

http://blog.sina.com.cn/s/blog_6635898a0100pfny.html 割点、桥、双连通分支

<https://www.byvoid.com/blog/scc-tarjan/> Tarjan 算法

POJ2186 【基础】

题目大意：

有 N ($1 \leq N \leq 10000$) 只奶牛，都希望自己是最受人欢迎的奶牛。因此 John 农夫做了一次调查，得出了 M ($1 \leq M \leq 50000$) 条奶牛们之间的评价。一对整数 (A, B) 意味着奶牛 A 认为奶牛 B 是受人欢迎的。这个评价具有传递性，即如果奶牛 A 认为奶牛 B 受人欢迎，奶牛 B 认为奶牛 C 受人欢迎，那么奶牛 A 也认为奶牛 C 受人欢迎，即使奶牛 A 没有直接表达出来。现在请求出有多少奶牛，他们都被别的奶牛认为是受人欢迎的。

输入：

第一行有两个整数 N 和 M 。

接下来有 M 行，每一行有两个整数 A_i 、 B_i ，表示奶牛 A_i 认为奶牛 B_i 是受人欢迎的。

输出：

一行，一个整数，即所求。

题解：

这题其实是相当基础的求强连通分量缩点然后求出度为 0 的点，我用它来写了我的 Tarjan 模板。但是这题的输出要求我一开始理解错了，不知道要输出什么。其实意思是，如果有一群奶牛，互相通过传递关系都认为彼此是受人欢迎的，那么输出这群奶牛的数量。如果有超过一群以上的奶牛在其内部都这样互相认为，那么就输出 0。说白了，就是如果缩点后只有一个点的出度为 0，那么输出缩点前这个点是由多少个点组成的。唉，语文不好，做题都吃力啊……

POJ2553 【基础】

题目大意：

在一个有向图中我们规定：若节点 v 所有能到达的点 $\{w_i\}$ ，都能反过来到达 v ，那么称节点 v 是 sink。给出一个图的点和边的信息，请求出所有的 sink 点。

输入：

输入包含若干组测试数据，每一组输入数据有两行。第一行第一个整数 N ($1 \leq N \leq 5000$) 表示有多少个点， $N=0$ 表示输入数据结束。接下来有一个整数 V ，表示有多少条边。第二行有 V 对整数，每一对整数描述了一条有向边的起始点和终点。

输出：

对于每一组测试数据，输出一行，包含一个升序序列，这个序列中的每一个为一个点的编号，即原图中的 sink 点。

题解：

这题很基础，先缩点，然后求原图中出度为 0 的点。我懒得写快排了直接桶排了一次。

P0J1659 【基础】

原题为中文，故题目大意与输入输出请见原文。

题解：

（这题似乎和连通分量无关，我只是看到别人的 POJ 题目分类里把这题划分到了连通类的题目里所以就做了。）

这题用的是 Havel-Hakimi 定理，也就是在无向图中给出所有点的度数，组成一个度序列，要求判断是否可图。Havel 定理的判断流程如下：

- 1、对度序列进行降序排序；
- 2、设最大度数为 Max_k ，如果最大度数 $>$ 剩余度数大于 0 的点数 $+1$ ，那么不可图；
- 3、对序列中第 2 至第 Max_k+1 的各点度数减一，如果出现负数，那么不可图，否则回到第 1 步。

实际上这是一个很简单的贪心思想。所以实现起来也很容易。不多说了，看代码吧，足够清晰了。

P0J3180 【基础】

题目大意：

（题目的意思比较不好叙述，我直接抽象出来说了。）给出 N ($2 \leq N \leq 10000$) 个点和 M ($2 \leq M \leq 50000$) 条单向边，求有多少个连通分量包含的顶点数大于等于 2。

