

相关运算与随机信号处理

摘 要

本篇论文为电信工程及管理专业概率论与随机过程的期中论文，论文针对相关这一概念进行展开描述，并落实到随机信号处理，包含了平稳随机信号、盲源分离、模板匹配滤波这三个方面。

论文的第一章节，对相关运算进行了介绍，表达了相关运算本质上是一种内积、一种距离的观点，并且通过信号逼近的角度得到了随机信号处理中信号的相关运算。

论文的第二章节，介绍了平稳随机信号的一些性质，通过与课本中完全不同的顺序和视角，总结了 Bochner 定理和 Wiener-Khinchin 定理，从数学和物理意义两个视角进行分析，对正定函数、宽平稳随机信号的相关函数、对应的傅里叶变换非负这三者之间的内在联系进行了解读。

论文的第三章节，介绍了盲源分离这一概念，并建立了一个盲源分离模型，在总结了典型相关分析以及 BC 算法和 Li 算法之后，针对三者的共性，提出了一种直接由相关函数构造的盲源分离算法，并使用 Matlab 软件进行了信号仿真。

论文的第四章节，介绍了模板匹配滤波这一经典的现代信号处理算法，侧重点依然在相关运算上，从时域和频域两个角度进行了详细的推导。

论文的第五章节，对全文的内容进行了总结，指明了贯穿整篇论文的一条主线——相关运算，无论是平稳随机信号、盲源分离还是模板匹配滤波，都蕴含了非常深刻的相关运算思想，最后作者还对课程论文的写作这一过程进行个人心态上的一些总结。

关键词 相关运算 随机信号处理 平稳信号 盲源分离 模板匹配滤波

目 录

第一章 引言	1
1.1 相关运算介绍	1
1.2 信号与随机过程中的相关	1
第二章 相关与平稳随机信号	4
2.1 正定函数	4
2.2 Wiener-Khinchin 定理	6
第三章 相关与盲源分离	8
3.1 盲源分离介绍	8
3.2 基于相关运算的盲分离算法及规律发现	9
3.3 仿真验证	11
第四章 相关与模板匹配滤波	13
4.1 模板匹配滤波算法原理	13
第五章 总结	16

第一章 引言

1.1 相关运算介绍

相关运算，是我们在概率论与随机过程中经常提到的一个概念，例如相关系数、自相关、协相关等等，这种指标可以衡量一个或多个变量之间的相关性，是一种相似性度量，也可以说是一种“距离”。

相关运算是概率论与随机过程中衡量距离的一个指标，这样说的原因是因为它可以被理解为一种测度，通过直接引用相关运算或者间接的使用相关运算便可以表示出“距离”的概念，例如马氏距离、动态弯折距离、欧式距离，本质都是一种相关运算，而距离这个词自然又与内积运算有着千丝万缕的关系，很多类型的相关运算都表示出了内积的四大特性，即线性性、共轭对称性、正定性、满足内积不等式，如此我们对“距离”这个词语的概念进行了拓展，可以宏观的认为“距离”、“测度”、“度量”这三个词本是一体，并且都满足内积性质 (尽管有一些被成为“距离”而不满足这些性质的特例，例如 K-L 散度，可见这不是一种距离)。以下给出几种不同的相关运算的计算式。

Pearson 相关系数，一种衡量不同变量之间的线性相关性的指标：

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} \quad (1-1)$$

Spearman 相关系数，不关心变量之间是否线性相关，而是关注单调相关关系：

$$\rho = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}} \quad (1-2)$$

曼哈顿距离，也是我们常说的 1 范数：

$$d_{12} = \sum_{k=1}^n |x_{1k} - x_{2k}| \quad (1-3)$$

欧式距离，我们也称之为 2 范数：

$$d_{12} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{1k} - x_{2k})^2} \quad (1-4)$$

