这是标题

First Author1 & Ernst-August Doelle1,2

1 Wilhelm-Wundt-University

2 Konstanz Business School

Author note

author note here.

The authors made the following contributions. First Author: Conceptualization, Writing - Original Draft Preparation, Writing - Review & Editing; Ernst-August Doelle: Writing - Review & Editing, Supervision.

Correspondence concerning this article should be addressed to First Author, Postal address. E-mail: [my@email.com](mailto:my@email.com)

Abstract

这是摘要。

*Keywords:* bayesian; GLMM

这是标题

# 引入

近年来，心理学研究所使用的统计方法日渐丰富。随着新的统计方法的推广与普及，心理学研究者逐渐意识到了一些传统统计方法的局限性。 重复测量方法分析，作为心理学实验中最常用的统计方法之一，也不例外。例如，重复测量方差分析通常只是对各个条件的均值进行分析，而忽略了这些均值的不确定性（uncertainty）。 其次，重复测量方法分析一般只能包含一个随机因素（例如，被试或刺激材料），而无法同时考虑多个随机因素；且它无法处理实验数据的复杂层级结构，比如对实验难度的操作嵌套于被试只内，而被试又嵌套于不同的实验组中。 此外，重复测量方差分析在处理条件均值的缺失时，通常只能删除该被试的所有数据，这会进一步造成数据的流失甚至可能会导致有偏差的估计。

相比之下，线性混合效应模型（Linear Mixed-effects Models, LMM），亦称多水平模型（Multilevel Models）或层级模型（Hierarchical Models），可以更好地处理这些问题。 例如，混合效应模型可以利用试次水平的数据考虑条件均值的不确定性，变量间可能存在的相互依存关系，以及数据中的层级结构，从而能够更好地处理数据缺失，提供更准确的估计和更高的统计检验力 (Tuerlinckx等, 2006)。 随着统计工具（比如 R 语言）的成熟，在心理学研究中使用混合效应模型来拟合数据已经不再困难。 Bono 等 (2021) 最近的系统性综述发现，在心理学领域使用线性混合效应模型的研究已经越来越多。随着混合效应模型的应用场景逐渐丰富，以及模型的复杂程度日渐提升，贝叶斯混合效应模型（Bayesian Linear Mixed-effects Models, BLMM）也因贝叶斯数据分析的独特优势受到了越来越多研究者的关注 (Bürkner, 2017; Sorensen & Vasishth, 2016)。 首先，与频率论（Frequentist）相比，贝叶斯方法可以提供更直观的参数估计。贝叶斯分析的可信区间（credible interval）描述了各个参数值的合理性，即哪个参数值更可能是真值，且该区间的系数（例如95%）表示该区间包含真值的可能性。而这些通常被误认为是频率论置信区间（confidence interval）的属性 (Morey等, 2016)。 其次，与频率论不同，贝叶斯分析可以为虚无假设（null hypothesis）提供直接的证据。例如，贝叶斯因子（Bayes factor）可以直观地描述在备择假设和虚无假设的基础上观测到当前数据可能性（likelihood）的比值(Schmalz等, 2021)（详见顾昕，本期）。 再次，当混合效应模型试图包含复杂的随机效应结构时，基于频率论的模型通常难以收敛（converge），或是对效应之间的相关性给出错误的估计 (Matuschek等, 2017)。相比之下，基于贝叶斯的模型能够更好的处理这些复杂的随机效应结构 (Sorensen & Vasishth, 2016)。 此外，贝叶斯方法为混合效应模型中多重比较问题提供了一个更加自然的解决方案 (Gelman等, 2013)。 最后，贝叶斯分析可以整合研究者的先验知识，从而提供更合理的参数估计。比如，研究者可以根据以往研究的效应量为当前混合效应模型设定先验分布。

鉴于贝叶斯混合效应模型的诸多优势，本文致力于向读者提供一个易于理解和上手的教程。我们首先介绍混合效应模型和贝叶斯统计的相关基本概念与原理。 然后，我们将借助模拟数据讨论如何使用统计编程语言 R的 brms包来进行贝叶斯混合效应模型的数据分析，以及如何报告结果。 最后，我们将总结模型拟合过程中的常见问题，并对其应用进行展望。

