TEORIJA REDOVA

NUMERIČKI REDOVI

1. OSNOVNI POJMOVI

DEFINICIJA 1. Neka je $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ realan niz. Izraz oblika

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

naziva se beskonačan red, ili kraće red. Broj u_n naziva se opšti član reda (1).

DEFINICIJA 2. Zbir

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2}$$

naziva se n-ta parcijalna suma reda $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$.

DEFINICIJA 3. Za red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$ kažemo da je konvergentan, odnosno divergentan, ako je niz $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definisan sa (2), konvergentan, odnosno divergentan. Specijalno, ako je niz $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definisan sa (2) konvergentan i ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, kažemo da zbir (suma) reda $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ iznosi S i pišemo $S = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Dakle, u slučaju konvergentnog reda simbol $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$ označava ne samo taj red, već i njegovu sumu.

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

U ovom poglavlju razmatraćemo uglavnom redove u prostoru realnih ili kompleksnih brojeva. Za takve redove kažemo da su *numerički redovi*. Ukoliko je opšti član reda dat pomoću neke funkcije, na primer $u_n = u_n(x)$, definisane na segmentu $[a, b]$, kažemo da se radi o *funkcionalnom redu*.

PRIMER 1. Posmatrajmo numerički red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots . \tag{3}$$

Kako je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{i} \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

imamo
$$S_n = \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1},$$
odakle zaključujemo da je red (3) konvergentan, s obzirom da je
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$
Dakle suma reda je $S = 1$.

PRIMER 2. Harmonijski red
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \tag{4}$$
je divergentan, jer parcijalne sume ovog reda čine harmonijski niz koji je divergentan. Daćemo ovde još jedan dokaz divergencije harmonijskog reda.

Na osnovu nejednakosti $(1 + 1/k)^k < e$ $(k \in \mathbb{N})$ imamo
$$\frac{1}{k} > \log\Big(1 + \frac{1}{k}\Big) \quad (k \in \mathbb{N}).$$
Zato za parcijalne sume harmonijskog reda važi
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &> \sum_{k=1}^{n} \log\Big(1 + \frac{1}{k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \big(\log(k+1) - \log k\big) \\ &= \log(n+1), \end{aligned}$$
odakle zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, tj. da red (4) divergira.

DEFINICIJA 4. Neka je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ konvergentan, čija je suma S i neka je S_n njegova n-ta parcijalna suma. Razlika
$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$
naziva se ostatak reda.

Na osnovu prethodnog, jasno je da svaku teoremu koja se odnosi na nizove možemo jednostavno preformulisati za redove, stavljajući $u_1 = S_1$, $u_2 = S_2 - S_1$, $u_3 = S_3 - S_2$, itd. Tako na primer, opšti Cauchyev kriterijum za konvergenciju realnih nizova se može formulisati na sledeći način:

TEOREMA 1. *Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je*
$$\Big|\sum_{k=n}^{m}\Big| \le \varepsilon \quad (m \ge n \ge n_0). \tag{5}$$

Nejednakost (5) sleduje iz nejednakosti $|S_m - S_{n-1}| < \varepsilon$ $(m \geq n \geq n_0)$ pri čemu je

$$\begin{aligned} S_m - S_{n-1} &= (S_m - S_{m-1}) + (S_{m-1} - S_{m-2}) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) \\ &= u_m + u_{m-1} + \cdots + u_n. \end{aligned}$$

TEOREMA 2. *Ako je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ *konvergentan, tada njegov opšti član teži nuli, tj.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Obrnuto tvrđenje ne važi, što je evidentno iz Primera 2. Dakle uslov $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ je potreban, ali ne i dovoljan za konvergenciju reda.

PRIMER 3. Red $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ je divergentan, jer njegov opšti član ne teži nuli.

TEOREMA 3. *Ako su redovi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ *konvergentni, tada je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$ *takođe konvergentan i važi*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \tag{6}$$

<u>Dokaz.</u> Neka su U_n, V_n i S_n redom parcijalne sume redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$. Tada je $S_n = U_n + V_n$. Kako postoje granične vrednosti $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$, zaključujemo da postoji i granična vrednost $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ i da je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n + \lim_{n\to+\infty} V_n,$$

što je ekvivalentno sa (6).

<u>2. REDOVI SA NENEGATIVNIM ČLANOVIMA</u>

Posmatraćemo redove

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \tag{1}$$

kod kojih je

$$u_n \geq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

S obzirom na osobinu (2), niz parcijalnih suma $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reda (1) je neopadajući, što znači da taj niz konvergira ka nekoj nenegativnoj vrednosti S ili određeno divergira ka $+\infty$.

TEOREMA 1. *Neka su* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *redovi sa nenegativnim članovima. Tada je:*

1) *Ako je red* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergentan i važi da je* $b_n \le a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ *onda je i red* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *konvergentan;*
2) *Ako red* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *divergira i važi da je* $b_n \le a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ *onda divergira i red* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*;*
3) *Ako za redove* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *važi*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = p \quad (p \in \mathbb{R} \land p > 0)$$

onda ovi redovi istovremeno konvergiraju ili divergiraju.

Za utvrđivanje konvergencije ili divergencije nekog reda mogu se koristiti neke osobine njegovog opšteg člana i na osnovu njih dobiti izvesna pravila koja se nazivaju *kriterijumi konvergencije.*

TEOREMA 2. *Neka je dat red sa pozitivnim članovima*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \quad u_n > 0 \ (n = 1, 2, \dots). \tag{3}$$

a) *Ako postoje pozitivan broj* q $(0 < q < 1)$ *i prirodan broj* n_0 *takvi da je za svako* $n > n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1. \tag{4}$$

tada je red (3) konvergentan.

b) *Ako postoji prirodan broj* n_0 *takav da je za svako* $n > n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1,$$

tada je red (3) divergentan.