1.2 信号与随机过程中的相关

本文重点讲述相关运算在信号处理中的应用，这就不得不提到信号与随机过程的概念和一些具体的运算，但是其本质上和我们课本中提到的相关并无本质区别。

通信中的信号和噪声都具有一定的随机性，需要用随机过程的理论来描述。随机过程可以定义为所有样本函数的集合。在某次观测中，观察到的只是随机过程中的一个样

本，至于是哪一个样本，在观测之前是无法预见的，这正是随机过程随机性的表现。

相关运算是随机信号的数字特征，我们将采取不同于课本推导的方式得到信号的相关这一概念，并且与信号的卷积运算联系起来。

在信号处理中，使用一个信号去拟合另外一个信号是常有的事情，假设我们使用 $y(t)$ 来拟合 $x(t)$ (这两种信号都是实信号，且为能量型信号)， $x(t)$ 可以表示为：

$$x(t) = a_{xy}y(t) + x_e(t) \quad (1-5)$$

其中， a_{xy} 为实系数， $x_e(t)$ 为近似误差信号，因为两种信号都是能量信号，我们可以求得近似误差信号的能量，即

$$\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - a_{xy}y(t)]^2 dt \quad (1-6)$$

为使得误差函数的能量最小，我们需要针对 a_{xy} 做优化，使得

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a_{xy}} = \frac{\partial}{\partial a_{xy}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - a_{xy}y(t)]^2 dt \right\} = 0 \quad (1-7)$$

如此可以求得最佳系数，求得的 a_{xy} 为

$$a_{xy} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt} \quad (1-8)$$

这时候的 a_{xy} 是带量纲的，为了使其可以成为一种指标，我们使用信号的能量对其进行归一化处理，可以得到

$$\rho_{xy} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt}} \quad (1-9)$$

对比公式 (1-1) 的 Pearson 相关系数，可以发现该相关函数与我们定义的 Pearson 相关系数不谋而合，通过构造过程也容易看出，Pearson 相关系数是衡量两个变量之间线性相关性的量。

但是针对于随机过程，Pearson 相关系数有极大的局限性，假设有两种信号，如图 (1-1)，可以明显的看出，二者形状极度相似，但是如果直接在对它们使用相关系数，算出来的值必然是 0，因为这两种信号在时域上没有任何的相交，即 Pearson 相关系数的缺陷就是无法捕捉时间未对齐的信号相关性，为了改进这一缺点，我们可以将做相关的信号进行时移，得到如下算式：

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(t)dt \quad (1-10)$$

该算式之所以没有分母的部分，是因为默认了我们已经进行了信号的预处理工作，其中

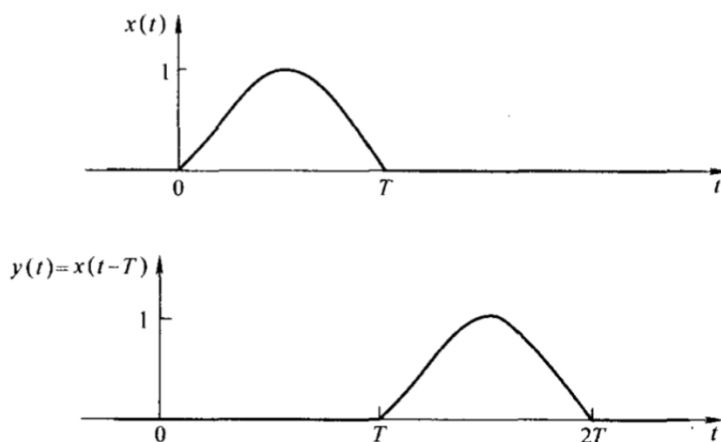


图 1-1 信号图

有一道工序就是白化，在白化信号中，信号的数字特征被归一化，方差为 1，均值为 0，所以该相关系数的分母得以省略。

卷积是信号处理中十分重要的一个概念，给信号通过系统的表达带来了极大的便利，卷积公式如下：

$$x(\tau) * y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt \quad (1-11)$$

可以发现，卷积和相关非常类似，都有信号的移位、相乘、求和过程，使用卷积可以轻松表示信号之间的相关运算，如下公式所示：

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t - \tau)dt = x(\tau) * y(-\tau) \quad (1-12)$$

卷积和相关是处理信号处理问题的重要数学工具，使用这些工具，我们可以证明诸如帕塞瓦尔定理、时域相乘等一些特性，本文将使用相关运算这一工具，对平稳随机信号、盲源分离、模板匹配滤波这三种信号处理过程进行描述。

第二章 相关与平稳随机信号

平稳随机信号与平稳随机过程的定义完全一致，所以我们可以直接使用平稳随机过程的概念来套用到平稳随机信号，本章内容与课内教学内容紧密结合，是本人在学习过程中的一些知识拓展，将会与课本中的教学顺序和侧重点不同。

