Algoritmi

13. marec 2011

Kazalo

Poglavje 1

Pregled metod reševanja

1.1 Deli in vladaj

Pri metodi deli in vladaj problem delimo na manjše podprobleme, dokler jih ne znamo rešiti direktno, nato pa te delne rešitve sestavljamo v končno rešitev. Navadno je take algoritme najlaže implementirati rekurzivno.

Nekaj problemov, ki jih rešujemo s to metodo:

- Urejanje (s porazdelitvami, z zlivanjem)
- Učinkovito iskanje v urejenem seznamu (binarno iskanje)
- Množenje števil (Karatsubov algoritem)
- Množenje matrik (Strassenov algoritem)

1.2 Dinamično programiranje

Dinamično programiranje je metoda, pri kateri rešujemo manjše podprobleme in jih nato sestavljamo v večje, dokler ne sestavimo končne rešitve. Če so podproblemi odvisni med seboj je dinamično programiranje, v primejavi s metodo deli in vladaj, prostorsko zahtevnejše (saj shranjujemo vse vmesne rešitve), a časovno učinkovitejše (ker tako podprobleme rešujemo le enkrat).

Izraz dinamično programiranje je skoval Richard Bellman že pred računalniškim programiranjem, ko se je izraz matematično programiranje uporabljal kot sopomenka optimizaciji.

Nekaj problemov, ki jih rešujemo s to metodo:

- Izračun členov Fibonaccijevega zaporedja
- Reševanje igre hanojski stolpi
- Neomejeni problem nahrbtnika

1.3 Požrešna metoda

Pri požrešni metodi se, vedno ko imamo možnost izbire, odločimo za lokalno najboljšo izbiro in (za razliko od dinamičnega programiranja) ne hranimo prejšnjih odločitev, ter se ne vračamo nazaj.

Nekaj problemov, ki jih rešujemo s to metodo:
Pri NP-polnih problemih s požrešnimi algoritmi ne dobimo vedno optimalne rešitve, se ji pa navadno zelo približamo, če uporabljamo pametne hevristike:

- Problem trgovskega potnika
- Neomejeni problem nahrbtnika

Obstaja pa precej problemov, kjer lokalno najbolša izbira vodi tudi do končne najboljše rešitve:

- Preprosti problem nahrbtnika

- Iskanje najkrajših poti v grafu (Dijkstrov algoritem)
- Iskanje minimalnega vpetega drevesa (Primov in Kruskalov algoritem)
- Izgradnja optimalnega drevesa pri Huffmanovem kodiranju.

1.4 Sestopanje

Sestopanje je malo bolj pametno preiskovanje celotnega prostora rešitev, kjer s pomočjo hevristik odrežemo določene veje drevesa rešitev, če ugotovimo da tam zagotovo ni rešitve. V najslabšem primeru lahko metoda še vedno preišče celoten prostor rešitev.

Nekaj problemov, ki jih rešujemo s to metodo:

- Problem skakačevega obhoda
- Problem popolnega pokritja (npr. izdelava križanke, problem osmih dam, ...)
- Problem trgovskega potnika

1.5 Linearno programiranje

Linearno programiranje je nastalo že precej pred računalniškim programiranjem in je optimizacijska metoda za iskanje maksimalne vrednosti kriterijske funkcije, glede na omejitve podane z linearnimi neenačbami.

1.5.1 Simpleksni algoritem

Algoritem rešuje linearne programe tako, da se sprehaja po ogljiščih konveksne poliederske množice(KPM), ki jo tvori presek danih neenačb (v 2D je KPM konveksen poligon, v 3D polieder, ...). Pri sprehanjanu se vedno premikamo le proti boljšim rešitvam, ko enkrat to ni več mogoče smo dosegli maksimum in algoritem zaustavimo.

Predpostavlja se, da začenjamo iz koordinatnega izhodišča ($\forall x_i = 0$), kadar pa izhodišče ne pripada KPM, koordinatni sistem ustrezno preslikamo (premik, vrtenje, zrcaljenje, ...).

