Análisis de métricas de desempeño para comparar conjuntos de soluciones en problemas multiobjetivos

Nery Riquelme
Universidad Nacional de Asunción
Facultad Politécnica
Laboratorio de Computación Científica y Aplicada
Email: neryriquelme90@gmail.com

Benjamín Barán
Universidad Nacional de Asunción
Facultad Politécnica
Laboratorio de Computación Científica y Aplicada
Email: bbaran@cba.com.py

***Resumen*—Un extenso número de métodos para resolver problemas multiobjetivo han sido desarrollados en las últimas décadas. Para comparar estos métodos, una amplia variedad de métricas de desempeño han sido propuestas. En éste trabajo se pretende realizar un estudio detallado de las métricas de desempeño más representativas y utilizadas en el estado del arte, teniendo como objetivo principal la recomendación de métricas específicas para comparar conjuntos de soluciones en problemas multiobjetivo.**

I. INTRODUCCIÓN

La optimización multiobjetivo (MO - *Multiobjective Optimization*) implica optimizar simultáneamente k funciones objetivo, donde $2 \leq k$. Un problema multiobjetivo (MOP - *Multiobjective Optimization Problem*) puede definirse (en palabras) como el problema de hallar:

"un vector de variables de decisión que satisface ciertas restricciones y optimiza otro vector cuyos elementos representan a las funciones objetivo. Estas funciones objetivo describen valores matemáticos que usualmente se encuentran en conflicto unos con otros. Por consiguiente, el término 'optimizar' se refiere a encontrar una solución que asigne a todas las funciones objetivo valores aceptables para el tomador de decisiones bajo algún criterio de optimalidad" [1].

La resolución de un problema multiobjetivo implica crear o generar un conjunto de soluciones óptimas, conocido generalmente como el conjunto Pareto. Este conjunto solución debería contener en principio a todas las soluciones no dominadas del dominio de definición del problema (como se explicará en la sección II). Debido a la multiplicidad de las soluciones, dichos problemas son resueltos convenientemente utilizando algoritmos evolutivos, los cuales basan la búsqueda de buenas soluciones en principios genéticos y de selección natural [2]. Para proporcionar comparaciones referentes a la "calidad" de los conjuntos de solcuiones encontrados por los diferentes métodos, se han definido una amplia gama de métricas de desempeño que son presentadas en la sección III. Estas métricas pueden ser entendidas como funciones que mapean un conjunto de soluciones sobre el conjunto de números reales para facilitar la comparación entre diversos métodos [9].

II. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

A. Algoritmos Evolutivos (EA - Evolutionary Algorithms)

Técnicas estocásticas basadas en la evolución natural y en el concepto Darwiniano de "sobrevivencia del más apto" [6]. Sus características comunes son la reproducción, variación aleatoria, competencia y selección de individuos dentro de alguna población. En términos generales, un algoritmo evolutivo consiste en una población de soluciones codificadas (individuos) que son manipuladas por un conjunto de operadores y evaluadas mediante una función denominada *fitness function* [9].

B. Variables de decisión

Las variables de decisión son los valores numéricos que deben ser elegidos en un problema de optimización. Se denotan como : x_j, $j = \{1, 2...., n\}$.
El vector **x** que se compone de n variables de decisión se representa como [9]:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2...., x_n]^T$$

C. Funciones Objetivo

Para determinar la "calidad" de cierta solución, es necesario contar con un conjunto de criterios de evaluación. Dichos criterios se expresan como funciones computables sobre las variables de decisión, y se denominan funciones objetivo. Estas funciones objetivo se denotan como:
$f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}).., f_k(\mathbf{x})$, donde k es el número de funciones objetivo del problema resuelto. Por eso, las funciones objetivo forman un vector de funciones **y** definido como [9]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})...., f_k(\mathbf{x})]^T$$

D. Espacios

El conjunto de todas las *n*-tuplas de los números reales descripto como $\mathbb{R}^n$ se denomina *n*-**espacio Euclidiano**. Dos espacios Euclidianos pueden ser considerados en los problemas multiobjetivo [8]:

- el espacio *n*-dimensional de las variables de decisión en el que cada eje de coordenada se corresponde con una componente del vector **x**. Este espacio se denomina Espacio de Decisión o Espacio de Búsqueda.