输入：

第一行有两个整数 N 和 M 。接下来有 M 行，每一行有两个整数 A 和 B ，表示一条从 A 向 B 的边。

输出：

一行，一个整数，即含大于等于两个顶点的连通分量的数量。

题解：

缩点后直接统计即可。

POJ1144 【基础】

题目大意：

给出一个无向图，求出有多少个割点。

输入：

有若干组测试数据。每一组测试数据的第一行有一个整数 n ，表示有 n ($1 \leq n \leq 100$) 个点， $n=0$ 时测试数据结束。接下来有若干行，每一行第一个整数 u 表示这一行描述的是以 u 为起点的边，接下来有若干个整数 v_i 表示有一条边 $u-v_i$ ， $u=0$ 时表示这一组测试数据结束。

输出：

对于每一组测试数据，输出一个整数，即有多少个割点。

题解：

这题是一个模板题，我对照

http://blog.sina.com.cn/s/blog_6635898a0100ph2d.html 写了一个求割点和桥的模板。至于原理，参见

<http://blog.csdn.net/tclhl23/article/details/6705392>。由于此前我已经写过了 Tarjan 缩点求强连通分量，所以感觉比较好理解。

可能需要说明的一点是，“ u 不为树根，且满足存在 (u, v) 为树枝边 (或称父子边，即 u 为 v 在搜索树中的父亲)，使得 $dfn[u] \leq low[v]$ ，则 u 为割点”，因为 $dfn[u] \leq low[v]$ ，所以显然这个两个点不在同一个连通分量中，并且 u 或 v 所处的连通分量里的点的数量不为 1（因为不是根）。

POJ1523 【基础】

题目大意：

给出一个无向图，求出其割点的数量，并且求出去掉每一个割点后原图分成多少个连通分量。

输入：

有若干组测试数据。每一组测试数据有若干行，每一行有两个整数表示无向图中的一条边，或者一个 0 表示这一组测试数据的结束。所有测试数据最后以一个 0 作为结束。无向图中的点的数量不超过 1000 个，假定一个图里面的点从 1 开始编号，并且是连续递增的。

输出：

对于每一组测试数据，如果有割点，按如下格式输出：

Network #测试数据组序号

SPF node 割点 1 编号 leaves x1 subnets

SPF node 割点 2 编号 leaves x2 subnets

.....

其中 x_i 表示在图中去掉某一个割点后产生的连通分量数量。

如果没有割点，输出：

Network #测试数据组序号

No SPF nodes

两组输出之间需要有一个空行进行分割。

题解：

先求割点，然后枚举每一个割点裸 dfs 求连通分量数量。

POJ3694 【中等】

题目大意：

给出一个无向图，有 N 个点和 M 条边 ($1 \leq N \leq 100000$, $N-1 \leq M \leq 200000$) 求出有多少条割边（桥），以及每加入一条新的边以后还剩下多少条割边。假定所有的点从 1 到 N 进行编号，一开始的时候全图是连通的。

输入：

有若干组测试数据。每一组测试数据的第一行有两个整数 N 和 M ，当 $N=M=0$ 时输入数据结束。接下来有 M 行，每一行有两个整数 u, v ，表示在 u, v 之间有一条边。接下来有一行，包含一个整数 Q ，表示将加入多少条边。接下来有 Q 行，每一行按上述相同方式描述一条边。

输出：

对于每一组测试数据，先输出一行 “Case %测试数据组编号%: ”，然后对每一条新加入的边，输出一行，包含一个整数，即加入了这一条边以后还有多少条割边。

题解：

我一开始很傻很天真地去写了一个每加入一条边求一次割边的代码，结果发现我操有 1000 个测试数据每个数据最多有 100000 个点，绝对会爆掉啊，果断上网找题解。网上的题解提到了一个东西，那就是 LCA 最小公共祖先，可以用来解决加边的问题。所谓 LCA，一定是针对一棵树的，在这里就是 DFS 遍历各点的搜索树，在 $dfn[]$ 数组里。我还没学相关的 LCA 算法，就按着网上的代码自己写了一个很裸的搜索，所以最后跑出来的效率并不高。需要提到的一点是，我这里存割边的方式和此前的有些不同（因为没有套模板，自己重新写了一个 Tarjan）， $bridge[x]=1$ 表示有一条桥的“终点”（按搜索顺序较晚的那一点）是 x 。