2.1 正定函数

这里暂时不引入平稳随机过程，而是介绍正定函数这一概念，正定函数在课本中已经写的很清晰了，值得一提的是，若是按照正定函数的标号构成矩阵，那么这个矩阵也是一个正定矩阵，证明过程也与正定函数的证明过程类似。

这里重点介绍 Bochner 提出的一个定理，我们称之为 Bochner 定理，这个定理指出，一个正定函数的傅里叶变换必然非负，即

$$f(x) \text{ 正定} \iff F(\omega) \geq 0 \quad (2-1)$$

接下来将会给出完整的证明过程，首先证明其必要性，即从右边的条件可以推导等式左边的条件。

由傅里叶逆变换，我们得知

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega \quad (2-2)$$

正定函数的正系数线性组合还是正定函数，既然我们已知 $F(\omega)$ 大于等于零，那么只需要证明复指数函数是正定函数，该必要性证明就可以完成，构造复指数函数对应的 $n \times n$ 方阵 R , R 的元素满足 $R_{ij} = e^{j\omega(x_i - x_j)}$ 。

任选一个 n 维行向量 z ，对矩阵 R 做二次型构造，见公式 (2-3)

$$\begin{aligned} z^H R z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ij} z_i \bar{z}_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e^{j\omega(x_i - x_j)} z_i \bar{z}_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n e^{j\omega x_i} z_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n e^{-j\omega x_j} \bar{z}_j \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n e^{j\omega x_i} z_i \right) \cdot \overline{\left(\sum_{j=1}^n e^{+j\omega x_j} z_j \right)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n e^{j\omega x_i} z_i \right)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2-3)$$

这样我们证明了复指数函数对应的矩阵是正定矩阵，那么复指数函数也是正定函数，如此以来，正定函数的正系数线性组合还是正定函数，必要性条件成立。

接下来证明等式的充分性，我们再次使用 R 这个符号，构造关于正定函数 $f(x)$ 的 $n \times n$ 正定矩阵 R ，按照正定函数的证明过程，我们需要任取 z 向量，在这里我们充分发挥任取的随意性，选取向量：

$$z = (e^{j\omega x_1}, e^{j\omega x_2}, \dots, e^{j\omega x_n})$$

使用该向量对 R 矩阵做二次型构造

$$\begin{aligned} 0 \leq z^H R z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i - x_j) e^{j\omega x_i} e^{-j\omega x_j} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f(x_i - x_j) e^{j\omega(x_i - x_j)} \end{aligned} \quad (2-4)$$

为了使得该式更加靠近连续时间傅里叶变换，利用黎曼积分的思想，选取区间划分为无穷小，将上述公式转化为为连续时间傅里叶变换，并将变量分别使用 t, s 替代，有

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t-s) e^{j\omega(t-s)} dt ds$$

这时我们对变量 t, s 做积分变元，旨在减少变量的数量，令

$$\begin{cases} u = t - s \\ v = t + s \end{cases}$$

那么积分变量可以表示为

$$dt ds = \left| \frac{\partial(t, s)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \right|^{-1} du dv = \frac{1}{2} du dv. \quad (2-5)$$

在积分中进行变元后更改上下限，有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\int_{-T}^0 \int_{u-T}^{u+T} + \int_0^T \int_{u-T}^{-u+T} \right) f(u) e^{j\omega u} dv du \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-T}^0 \int_{|u|-T}^{-|u|+T} + \int_0^T \int_{|u|-T}^{-|u|+T} \right) f(u) e^{j\omega u} dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T}^T \int_{|u|-T}^{-|u|+T} f(u) e^{j\omega u} dv du \\ &= \int_{-T}^T (T - |u|) f(u) e^{j\omega u} du \end{aligned} \quad (2-6)$$

该式已经跟傅里叶变换非常接近了，我们需要其上下限变为无穷，只需要在等式前面加上一个正系数 $\frac{1}{T}$ 的系数再取极限即可，这并不会影响该公式的正负性，加上系数再取无穷，有

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) f(u) e^{j\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{j\omega u} du \end{aligned} \quad (2-7)$$

现在与傅里叶变换的差别仅仅差一个复指数信号的幂数正负，不过再回看我们任取 z 向量的过程，只需要在任取的时候给向量的所有元素加一个符号即可，所以我们通过函数正定证明了其傅里叶变换大于零，至此，必要性条件和充分性条件都已证明，证毕。

