TOR 1

# Teorija izračunljivosti

↳ avtomati in računski stroji
↳ formalni jezik

Chomskyjeva hiearhija
↳ končni avtomati, regularni jeziki
↳ skladovni avtomati, kontekstno neodvisni jezik
↳ lineapni avtomati, kontekstni jeziki (rekurzivni jeziki)
↳ Turingovi stroji, Turingovi jeziki

Matematične osnove
↳ predikatni račun
→ množice, relacije, funkcije
→ dokazovanje
↳ dokaz s konstrukcijo → obstaja graf $n>4$, ki ima 3 liste; $|\mathbb{R}| = |[0,1)|$
↳ dokaz s protislovjem → praštevil je neskončno, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ $\Leftrightarrow$ $|$programov$| = |\mathbb{N}|$
↳ dokaz z indukcijo → obstaja graf $n>4$, ki ima 3 liste
↳ ...

Temeljni pojmi teorije izračunljivosti
↳ Abeceda - končna neprazna množica simbolov
↳ Niz - poljubno končno zaporedje simbolov (a.k.a. beseda
→ prazen niz $\varepsilon$
↳ Stik nizov $w_1 = a_1a_2\ldots a_n$ in $w_2 = a'_1a'_2\ldots a'_n$ je $w_1w_2 = a_1a_2\ldots a_n a'_1a'_2\ldots a'_n$
↳ Stik množic $A, A'$ je $\{w_1w_2 \mid w_1 \in A \land w_2 \in A'\}$
→ $\Sigma^* = \Sigma \cdot \Sigma \cdots \Sigma = \bigcup_{i=0}^{\infty} \{a_1a_2\ldots a_k \mid (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \times_k \Sigma\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^k$
→ $\Sigma^k = \{a_1a_2a_3\ldots a_k \mid \langle a_1, a_2 \ldots a_k \rangle \in \times_k \Sigma\}$
↳ Jezik $L$ nad $\Sigma$ je poljubna podmnožica $\Sigma^*$ : $L(\Sigma) \subseteq \Sigma^*$
→ $\{\}$ prazen jezik
→ $\{\varepsilon\}$ ni prazen

↳ Prepisovalni sistem $G = \langle \Sigma, P \rangle$
↳ $P \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$



Regularni izrazi in končni avtomati
↳ Regularni izrazi
→ opisuje jezik nad $\Sigma$
→ $\underline{\Phi}$ opisuje prazen jezik $L(\underline{\Phi}) = \{\}$
→ $\underline{\varepsilon}$ opisuje $L(\underline{\varepsilon}) = \{\varepsilon\}$
→ $\underline{a}$, $a \in \Sigma$ opisuje $L(\underline{a}) = \{a\}$
→ $(r_1 + r_2)$ opisuje $L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$
→ $(r_1 r_2)$ opisuje $L(r_1 r_2) = L(r_1)L(r_2)$
→ $(r^*)$ opisuje $(L(r))^*$
↳ Primeri
→ a* : $a^*$
→ ** : $\underline{*}^*$
→ $a^+$ : $aa^*$ ali $a^*a$
→ $a?$ : $\varepsilon + a$
→ a{5} : aaaaa
→ a{1,3} : a, aa, aaa
↳ Jezik, ki ga opisuje poljubni RI se menuje regularni jezik
↳ $\Sigma^*$ je RJ, $\{\}$ je RJ, $\{0^n 1^n (n \geq 0\}$ ni RJ

↳ Končni avtomati
→ $\varepsilon$-NKA je $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
→ Q - končna množica stanj
→ $\Sigma$ - abeceda
→ $\delta$ - funkcija prehodov $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$
→ $q_0$ - začetno stanje $q_0 \in Q$
→ F - množica končnih stanj $F \subseteq Q$

↳ besedo sprejmemo, če obstaja vsaj ena pot skozi avtomat do končnega stanja
↳ $\varepsilon\text{-closure}(q) = \{q_m \mid \exists q_1 q_2 \ldots q_m \in Q, (q = q_1 \wedge q_i \in \delta(q_{i-1}, \varepsilon))\}$

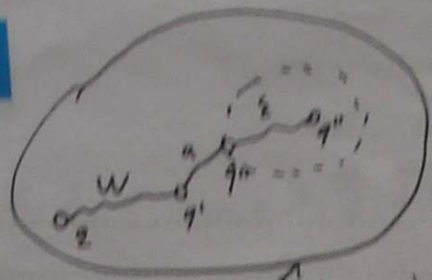
$\varepsilon\text{-closure}(\overline{q}) = \bigcup_{q \in \overline{q}} \varepsilon\text{-closure}(q)$, $\overline{q} \subseteq Q$

$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \varepsilon\text{-closure}(q)$

TOR 2





$q' \in \hat\delta(q,w)$

$q'' \in \delta(q',a)$

$q''' \in \varepsilon\text{-closure}(q'')$

$\hat\delta(q,wa) =$

$= \varepsilon\text{-closure}(\{q'' \mid \exists q' : q' \in \hat\delta(q,w) \wedge q'' \in \delta(q',a)\})$

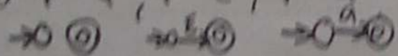
↳ Jezik ε-NKA je $L(M) = \{w \mid \hat\delta(q_0,w) \cap F \neq \emptyset\}$

## RI → ε-NKA

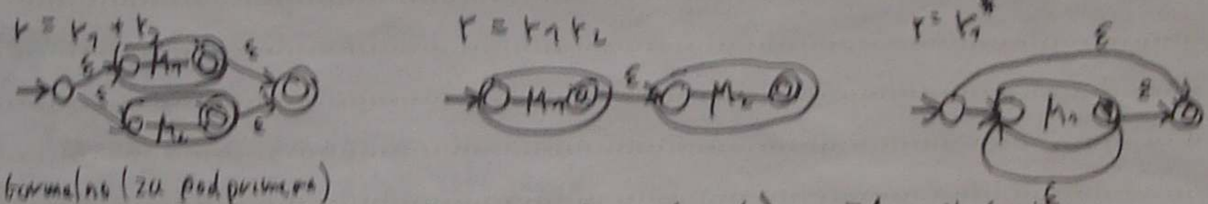
Za vsak RI $r$ nad $\Sigma$ obstaja ε-NKA $M$, da velja $L(r) = L(M)$

Dokaz z ind. po strukturi $r$

① $r = \emptyset$, $r = \varepsilon$, $r = a$



② $r = r_1 + r_2$  $r = r_1 r_2$  $r = r_1^*$



formalno (za podprimere)

$r = \varepsilon$  $M = \langle \{q_0, q_F\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_F\} \rangle$  $\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_F\}$

$r = r_1^*$  $M_1 = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, \{q_{F1}\} \rangle$

$M = \langle Q_1 \cup \{q_0, q_F\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_F\} \rangle$

$\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_{01}, q_F\}$

$\delta(q_{F1}, \varepsilon) = \{q_{01}, q_F\}$

$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  $q \in Q \setminus \{q_{F1}\}$  $\delta(q,a) = \delta_1(q,a)$

še:

$L(r_1^*) = L(M)$

(R) © Michael Schumacher
© Technische

DM

tor3

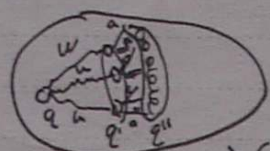
NKA je $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, $\delta = Q \times \Sigma \to 2^Q$

↳ $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$

$\hat{\delta}(q, wa) =$

$= \{q'' \mid \exists q' \in Q, q' \in \delta(q, w), q'' \in \delta(q', a)\}$




$q' \in \delta(q_0, w)$
$q'' \in \delta(q', a)$

↳ Jezik NKA

$L(M) = \{w \mid \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$

NKA → ε-NKA

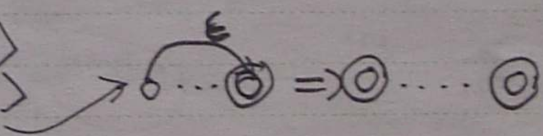
↳ Doooh

ε-NKA → NKA

↳ odstraniš ε-povezave
→ povežeš da spet dobiš isti jezik

↳ dokaz $M_\varepsilon = \langle Q, \Sigma, \delta_\varepsilon, q_0, F_\varepsilon \rangle$

$M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$




$\delta'(q, a) = \hat{\delta}_\varepsilon(q, a)$

$F' = \begin{cases} F_\varepsilon; & \hat{\delta}(q_0, \varepsilon) \cap F = \emptyset \\ F_\varepsilon \cup \{q_0\}: & \text{sicer} \end{cases}$