Časovna zahtevnost algoritma je v najslabšem primeru eksponentna, v praksi pa se algoritem dobro obnese, saj se sprehaja le po ogljiščih KPM in zazna, ko prispe v maksimum kriterijske funkcije.

Poglavje 2

Teorija števil

2.1 Praštevila

Praštevila so naravna števila, ki so deljiva le z 1 in sama s seboj. Ostalim naravnim številom, razen 1, pravimo sestavljena števila, saj jih je moč sestaviti kot produkt praštevil.

Kot je dokazal že Evklid[**?**], obstaja neskončno praštevil. Uporabimo preprost dokaz z protislovjem - predpostavimo, da imamo množico števil, ki vsebuje vsa praštevila $P = \{2, 3, 5, \ldots, p\}$. Če sedaj vsa praštevila zmožimo in prištejemo 1, dobimo število, ki ga ne deli nobeno izmed teh praštevil. Ker obstajajo le praštevila in sestavljena števila, sklepamo, da je dobljeno število lahko le praštevilo, ali pa število sestavljeno iz praštevil, ki jih ni v naši začetni množici. Oboje pa nas privede v protislovje s predpostavko, saj smo našli še eno praštevilo ali pa dokazali, da druga praštevila zunaj množice obstajajo.

$$
\begin{array}{rcll}
(2)+1 & = & 3 & \text{(je praštevilo)} \\
(2*3)+1 & = & 7 & \text{(je praštevilo)} \\
(2*3*5)+1 & = & 31 & \text{(je praštevilo)} \\
(2*3*5*7)+1 & = & 211 & \text{(je praštevilo)} \\
(2*3*5*7*11)+1 & = & 2311 & \text{(je praštevilo)} \\
(2*3*5*7*11*13)+1 & = & 30031 = 59*509 & \text{(ni praštevilo)} \\
\ldots & & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

2.1.1 Preprosti algoritem za ugotavljanje praštevilskosti

Algoritem preveri, ali je parameter a deljiv s katerim izmed naravnih števil v intervalu $[2, \sqrt{a}]$ in če takega števila ni, je a praštevilo. Razlog, zaradi katerega lahko praštevilskost preverimo s tem intervalom (kljub temu, da bi tudi $\frac{a}{2}$ lahko delil a), leži v tem, da če je parameter sestavljen, je največji možen razcep na prafaktorje $\sqrt{a} * \sqrt{a}$.

Preprosti algoritem za preverjanje praštevilskosti

```
1  public static boolean isPrime(int a) {
2      if(a<=1) return false;
3
4      for(int i=2; i<=Math.sqrt(a); i++) if(a%i==0) return false;
5
6      return true;
7  }
```

Algoritem je moč nekoliko pohitriti tako, da že pred zanko preverimo ostanek pri deljenju z 2, nato lahko zanko začnemo s 3 in števec v vsaki iteraciji povečamo za 2.

2.2 Največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik

Največji skupni delitelj, oziroma angleško greatest common divisor (GCD), je največje naravno število, ki deli vsa dana števila.

2.2.1 Evklidov algoritem

Evklidov algoritem za izračun GCD je verjetno eden najstarejših algoritmov, ki so še vedno v uporabi. Prvi ohranjen zapis je v Evklidovih Elementih[**?**], že prej pa naj bi bil znan Pitagorejcem.

Algoritem temelji na ugotovitvi, da se GCD ne spremeni, če od večjega števila odštejemo manjšega. Če to odštevanje ponavljamo, dokler ena izmed spremenljivk ne doseže 0, je vrednost druge spremenljivke ravno GCD. Kasneje so ugotovili, da isto velja tudi za ostanek po deljenju, le da je potrebno manj korakov za izračun, zato raje uporabljamo ta način.