Dokaz. Neka je $0 < q < 1$. Na osnovu (4), tj.

$$u_{n_0+1} \le q u_{n_0}, \quad u_{n_0+2} \le q u_{n_0+1} \le q^2 u_{n_0}, \dots,$$

zaključujemo da je $u_{n_0+k} \le q^k u_{n_0}$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Kako je red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n_0} q^k = u_{n_0} \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \frac{q}{1-q} u_{n_0}$$

konvergentan na osnovu Teoreme 1, imamo da je i red $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n$ konvergentan. Kako se red (3) razlikuje od ovog reda samo za konačan broj članova (tačnije, n_0 prvih članova) zaključujemo da je i red (3) konvergentan.

Obrnuto, ako postoji n_0 takvo da za svako $n > n_0$ važi $u_{n+1}/u_n \geq 1$, tada imamo

$$u_{n_0+1} \geq q u_{n_0}, \quad u_{n_0+2} \geq u_{n_0+1} \geq u_{n_0}, \text{ itd.}$$

Kako je $u_0 > 0$ može se zaključiti da opšti član reda ne teži nuli jer je ograničen pozitivnom konstantom sa donje strane. Zato red (3), u ovom slučaju, divergira. $\square$

Ponekad je jednostavnije koristiti sledeću posledicu Teoreme 2. Inače, tvrđenje Teoreme 2 je poznato kao *D'Alembertov* kriterijum.

POSLEDICA 1. *Neka je za red sa pozitivnim članovima (3)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d.$$

Ako je $d < 1$, red (3) je konvergentan, a ako je $d > 1$ red je divergentan.

PRIMER 1. Za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

što znači da je red konvergentan. Štaviše, i red sa opštim članom $u_n = x^n/n!$, gde je $x > 0$, je konvergentan jer je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0.$$

Sledeća teorema daje tzv. *Cauchyev* kriterijum za konvergenciju redova.

TEOREMA 3. *Neka je dat red sa nenegativnim članovima*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad u_n \geq 0 \ (n = 1, 2, \dots). \tag{5}$$

a) Ako postoje pozitivan broj q $(0 < q < 1)$ i prirodan broj n_0 takvi da je za svako $n > n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1. \tag{6}$$

dati red je konvergentan.

b) Ako postoji prirodan broj n_0 takav da je za svako $n > n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1,$$

tada dati red divergira.

__**Dokaz.**__ Ako za $n > n_0$ važi (6), tada je $u_n \leq q^n$. Kako je za $0 < q < 1$, geometrijski red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ konvergentan, zaključujemo da je i dati red (5), takođe konvergentan.

Međutim, ako je $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, tj. $u_n \geq 1$, za svako $n > n_0$, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$ sleduje divergencija reda (5). $\square$

POSLEDICA 2. *Neka za red sa nenegativnim članovima (5) postoji granična vrednost*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = d.$$

Ako je $d < 1$, red (5) je konvergentan, a ako je $d > 1$ red je divergentan.

PRIMER 2. Za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ imamo $u_n = 1/n^n$. Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

dati red je konvergentan.

Primetimo da i Cauchyev i D'Alembertov kriterijum u slučaju $d = 1$ ne daju informaciju o konvergenciji ili divergenciji posmatranog reda.

U daljem tekstu, bez dokaza, navodimo neke strožije kriterijume za konvergenciju redova sa pozitivnim članovima.

TEOREMA 4. *Da bi red sa pozitivnim članovima (3) bio konvergentan, potrebno je i dovoljno da postoje pozitivan niz $\{\gamma_n\}$ i konstanta q tako da je*

$$\gamma_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \gamma_{n+1} > q > 0. \tag{7}$$

Ovaj kriterijum je poznat kao *Kummerov* kriterijum. Primetimo da u slučaju $\gamma_n = 1$ ovaj kriterijum daje D'Alembertov kriterijum. Ako stavimo $\gamma_n = n$, (7) se svodi na

$$n\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) > q > 0,$$

tj.

$$n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) > 1 + q > 1.$$

Tako dobijamo *Raabeov* kriterijum.

TEOREMA 5. *Red sa pozitivnim članovima (3) je konvergentan ako postoje pozitivna konstanta $r > 1$ i prirodan broj n_0 tako da za $n > n_0$ važi*

$$n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) > r > 1.$$

U slučaju kada je za dovoljno veliko n

$$n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) < 1$$

red je divergentan.

Sledeći kriterijum je poznat kao *Cauchyev integralni* kriterijum.

TEOREMA 6. *Neka je funkcija* $x \mapsto f(x)$ *definisana za svako* $x \geq 1$ *i neka je neprekidna, pozitivna i nerastuća na* $[1, +\infty)$. *Tada su red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

i nesvojstveni integral

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx$$

ekvikonvergentni.

PRIMER 3. Za red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

sa opštim članom $u_n = 1/n^p$, odgovarajuća funkcija je definisana sa

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \quad (x \geq 1).$$

Dati nesvojstveni integral konvergira za $p > 1$, dok je za $p \leq 1$ divergentan. Dakle i dati red je konvergentan za $p > 1$, odnosno divergentan za $p \leq 1$.

3. REDOVI SA ČLANOVIMA KOJI MENJAJU ZNAK I ALTERNATIVNI REDOVI

Do sada smo razmatrali redove sa nenegativnim (ili pozitivnim) članovima. Sada ćemo proučiti numeričke redove sa članovima koji menjaju znak. Neka je takav red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n. \tag{1}$$

Pored ovog reda možemo razmatrati i red sa nenegativnim članovima $|u_n|$, tj.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|. \tag{2}$$

Sa S_n i A_n označimo njihove parcijalne sume, tj.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \text{i} \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$$

i primetimo da je

$$|S_n| = |u_1 + u_2 + \cdots + u_n| \leq |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| = A_n.$$

Ovo znači da je red (1) uvek konvergentan kada konvergira red (2). Naravno, obrnuto ne važi, tj. kada je red (1) konvergentan, red (2) može biti konvergentan ili divergentan.