A | $\delta$ vs. $\hat{\delta}$
↓ simbol ↓ niz ≠ ε

I. $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(M')$

$\hat{\delta}_\varepsilon(q_0, \varepsilon) \cap F_\varepsilon \neq \emptyset$  $q_0 \in F' \iff \delta'(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$

II. vsak $x \in \Sigma^*$ $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}'(q_0, x)$

$\hat{\delta}'(q_0, w) = \{q'' \mid \exists q' \in \hat{\delta}'(q_0, w) \wedge q'' \in \delta'(q', a)\} =$

$= \{q'' \mid \exists q' \in \hat{\delta}(q_0, w) \wedge q'' \in \delta$

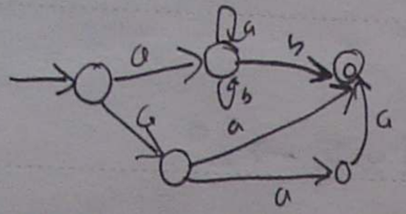


vis zaspal

# DKA

$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

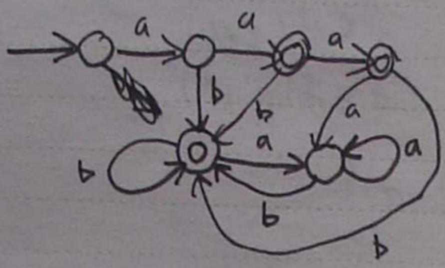
$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ $\quad$ $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$



$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$

$\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$





↳ Jezik DKA

$L(M) = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F \}$

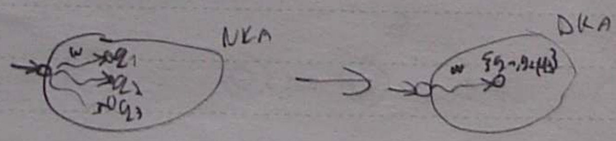
A | jeziki

DKA → NKA → ε-NKA

↳ Hurr Durr

→ $\delta'(q, a) = \{ \delta(q, a) \}$

NKA → DKA




$M_N = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

$M_D = \langle 2^Q, \Sigma, \delta', \overline{q_0}, F \rangle$

$\overline{q_0} = \{ q_0 \}$

$F = \{ \overline{q} \mid \overline{q} \in 2^Q \wedge \overline{q} \cap F \neq \emptyset \}$

$\delta'(q, a) = \bigcup_{q \in \overline{q}} \delta(q, a)$

$\hat{\delta}'(\overline{q}, \varepsilon) = \overline{q}$

$\hat{\delta}'(\overline{q}, wa) = \delta'(\hat{\delta}'(\overline{q}, w), a)$

ZA $L(M_N) = L(M_D)$ moramo pokazati

$\hat{\delta}'(\overline{q_0}, w) = \hat{\delta}(q_0, w)$

z indukcijo po dolžini besede

1. $w = \varepsilon$

$\hat{\delta}(\overline{q_0}, \varepsilon) = \hat{\delta}'(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0\} = \hat{\delta}'(q_0, \varepsilon)$

2. $wa$ (predpostavimo $\hat{\delta}'(\overline{q_0}, w) = \hat{\delta}(q_0, w)$)

$\hat{\delta}'(\overline{q_0}, wa) = \hat{\delta}'(\{q_0\}, wa) = \delta'(\hat{\delta}'(\{q_0\}, w), a) =$

$= \delta'(\hat{\delta}(q_0, w), a) = \bigcup_{q \in \hat{\delta}(q_0, w)} \delta(q, a) = \hat{\delta}(q_0, wa)$

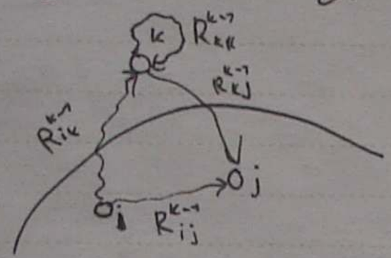
TOR 4

## DKA → RI

postopoma združujemo stanja in pišemo RI na povezave

dokaz: $R^k_{ij}$ – nizi, ki peljejo iz stanja i v j, a skozi stanja z največ indeksom k, z izjemo i in j.

$$R^0_{ij} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & ;\ i=j \\ \{a \mid \delta(q_i,a) = q_j\} & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$




$$R^k_{ij} = R^{k-1}_{ij} \cup R^{k-1}_{ik}(R^{k-1}_{kk})^* R^{k-1}_{kj}$$

$$L(M) = \bigcup_{q_j \in F} R^n_{ij} \ ; \quad n = |Q|$$

$q_i$ začetno stanje

če $R^0_{ij} = \emptyset \to r^0_{ij} = \emptyset$

$R^0_{ij} = \{a_1,\dots,a_n\} \to r^0_{ij} = a_1 + \dots + a_n$

$R^0_{ij} = \{\varepsilon\} \cup \{a_1,\dots,a_n\} \to r^0_{ij} = a_1+\dots+a_n+\varepsilon$

efektivna pretvorba → lahko napišemo program

$R^k_{ij} = \to r^k_{ij} = r^{k-1}_{ij} + r^{k-1}_{ik}(r^{k-1}_{kk})^* r^{k-1}_{kj}$

## Regularne gramatike

↳ Prepisovalni sistem je regularna gramatika, če je:

→ $G = \langle N,T,P,S \rangle$ levo linearna gramatika

→ $G = \langle N,T,P,S \rangle$ desno lin gramatika

N končna množica vmesnih simbolov / spremenljivke

T končna množica končnih simbolov / znaki

P končna množica produkcij — l.lin $P \subset N \times (T^* \cup NT^*)$; d.lin $P \subset N \times (T^* \cup T^*N)$

S začetni vmesni simbol

↳ jezik gramatike

$L(G) = \{ w \mid S \Rightarrow^* w,\ w \in T^* \}$

0. in [illegible]

$P = \{ \langle S, a \rangle, \langle S, aS \rangle \}$ ... pišemo

$S \to a$

$S \to aS$ $\;=\;$ $S = a \mid aS$

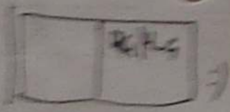
$S \Rightarrow a$

$S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow aaa$

1. in [illegible]

$S \to a \mid Sa, Ab$

$A \to b \mid bb \mid Sa$



$S \Rightarrow Sa \Rightarrow Aba \Rightarrow Saba \Rightarrow Ababa \Rightarrow bbbaba$

↳ relacija izpeljave

$\Sigma = N \cup T$

$(\Rightarrow) \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

$(\Rightarrow) = \{ \langle \alpha A \beta, \alpha \psi \beta \rangle \mid A \to \psi \in P \}$

tranzitivna ovojnica (0 ali več korakov izpeljave) relacije izpeljave

$\Rightarrow^*$

RJ → DLG

↳ RJ → obstaja DKA, ki jezik sprejema

$G = \langle N, T, P, S \rangle$, $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

$T = \Sigma$

$N = Q$

$P = \{ q \to aq' \mid \delta(q, a) = q' \} \cup \{ q \to a \mid \delta(q, a) \in F \}$

z indukcijo dokažemo

$\hat{\delta}(q_0, w) = q_w$ ... $q_0 \Rightarrow^* w q_w$

① $w = \varepsilon$

$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0$ ... $q_0 \Rightarrow^* q_0$

② $wa$

$\Rightarrow)\ \hat{\delta}(q_0, wa) = \delta(\hat{\delta}(q_0, w), a) = \delta(q_w, a) = q_{wa}$

$q_0 \Rightarrow^* w q_w$ $\quad$ $q_w \to a q_{wa}$

$q_0 \Rightarrow^* w q_w \Rightarrow^* wa q_{wa}$ ✓

$\Leftarrow)\ q_0 \Rightarrow^* wa q_{wa}$



[illegible]

TOR5

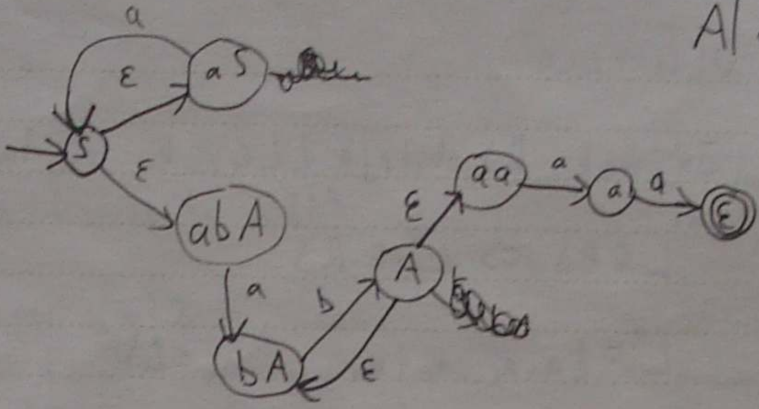


## DLG → RJ

Za $G = \langle N, T, P, S \rangle$ obstaja ε-NKA $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, da velja $L(G) = L(M)$