Bochner 提出的证明是从数学的角度上来观察正定函数和傅里叶变换的，下一个小节我们还会从物理的角度重新审视这一个问题。

2.2 Wiener-Khinchin 定理

Wiener-Khinchin 定理是一个极度富有数学艺术的定理，定理的思想深刻且表述容易，富有美感，而且与我们在上一小节中证明的 Bochner 定理异曲同工。关于这个定理的背景，诺伯特·维纳在 1930 年证明了这个定理对于确定性函数的情况，辛钦后来对于平稳随机过程得出了类似的结果并且于 1934 年发表了它，但是，两个人似乎没有很明确的交集，一个是苏联人，另一个是美国人，当时战争时期，两国之间交流是极其危险的行为，两人在互不知道的情况下，进行了同一个事件的研究，发现了同一个定理，非常有意思。

现在详细的推导 Wiener-Khinchin 定理，并试图从中看出相关函数的物理意义。

对一个宽平稳随机过程 X_t ，对其求无限长时间的功率，有

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt \right)^2 \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) \overline{\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(s) e^{-j\omega s} ds \right)} \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(s) e^{-j\omega(t-s)} dt ds \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[x(t)x(s)] e^{-j\omega(t-s)} dt ds. \end{aligned} \quad (2-8)$$

对于一个宽平稳随机过程，相关函数只与标签 (时间) 的差值有关，所以上述表达可以简化为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_x(t-s) e^{-j\omega(t-s)} dt ds \quad (2-9)$$

好了，推导到这里我们停下，该式是不是有些眼熟，我们在上一小节中证明的 Bochner

定理的证明中使用过该式，最后的结果得出了傅里叶变换，那么对于公式 (2-9)，最终换元得到了结果也必然是傅里叶变化，而且，对于该证明，傅里叶变换必然大于零，因为我们本来就是在求功率，随机过程的功率怎么能是负的呢？

Bochner 从一个数学的角度论证了正定函数和傅里叶变换非负的关系，Wiener - Khinchin 定理从功率的角度论证了功率谱密度是相关函数的傅里叶变换，并且该相关函数非负的特性，二者出发点不同，最后却得到了相同的理论，对于正定、平稳随机过程的相关、傅里叶变换非负这一点，是一组充要条件，都是可以互相推导的。

每一个正定函数都与一个正定矩阵对应，都可以唯一的找到以其为相关函数的宽平稳随机过程，而该宽平稳随机过程的相关函数的傅里叶变换必然非负，这既有物理意义又有数学证明。

本部分与课本内容有所重叠，本来还想添加宽平稳随机信号通过线性系统的表述，但这些在书本上都有详细证明，这里就不再提及。

第三章 相关与盲源分离

盲源分离，是现代信号处理领域一个极其热门的话题，有一段时间甚至大部分在做信号处理领域的学者都在关注这个问题，本人曾阅读过盲源分离相关的论文，对该技术有一定的了解，而恰好有一类盲源分离算法完全利用了相关的概念和性质来求解问题，接下来就是从相关的视角简单介绍该算法并作出仿真。

3.1 盲源分离介绍

盲源分离问题正如其名，从未知混合信号中提取感兴趣的信号或者将全部信号进行分离，“盲”，有两层含义，混合过程未知和源信号未知，本小节我们将会建立一套用以描述盲源分离过程的数学表述。

瞬态线性混合盲源分离模型如下：

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3-1)$$

其中， $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ 为未知的 $m \times n$ 维混合矩阵，是我们未知的，描述了信号的混合情况； $\mathbf{x} = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^T$ 为 m 维传感(观测)信号向量； $\mathbf{s} = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)]^T$ 为未知的源信号向量， $n(t)$ 为观测噪声信号，在本文中，我们假设噪声信号为零，无噪的盲源分离模型可以简写为：

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i s_i \quad (3-2)$$

在对观测信号做一定的数据预处理(白化)之后，我们的目的就是找到一个解混矩阵 \mathbf{W} 作为系统的传递函数，使得观测信号通过解混系统后得到分离信号或者感兴趣的信号，输出信号为

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}^T \mathbf{x} \quad (3-3)$$

