

Morfología Matemática para Imágenes a Color. Un Método de Ordenación Vectorial utilizando Características Locales de la Imagen.

A. Méndez y R. Cardozo
Facultad Politécnica
Universidad Nacional de Asunción
San Lorenzo, Paraguay
Email: {aramfara,rkrdozo}@gmail.com

Resumen—La morfología matemática se basa en fundamentos matemáticos bien definidos como la teoría de conjuntos, teoría de retículos y funciones aleatorias. Tiene aplicaciones prácticas en varias áreas principalmente en el análisis de imágenes digitales. Éste trabajo se orienta a la extensión de la Morfología Matemática a imágenes a color. Se determinan los fundamentos principales para llevar a cabo las operaciones morfológicas como la erosión y la dilatación, además se describen las características de una imagen a color, así como los distintos métodos de ordenación para establecer un orden entre los píxeles de una imagen de tal manera a poder realizar comparaciones entre los mismos. Además se define una función de reducción desde el espacio tridimensional de colores al espacio unidimensional, así como un método de comparación lexicográfico entre los elementos con valores iguales del espacio unidimensional. También se establece una forma de agrupamiento denominado ventanas sobre la imagen para obtener características locales de la imagen.

Keywords—Ordenamiento vectorial, Morfología matemática, Imagen a color, Orden lexicográfico, Características Locales de la Imagen.

I. INTRODUCCIÓN

En el presente documento se describe el enfoque a tener en cuenta para extender las operaciones morfológicas de erosión y dilatación, que se utilizan con imágenes binarias y en escala de grises, a imágenes a color. Inicialmente las operaciones morfológicas se pueden realizar con imágenes binarias, donde cada píxel puede tener dos valores de bits posibles, generalmente se utilizan $2^1 = 2$ el 0 y el 1 para representar al color negro y al blanco respectivamente. Las ventajas de trabajar con imágenes binarias es la simplicidad y el bajo coste computacional requerido para su procesamiento. Se utilizan generalmente como elemento estructurante o bien surgen como resultado de alguna otra operación morfológica como la segmentación o la umbralización. Las imágenes en escala de grises se componen $2^8 = 256$ niveles de grises o bits por píxel, donde el nivel 0 es negro y el nivel 255 es blanco.

Posteriormente se desarrollan las distintas técnicas de ordenamientos para poder tener un orden entre los píxeles de una imagen. En la sección III se muestran los trabajos anteriores estudiados sobre los cuales se basa éste trabajo. En la sección IV se describe el enfoque propuesto por éste artículo y la aplicación práctica como resultado de éste trabajo. En la sección V se proponen trabajos futuros utilizando éste artículo como base para futuros proyectos y por último en la sección VI se realiza una conclusión sobre el trabajo realizado.

II. FUNDAMENTOS PARA LAS OPERACIONES MORFOLÓGICAS MATEMÁTICAS

A. Imagen a Color

Una imagen digital a color es una función bidimensional con valor tridimensional

$$f: Z^2 \Rightarrow Z^3$$

en donde cada píxel en la posición (x, y) se representa por un vector con tres componentes:

$$p = (c_1, c_2, c_3)$$

Donde cada valor c_i pertenece al canal o plano RGB respectivamente en éste trabajo se utilizará el espacio a color RGB (Rojo, Verde, Azul). Como se aprecia en la Figura 1



Fig. 1. Modelo RGB. Cada píxel posee un valor de componente roja, verde y azul.

B. Histograma

El histograma de una imagen es una representación gráfica del número de píxeles que existe en la imagen con cada nivel de gris. El histograma se representa como un gráfico con nivel de gris en el eje horizontal desde 0 hasta 255 (para una escala gris de 8 bits), y número de píxeles en el eje vertical.

C. Elemento Estructurante

El elemento estructurante es un objeto de referencia generalmente de dimensiones pequeñas y que presenta una estructura geométrica sencilla (punto, línea, cuadrado, círculo, etc.) asociado a la estructura o topología predominante en los elementos presentes en la imagen. Generalmente tienen valores cero o uno.

D. Operaciones Morfológicas Básicas

1) Erosión y Dilatación: Dada una imagen en color f y un elemento estructurante S . La erosión vectorial (ϵ) y la dilatación vectorial (δ) de la imagen f por S , dado el ordenamiento vectorial v , puede expresarse como:

$$\epsilon(f)(x) = \inf_{s \in S} v\{f(x+s)\}$$

$$\delta(f)(x) = \sup_{s \in S} v\{f(x+s)\}$$

E. Gradiente Morfológico

Como aplicación práctica del presente trabajo se utiliza el gradiente morfológico, que es una operación de la morfología matemática que representa el residuo o diferencia entre una dilatación y una imagen original o una diferencia entre la imagen original y su erosión o bien representa la diferencia entre la dilatación y la erosión.

$$\begin{aligned} g_1 &= (I\delta S) - I \\ g_2 &= I - (I\epsilon S) \\ g_3 &= (I\delta S) - (I\epsilon S) \end{aligned}$$

Es útil para la segmentación de imágenes y para la detección de bordes. Como la erosión es una operación anti-extensiva la imagen resultante es menor a la original y la dilatación es extensiva, la imagen resultante es mayor a la imagen original.