A| ←

$S \to abA \mid aS$
$A \to aa \mid bA$




$\alpha b$
prefix ↙ ↘ suffix

Dokaz:

$M = \langle Q, T, \delta, [S], \{[\varepsilon]\} \rangle$

$Q = \{[\alpha] \mid A \to \alpha' \alpha \in P\} \cup \{[S]\}$ (vsi sufiksi)

$\delta([a\alpha], a) = \{[\alpha]\}$
$\delta([S], \varepsilon) = \{[\alpha] \mid S \to \alpha \in P\}$

→ za ∀ izpeljavo $S \Rightarrow^n w\alpha$ dolžine $n$ velja
$[\alpha] \in \delta([S], w)$

$n = 1$ $\quad S \Rightarrow w\alpha$, $\exists S \to w\alpha = a_1 \dots a_n \alpha$
$[w\alpha] \in \delta([S], \varepsilon)$, $\exists [a_1 \dots a_n \alpha], [a_2 \dots a_n \alpha] \dots [\alpha] \in Q$
$\delta$

$n > 1$ $\quad S \Rightarrow^n w\alpha$ prepišemo
$\underline{S \Rightarrow^* w' A} \Rightarrow w' w'' \alpha = w\alpha$ → $A \to w''\alpha \in P$, $w'' = b_1, b_2, \dots, b_e$
I.P. $[A] \in \delta([S], w')$ $\quad \exists [b_1, b_2, \dots b_e \alpha]$ ↓ $\delta$
$[S] \xrightarrow{w'} [A] \xrightarrow{\varepsilon} [w''\alpha] \xrightarrow{w''} [\alpha]$ $\quad [b_2, \dots, b_e, \alpha]$
$\delta([S], w' w'') \ni [\alpha]$ $\quad \vdots$

$[w''\alpha] \in \delta([A], \varepsilon)$
$\delta([w''\alpha], w'') \ni [\alpha]$

DLG → LLG

Za nek RJ obstaja LLG, ko za ta RJ obstaja DLG.

Dokaz

$L \in RJ \Rightarrow L^R \in RJ$

$L^R = \{a_1 a_2 \ldots a_n \mid a_n a_{n-1} \ldots a_1 \in L\}$

za $L$ $\exists M, L(M) = L$

→ $M'$ → obrnemo povezave, ~~začetna~~
stare zač. st. so končna
dodamo $\varepsilon$-povezavo iz starih končnih → začetno

$G = \langle N, T, P, S \rangle$ LLG ⇕ DLG
$G^R = \langle N, T, P^R, S \rangle$
$P^R = \{A \to \alpha^R \mid A \to \alpha \in P\}$

$S \to abS \mid ab$
$S^R \to Sba \mid ba$

you spin me right round

$L(G) = L^R(G^R)$ $\square$

---

RI → $\varepsilon$-NKA ⟷ NKA ⟷ DKA → DLG ⟷ LLG } Regularni jeziki

# TOR 6



## Lastnosti RJ

**Lema o napihovanju**

↳ za vsak RJ $L$ obstaja konstanta $n(L)$, da velja:

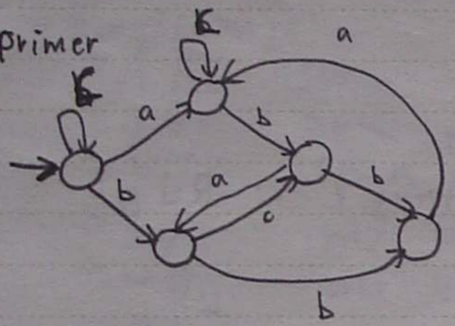
vsako besedo $w \in L$, pri $|w| \geq n$, lahko zapišemo kot $w = uvz$, pri
$|uv| \leq n$ in $|v| \geq 1$,
pri tem velja $uv^i z \in L$, za vsak $i \geq 0$

{ dokažemo, da ni R (kasneje, da ni Kontekst Neodv.)

{ daljšanje $w$ pomeni, da se da napihovati

{ deluje le na besedah daljših od št. stanj, itak

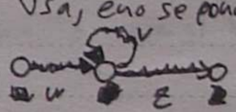
→ primer




$w =$
$|w| = 13$ → 13 prehodov, 14 stanj, le 5 različnih
$|Q| = 5$

⇓

vsaj eno se ponovi



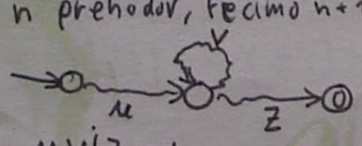

$w = uvz \in L$
$uz \in L$
$uv^i z \in L \quad i \geq 0$

→ dokaz

$\exists M \in DKA \quad L(M) = L, \quad |Q| = n$

$w \in L, \quad |w| \geq n$

$n$ prehodov, recimo $n+1$ stanj ⇒ vsaj eno stanje se ponovi




$uv^i z \in L$

zakaj $|v| \geq 1$? $M$ je DKA, torej $v \neq \varepsilon$

Zakaj $|uv| \leq n$? Ker se neko stanje ponovi že po vsaj prvih $n$ prehodih

PN v= $a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$

→ primer

Dokaži, da $L = \{a^m b^m \mid m \geq 0\}$ ni regularen.

s protislovjem

① $L \in RJ$

② za $L$ velja lema o napihovanju in zato obstaja $n(L)$

③ torej lahko izberem $w$, da velja $w \in L$, $|w| \geq n$

④ izberem $w = a^n b^n$ (saj $a^n b^n \in L$, $|a^n b^n| = 2n \geq n$)

⑤ besedo $w$ lahko napihujem

$w = a^n b^n = uvz$ $\quad |uv| \leq n$ in $|v| \geq 1$ — Moraš preverit za vsako delitev

⑥ ugotovim $uv = a^k$ pri $k < n$

⑦ torej naj bo $v = a^l$ pri $l \geq 1$

$a^{n-l} a^{il} b^n \in L$ za $i \geq 0$

$i = 0$: $a^{n-l} b^n \notin L$, ker $l \geq 1$ — 101, integrali

⑧ lema o napihovanju ne velja, torej $L$ ni RJ $\square$

# TOR 7

TeX, [illegible] gramatike



## Kontekstno neodvisne gramatike in skladovni avtomati

↳ kontekstno neodvisne gramatike (KNG)
prepisovalni sistem je KNG $G = \langle N, T, P, S \rangle$ pri $N \cup T = \Sigma$ in $S \in N$,
- → $N$ množica vmesnih simbolov oz. spremenljivk
- → $T$ množica končnih simbolov oz. znakov
- → $P$ množica produkcij
- → $S$ začetni simbol gramatike

$$N \cap T = \emptyset, \quad P \subset N \times (N \cup T)^*$$

↳ stavčna oblika $(N \cup T)^*$
↳ označevanje:
- → $A\,B\,C$ spr
- → $a\,b\,c$ znaki
- → $X\,Y\,Z$ spr in znaki
- → $x\,y\,z$ niz končnih simbolov
- → $\alpha\,\beta\,\gamma$ niz simbolov

↳ izpeljava $(\Rightarrow) \subseteq (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$

$$A \to \alpha \Leftrightarrow \psi_1 A \psi_2 \Rightarrow \psi_1 \alpha \psi_2$$

$$(\Rightarrow)^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\Rightarrow)^i$$

$$(\Rightarrow)^0 = \text{identiteta}$$

$$(\Rightarrow)^i = (\Rightarrow) \circ (\Rightarrow)^{i-1}$$

↳ skrajno leve izpeljave (LM)

$$(\Rightarrow_{LM}) \subseteq (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$$

$$(\Rightarrow_{LM}) = \{ \langle wA\psi, w\alpha\psi \rangle \mid w \in T^*, A \to \alpha \in P \}$$

↳ skrajno desne izpeljave (RM)

skrajne izpeljave na 1/*





↳ lahko oboje ali nič od tega, a vedno lahko izpeljemo skrajno levo ali skrajno desno, obstaja več različnih skrajnih izpeljav z istim rezultatom

↳ Jezik KNG

$L(G) = \{ w \mid S \Rightarrow^* w \land w \in T^* \}$

↳ drevo je A-drevo na podlagi KNG če
- → so vsa vozlišča označena z $N \cup T \cup \{\varepsilon\}$
- → koren je vedno A
- → za vozlišče $X \in N$ so vsi potomci označeni z $X_1 \dots X_n$ od leve desni
- → $X \to X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P$

↳ drevo je S-drevo, pri katerem so vsi listi iz $T \cup \{\varepsilon\}$

↳ lahko obstajajo različne izpeljave (leva, desna skupaj z istim drevesom

↳ dvoumnost KNG

KNG je nedvoumna $\Leftrightarrow$ ko za vsako besedo iz L dobimo eno drevo izpeljav, sicer je dvoumna.