DEFINICIJA 1. **Za red (1) kažemo da je apsolutno konvergentan ako je red (2) konvergentan.**

DEFINICIJA 2. **Za konvergentan red (1) kažemo da je semikonvergentan (uslovno konvergentan) ako je red (2) divergentan.**

PRIMER 1. Red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ je apsolutno konvergentan jer je red njegovih apsolutnih članova konvergentan (geometrijski red sa količnikom $1/2$). Dakle ovde imamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots = \frac{1}{3}$$

i

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$

DEFINICIJA 3. **Za realni numerički red** $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ **kažemo da je** *alternativan* **ako je** $a_n a_{n+1} < 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$.

Drugim rečima, članovi alternativnog reda naizmenično su pozitivni i negativni (ili obrnuto). Ne umanjujući opštost, možemo posmatrati samo slučaj kada je prvi član pozitivan, tj. $u_1 > 0$. Tada se alternativni red može predstaviti u obliku

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

Ovde smo uzeli da je $u_n = (-1)^{n-1} a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Za konvergenciju alternativnog reda (3) važi sledeći kriterijum, poznat kao Leibnizov kriterijum:

TEOREMA 1. *Ako apsolutne vrednosti članova reda (3) monotono opadaju i teže nuli, tj.*

$$a_n > a_{n+1} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{4}$$

i

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0, \tag{5}$$

alternativni red je konvergentan. U tom slučju ostatak reda R_n je po apsolutnoj vrednosti manji od prvog zanemarenog člana i ima isti znak kao i taj član, tj.

$$R_n = S - S_n = \lambda (-1)^n a_{n+1}, \quad 0 \le \lambda \le 1,$$

gde su S i S_n suma reda i n-ta parcijalna suma, respektivno.

<u>**Dokaz.**</u> Za alternativni red (3) posmatrajmo, najpre, parcijalne sume parnog indeksa, tj.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k,$$

koje se mogu predstaviti u obliku

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Na osnovu uslova (4), zaključujemo da je $\{S_{2n}\}_{n=1}^{+\infty}$ pozitivan i monotono rastući niz. Kako je

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1,$$

vidimo da je ovaj niz i ograničen. Dakle, zaključujemo da je niz parcijalnih suma parnog indeksa konvergentan. Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$.

S druge strane, imamo da je $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Kako je zbog uslova (5), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$, zaključujemo da i niz parcijalnih suma neparnog indeksa konvergira ka istoj vrednosti S, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} + \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = S.$$

Dakle, niz parcijalnih suma $\{S\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan, ili, što je ekvivalentno, alternativni red (3) je konvergentan.

Primetimo da za red (3) važe nejednakosti

$$S_{2n} \le S \le S_{2n-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{6}$$

Prva nejednakost je očigledna, s obzirom da S predstavlja graničnu vrednost monotono rastućeg niza $\{S_{2n}\}_{n=1}^{+\infty}$. Da bismo dokazali drugu nejednakost u (6) dovoljno je primetiti da je

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) < S_{2n-1},$$

tj. da je niz $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{+\infty}$ monotono opadajući, čija je granica opet S.

Na osnovu nejednakosti (6) dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &\le S_{2n-1} - S \le S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n}, \\ 0 &\le S - S_{2n} \le S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}, \end{aligned}$$

tj. $R_n = S - S_n = \lambda(-1)^n a_{n+1}$, gde je $0 \le \lambda \le 1$. $\square$

PRIMER 2. Neka je dat red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \tag{7}$$

Prema Leibnizovom kriterijumu red je konvergentan, a za ostatak R_n važi ocena $|R_n| < 1/(n+1)$. Kako su $S_1 = 1$ i $S_2 = 1/2$, uzimajući $n = 1$ u (6) dobijamo ocenu za sumu reda (7),

$$\frac{1}{2} \le S \le 1.$$

Bolja ocena može se dobiti uzimajući $n > 1$ u (6). Na primer , za $n = 2$ imamo $7/12 \le S \le 5/6$.

Važi sledeća Riemannova teorema koju navodimo bez dokaza.

TEOREMA 2. *Ako je red (1) semikonvergentan, tada se premeštanjem njegovih članova može dobiti red čija suma ima proizvoljnu vrednost.*

FUNKCIONALNI REDOVI

1. KONVERGENCIJA FUNKCIONALNIH REDOVA

Pod *funkcionalnim redom* podrazumevamo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \tag{1}$$

gde je opšti član reda definisan pomoću realne funkcije realne promenljive $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ili, opštije, pomoću kompleksne funkcije kompleksne promenljive $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dakle, pretpostavimo da je opšti član reda dat pomoću funkcije $u_n : X \to X$, gde je $X = \mathbb{R}$ ili $X = \mathbb{C}$. Tipični primeri funkcionalnih redova su

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-\alpha)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{2}$$

DEFINICIJA 1. **Za red (1) kažemo da je konvergentan u tački** $x = x_0 \in X$**, ako konvergira numerički red** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$.

Skup tačaka $D \subset X$ u kojima red (1) konvergira naziva se *oblast konvergencije* funkcionalnog reda (1).

DEFINICIJA 2. **Za red (1) kažemo da je** *apsolutno konvergentan* **na** D **ako za svako** $x \in D$ **red** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$ **konvergira.**

Kao i kod numeričkih redova definišimo parcijalnu sumu reda $S_n(x)$ i ostatak reda $R_n(x)$ pomoću

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{i} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x),$$

respektivno.

DEFINICIJA 3. **Funkcionalni red (1) je** *konvergentan* **na** D **ako za svako** $\varepsilon > 0$ **postoji prirodan broj** n_0 **koji zavisi od** ε **i** x**, takav da je** $|R_n(x)| < \varepsilon$ **za svako** $n > n_0 = n_0(\varepsilon, x)$.

Granica niza parcijalnih suma za $x \in D$ naziva se *suma funkcionalnog reda* i označava sa $S_n(x)$. Dakle, suma

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) \quad (x \in D)$$

je funkcija definisana na skupu D.

PRIMER 1. Razmotrimo funkcionalni red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots, \tag{3}$$

gde je x realan broj. Očigledno, za $x = 0$ svi članovi reda su jednaki nuli, pa je i njihova suma jednaka nuli. Dakle, za $x = 0$ red konvergira i $S(0) = 0$.