## 具体介绍

### 混合效应模型

为了让读者更好的理解固定效应与随机效应的概念，以及如何通过混合效应模型解释实验操作的效应，我们从最基本的一般线性模开始介绍。

一般线性回归模型的表达式如 [公式 1](file:///D:\\outsourceProject\\Bayes\\BayesMultiTutorial-cn\\22222.docx" \l "eq:eq1)。其中， 是因变量，比如被试的脑电指标（详细见模型拟合部分），代表了第 名被试在第 个实验条件下第 个实验刺激的观测数据。 为自变量，代表了研究者感兴趣的实验操作变量，比如图片类型（正性图片和负性图片）。 可以为多个变量，也可以是组间变量或者组内变量，这里为了简化模型，我们只讨论一个组内变量的效应，即各被试在不同图片类型下表现的差异。 参数 是回归截距；参数 为回归斜率，在这个例子中反应不同图片类型对被试脑电的影响。 为残差，代表模型不能解释的部分变异。

需要注意的是，使用一般线性模型需要满足残差服从独立同分布（independent and identically distributed, iid）的前提预设（assumption），即每一个观测值的残差是相互独立的，并且在总体上所有观测值的残差应该遵循正态分布。 然而，对被试内实验设计的数据而言，由于单个被试在不同图片类型上的表现存在相互依赖的关系，独立性预设难以满足。 此外，由于现阶段的模型只考虑了不同图片类型下所有试次的效应，并没有考虑不同个体的差异，比如，一部分被试的脑电波幅大于另一部分被试，这可能会掩盖图片类型效应的大小。

在 [公式 1](file:///D:\\outsourceProject\\Bayes\\BayesMultiTutorial-cn\\22222.docx" \l "eq:eq1) 的基础上加入随机截距可以更好的解释个体差异对于实验效应的影响，其表达式如下 [公式 2](file:///D:\\outsourceProject\\Bayes\\BayesMultiTutorial-cn\\22222.docx" \l "eq:eq2)：

可见，与 [公式 1](file:///D:\\outsourceProject\\Bayes\\BayesMultiTutorial-cn\\22222.docx" \l "eq:eq1) 相比，[公式 2](file:///D:\\outsourceProject\\Bayes\\BayesMultiTutorial-cn\\22222.docx" \l "eq:eq2) 的主要区别体现在截距参数上。其中，随机截距 指模型截距会随着随机效应而变化，在这个例子中随机效应是由不同被试 的个体差异带来的。其值等于所有被试脑电平均波幅的均值 加上 个体偏移量 。此时由于 不受到被试个体差异的的影响，因此“固定不变”，称之为固定效应。

加入随机截距的线性模型可称之为混合效应模型，此时的模型考虑了个体差异的影响，可以为检验固定效应（实验操作中图片类型的效应）提供更准确的估计。 然而，该模型依然无法解释在不同被试间固定效应是否一致。很容易想象，不同被试对于不同图片的表现是不同的，比如，某些被试的脑电波幅在不同图片类型间的差异更明显，而对于某些被试，不同图片类型对脑电波幅没有影响。

为了解释固定效应在被试间的一致性，进一步在混合模型中加入随机斜率，其表达式如下 [公式 3](file:///D:\\outsourceProject\\Bayes\\BayesMultiTutorial-cn\\22222.docx" \l "eq:eq3)：

与 [公式 2](file:///D:\\outsourceProject\\Bayes\\BayesMultiTutorial-cn\\22222.docx" \l "eq:eq2) 相比，主要的区别在于模型的斜率上。随机斜率 反映了模型斜率会随着不同的被试 发生变化。其值等于所有被试间图片类型的平均效应 加上 个体偏移量 。使用 作为随机斜率的个体偏移量是为了避免与随机截距的个体偏移量 混淆。 此外，随机效应之间可能存在相关性，即随机截距 与随机斜率 服从均值为零的多元正态分布。因此，在建立混合模型前需要假设是否存在随机效应间的相关性，一般混合模型建立时会默认存在随机效应间的相关性。

总的来说，混合效应模型是一般线性模型的扩展形式，其特点在于允许模型截距与斜率随着某一变量（通常为被试或者实验材料）变化，以此解释个体差异或实验材料差异对于实验效应的影响。使用混合效应模型可以解决数据间依赖与嵌套的问题，很好的弥补了重复测量方差分析的不足，提高对于实验效应估计的准确性。

