Kodiranje Turingovega stroja

Imamo nek Turingov stroj:

$$T = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, B_1, q_f \rangle$$

Posamezen ukaz programa δ je:

$$\delta(q_i, a_j) = \langle q_k, a_l, S_m \rangle$$

Ukaz zakodiramo kot:

$$K = 0^i 10^j 10^k 10^l 10^m$$

Ko zakodiramo vse ukaze, dobimo kode $K_1, K_2, \ldots, K_r$,
iz katerih sestavimo kodo Turingovega stroja:

$$\langle T \rangle = 111K_1 11K_2 11 \ldots 11K_r 111$$

Prevedbe – seznam jezikov

- $L_d = \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \quad \notin TJ$
- $L_{\overline{d}} = \{w \mid w_i \in L(M_i)\} \quad \in TJ$
- $L_u = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\} \quad \in TJ$
- $L_{\overline{u}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \notin L(M)\} \quad \notin TJ$
- $L_h = \{\langle M \rangle \mid M \text{ se ustavi za vse vhode}\} \quad \notin TJ$
- $L_e = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\} \quad \notin TJ$
- $L_{ne} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\} \quad \in TJ$
- $L_{eq} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\} \quad \notin TJ$
- $L_{|eq|} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid |L(M_1)| = |L(M_2)|\} \quad \notin TJ$
- $L_{\overline{|eq|}} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid |L(M_1)| \neq |L(M_2)|\} \quad \notin TJ$

Riceov izrek

Če je jezikovna lastnost Turingovega stroja trivialna, potem je Turingov stroj rekurziven.

Primer:
M_e je Turingov stroj ki opisuje jezik $L_e = \{\langle M \rangle | L(M) \neq \emptyset\}$
Temu turingovemu stroju pripada jezikovna lastnost $L(M) \neq \emptyset$.
Jezikovna lastnost je trivialna če velja za bodisi vse Turingove stroje, ali pa za nobenega.

Za dokaz z Riceovim izrekom poiščemo en Turingov stroj, ki vsebuje lastnost $L(M)$ in drugega ki je ne:

- $L(M_1) = \Sigma^*$ – ta stroj ima lastnost $L(M) \neq \emptyset$
- $L(M_2) = \emptyset$ – ta stroj nima lastnosti $L(M) \neq \emptyset$

Če taka Turingova stroja obstajata, vidimo, da lastnost **ni** trivialna, torej M_e ni rekurziven.

Rekurzivne funkcije

1. $Z(n) = 0$
2. $N(n) = n + 1$
3. $\pi_i^k(n_1, n_2, \ldots, n_k) = n_i$
4. Kompozicija:
   $f(x_1, \ldots, x_n) =$
   $g(h_1(x_1, \ldots, x_n), h_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$
5. Primitivna rekurzija:
   $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
   $f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$
6. Minimizacija:
   $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_y(g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)) = z$
   Pri tem je z najmanjše število, za katerega velja $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$. Če tak z ne obstaja je funkcija f tam nedefinirana.

Funkcije ki smo jih definirali na vajah:

- $P(n) = n - 1$
- $\ominus(a, b) = a - b$
- $\oplus(a, b) = a + b$
- $\otimes(a, b) = a * b$
- $\oslash(a, b) = a / b$
- $\mathrm{mod}(a, b) = ab$
- $\mathrm{divides}(a, b) = \begin{cases} 1 \; ; & a \mod b = 0 \\ 0 \; ; & a \mod b \neq 0 \end{cases}$
- $\mathrm{IF}(a, b, c) = \begin{cases} b \; ; & a \neq 0 \\ c \; ; & a = 0 \end{cases}$
- $\mathrm{sqrt}(a) = \sqrt{a}$

  Primer: $\oplus(a, b)$

$$\oplus(x, 0) = \pi_1^1(x)$$
$$\oplus(x, y + 1) = N(\pi_3^3(x, y, \oplus(x, y)))$$