- el espacio *k*-dimensional de las funciones objetivo en el que cada eje de coordenada se corresponde con una componente del vector $\mathbf{f}(_k\mathbf{x})$. Este espacio se denomina Espacio de Objetivos o simplemente Espacio Objetivo.

Cada punto en el espacio de decisión representa una posible solución y proporciona un punto correspondiente en el espacio objetivo, el cual determina la "calidad" de dicha solución en función a los valores de las funciones objetivo [4].

E. El problema de optimización multiobjetivo (MOP - Multiobjective Optimization Problem)

Un MOP se define, en términos generales, como: *el problema de optimizar (maximizar o minimizar)* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (f_1(x), f_2(x).....f_k(x))$ *sujeto a restricciones como* $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$, $i = \{1, ...m\}$, *y* $h_j(\boldsymbol{x}) = 0$, $j = \{1, ...p\}$ $\boldsymbol{x} \in \Omega$. *Para solucionar el problema se minimiza o maximiza los componentes del vector* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, *donde* $\boldsymbol{x}$ *es un vector* n*-dimensional de variables de decisión* $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2....., x_n\}$ *proveniente de un universo* Ω. *Se observa que* $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ *y* $h_j(\boldsymbol{x}) = 0$ *son restricciones que deben ser satisfechas al minimizar o maximizar* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, *y* Ω *contiene a todas las soluciones* $\boldsymbol{x}$ *capaces de satisfacer la evaluación de* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ [3][8].

F. Dominancia de Pareto

Se dice que un vector **x** domina a otro vector **x'** (lo que se denota como $\mathbf{x} \succ \mathbf{x'}$) si x no es peor que x' en ningún objetivo y es estríctamente mejor en al menos un objetivo [3] [8] [9].

G. Optimalidad de Pareto

Se dice que una solución $\mathbf{x} \in \Omega$ es óptimo Pareto (o simplemente óptima) respecto a Ω si y solo si no existe $\mathbf{x}' \in \Omega$ para el cual $\mathbf{v} = F(\mathbf{x}') = (f_1(\mathbf{x}'), f_2(\mathbf{x}')...., f_k(\mathbf{x}'))$ domina a $\mathbf{u} = F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_k(\mathbf{x}))$ [3] [8] [9]. El trmino **óptimo** generalmente se refiere a todo el espacio de decisión, a no ser que se especifique lo contrario.

H. Conjunto Pareto óptimo

Dado un MOP, $F(\mathbf{x})$, el conjunto Pareto óptimo (o simplemente conjunto Pareto), P^*, se denota como en [3] [8] [9] :

$$P^* := \{\mathbf{x} \in \Omega | \neg \exists \mathbf{x}' \in \Omega \ F(\mathbf{x}') \preceq F(\mathbf{x})\}$$

I. Frente Pareto óptimo

Dado un MOP, $F(\mathbf{x})$ y un conjunto Pareto, P^*, el frente Pareto óptimo (o simplemente frente Pareto), PF^*, se denota como en [3] [8] [9] :

$$PF^* := \{\mathbf{u} = F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in P^*\}$$

J. Métricas de desempeo

Las *h*-arios perfomance indices (PI), muy comúnmente denominados como métricas, son funciones $I_i : \Omega^h \mapsto \mathbb{R}$, las cuales asignan a cada vector $(\hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_h)$, compuesto de h conjuntos de aproximación, un valor real $I_i(\hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_h)$.

Los PIs son formalmente definidos para proveer comparaciones y relacionamientos de "calidad" entre MOEAs. Dichas comparaciones efectivamente podran determinar si un MOEA es mejor que otro [9].