P0J1236【中等】

题目大意：

有一些学校之间连成了网络，在学校与学校之间存在一个协议：每个学校都有一张分发表，上面列有其他若干间学校，一旦这个学校收到新的软件，它必须向表上的其他学校进行分发，但是一份拷贝只能传给一个学校，无法复制后同时传给多个学校。现在给出所有的学校以及他们目前的分发表，问：1、如果需要所有的学校都收到同一份软件，那么一开始的时候最少要多少分拷贝来进行分发？2、如果只有一份拷贝，那么需要添加几条边？

输入：

输入的第一行有一个整数 N ($2 \leq N \leq 100$)，表示在整个网络中有 N 间学校，依次编号为 1 到 N 。接下来有 N 行，第 i 行有若干个整数，每一个整数 D_{ij} 表示第 i 间学校会向第 j 间学校进行分发，但第 j 间不一定会向第 i 间分发。 $D_{ij}=0$ 时这一行结束。

输出：

两行。第一行包含一个整数，即任务 1 的答案。第二行包含一个整数，即任务 2 的答案。

题解：

首先用 Tarjan 进行缩点，如果缩出来只剩下一个点，那么自然只需要一份拷贝，不需要加边。如果缩出来的点数大于 1，那么对缩点后的图统计各点的出入度数（用的是缩点前的边，不过没有关系），对于所有入度为 0 的，必须给一份拷贝，否则没有办法分发到软件。而新增边的数目是出度为 0 的点的数量和入度为 0 的点的数量中的较大值。入度为 0 意味着这是连通子树的根，出度为 0 的点意味着这是连通子树的叶。要让所有的连通子树都强连通，任意两科联通子树只要 A 根连 B 叶 B 根连 A 叶即可强连通，所以加上的边的数量应该是根节点和叶节点中较多的一个数。这第二问的确不太好想。

POJ2762 【中等】

题目大意：

有若干个洞穴，洞穴之间有一些单向的通道，如果任给两个洞穴 x 和 y ，可以从 x 到 y 或者从 y 到 x ，那么这些洞穴群就可以被 Jiajia 使用。现在给出一个洞穴的信息，请判断这些洞穴是否可以被 Jiajia 使用。

输入：

输入的第一行有一个整数 T ，表示有 T 组测试数据。

每一组测试数据的第一行有两个整数 n ($0 \leq n \leq 1001$) 和 m ($m < 6000$)，表示有 n 个洞穴和 m 条通道。接下来的 m 行每一行有两个整数 u 和 v ，表示一条通道从 u 通向 v 。

输出：

T 行，每行一个单词 “Yes” 或者 “No”，分别对应洞穴是否可以被 Jiajia 使用。

题解：

这题和 POJ1236 正好形成一个对比。因为此题不要求强连通，而是弱连通，即单向连通即可。所以缩点后，只要全图变成一条链即可。如果有两个或以上的

点的入度数为 0，那么显然不行。只有一个点入度数为 0 时，最省事的做法就是从这个点开始深搜一次，如果搜索出来的路径长度等于缩点后的点数，那么显然是可以的。我很懒，没有二次建图，直接上去暴搜了。

POJ3352 【中等】

题目大意：

有 n ($3 \leq n \leq 1000$) 个旅游景点，之间有 r ($2 \leq r \leq 1000$) 条双向道路互相连接。现在为了防止突发意外，要求任何两个景点间要有两条不同的通道可以到达。不同的通道是指两条通道没有公共道路，但是可以有公共点。请求出当前道路状况下，最少需要增加多少条道路才可以满足要求。

