

Analisis Dimensi

Haikal Isa Al Mahdi

May 5, 2024

- 1 Pendahuluan
- 2 Metode Matematika
- 3 Analisis Dimensi
- 4 Contoh Soal

Kenapa?

- Soal yang terkait dengan fisika (khususnya mekanika) dalam tingkat olimpiade tidak cukup diselesaikan hanya dengan menghafal rumus.
- Kita tahu bahwa $F = ma$, namun situasi akan semakin rumit bila sistem semakin kompleks
- Oleh karena itu, dalam hal ini diperlukan kemampuan problem-solving (setidaknya yang mendasar)

Materi Prasyarat

- Aljabar Dasar
- Eksponen, Akar, dan Logaritma
- Vektor
- Kalkulus dasar (integral dan turunan)

Manipulasi aljabar terkadang sudah cukup untuk menyelesaikan soal.

Dua Cara

Berdasarkan metodenya, terdapat 2 jenis fisika:

- 1 Fisika Aljabar
- 2 Fisika Kalkulus

Walaupun kita terbiasa menyelesaikan masalah fisika dengan fisika aljabar, tidak ada salahnya untuk mempelajari fisika kalkulus.

Trigonometri

Fungsi trigonometri adalah perbandingan antara sisi-sisi segitiga.

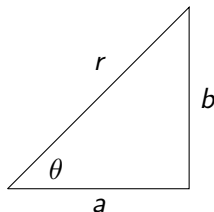


Figure: Segitiga Siku-Siku

Fungsi

- $\sin \theta = \frac{b}{r}$
- $\cos \theta = \frac{a}{r}$
- $\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

Konsekuensinya,

- $r \sin \theta = b$
- $r \cos \theta = a$

Terdapat pula fungsi arcus (invers dari fungsi trigonometri)

- $\arcsin\left(\frac{b}{r}\right) = \theta$
- $\arccos\left(\frac{a}{r}\right) = \theta$
- $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \theta$

Skala

Terkadang kita menemukan pernyataan seperti "a berbanding lurus terhadap b".

Apa artinya?

- $a \propto b$ artinya adalah "a berbanding lurus terhadap b"
- Perlu diketahui bahwa $a \propto b$ tidak sama dengan $a = b$
- Secara matematis, $a \propto b$ dapat dinyatakan sebagai $a = kb$ untuk suatu konstanta k
- Misalnya saja, luas lingkaran adalah $L = \pi r^2$. Dalam hal ini, $L \propto r^2$. Saat r menjadi 2 kali lipat, Luasnya akan bertambah 4 kali lipat
- Jika diketahui $a_1 \propto \alpha_1$ dan $a_2 \propto \alpha_2$ (konstanta sama), maka

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Analisis Dimensi

Analisis dimensi berguna dalam menentukan... dimensi dari suatu besaran.

- Amat erat kaitannya dengan eksponen
- Sering muncul pernyataan-pernyataan seperti "berbanding lurus", "berbanding terbalik", atau "bergantung pada" di dalam soal.
- Analisis dimensi dapat diterapkan pada metode integrasi.
- Cenderung mudah

Contoh Soal dan Solusi

Perkirakan rumus gaya hambat udara yang bergantung pada massa jenis udara (ρ), kecepatan angin (v), dan luas penampang lintang A .

Solusi. Jika pernyataan di atas diubah ke bentuk proporsi, maka akan menjadi

$$F \propto \rho^x v^y A^z$$

Kita tinjau dimensi dari masing-masing

- $\rho = [M][L]^{-3}$
- $v = [L][T]^{-1}$
- $A = [L]^2$
- $F = [M][L][T]^{-2}$

dengan ini,

$$[M][L][T]^{-2} = [M]^x [L]^{-3x+y+2z} [T]^{-y}$$

Contoh Soal dan Solusi

Dapat dilihat bahwa

- $x = 1$
- $-3x + y + 2z = 1$
- $-y = -2$

Solusi dari sistem di atas adalah $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 1$. Dengan ini

$$F \propto \rho v^2 A$$

Selesai

Contoh Lainnya

Diketahui bahwa untuk $x > 1$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

Tentukan

$$\int \frac{1}{(ax)^2 - 1} dx$$

Solusi

Misalkan x memiliki satuan meter m . dx pun demikian. Agar $(ax)^2$ menjadi tak berdimensi, anggap $a = m^{-1}$. Dengan demikian,

$$\int \frac{1}{(ax)^2 - 1} dx \propto m$$

Pada titik ini, kita mesti mencari nilai ϕ sehingga $a^\phi = m$. mengingat $a = m^{-1}$, persamaannya menjadi

$$m^{-\phi} = m$$

Yang mana jawabannya adalah $\phi = -1$ sehingga

$$\int \frac{1}{(ax)^2 - 1} dx \propto \frac{1}{a}$$

Solusi

Sekarang, secara kasarnya, kita dapatkan

$$\int \frac{1}{(ax)^2 - 1} dx = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

Namun, argumen di dalam fungsi logaritma natural tersebut haruslah tak berdimensi. Artinya,

$$\int \frac{1}{(ax)^2 - 1} dx = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{ax-1}{ax+1} \right)$$

Catatan

Terdapat beberapa hal yang perlu diperhatikan ketika bermatematika dalam fisika

- Olimpiade fisika bukanlah ujian integral. Jika memang diharuskan memakai integral, biasanya terdapat petunjuk (hint) di dalam soal. (Petunjuk: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$)
- Fungsi $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\log x$, $\exp(x)$ dan semisalnya **tidak berdimensi**
- Perhatikan arah vektornya
- Telitilah dalam pemroyeksian vektor ($r \sin \theta$, $r \cos \theta$)

Bacaan lebih lanjut dapat dilihat di
knzhou.github.io/handouts/P1.pdf