K. Suite de problemas multiobjetivo

Una amplia *suite* de problemas multiobjetivo han sido desarrolladas con el fin de evaluar, comparar, clasificar, y mejorar el desempeño de los MOEAs. La suite se compone de problemas y familias de problemas de diferentes complejidades, entre las cuales podemos mencionar [9]:

- **Familia DTLZ:** DTLZ1, DTLZ2, DTLZ3, DTLZ4, DTLZ5, DTLZ6, DTLZ7, DTLZ8, DTLZ9.
- **Familia ZDT:** ZDT1, ZDT2, ZDT3, ZDT4, ZDT5, ZDT6.
- **Familia Okabe:** OKA1, OKA2.
- **Familia WFG :** WFG1, WFG2, WFG3, WFG4, WFG5, WFG6, WFG7, WFG8, WFG9.
- Binh.
- Fonseca.
- Kursawe.
- Laumanns.
- Lis.
- Murata.
- Poloni.
- Quagliarella.
- Rendon.
- Schaffer.
- Viennet.

III. Perfomance indices

En esta sección se presenta la lista de PIs seleccionados y estudiados en ésta investigación hasta el momento.

A. Error Ratio (ER)

ER explícitamente mide la cercanía de un conjunto de aproximación Q compuesto por N soluciones al frente Pareto óptimo P^*.

ER cuantifica el numero de soluciones de Q que no se hallan en el conjunto óptimo Pareto P^*. Se define en [4]:

$$ER = \frac{\sum_{i=1}^{|Q|} e_i}{|Q|},$$

donde $e_i = 1$ si $i \notin P^*$ y $e_i = 0$, en caso contrario.

B. Spread

Spread se ocupa de medir la extensión de distribución de las soluciones obtenidas. Matemáticamente se define en [4] [7]:

$$\Delta = \frac{\sum_{m=1}^{M} d_m^e + \sum_{i=1}^{|Q|} |d_i - \bar{d}|}{\sum_{m=1}^{M} d_m^e + |Q|\bar{d}},$$

donde d_i podría ser cualquier medida de distancia entre soluciones vecinas y $\bar{d}$ es la media de estos valores. La distancia Euclidiana, la suma de las diferencias absolutas de los valores de las funciones objetivo o la distancia de concurrencia pueden ser utilizadas para calcular d_i. El parámetro d_m^e es la distancia entre las soluciones de los extremos de P^* y Q correspondiente a la *m*-ésima función objetivo.

C. Generational Distance (GD)

GD mide, en promedio, "que tan lejos" está Q de P^*. Matemáticamente en [2] [9]:

$$GD = \frac{(\sum_{i=1}^{|Q|} d_i^p)^{1/p}}{|Q|}.$$

para $p = 2$, el parámetro d_i es la distancia Euclidiana (en el espacio objetivo) entre la solución $i \in Q$ y el miembro *más cercano* de P^*:

$$d_i = \min_{k=1}^{|P^*|} \sqrt{\sum_{m=1}^{M} (f_m^{(i)} - f_m^{*\,(k)})^2},$$

donde $f_m^{*\,(k)}$ es el valor de la *m*-ésima función objetivo del *k*-ésimo miembro de P^*.

D. Inverted Generational Distance (IGD)

Este PI es bastante similar a GD, sin embargo, IGD mide la distancia entre el conjunto Pareto óptimo y el conjunto de aproximación tomando como referencia al primero, respectivamente. Matemáticamente se define en [2] [9]:

$$GD = \frac{(\sum_{i=1}^{|P*|} d(i,Q))}{|P*|}.$$

donde $d(i,Q)$ es la distancia Euclidiana mínima entre la solución óptima i y las soluciones en Q.

E. Epsilon (ϵ)

ϵ consiste en toda una familia de operadores que comprende versiones aditivas y multiplicativas.