S druge strane, za svako $x \neq 0$, (3) predstavlja beskonačnu geometrijsku progresiju sa količnikom

$$q < \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

pa se suma tog konvergentnog reda jednostavno nalazi

$$S(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Prema tome, red (3) je konvergentan za svako realno x i njegova suma je

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x = 0, \\ 1 + x^2, & \text{za } x \neq 0. \end{cases}$$

Primetimo da je suma reda prekidna funkcija u tački $x = 0$.

Na osnovu ovog primera zapaža se važna činjenica da *neprekidnost članova konvergentnog funkcionalnog reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *ne povlači, u opštem slučaju, neprekidnost njegove sume* $S(x)$*, tj.* $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) \neq S(x_0)$ ili što je isto

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

Dakle, „prolaz limesa kroz sumu” nije moguć u opštem slučaju.

2. UNIFORMNA KONVERGENCIJA FUNKCIONALNIH REDOVA

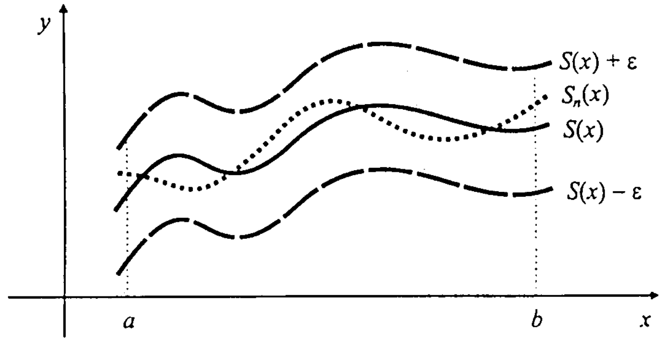
DEFINICIJA 2. Funkcionalni red (1) *uniformno konvergira* **na** D **ako za svako** $\varepsilon > 0$ **postoji prirodan broj** $n_0 = n_0(\varepsilon)$**, nezavistan od** x**, takav da je** $|R_n(x)| < \varepsilon$ **za svako** $n > n_0(\varepsilon)$ **i svako** $x \in D$.

Za uniformnu konvergenciju funkcionalnog reda na segmentu $[a, b]$ može se dati sledeća geometrijska interpretacija.

Pretpostavimo da je red (1) uniformno konvergentan na $[a, b]$. Tada se uslov

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

može izraziti u obliku



Slika 1

što geometrijski znači da se za svako $n > n_0$ (zavisno samo od ε) parcijalne sume $S_n(x)$, tj. svi grafici krivih $y = S_n(x)$ nalaze u traci širine 2ε koja je opisana oko krive $y = S(x)$ za svako $[a, b]$ (videti sliku 1).

PRIMER 2. Posmatrajmo funkcionalni red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0,1].$$

Za svako $x \in [0,1]$ važi

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0.$$

Startujući od nejednakosti

$$(1-nx)^2 > 0,$$

zaključujemo da je

$$1 - 2nx + n^2x^2 > 0,$$

odnosno

$$1 + n^2x^2 > 2nx,$$

odakle sledi da je

$$\frac{2nx}{1+n^2x^2} < 1.$$

Koristeći dobijenu nejednakost za svako $\varepsilon > 0$ procenjujemo

$$|f(x) - f_n(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{2n}.$$

Dakle dati funkcionalni red je uniformno konvergentan, jer je $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ za svako $n > n_0 = 1/(2\varepsilon)$.

3. OSOBINE UNIFORMNO KONVERGENTNIH REDOVA NA $[a, b]$

Posmatraćemo funkcionalne redove oblika

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \tag{1}$$

čiji su članovi neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$, u oznaci $u_n \in C[a, b]$.

TEOREMA 1. *Ako* $u_n \in C[a,b]$ $(n = 1, 2, \dots)$ *i ako red (1) uniformno konvergira na* $[a,b]$, *tada je njegova suma* $x \mapsto S(x)$ *neprekidna funkcija na* $[a,b]$.

TEOREMA 2. *Ako* $u_n \in C[a,b]$ $(n = 1, 2, \dots)$ *i ako red (1) uniformno konvergira na* $[a,b]$, *tada se red može integraliti član po član u granicama od* α *do* β, *gde je* $a \le \alpha < \beta \le b$, *tj.*

$$\int_\alpha^\beta \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\Big)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_\alpha^\beta u_n(x)\,dx\Big).$$

TEOREMA 3. *Ako* $u_n \in C[a,b]$ $(n = 1, 2, \dots)$ *i ako red (1) uniformno konvergira na* $[a,b]$, *tada je za svako* $c \in [a,b]$ *red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_c^x u_n(t)\,dt\Big) \qquad (a \le x \le b)$$

takođe uniformno konvergentan na $[a,b]$ *i njegova suma je jednaka* $\int_c^x S(t)\,dt$, *gde je* $S(x)$ *suma reda (1).*

TEOREMA 4. *Neka* $u_n \in C^1[a,b]$ $(n = 1, 2, \dots)$ *i neka je red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$$

uniformno konvergentan na $[a,b]$. *Ako red (1) konvergira za neko* $c \in [a,b]$, *tada on uniformno konvergira na segmentu* $[a,b]$ *i može se diferencirati član po član, tj.*

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x).$$

4. STEPENI REDOVI

Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dati niz kompleksnih brojeva i a dati kompleksan broj. Posmatraćemo funkcionalne redove kod kojih je opšti član $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dat pomoću $u_n(z) = a_n(z-a)^n$.

DEFINICIJA 1. **Funkcionalni red oblika**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n, \tag{1}$$

gde je z **kompleksna promenljiva naziva se** *stepeni* **ili** *potencijalni* **red.**

Ne umanjujući opštost dovoljno je posmatrati slučaj $a = 0$, tj. stepeni red $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, jer se smenom $w = z - a$ red (1) svodi na ovaj oblik.

