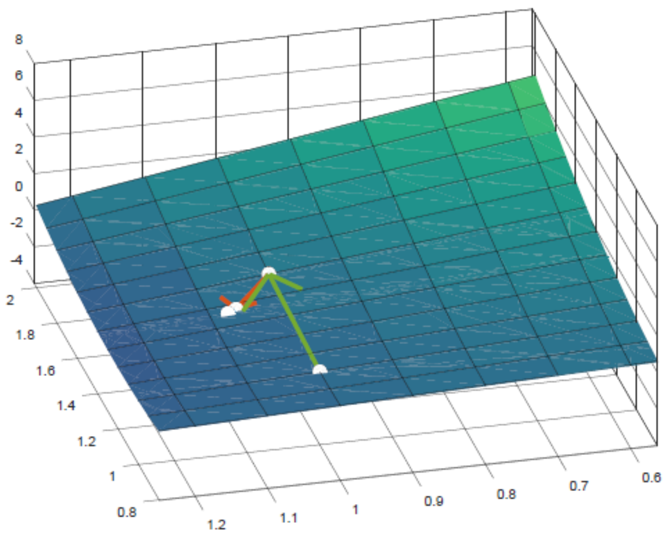
- Saídas gráficas do algoritmo:

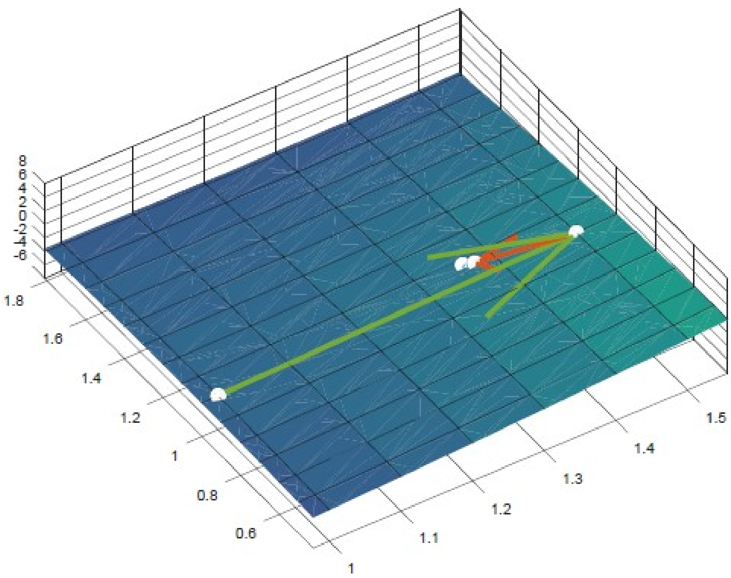
1. Gráfico Convergência da raiz das funções do sistema.



Ao aplicar um método de busca de raiz espera-se que ao decorrer da execução do programa os valores calculados convirjam para o 0. Analisando o resultado para o sistema apresentado como problema observa-se que o método conseguiu ser eficiente(apenas 5 iterações até encontrar uma resposta), e eficaz pois convergiu para uma solução do sistema.

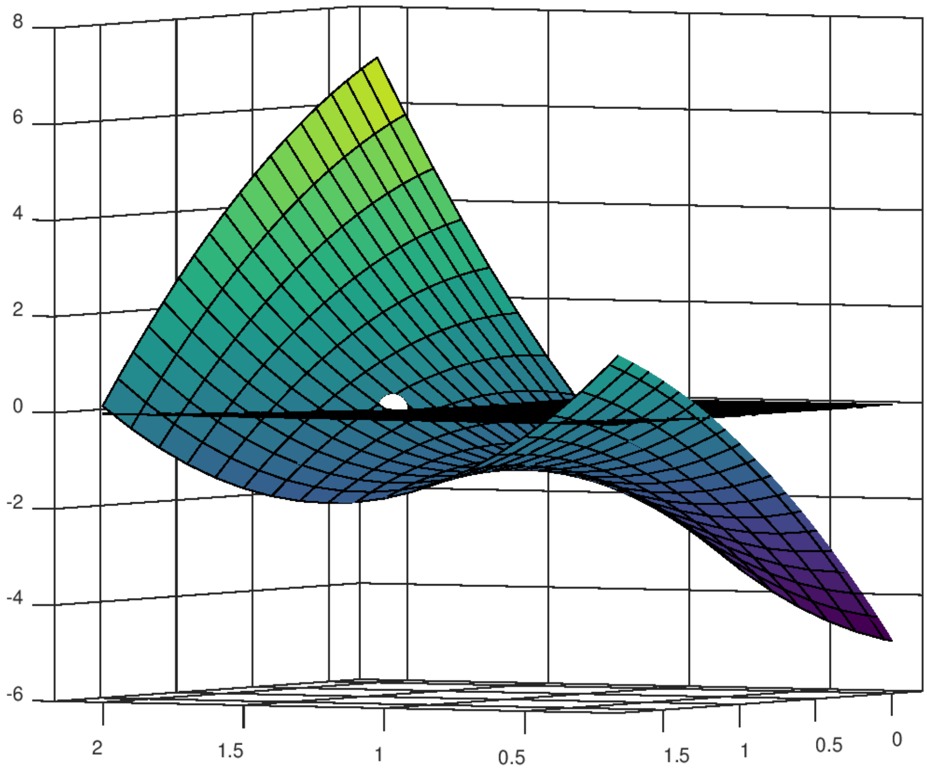
Nos gráficos rotacionados abaixo da função podemos ter uma melhor visão da convergência das estimativas.