更形象的表述见图(3-1)。盲源分离的解法有很多种，主要以独立成分分析为主，依靠

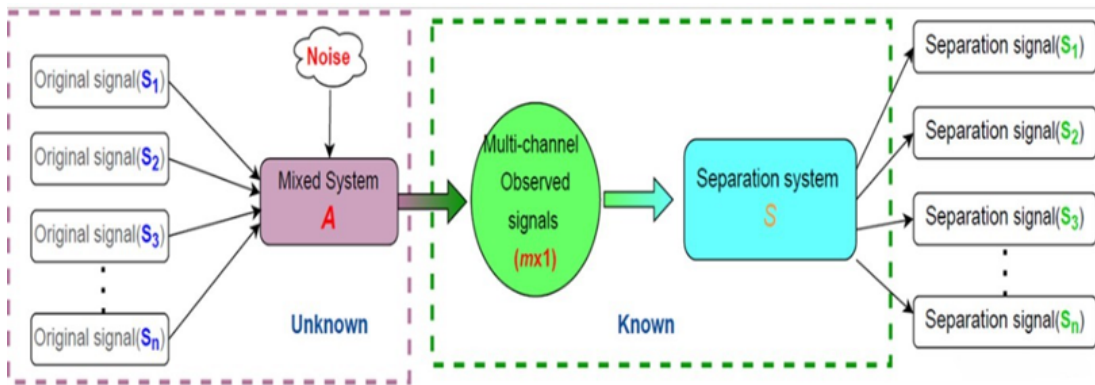


图 3-1 盲分离模型

信号的先验知识构造目标函数再优化，也有其他的方法，比如广义特征值分解、贝叶斯估计、神经网络等等，本文主题与相关运算有关，在此介绍一种基于典型相关分析的盲源分离方法。

3.2 基于相关运算的盲分离算法及规律发现

典型相关分析 (CCA) 是 Hotelling H 在 1936 年提出的数据分析方法，旨在寻找两个基向量，将两个数据集投影在两个基向量上，使得投影的相关性达到最大，相较于主成分分析，该方法的同一变量之间线性无关，不同变量之间的线性相关性最大，根据此定义，我们对盲源分离中的输入信号 (观测信号) 和输出信号 (解混信号) 进行投影构造，假设两个投影基向量分别为 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ，对应的两个数据集分别为 $p \times n$ 维矩阵 X 和 $q \times n$ 维矩阵 Y ，则对应的投影向量分别为 $u = \mathbf{a}^T X$ 和 $v = \mathbf{b}^T Y$ ，CCA 最大化 u 和 v 之间的线性相关系数，即

$$\max \rho = \frac{E\{uv\}}{\sqrt{E\{u^2\} E\{v^2\}}} \quad (3-4)$$

注意，我们假设信号已经经过预处理，所以信号的方差就是原点二阶矩，任意选取 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的数值，分子和分母的系数都将相消，所以该相关系数具有伸缩不变性，于是通常只考虑归一化的投影向量，则上述优化问题可以写为：

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \quad & \rho = E\{uv\} \\ \text{s.t.} \quad & E\{u^2\} = E\{v^2\} = 1 \end{aligned} \quad (3-5)$$

使用 Lagrangian 乘子法可得：

$$\mathbf{R}_{XY} (\mathbf{R}_{XX})^{-1} \mathbf{R}_{XY} \mathbf{b} = \rho^2 \mathbf{R}_{YY} \mathbf{b} \quad (3-6)$$

其中 \mathbf{R}_{XY} 为 X 和 Y 协相关矩阵，其余用该符号表示同理，都为相关矩阵，可以看到等式都可以视作对向量 \mathbf{b} 做线性变换，因此可以看作一个广义特征值问题。这时我们为了简化问题，再添一假设，我们感兴趣的信号是具有时间周期 τ 的，根据自相关函数的性质，必然有重复出现的峰值点，而且等间隔分布。

直观的想，我们需要提取感兴趣的信号，而且要使得感兴趣的信号与混叠信号的相关性最大，自然要求混叠信号与感兴趣信号有线性相关关系，不妨直接假设两种数据集都为观测信号的时移信号为 $X = \mathbf{x}(t)$ 和 $Y = \mathbf{x}(t + \tau)$ 。(该选择方法有严格的数学证明，但那太过于繁琐，本文从直观的角度直接给出这种构造方法)，那么投影数据为 $u(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{S}(t)$ 和 $v(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{S}(t + \tau)$ ，可以发现 $v(t) = u(t + \tau)$ ，让两个投影向量直接为提取信号是我们的目标，而这时相关系数也恰好拥有最大的相关性，根据上述描述，我们对公式 (3-6) 进行重写，有