TEOREMA 1. *Ako je red* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *konvergentan za* $z = c (c \neq 0)$ *tada on apsolutno konvergira za svako* z *za koje je* $|z| < |c|$. *Ako je red divergentan za* $z = d$, *tada je on divergentan i za svako* z *za koje je* $|z| > |d|$.

Prethodni rezultat je poznat kao *Abelov stav.* Jedna posledica ovog stava je sledeće tvrđenje

TEOREMA 2. *Za svaki stepeni red*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{2}$$

postoji nenegativan broj R, $0 \leq R < +\infty$ *sa osobinama:*
a) ako je $|z| < R$, *red (2) je konvergentan;*
b) ako je $|z| > R$, *red (2) je divergentan.*

DEFINICIJA 2. **Nenegativni broj** R **iz prethodne teoreme naziva se** *poluprečnik konvergencije* **reda (2).**

Za $R > 0$ skup $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$ naziva se *krug konvergencije* tog reda, dok se interval $(-R, R)$, u slučaju realnog reda, naziva *interval konvergencije* reda.

Za određivanje poluprečnika konvergencije stepenih redova mogu se koristiti D'Alembertov i Cauchyev kriterijum.

Dakle, za stepeni red (2) formirajmo graničnu vrednost količnika

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = |z| \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \tag{3}$$

Na osnovu D'Alembertovog kriterijuma, red (2) je konvergentan ako je ova vrednost manja od jedinice, tj. ako je

$$|z| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|},$$

a divergentan ako je vrednost (3) veća od jedinice. Prema tome, ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n|$, tada je poluprečnik konvergencije reda (2) dat sa

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|}, \tag{4}$$

pri čemu, ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = +\infty$, imamo da je $R = 0$, a ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = 0$, imamo da je $R = +\infty$.

Slično, korišćenjem Cauchyevog kriterijuma nalazimo poluprečnik konvergencije reda (2) u obliku

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{5}$$

sa istom konvergencijom u slučajevima kada je granična vrednost na desnoj strani u (5) jednaka $+\infty$ ili 0.

PRIMER 1. Za stepeni red $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, na osnovu (4) nalazimo da je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{1/(n+1)!}{1/n!}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}} = +\infty.$$

PRIMER 2. Na osnovu (5) za red $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$ dobijamo

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/n}} = 1.$$

Red, dakle, konvergira za $|z| < 1$, a divergira za $|z| > 1$. Primetimo da za $z = 1$ red divergira jer se svodi na harmonijski red, ali za $z = -1$ on konvergira. Posmatrano samo na realnoj osi, oblast konvergencije reda je $[-1, 1)$.

5. ANALITIČKE FUNKCIJE

DEFINICIJA 1. **Za funkciju $z \mapsto f(z)$ kaže se da je *analitička* u tački a, ako postoji takvo $R > 0$, da se u krugu $|z - a| < R$ ona može predstaviti stepenim redom**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad (|z-a| < R). \tag{1}$$

TEOREMA 1. *Neka je $R > 0$ poluprečnik konvergencije stepenog reda*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-a)^n. \tag{3}$$

a) U intervalu $(a - R, a + R)$ funkcija $x \mapsto f(x)$ je proizvoljan broj puta diferencijabilna. Njeni izvodi se dobijaju diferenciranjem reda (3).
b) Za svako $x \in (a - R, a + R)$ imamo

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n (x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

TEOREMA 2. *Ako je $x \mapsto f(x)$ analitička funkcija u tački $x = a$, tj. ako se u okolini ove tačke ona može predstaviti pomoću reda (3), sa poluprečnikom $R > 0$, tada je*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 0, 1, \dots), \tag{4}$$

tj.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Dokaz. Stavljajući $x = a$, iz (3) dobijamo $f(a) = a_0$. Ako sada diferenciramo obe strane u (3) i opet stavimo $x = a$ dobijamo $f'(a) = a_1$. Nastavljajući proces diferenciranja i stavljajući uvek $x = a$ nalazimo redom

$$f''(a) = 2!a_2,\ f'''(a) = 3!a_3, \ldots, f^{(n)}(a) = n!a_n, \ldots. \quad \square$$

DEFINICIJA 2. **Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana u okolini tačke $x = a$ i neka u toj okolini ima izvode proizvoljnog reda. Tada se stepeni red**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5}$$

naziva *Taylorov red* **te funkcije u tački $x = a$.**

NAPOMENA. **Za $a = 0$, (5) se naziva** *Maclaurinov red.*

TEOREMA 3. *Ako postoji pozitivna konstanta M takva da je za svako $x \in (a-\delta, a+\delta)$*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

tada se funkcija $x \mapsto f(x)$ maže razviti na $(a-\delta, a+\delta)$ u Taylorov red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (|x-a| < \delta).$$

6. RAZVOJ NEKIH FUNKCIJA U TAYLOROV RED

1. Razvoj eksponencijalne funkcije

Za eksponencijalnu funkciju $x \mapsto f(x) = e^x$ imamo da je $f^{(n)}(x) = e^x$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Izaberimo $a = 0$ i proizvoljno fiksirano $\delta > 0$. Tada za svako $x \in (-\delta, \delta)$ i svako $n = 0, 1, \ldots$ imamo

$$0 < f^{(n)}(x) = e^{\delta},$$

što znači da su uslovi Teoreme 3 zadovoljeni. Kako je $f^{(n)}(0) = 1$, odgovarajući razvoj eksponencijalne funkcije je

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Kako je δ proizvoljno, razvoj (1) važi za svako $x \in \mathbb{R}$.

Poluprečnik konvergencije dobijenog reda je $R = +\infty$.

2. Razvoj funkcija $\sin x$ **i** $\cos x$

Za funkciju $x \mapsto \sin x$ imamo

$$f^{(n)}(x) = \sin\Big(x + \frac{n\pi}{2}\Big) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

pa je $|f^{(n)}(x)| \le 1$ za svako n i svako $x \in \mathbb{R}$. Kako je $f^{(n)}(0) = \sin(n\pi/2)$, tj. $f^{(n)}(0) = 0$ $(n = 2k)$ i $f^{(n)}(0) = (-1)^k$ $(n = 2k+1)$, dobijamo Taylorov razvoj

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Slično za funkciju $x \mapsto \cos x$ dobijamo

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Poluprečnik konvergencije ovih redova je $R = +\infty$.