Evklidov algoritem za iskanje največjega skupnega delitelja

```
1  public static int GCD(int a, int b) {
2      if(a==0) return b; else
3      if(b==0) return a; else
4      if(a>b) return GCD(b, a%b); else
5      return GCD(a, b%a);
6  }
```

2.2.2 Najmanjši skupni večkratnik

Najmanjši skupni večkratnik je najmanjše naravno število, ki je večkratnik danih naravnih števil. Lahko ga izračunamo iz največjega skupnega delitelja po preprosti formuli:

$$\frac{a * b}{\gcd(a, b)}$$

2.3 Fibonaccijevo zaporedje

Fibonacci je bil eden bolj znanih srednjeveških matematikov, ki je med drugim, pisal tudi o zaporedju, ki je kasneje dobilo ime po njem[**?**]. Zaporedje je predstavil na primeru idealizirane rasti populacije zajcev.

Recimo, da vsak par zajcev živi dve sezoni in vsako sezono ustvari en par potomcev. Imamo neko pokrajino, kjer zajcev še ni in začnemo z enim mladim parom in nato vsako sezono preštejemo nove pare. Čez eno sezono imamo en nov par, v drugi sezoni imajo potomce prva in druga generacija, tako da imamo dva nova para, hkrati pa prva generacija odmre. Naslednjo sezono imamo tri nove pare, umre pa druga generacija. Preostali pari ustvarijo pet novih parov, umre tretja generacija... vidimo, da je število potomcev v resnici enako velikosti zadnjih dveh generacij.

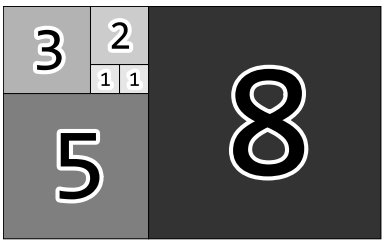
Prvih nekaj členov Fibonaccijevega zaporedja je tako: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$, kar lahko zapišemo z rekurzivno enačbo:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & ; \quad n = 0; \\ 1 & ; \quad n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & ; \quad n >= 2. \end{cases}$$

Kvocient členov Fibonaccijevega zaporedja konvergira proti zlatemu rezu. To je moč prikazati tudi grafično, če člene zaporedja narišemo kot kvadrate ustreznih velikosti - dobimo namreč pravokotnik, katerega razmerje stranic se z dodajanjem novih členov približuje zlatemu rezu:

Člena	Kvocient
$1, 2$	2
$2, 3$	1.5
$3, 5$	$1.66\overline{6}$
$5, 8$	1.6
$\ldots$	$\ldots$
$987, 610$	$1.618033\ldots$

Zlati rez:
$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034\ldots$



Ena izmed posplošitev zaporedja so t.i. Fibonaccijeva zaporedja višjih redov. Če spet vzamemo Fibonaccijevo zgodbo z zajci, zaporedje višjega reda pomeni le, da zajci živijo k let, namesto dveh. Pri zaporedju k-tega reda, torej seštejemo prejšnjih k členov zaporedja.

Rekurzivno enačbo za Fibonaccijevo zaporedje k-tega reda zapišemo zapišemo kot:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & ; \quad n < k; \\ 1 & ; \quad n = k; \\ F(n-1) + F(n-2) + \cdots + F(n-k) & ; \quad n > k. \end{cases}$$

2.3.1 Algoritem za izračun prvih n členov Fibonaccijevega zaporedja

Pri tem algoritmu najprej nastavimo prvih $k-1$ členov na nič in k-tega na ena, nato pa nove člene izračunamo kot vsoto zadnjih k členov zaporedja.

Algoritem za izračun prvih n števil Fibonaccijevega zaporedja reda k

```
1  public static int[] Fib(int n, int k) {
2      // tabela vrednosti zaporedja (na začetku 0,0,...,0,1,0,...)
3      int[] out = new int[n];
4      out[k-1]=1;
5
6      // generiramo zaporedje naprej - nov element je vsota zadnjih k elementov
7      for(int i=k; i<n; i++)
8          for(int j=0; j<k; j++)
9              out[i] += out[i-j-1];
10
11     return out;
12 }
```