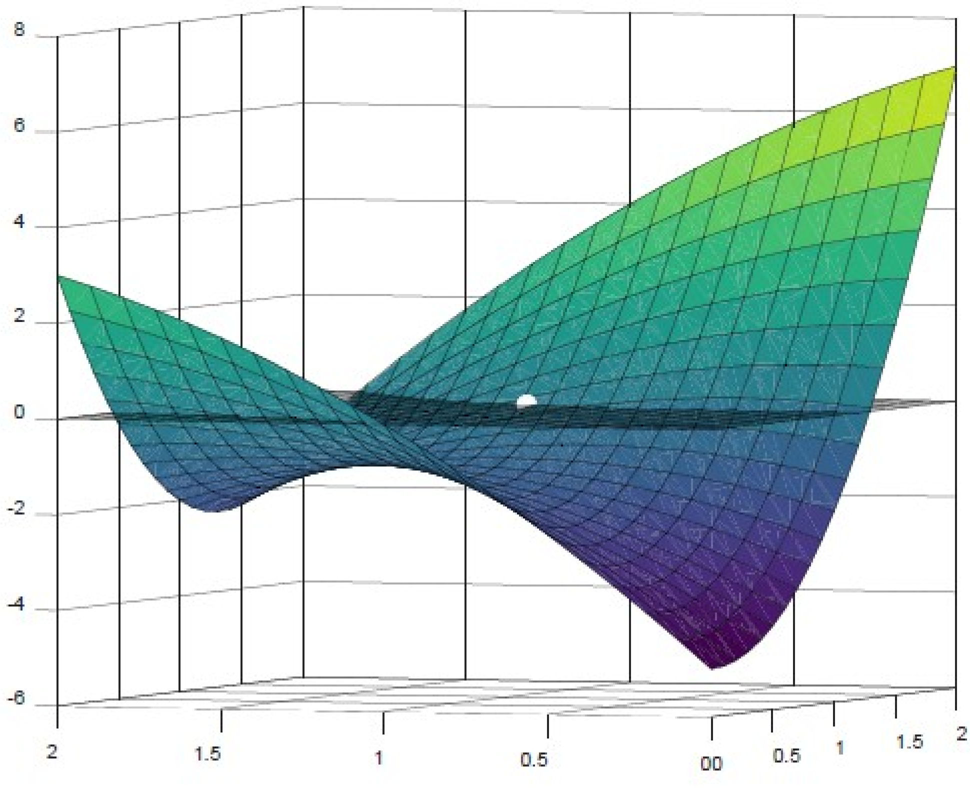


Da esquerda para a direita os gráficos mostrados representam a equação 1 e a equação 2 do sistema.

Traçando um plano z = 0, no gráfico das funções é possível ver o resultado final do algoritmo:



Função 1 do sistema: $f(x, y) = 2x - 4xy - y^2$



Função 2 do sistema: $f(x, y) = 3y^2 + 6x - x^2 - 4xy - 5$

5. BIBLIOGRAFIA

CHAPRA, S. C. & CANALE, R. P. Métodos Numéricos para Engenharia. McGraw-Hill, 2006. 5a. Edição.

STEWART, J. Cálculo – Vol. 1, Editora Pioneira Thompson Learning, 2009. 6ª edição.