3. Binomni red

Neka je $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Taylorov razvoj ove funkcije u tački $x = 0$ dovodi do tzv. *binomnog reda*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

čiji je poluprečnik konvergencije $R = 1$. Razvoj konvergira za $x \in (-1, 1)$.

TRIGONOMETRIJSKI REDOVI

1. ORTOGONALNOST TRIGONOMETRIJSKOG SISTEMA

DEFINICIJA 1. Funkcionalni red oblika

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

naziva se *trigonometrijski red*.

Dakle, trigonometrijski red je baziran na trigonometrijskom sistemu funkcija

$$T = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}, \tag{2}$$

koje su 2π-periodične. Za razmatranje takvog sistema dovoljno je uzeti bilo koji segment dužine 2π, na primer $[a, a+2\pi]$. Uobičajeno je da se uzima $a = -\pi$ ili $a = 0$. U daljem tekstu opredeljujemo se za $a = -\pi$, tj. za simetrični segment $[-\pi, \pi]$.

Ako uvedemo skalarni proizvod (f,g), pomoću

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad (f,g\in T),$$

možemo dokazati da je T ortogonalan sistem, pri čemu koristimo trigonometrijske formule

$$\begin{aligned}
\sin nx\cos mx &= \frac{1}{2}[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x],\\
\sin nx\sin mx &= \frac{1}{2}[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x],\\
\cos nx\cos mx &= \frac{1}{2}[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x].
\end{aligned}$$

NAPOMENA. **Skup vektora $\{t_1,t_2,\dots\}$ je ortogonalan ako je**

$$(t_i,t_j)=\begin{cases} 0, & i\neq j,\\ \|t_i\|^2, & i=j.\end{cases}$$

2. OSOBINE TRIGONOMETRIJSKOG REDA I FOURIEROV RED

TEOREMA 1. *Ako su numerički redovi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|b_n|$ *konvergentni, tada je trigonometrijski red (1) uniformno i apsolutno konvergentan za svako* $x\in\mathbb{R}$.

TEOREMA 2. *Neka je $f(x)$ suma uniformno konvergentnog reda (1) na segmentu $[-\pi,\pi]$, tj.*

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx. \tag{3}$$

Tada se koeficijenti u (3) mogu izraziti u obliku

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,\dots), \tag{4}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\dots). \tag{5}$$

Dokaz. S obzirom na pretpostavku da red (3) konvergira uniformno na $[-\pi,\pi]$, a svaki njegov član je neprekidna funkcija na $[-\pi,\pi]$ na osnovu Teoreme 1 (osobine uniformno konvergentnih redova), zaključujemo da je njegova suma $f(x)$ neprekidna funkcija na $[-\pi,\pi]$

i da se red može integraliti član po član. Dakle,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx \\ &= \frac{1}{2}a_0(1,1) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1,\cos nx) + b_n(1,\sin nx) = \pi a_0.\end{aligned}$$

Ovim je dokazana formula za koeficijent a_0.

Ako sada red (3) pomnožimo sa $\cos kx$ ($k = 1, 2, \dots$), dobijamo red

$$f(x)\cos kx = \frac{1}{2}a_0 \cos kx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx,$$

koji je, takođe, uniformno konvergentan na $[-\pi, \pi]$, s obzirom na ograničenost funkcije $\cos kx$ ($|\cos kx| \le 1$). Integracijom ovog reda član po član i korišćenjem svojstva ortogonalnosti kao u prethodnom slučaju, za $k = 1, 2, \dots$, dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k(\cos kx, \cos kx) = \pi a_k,$$

tj. (4). Slično, množenjem (3) sa $\sin kx$ ($k = 1, 2, \dots$) i integracijom dobijenog reda nalazimo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = a_k(\sin kx, \sin kx) = \pi b_k,$$

tj. (5). □

DEFINICIJA 2. **Kažemo da je funkcija f *apsolutno integrabilna* na $[-\pi, \pi]$, ako postoji integral $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$ kao Riemannov ili nesvojstven.**

DEFINICIJA 3. **Neka je funkcija f apsolutno integrabilna na $[-\pi, \pi]$ i neka su koeficijenti a_n i b_n određeni pomoću (4) i (5). Za trigonometrijski red (3) kažemo da je *Fourierov red* funkcije f i pišemo**

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{6}$$

Za brojeve a_n i b_n kažemo da su *Fourierovi koeficijenti* funkcije f.

Napomenimo da oznaka $\sim$ ne predstavlja asimptotsku jednakost, već ukazuje da funkciji f odgovara njen Fourierov red.

U slučaju kada je funkcija f parna ili neparna, njen Fourierov red dobija jednostavniji oblik. Na osnovu Teoreme 2 zaključujemo:

a) Ako je f parna funkcija, tj. $f(-x) = f(x)$, imamo

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

b) Ako je f neparna funkcija, tj. $f(-x) = -f(x)$, imamo

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3. FOURIEROV RED NA PROIZVOLJNOM SEGMENTU

Razmotrimo najpre slučaj Fourierovog reda funkcije $t \mapsto f(t)$ koja je apsolutno integrabilna na segmentu $[-d, d]$. Smenom $x = \pi t/d$, segment $[-d, d]$ preslikava se na segment $[-\pi, \pi]$, tako da je moguće koristiti oblik Fourierovog reda (6). Na taj način dobijamo

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{d} + b_n \sin \frac{n\pi t}{d}, \tag{7}$$

gde su Fourierovi koeficijenti dati sa

$$a_n = \frac{1}{d} \int_{-d}^{d} f(t) \cos \frac{n\pi t}{d} \, dt \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{d} \int_{-d}^{d} f(t) \sin \frac{n\pi t}{d} \, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Obično se u primenama u fizici i tehnici uzima $d = T/2$, gde je T period, a $\pi/d = 2\pi/T = \omega$ kružna učestanost. U tom slučaju prethodne formule postaju

