INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS – CÂMPUS ANÁPOLIS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES – DECOMPOSIÇÃO LU

PEDRO HENRIQUE SILVA RODRIGUES

Anápolis – GO
Novembro – 2017

INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS – CÂMPUS ANÁPOLIS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES – DECOMPOSIÇÃO LU

Trabalho apresentado, como exigência da disciplina Matemática Computacional, ao professor:
prof.: Hugo Vinícius Leão

Anápolis – GO
Novembro – 2017

1. MOTIVAÇÃO

Problemas lineares são comumente encontrados nas mais diversas áreas do conhecimento, tanto que foi introduzido o termo álgebra linear apenas para focar nesses problemas de forma geral.

Em diversas ocasiões nos deparamos com problemas que possuem n variáveis independentes, e precisamos lidar com eles. Quando precisamos encontrar soluções válidas para muitos problemas estamos tentando resolver algo muito trabalhoso ou até mesmo impraticável resolver sem auxílio de alguma ferramenta computacional.

E para tal são necessários métodos que possam nos dar uma solução para esse conjunto de funções, ou ainda, desse sistema.

Como estamos lidando com variáveis de grau máximo um, tornou-se conveniente representar os sistemas lineares por matrizes, e através dessa prática percebeu-se que há uma relação muito forte entre matrizes e sistemas lineares.

Com a omissão das variáveis através do uso de matrizes, o processo resolutivo se torna mais simplificado visto que não precisamos nos preocupar de início em como os resultados serão mostrados, podemos simplesmente encontrar os números que logo em seguida poderão ou não ser representados de uma forma mais “trabalhada”.

Embora os métodos comuns solucionem um sistema de forma bastante simplificada, nem sempre esses serão viáveis computacionalmente para serem realizados e devido a isso é necessário aplicar métodos mais elaborados e de pouco impacto computacional.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Um sistema linear como já foi mencionado pode ser representado por uma matriz, ou conjunto de matrizes: No exemplo mais comum temos uma matriz aumentada: Na matriz aumentada, cada linha representa cada equação do sistema, e cada coluna representa as variáveis do sistema, em que a última coluna representa o resultado da expressão das variáveis.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Podemos separar a matriz em duas matrizes menores A, B que A represente as variáveis e B (um vetor coluna) represente o resultado da expressão. Desse forma queremos encontrar um vetor x, solução do sistema, tal que:

A x = B

Estamos assim tratando o problema de forma matricial, e como tal podemos usar operações matriciais para auxiliar sua resolução. Simplesmente poderíamos multiplicar a matriz B pela inversa de A e obteríamos x:

$A\,x = B$

$A^{-1}A\,x = A^{-1}B$

$x = A^{-1}B$

Porém computacionalmente falando, o método para se calcular a inversa de uma matriz possui custo alto, nos levando a buscar métodos de impacto menor para a realização desses cálculos. No presente abordaremos o método de fatoração LU (lower uper), também chamado de decomposição LU;

O método de fatoração LU consiste em calcular duas novas matrizes L e U tal que essas possuam uma forte relação com a matriz A. Essas matrizes além de serem úteis para calcular a solução do sistema, também são amplamente utilizadas em outros cálculos da álgebra linear.

O objetivo da decomposição LU é criar duas matrizes U(triangular superior) e L (triangular inferior), como essas matrizes possuem uma quantidade muito grande de zeros os cálculos para determinar a solução do sistema se tornam mais simplificados.

A matriz U é obtida através de uma eliminação Gaussiana simples(escalonamento da matriz), e a matriz L é obtido através dos pivôs calculados para esse escalonamento, dessa forma temos duas matrizes que nos permitem representar A.

Computacionalmente falando esse método é bastante simples, mas está sujeito a erros em sistemas mal condicionados. Com o objetivo de evitar divisões por zero pode-se utilizar a técnica de pivotamento total ou parcial que consiste em colocar nos pivôs os valores mais elevados, esse método é uma simples troca de linhas e/ou colunas.

2.1 Problemas do método

- Assim como a maioria dos métodos de solução de sistemas lineares, a divisão por zero ou divisão por valores muito pequenos em módulo pode acarretar diferenças elevadas no resultado.
- Mesmo com o pivotamento total alguns casos específicos poderão apresentar empecilhos durante a execução do algoritmo.
- Nem todos os sistemas possuem solução, por isso é importante conhecer previamente seu problema, antes de tentar resolvê-lo.
- Alguns sistemas possuem múltiplas soluções, e assim como muitos outros métodos esse pode não nos oferecer a resposta mais “conveniente”.

3. PROBLEMA:

Usando o método de fatoração LU, encontrar a solução para o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 13 \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Além disso, utilizar o pivotamento parcial, o pivotamento completo e nenhum pivotamento durante a aplicação do método. Realizar uma comparação entre essas três abordagens em relação ao sistema dado, e generalizar para os demais.

4. RESULTADOS

Após introduzir os dados no algoritmo que implementa o método de decomposição LU foram obtidos os seguintes resultados para o sistema já apresentado. Aplicando o método sem pivotamento obtêm-se os resultados:

x =[NaN NaN NaN]

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ NaN & NaN & Inf \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.66667 & Inf & 1 \end{bmatrix}$$

Ao utilizar o método de forma normal o algoritmo fica sujeito à divisões por zero, ou seja, em sistemas mal condicionados o algoritmo pode não responder de forma correta, ou conforme o esperado. Com o objetivo de evitar divisões por zero aplicou-se um pivotamento parcial, e o resultado obtido foi o seguinte:

x =[NaN NaN NaN]

O pivotamento parcial, como se vê no resultado, não alterou a matriz do sistema, pois ela já se encontrava "pivotado", e novamente o algoritmo realizou divisões por zero. Ao utilizar o pivotamento completo obteve-se o mesmo resultando, mostrando a ineficiência do método em alguns casos específicos.

Ao introduzir a matriz no sistema pivotando a segunda linha com a última o algoritmo de resolução LU chega a resposta correta para o sistema:

x = [-5 1 0]

$$U=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -0.33333 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.66667 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Embora o pivotamento tenha o objetivo de diminuir a possibilidade do algoritmo executar divisões por zero, isso nem sempre acontece da forma esperada. O método de pivotamento também está sujeito a falhas, evidenciando assim a importância de conhecer seu problema e os métodos que pretende utilizar para solucioná-lo.

Mesmo um sistema mal condicionado como esse possui resposta. Diferente desse caso, outros métodos poderiam ser aplicados para a solução desse sistema, e poderiam encontrar a resposta correta.

6. BIBLIOGRAFIA

Boldrini, J. L.; Costa, S.I.R.; Ribeiro, V. L.,Wetzler, H.G.,Álgebra Linear,Harper-Row, São Paulo,

STEWART, J. Cálculo – Vol. 1, Editora Pioneira Thompson Learning, 2009. 6ª edição.