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau) (\mathbf{R}_{xx})^{-1} \mathbf{R}_{xx}(\tau) \mathbf{w} = \rho^2 \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \quad (3-7)$$

可以将其简化为

$$\mathbf{R}_{xx}(\tau)\mathbf{w} = \rho\mathbf{R}_{xx}\mathbf{w} \quad (3-8)$$

至此，盲源分离优化问题就完全转化为广义特征值分解问题，上述的描述我们省略了一些部分，但那些和我们的主旨无关，我们的目的是为了阐述相关在盲源分离中的作用，而目标函数的构造已经极大的阐述了这一点，其实，还有很多基于信号的自相关函数为目标函数的盲源分离算法，我们在下面不加讨论的简单写出其他盲源分离算法的目标函数或者学习算法，企图发现共同点。

BC 算法：

$$\begin{cases} \mathbf{w} \leftarrow E \{ \tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t - \tau_0) \} \mathbf{w} \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\| \end{cases} \quad (3-9)$$

Li 算法

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}, b) = & (1 + b^2) \mathbf{w}^T E \{ \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T \} \mathbf{w} \\ & - 2b\mathbf{w}^T E \{ \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t - \tau_0) \} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3-10)$$

暂且举这两个例子，无论是 CCA，还是 BC 算法，亦或是 Li 算法，我们都能在其中发现二阶矩的影子，也就是相关函数的影子，而且都以相关函数的极大化作为目标，虽然表达方式和约束条件不同。在这里我们直接主观臆断的提出一种更为干脆的相关算法，忽略一些的其他因素，直接使得输出信号的自相关函数极大化，即

$$\begin{aligned} \max J(\mathbf{w}) = & E \{ G(y(t)y^T(t - \tau_0)) \} \\ \text{s.t. } & \|\mathbf{w}\| = 1 \end{aligned} \quad (3-11)$$

式中， G 为随意一种单调增函数，可以为优化的目标函数带来非线性变换，增加目标函数的应用性，在下小节我们将直接使用 Matlab 对该算法进行检测，印证我们发现的规律，虽然得到的过程比较粗糙和主观，但是依然能起到分离信号的效果。

3.3 仿真验证

对于上一小节中提出的算法，我们选取以下两种信号进行混合，两种信号的表达式如下：

$$\begin{cases} s_1 = \text{sgn}(\cos(20\pi t)) \\ s_2 = \sin(100\pi t) + \sin(300\pi t) \end{cases} \quad (3-12)$$

两种信号的波形如图 (3-2)。将两种信号进行混叠后，如图 (3-3)。由于有先验知识，我们有足够的数据使用具有时间周期的相关算法，即我们上文中主观臆断提出的算法，该算法对混合信号进行盲分离，分离出的结果如图 (3-4) 所示。可见，除了造成一点非线性