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Fourierov red (7) dobija oblik

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t.$$

Ako uvedemo oznake

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n,$$

gde su

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan\varphi_n = \frac{b_n}{a_n},$$

red se svodi na

$$f(t) \sim \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n).$$

NAPOMENA. **Razvijeni oblik dobijenog reda je**

$$f(t) \sim \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos(\omega t - \varphi_1) + A_2\cos(2\omega t - \varphi_2) + A_3\cos(3\omega t - \varphi_3) + \dots .$$

U primenama u elektrotehnici, konstantni član $A_0/2$ predstavlja tzv. *jednosmernu komponentu.* Član $A_1\cos(\omega t - \varphi_1)$ je tzv. *prvi harmonik*, sa amplitudom A_1 i faznim pomakom $-\varphi_1$. Ostali članovi su tzv. *viši harmonici.*

U najopštijem slučaju kada je funkcija $x \mapsto f(x)$ apsolutno integrabilna na segmentu $[a, b]$ Fourierov red se može izraziti u obliku

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a},$$

gde su Fourierovi koeficijenti dati sa

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx \quad (n = 0, 1, \dots),$$

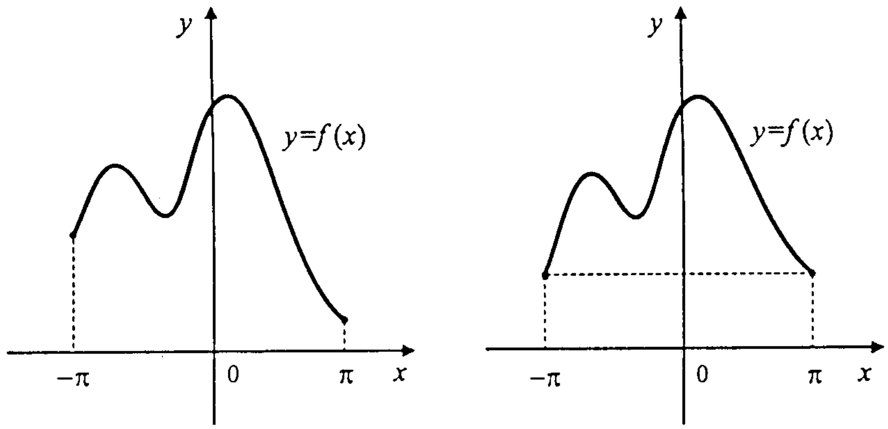
$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

4. PERIODIČNO PRODUŽENJE FUNKCIJE I KONVERGENCIJA FOURIEROVOG REDA

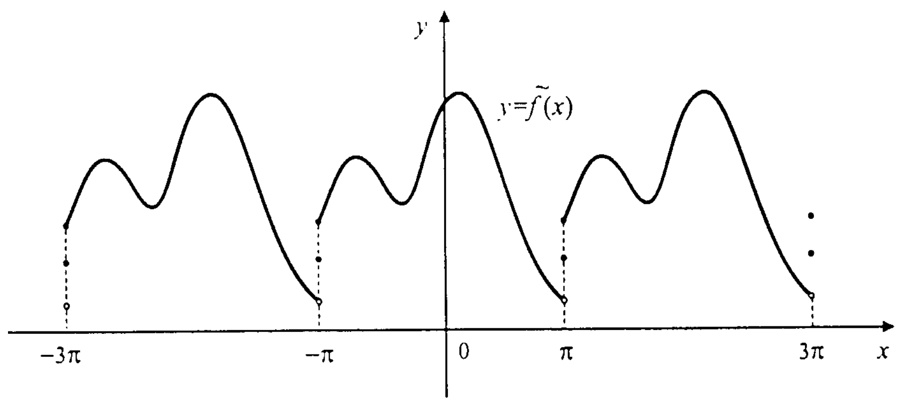
Pretpostavimo sada da je f apsolutno integrabilna funkcija na $[-\pi, \pi]$ i da je njen Fourierov red dat sa (6). Ako Fourierov red konvergira na nekom skupu, onda on očigledno konvergira ka nekoj (2π)-periodičnoj funkciji. Prirodno se može postaviti pitanje periodičkog produženja funkcije f sa periodom 2π. Ovo je međutim moguće samo ako je $f(-\pi) = f(\pi)$. Ako ovaj uslov nije ispunjen, (2π)-periodičko produženje funkcije f, u oznaci $\bar{f}$, konstruiše se tako da za $x \in [-\pi, \pi)$ imamo

$$\bar{f}(x + 2k\pi) = f(x) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{1}$$

Dakle, ukoliko je $f(-\pi) \neq f(\pi)$, na osnovu (1), za (2π)-periodičnu funkciju $\bar{f}$ imamo $\bar{f}(\pi) \neq f(\pi)$. Inače, Fourierovi redovi za f i $\bar{f}$ se poklapaju, s obzirom da se Fourierovi koeficijenti izračunavaju istim formulama.



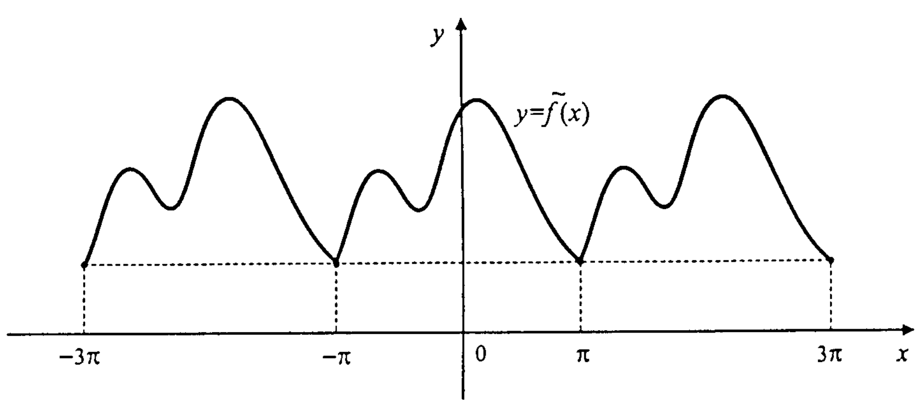
Slika 2.