↳ determinističnost jezika KNG

L(G) je deterministična natk obstaja$\overset{\text{nedvoumna}}{\uparrow}$ G', da velja $L(G) = L(G')$

↳ $RJ \subset KNJ$

$\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \in KNJ \setminus RJ$ →

$L \in RJ \Rightarrow \exists G \in LLG \Rightarrow G \in KNG \Rightarrow L(G) \in KNJ$

∃ avtomat

ne obstaja algoritem

prazen jezik

↳ poenostavitev KNG
1. → odpravimo nekoristne simbole → ni dosegljiva, ni končnega simbola vizpeljavi
2. → odpravljanje ~~...~~ ε-produkcij
3. → odpravljanje enotskih produkcij

① → $N^{(0)} = \{ A \mid A \to w \in P \land w \in T^* \}$ // ti imajo končne

$i = 0$

do

$N^{(i+1)} = N^{(i)} \cup \{ A \mid A \to \alpha \in P \land \alpha \in (N^{(i)} \cup T)^* \}$

$i{+}{+};$

while $N^{(i)} \neq N^{(i-1)}$

$N' = N^{(i)}$

nekoristni

TUR 8

↳ za neko KNG $G$ obstaja $G'$, da velja
$S \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} \alpha X \beta \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} w$, $w \in T^*$, za vsak
$X \in N' \cup T'$ in $L(G) = L(G')$. // pri $L(G) \neq \emptyset$ → $S \to S$
$S \overset{(0)}{\underset{id.}{\Rightarrow}} \alpha X \beta \overset{(0)}{\underset{id.}{\Rightarrow}} w$ $y_{S:J}$

dokaz: -

vhod $G = \langle N, T, P, S \rangle$
izhod $V \subseteq N \cup T$, $V = \{X \mid S \Rightarrow^* \alpha X \beta\}$

$V^{(0)} = \{ \cancel{\;} S \}$
$V^{(i+1)} = \{X \mid A \to \alpha X \beta \wedge A \in V^{(i)}\} \cup V^{(i)}$

ko $V^{(i+1)} = V^{(i)}$, tedaj $V' = V^{(i)}$

↳ če $\exists S \Rightarrow^* \alpha A \beta$, tedaj $A \in V'$
obstaja neka najkrajša izpeljava $S \Rightarrow^* \alpha' X \beta'$ za dani $X$
dolga je $n$.

① baza $n = 0$
$S \Rightarrow S$ (brez uporabe produkcij)
iz algoritma $V^{(0)} = \{S\} \Rightarrow$ velja ✓

② korak $n > 0$
po ind. p. $\Rightarrow \forall Y$ za katere obstaja izpeljava
$S \Rightarrow^* \alpha'' Y \beta''$, ki je krajša od $n$

izpeljavo dolžine $n$ zapišeš kot
$\underbrace{S \Rightarrow^* \alpha'' Y \beta''}_{n-1} \underbrace{\Rightarrow \alpha' X \beta'}_{1}$ ↗ $\alpha'', \beta'' \in V^{(n-1)}$
$\alpha, \beta \in V^{(n)}$

$\{X \mid A \to \alpha X \beta \wedge A \in V^{(n-1)}\}$
✓

$G = \langle N, T, P, S \rangle$

$G'' = \langle N'', T'', P'', S'' \rangle$

z alg1: $V' = \{X \mid S \Rightarrow^* \alpha X \beta\}$

z alg2: $N' = \{A \mid A \Rightarrow^* w \wedge w \in T^*\}$

$N'' = (N \cap V' \cap N') \cup \{S\}$ znebimo se tistih, ki

$T'' = T \cap V'$ ne vodijo do končnih simbolov

$P'' = \{A \to x_1 \dots x_n \mid A \to x_1 \dots x_n \in P \wedge A \in N'' \wedge \forall x_i \in N'' \cup T''\}$

pa jka $L(G)$ res $= L(G'')$

$L(G'') \subseteq L(G)$, itak

$L(G'') = L(G)$ ? ✓

① $\forall w \in T^* \quad w \in L(G'') \Rightarrow w \in L(G)$

② $\forall w \in T^* \quad w \in L(G) \Rightarrow w \in L(G'')$

$\Downarrow$

$\exists S \Rightarrow_G^* w$

$\Downarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_n \Rightarrow w$

trdimo $\alpha_i \in (N'' \cap V')^*$ in če to velja, tedaj $S \Rightarrow_{G''} \alpha_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w$, saj so vsi koristni

$\downarrow$ dokaz:

predpostavmo nasprotno $\exists \alpha_j = \varphi_1 Z \varphi_2$ pri $Z \notin (V' \cap N')$

iz izpeljave vem

$$\left.\begin{aligned} &Z \Rightarrow_G^* w' \\ &S \Rightarrow_G^* \varphi_1 Z \varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z \in V' \cap N' \quad \times$$

torej $\forall i \; \alpha_i \in (V' \cap N')^*$ in velja ②

ampak za take, ki se ne razlijejo $\to L(G) = \emptyset$

$G'' = \langle \{S\}, \{\}, \{\}, S \rangle$ $\times$

TOR 9

→ odpravljanje ε-produkcij

algoritem: $G = \langle N, T, P, S \rangle \rightarrow N_\varepsilon = \{A \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$



$N_\varepsilon^{(0)} = \{A \mid A \Rightarrow \varepsilon \in P\}$

$i = 0$
do
  $i{+}{+}$
  $N_\varepsilon^{(i)} = N_\varepsilon^{(i-1)} \cup \{A \mid A \rightarrow X_1 \ldots X_n,\ X_i \in P \wedge \forall X_i : X_i \in N_\varepsilon^{(i-1)}\}$
while $N_\varepsilon^{(i)} \neq N_\varepsilon^{(i-1)}$
$N_\varepsilon = N_\varepsilon^{(i)}$

„dokaz" algoritma
① če $\exists A \Rightarrow^* \varepsilon$ dolžine n, tedaj $A \in N_\varepsilon^{(n-1)}$

① iz def $N_\varepsilon^{(0)}$
② $A \Rightarrow^* \varepsilon$ razvijem in izpostavim zadnji korak

$A \Rightarrow^* \alpha \Rightarrow \varepsilon$ → ubistvu $A \Rightarrow \alpha \Rightarrow^* \varepsilon$

~~ena~~ spr ubistvu

bza ∀KNG G obstaja G' brez ε-produkcij, da velja
$L(G) \setminus \{\varepsilon\} = L(G')$
dokaz: $G = \langle N, T, P, S \rangle$
  izračunamo $N_\varepsilon = \{A \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$
  $G' = \langle N, T, P', S \rangle$
  $P' = \{A \rightarrow \alpha_1 \ldots \alpha_n \mid A \rightarrow X_1 \ldots X_n \in P$
  $\wedge\ \forall i = \{1, 2, \ldots n\} : \alpha_i \in \{X_i\} \cup \{\varepsilon \mid X_i \in N_\varepsilon\}$
  $\wedge\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \neq \varepsilon\}$

za ∀ $w \in T^* \setminus \{\varepsilon\}$, $A \Rightarrow^* w$ natk $A \Rightarrow^*_{G'} w$

(⇒) Naj velja za ∀ $w \in T^* \setminus \{\varepsilon\}$ če $A \Rightarrow^* w$, tedaj $A \Rightarrow^*_{G'} w$
① baza $A \Rightarrow^1_G w$ tedaj $A \rightarrow w \in P$ (v G)
  tedaj $A \rightarrow w \in P'$ (v G')
  tedaj $A \Rightarrow_{G'} w$

② korak: $\underbrace{A \Rightarrow_G w}_{n \text{ korakov}}$ tedaj $A \Rightarrow_G X_1 \ldots X_m \Rightarrow_G^* w_1 \ldots w_m = w$

zat i: $\underbrace{X_i \Rightarrow_G^* w_i}_{< n \text{ korakov}}$

tedaj $A \to X_1 \ldots X_m \in P$ (v G)
za vsako izbiro $e \subset \{0,1,\ldots,m\}$
da $X_j \Rightarrow^* w_j = \varepsilon$ pri $j \in e$
$\exists A \to \alpha_1 \ldots \alpha_m \in P'$ (v G')
$j \in e$, $\alpha_j = \varepsilon$, sicer $\alpha_j = X_j$

tedaj $A \Rightarrow^+ \alpha_1 \ldots \alpha_n \Rightarrow^* w_1 \ldots w_m$ pri nekem $e$