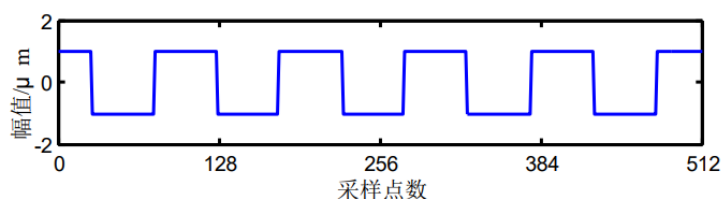


图 3-2 源信号

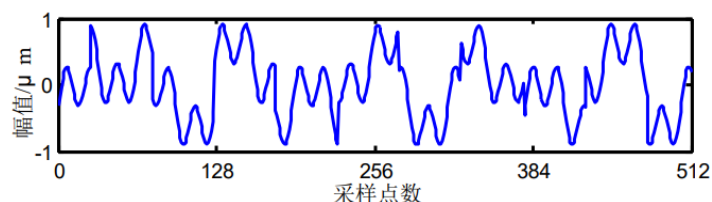


图 3-3 混叠信号

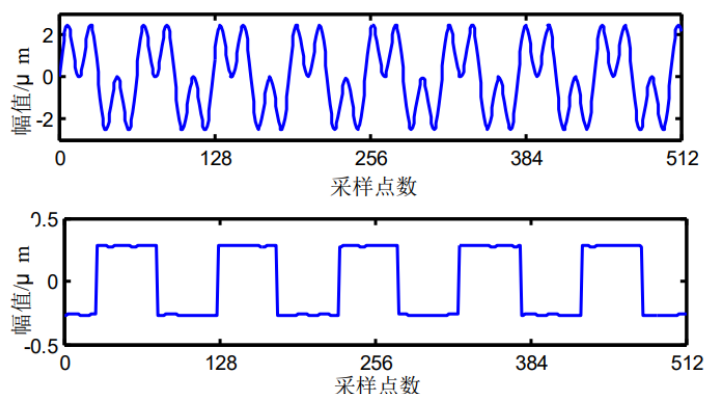


图 3-4 分离信号

性相移以外，还是可以很可观的提取源信号的，而这仅仅是我们没有经过任何数学推导，

通过前人提出的算法总结规律后主观臆断提出的算法，相关运算在盲分离这一领域，可以对简单的信号分离达到极高的容错率和有效性。

第四章 相关与模板匹配滤波

做为一篇课程论文，其实写到这个地方内容已经很充实了，但是最近又学到了模板匹配滤波的相关知识，发现与相关运算这一工具又产生了联系，而且该算法十分经典，于是本人又添加了相关与模板匹配滤波这一章节。

4.1 模板匹配滤波算法原理

模板匹配滤波在信号处理领域的地位极其重要，被用作重要传输工具的雷达，其实接受到的信号信噪比可以达到 $-50(\text{dB})$ 左右，这就说明我们需要收到的信号，已经远远小于噪声信号，如果我们去观测这样的信号图像，只能看到密密麻麻的毫无规律的噪声，从这种混合信号中提取出源信号，或者恢复其信噪比就是模板匹配滤波的目的。

考虑观测信号

$$y(t) = s(t) + n(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (4-1)$$

其中 $y(t)$ 为观测信号， $s(t)$ 为源信号， $n(t)$ 为噪声信号，我们的目的是找到一个系统 $h(t)$ ，使得输出信号 $y_0(t)$ 尽量接近未被噪声污染的源信号，该流程可以用框图 (4-1) 表示。假设该滤波器是一个线性时不变系统，那么有

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)y(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)s(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)n(\tau)d\tau \\ &\stackrel{\text{def}}{=} s_0(t) + n_0(t) \end{aligned} \quad (4-2)$$

其中， $s_0(t)$ 和 $n_0(t)$ 分别为源信号和噪声信号通过系统后形成的信号。

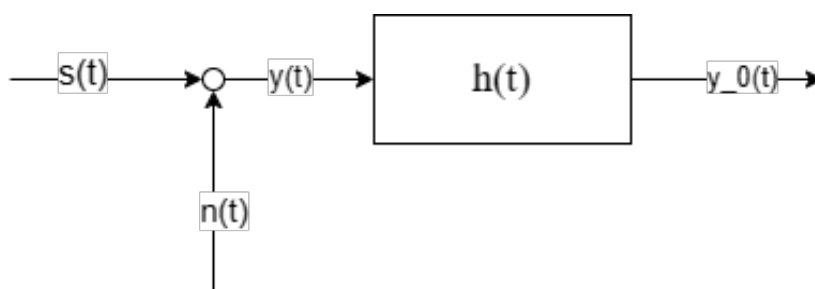


图 4-1 模板匹配滤波框图

我们需要根据恢复信号的信噪比这一描述构建目标函数，首先就需要定义信号的信噪比，对滤波器在 $t = T_0$ 处的信噪比定义为：

$$SNR \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{输出在 } t = T_0 \text{ 时的瞬时信号功率}}{\text{输出噪声的平均功率}} = \frac{s_0^2(T_0)}{E\{n_0^2(t)\}} \quad (4-3)$$

可见，该信噪比是信号的功率比值，这又联系到了我们的相关函数，相关函数就是随机过程中的功率，按照频率展开就是功率谱密度，由于噪声一般均值为 0，所以使用功率定义信噪比并且使用均值函数消除随机性还避免了分母为 0 的问题，假设该噪声为高斯白噪声，则对于模板匹配滤波的 SNR 可以写为