2.3.2 Algoritem za ugotavljanje pripadnosti števila Fibonaccijevemu zaporedju

Algoritem računa člene Fibonaccijevega zaporedja k-tega reda in se ustavi, ko naleti na člen, ki je večji ali enak podanemu parametru. Pri računanju potrebujemo le zadnjih k členov, ki pa bi jih bilo dobro hraniti tako, da nam ne bi bilo treba kakorkoli premetavati elementov tabele. Tu lahko uporabimo krožno tabelo, ki jo lahko simuliramo z navadno tabelo, če elemente naslavljamo po modulu velikosti tabele. Za izračun novega elementa bi lahko vedno znova računali vsoto vseh elementov, a to ni potrebno, saj je pri Fibonaccijevem zaporedju naslednji člen na položaju i v tabeli mogoče preprosto izračunati:

$$\text{naslednjiClen} = 2 \cdot \text{trenutniClen} - \text{tabela}[i]$$
$$\text{tabela}[i] = \text{trenutniClen}$$

Na primeru Fibonaccijevega zaporedja tretjega reda računamo tako:

Elementi tabele	Stara vsota	Nova vsota
0 0 1	–	1
$\underline{1}$ 0 1	1	2
1 $\underline{2}$ 1	2	4
1 2 $\underline{4}$	4	7
$\underline{7}$ 2 4	7	13
7 $\underline{13}$ 4	13	24
7 13 $\underline{24}$	24	44

Algoritem za preverjanje, ali je število del Fibonaccijevega zaporedja reda k

```
1  public static boolean isFib(int a, int k) {
2      if (a==0) return true;
3
4      // tabela zadnjih k vrednosti zaporedja (na začetku 0,0,...,0,1)
5      int[] store = new int[k];
6      store[k-1]=1;
7
8      int sum=1;
9
10     // kaže na mesto v tabeli, ki ga bomo prepisali
11     int pos=0;
12
13     while(a>sum) {
14         int oldSum = sum;
15         sum = 2*sum-store[pos%k];
16         store[pos%k] = oldSum;
17
18         pos++;
```

```
19        }
20
21        return (sum==a); // a je člen zaporedja
22    }
```

Poglavje 3

Iskalni algoritmi

3.1 Binarno iskanje

Binarno iskanje je učinkovit algoritem za iskanje v urejeni tabeli.
Algoritem temelji na strategiji deli ni vladaj in sicer deluje tako, da na vsakem koraku razpolovi velikost intervala tabele, v katerem išče. To stori tako, da primerja element na sredini intervala, s ključem, ki se išče. Če je sredinski element manjši od ključa, naslednik sredinskega elementa v tabeli postane nova spodnja meja, če je sredinski element večji od ključa, pa je naslednik sredinskega elementa v tabeli nova zgornja meja. Iskanje se zaključi, ko naletimo na element, ki je enak ključu, če takega elementa v tabeli ni, pa se iskanje zaključi, ko se zgornja in spodnja meja intervala preiskovanja prekrijeta.

Algoritem binarnega iskanja oz. bisekcije v urejeni tabeli

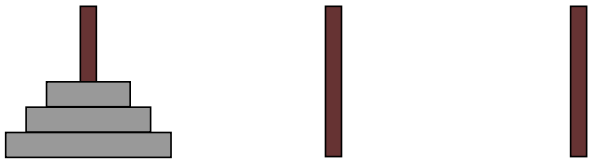
```
1  public static int binarySearch(int a[], int key) {
2      int left = 0, mid, right = a.length-1;
3
4      while(left<=right) {
5          mid = (left+right)>>>1;            // sredina intervala
6          if(a[mid]<key) left = mid+1; else  // premaknemo spodnjo mejo
7          if(a[mid]>key) right = mid-1; else // premaknemo zgornjo mejo
8          return mid;                        // našli smo iskani element
9      }
10     return -1; // iskanega elementa ni v tabeli
11 }
```

Poglavje 4

Matematične in logične igre

4.1 Hanojski stolpi

Hanojski stolpi je igra, ki jo sestavljajo tri palice in nekaj diskov različnih velikosti. Na začetku so diski urejeni od najmanjšega do največjega po velikosti na prvi palici, cilj igre pa je premakniti vse diske s prve palice na drugo, pri čemer ne moremo položiti večjega diska na manjšega in s palice lahko dvignemo le zgornji disk.