(⇐) za vsak $w \in T^* \setminus \{\varepsilon\}$: $A \Rightarrow_{G'}^+ w$, tedaj $A \Rightarrow_G^+ w$
① če $\exists A \Rightarrow_{G'} w$ tedaj $A \to w \in P'$ (v G')
tedaj $A \to X_0 a_1 X_1 a_2 \ldots a_m X_m \in P$ (v G)
pri $a_1 a_2 \ldots a_m = w$
$\wedge \forall j: X_j = \varepsilon \vee X_j \Rightarrow_G^* \varepsilon$
tedaj $A \Rightarrow_G X_0 a_1 \ldots a_m X_m$
$\Rightarrow^* a_1 \ldots a_m = w$

② $\underbrace{A \Rightarrow_{G'}^* w}_{n \text{ korakov}}$, tedaj $A \Rightarrow_{G'} X_1 \ldots X_m \Rightarrow^* w_1 \ldots w_m = w$
za $\forall j$ $\underbrace{X_j \Rightarrow_{G'} w_j}_{< n \text{ korakov}}$
tedaj $A \to X_1 \ldots X_n \in P'$ (v G')
tedaj $A \to Y_0 X_1 Y_1 \ldots X_m Y_m \in P$ (v G)
$\forall j: Y_j = \varepsilon \vee Y_j \Rightarrow_G^* \varepsilon$
tedaj $\exists e \subset \{0,1,\ldots m\}$: $j \in e: Y_j \Rightarrow_G^* \varepsilon$
$j \in e: Y_j = \varepsilon$

tedaj $A \Rightarrow_G Y_0 X_1 Y_1 \ldots X_m Y_m$
$\Rightarrow_G^* X_1 \ldots X_m \Rightarrow_G^* w$ □



Če pogledaš vrstni
$N' = N \cap N' \cap V'$
$T' = T \cap V' \cap \{a \mid A \Rightarrow^* \alpha a \beta \wedge A \in N^*$

TOR 10



hokashe ⟵ ① samo "oskubimo"
ε-prod ⟵ ② dodamo prod. brez takih → ε
③

$G \xrightarrow{-\varepsilon\text{-prod}} G' \xrightarrow{\text{enotske}} G'' \xrightarrow{\text{-gluhe}} G'''$

→ Odpravljanje enotskih produkcij

$A \to B$ - ena spr. v eno spr.

$N_A = \{ B \mid A \Rightarrow^{+} B$ po samih enotskih produkcijah

$A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$

$\forall A \in N : N_A^{(0)} = \{ B \mid A \to B \}$

$i = 0$

do

$i{+}{+}$

$\forall A \in N : N_A^{(i)} = N_A^{(i-1)} \cup N_B^{(i-1)}$

while $\exists A \in N : N_A^{(i)} \neq N_A^{(i-1)}$

$\forall A \in N = N_A^{(i)}$

$B \in N_A^{(i-1)}$

$N_B$

→ Za $\forall G$, $\exists G'$, da velja $L(G) = L(G')$ in $G'$ nima enotskih produkcij

$A \to B$

$N_A = \{B, C, D\}$

~~$A \to B$~~

$A \to \beta \quad \forall B \to \beta$

$A \to \beta \quad \forall C, D \to \beta$

dokaz

$G = \langle N, T, P, S \rangle$

$G' = \langle N, T, P', S \rangle$

1 spr.

$P' = \{ A \to \alpha \mid A \to \alpha \in P \wedge \alpha \notin N \}$
$\cup \{ A \to \beta \mid \exists B \in N_A \wedge B \to \beta \in P \wedge \beta \notin N \}$

→ poenostavitve dosežejo

→ $L(G) \setminus \{\varepsilon\} = L(G^{(4)})$

# Chomskyeva normalna oblika

→ $G$ je v CNO, če so vse produkcije oblike:

- → $A \to a$
- → $A \to BC$

in $G$ ne vsebuje nekoristnih simbolov

→ Za $\forall G, \exists G'$ v CNO, da velja $L(G) \setminus \{\varepsilon\} = L(G')$.

dokaz: $G$ je poenostavljena

$G = \langle N, T, P, S \rangle \rightsquigarrow G'' = \langle N'', T'', P'', S \rangle$

$N'' = N \cup \{X_a \mid A \to \alpha a \beta \in P \land |\alpha a \beta| > 1\}$

$P'' = \{A \to a \mid A \to a \in P\} \cup$

$\{A \to \Psi_1 \Psi_2 \ldots \Psi_n \mid A \to \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \in P \land n > 1 :$

$\forall i : \Psi_i = \begin{cases} \varphi_i ; & \varphi_i \in N \\ X_{\varphi_i} ; & \varphi_i \in T \end{cases} \} \cup$

$\{X_a \to a \mid A \to \alpha a \beta \in P \land |\alpha a \beta| > 1\}$

$G'' = \langle N'', T'', P'', S \rangle \rightsquigarrow G' = \langle N', T', P', S \rangle$

$N' = N'' \cup \{X_\beta \mid A \to \alpha\beta \in P'' \land |\alpha\beta| > 2 \land \alpha \neq \varepsilon \land |\beta| \geq 2\}$

$P' = \{A \to \alpha \mid A \to \alpha \in P'' \land |\alpha| \leq 2\} \cup$

$\{A \to \varphi X_\beta \mid A \to \varphi\beta \in P''\} \cup$

$\{X_{\varphi\beta} \to \varphi X_\beta \mid X_\beta \mid X_{\varphi\beta} = N' \setminus N'' \land |\beta| \geq 2\} \cup$

$\{X_{\varphi_1\varphi_2} \to \varphi_1\varphi_2 \mid X_{\varphi_1\varphi_2} \in N' \setminus N''\}$

cog indukcija po tem

~~ZAKAJ~~?



LXDE

LUBUNTU... ni official

TOR 11



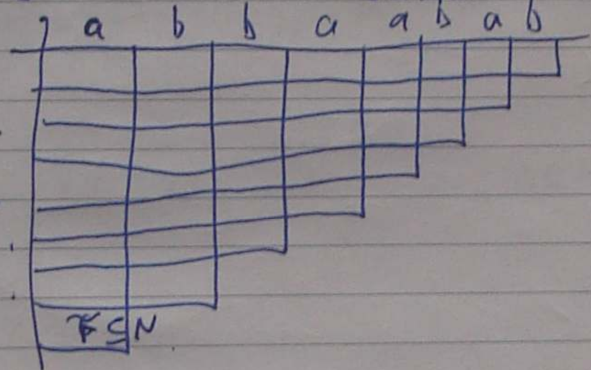
→ problem $w \overset{?}{\in} L(G)$

→ CYK algoritem | dyn-prog k∈

$G \to G' \in CNO$

če $w=\varepsilon$, $\varepsilon \overset{?}{\in} L(G) \iff S \overset{?}{\in} N_\varepsilon = \{A \mid A \Rightarrow^*_G \varepsilon\}$

$S \Rightarrow abBaA \Rightarrow abbaAab \Rightarrow abbaabab$




→ če $S \in F \iff w = L(G)$
– če $w \in L(G)$,
dobimo drevo izpeljav v $G'$
– zahtevnost: za $|w|=n$ je $O(n^2) + O($neki od
– obstajajo linearni (po dolžini izpeljave): LL, LR, [illegible]) → deterministične
a so manj splošni
– potrebujemo CNO, za LR ne.
→ Earley algoritem

zakaj: enotna oblika, koristno pri reševanju KNG v SA

## Greibachova normalna oblika

→ G je v GNO, če so vse produkcije oblike
$A \to a\alpha,\ \alpha \in N^*,\ a \in T$

→ lema:
za dano KNG, pri čemer so vse produkcije

$A \to \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \dots \mid \alpha_n$
$A \to A\bar{\alpha}_1 \mid \dots \mid A\bar{\alpha}_m$