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{s_0^2(T_0)}{E\{n_0^2(t)\}} \\ &= \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)s(t_0 - \tau) d\tau\right)^2}{E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)n_0(t_0 - \tau) d\tau\right)^2\right]} \end{aligned} \quad (4-4)$$

观察其分母，有

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)n_0(t_0 - \tau) d\tau\right)^2\right] \\ &E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)n_0(t_0 - \tau) d\tau\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)n_0(t_0 - s) ds\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)h(s)E[n_0(t_0 - \tau)n_0(t_0 - s)] d\tau ds \end{aligned} \quad (4-5)$$

高斯白噪声是一个宽平稳随机信号，其相关函数为

$$E[n_0(t_0 - \tau)n_0(t_0 - s)] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau - s) \quad (4-6)$$

即仅在时间的差值为 0 时相关函数才有数值，为了使得量纲匹配，一般在之前加上 $\frac{N_0}{2}$ 的功率系数，那么，公式 (4-5) 可以转化为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(\tau)h(s)\frac{N_0}{2}\delta(\tau - s)\right) d\tau ds \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau) d\tau = \frac{N_0}{2} E_h \end{aligned} \quad (4-7)$$

其中， E_h 为系统的功率，我们处理好了分母的部分，现在将分母带入原式进行处理，对系统脉冲函数和源信号进行平均功率提取，有

$$\begin{aligned} &\frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)s(t_0 - \tau) d\tau\right)^2}{\frac{N_0}{2} E_h} \\ &= \frac{2E_s}{N_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\tau)}{\sqrt{E_h}} \frac{s(t_0 - \tau)}{\sqrt{E_s}} d\tau\right)^2 \end{aligned} \quad (4-8)$$

这时注意无穷积分的积分变量，这正是一个相关函数！我们可以将上式写为

$$SNR = \frac{2E_s}{N_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(h(\tau), s(t_0 - \tau)) d\tau \right)^2 \quad (4-9)$$

这时使得 SNR 最大化的滤波器脉冲响应便明了了起来，仅仅需要满足滤波器脉冲响应与源信号线性相关即可，便可以达到最大的信噪比，此时 $h(t) = ks(t_0 - t)$, k 为任意非零数。

非常奇妙，我们想要从被污染的信号中恢复源信号，只需要让滤波器是原来的信号的线性相关信号即可，为了进一步的理解这一操作，我们对脉冲响应进行傅里叶变换，从频域视角解读：

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ks(t_0 - t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} ks(t) e^{+j\omega t} e^{-j\omega t_0} dt \\ &= ke^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{+j\omega t} dt \\ &= ke^{-j\omega t_0} S_c^*(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (4-10)$$

如果我们只关注它的幅度响应，那么系统函数也不过是源信号幅度响应的线性相关，与时域情况完全一致！最经典的算法最后竟然得到了最朴实无华的答案，不过按照答案去想也对，既然滤波器形状与目标信号一致，提取出的信噪比也必然得到恢复，这样也就需要我们有更多的先验知识去设计滤波器。

第五章 总结

我们在论文中主要描述了三个模块，平稳随机信号、盲源分离、模板匹配滤波，无论哪一种信号或者是信号处理方法，都被相关运算这一概念贯穿始终，足以看到相关运算在信号处理中的重要程度。

再一步的，相关运算做为随机过程的二阶特征，自然可以蕴含信号的更多信息，在很多学科中都有非常重要的运用，例如人工智能学科中一个非常重要的模型 Transformer，也是通过捕捉不同变量之间的相关特征进行学习，这也使得 Transformer 对比于传统的 CNN，RNN 这种直接捕捉数据特征的模型更具优势性的原因，变量特征易变，变量之间的相关不易变，二阶量对比一阶量有天然的数据特征提取优势。

说是期中论文，但是直到快期末考试了才完成了这篇文章，这篇论文对我的意义不止是一篇期中的论文，还是对我这个学期所学的随机过程和信号处理知识的一个总结，相关这一概念在概率论和随机过程中反复出现，对于其的意义我也查找了很多资料，虽然说现在还不敢说真正搞懂了这一概念，但是却真真切切了解了相关运算的一些应用场景，对于一篇课程论文来说，本文页数不算少，表达也可能有些啰嗦，感谢老师能阅读至此。