4.1.1 Najmanjše število premikov glede na število diskov

Če hočemo iz začetnega položaja premakniti prvi(zgornji) disk, to lahko storimo z enim premikom, če pa želimo premakniti disk pod njim, moramo najprej premakniti prvega, šele nato drugega. Po teh dveh premikih je za nadaljevanje igre potrebno eno palico sprostiti, kar dosežemo s premikom prvega diska na drugega - skupaj trije premiki. Če bi iz začetnega položaja želeli premakniti tretji disk, bi najprej s tremi premiki premaknili prva dva diska na tretjo palico, tretji disk na drugo palico, potem pa spet s tremi premiki prvi in drugi disk na drugo palico - skupaj sedem premikov. Za premik četrtega diska pa bi najprej premaknili prve tri, nato četrtega in prve tri na četrtega - petnajst premikov.

Algoritem za izračun najmanjšega števila premikov je zelo preprost, ga je pa bolje kot z očitno rekurzijo, implementirati z uporabo dinamičnega programiranja:

Algoritem za izračun najmanšega števila premikov pri igri Hanojski stolpi

```
1  public static int towersOfHanoiMoves(int n) {
2      int moves=0;
3      for(int i=0; i<n; i++)
4          moves = moves*2+1;
5
6      return moves;
7  }
```

4.1.2 Rekurzivni algoritem za reševanje igre Hanojski stolpi

Algoritem pokličemo s številom diskov, nato pa algoritem v vsakem klicu opravi tri stvari:

- rekurzivno premakne vse manjše diske na eno od palic
- premakne trenutni disk
- rekurzivno premakne vse manjše diske na trenutni disk

Rekurzivni algoritem za reševanje igre Hanojski stolpi

```
1  public static void towersOfHanoi(int n, int source, int dest, int by) {
```

```
2       if(n==1) {
3           System.out.println(source+"␣->␣"+dest);
4       } else {
5           towersOfHanoi(n-1, source, by,   dest);
6           towersOfHanoi(1,   source, dest, by);
7           towersOfHanoi(n-1, by,     dest, source);
8       }
9   }
```

Poglavje 5

Grafi

Graf formalno podamo kot par vozlišč V in povezav E med vozlišči: $G = \langle V, E \rangle$. Tudi v programih lahko uporabimo tak zapis, ampak so ponavadi bolj ugodni drugi zapisi, npr. seznam sosednosti (za vsako vozlišče imamo seznam povezanih vozlišč), ali pa matriko sosednosti (kvadratna matrika vozlišč, ki ima 1 kjer povezava obstaja in 0, kjer je ni).

5.1 Eulerjev in Hamiltonov graf

5.1.1 Eulerjev graf

Graf je Eulerjev, kadar vsebuje Eulerjev cikel, torej tak sprehod, ki vsako povezavo uporabi natanko enkrat in se na koncu vrne v izhodišče. Multigraf je nadgradnja navadnjih grafov s tem, da dovolimo več vzporednih povezav med dvema vozliščema in dovolimo tudi povezave vozlišč samih vase. Tudi multigraf je lahko Eulerjev.

Psevdokoda Fleuryjevega algoritma za iskanje Eulerjevega cikla

```
0  Izberi začetno vozlišče
1  Prečkaj poljubno povezavo, z izjemo mostu, ki ga izberemo le, če ni boljše izbire
2  Izbrano povezavo odstrani, če je bil odstranjen most, pa odstrani še vse točke, ki so ostale ↩
       izolirane
3  Končaj, ko ni več povezav, sicer ponovi
```

5.1.2 Hamiltonov graf

Graf je Hamiltonov, kadar vsebuje Hamiltonov cikel, torej tak sprehod, ki vsako vozlišče obišče natanko enkrat in se na koncu vrne v izhodišče.

5.2 Iskanje maksimalnega pretoka skozi graf

Predstavljamo si, da imamo nek vir tekočine, ki teče v razvejan sistem cevi, v katerem ima vsaka cev določen maksimalen pretok tekočine ($c_{i,j}$), ki ga lahko prenese med dvema točkama. Vsaka cev se steka v neko točko in iz vsake točke lahko naprej vodi več cevi. Tu seveda velja pravilo, da iz vsakega vozlišča odteka enako tekočine kot vanjo pride (tekočina se ne more nikjer zadrževati). Sistem ima poleg izvora tekočine tudi t.i ponor, kamor se tekočina na koncu izteka. Zanima nas, največ koliko tekočine lahko spravimo skozi tak sistem cevi od izvora do ponora.