F. Ordenamiento

El concepto de orden es fundamental para las operaciones morfológicas matemáticas. Sea la relación \leq en el conjunto X se dan las siguientes propiedades:

- 1) reflexiva: si $p \leq p, \forall p \in X$
- 2) antisimétrica: si $p \leq p \wedge q \geq p \Rightarrow p = q, \forall (p, q) \in X$
- 3) transitiva: si $p \leq q \wedge q \leq r \Rightarrow p \leq r, \forall (p, q, r) \in X$
- 4) total: si $p \leq q \vee q \leq p, \forall (p, q) \in X$

Una relación binaria \leq es llamada de pre-orden si cumple con las propiedades 1 y 3; y si a la vez cumple con la propiedad 2 se convierte en una relación de orden. Si adicionalmente cumple con 4, es denotada como total, si no cumple con la última propiedad es una relación de orden parcial.

G. Retículo Completo

Sea X un conjunto no vacío de orden parcial y tenga una relación binaria \leq , además todo subconjunto no vacío $P \subseteq X$ tiene un ínfimo (\wedge) (máximo de las cotas inferiores) y un supremo (\vee) (mínimo de las cotas superiores) entonces se considera al conjunto X como Retículo Completo.

H. Métodos de Ordenamiento Vectorial

Según [4] existen cuatro métodos de ordenamiento de datos multidimensionales. En nuestro caso se necesita ordenar los píxeles de una imagen a color (tres componentes multidimensionales).

1) Ordenamiento Marginal: Consiste en manejar cada canal o plano de la imagen de forma individual por ejemplo $I_1 = R, I_2 = G, I_3 = B$. Esto quiere decir que las operaciones se realizan de forma individual para cada canal y luego se unen los resultados[2]. El inconveniente con este método es que introduce falsos colores[1].

2) Ordenamiento Condicional: Cada píxel de la imagen (vector de tres componentes) se ordenada mediante algún componente utilizando el método de ordenamiento Marginal mencionado anteriormente. Un componente se elige secuencialmente mediante alguna condición. El orden lexicográfico es un ejemplo de Ordenamiento Condicional, que emplea potencialmente todos los componentes disponibles de los vectores.

3) Ordenamiento Parcial: El vector se divide en grupos, de tal manera que entre los grupos se establece un orden.

4) Ordenamiento Reducido: Con este método de ordenamiento el primer paso es reducir los valores vectoriales a escalares y luego ordenarlos de acuerdo a su orden escalar natural. Sea X un conjunto en \mathbb{R} y se define una transformación $T: \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$, para este trabajo la transformada T se representa de la siguiente forma: $T: \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}$ Donde \mathbb{R}^3 representa el espacio a color RGB. Y \mathbb{R} representa el resultado de aplicar la función de transformación, que resultan ser valores escalares comparables.

III. TRABAJOS ANTERIORES

Este trabajo se basa en el artículo de investigación [3] y el la tesis doctoral[6] en el cual se muestra la utilización de ventanas para obtener características locales de la imagen. A continuación se resume las principales características del artículo[3]: Se establece un esquema mediante el cual se busca extender la morfología matemática sobre imágenes a color. Dicho esquema presenta tres partes principales que son:

A. Morfología basada en un Histograma plano

Se crea un histograma color para la imagen I que se obtiene de los componentes RGB y se define como:

$$h^I(c) = \{x \in I | I(x) = c\}$$

El histograma a color se obtiene recorriendo toda la imagen realizando un conteo (cantidad de apariciones de un determinado color dentro de la imagen) de la aparición de cada color, una vez obtenido el conteo para cada color, se realiza

$$f^I(x) = N - h^I(c)$$

para el conteo de cada color, donde N es el número de píxeles de la imagen. Con el cálculo anterior se obtienen valores que representan la reducción desde $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}$, con estos valores si se puede operar morfológicamente como una imagen en escala de grises. Este enfoque para obtener un histograma de una imagen a color será utilizado para este trabajo.

B. Morfología basada en suavizado del Histograma

La propuesta anterior puede funcionar con imágenes con pocos colores, pero podría no tener un buen resultado con imágenes con muchos colores. La solución propuesta es que cada píxel de la imagen $I = \{p_1 \dots p_n\}$ sea considerado como una unidad de carga, de esta manera el potencial creado por el píxel p_i con el color $c_i = (c_i^1, c_i^2, c_i^3)$ en cualquier punto $c_j = (c_j^1, c_j^2, c_j^3)$ en el espacio color sería:

$$V_{ij} = \begin{cases} I & \text{si } r_{ij} = 0 \\ \frac{1}{r_{ij}^d} & \text{si } r_{ij} \neq 0 \end{cases}$$

donde r_{ij} es la distancia (Euclidiana o Mahalanobis) en el espacio color elegido entre puntos c_i y c_j y d un parámetro de suavizado tal que $d \geq 1$. Una vez que todas las cargas hayan sido

ubicadas, el potencial de cada punto del espacio color se calcula como:

$$V_j = \sum_{i=1}^N V_{ij}$$

C. Morfología con Imágenes Similares

Al introducir la solución anterior, tiene un efecto negativo, debido al costo computacional que requiere el cálculo del potencial V_j por eso se plantea la utilización de un histograma color que se obtiene de un conjunto de imágenes similares, acumulando los valores de los píxeles. Con éste proceso se evita el coste computacional producido por el cálculo del potencial descrito en sub-sección anterior.