1) *Epsilon multiplicativo binario*
Denominado como $I_\epsilon(A,B)$, proporciona el factor mínimo ϵ por el cual el vector de funciones objetivo asociado con B puede ser multiplicado tal que la aproximación al frente Pareto resultante experimente una dominancia débil respecto a la aproximación al frente Pareto representado por A. Definido en [5]:

$$I_\epsilon(A,B) = \inf_{\epsilon \in \mathbb{R}} \{\forall x^2 \in B \exists x^1 \in A : x^1 \preceq_{\epsilon+} x^2\}.$$

Este PI se basa en la relación de ϵ-dominancia, $\preceq_{\epsilon+}$, definida como:

$$x^1 \preceq_\epsilon x^2 \iff \forall i \in 1..n : f_i(x^1) \leq \epsilon \cdot f_i(x^2).$$

para un problema de minimización , asumiendo que todos los puntos son positivos en todos los objetivos.

2) *Epsilon aditivo binario*
Denominado $I_\epsilon(A,B)$, proporciona el factor mínimo ϵ que puede ser sumado al vector de funciones objetivo asociado a B tal que la aproximación al frente Pareto resultante experimente una dominancia débil respecto a la aproximación al frente Pareto representado por A. Definido en [5]:

$$I_\epsilon(A,B) = \inf_{\epsilon \in \mathbb{R}} \{\forall x^2 \in B \exists x^1 \in A : x^1 \preceq_{\epsilon+} x^2\}.$$

Este PI se basa en la relación de ϵ-dominancia,$\preceq_{\epsilon+}$, definida como:

$$x^1 \preceq_\epsilon x^2 \iff \forall i \in 1..n : f_i(x^1) \leq \epsilon + f_i(x^2).$$

F. Hipervolumen (HV)

HV es un PI ampliamente aceptado, y calcula el área cubierta por los miembros del conjunto de soluciones Q en problemas cuyas funciones objetivo serán minimizadas. Matemáticamente, por cada solución $i \in Q$, un hipercubo v_i es construido con un punto de referencia W y la solución i como esquinas diagonales del mismo. El punto de referencia puede ser hallado construyendo un vector con los "peores" valores de las funciones objetivo. Inmediatamente, se halla la unión matemática de todos los hipercubos construidos y se calcula su hipervolumen como se define en [2] [7]:

$$HV = \texttt{volume}(\cup_{i=1}^{|Q|} v_i). \quad (1)$$

G. Indicador R

Consiste en una familia de operadores que miden y comparan conjuntos de aproximaciones al frente Pareto basándose en un conjunto de funciones utilitarias. Así, una función utilitaria u se define como una aplicación de un conjunto $\mathbf{R}^k$ de funciones objetivo k-dimensionales al conjunto de los números reales [5] :

$$u : \mathbf{R}^k \mapsto \mathbf{R}$$

La utilidad, $u(A, \tilde{\lambda})$, del conjunto de aproximación A, en un vector de escalabilidad, $\tilde{\lambda}$, es la distancia mínima de un punto en el conjunto, A, al punto de preferencia. Matemáticamente definimos los PIs I_{R2} e I_{R3}:

$$I_{R2} = \frac{\sum_{\tilde{\lambda} \in A} u(\tilde{\lambda}, B) - u(\tilde{\lambda}, A)}{|\tilde{\lambda}|} \quad (2)$$

$$I_{R3} = \frac{\sum_{\tilde{\lambda} \in A} [u(\tilde{\lambda}, B) - u(\tilde{\lambda}, A)]/u(\tilde{\lambda}, B)}{|\tilde{\lambda}|} \quad (3)$$

Dichas funciones utilitarias, u, requieren un punto de preferencia y un número de vectores de escalabilidad, $\tilde{\lambda}$, especificado por el "usuario". Los vectores se distribuyen uniformemente a través del espacio objetivo. La distancia del punto (en cada conjunto) más cercano al punto de referencia es hallada y las diferencias en dichas distancias son agregadas. Para poder obtener el indicador deseado, el conjunto B debe ser reemplazado por un conjunto de referencia que contenga los puntos del frente Pareto óptimo, P^*.

