

Pencacahan

Haikal Isa Al Mahdi

1. Aturan Penjumlahan

misalkan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ masing-masing adalah himpunan, serta $A_i \cap A_j = \emptyset$ dengan $1 \leq i, j \leq n$ dan $i \neq j$, maka

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

2. Aturan Perkalian

Misalkan A, B masing masing adalah himpunan. Perkalian silang dari 2 himpunan tersebut dinyatakan dengan $A \times B$ sehingga

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

dengan begitu

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

Misalkan $T = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$,
maka

$$|T| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

3. Contohnya?

Contoh: Ada 3 mesin yang digunakan untuk menghasilkan produk. Mesin A memiliki 7 cara untuk menghasilkan produk. Mesin B memiliki 9 cara. Sedangkan mesin C memiliki 4 cara. Jika setiap mesin saling independen, berapa banyak cara untuk menghasilkan produk tersebut?

Jawab. Karena setiap mesin saling independen, banyaknya cara adalah

$$7 + 9 + 4 = 20 \text{ cara}$$

Misalkan anda punya 7 baju dan 12 celana. Berapa banyak pilihan yang mungkin?

Jawab. Jika anda memilih baju 1, anda akan mempunyai 12 pilihan celana, begitu pula jika anda pilih baju 2, dan seterusnya.

Jadi total kombinasi yang mungkin adalah $12 \times 7 = 84$ Pilihan.

4. Permutasi

Sederhananya

Banyaknya cara untuk menyusun elemen apabila **urutan diperhatikan**

Artinya $(1, 2, 3)$ dan $(3, 2, 1)$ adalah dua susunan berbeda. Rumus permutasi adalah

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

n : total elemen

r : banyaknya elemen yang dipilih.

Catatan: $n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

contoh: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

4.1 Elemen berulang

Misalkan akan diambil huruf dari kata

POROS

Karena terdapat element berulang (muncul O sebanyak 2 kali). Maka permutasinya adalah

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

Jadi apabila terdapat n elemen berbeda yang berulang dan masing-masing muncul sebanyak k_i kali, maka permutasinya adalah

$$\frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \cdots k_n!}$$

4.2 Permutasi Siklis

Misalkan elemen disusun secara siklis. Artinya elemen terakhir bersebelahan dengan elemen pertama, maka permutasinya adalah

$$(n - 1)!$$

5. Kombinasi

Sederhananya

Banyaknya cara untuk menyusun elemen apabila **urutan tidak diperhatikan**

Artinya $(1, 2, 3)$ dan $(3, 2, 1)$ adalah dua susunan sama. Rumus kombinasi adalah

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

n : total elemen

r : banyaknya elemen yang dipilih.

Hal lain: Rumus $C(n, r)$ juga digunakan untuk mencari banyaknya jalur terpendek dari titik awal $(0, 0)$ ke titik (n, r)

5.1 Elemen Berulang

Misalkan anda ingin membeli makanan dari sebuah toko. Toko tersebut menyediakan 3 jenis makanan, yaitu pisang keju, croissant, dan nasi goreng. Anggaplah stoknya tidak terbatas dan anda ingin memesan 8 makanan. Kita ilustrasikan sebagai berikut

maka banyaknya pilihan yang mungkin sama saja dengan banyaknya cara untuk menyusun kedua pembatas tersebut, yaitu $C(10, 2)$. Jadi kombinasinya adalah

$$C(n + r - 1, r - 1)$$

Metode ini juga bisa digunakan untuk menentukan banyaknya tupel bilangan non-negatif yang mungkin $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ yang memenuhi

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = n$$

5.2 Ekspansi Binomial

Ekspansi binomial menyatakan bahwa untuk bilangan non-negatif n ,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) \cdot x^k y^{n-k}$$

untuk bilangan real x, y

Contoh: Untuk menentukan koefisien dari $x^6 y^2$ pada ekspansi $(x + y)^8$. Kita cukup menghitung

$$C(8, 2) = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

Contoh Soal

1. Hans mengoleksi 8 pelontar api dengan rincian:

- 3 Biru
- 4 Merah

- 1 Ungu

Hans ingin menyusun ke-8 pelontar api tersebut. Berapa banyak jumlah susunan yang mungkin?

Solusi. Kita gunakan rumus permutasi elemen identik, yaitu:

$$\frac{8!}{3!4!1!} = 280$$

Jadi ada 280 cara

2. Tentukan banyaknya tupel bilangan bulat non-negatif (x, y, z) yang memenuhi

$$x + y + z = 16$$

Solusi. kita gunakan rumus $C(n + r - 1, r - 1)$. $n = 16, r = 3$.

Jadilah,

$$\frac{18!}{2!16!} = \boxed{153}$$

3. Tentukan banyaknya tupel (x, y, z) yang memenuhi

- $x + y + z = 15$
- $y \geq 3, z \geq 5$

Solusi. Kita pecah jadi 2

Normalisasi

Tinggal dikurang saja. Artinya kita hanya akan menyelesaikan

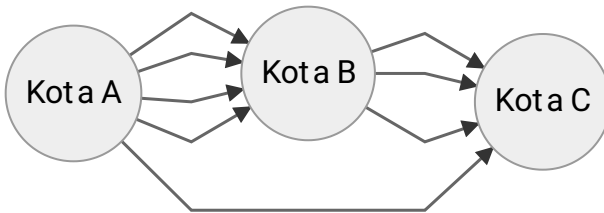
$$x + y + z = 7$$

Selesaikan

$$\frac{9!}{7!2!} = \boxed{36}$$

Soal

1. Tentukan nilai dari $\frac{36!}{35!} \cdot 5$
2. Perhatikan gambar berikut



Tentukan banyaknya pilihan jalur yang mungkin dari kota A ke kota C

3. Diketahui terdapat grid 8×8 . Berapa banyak jalur terpendek dari $(0, 0)$ ke $(8, 5)$?
4. Analog dengan soal no.3, berapa banyak jalur terpendek dari $(0, 0)$ ke $(8, 5)$ jika harus melewati titik $(3, 4)$?
5. Tentukan koefisien dari x^3y^4 untuk ekspansi $(x + y)^7$

Kunci Jawaban

1. 180

2. $4 \cdot 3 + 1 = 13$

3. 56

4. 20

5. 35