Sistem cevi predstavimo kot graf, kjer je izvor označen z prvim indeksom in ponor z zadnjim. Nato po nekem algoritmu spreminjamo pretoke skozi cevi ($x_{i,j} \leq c_{i,j}$), dokler ne najdemo maksimalnega.

5.2.1 Ford-Fulkersonov algoritem

Ideja algoritma je, da iščemo poti od izvora do ponora, ki še lahko sprejejo več tekočine in povečamo pretok do njih. Če take poti ni moč najti, smo našli optimalen pretok in se algoritem zaključi.
Pravimo, da je celotna pot je zasičena(ima največji možen pretok), če je vsaj ena povezava na njej zasičena, nezasičena pa kadar so vse povezave na njej nezasičene. Povezava je zasičena, ko po njej ne

moremo povečati pretoka, torej $x_{i,j} = c_{i,j}$.

Kadar potujemo po pozitivni (pravilno usmerjeni) povezavi, hočemo zagotoviti maksimalen pretok ($x_{i,j} = c_{i,j}$), lahko pa potujemo tudi po negativnih povezavah (obrnjenih proti toku), edina razlika je, da v tem primeru želimo minimalen pretok ($x_{i,j} = 0$).

Psevdokoda Ford-Fulkersonovega algoritma za iskanje maksimalnega pretoka skozi graf

```
0  vse pretoke nastavi na 0
1  označi izvor
2  iz označenih vzemi poljubno vozlišče in ga zaznamuj kot obiskanega
3  označi vse neobiskane sosede, do katerih obstaja nezasičena povezava
4  če je povečanje(ali zmanjšanje) toka po povezavi, po kateri smo prišli v trenutno vozlišče, ↩
       manjše od shranjenega, ga shrani
5  če obstajajo označena vozlišča in ponor še ni označen, pojdi na 2
6  če je ponor označen pojdi po poti od ponora nazaj in popravi pretoke s shranjenim in pojdi na↩
       1
7  če ni več označenih vozlišč, zaključi algoritem
```

5.3 Topološko urejanje

Če je usmerjen graf acikličen ga je moč urediti tako, da vozlišče z nižjo oznako vedno kaže le na vozlišča z višjimi oznakami. Tej ureditivi pravimo topološka ureditev.

Psevdokoda algoritma za topološko urejanje grafa

```
0  naredi delovno kopijo grafa
1  poišči vozlišče brez vhodnih povezav
2  če takega vozlišče ni, je odkrit cikel - zaključi algoritem
3  sicer vozišče označi z naslednjo oznako in ga odstrani iz grafa
4  če je to zadnje vozlišče prenesi oznake na prvotni graf in zaključi algoritem
5  sicer pojdi na 1
```

5.4 Iskanje najcenejših poti

5.4.1 Bellmanove enačbe

Bellmanove enačbe pravijo, da je najcenejša pot od vozlišča i do vozlišča j, vsota najcenejše poti u_i, k do nekega vozlišča k in cene povezave $c_{k,j}$. Kakšna pa je najcenejša pot do k? Spet najdemo neko vozlišče, iz katerega pridemo do k prek ene povezave.
To izrazimo rekurzivno z Bellmanovimi enačbami:

$$u_{i,j} = \begin{cases} 0 & ; \quad i = j \\ \min\{u_{i,k} + c_{k,j}\} & ; \quad sicer \end{cases}$$

Vozlišča k so vsa vozlišča grafa iz katerih je mogoče priti v vozlišče j.