IV. Acerca de la investigación

A. *Objetivo General*

- Estudiar, analizar, clasificar y comparar un amplio conjunto de performance indices.

B. *Objetivos Específicos*

- Describir la mayor cantidad posible de PIs utilizados en el estado del arte.
- Implementar computacionalmente los PIs seleccionados.
- Realizar comparaciones entre PIs :
  - Complejidad computacional
  - Utilidad
  - Nivel de utilización

  con el fin de determinar su aplicabilidad en la evaluación de ciertas soluciones.
- Realizar recomendaciones acerca del uso adecuado de los PIs estudiados.

C. *Justificación*

La calidad de un conjunto Pareto puede ser determinada teniendo en cuenta 3 aspectos:

- el número de soluciones existentes en el conjunto Pareto,
- la exactitud de las soluciones del conjunto Pareto,
- la distribución y el *spread* de las soluciones.

Considerando que gran parte de las investigaciones se centran en el estudio y experimentación de MOEAs, resulta de sumo interés realizar un estudio comparativo de los algoritmos utilizados para medir la calidad de las soluciones obtenidas, teniendo como aporte principal la recomendación de cuales PIs pueden ser utilizados en ciertas situaciones, y tomando como criterio de referencia los tres aspectos de calidad citados en el párrafo anterior.

D. *Metodologa*

Primeramente, se describir la mayor cantidad de perfomance indices utilizados en el estado del arte.

Luego se procederá a la selección de los PIs más trascendentes e importantes de acuerdo a su nivel de utilizacin y a los resultados obtenidos en investigaciones anteriores.

Posteriormente se proceder a la codificacin de los PIs seleccionados.

Una vez codificados todos los PIs, se procederá a la fase de experimentacin. Dicha fase se llevará acabo mediante la aplicación de los PIs codificados anteriormente sobre soluciones obtenidas mediante la ejecución de diversos MOEAs y familias de problemas multiobjetivo construidos exclusivamente para el efecto.

Por último se realizará un análisis exhaustivo de los resultados obtenidos y se realizaran las recomendaciones y conclusiones pertinentes.

References

[1] A. Osyczka. Multicriteria optimization for engineering design. In J. S. Gero, editor, Design Optimization, pages 193-227. Academic Press, 1985.

[2] Deb, Kalyanmoy. "Multi-objective optimisation using evolutionary algorithms: an introduction." In Multi-objective Evolutionary Optimisation for Product Design and Manufacturing, pp. 3-34. Springer London, 2011.

[3] Van Veldhuizen, David A. Multiobjective evolutionary algorithms: classifications, analyses, and new innovations. No. AFIT/DS/ENG/99-01. AIR FORCE INST OF TECH WRIGHT-PATTERSONAFB OH SCHOOL OF ENGINEERING, 1999.

[4] Deb, Kalyanmoy. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. Vol. 16. John Wiley & Sons, 2001.

[5] Branke, Jrgen, Kalyanmoy Deb, Kaisa Miettinen, and Roman Slowinski, eds. Multiobjective optimization: Interactive and evolutionary approaches. Vol. 5252. Springer, 2008.

[6] Goldberg, David E. "E.(1989). Genetic algorithms in search, optimization and machine learning." Reading: Addison-Wesley (1990).

[7] Okabe, Tatsuya, Yaochu Jin, and Bernhard Sendhoff. "A critical survey of performance indices for multi-objective optimisation." In Evolutionary Computation, 2003. CEC'03. The 2003 Congress on, vol. 2, pp. 878-885. IEEE, 2003.

[8] Coello, Carlos A. Coello, and Gary B. Lamont. Applications of multi-objective evolutionary algorithms. Vol. 1. World Scientific, 2004.

[9] Coello, Carlos Coello, Gary B. Lamont, and David A. Van Veldhuizen. Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems. Springer, 2007.