IV. PROPUESTA

En esta sección se presenta el método de ordenación vectorial a utilizar. El método pretende mejorar el esquema de la sección III. Morfología basada en un histograma plano que solo funciona para pocos colores.

A. Utilización de Ventanas

La imagen I antes del cálculo del histograma se divide en ventanas V_1, V_2, \dots, V_n de manera a obtener en cada ventana información de pocos colores. En caso de que el elemento estructurante intercepte dos ventanas durante la erosión o dilatación se debe sumar el histograma de los colores en los cual el elemento estructurante S intercepte. Entonces las ecuaciones definidas en la sección III quedan de la siguiente forma:

$$h_V^I(c) = \{x \in I_V | I_V(x) = c\}$$

$$f_V^I(x) = N - h_V^I(c)$$

donde N es el número de píxeles que posee la ventana.

B. Ordenamiento Lexicográfico

En caso que existan dos transformaciones iguales $f(x_1) = f(x_2)$ para píxeles $p_1 \neq p_2$ se utiliza esquema de ordenamiento de los colores denominado SMD (Suma, Máximo y Diferencia) RGB[5], que se fundamenta en el orden lexicográfico de parámetros relacionados con la percepción visual como son la intensidad, el tono y la saturación. Para considerar la intensidad, se emplea la suma S de los componentes R, G, B para la saturación, se utiliza el máximo M entre R, G, B y para el matiz, la diferencia D entre el máximo y el mínimo de RGB, para luego ordenar (RGB) siguiendo la prioridad rojo, verde y azul. El esquema de ordenamiento lexicográfico propuesto es el siguiente, dados p y q dos vectores con sus componentes rojo, verde y azul, tenemos:

$$p = \{p_r, p_g, p_b\}$$

$$q = \{q_r, q_g, q_b\}$$

$$S_p = p_r + p_g + p_b$$

$$S_q = q_r + q_g + q_b$$

$$M_p = \max(p_r, p_g, p_b)$$

$$D_p = \max(p_r, p_g, p_b) - \min(p_r, p_g, p_b)$$

$$p \leq q \leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } S_p < S_q \\ \text{Si no Si } S_p = S_q \text{ y } M_p < M_q \\ \text{Si no Si } S_p = S_q \text{ y } M_p = M_q \text{ y } D_p < D_q \\ \text{Si no Si } S_p = S_q, M_p < M_q, D_p = D_q \text{ y } p_G < q_G \\ \text{Si no Si } S_p = S_q, M_p < M_q, D_p = D_q \text{ y } p_G = q_G \text{ y } p_R \leq q_R \end{cases}$$

Con las propiedades anteriores se establece un criterio de orden a la hora de comparar los píxeles de las imágenes cuando existen píxeles con los mismos valores en RGB.

V. TRABAJOS FUTUROS

Una de las propiedades más importantes propuesta en éste trabajo es el uso de ventanas para obtener valores y locales de la imagen de tal manera que la función de transformación de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}$ que se propone tenga un comportamiento aceptable cuando se tienen imágenes con muchos colores. Por lo tanto un proyecto futuro puede ser el cálculo dinámico del tamaño de las ventanas según una imagen dada.

VI. CONCLUSIÓN

Un método alternativo de ordenamiento lexicográfico para matemática morfológica a color ha sido propuesto. Al agregar ventanas al método de ordenamiento propuesto en la sección III se pretende mejorar y obtener mejor rendimiento en la transformación $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ para imágenes reales en las cuales se tienen muchos colores.

REFERENCES

- [1] F.Ortiz. Procesamiento Morfológico de Imágenes en Color. Aplicación a la Reconstrucción Geodésica Tesis Doctoral. Universidad de Alicante, España, 2002.
- [2] F.Ortiz, 1998. OPTIVISIOM. Operaciones Morfológicas para el Tratamiento de Imágenes en Visión, Proyecto Fin de Carrera, Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal. Universidad de Alicante.
- [3] X.Benavent and E.Dura and F.Vegara and J.Domingo. Daly, Research Article, Mathematical Morphology for Color Images: An Image-Dependent Approach. Department of Informatics, School of Engineering, University of Valencia. Valencia, Spain.
- [4] V. Barnett, "The ordering of multivariate data". Journal of the Statistical Society A, vol. 139, no. 3 pp. 318–355, 1976.
- [5] W. Torres, "Procesamiento de imágenes a color utilizando morfología matemática". Universidad Central de Venezuela Caracas, Venezuela.
- [6] J.L. Vazquez, "A Color Morphological Ordering Method based on Additive and Subtractive Spaces". Universidad Nacional de Asunción. Facultad Politécnica - San Lorenzo, Paraguay.