

# VEKTOR

HAIKAL ISA

## Pengenalan Vektor

Anggap vektor adalah alat untuk menentukan nilai dan arah suatu objek. Nilai bisa berupa posisi, kecepatan, percepatan, gaya, momentum, dll.

Vektor bisa dinyatakan sebagai berikut:

$$\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

yang panjangnya adalah:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Selanjutnya kita akan mempelajari (mungkin menghafal) operasi-operasi dalam vektor.

## Operasi Vektor

### Penjumlahan dan Pengurangan

Pada penjumlahan ataupun pengurangan vektor berlaku

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_x \pm v_x)\hat{i} + (u_y \pm v_y)\hat{j} + (u_z \pm v_z)\hat{k}$$

### Perkalian Skalar

Untuk  $c \in \mathbb{R}$ , berlaku,

$$c\vec{v} = c(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) = cv_x\hat{i} + cv_y\hat{j} + cv_z\hat{k}$$

### Perkalian Titik

Berlaku:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

## Perkalian Silang

Berlaku

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \hat{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \hat{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \hat{k}$$

atau dalam bentuk determinannya adalah

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Satu hal yang menarik adalah kita dapat menentukan sudut terkecil antara dua vektor dengan perkalian titik dan skalar.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

## Contoh soal

1. Sebuah objek mula-mula diam. Kemudian bergerak 3 meter ke kanan dan 8 meter ke atas. Kemudian bergerak lagi 6 meter ke kiri dan 12 meter ke bawah.

Dimana objek tersebut sekarang dari titik awalnya?

**Solusi.** Mari kita artikan secara matematis.

Bergerak 3 meter ke kanan dan 8 meter ke atas  $\rightarrow 3\hat{i} + 8\hat{j}$

Bergerak 6 meter ke kiri dan 12 meter ke bawah  $-6\hat{i} - 12\hat{j}$

Jadi resultannya adalah

$$(3 - 6)\hat{i} + (8 - 12)\hat{j} = \boxed{-3\hat{i} - 4\hat{j}}$$

Sehingga objek tersebut berada pada 3 meter ke kiri dan 4 meter ke bawah dari titik awal.

2. Dua Mobil mula-mula berada titik yang sama  $(0, 0)$ . Kedua mobil bergerak lurus namun berbeda arah. Mobil A berhenti di titik  $(6, 8)$ .

Mobil B berhenti titik  $(7, 24)$ . Tentukan sudut terkecil yang dibentuk dari lintasan kedua mobil tersebut.

**Solusi.** Kita gunakan sifat perkalian titik. Pertama-tama kita nyatakan vektornya.

- $\vec{v} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$
- $\vec{w} = 7\hat{i} + 24\hat{j}$

Dengan ini,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

Substitusikan ke

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta$$

Dan akhirnya menjadi

$$42 + 192 = 250 \cos \theta$$

jadilah

$$\cos \theta = 0.936$$

Dengan ini, sudut yang dibentuk adalah

$$\boxed{\arccos 0.936 \approx 20.61^\circ}$$

## Soal

1. Tentukan nilai dari  $r\vec{v}$  untuk  $r = 1.4$  dan  $\vec{v} = 7\hat{i} + \pi\hat{j}$
2. Diketahui  $\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$  dan  $\vec{w} = 4\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k}$ . Tentukan nilai dari
  1.  $\vec{v} \cdot \vec{w}$
  2.  $\vec{v} \times \vec{w}$
  3.  $\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
3. Tentukan luas dari segitiga yang dibentuk oleh ketiga titik berikut:  $(0, 0)$ ,  $(4, 8)$ , dan  $(10, 7)$

# Kunci jawaban

1.  $9.8\hat{i} + 1.4\pi\hat{j}$

2. 1. 38

2.  $-13\hat{i} + 10\hat{j} + 5\hat{k}$

3.  $\sqrt{26}$

3. 26