

# Pencacahan

---

Kita akan belajar berhitung

## 1. Aturan Penjumlahan

---

misalkan  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  masing-masing adalah himpunan, serta  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dengan  $1 \leq i, j \leq n$  dan  $i \neq j$ , maka

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## 2. Aturan Perkalian

---

Misalkan  $A, B$  masing masing adalah himpunan. Perkalian silang dari 2 himpunan tersebut dinyatakan dengan  $A \times B$  sehingga

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

dengan begitu

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

Misalkan  $T = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ ,  
maka

$$|T| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

## 3. Maksud?

---

Agar tidak menambah kebingungan, kita akan langsung ke contohnya saja.

Misalkan anda punya 7 baju dan 12 celana. Berapa banyak pilihan yang mungkin?

**Jawab.** Jika anda memilih baju 1, anda akan mempunyai 12 pilihan celana, begitu pula jika anda pilih baju 2, dan seterusnya.

Jadi total kombinasi yang mungkin adalah  $12 \times 7 = 84$  Pilihan.

## 4. Permutasi

---

Sederhananya

Banyaknya cara untuk menyusun elemen apabila **urutan diperhatikan**

Artinya  $(1, 2, 3)$  dan  $(3, 2, 1)$  adalah dua susunan berbeda. Rumus permutasi adalah

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

$n$ : total elemen

$r$ : banyaknya elemen yang dipilih.

**Catatan:**  $n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

contoh:  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

### 4.1 Elemen berulang

Misalkan akan diambil huruf dari kata

*POROS*

Karena terdapat element berulang (muncul O sebanyak 2 kali). Maka permutasinya adalah

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

Jadi apabila terdapat  $n$  elemen berbeda yang berulang dan masing-masing muncul sebanyak  $k_i$  kali, maka permutasinya adalah

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\dots k_n!}$$

## 4.2 Permutasi Siklis

Misalkan elemen disusun secara siklis. Artinya elemen terakhir bersebelahan dengan elemen pertama, maka permutasinya adalah

$$(n - 1)!$$

## 5. Kombinasi

---

Sederhananya

Banyaknya cara untuk menyusun elemen apabila **urutan tidak diperhatikan**

Artinya  $(1, 2, 3)$  dan  $(3, 2, 1)$  adalah dua susunan sama. Rumus kombinasi adalah

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

$n$ : total elemen

$r$ : banyaknya elemen yang dipilih.

*Hal lain:* Rumus  $C(n, r)$  juga digunakan untuk mencari banyaknya jalur terpendek dari titik awal  $(0, 0)$  ke titik  $(n, r)$

### 5.1 Elemen Berulang

Misalkan anda ingin membeli makanan dari sebuah toko. Toko tersebut menyediakan 3 jenis makanan, yaitu pisang keju, croissant, dan nasi goreng. Anggaplah stoknya tidak terbatas dan anda ingin memesan 8 makanan. Kita ilustrasikan sebagai berikut

ooo | ooo | oo

maka banyaknya pilihan yang mungkin sama saja dengan banyaknya cara untuk menyusun kedua pembatas tersebut, yaitu  $C(10, 2)$ . Jadi kombinasinya adalah

$$C(n + r - 1, r - 1)$$

Metode ini juga bisa digunakan untuk menentukan banyaknya tupel bilangan non-negatif yang mungkin  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  yang memenuhi

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = r$$

## 5.2 Ekspansi Binomial

Ekspansi binomial menyatakan bahwa untuk bilangan non-negatif  $n$ ,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) \cdot x^k y^{n-k}$$

untuk bilangan real  $x, y$

## Contoh Soal

---

1. Hans mengoleksi 8 pelontar api dengan rincian:

- 3 Biru
- 4 Merah
- 1 Ungu

Hans ingin menyusun ke-8 pelontar api tersebut. Berapa banyak jumlah susunan yang mungkin?

**Solusi.** Kita gunakan rumus permutasi elemen identik, yaitu:

$$\frac{8!}{3!4!1!} = 280$$

Jadi ada 280 cara

2. Tentukan banyaknya tupel bilangan non-negatif  $(x, y, z)$  yang memenuhi

$$x + y + z = 16$$

**Solusi.** kita gunakan rumus  $C(n + r - 1, r - 1)$ .  $n = 16, r = 3$ .

Jadilah,

$$\frac{18!}{2!16!} = \boxed{153}$$

3. Tentukan banyaknya tupel  $(x, y, z)$  yang memenuhi

- $x + y + z = 15$
- $y \geq 3, z \geq 5$

**Solusi.** Kita pecah jadi 2

### Normalisasi

Tinggal dikurang saja. Artinya kita hanya akan menyelesaikan

$$x + y + z = 7$$

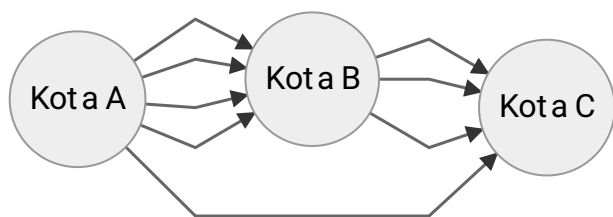
### Selesaikan

$$\frac{9!}{7!2!} = \boxed{36}$$

## Soal

---

1. Tentukan nilai dari  $\frac{36!}{35!} \cdot 5$
2. Perhatikan gambar berikut



Tentukan banyaknya pilihan jalur yang mungkin dari kota A ke kota C

3. Diketahui terdapat grid  $8 \times 8$ . Berapa banyak jalur terpendek dari  $(0, 0)$  ke  $(8, 5)$  ?
4. Analog dengan soal no.3, berapa banyak jalur terpendek dari  $(0, 0)$  ke  $(8, 5)$  jika haru melewati titik  $(3, 4)$
5. Tentukan koefisien dari  $x^3y^4$  untuk ekspansi  $(x + y)^7$

## Kunci Jawaban

---

1. 180

2.  $4 \cdot 3 + 1 = 13$

3. 56

4. 20

5. 35