Slika 3.

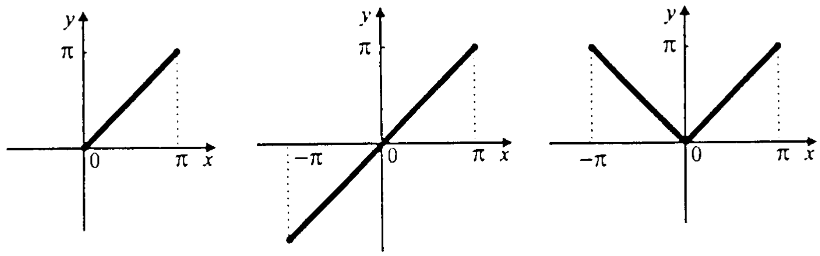
Pri ovakvom periodičkom produženju funkcije f sa poluintervala $[-\pi, \pi)$ na $\mathbb{R}$ može se desiti da funkcija $\bar{f}$ nije neprekidna u tačkama $\pm\pi, \pm3\pi, \ldots$, i u slučajevima kada je f neprekidna funkcija na krajevima segmenta, tj. u tačkama $\pm\pi$ (videti slike 2 levo i 3). Samo ako je pritom $f(-\pi) = f(\pi)$ (slika 2 desno), periodična funkcija $\bar{f}$ je neprekidna u tačkama $\pm\pi$ (slika 4).

Često se dobijena periodična funkcija $\bar{f}$ označava istim simbolom f kao i originalna funkcija f.



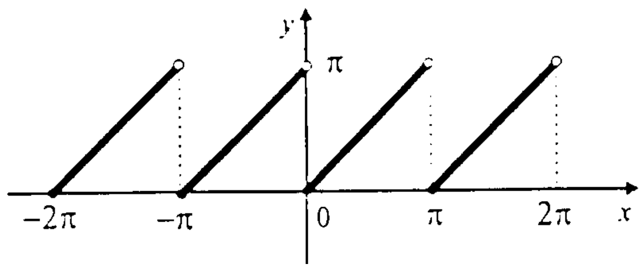
Slika 4.

PRIMER. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana na segmentu $[0, \pi]$ pomoću $f(x) = x$ (videti sliku 5 levo).



Slika 5.

Periodičnim produženjem ove funkcije dobijamo funkciju sa periodom π (slika 6).



Slika 6.

Korišćenjem formula za određivanje Fourierovih koeficijenata na proizvoljnom segmentu, nalazimo

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x\, dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos 2nx\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2n} \Big(x \sin 2nx + \frac{1}{2n} \cos 2nx \Big) \Big|_0^\pi = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin 2nx\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2n} \Big(-x \cos 2nx + \frac{1}{2n} \sin 2nx \Big) \Big|_0^\pi = -\frac{1}{n}.$$

Tako, Fourierov red postaje

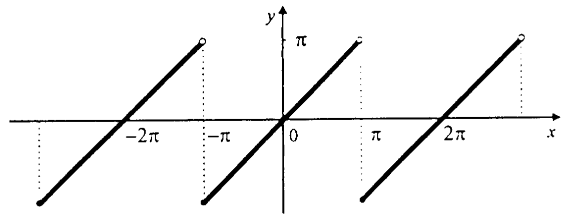
$$x \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx,$$

koji za $x \in (0, \pi)$ konvergira ka vrednosti x. U tačkama $x = 0$ i $x = \pi$ sve parcijalne sume ovog reda su jednake $\pi/2$.

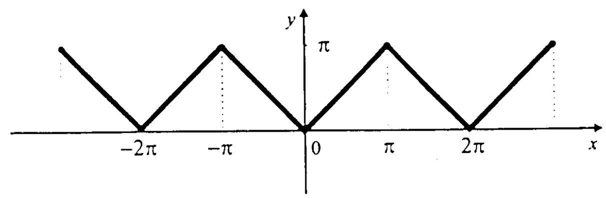
Primetimo da se za $x = \pi/4$ dobijeni Fourierov red svodi na numerički red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Data funkcija f može se periodički produžiti tako da je to produženje neparna, odnosno parna funkcija. Naime, funkciju f možemo najpre produžiti na segment $[-\pi, 0]$, tako da dobijemo neparnu (slika 5 sredina) ili parnu funkciju (slika 5 desno), a zatim određujemo odgovarajuće (2π)-peroidično produženje na $\mathbb{R}$.



Slika 7.



Slika 8.

Na slici 7 je prikazano neparno, a na slici 8 parno produženje.

a) U slučaju neparnog produženja, koeficijenti a_n su jednaki nuli, dok su koeficijenti b_n dati sa

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\Big(-x\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\Big)\Big|_0^{\pi},$$

tj.

$$b_n = \frac{2}{\pi n}\big(-\pi\cos n\pi\big)\big|_0^{\pi} = \frac{2}{n}(-1)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Odgovarajući sinusni red konvergira ka x za svako $x \in \big(-\pi, \pi\big)$, tj.

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.$$

Za $x = \pm\pi$ red konvergira ka nuli. Primetimo da su tada sve parcijalne sume jednake nuli.

b) Kod parnog produženja funkcije imamo

$$b_n = 0\ (n = 1, 2, \dots), \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\,dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\Big(x\sin nx + \frac{1}{n}\cos nx\Big)\Big|_0^{\pi}.$$

Ovo daje

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}\big((-1)^n - 1\big) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

tj.

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\ (k = 1, 2, \dots).$$

Na taj način dobijamo kosinusni red za funkciju $x \mapsto |x|$ (slika 5 desno)

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad (-\pi \le x \le \pi).$$

Za $x = 0$ dobijamo numerički red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Napomenimo, na kraju, da se pomoću Fourierovih redova, specificirajući vrednost za x, mogu dobiti sume mnogih numeričkih redova.