Poglavje 6

Kombinatorika in verjetnost

6.1 Permutacije

Algoritem za izračun permutacij danega niza

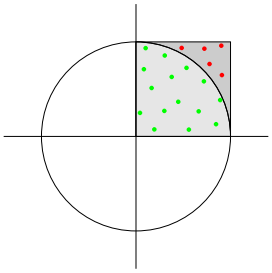
```java
// Izpiši permutacije (v pravem zaporedju)
public static void perm1(String s) {
    perm1("", s);
}
private static void perm1(String prefix, String s) {
    if(s.length()==0) {
        System.out.println(prefix);
    } else for(int i=0; i<s.length(); i++) {
        perm1(prefix + s.charAt(i), s.substring(0, i) + s.substring(i+1, s.length()));
    }
}

// Izpiši permutacije (niso v pravem zaporedju)
public static void perm2(String s) {
    char[] a = new char[s.length()];
    for(int i=0; i<s.length(); i++)
        a[i] = s.charAt(i);

    perm2(a, s.length());
}
private static void perm2(char[] a, int len) {
    if (len==1) {
        System.out.println(a);
    } else for(int i=0; i<len; i++) {
        swap(a, i, len-1);
        perm2(a, len-1);
        swap(a, i, len-1);
    }
}
```

6.2 Metoda Monte Carlo

Monte Carlo je verjetnostna metoda, ki deluje tako, da vzamemo neko množico v prostoru, ki je večja od dane množice katere velikost želimo oceniti, znamo pa ugotoviti, ali je neka točka znotraj te množice. Nato naključno izbiramo točke v naši množici in preverjamo ali so znotraj dane množice ali ne. Končna ocena metode je $\frac{zadetki}{poskusi}$.

6.2.1 Izračun približka števila π

V koordinatnem izhodišču narišemo krog s polmerom 1 in kvadrat s stranico 1 v prvem kvadrantu. Če kot zadetek štejemo točke, ki so za največ 1 oddaljene od izhodišča dobimo približek za $\frac{\pi}{4}$.



Algoritem za izračun približka števila π po metodi Monte Carlo

```
1  public static double monteCarloPi(int num) {
2      Random rand=new Random();
3      int hits=0;
4      for(int i=0; i<num; i++) {
5          double x=rand.nextDouble(), y=rand.nextDouble();
6
7          if(Math.sqrt(x*x + y*y)<=1) hits++;
8      }
9
10     return ((double)hits/num)*4;
11 }
```

Taka metoda za iskanje dobrega približka števila π ni najbolj primerna, je pa preprost primer uporabe.

Poglavje 7

Računska geometrija

7.1 Najbližji par v množici točk

Želimo poiskati točki, ki sta si najbližji v neki množici točk. Naivni algoritem bi bil pregled vseh parov, kar bi zahtevalo kvadratno zahtevnost, z boljšimi metodami pa dosežemo zahtevnost $O(n * log(n))$. Spodaj je preprost linesweep algoritem, ki je v večini primerov kar hiter, a ima v najslabšem primeru tudi kvadratno zahtevnost.

Algoritem za iskanje najbližjega para točk v množici točk

```
1  static int[][] tocke;
2
3  private static int[] closestPair() {
4      //uredi točke po Y
5      sort(tocka);
6
7      int minTocka1 = 0, minTocka2 = 1;
8      double minRazd = razdalja(minTocka1, minTocka2);
9      //ugotovi najkrajo razdaljo med sosednjimi točkami po dimenziji Y
10     //ta korak ni nujen, ampak lahko pohitri računanje, ker prej dobimo
11     //boljšo trenutno vrednost za najkrajšo razdaljo
12     for(int i = 1; i < tocke.length-1; i++) {
13         int t1 = i, t2 = i+1;
14         if(((tocke[t2][1]-tocke[t1][1]) >= minRazd)
15         ||(Math.abs(tocke[t2][0]-tocke[t1][0]) >= minRazd)) continue;
16
17         double tmpRazd = razdalja(t1, t2);
18         if(tmpRazd < minRazd) {
19             minRazd = tmpRazd;
20             minTocka1 = t1;
21             minTocka2 = t2;
22         }
23     }
24
25     //preišče okno točk od t1+1...t2 v katerem so lahko točke,
26     //ki so bližje od trenutne vrednosti za najkrajšo razdaljo
27     int t1 = 0, t2 = 2;
28     do {
29         do {
30             double tmpRazd = razdalja(t1, t2);
31             if(tmpRazd < minRazd) {
32                 minRazd = tmpRazd;
33                 minTocka1 = t1;
34                 minTocka2 = t2;
35             }
36             do t2++; while((t2 < tocke.length)
37                 &&(Math.abs(tocke[t2][0]-tocke[t1][0]) >= minRazd)
38                 &&((tocke[t2][1]-tocke[t1][1]) < minRazd));
39         } while((t2 < tocke.length)&&((tocke[t2][1]-tocke[t1][1]) < minRazd));
40         do {
41             t1++;
42             t2 = t1+2;
43         } while((t2 < tocke.length)&&((tocke[t2][1]-tocke[t1][1]) >= minRazd));
44     } while(t2 < tocke.length);
45
46     return new int[]{minTocka1, minTocka2};
47 }
48
49 private static double razdalja(int t1, int t2) {
50     return Math.sqrt((long)(tocke[t1][0]-tocke[t2][0])*(tocke[t1][0]-tocke[t2][0])
51         + (long)(tocke[t1][1]-tocke[t2][1])*(tocke[t1][1]-tocke[t2][1]));
52 }
```