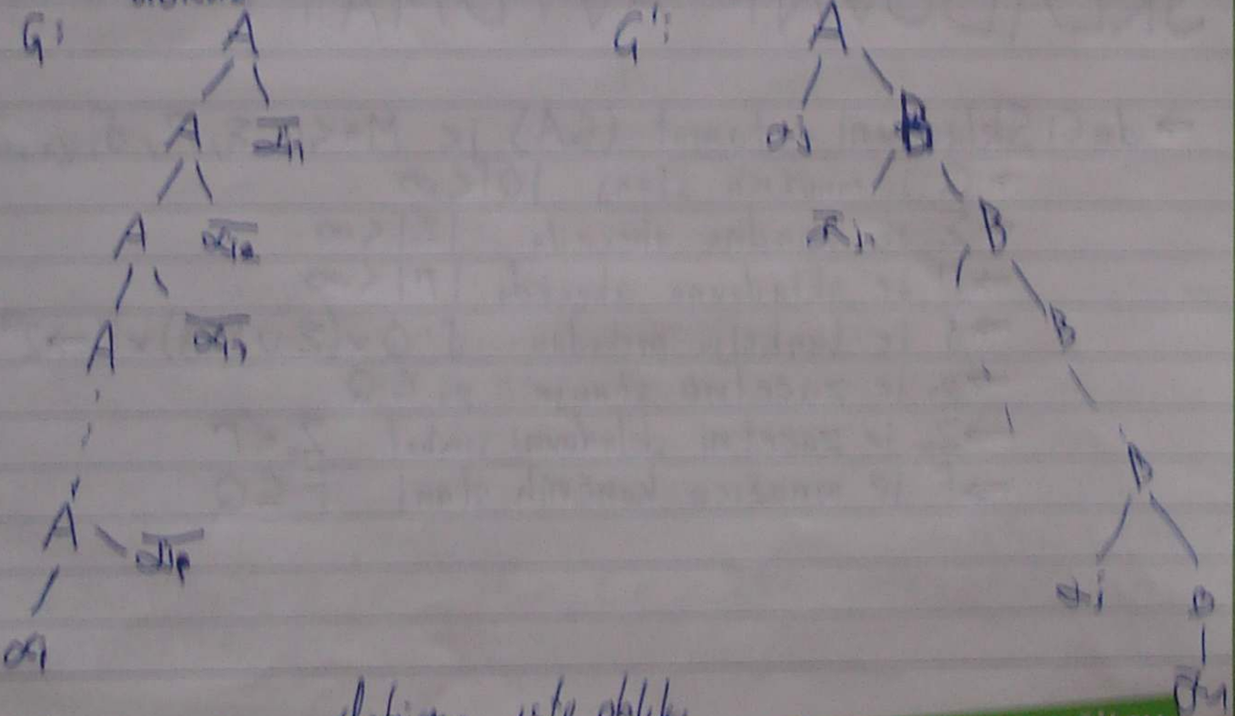
– pomeni da lahko levo rekurzivne

$A \neq A\alpha_i \ \forall \alpha_i \quad \forall i \in N$
$G' = \langle N \cup \{B\}, T, P', S \rangle$ pri $B \notin N$ v kateri A iz G nadomestimo

$A \to \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \dots \mid \alpha_n$
$A \to \cancel{A\bar{\alpha}_1 \mid \dots \mid A\bar{\alpha}_m}$ $\alpha_1 B \mid \alpha_2 B \mid \dots \mid \alpha_n B$

$B \to \bar{\alpha}_1 \mid \bar{\alpha}_2 \mid \dots \mid \bar{\alpha}_m$
$B \to \bar{\alpha}_1 B \mid \bar{\alpha}_2 B \mid \dots \mid \bar{\alpha}_m B$

dokaz




dobimo isto obliko

→ izrek: za $\forall$ KNG $G$ obstaja $G'$ v GNO, da velja $L(G) \setminus \{\varepsilon\} = L(G')$

dokaz: $G$ v CNO, imamo postopek:
- dvigovanja $A_i \to A_j \alpha,\ i<j$
- odpravljanje leve rekurzije
- substitucije spremenljivk

→ izrek: DKNJ $\subset$ KNJ

dokaz: $L = \{a^n b^n c^m d^m \mid n,m \geq 1\} \cup \{a^n b^m c^m d^n \mid n,m \geq 1\}$

za $L$ $\exists$ KNG, $\nexists$ nedvoumna KNG

$a^k b^k c^k d^k \in L,\ k > 1$

...

# SKLADOVNI AVTOMATI

→ def: Skladovni avtomat (SA) je $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$
- → $Q$ je množica stanj $|Q| < \infty$
- → $\Sigma$ je vhodna abeceda $|\Sigma| < \infty$
- → $\Gamma$ je skladovna abeceda $|\Gamma| < \infty$
- → $\delta$ je funkcija prehodov $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$
- → $q_0$ je začetno stanje $q_0 \in Q$
- → $Z_0$ je začetni skladovni simbol $Z_0 \in \Gamma$
- → $F$ je množica končnih stanj $F \subseteq Q$

TOR 13



→ primer: $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$$\left.\begin{aligned}
\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) &= \langle q_F, Z_0 \rangle \\
\delta(q_0, a, Z_0) &= \langle q_a, Z_a Z_0 \rangle \\
\delta(q_a, a, Z_a) &= \langle q_a, Z_a Z_a \rangle \\
\delta(q_a, b, Z_a) &= \langle q_b, \varepsilon \rangle \\
\delta(q_b, b, Z_a) &= \langle q_b, \varepsilon \rangle \\
\delta(q_b, \varepsilon, Z_0) &= \langle q_F, Z_0 \rangle
\end{aligned}\right\} ①$$

avtomat se ustavi tudi če prebere celo besedo in ima prazen sklad

$$\delta(q_0', \varepsilon, Z_0') = \langle q_0, Z_0 Z_0' \rangle$$

$\dots$ ①

$$\delta(q_F, \varepsilon, Z_0) = \langle q_F', \varepsilon \rangle$$
$$\delta(q_F', \varepsilon, Z_0') = \langle q_F, \varepsilon \rangle$$

?// bi lahko ukinili $Q \Rightarrow M = \langle \Sigma, \Gamma, \delta, Z_0 \rangle$

$\delta : (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{\Gamma^*}$

KNG → SA

GNO

ima le eno stanje, torej ga lahko izpustimo

→ trenutni opis

$\langle q, w, \gamma \rangle \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

trenutno stanje

preostanek vhodne besede

vsebina sklada

korak skladovnega avtomata

$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

$\langle q, aw, Z\gamma \rangle \vdash_M \langle p, w, \gamma'\gamma \rangle$ n.t.k. $\langle p, \gamma' \rangle \in \delta_M(q, a, Z)$

posplošitev $\vdash_M^*$

→ def: Jezik SA je definiran kot:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$$

$$\to L_F(M) = \{ w \mid \langle q_0, w, Z \rangle \vdash_M^* \langle q_F, \varepsilon, \gamma \rangle \land q_F \in F \}$$

po kriteriju končnega stanja

$$\to L_\emptyset(M) = \{ w \mid \langle q_0, w, Z_0 \rangle \vdash_M^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle \}$$

po kriteriju praznega sklada

?// Kakšen je bil v resnici razvoj hiearhije jazikov?

kaotičen... ~195x
okrog Chomskya → univerzalna slovnica ← lingvisti
okrog Chomskya → jezikovna sposobnost ← psihologija
→ gramatiko

Bachus Naver → BNF → gramatiko
Turing et. al. ~1936

→ za $\forall M_1 \in SA$, ki sprejema po kriteriju končnega stanja, obstaja $M_2 \in SA$, ki sprejema po kriteriju praznega skladu

dokaz: $M_1 = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$
$M_2 = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', Z_0', \emptyset \rangle$

$Q' = Q \cup \{ q_0', q_\varepsilon \}$ ; $q_0', q_\varepsilon \notin Q$
$\Gamma' = \Gamma \cup \{ Z_0' \}$ ; $Z_0' \notin \Gamma$

"zaženemo" $M_1$ ← $\delta'(q_0', \varepsilon, Z_0) = \{ (q_0, Z_0 Z_0') \}$
izvajamo $M_1$ ← $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$, za $\forall q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Z \in \Gamma$
končno stanje $M_1$ ← $\delta'(q_F, \varepsilon, Z) \ni (q_\varepsilon, Z)$, za $\forall q_F \in F, \forall Z \in \Gamma'$
izprazni sklad ← $\delta'(q_\varepsilon, \varepsilon, Z) \ni (q_\varepsilon, \varepsilon)$, za $\forall Z \in \Gamma'$

TOR 17



dokaz (nad.)