### 贝叶斯混合效应模型

在确定混合效应模型时，通常需要考虑包含最复杂的随机效应结构 (Barr等, 2013)，即考虑所有潜在的随机截距与随机斜率以及他们之间的相关。然而，此类模型在频率论框架下通常难以收敛，从而给出不可靠的估计 (Bates等, 2015)。 相比之下，这种包含复杂随机效应结构的模型通常可以在贝叶斯框架中拟合 (Eager & Roy, 2017; Sorensen & Vasishth, 2016)。再加上前文所述诸如估计结果更直观和整合先验知识等其他优势，使用贝叶斯方法来拟合混合效应模型受到了越来越多研究者的关注。

基于贝叶斯框架的模型拟合的特点在于，不同于频率主义框架中将模型参数与实验效应视作固定真值，即当抽样次数接近无穷大时两个样本之间的差距等同于两个总体真实存在的差异，贝叶斯框架将模型参数与实验效应视作存在不确定性的概率事件，即两个总体间的差异不是固定值，而是存在不确信噪音的概率分布。 用贝叶斯公式表示如下 [公式 4](file:///D:\outsourceProject\Bayes\BayesMultiTutorial-cn\22222.docx#eq:eq4)：

公式右部 为后验概率分布，代表在得到实验数据 的条件下，实验效应为 的概率。 后验分布可以通过公式左边部分计算，其中为先验概率，代表了在未获得实验数据时对实验效应的假设，即可以通过以前的研究实验效应设定该实验的先验效应；为似然，代表了在实验效应已知的条件下实验数据出现的概率，可以理解为在混合效应模型已知的条件下，通过该模型预测或生成不同模拟数据的概率；为边际似然，代表了数据随机抽出的概率，不同于似然是在两个已知差异的总体中进行采样，边际似然则是在所有总体的组合中进行样本的采样，因此可以表示为在所有不同实验效应下似然的和，即，当为连续变量时，，更多详情请参考 (Kruschke & Liddell, 2018)。 贝叶斯公式的意义在于说明，参数（实验效应），数据和模型的关系，即如何在结合先验知识和数据的情况下推测模型的参数值。然而，将精力过多的投入到贝叶斯方法本身并不会增强我们对建立模型的理解，真正重要的关键在于如何结合贝叶斯方法去拟合线性模型。 为了便于理解，首先，我们假设实验数据来自于一个正态分布，，其中 为 个观测数据点， 为正态分布， 为数据分布的均值， 为变异。在贝叶斯框架下，该数据分布等同于 似然（参数 包含均值 和变异 ），因此，只需额外得到先验与边际似然就可以推测出后验分布。其中，实验数据 已知，模型参数 未知，贝叶斯推断的目的就在于推测模型参数值，即实验效应大小。当假设先验参数值 已知时（可以根据以往研究结果进行设定），此时似然也是已知的 。由于边际似然 只是一个标量，且只会对后验分布进行缩放，因此忽略边际似然的计算，可以根据贝叶斯公式推断得到参数后验分布 。需要注意的，参数后验分布 不同于先验参数分布 ，后者在前者的基础上额外考虑了数据似然的作用。换句话说，不同于频率学派框架直接通过数据得到模型参数，贝叶斯框架通过实验数据更新先验参数的值得到模型的后验参数。此时，贝叶斯框架可以看作是频率学派的一种拓展与延申。 通过贝叶斯模型拟合线性回归模型的方式与上述过程类似。 首先，将回归模型 转写为 ，此时模型参数 包括 、 和 三个部分。 代表了实验条件，比如任务难度，其中简单任务 ，困难任务 。可见，当任务为简单时，实验数据采样与均值为 ，变异为 的正态分布，当任务为困难时，数据采样与均值为 ，变异为 的正态分布。 因此，在已知两个实验条件下的实验数据，以及设定先验参数分布后，可以通过贝叶斯公式得到参数的后验分布。 根据同样的原理，将混合模型的公式带入贝叶斯框架中可以得到如下概率分布表达 [公式 5](file:///D:\outsourceProject\Bayes\BayesMultiTutorial-cn\22222.docx#eq:eq5)：

此时的模型参数包括 、、、 和 五个个部分（如果考虑随机效应间的相关性还需设定其他参数，这里尽量简化模型方便理解）。

由于模型参数增加，贝叶斯在计算时会遇到困难，因此会采用mcmc采样，即brms中使用的算法。这种算法通过从后验分本中采集样本来模拟真实的后验分布。

# References