Poglavje 8

Varnostno kodiranje

8.1 CRC kodiranje

Pri CRC(Cyclic Redundancy Check) varnostnem kodiranju zaporedje bitov, delimo z vnaprej znanim zaporedjem bitov t.i. polinomom. Rezultat ki ga iščemo je ostanek po deljenju.

Algoritem za izračun CRC varnostnih bitov

```
1       public static boolean[] CRC(boolean[] bits, boolean[] poly) {
2           // ustvarimo dovolj veliko tabelo za izračun in na začetek prilepimo vhodne bite
3           boolean[] tmpbits = new boolean[bits.length + poly.length];
4           System.arraycopy(bits, 0, tmpbits, 0, bits.length);
5
6           for(int pos=0; pos<bits.length; pos++) if(tmpbits[pos])
7               for(int i=0; i<poly.length; i++) if(poly[i])
8                   tmpbits[pos+i] = tmpbits[pos+i]^poly[i];
9
10          boolean[] CRCbits = new boolean[poly.length-1];
11          System.arraycopy(tmpbits, bits.length+1, CRCbits, 0, poly.length-1);
12          return CRCbits;
13      }
```

Poglavje 9

Obdelava nizov

9.1 Levenshteinova razdalja

Levenshteinova razdalja je mera podobnosti nizov, ki jo izračunamo kot najmanjše število določenih urejanj, po katerih pridemo od enega niza do drugega.

Vrste urejanj so:

- brisanje znaka: $d_L(\text{"}aaa\text{"}, \text{"}aa\text{"}) = 1$
- vstavljanje znaka: $d_L(\text{"}aaa\text{"}, \text{"}aaaa\text{"}) = 1$
- spremembo znaka: $d_L(\text{"}aaa\text{"}, \text{"}aba\text{"}) = 1$

Primer:

- dve spremembi in vstavljanje: $d_L(\text{"}Burek\text{"}, \text{"}Baraka\text{"}) = 3$

Algoritem za izračun Levensteinove razdalje med dvema nizoma

```
1  public static int levensteinDistance(String s1, String s2) {
2      int[][] d = new int[s1.length()+1][s2.length()+1];
3
4      for(int i=0; i<=s1.length(); i++) d[i][0] = i;
5      for(int j=0; j<=s2.length(); j++) d[0][j] = j;
6
7      for(int i=1; i<=s1.length(); i++) {
8          for(int j=1; j<=s2.length(); j++) {
9
10             int del = d[i-1][j]+1, // brisanje
11                 ins = d[i][j-1]+1, // vstavljanje
12                 sub = d[i-1][j-1]; // sprememba
13
14             if(s1.charAt(i-1) != s2.charAt(j-1)) sub++;
15
16             // shrani najmanjšo izmed razdalj
17             d[i][j] = Math.min(del, Math.min(ins, sub));
18         }
19     }
20
21     return d[s1.length()][s2.length()];
22 }
```