$\forall w \in L(M_1): \langle q_0, w, Z_0\rangle \vdash^*_{M_1} \langle q_F, \varepsilon, \gamma\rangle$

$\langle q_0', w, Z_0'\rangle \vdash_{M_2} \langle q_0, w, Z_0\rangle \vdash^*_{M_2} \langle q_F, \varepsilon, \gamma Z_0'\rangle$

$\vdash_{M_2} \langle q_E, \varepsilon, \gamma Z_0'\rangle \vdash^*_{M_2} \langle q_E, \varepsilon, \varepsilon\rangle$

$M_2 \to M_1$

$\forall w \in L(M_2)$: trivialno → $M_1$ je vložen v $M_2$

→ za $\forall M_1 \in SA$, ki sprejema po kriteriju praznega sklada $\exists M_2 \in SA$, ki sprejema po kriteriju končnega stanja

dokaz:

$M_1 = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset\rangle$

$M_2 = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', Z_0', \{q_F\}\rangle$

$Q' = Q \cup \{q_0', q_F'\}$ , $q_0', q_F' \notin Q$

$\Gamma' = \Gamma \cup \{Z_0'\}$ , $Z_0' \notin \Gamma$

$\delta'(q_0', w, Z_0') = \{(q_0, w, Z_0 Z_0')\}$

$\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ $\forall q \in Q, a = \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Z \in \Gamma$

$\delta(q, \varepsilon, Z_0') \ni (q_F, Z_0')$

$\forall w \in L(M_1): \langle q_0, w, Z_0\rangle \vdash^*_{M_1} \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle$

$\langle q_0', w, Z_0'\rangle \vdash_{M_2} \langle q_0, w, Z_0 Z_0'\rangle \vdash^*_{M_2} \langle q, \varepsilon, Z_0'\rangle$

$\vdash_{M_2} \langle q_F, \varepsilon, Z^0\rangle$

→ Izrek: za $\forall G \in KNG$: $\exists M \in SA$, ki sprejema po kriteriju praznega sklada, da velja $L(M) = L(G)$

dokaz: predpostavimo: $\varepsilon \notin L(G)$

$G \to G' \in GNO$ $\quad A \to a\alpha$, $\alpha \in N^*$

$G' = \langle N, T, P, S\rangle$

$M = \langle \{q\}, T, N, \delta, \{q\}, S, \emptyset\rangle$

$\delta(q, a, A) \ni (q, \alpha)$ za $\forall A \to a\alpha \in P$



Klikni in se prepričaj: www.studentski-servis.com

FOR 15



(1.P.) $A \Rightarrow^{*}_{LM} w\alpha$ ntk. $\langle q, w, A\rangle \vdash^{*}_{M} \langle q, \varepsilon, \alpha\rangle$ / DW 87.22)

še $\varepsilon$...

$G \to G' \in GNO \to M$

$\delta'(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q', \varepsilon), (q, S)\}$

$\delta'(q, a, X) = \delta(q, a, X) \quad \forall a \in T, \forall X \in N$

→ def: DSA $M$ je tak $M$, da velja:

① $\forall \langle q, a, Z\rangle \in Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$

$|\delta(q, a, Z)| \leq 1$

② $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset \Rightarrow \delta(q, a, Z) = \emptyset$

za $\forall \langle q, a, Z\rangle \in Q \times \Sigma \times \Gamma$

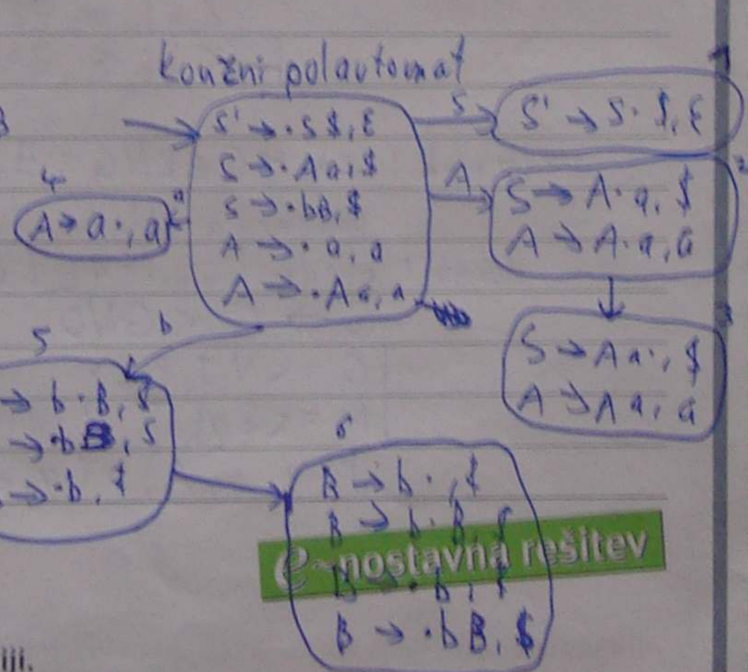
primer: $S' \to S\,\$$

$S \to Aa \mid bB$

$A \to a \mid Aa$

$B \to b \mid bB$

končni polavtomat



TOR 15

← KNG → SA



→ Izrek: $\forall M \in SA_\phi \ \exists G \in KNG : L_\phi(M) = L(G)$ ← SA → KNG

Dokaz: $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \phi \rangle$

$G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$

$V = \{S\} \cup \{[q, A, p] \mid q, p \in Q \wedge A \in \Gamma\}$

$P = \{S \to [q_0, Z_0, q] \mid q \in Q\} \cup$ ← TU BI LAHKO SPRESELI BESEDO

$\cup \{[q, A, q_{m+1}] \to a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \dots [q_m, B_m, q_{m+1}] \mid$

$\mid \delta(q, a, A) \ni \langle q_1, B_1 B_2 \dots B_m \rangle, \forall q_2, q_3 \dots q_{m+1} \in Q\}$

$[q, A, p]$ gre iz stanja $q$ v $p$, da $A$ s sklada in porabi del vhoda.

dokažimo:

$\langle q, x, A \rangle \vdash_M^* \langle p, \varepsilon, \varepsilon \rangle$ n.t.k. $[q, A, p] \Rightarrow_G^* x$

ind. po dolžini izpeljave:

$(\Rightarrow)$ $i = 1$: $\langle q, x, A \rangle \vdash_M^1 \langle p, \varepsilon, \varepsilon \rangle$ $x = \{\varepsilon\} \cup \Sigma$ ← 0 ali 1 znak

$\langle p, \varepsilon \rangle \in \delta(q, x, A)$

$[q, A, p] \Rightarrow x$ ← ŽE TA PRODUKCIJA, V TU SMER ZA 1 VELJA

$i > 1$: $\langle q, x, A \rangle = \langle q, a y_1 y_2 \dots y_n, A \rangle \vdash_M \langle q_1, y_1 y_2 \dots y_n, B_1 B_2 \dots B_n \rangle \vdash_M^*$

$\vdash_M^* \langle q_2, y_2 y_3 \dots y_n, B_2 B_3 \dots B_n \rangle \vdash_M^* \dots \vdash_M^*$ ← SPREJEMA $y_i$-je

$\vdash_M^* \langle q_n, y_n, B_n \rangle \vdash_M^* \langle q_{n+1}, \varepsilon, \varepsilon \rangle$ ← $p = q_{n+1}$

prvi korak: $\langle q_1, B_1 B_2 \dots B_n \rangle \ni \delta(q, x, A)$

naprej: $\langle q_j, \overset{y_j y_{j+1} \dots y_n}{B_j} B_{j+1} \dots B_n \rangle \vdash_M^* \langle q_{j+1}, \overset{y_{j+1} y_{j+2} \dots y_n}{B_{j+1}} B_{j+2} \dots B_n \rangle$ ← $y_{j+1}$ nima $B_{j+1}$ vpliva na trenutni izračun

$\langle q_j, y_j, B_j \rangle \vdash_M^* \langle q_{j+1}, \varepsilon, \varepsilon \rangle$ ← ∃ podizpeljava nekaj krajša; I.P.