输入：

第一行有两个整 n 和 r 。

接下来有 r 行，每一行有两个整数 u, v ，表示有一条双向道路连接 u 和 v 这两个景点。

输出：

一行，包含一个整数，即最小需要增加的道路数。

题解：

这一题是求双连通分量的。先用 Tarjan 进行缩点，注意这里我加边的时候加了双向边，所以 Tarjan 的时候用一条要把两条都标记为已经用了。于是根据 DFN 和 Low 的定义，所有被缩成一个点的那些点都是双连通的（因为双向边，所以是双连通）。而在剩下的点里，求出那些出度为 1 的点有多少个，因为出度为 2 或以上的点有两条双向边出去，一定可以双连通。设求出来的数是 t ，那么只要加上 $(t+1) \div 2$ 条边就好了，因为加一条消掉两个点。

POJ3177 【中等】

题目大意：

有 F ($1 \leq F \leq 5000$) 个牧场现在一个牧群经常需要从一个牧场迁移到另一个牧场。奶牛们已经厌烦老是走同一条路，所以有必要再新修几条路，这样它们从一个牧场迁移到另一个牧场时总是可以选择至少两条独立的路。现在 F 个牧场的任何两个牧场之间已经至少有一条路了，奶牛们需要至少要有两条。

给定现有的 R ($F-1 \leq R \leq 10000$) 条直接连接两个牧场的路，计算至少需要新修多少条直接连接两个牧场的路，使得任何两个牧场之间至少要有两条独立的路。

两条独立的路是指没有公共边的路，但可以经过同一个中间顶点。

输入：

第一行有两个整数 F 和 R 。

接下来有 R 行，每一行有两个整数 u, v ，表示有一条双向道路连接 u 和 v 这两个牧场。

输出：

一行，包含一个整数，即最小需要增加的边数。

题解：

POJ3352 的重边版。输入输出格式完全一样，甚至代码可以套用。不过需要处理重边数据。一开始的时候我把 `map` 数组放在了 `main` 函数里声明，结果运行报错 `SIGSEGV`。我担心内存爆掉了，但是上网查了一下别人的代码，这个数据量还是安全的。查了一下，发现是内存没有初始化就被使用了，于是试着把声明调到外面去变成全局的，果然就没有错了。这是一个经验教训啊。看来某些时候，写程序并不能像我们 C 语言老师说的那样“耦合性要低，变量都尽量在函数内声明而尽量少用全局变量”啊。

POJ3114 【中等偏上】

题目大意：

2015 年，由于甜/咸、A/N、雪菜/冬马等党争在网络上大规模爆发使得民众不安，第三次冲击战争开始了。各国互相都往对方国内派遣了间谍。战争期间各国都效仿某国的防火长城，对电讯进行了管制，只有慢速的邮件可以供间谍使用，因此从一个城市向另一个城市发送邮件需要一定的时间。有些城市与城市之间有信息传输协议，可以允许从一个城市向另一个城市发送邮件（反过来不一定可以），无论是在同一国内还是在两个国家里。如果城市 A 无法直接传输一份邮件到城市 C ，那么他可以将邮件传输给城市 B （如果城市 B 和 A 、 C 都有相应的传输协议），让城市 B 帮他们进行转发。但是在一国内，城市与城市之间仍可通过各种电讯形式即时发送消息，而不用通过邮件这种费时的方式。并且，如果有若干个城市属于同一个国家，当且仅当她们之间任意某一个城市的消息可以传递到任意另一个城市。现在你的手下整理了各国之间邮件传递所需要的时间，求从一个城市到另一个城市传递一则消息需要的最少时间。

输入：

有若干组测试数据。每一组测试数据的第一行有两个整数 N ($1 \leq N \leq 500$) 和 E ($0 \leq E \leq N^2$)，表示一共有 N 个城市和 E 份城市间的传输协议。接下来有 E 行，每一行有三个整数 A_i 、 B_i ($1 \leq A_i, B_i \leq N$) 和 C_i ($1 \leq C_i \leq 1000$)，即 A_i 可以向 B_i 传递邮件，需要的时间是 C_i 。接下来有一行，包含一个整数 K