„podprogram" $y_j$

$[q_j, B_j, q_{j+1}] \Rightarrow_G^* y_j$

$[q, A, q_{n+1}] \Rightarrow_G^1 a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \dots [q_n, B_n, q_{n+1}] \Rightarrow_G^*$

$\Rightarrow_G^* a y_1 y_2 \dots y_n = x$

$(\Leftarrow)$ $[q, A, p] \Rightarrow_G^* x \Rightarrow \langle q, x, A \rangle \vdash_M^* \langle p, \varepsilon, \varepsilon \rangle$

$i = 1$: $\langle p, \varepsilon \rangle \in \delta(q, x, A)$ $x = \{\varepsilon\} \cup \Sigma$, $[q, A, p] \to x$

$\langle q, x, A \rangle \vdash \langle p, \varepsilon, \varepsilon \rangle$

$i > 1$: $[q, A, p] \Rightarrow_G a[q_1, C_1, q_2][q_2, C_2, q_3] \dots [q_n, C_n, q_{n+1}] \Rightarrow_G^* a x'$

pri $x = a x'$, $p = q_{n+1}$

$\Rightarrow_G^* a_1 x_1 [q_2, C_2, q_3][q_3, C_3, q_4] \dots [q_n, C_n, q_{n+1}] \Rightarrow_G^* a x_1 x_2 \dots x_n$

pri $\forall j \in \{1..n\}: [q_j, C_j, q_{j+1}] \Rightarrow_G^* x_j$ ← KRAJŠA OD $i$-ja

$\langle q_j, x_j, C_j \rangle \vdash_M^* \langle q_{j+1}, \varepsilon, \varepsilon \rangle$

$\langle q_j, x_j x_{j+1} \dots x_n, C_j C_{j+1} \dots C_n \rangle \vdash_M^* \langle q_{j+1}, x_{j+1} x_{j+2} \dots x_n, C_{j+1} C_{j+2} \dots C_n \rangle$

$\langle q_1, C_1 \ldots C_n \rangle \in \delta(q, a, A)$

$\langle q, a x_1 \ldots x_n, A \rangle \vdash \langle q_1, x_1 \ldots x_n, C_1 \ldots C_n \rangle \vdash^* \ldots \vdash^*$

$\vdash^* \langle q_n, x_n, C_n \rangle \vdash^* \langle q_{n+1}, \varepsilon, \varepsilon \rangle = \langle p, \ldots$

→ Lema o napihovanju za KNJ

→ Izrek: Dan je $L \in KNJ$, za katerega obstaja $n(L)$, da vsako besedo $w \in L$, $|w| > n$, lahko razbijemo na $u, v, x, y, z$

① $|vy| \geq 1$

② $|vxy| \leq n$

③ $\forall i \geq 0 : u v^i x y^i z \in L$

Razlaga: $|w| > n$ in $|p| > |N|$, $G = \langle N, T, P, S \rangle$

$S \Rightarrow^* uAz \Rightarrow^* uvAyz \Rightarrow uvxyz$

$S \Rightarrow^* uAz \Rightarrow^* uvAyz \Rightarrow^* uvvAyyz \Rightarrow^* uvv\ldots$

// obstaja nek $i$ ... tak

Primer: $L = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \} \notin KNJ$

predpostavimo $L \in KNJ \Rightarrow \exists n$

$w = a^n b^n c^n = uvxyz$

pri vseh možnih rezih dobimo niz iz max. dveh znakov

pri $i = 0$: $uxz \in L$ velja: ima $< n$ b ali c, a ali c, b ali ...

torej $uxz \notin L \Rightarrow L \notin KNJ$

TOR 16

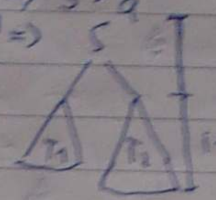


Dokaz: za $L$ obstaja $G \in CNO$, da velja $L \setminus \{\varepsilon\} = L(G)$

vsa drevesa izpeljav po $G$ so dvojiška

če višina izpeljave $=1 \Rightarrow S \to a$

$>1 \Rightarrow$




$h(T) \le$

$i = 1$ ✓

$i > 1$: $\le 2^{i-2} + 2^{i-2}$

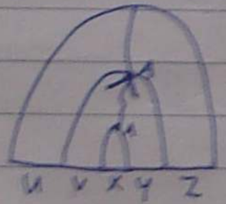
$\le 2^{i-1}$

$G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$, $|N| = k$, $n = 2^k$

beseda dolžine pri [illegible] ima drevo izpeljav višine vsaj $k+1$ povezav.

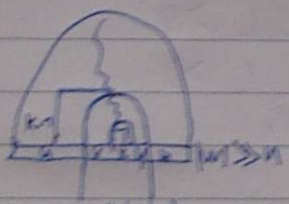
obstaja pot s $k+1$ povezavami, $k+2$ vozlišči $\Rightarrow$ $k+1$ spremenljivkami

$\Rightarrow$ vsaj ena spr. se ponovi




pri CNO imamo $A \to X_1 X_2$

$\to$ v ali y nista oba $\varepsilon$




max $2^k$ listov

max $n$ listov

Primer: $L = \{a^m b^{m^2} \mid m > 0\} \notin KNJ$

$\exists n: a^n b^{n^2} = uvxyz$

(1) $vy = a^k$ pri $i$: $a^{n+(i-1)k} b^{n^2}$, če $i=0$: $a^{n-k} b^{n^2} \notin L$

(2) $vy = b^k$ pri $i$: $a^n b^{n^2+(i-1)k}$, če je $i=0$: $a^n b^{n^2-k} \notin L$

(3) $vy = a^k b^l$

a) $v = a^k$ in $y = b^l$: pri $i$: $a^{n+(i-1)k} b^{n^2+(i-1)l}$

$(n+(i-1)k)^2 = n^2 + (i-1)l$

$n^2 + 2n(i-1)k + (i-1)^2 k^2 = n^2 + (i-1)l$

$2nk + (i-1)k^2 = l$

$i = \frac{l - 2nk}{k^2} + 1$

$a^{n+(i+1)k} b$

KNG = SOBESEDNO PROSTA SLOVNICA

KAJ JE [illegible]? [illegible]



→ Ogdenova lema

→ Izrek: dan naj bo KNJ $L$, za katerega $\exists\, n(L)$, da se da vsak $w \in L$ razbiti na podnize $uvxyz$:

① $vy$ ima vsaj eno označeno mesto

② $vxy$ ima največ $n$ označenih mest

③ $\forall i \geq 0: uv^i x y^i z \in L$

pri pogoji, da ima $w$ vsaj $n$ označenih mest

Primer: $L = \{ a^m b^{m^2} \mid m > 0 \} \overset{?}{\in}$ KNJ

$w = \underline{a^n} b^{n^2}$ ← označimo vse $a$

① $vy = a^k$

② $vy = a^k b^l$, $k, l > 0$

a) $v = a^k$, $y = b^l$ ← ISTO KOT PRI LEMI O NAPIHOVANJU // ČE GA VZAMEŠ VEN KOT PRI $i = 0$ :)

b) sicer: znaki se premešajo

$L = \{ a^i b^j c^k \mid i \neq j \neq k \neq i \} \overset{?}{\in}$ KNJ

$w = \underline{a^n} b^{n+n!} c^{n+(2n)!}$ ← WHY WOULD YOU DO THAT? MENDA FAKULTETA MAGIČNA [illegible]

① $vy = a^l$; $l > 0$

② $v = a^l$, $y = b^{l'}$; $l, l' > 0$

③ $v = a^l$, $y = c^{l'}$; $l, l' > 0$

④ sicer: zmešamo znake ali

⑤ ni označenih mest

① $a^{n+(i-1)l} b^{n+n!} c^{n+(2n)!}$; $n \geq l > 0$

$= a^{n+(i-1)l} b^{n+\frac{n!}{l} l} c^{n+(2n)!}$, pri $(i-1) = \frac{n!}{l}$ dobimo enako $a$, $b$-jev ✓

② $a^{n+(i-1)l} b^{n+n!+(i-1)l'} c^{n+2n!}$; $n \geq l > 0$

$= a^{n+(i-1)l} b^{n+n!+(i-1)l'} c^{n+2\frac{n!}{l} l}$, pri $(i-1) = 2\frac{n!}{l}$ ✓

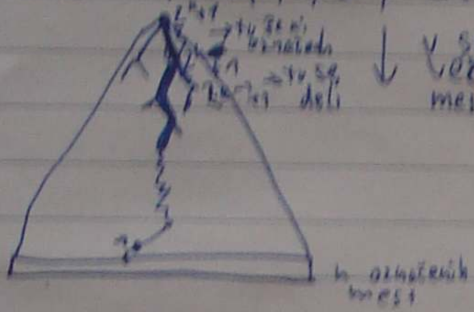
$L = \{ a^i b^j c^k d^l \mid \text{bodisi } i = 0, \text{ bodisi } j = k = l \}$

TOR 17

1. Def
2. Dokaz
3. C?k



→ Dokaz: $G = \langle N, T, P, S \rangle$, $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$, $G \in CNO$




↓ v smeri več označenih mest

$|N| = k$ $n = 2^k + 1$ ← označenih mest

tovrg k delitev+ zadnji – k+1 vozlišč v izpeljavi

imamo 2 vrsti vozlišč

(a) → vozlišča, ki imajo vse označena mesta vzdolž ene strani

(2) → vozlišča, kjer se mesta razdelijo med oba sinova ← [illegible]

koren?

→ ne vemo

listi

→ (2) po CNO