($0 \leq K \leq 100$)，代表有 K 条查询。接下来 K 行每一行有两个整数 A_j 和 B_j ，表示查询从 A_j 到 B_j 传递邮件需要多久。 $N=0$ 时输入结束，测试数据之间没有空行。

输出：

对于每一条查询，输出一行，包含一个整数，即最小需要的时间。如果无法传递，输出“Nao e possivel entregar a carta”。两组测试数据的输出之间需要有一个空行。

题解：

缩点以后求最短路。我缩点后跑了 scc 次的 SPFA 但是还是超时了>_<估计是边的转化太慢了吧……………

POJ1904【难】

题目大意：

某国王有 N 个儿子 ($1 \leq N \leq 2000$ ，卧槽这国王太能生了，整一种猪啊)，这 N 个儿子都比较花心，每人喜欢 1 个或以上的妹子。魔法师为每个儿子都安排了一个他喜欢的妹子，并把这个名单呈报给了国王。国王看完以后大喜，但是希望知道，在已经匹配好的这 N 个妹子里，他的每个儿子一共可以选择哪几个妹子，而依然让所有的王子都能找到妹子（举个例子，ABC 三位王子都喜欢甲乙丙三位妹子，一开始的匹配是 A-甲、B-乙、C-丙，但是 A 可以 NTR 掉 B，也就是 A-乙、B-甲，他们三人依然都能有妹子）。虽然每一个王子只能娶一个妹子，不过只要王子喜欢某个妹子就可以娶她，而不需要考虑妹子的感受。魔法师显然不能胜任这个任务，所以请写一个程序解决这个问题。

输入：

文件第一行有一个整数 N 。接下来有 N 行，第 i 行描述了编号为 i 的王子喜欢的妹子的情况。第 i 行一开始有一个整数 K_i ，表示第 i 个王子面对这 N 个妹子喜欢 K_i 个妹子，然后后面有 K_i 个整数，是他所喜欢的 K_i 个妹子的编号。最后一行有 N 个整数，即魔法师已经匹配好的名单，第 i 个数 M_i 表示第 i 个王子和编号为 M_i 的妹子可以结婚。一行内的所有整数用空格分开。

输出：

N 行，第 i 行输出编号为 i 的王子情况。先输出一个整数 K_i ，表示这个王子可以选择 K_i 位妹子，而依然让所有的王子与妹子都有匹配。接下来输出 K_i 个整数，升序输出这位王子可以选择的 K_i 位妹子的编号。一行内的所有整数用空格分开。

题解：

这题一开始我就觉得想用类似于 POJ 1486 的方法去解，想了一下以后发现这肯定超时——一次二分匹配的复杂度是 $O(N \cdot \sqrt{E})$ ，而且还要双重枚举呢， N 最大 2000，肯定超了每个数据 2000ms 的范围了。上网搜了一下题解，发现有一种绝妙的方法，那就是用连通分量去做。假设某王子 A 要 NTR 掉另一个王子 B（A 抢了 B 的原配），那么 B 必然也要去 NTR 别的王子……最后 A 也会被 NTR，否则 A 的原配没办法被安置。若王子喜欢某妹子，那么由王子向该妹子连一条有向边，而原配的话就在两人之间连一条双向边。那么当一群人互相 NTR 完以后，在图上画出来就是一个环，也就是一个连通分量。那么在连通分量内，一个王子无论选择哪一位他喜欢的妹子，被 NTR 的另一位王子一定可以通过 NTR 别人来使整一群人互相 NTR 而构成新的匹配方案。

顺带，这题的时间大都耗费在输入输出上了。如果单纯使用 `scanf` 和 `printf`，起码要跑到 8000~9000ms，但是网上有人想到了用 `getchar` 和 `putchar` 来写 IO 外挂，效果超群地跑到了 500~600ms！源码有三份，读者可以自己试着去提交来对比一下。顺带一提，IO 外挂只有在 GCC 和 G++ 下有效，C 和 C++ 无效。